FORMULAIRE MATHÉMATIQUE

OU

RECUEIL DE FORMULES

DONNANT LA SOLUTION

DE TOUTES LES QUESTIONS USUELLES

SUR

LES NOMBRES, LES SURFACES ET LES VOLUMES

AVEC DEUX APPENDICES:

1° Formules de physique et de mécanique
2° Usage des tables de logarithmes

ET

284 exercices

OUVRAGE DESTINÉ A TOUS LES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION
ET A TOUTES LES PERSONNES QUI CONNAISSENT LES QUATRE RÈGLES
DE L'ARITHMÉTIQUE

PAR

L. POURRET

RIS

DE CH. FOURAUT ET FILS

NDRÉ-DES-ARTS, 47

FORMULAIRE MATHÉMATIQUE

OUVRAGES QUI SE TROUVENT A LA LIBRAIRIE

652 652

CH. FOURAUT ET FILS

RUE SAINT-ANDRÉ-DES-ARTS, 47, A PARIS.

Lectures familières sur le travail industriel, divisées en trois parties : 1° la force ou la physique industrielle (définition et nature de la force); 2° la matière ou l'histoire naturelle industrielle (les minéraux, les végétaux, les animaux); 3° le travail ou l'industrie (les industries minérales, les industries végétales, les industries animales); ouvrage renfermant 55 figures; à l'usage des écoles primaires, des pensions, des collèges, etc.; par L. Pourret. 1 vol. in-12, cart. .... 1 fr. 50

Nouveau dictionnaire français, contenant : 1° tous les mots de la langue orthographiés *d'après la 7e et dernière édition* (1878) *du Dictionnaire de l'Académie française*, définis et expliqués à l'aide de **2300 figures;** 2° la prononciation figurée de tous les mots qui offrent quelque difficulté; 3° l'indication de tous les grands faits historiques; 4° celle des personnages célèbres de tous les pays et de tous les temps; 5° la géographie ancienne et moderne; 6° la mythologie gréco-latine; par L. Pourret. 1 vol. de 900 pages, in-18 jésus, cart.... 3 fr. »

— relié en demi-chagrin .... 4 fr. 50

Solutions des exercices renfermés dans le Formulaire mathématique, par L. Pourret (*sous presse*).

OUVRAGES FORMANT UN COURS COMPLET

D'ENSEIGNEMENT DE L'ARITHMÉTIQUE

A L'USAGE DES CLASSES PRIMAIRES

PAR

I. LUQUET

Professeur de mathématiques

Exercices gradués de calcul. Enseignement pratique de la numération et des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique. 1 vol. in-18, cart .... 0 fr. 60

— **Solutions.** 1 vol. in-18, cart. .... 0 fr. 80

Abrégé d'arithmétique, renfermant de nombreux exercices et problèmes et des figures dans le texte; nouvelle édition, revue et corrigée. 1 vol. in-18, cart .... 0 fr. 80

— **Solutions développées des exercices et des problèmes.** 1 vol. in-18, cart. .... 0 fr. 80

Recueil de problèmes sur les quatre opérations fondamentales de l'arithmétique et sur le système métrique; 2e édition, revue et corrigée. 1 vol. in-18, cart .... 0 fr. 60

— **Solutions développées.** 1 vol. in-18, cart. .... 0 fr. 80

Nouveau traité élémentaire d'arithmétique à l'usage des classes primaires et des cours d'adultes; ouvrage renfermant plus de 5000 exercices et problèmes appliqués à l'agriculture, au commerce, à l'industrie, etc. 6e édition, revue et corrigée. 1 vol. in-12, cart. .... 1 fr. 50

— **Solutions développées des problèmes et des exercices.** 1 vol. in-12, cart. .... 1 fr. 75

PARIS. — IMPRIMERIE CHARLES BLOT, RUE BLEUE, 7.

FORMULAIRE MATHÉMATIQUE

OU

RECUEIL DE FORMULES

DONNANT LA SOLUTION

DE TOUTES LES QUESTIONS USUELLES

SUR

LES NOMBRES, LES SURFACES ET LES VOLUMES

AVEC DEUX APPENDICES :

1° Formules de physique et de mécanique
2° Usage des tables de logarithmes

et

284 exercices

OUVRAGE DESTINÉ A TOUS LES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION
ET A TOUTES LES PERSONNES QUI CONNAISSENT LES QUATRE RÈGLES
DE L'ARITHMÉTIQUE

PAR

L. POURRET

PARIS [1886]

LIBRAIRIE CLASSIQUE DE CH. FOURAUT ET FILS

47, RUE SAINT-ANDRÉ-DES-ARTS, 47

ON TROUVE A LA MÊME LIBRAIRIE

Nouvelle méthode rationnelle de calcul oral, sur un plan entièrement neuf ; ouvrage renfermant 2600 exercices simples, faciles et variés, destinés à conduire les élèves aux questions les plus compliquées de l'arithmétique et du système métrique ; à l'usage de toutes les classes ; par M. J.-B. Heinrich, ancien inspecteur de l'instruction primaire.

— *Partie de l'élève ;* 4e édition, revue et corrigée. 1 vol. grand in-18, cart.. 0 fr. 90

— *Partie du maître*, précédée d'une nouvelle méthode pour l'enseignement de la numération et suivie de 650 problèmes variés et résolus sur toutes les parties de l'arithmétique. 1 vol. grand in-18, cart.. 1 fr. 30

Recueil de problèmes numériques, renfermant, dans 2134 exercices et problèmes distincts, plus de 3000 questions graduées sur toutes les parties de l'arithmétique ; ouvrage destiné aux élèves de toutes les écoles et rédigé pour servir d'application à tous les traités d'arithmétique ; par J. George.

— **Exercices et problèmes**, *partie de l'élève ;* nouvelle édition. 1 vol. in-12, cart.. 1 fr. 80

— **Réponses et solutions**, *partie du maître ;* nouvelle édition, revue et corrigée. 1 vol. in-12, cart.............................. 1 fr. 60

Presque tous les problèmes de ce recueil rappellent un enseignement quelconque, une notion historique ou géographique, une découverte, une date importante ou une des questions qui se présentent le plus souvent dans la vie usuelle.

Recueil de 1400 problèmes, à l'usage des classes primaires, et plus particulièrement des classes de demoiselles ; ouvrage renfermant des notions d'une utilité générale et d'une application journalière, ainsi que des renseignements usuels sur l'éducation, l'industrie, le commerce, l'économie domestique et l'économie rurale ; par M. J.-B. Heinrich, ancien inspecteur de l'instruction primaire. 1 vol. in-12, cart.............................. 1 fr. 30

— **Solutions développées.** 1 vol. in-12, cart........ 1 fr. 75

PRÉFACE

Malgré le temps considérable que l'on consacre dans les écoles à l'étude des mathématiques, ceux qui veulent se rendre compte des résultats de cet enseignement constatent avec surprise, dans la masse du public, une ignorance profonde, nous ne disons pas des hautes théories mathématiques, mais des applications les plus usuelles.

Et cependant le progrès des sciences appliquées a fait disparaître l'ancien préjugé qui accusait les mathématiques de stériliser l'imagination et de dessécher le cœur; mais cette branche de l'enseignement est restée vouée à l'ancienne routine. Nous en sommes encore, sur ce point, à la méthode d'Euclide : série de démonstrations théoriques s'enchaînant d'une façon admirable, mais soigneusement isolées de toute application. De ce système d'enseignement résultent trois graves inconvénients :

1° Ennui mortel pour l'élève, que l'on conduit, à travers des sentiers terriblement enchevêtrés, vers un but qu'il ne connaîtra jamais ;

2° Prompt oubli des vérités abstraites si laborieusement échafaudées ;

3° Limites exiguës assignées aux programmes, le temps consacré à l'étude des mathématiques étant hors de proportion avec celui qu'exigerait cette rigoureuse méthode, si l'on tentait de l'appliquer à l'universalité des connaissances indispensables.

Est-il tolérable que la presque totalité de la population soit ainsi condamnée à ignorer tout ce qu'on n'a pas eu le temps de lui démontrer avec une savante rigueur ?

A ces jeunes gens capables d'expliquer tous les livres grecs, y compris les odes de Pindare, on n'a pu apprendre le moyen de cuber une pyramide ou de calculer la surface d'une sphère.

Pour profiter des si utiles, si nécessaires travaux des mathématiciens, on exige que nous soyons capables de les refaire.

Pourquoi ?

Se bâtit une maison qui sait ou qui peut ; mais chacun habite une maison bâtie par lui-même ou par les autres.

Les formules sont les maisons que d'habiles gens ont pris la peine de nous construire ; n'hésitons pas à nous y installer, sous le sot prétexte que la maison n'est pas à nous, n'ayant pas été élevée par nos mains.

En résumé et sans figure, le petit livre que nous offrons aujourd'hui au public contient le moyen de résoudre toutes les questions usuelles qui exigent l'emploi des mathématiques.

Nous l'offrons donc avec confiance aux élèves des écoles primaires et secondaires, comme complément des études qu'ils ont faites ; aux adultes, comme supplément de ce qu'ils n'ont pas appris et de ce qu'ils ont oublié.

FORMULAIRE MATHÉMATIQUE

INTRODUCTION

I

ÉLÉVATION AUX PUISSANCES ET EXTRACTION DES RACINES

Bien que nous eussions pu supposer aux personnes qui voudront se servir de ce livre la connaissance de l'élévation aux puissances et de l'extraction des racines carrées et cubiques, nous avons cru devoir, pour en rendre l'usage plus général, enseigner ici brièvement la pratique de ces deux opérations.

§ 1er. — ÉLÉVATION AUX PUISSANCE

Pour élever un nombre à une puissance d'un degré donné, on le multiplie par lui-même, en le prenant autant de fois pour facteur qu'il y a d'unités à l'exposant de la puissance (1).

Ainsi 8^7 ou 8 à la septième puissance égale

$$8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8.$$

Toutefois, quand la puissance est un peu élevée, on abrège considérablement l'opération en considérant que l'exposant du produit de deux ou plusieurs puissances d'une même quantité est égal à la somme des exposants des facteurs. Ainsi :

$$8^4 \times 8^2 \times 8^1 = 8^7 = 8^2 \times 8^2 \times 8^2 \times 8.$$

Donc, pour obtenir la septième puissance de 8, on fera d'abord son carré ou deuxième puissance, on multipliera cette dernière puissance par elle-même, pour avoir la quatrième

(1) Le degré de la première puissance ne s'écrit pas : 8^1 est égal à 8.

puissance, puis celle-ci par le carré, pour avoir la sixième, et cette dernière par la racine ou première puissance.

Voici la suite des opérations :

$$\begin{array}{llr}
8 \times 8 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 64 = 8^2 \\
8^2 \times 8^2 = & 64 \times 64 = & 4096 = 8^4 \\
8^4 \times 8^2 = & 4096 \times 64 = & 262144 = 8^6 \\
8^6 \times 8^1 = & 262144 \times \;\; 8 = & 2097152 = 8^7
\end{array}$$

EXERCICES.

1. Calculer la neuvième puissance de 3.

2 Élever 0,01 à la douzième puissance.

3. Élever $\frac{2}{7}$ à la sixième puissance. (On élèvera à la sixième puissance les deux termes de la fraction.)

§ II. — EXTRACTION DES RACINES

1° *Racine carrée ou deuxième.*

1er *cas.* — Soit à extraire la racine carrée de 104976. Je divise le nombre en tranches de deux chiffres, en commençant par la droite :

$$10'4\,9'76.$$

Je prends la racine carrée de 10 approchée par défaut ; je la trouve égale à 3 et je l'écris à la racine :

$$\begin{array}{r|l} 10'4\,9'76 & 3 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Je fais le carré de 3 ; je retranche ce carré, 9, de 10, et j'abaisse à côté du reste 1 la tranche suivante 49 :

$$\begin{array}{r|l} 10'4\,9'76 & 3 \\ \cline{2-2} 1\,4'9 & \end{array}$$

Je sépare sur la droite le dernier chiffre 9, je divise 14 par le double, 6, de la racine, j'écris le quotient 2 à la suite du double de la racine et je multiplie le tout par 2 :

$$62 \times 2 = 124.$$

Je retranche 124 de 149 :

$$\begin{array}{r|l} 10'4\,9'76 & 32 \\ \cline{2-2} 1\,4\,9 & \\ 2\,5 & \end{array}$$

A côté du reste 25, j'abaisse la dernière tranche 76, et je sépare le dernier chiffre 6 :

```
10'4 9'76 | 32
 1 4 9    |————
   2 5 7'6|
```

Je divise 257 par 64, double de la racine ; j'écris le quotient 4 à la suite du double de la racine et je multiplie le tout par 4 :

$$644 \times 4 = 2576.$$

J'écris 4 à la racine, qui est 324, et l'opération se résume comme il suit :

```
10'4 9'76 | 324
 1 4 9    |————
   2 576  |
   0 000  |
```

Si l'un des produits obtenus était plus grand que le reste, il faudrait diminuer d'une unité le dernier chiffre obtenu à la racine.

EXERCICES.

4. Extraire la racine carrée de 100, de 10000, de 1000000, de 100000000.

5. Extraire la racine carrée de 497025, de 1522756 et de 106929.

2ᵉ *cas.* — Soit à extraire la racine carrée de 5,6169.

Si le nombre des décimales était impair, j'ajouterais un zéro sur la droite du carré. Négligeant d'abord la virgule, j'extrais, comme dans le cas précédent, la racine carrée de 56169, que je trouve égale à 237. Sur la droite de cette racine je sépare autant de décimales qu'il y avait de tranches de deux décimales au carré, c'est-à-dire deux, et je trouve la racine définitivement égale à 2,37.

EXERCICES.

6. Extraire la racine carrée de 0,01 ; de 0,0001 ; de 0,000001.

7. Extraire la racine carrée de 0,1024 ; de 0,00090601.

Remarque. — Comme on peut, sans changer la valeur d'une fraction décimale, ajouter autant de zéros qu'on voudra à sa droite, au lieu d'extraire la racine carrée d'un nombre tel que 3,40, qui donnerait une décimale avec un reste, on pourrait extraire celle de 3,4000, qui aurait deux décimales, ou celle de 3,400000, qui en aurait trois, etc., c'est-à dire qu'on pourrait approcher autant qu'on voudrait de la vraie racine, qu'on ne peut, du reste, obtenir exactement. Dans la pratique, on n'ajoute pas les zéros au carré, mais on les suppose par la pensée. Ainsi, après avoir extrait la racine approchée de 3,40, qui est 1,8, on ajoute deux zéros à la suite du reste 16 :

$$\begin{array}{r|l} 3{,}4\,0 & \underline{1{,}8} \\ 2\;4'0 & \\ 1\;600 & \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

et l'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait à la racine e nombre de décimales que l'on se proposait d'obtenir.

EXERCICES.

8. Extraire à un millième près (avec trois décimales) la racine carrée de 0,3.

9. Extraire à un centième près la racine carrée de 0,751.

10. Extraire à un dixième près la racine carrée de 0,1.

3e *cas.* — Soit à calculer avec trois décimales, c'est-à-dire à un millième près, la racine carrée de 7.

Comme je pourrais, sans changer la valeur de la racine, ajouter un nombre quelconque de zéros à la suite de 7, en les séparant par une virgule, je puis, après avoir obtenu la racine entière approchée de 7, mettre une virgule à la droite de la racine et abaisser à côté des restes successifs des tranches de deux zéros, jusqu'à ce que j'aie trois décimales à la racine. L'opération, qui revient à extraire la racine carrée de 7000000 et à diviser par 1000 la racine obtenue, se résume comme il suit :

$$\begin{array}{r|l} 7 & \underline{2{,}645} \\ 30'0 & \\ 2\;40'0 & \\ 30\;40'0 & \\ 3\;97\;5 & \end{array}$$

EXERCICES.

11. Extraire à un dix-millième près la racine carrée de 2.

12. Extraire à un centième près la racine carrée de 24.

13. Extraire à un millième près la racine carrée de 2,2.

14. Extraire à un centième près la racine carrée de 7,321.

4e *cas.* — Extraire la racine carrée approchée de $\frac{4}{9}$.

Il suffit d'extraire les racines carrées des deux termes de la fraction :

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

Si le dénominateur n'était pas un carré, on multiplierait les deux termes par ce dénominateur, et l'on se contenterait d'indiquer la racine du numérateur :

$$\sqrt{\frac{9}{11}}=\sqrt{\frac{9\times 11}{11\times 11}}=\frac{\sqrt{9\times 11}}{\sqrt{11\times 11}}=\frac{\sqrt{99}}{11}$$

Si l'on voulait exprimer la racine en fraction décimale, on commencerait par diviser le numérateur du carré par son dénominateur, en calculant un nombre de décimales double de celui qu'on voudrait avoir à la racine.

Soit à extraire, à un centième près, la racine carrée de $\frac{2}{7}$; je divise 2 par 7 avec quatre décimales :

$$2 : 7 = 0{,}2857,$$

et j'extrais la racine carrée de 0,2857, qui est 0,53.

EXERCICES.

15. Extraire la racine carrée exacte ou approchée de $\frac{4}{25}$, de $\frac{16}{49}$, de $\frac{5}{16}$, de $\frac{3}{25}$, de $\frac{2}{3}$, de $\frac{4}{13}$.

16. Extraire, à un millième près, les racines carrées de $\frac{1}{2}$, de $\frac{5}{9}$, de $\frac{3}{11}$.

2° *Racine cubique ou troisième.*

1er *cas.* — Soit à extraire la racine cubique de 80621568. Je divise ce nombre en tranches de trois chiffres, en commençant par la droite :

80′621′568.

Je prends la racine cubique de 80 approchée par défaut, racine égale à 4; je l'écris à la racine :

$$\begin{array}{r|l} 80'621'568 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Je fais le cube de 4, je retranche ce cube, 64, de 80, et j'abaisse à côté du reste 16 la tranche suivante, 621 :

$$\begin{array}{r|l} 80'6\,21'568 & 4 \\ 16\,6'21 & \end{array}$$

Je sépare sur la droite les deux derniers chiffres, 21, et je divise 166 par trois fois le carré de 4 ou 48. Pour vérifier le quotient 3, je prends trois fois le carré de 40 multiplié par 3 :

$$40^2 \times 3 \times 3 = 14400;$$

trois fois 40 multiplié par le carré de 3 :

$$40 \times 3 \times 3^2 = 1080;$$

le cube de 3 :

$$3^3 = 27;$$

j'additionne ces trois produits :

$$\begin{array}{r} 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 15507 \end{array}$$

Cette somme n'étant pas plus grande que 16 621, j'en conclus que 3 n'est pas trop fort, et je l'écris à la racine.

Je retranche 15507 de 16621 (si la soustraction ne pouvait se faire, on prendrait 2 au lieu de 3, et l'on referait les trois produits); à côté du reste, 1114, j'abaisse la tranche 568, et je sépare les deux derniers chiffres, 68 :

$$\begin{array}{r|l} 80\ 621\ 568 & 43 \\ 16\ 621 & \\ 1\ 114\ 5'68 & \end{array}$$

Je divise 11145 par trois fois le carré de 43 ou 5547 :

$$11145 : 5547 = 2.$$

Pour essayer 2, je prends trois fois le carré de 430 multiplié par 2 :

$$430^2 \times 3 \times 2 = 1109400;$$

trois fois 430 multiplié par le carré de 2 :

$$430 \times 3 \times 2^2 = 5160;$$

le cube de 2 :

$$2^3 = 8;$$

j'additionne ces trois produits :

$$\begin{array}{r} 1109400 \\ 5160 \\ 8 \\ \hline 1114568; \end{array}$$

je retranche leur somme de 1114568; le reste, qui est zéro, prouve que le nombre proposé est un cube parfait.

EXERCICE.

17. Extraire la racine cubique de 373248, de 10941048, de 343 000 000.

2e *cas*. — Soit à extraire la racine cubique de 3,048625. Si le nombre des décimales n'était pas multiple de 3, j'ajouterais un ou deux zéros sur la droite du cube. Négligeant d'abord la virgule, j'extrais, comme dans le cas précédent, la racine cubique de 3048625, que je trouve égale à 145. Sur la droite de cette racine, je sépare autant de décimales qu'il y avait au cube de tranches de trois décimales, c'est-à-dire deux, et la racine est définitivement égale à 1,45.

EXERCICE.

18. Extraire la racine cubique de 347,428927; de 0,000551368.

Remarque. — On peut, avec des décimales, approcher autant qu'on voudra la racine cubique d'un nombre qui n'a pas de racine exacte. Il suffit, pour cela, d'ajouter, à côté des restes successifs, autant de tranches de trois zéros qu'il sera nécessaire. Soit, par exemple, à extraire, à un centième près, la racine cubique de 2,7 : après avoir, comme ci-dessus, extrait la racine cubique de 2,700, qui est 1,3, on ajoute au reste 503 une tranche de trois zéros, et l'on obtient ainsi la racine demandée 1,39. Voici la disposition de l'opération :

2,700	1,39
1 700	
503000	
14381	

Les mêmes observations s'appliquent à l'extraction des racines cubiques des entiers. Ainsi, pour extraire à un millième près la racine cubique de 7, on extraira la racine cubique de 7,000000000.

EXERCICE.

19. Extraire à un centième près les racines cubiques de 0,25 ; de 1,1 ; de 26.

4e *cas*. — Extraire la racine cubique de $\frac{8}{27}$.

On extraira les racines cubiques des deux termes :

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}.$$

EXERCICE.

20. Extraire la racine cubique de $\frac{64}{125}$, de $\frac{1000}{1331}$.

Si le dénominateur n'était pas un cube, on multiplierait les deux termes par le carré de ce dénominateur et l'on se contenterait d'indiquer la racine cubique du numérateur :

$$\sqrt[3]{\frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{8 \times 9^2}{9 \times 9^2}} = \frac{\sqrt{8 \times 81}}{\sqrt{9^3}} = \frac{\sqrt{648}}{9}.$$

EXERCICE.

21. Extraire la racine cubique de $\frac{2}{3}$, de $\frac{1}{9}$, de $\frac{5}{6}$.

3° *Racines d'un degré quelconque.*

On pourrait, pour l'extraction des racines d'un degré quelconque, établir des règles analogues à celles qu'on suit pour les extractions de racines carrées et de racines cubiques ; mais cette marche est si compliquée, quand il s'agit de racines d'un degré élevé, qu'elle est presque impossible dans la pratique. On préfère, pour l'extraction des racines supérieures à la troisième, avoir recours aux tables de logarithmes. (V. L'APPENDICE.)

Toutefois, lorsque le degré de la racine à extraire est un multiple de 2 ou de 3, on peut simplifier l'expression par des extractions successives de racines carrées et de racines cubiques.

Ainsi, si l'on avait à extraire la racine 42ᵉ de 64, on considérerait que

$$\sqrt[42]{64} = \sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}}.$$

Extrayant d'abord la racine carrée de 64, on aurait

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{8}};$$

puis, extrayant la racine cubique de 8, il viendrait

$$\sqrt[7]{2}.$$

Si même l'indice de la racine ne contenait d'autre facteur que 2 et 3, on arriverait, par ce procédé, à l'extraction complète de la racine. Ainsi :

$$\sqrt[18]{262144} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{262144}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

EXERCICES.

22. Extraire la racine seizième de 43046721.
23. Extraire la racine dixième de 64.

Lorsqu'une quantité placée sous un radical est un produit, on peut toujours mettre un ou plusieurs facteurs hors du radical, après en avoir extrait la racine. Ainsi :

$$\sqrt[2]{9 \times 7} = \sqrt[2]{9} \times \sqrt[2]{7} = 3 \times \sqrt[2]{7}.$$

$$\sqrt[3]{3 \times 8} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{8} = 2 \times \sqrt[3]{3}.$$

EXERCICES.

24. Extraire la racine carrée de 16×25; de $\times 3 \times 4 \times 2$; de $7 \times 4 \times 9$.
25. Extraire la racine cubique $27 \times 8 \times 125$; de 64×3; de $5 \times 8 \times 6$.

II

INTERPRÉTATION ET EMPLOI DES FORMULES

On donne le nom de *formules* à des expressions qui donnent, d'une façon générale, en quantités connues, la valeur d'une quantité inconnue et sont applicables à tous les cas semblables.

Pour faire usage des formules dans la solution des problèmes numériques, il suffit de remplacer dans la formule les quantités qui y sont exprimées à l'aide de lettres par les nombres qu'elles représentent dans les problèmes, et d'effectuer sur ces nombres les calculs indiqués.

Ainsi, dans la formule

$$S = \frac{(B + b) \times h}{2},$$

qui exprime la surface du trapèze, S représente la surface de la figure, B l'une de ses bases, b son autre base, h sa hauteur. Si donc on veut calculer l'aire d'un trapèze dont les bases ont 5 et 4 mètres et la hauteur 6 mètres, on remplacera B par 5, b par 4, h par 6, S par x (quantité inconnue), et l'on aura :

$$x = \frac{(5+4)\times 6}{2}.$$

Les opérations sont les suivantes :

$$5 + 4 = 9;$$
$$9 \times 6 = 54;$$
$$54 : 2 = 27.$$

La surface demandée est donc égale à 27 mètres carrés.

Dans les formules, on supprime souvent le signe $\times$, et la juxtaposition indique la multiplication. Ainsi, la formule précédente peut s'écrire :

$$\frac{(B+b)h}{2}.$$

Cette autre formule :

$$V = \pi h \left(\frac{2R + r}{3}\right)^2$$

équivaut à

$$V = \pi \times h \times \left(\frac{2 \times R + r}{3}\right)^2.$$

PREMIÈRE PARTIE

FORMULES ARITHMÉTIQUES

RÈGLES DE TROIS

Dans toute question qui se résout par une règle de trois, on peut considérer deux effets, l'un connu et l'autre inconnu dépendants chacun d'une ou de plusieurs causes, toutes connues et directement ou inversement proportionnelles à leur effet. Ces questions sont résolues par la formule suivante :

$$(1) \qquad e' = \frac{ed'i}{di'},$$

dans laquelle e' représente l'effet inconnu;
— d' ses causes directes;
— i' ses causes inverses;
— e l'effet connu;
— d ses causes directes;
— i ses causes inverses.

Exemple : 16 *ouvriers, travaillant* 9 *heures par jour, ont creusé en* 7 *jours un fossé de* 12 *mètres de long,* 5 *mètres de large et* 3 *mètres de profondeur; combien* 14 *ouvriers devraient-ils travailler d'heures par jour pour faire en* 8 *jours un fossé de* 10 *mètres de long,* 4 *mètres de large et* 2 *mètres de profondeur?*

Les effets étant ici les heures employées ou à employer, on voit aisément que le nombre des ouvriers et celui des jours sont des causes inverses ; car plus les ouvriers seront nombreux et plus ils feront de journées, moins ils devront travailler d'heures par jour pour faire un même ouvrage. On voit de même que les dimensions du fossé sont des causes directes; car plus le fossé sera long, large et profond, plus les ouvriers devront travailler chaque jour. On préparera donc la solution comme il suit :

i	e	i	d	d	d
16 ouvriers	9 heures	7 jours	12 mètres	5 mètres	3 mètres.
14	x	8	10	4	2
i'	e'	i'	d'	d'	d'

Appliquant la formule, on trouve :

$$x = \frac{9 \times 16 \times 7 \times 10 \times 4 \times 2}{14 \times 8 \times 12 \times 5 \times 3} = 4$$

1re REMARQUE. — On simplifiera les opérations en divisant successivement le numérateur et le dénominateur par les facteurs qui leur sont communs. Ainsi, dans l'exemple précédent, après avoir divisé successivement 9 et 3 par 3, 16 et 14 par 2, etc., le numérateur se trouvera réduit à 4 et le dénominateur à 1.

2e REMARQUE. — Si l'on avait des fractions, comme dans le cas suivant : *Une machine à vapeur d'une force de* $\frac{7}{9}$ *de cheval a, en* $\frac{3}{4}$ *d'heure, élevé un fardeau aux* $\frac{3}{5}$ *de la hauteur qu'il doit atteindre; quelle serait la force d'une machine qui, en* $\frac{7}{4}$ *d'heure, aurait élevé le même fardeau aux* $\frac{9}{10}$ *de la même hauteur?* la solution préparée serait :

e	i	d
$\frac{7}{9}$ cheval	$\frac{3}{4}$ heure	$\frac{3}{5}$ hauteur
x	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{10}$.
e'	i'	d'

D'où, appliquant la formule :

$$x = \frac{\frac{7}{9} \times \frac{3}{4} \times \frac{9}{10}}{\frac{7}{4} \times \frac{3}{5}}.$$

Mais il serait commode, en ce cas, d'effectuer immédiatement les multiplications et les divisions de fractions et d'écrire :

$$x=\left(\frac{7}{9}\times\frac{3}{4}\times\frac{9}{10}\right):\left(\frac{7}{4}\times\frac{3}{5}\right),$$

ou, en appliquant la règle de la division des fractions :

$$x=\frac{7}{9}\times\frac{3}{4}\times\frac{9}{10}\times\frac{4}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{7\times3\times9\times4\times5}{9\times4\times10\times7\times3}=\frac{1}{2}\text{ cheval.}$$

Les remarques ci-dessus sont faites une fois pour toutes.

EXERCICES.

26. En distillant 2 hectolitres d'eau, on y a trouvé 220 grammes de sels calcaires; combien une personne qui boit 10 litres de cette eau par semaine absorbe-t-elle de sels calcaires dans cet espace de temps?

27. Pour cuire $6^{KG},225$ de viande, on emploie 132 grammes de sel; combien faudrait-il employer de sel pour cuire $2^{KG},075$ de viande?

28. On dépense 13 centimes de fil, coûtant $\frac{3}{5}$ de centime le mètre, pour brocher un volume de 26 feuilles; d'autre part, le fil employé au brochage d'un volume de 48 feuilles coûte 12 centimes; on demande le prix du mètre de ce dernier.

29. Un projectile pesant $4^{KG},5$, lancé par une charge de 250 grammes de poudre, a une vitesse initiale de 500 mètres par seconde; quel poids faudrait-il donner à la charge, si le projectile pesait 5 kilogrammes et qu'on voulût lui donner une vitesse initiale de 450 mètres?

30. Une scie circulaire, animée d'une vitesse de $\frac{9}{10}$ de tour par $\frac{2}{3}$ de seconde, débite les $\frac{3}{4}$ d'une planche en 4 minutes; une autre scie débite en 6 minutes une planche de même grandeur; en combien de secondes celle-ci exécute-t-elle 2 tours?

RÈGLES D'INTÉRÊT SIMPLE

Si l'on pose la question suivante : *Quel est l'intérêt produit par un capital de* 240 *francs placé à* 6 *pour* 100 *pendant* 3 *ans?* on trouve dans le problème cinq nombres que nous désignerons comme il suit :

- I l'intérêt inconnu;
- A le capital (240);
- u l'unité de capital (100);
- i le taux ou intérêt de l'unité de capital (6);
- t le temps (3).

La réponse à la question proposée est donnée par la formule suivante :

$$(2) \qquad I = \frac{Ait}{u},$$

qui, appliquée à la question ci-dessus, donne

$$x = \frac{240 \times 6 \times 3}{100} = 43^{\text{f}},20.$$

1^re REMARQUE. — L'unité de capital (u) est ordinairement égale à 100; elle varie cependant, dans quelques cas particuliers, notamment dans les questions sur la rente. (V. plus bas.)

2e REMARQUE. — Si le temps est exprimé en jours, semaines ou mois, on l'exprimera en 365es, 52es ou 12es d'année.

L'usage de considérer les jours comme des 360es d'année est assez général, mais il est abusif.

EXERCICES.

31. Un propriétaire a vendu depuis 6 ans une terre de 85600 francs qui lui rendait 4 pour 100 l'an, et, plaçant cet argent dans l'industrie, il lui a fait produire 7 pour 100; quel bénéfice a-t-il actuellement réalisé ?

32. Une administration opère 3 pour 100 de retenue sur le traitement de ses employés; quelle est la somme retenue à un employé payé à 4500 francs et ayant 24 ans de service ?

33. Un usurier a prêté 4900 francs à 32 pour 100 et il se fait payer les intérêts tous les trois mois. Combien lui est-il dû pour chaque trimestre ?

De la formule (2) nous tirons :

$$(3) \qquad A = \frac{Iu}{it},$$

qui permet de calculer le capital.

Exemple : *Quel est le capital qui, placé à* 5 *pour* 100, *produit* 12000 *francs d'intérêt en trois ans ?* La formule donne :

$$x = \frac{12000 \times 100}{5 \times 3} = 80000 \text{ francs.}$$

EXERCICES.

34. On a donné jusqu'ici à un écolier $1^{\text{f}},25$ tous les 10 jours, et on lui offre de lui servir immédiatement le capital de cette rente calculé à 4 pour 100; combien lui est-il dû ?

35. Un employé place ses économies à 6 pour 100 et se constitue, en 25 ans, un revenu de 2800 francs; combien a-t-il économisé par an ?

36. Un propriétaire veut vendre une terre qui lui rapporte 7600 francs par an; quel prix doit-il en demander, s'il en calcule le revenu à 4 pour 100 l'an ?

La formule (2) donne encore

$$(4) \qquad i = \frac{Iu}{At},$$

formule du taux.

Exemple : *A quel taux faut-il placer une somme de* 900 *francs, pour lui faire produire* 450 *francs en* 8 *ans ?*

La formule donne :

$$x = \frac{450 \times 100}{900 \times 8} = 6^{\mathrm{f}},25.$$

EXERCICES.

37. On a acheté pour 230000 francs une maison dont on tire un revenu net de 3200 francs par terme de 3 mois; à quel taux a-t-on placé son argent ?

38. Une personne jouit d'une rente perpétuelle de 3250 francs, qu'elle aliène pour une somme de 74500 francs; à quel taux l'acquéreur a-t-il placé son argent ?

39. Un usurier prête une somme de 2500 francs, pour laquelle il a fait faire un billet de 4000 francs remboursable dans 15 mois ; à quel taux prête cet usurier ?

De la formule (2) on tire également :

$$(5) \qquad t = \frac{Iu}{Ai},$$

formule du temps.

Exemple : *En combien de temps un capital de* 600 *francs placé à* 5 *pour* 100 *produit-il* 90 *francs d'intérêt ?*

$$x = \frac{90 \times 100}{600 \times 5} = 3 \text{ ans}.$$

EXERCICE.

40. Un rentier a perçu actuellement, en intérêts, le quart du capital qu'il avait placé à 6 pour 100; depuis combien de temps ce capital est-il placé ?

La formule (2) donne enfin :

$$(6) \qquad u = \frac{Ait}{I},$$

formule de l'unité de capital.

Exemple : *On a acheté, au prix de* 16500 *francs*, 700 *francs de rente* 3 *pour* 100 ; quel était le cours de la rente ?

Nota. Dans les questions sur la rente, contrairement à ce qui a lieu pour les questions d'intérêt ordinaires, c'est l'unité de capital qui varie et le taux qui est fixe. Il en résulte que les expressions 3 pour 100, 4 pour 100, 5 pour 100 sont fausses en réalité et ne représentent pas un intérêt de 3, 4, 5 francs pour un capital fixe de 100 francs, mais bien un intérêt fixe de 3, 4, 5 francs pour un capital variable avec le cours du jour. Il en est de même pour toutes les questions relatives aux obligations industrielles qui se négocient à la Bourse.

La formule donne :

$$x = \frac{16500 \times 3 \times 1}{700} = 70^{\mathrm{f}},71.$$

EXERCICE.

41. On a vendu 4000 francs de rente 3 pour 100 au prix de 83500 francs ; à quel cours a-t-on vendu ?

Remarque. — On peut poser sur la rente des questions autres que celles qui se rapportent au cours ou unité de capital ; elles sont toutes résolues par les formules de l'intérêt, du capital, etc.

RÈGLE D'ESCOMPTE EN DEHORS

La retenue (escompte) à faire sur le montant d'un billet payé avant l'échéance se calcule généralement en dehors, c'est-à-dire qu'on la fait égale à l'intérêt de la somme portée au billet calculé depuis le moment du payement du billet jusqu'à celui de son échéance. Ainsi comprises, les questions d'escompte ne diffèrent pas des questions d'intérêt et se résolvent par les mêmes formules.

EXERCICES.

42. Un billet de 3200 francs est payé 7 mois avant l'échéance ; quelle retenue devra-t-on lui faire subir, si l'on calcule l'escompte à 6 pour 100 ?

$$\left(I = \frac{Ait}{u}\right)$$

43. Sur un billet payé 4 mois avant l'échéance et escompté à 5 pour 100, on a fait une retenue de 230 francs ; quel était le montant de ce billet ?

$$\left(A=\frac{Iu}{it}\right).$$

44. Sur un billet de 13800 francs, payé 4 mois avant l'échéance, on a fait une retenue de 230 francs ; à quel taux a-t-on escompté ce billet ?

$$\left(i=\frac{Iu}{At}\right).$$

45. Au lieu de solder comptant un achat de 320 francs, escompte à 3 pour 100 compris, un acheteur offre de souscrire un billet de 350 francs, représentant la valeur intégrale de l'achat ; quelle doit être la date de l'échéance du billet souscrit le 1er janvier ?

$$\left(t=\frac{Iu}{Ai}\right).$$

RÈGLE D'ESCOMPTE EN DEDANS

Ce mode d'escompte, le moins usité, est le plus équitable, puisqu'il s'opère sur la somme due actuellement, au lieu que l'escompte en dehors s'opère sur la somme qui sera due à l'époque de l'échéance. Quand on veut escompter un billet en dedans, on cherche donc quelle est la somme qui, augmentée de ses intérêts, égalerait, à l'époque de l'échéance, la somme portée au billet. Au lieu, par exemple, de payer 500 francs dans 6 mois, on paye actuellement la somme qui, augmentée de ses intérêts de 6 mois, serait égale à 500 francs. Voici la formule qui fait connaître cette somme :

$$I=\frac{Ait}{u+it}. \tag{7}$$

Ex. : *Quel est l'escompte, à* 6 *pour* 100, *en dedans, que doit subir un billet de* 1800 *francs payé* 8 *mois avant l'échéance ?*

$$x=\frac{1800\times 6\times 8}{(100+6)\times 12}=67^{\text{F}},92.$$

EXERCICES.

46. On escompte en dedans, à 4 pour 100, une somme de 260 francs payable dans 5 mois ; combien doit-on déduire de la somme portée au billet ?

47. Un marchand accorde au choix à ses clients 6 mois pour payer leurs achats ou un escompte de 4 pour 100 en dedans, s'ils payent comptant; à quel escompte a-t-on droit sur un achat de 220 francs payé comptant?

Au lieu de calculer l'escompte en dedans, il est souvent plus commode de calculer directement la somme à payer diminuée de l'escompte; elle est donnée par la formule suivante, dans laquelle a représente la somme à payer :

$$(8) \qquad a = \frac{Au}{u + it}.$$

EXERCICES.

48. Au lieu de 260 francs payables dans 5 mois, que doit-on donner, si l'on paye comptant, avec un escompte de 4 pour 100 en dedans ?

49. Un marchand accorde au choix, à ses clients, 6 mois pour payer leurs achats ou un escompte de 4 pour 100 en dedans, s'ils payent comptant ; combien doit-on payer au comptant pour un achat de 220 francs ?

RÈGLES D'INTÉRÊT COMPOSÉ

Lorsqu'on laisse les intérêts d'un capital s'ajouter au capital lui-même et produire intérêt à leur tour, on dit que le capital produit un intérêt composé. On peut se demander d'abord ce que deviendra dans un temps donné un capital ainsi augmenté de ses intérêts accumulés. Nous appellerons C le capital accru de ses intérêts. La question sera résolue par la formule suivante, où les autres éléments sont désignés de la même manière que dans les formules de l'intérêt simple :

$$(9) \qquad C = A\left(\frac{u + i}{u}\right)^t.$$

Exemple: *Un tribunal condamne le détenteur d'une somme de* 750 *francs à restituer ce capital avec les intérêts à* 5 *pour* 100 *accumulés depuis* 3 *ans; quelle est la somme à restituer ?*

$$x = 750 \times \left(\frac{105}{100}\right)^3 = 750 \times 1{,}05^3 = 868^{\text{f}},22.$$

EXERCICES.

50. Que devient un capital de 9800 francs placé à 6 pour 100, et dont les intérêts se sont accumulés pendant 5 ans ?

51. Un capitaliste entreprend un commerce qu'il se propose d'étendre indéfiniment, en accroissant chaque année son capital des bénéfices réalisés ; il consacre 100000 francs à cette entreprise et réalise 12 pour 100 de bénéfice par an ; on demande ce que sera devenu son capital au bout de 4 ans.

Si l'on veut calculer le capital initial, on transformera la formule en celle-ci :

(10) $$A = \frac{C}{\left(\frac{u+i}{u}\right)^t}.$$

Exemple : *Quelle somme faudrait-il placer à* 6 *pour* 100 *pour avoir* 9000 *francs en* 4 *ans ?*

$$x = \frac{9000}{1{,}06^4} = 7128^{\text{F}},84.$$

EXERCICE.

52. On a calculé que le diamètre d'un tronc d'arbre qui a aujourd'hui 1 mètre s'accroissait par an de 2 pour 1000 ; on demande quel était le diamètre de ce tronc il y a 4 ans.

REMARQUE. — Les questions d'intérêt composé relatives au temps et au taux ne peuvent être résolues commodément qu'en faisant usage des tables de logarithmes. Il en est de même des questions résolues par les deux formules précédentes, lorsque t représente un nombre élevé. (V. L'APPENDICE.)

ANNUITÉS

Lorsqu'on veut acquitter une dette au moyen d'annuités, c'est-à-dire par des payements annuels égaux, on doit tenir compte des intérêts décroissants du capital qui reste à payer. On peut se demander, par exemple, quelle dette (C) on pourrait éteindre au moyen de 3 annuités de 500 francs, l'intérêt étant calculé à 5 pour 100. La formule suivante, dans laquelle a représente l'annuité, donne la réponse à cette question :

(11) $$C = \frac{a\left[\left(\frac{u+i}{u}\right)^t - 1\right]}{\left(\frac{u+i}{u}\right)^t \times \left(\frac{u+i}{u} - 1\right)}.$$

On en tire

$$x = \frac{500 \times (1{,}05^3 - 1)}{1{,}05^3 \times (1{,}05 - 1)} = 1361^{\text{f}},62.$$

EXERCICE.

53. Une ville a contracté un emprunt qu'elle s'est engagée à rembourser, avec les intérêts à 6 pour 100, en annuités de 100000 francs; quelle partie de sa dette amortira-t-elle en 4 ans ?

On a plus ordinairement à calculer l'annuité nécessaire pour amortir le capital dans un temps donné; on y arrive au moyen de la formule suivante tirée de la formule (11):

$$(12)\qquad a=\frac{c\times\left(\frac{u+i}{u}\right)^t\times\left(\frac{u+i}{u}-1\right)}{\left(\frac{u+i}{u}\right)^t-1}.$$

Exemple : *On s'est engagé à payer en 4 ans, par annuités égales, une dette de* 6000 *francs avec les intérêts* à 5 *pour* 100; *quelle doit être l'annuité à payer ?*

$$x=\frac{6000\times 1{,}05^4\times(1{,}05-1)}{1{,}05^4-1}=1692 \text{ francs.}$$

EXERCICE.

54. Une ville a emprunté 2000000 de francs, qu'elle se propose de rembourser en 4 annuités; combien doit-elle consacrer par an à l'extinction de cette dette, l'intérêt étant calculé à 4 pour 100?

Remarque. — Dans les questions sur les annuités, si le nombre des années est considérable, il convient de recourir à l'usage des logarithmes. (V. l'Appendice.)

RÈGLES DE SOCIÉTÉ OU DE PARTAGE PROPORTIONNEL SIMPLE

Ces règles ont pour but de partager un nombre donné en parties qui soient entre elles dans le même rapport que des nombres donnés; par exemple, on se propose de partager 360 en parties proportionnelles aux nombres 2, 5, 7 et 4, c'est-à-dire en parties telles que la première soit à la seconde comme 2 est à 5, la seconde à la troisième comme 5 est à 7, etc.

Nous appellerons

P le nombre à partager ou somme des parties;
p l'une quelconque des parties;
M la somme des nombres proportionnels;
m l'un quelconque des nombres proportionnels,

et la question sera résolue par la formule suivante :

$$(13) \qquad p=\frac{P\times m}{M},$$

que nous appliquons immédiatement à l'exemple ci-dessus :

$$1^{re} \text{ partie } x=\frac{360\times 2}{2+5+7+4}=\ \ 40$$

$$2^{e} \text{ partie } y=\frac{360\times 5}{2+5+7+4}=100$$

$$3^{e} \text{ partie } z=\frac{360\times 7}{2+5+7+4}=140$$

$$4^{e} \text{ partie } u=\frac{360\times 4}{2+5+7+4}=\ \ 80$$

Vérification. 360

Autre exemple : *Partager le nombre* 3 *en parties proportionnelles aux nombres* $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{7}$.

$$1^{re} \text{ partie } x=\frac{3\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{4}{7}}=\frac{210}{151}$$

$$2^{e} \text{ partie } y=\frac{3\times\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{4}{7}}=\frac{63}{151}$$

$$3^{e} \text{ partie } z=\frac{3\times\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{4}{7}}=\frac{180}{151}$$

Vérification. . . . $\frac{210+63+180}{151}=3$

EXERCICES.

55. Un cultivateur veut répandre 4750 kilogrammes d'engrais sur trois terres dont la première a une étendue de $2^{HA},3$, la seconde de $3^{HA},9$, la troisième de $3^{HA},8$; quelle quantité d'engrais doit-il porter sur chaque terre ?

56. On veut partager une gratification de 1200 francs entre 3 employés, proportionnellement à la durée de leurs services; or le premier est dans l'administration depuis 16 ans, le second depuis 11 ans, le troisième depuis 6 ans; quelle part reviendra-t-il à chacun?

57. L'un des côtés d'un triangle est divisé en trois parties de 1, 2 et 3 mètres; diviser un autre côté, ayant 18 mètres, en parties proportionnelles à celles du premier.

RÈGLES DE SOCIÉTÉ OU DE PARTAGE PROPORTIONNEL COMPOSÉ

Le nouveau cas que nous allons examiner ne diffère du précédent qu'en ce que chaque nombre proportionnel est composé de deux ou plusieurs dont les produits expriment le véritable rapport des parties du nombre à partager. La formule, pour ce cas, ne diffère pas de la formule précédente; seulement m y représente chacun des produits des nombres proportionnels, au lieu d'y représenter un nombre simple.

Exemple : *Trois associés ont mis dans la société : le premier,* 12000 *francs pendant* 3 *ans; le deuxième,* 16000 *francs pendant* 2 *ans; le troisième,* 10000 *francs pendant* 4 *ans; partager entre eux un bénéfice de* 4000 *francs proportionnellement aux mises et à leur durée.*

On se servira de la formule (13), en y faisant successivement

$$m = 12000 \times 3,\ m = 16000 \times 2,\ m = 10000 \times 4,$$

et

$$M = (12000 \times 3) + (16000 \times 2) + (10000 \times 4).$$

1re partie :

$$x = \frac{4000 \times 12000 \times 3}{(12000 \times 3) + (16000 \times 2) + (10000 \times 4)} = 1333^{f},33$$

2e partie :

$$y = \frac{4000 \times 16000 \times 2}{(12000 \times 3) + (16000 \times 2) + (10000 \times 4)} = 1185^{f},19$$

3e partie :

$$z = \frac{4000 \times 10000 \times 4}{(12000 \times 3) + (16000 \times 2) + (10000 \times 4)} = 1481^{f},48$$

Vérification. . . . . $4000^{f},00$

Autre exemple : *Trois blocs de pierre ayant, le premier,* 82 *centimètres de haut sur* 60 *de large et* 25 *d'épaisseur, le second,* 75, 65 *et* 20, *le troisième,* 80, 55 *et* 30, *pèsent ensemble* 350 *kilogrammes ; quel est le poids de chacun des blocs ?*

Ici m sera successivement égal au produit des dimensions de chaque bloc, et M à la somme des trois produits ; on aura donc :

$$x = \frac{350 \times 82 \times 60 \times 25}{(82 \times 60 \times 25) + (75 \times 65 \times 20) + (80 \times 55 \times 30)} = 122^{\text{KG}},12$$

$$y = \frac{350 \times 75 \times 65 \times 20}{(82 \times 60 \times 25) + (75 \times 65 \times 20) + (80 \times 55 \times 30)} = 96^{\text{KG}},82$$

$$z = \frac{350 \times 80 \times 55 \times 30}{(82 \times 60 \times 25) + (75 \times 65 \times 20) + (80 \times 55 \times 30)} = 131^{\text{KG}},06$$

Vérification. . . . . $350^{\text{KG}},00$

EXERCICES.

58. On a employé à l'épuisement complet d'un étang contenant 450000000 mètres cubes d'eau trois pompes à vapeur dont les forces respectives sont 80, 100 et 120 chevaux ; la première a travaillé 20 jours, la deuxième 18 et la troisième 16 ; quelle est la quantité d'eau enlevée par chaque pompe ?

59. Trois terres qu'un propriétaire possède, la première depuis 7 ans, la deuxième depuis 9 ans, la troisième depuis 4 ans, lui ont rendu 125000 francs ; l'étendue de la première est les $\frac{2}{3}$ de celle de la seconde, et l'étendue de celle-ci les $\frac{5}{6}$ de celle de la troisième ; on demande ce qu'a produit chaque terre, en supposant le rendement proportionnel au temps et à l'étendue. (On fera l'étendue de la troisième terre égale à 1.)

RÈGLES DE MÉLANGE ET D'ALLIAGE

Lorsqu'on opère un mélange de matières ayant chacune des qualités proportionnelles à la quantité, le mélange prend lui-même une qualité nouvelle qui dépend à la fois de la quantité et de la qualité de chaque élément du mélange. Si l'on veut connaître la qualité résultante, on l'obtient au moyen de la formule suivante :

$$(14) \qquad T = \frac{qt + q't' + q''t'' \ldots.}{q + q' + q'' \ldots.},$$

dans laquelle

T	représente	le titre ou la qualité du mélange;
t, t', t''	—	les titres ou qualités des parties mélangées;
q, q', q''	—	les quantités des parties mélangées.

Exemple : *On a mêlé* 450 *litres de vin à* 40 *centimes*, 200 *à* 50 *centimes et* 350 *à* 30 *centimes ; quelle est la valeur d'un litre du mélange ?*

$$x = \frac{(450 \times 0.40) + (200 \times 0{,}50) + (350 \times 0.30)}{450 + 200 + 350} = 0^{f},385.$$

EXERCICES.

60. On a fait du mortier avec 18 hectolitres de sable coûtant $0^{f},25$ l'hectolitre, 2 hectolitres de chaux à $2^{f},15$ l'hectolitre, 6 hectolitres d'eau à $0^{f},005$ l'hectolitre; quel est le prix de revient d'un hectolitre de mortier?

61. On a fondu ensemble trois lingots d'argent ; le premier, au titre de 0,900 (c'est-à-dire d'argent fin pesant 900 millièmes du poids total), pèse 400 grammes; le deuxième, au titre de 0,875, pèse 800 grammes ; le troisième, au titre de 0,800, pèse 750 grammes; quel est le titre de l'alliage?

Si, étant donnés la quantité du mélange, les titres ou qualités des parties mélangées, on voulait connaître les quantités de celles-ci, on aurait un problème indéterminé, c'est-à-dire ayant une infinité de solutions. Pour le cas particulier où l'on n'aurait que deux éléments dans le mélange, on se servirait des deux formules suivantes :

$$(15) \qquad q = (T - t') \times n,$$

$$(16) \qquad q' = (t - T) \times n,$$

dans lesquelles

q	représente	la quantité du premier élément du mélange;
q'	—	celle du deuxième élément;
t	—	le titre du premier élément (le plus élevé);
t'	—	le titre du deuxième élément (le moins élevé);
T	—	le titre du mélange;
n	—	un nombre qu'on pourra faire successivement égal à tous les nombres possibles.

Exemple: *Combien faut-il mêler de vin à* 20 *francs et de vin à* 14 *francs pour avoir du vin à* 19 *francs l'hectolitre ?*

En donnant à n toutes les valeurs possibles, entières ou fractionnaires, on obtiendra une infinité de solutions du problème. Contentons-nous de faire successivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$; il nous viendra :

1re hypothèse : $q = (19 - 14) \times 1 = 5$
$q' = (20 - 19) \times 1 = 1$

2e hypothèse : $q = (19 - 14) \times 2 = 10$
$q' = (20 - 19) \times 2 = 2$

3e hypothèse : $q = (19 - 14) \times 3 = 15$
$q' = (20 - 19) \times 3 = 3$

EXERCICES.

62. Combien faut-il mêler de litres d'alcool à 45 degrés et d'alcool à 30, pour avoir de l'alcool à 41 ?

63. Combien faut-il allier de grammes d'argent à 0,900 et d'argent à 0,835, pour avoir de l'argent à 0,850 ?

Si l'on avait plus de deux éléments du mélange, $q, q', q''...$, et par conséquent plus de deux titres, t, t', $t''...$, la question serait résolue par le même nombre de formules :

(17) $q = (T - t')\, n + (T - t'')\, n',$

(18) $q' = (t - T)\, n,$

(19) $q'' = (t - T)\, n',$

. . . .

dans lesquelles n et n' représentent tous les nombres possibles, entiers ou fractionnaires. Toutefois, on éliminerait, comme *arithmétiquement* impossibles, toutes les hypothèses qui conduiraient à des résultats négatifs.

Exemple : *Combien faut-il mêler de blé à 60 francs, de blé à 50 francs et de blé à 40 francs pour avoir du blé à 47 francs l'hectolitre ?*

Nous nous contenterons de faire trois hypothèses sur n et n', savoir : $n = 1$ et $n' = 1$; $n = 1$ et $n' = 2$; $n = 3$ et $n' = 2$.

1re hypothèse :

$$q = [(47 - 50) \times 1] + [(47 - 40) \times 1] = 4$$
$$q' = (60 - 47) \times 1 = 13$$
$$q'' = (60 - 47) \times 1 = 13$$

2e hypothèse :

$$q = [(47 - 50) \times 1] + [(47 - 40) \times 2] = 11$$
$$q' = (60 - 47) \times 1 = 13$$
$$q'' = (60 - 47) \times 2 = 21$$

3e hypothèse :

$$q = [(47-50)\times 3] + [(47-40)] \times 2 = 5$$
$$q' = (60-47)\times 3 = 39$$
$$q'' = (60-47)\times 2 = 26$$

EXERCICES.

64. Combien faut-il allier de grammes d'or à 0,800, d'or à 0,850 et d'or à 0,880, pour avoir de l'or à 0,860? — On pourra faire les hypothèses : $n = 0$ et $n' = 3$; $n = 1$ et $n' = 2$; $n = 4$ et $n' = 7$.

65. La densité de l'eau de mer étant 1,3, celle de l'eau de rivière 1,009, celle de l'eau de pluie 1,007, on demande dans quelles proportions on pourrait mêler ces eaux pour obtenir un mélange dont la densité serait celle de l'eau de rivière. — On pourra faire les hypothèses : $n = 4$ litres et $n' = 4$ litres; $n = 3$ litres et $n' = 5$ litres; $n = 4$ litres et $n' = 1$ litre.

QUESTIONS RELATIVES AUX CALCULS DU TITRE, DE LA VALEUR ET DU POIDS DES MONNAIES

On appelle titre des monnaies la quantité relative de métal fin qui entre dans l'alliage dont elles sont formées; ainsi, on dit qu'une monnaie est au titre de 9 dixièmes (ou de 900 millièmes) lorsque l'or ou l'argent y représentent les 9 dixièmes (ou les 900 millièmes) du poids total. Nous appellerons :

t le titre de la monnaie ou rapport du métal fin qu'elle contient à son poids total;
v sa valeur ou le nombre d'unités monétaires qu'elle contient;
P son poids;
p le poids de l'unité monétaire;
M — du métal fin;
m — du même métal dans l'unité monétaire;
A — du métal allié au métal fin;
a — du même métal dans l'unité monétaire.

Nous allons donner les formules relatives à tous ces termes.

(20) $$v = \frac{P}{p} = \frac{M}{m} = \frac{A}{a}.$$

1er exemple : *Un franc d'argent pèse 5 grammes; quelle est la valeur d'une somme d'argent qui pèse 472 grammes?*

$$x = \frac{472}{5} = 94^{fr},40.$$

2e exemple : *Un franc d'argent contient* $4^{G},5$ *d'argent fin; quelle est la valeur d'une somme qui contient* 594 *grammes d'argent fin?*

$$x = \frac{594}{4,5} = 132 \text{ francs.}$$

3e exemple : *Un franc d'argent contient* $0^{G},9$ *de cuivre; quelle est la valeur d'une somme d'argent qui contient* $754^{G},29$ *de cuivre ?*

$$x = \frac{754,29}{0,9} = 838^{F},10.$$

EXERCICES.

66. Dans les pièces divisionnaires d'argent, le poids du métal fin, dans un franc, est de $4^{G},75$; on demande quelle est la valeur d'une somme d'argent dans laquelle il entre 44088 grammes d'argent fin.

67. Une pièce d'un franc en argent pesant 5 grammes, on demande la valeur d'une somme d'argent qui pèse $25^{KG},47$.

68. On a employé $12^{KG},985$ de cuivre à la fabrication de pièces d'or; un franc d'or contenant $0^{G},0371$ de cuivre, on demande quelle est la valeur de la somme fabriquée.

De la formule précédente on peut tirer les suivantes :

(21) $$P = p\,v = \frac{p\,M}{m} = \frac{p\,A}{a},$$

relative au poids total;

(22) $$p = \frac{P}{v} = \frac{P\,m}{M} = \frac{P\,a}{A},$$

relative au poids de l'unité;

(23) $$M = m\,v = \frac{P\,m}{p} = \frac{m\,A}{a},$$

relative au poids du métal fin;

(24) $$A = a\,v = \frac{P\,a}{p} = \frac{M\,a}{m},$$

relative au poids total du métal allié,

(25) $$a = \frac{A}{v} = \frac{p\,A}{P} = \frac{m\,A}{M},$$

relative au poids du métal allié dans l'unité monétaire.

Nous pouvons ajouter à ces formules celle du titre :

$$(26) \qquad t = \frac{M}{P}.$$

Nous croyons inutile d'insister sur ces formules, dont l'usage n'offre aucune difficulté, et nous nous contenterons de donner quelques exercices où elles trouveront leur application.

EXERCICES.

69. Le franc d'argent pesant 5 grammes, on demande le poids d'une somme de 200 francs en argent.

70. Un franc d'or pesant $0^G,32258$ et contenant $0^G,290322$ d'or fin, on demande le poids d'une somme d'or qui contient $1451^G,61$ d'or fin.

71. Dire le poids d'une somme d'argent en pièces de cinq francs, sachant qu'elle contient 220 grammes de cuivre, et qu'un franc d'argent contient $0^G,5$ de cuivre et pèse 5 grammes.

72. Une somme d'or pesant 1290320 grammes vaut 4000000 francs; quel est le poids de 1 franc en or ?

73. On demande le poids de 1 franc d'argent, sachant qu'une somme qui pèse 1000 grammes contient 900 grammes d'argent fin et que 1 franc en argent contient $4^G,5$ d'argent fin.

74. Un franc en argent contenant $0^G,825$ de cuivre et une somme d'argent en monnaie divisionnaire qui pèse 2000 grammes contenant 330 grammes de cuivre, on demande le poids total d'une pièce de 1 franc en argent.

75. Une pièce d'un franc en argent contenant $4^G,175$ d'argent fin, combien d'argent fin contient une somme de 125 francs en monnaie divisionnaire d'argent ?

76. Dites le poids de l'or fin contenu dans une somme qui pèse $12^G,903$, sachant qu'un franc d or pèse $0^G,32258$ et contient $0^G,290295$ d'or fin.

77. Sachant qu'une somme d'argent en pièces de cinq francs contient 500 grammes de cuivre et qu'un franc contient $4^G,5$ d'argent et $0^G,5$ de cuivre, trouver le poids de l'argent fin contenu dans cette somme.

78. Un franc d'or contient $0^G,032285$ de cuivre; quel est le poids du cuivre contenu dans une somme de 126000 francs en or ?

79. Un franc d'argent, dans les pièces de cinq francs, pèse 5 grammes et contient $0^G,5$ de cuivre; combien y a-t-il de cuivre dans une somme en pièces de cinq francs qui pèse 6000 grammes ?

80. Un franc d'argent contient $4^G,5$ d'argent fin et $0^G,5$ de cuivre; on demande le poids du cuivre contenu dans une somme qui contient 441000 grammes d'argent fin.

81. Une somme de 32500 francs en argent contient 16250 grammes de cuivre; combien y a-t-il de cuivre dans 1 franc d'argent?

82. Calculer le poids du cuivre contenu dans un franc d'argent, sachant qu'une somme en pièces de cinq francs qui pèse 1625 grammes contient $162^G,5$ de cuivre et que la pièce d'un franc pèse 5 grammes.

83. Une somme d'argent en monnaie divisionnaire contient $82^G,5$ de cuivre et $417^G,5$ d'argent fin; quel est le poids du cuivre contenu dans une pièce d'un franc, si cette pièce contient $4^G,175$ d'argent fin?

84. Quel est le titre d'une monnaie qui contient $102^G,6$ d'or fin pour un poids total de 120 grammes?

RÈGLE CONJOINTE

On a donné ce nom à la règle par laquelle on détermine le rapport final entre deux quantités qui ne sont pas liées entre elles par un rapport direct, mais par des rapports intermédiaires. Un exemple fera comprendre sans peine cette définition :

4	souverains d'Angleterre valent	25	roubles de Russie,
53	roubles de Russie —	20	florins de Bade;
55	florins de Bade —	106	rixdales de Danemark;
6	rixdales de Danemark —	33	francs.

Combien faut-il de francs pour faire 7 souverains d'Angleterre?

Appelant q, q', q'', q'''... chacun des nombres comparés à un autre nombre, v, v', v'', v'''... chacun des nombres auxquels les premiers sont comparés, V la valeur inconnue, nous aurons :

$$(27) \qquad V = \frac{v \times v' \times v'' \times v''' \ldots\ldots}{q \times q' \times q'' \ldots\ldots},$$

et, en appliquant cette formule au cas ci-dessus :

$$x = \frac{25 \times 20 \times 106 \times 33 \times 7}{4 \times 53 \times 55 \times 6} = 175 \text{ francs.}$$

EXERCICES.

85. 4 mois contiennent 122 jours; 4 jours contiennent 96 heures; 3 heures contiennent 180 minutes; 7 minutes contiennent 420 secondes; combien y a-t-il de secondes dans 9 mois?

Disposition du calcul :

Dénominateur.		Numérateur.
4 mois	valent	122 jours ;
4 jours	—	96 heures ;
3 heures	—	180 minutes ;
7 minutes	—	420 secondes ;
x secondes	—	9 mois.

86. Quatre roues forment un engrenage continu, de telle façon que tandis que la première fait 3 tours, la suivante en fait 5 ; quand celle-ci en fait 2, la troisième en fait 4 ; quand celle-ci en fait 7, la quatrième en fait 9 ; combien la dernière roue fait-elle de tours pendant que la première en fait 14 ?

DEUXIÈME PARTIE

FORMULES GÉOMÉTRIQUES

CHAPITRE PREMIER

LIGNES ET SURFACES

POLYGONES QUELCONQUES

Un polygone est une surface limitée par des lignes droites.

On appelle angle droit celui dont les côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Appelant :

s la somme des angles d'un polygone,
n le nombre des côtés (ou des angles),
d l'angle droit,

on a :

(28) $$s = 2d\,(n - 2).$$

Exemple : *Quelle est la somme des angles d'un polygone de 13 côtés?*

$$s = 2d\,(13 - 2) = 22d.$$

EXERCICE.

87. Dresser le tableau complet de la valeur en angles droits de la somme des angles des polygones, depuis trois côtés jusqu'à quinze.

Remarque. — Un angle droit vaut 90°; on aurait donc pu remplacer d par cette valeur dans la formule, qui serait alors devenue

(29) $$s = 2 \times 90\,(n - 2).$$

Appliquée à l'exemple ci-dessus, elle aurait donné :

$$s = 2 \times 90\,(13 - 2) = 1980°.$$

EXERCICE.

88. Dresser le tableau complet de la valeur en degrés de la somme des angles des polygones depuis trois côtés jusqu'à quinze.

L'aire ou surface d'une figure est l'espace circonscrit par son périmètre, c'est-à-dire par la ligne qui la limite.

Les polygones sont dits semblables lorsque les angles de l'un sont égaux aux angles correspondants de l'autre, et les côtés du premier proportionnels aux côtés correspondants de l'autre. Ainsi, dans la figure 1, appelant A, B, C, D, E, F les angles, AB, BC, CD, DE, EF, FA les côtés du grand polygone, a, b, c, d, e, f les angles et ab, bc, cd, de, ef, fa les côtés du petit, on a :

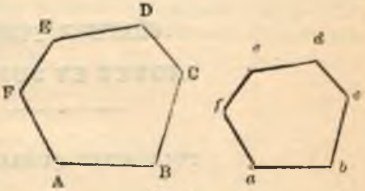

Fig. 1.

$$A = a,\ B = b,\ C = c,\ D = d,\ E = e,\ F = f,$$

et

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef} = \frac{FA}{fa}.$$

En appelant respectivement S et s l'aire ou surface des polygones semblables et C et c l'une quelconque de leurs lignes correspondantes, on a :

$$(\mathbf{30}) \qquad S = \frac{s\,C^2}{c^2}, \qquad s = \frac{S\,c^2}{C^2}.$$

Exemple : *On a deux polygones semblables, dont l'un a 142 mètres carrés de superficie. Un des côtés de ce polygone a une longueur de 21 mètres, et le côté correspondant dans l'autre polygone a 12 mètres; quelle est la superficie du second polygone?*

$$x = \frac{142 \times 12^2}{21^2} = 46^{Mq},3673.$$

EXERCICES.

89. On a levé le plan d'un terrain qui a 13416 mètres carrés de superficie, en réduisant aux 5 millièmes les lignes du terrain;

quelle sera la superficie du plan? (On fera égal à 1 l'un quelconque des côtés du terrain.)

90. Une terre produit 255 hectolitres de blé; que produirait une terre de même forme, mais dont les dimensions en longueur et en largeur ne seraient que les $\frac{4}{5}$ de celles de l'autre, en supposant que les produits soient proportionnels aux superficies? (On substituera le produit à la surface dans la formule.)

91. Pour tapisser une salle qui a 11 mètres de long, on a dépensé 605 francs; combien dépenserait-on pour une salle de même forme, mais qui n'a que $7^M,5$ de long? (Observation analogue.)

92. Un microscope grossit les objets 125 fois en longueur; combien les grossit-il en superficie? (On fera égales à 1 la longueur et la superficie réelles.)

De la formule 30 on tire :

$$(31) \qquad C=\sqrt{\frac{S\,c^2}{s}} \text{ ou } c=\sqrt{\frac{s\,C^2}{S}},$$

nouvelle formule au moyen de laquelle, étant donnés les carrés de deux polygones ou, en général, deux surfaces semblables et une quelconque des lignes de l'une, on peut calculer la ligne correspondante dans l'autre.

Exemple : *Deux polygones semblables ont l'un* 420 *et l'autre* 230 *mètres carrés de superficie; quelle est la longueur d'un des côtés du second polygone correspondant, dans le premier, à un côté de* 25 *mètres?*

$$x=\sqrt{\frac{230\times 25^2}{420}}=18^M,5.$$

EXERCICES.

93. Une contrée de 254 kilomètres carrés est représentée sur une carte par une étendue de 36 centimètres carrés ; quelle est la distance réelle entre deux villes qui, sur la carte, sont éloignées de $0^M,45$?

94. Quelle réduction faut-il faire subir aux lignes d'un plan qui est une réduction au 15 centième en superficie? (On fera, dans le terrain, la longueur et la superficie égales à 1.)

La formule 29 donne :

$$(32) \qquad n=\frac{S}{180}+2,$$

qui permet de calculer le nombre des côtés (ou des angles) d'un polygone quand on connaît la somme de ses angles.

Exemple : *Quel est le nombre des côtés d'un polygone dont les angles valent ensemble* 3060^0 *?*

$$x = \frac{3060}{180} + 2 = 19.$$

EXERCICE.

95. On a mesuré les angles d'un terrain polygonal et l'on a trouvé, avec une erreur par excès, 1444 degrés; on demande : 1° quel est le nombre de côtés, 2° quelle est l'erreur commise ? (L'erreur est égale au reste de la division de S par 180.)

TRIANGLES QUELCONQUES

Appelant :

S la superficie d'un triangle,

b sa base, c'est-à-dire l'un quelconque de ses côtés (*fig.* 2),

h sa hauteur, c'est-à-dire la perpendiculaire abaissée sur sa base par le sommet opposé,

on a :

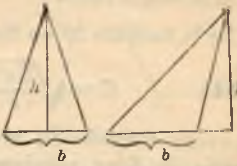

Fig. 2.

(33) $$S = \frac{b\,h}{2}.$$

Exemple : *Quelle est la superficie d'un triangle qui a* $24^{M},24$ *de base et* $12^{M},5$ *de hauteur ?*

$$S = \frac{24.24 \times 12.5}{2} = 151^{Mq},5.$$

EXERCICES.

96. On a acheté, au prix de 25 francs le mètre carré, un terrain de forme triangulaire, dont un des côtés a 76 mètres de long; la distance du sommet opposé à ce côté est de $47^{M},3$; combien a-t-on payé le terrain ?

97. Une troupe de soldats s'est disposée en triangle, en mettant $0^{M},35$ d'intervalle entre les hommes, dans tous les sens; on compte 17 hommes à la base, 9 de la base au sommet; on demande l'espace qu'ils occupent sur le terrain. (On remarquera que le nombre des intervalles, tant à la base qu'à la hauteur, est égal au nombre des hommes moins 1.)

De la formule (33) on tire :

(34) $$b = \frac{2\,S}{h},$$

formule servant à calculer la base d'un triangle dont on connaît la surface et la hauteur.

Exemple : *Quelle est la longueur de la base d'un triangle qui a* 385 *mètres carrés de superficie et* 22 *mètres de hauteur ?*

$$x = \frac{2 \times 385}{22} = 35 \text{ mètres.}$$

EXERCICE.

98. On a divisé un terrain de forme quadrilatère en deux triangles tels que les distances de la diagonale aux sommets opposés sont de 32 et 26 mètres; la superficie du premier triangle étant de 220 mètres carrés, on demande : 1° la longueur de la diagonale, 2° la superficie du second triangle, 3° celle du quadrilatère (*fig.* 3.)

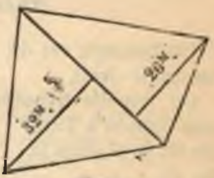

Fig. 3.

On tire également de la formule (33):

(35) $$h = \frac{2\,S}{b},$$

qui donne la hauteur quand on connaît la superficie et la base.

Exemple : *Quelle est la hauteur d'un triangle qui a* 14 *mètres carrés de superficie et* $3^{M},45$ *de base?*

$$x = \frac{2 \times 14}{3,45} = 8^{M},11.$$

EXERCICE.

99. Combien faudrait-il ajouter à la hauteur d'un triangle qui a 225 mètres carrés de superficie et 15 mètres de base, pour que la superficie eût 75 mètres carrés de plus ?

On peut aussi trouver la surface d'un triangle quand on connaît la longueur de ses trois côtés. Appelant *a, b, c,* les côtés et p la demi-somme des trois côtés, on a :

(36) $$S = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}.$$

Exemple : *Quelle est la surface d'un triangle dont les côtés ont* 14 *mètres,* 10 *mètres et* 16 *mètres ?*

$$x = \sqrt{\frac{40}{2} \times \left(\frac{40}{2} - 14\right) \times \left(\frac{40}{2} - 10\right) \times \left(\frac{40}{2} - 16\right)} = 69^{Mq},28.$$

EXERCICES.

100. Un terrain triangulaire, dont les côtés ont 26, 42 et 32 mètres de longueur, est divisé en deux triangles par un mur perpendiculaire au deuxième côté et partant du sommet opposé; on demande : 1° la superficie du terrain (formule 36), 2° la longueur du mur (formule 35).

101. Un triangle a deux côtés égaux, de 12 mètres chacun, et un troisième côté de 10 mètres; on demande : 1° la superficie du triangle, 2° la longueur de la perpendiculaire abaissée sur le troisième côté du sommet opposé.

TRIANGLES RECTANGLES

Un triangle est dit rectangle lorsqu'un de ses angles est un angle droit.

On appelle hypoténuse, dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit (h dans la *fig.* 4).

Si du sommet de l'angle droit (*fig.* 5) on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, et qu'on appelle

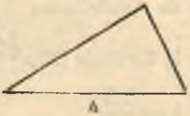

Fig. 4.

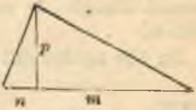

Fig. 5.

p la perpendiculaire,
m et n les segments de l'hypoténuse,

on a :

(37) $$p = \sqrt{m \times n}.$$

Exemple : *Quelle est la longueur de la perpendiculaire à l'hypoténuse dont les segments ont 4 et 9 mètres ?*

$$x = \sqrt{4 \times 9} = 6 \text{ mètres.}$$

EXERCICES.

102. Calculer l'aire d'un triangle rectangle dans lequel les segments de l'hypoténuse ont 9 et 25 centimètres. (On prendra pour base l'hypoténuse.)

103. L'hypoténuse d'un triangle rectangle a 19 mètres, et elle est divisée en deux parties égales par la perpendiculaire; quelle est la longueur de cette perpendiculaire ?

104. L'hypoténuse d'un triangle rectangle a 12 mètres et l'un de ses segments a 7 mètres; quelle est la longueur de la perpendiculaire à l'hypoténuse ?

De la formule (37) on tire :

(38) $$m = \frac{p^2}{n}, \text{ ou } n = \frac{p^2}{m},$$

formule qui donne un segment de l'hypoténuse quand on connaît l'autre segment et la perpendiculaire.

Exemple : *L'un des segments de l'hypoténuse a 11 mètres, la perpendiculaire a 9 mètres; quelle est la longueur de l'autre segment de l'hypoténuse ?*

$$x = \frac{9^2}{11} = 7^{\text{M}},36.$$

EXERCICES.

105. Dans un triangle rectangle, la perpendiculaire à l'hypoténuse a 6 mètres et l'un des segments de l'hypoténuse a 4 mètres ; on demande : 1° la longueur de l'autre segment, 2° la longueur de l'hypoténuse, 3° l'aire du triangle total, 4° l'aire de chacun des triangles partiels.

106. Quel est le rapport des segments de l'hypoténuse, quand la perpendiculaire est double de l'un des segments ? (On fera la perpendiculaire égale à 2.)

Si l'on appelle *h* l'hypoténuse,
C le grand côté de l'angle droit,
c le petit côté de l'angle droit,
m le segment adjacent au grand côté,
n le segment adjacent au petit côté,

on a :

(39) $$C = \sqrt{h \times m} \text{ et } c = \sqrt{h \times n}.$$

Exemple : *Dans un triangle rectangle, l'un des segments de l'hypoténuse a 10 mètres et l'hypoténuse 22 mètres; quelle est la longueur du côté de l'angle droit adjacent au segment connu de l'hypoténuse ?*

$$C = \sqrt{22 \times 10} = 14^{\text{M}},83.$$

EXERCICES.

107. L'hypoténuse d'un triangle rectangle étant divisée par la perpendiculaire en deux parties de $3^{\text{M}},45$ chacune, on demande : 1° la longueur des côtés de l'angle droit, 2° la longueur de la perpendiculaire, 3° l'aire du triangle total, 4° l'aire de chacun des triangles partiels.

108. Entre un poinçon P (*fig.* 6) et un arbalétrier A, on veut assembler une jambe de force J perpendiculaire à l'arbalétrier et le divisant en deux parties de $6^M 14$ et de $2^M,92$; on demande : 1° la hauteur qu'il faut donner au poinçon, 2° la distance du pied du poinçon à celui de l'arbalétrier, 3° la longueur de la jambe de force.

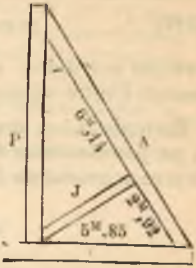

Fig. 6.

Autre formule :

$$(40) \qquad h = \frac{C^2}{m} \text{ ou } h = \frac{c^2}{n}.$$

Exemple : *L'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant 7 mètres et le segment adjacent de l'hypoténuse 4 mètres, on demande la longueur de l'hypoténuse.*

$$x = \frac{7^2}{4} = 12^M,25.$$

EXERCICE.

109. Entre un poinçon P et un arbalétrier A (*fig.* 6), dont les pieds sont distants de $5^M,85$, on veut assembler une jambe de force J perpendiculaire à l'arbalétrier et dont le pied soit à $2^M,92$ du pied de l'arbalétrier ; on demande la longueur qu'il faut donner à l'arbalétrier, au poinçon et à la jambe de force.

On peut aussi calculer l'hypoténuse, à l'aide de la formule suivante, quand on connaît les côtés de l'angle droit :

$$(41) \qquad h = \sqrt{C^2 + c^2}.$$

Exemple : *Dans un triangle rectangle, les deux côtés de l'angle droit ont* 7 *et* 6 *mètres ; on demande la longueur de l'hypoténuse.*

$$x = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{49 + 36} = 9^M,21.$$

EXERCICES.

110. Quelle longueur doit avoir une échelle pour atteindre une hauteur de 3 mètres, si on lui donne $0^M,75$ de pied ?

111. Quelle longueur doit avoir un arbalétrier (*fig.* 6) dont le pied s'écarte de $3^M,65$ de celui du poinçon P, le poinçon ayant 4 mètres de hauteur ?

On peut, inversement, calculer, à l'aide de la formule suivante, l'un des côtés de l'angle droit, quand on connaît l'hypoténuse et l'autre côté de l'angle droit.

$$\textbf{(42)} \qquad C = \sqrt{h^2 - c^2}, \quad c = \sqrt{h^2 - C^2}.$$

Exemple : *L'hypoténuse d'un triangle rectangle a 9 mètres et l'un des côtés de l'angle droit a 7 mètres; quelle est la longueur de l'autre côté?*

$$x = \sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{81 - 49} = 5^{\text{M}},65.$$

EXERCICES.

112. Une échelle de 4 mètres de longueur, adossée à un mur, atteint une hauteur de $3^{\text{M}},2$; combien lui a-t-on donné de pied?

113. Un arbalétrier (*fig.* 6) de $5^{\text{M}},22$ de longueur s'écarte de $4^{\text{M}},22$ du pied du poinçon; quelle est la hauteur de ce poinçon ?

114. La rampe d'un escalier qui monte directement du rez-de-chaussée au premier étage, et qui est formée de 32 marches ayant chacune $0^{\text{M}},25$ de largeur, a $8^{\text{M}},95$; quelle est la hauteur du premier étage et celle de chaque marche? (La longueur de la rampe est celle de l'hypoténuse; la largeur des marches servira à trouver l'un des côtés de l'angle droit.)

115. Un mât est étayé à l'aide de câbles de $18^{\text{M}},5$ de long, attachés au sommet du mât, et, sur le sol, à $4^{\text{M}},25$ de son pied; quelle est la hauteur du mât?

116. Un chemin de fer gravit un plan incliné dont les locomotives atteignent le point culminant en 62 minutes, avec une vitesse de $0^{\text{KM}},95$ par minute. Le point culminant étant à 82 mètres d'altitude au-dessus du point d'origine du plan incliné, et les locomotives ayant une vitesse de $1^{\text{KM}},7$ sur un chemin horizontal, on demande de combien on abrégerait la route, si l'on pratiquait un tunnel horizontal pour franchir l'espace parcouru par la rampe.

Dans un triangle rectangle, si l'on prend pour base l'un des côtés de l'angle droit, la hauteur se confondra avec l'autre côté; la formule (33) se confond donc, pour ce cas particulier, avec la suivante :

$$\textbf{(43)} \qquad S = \frac{C \times c}{2}.$$

Exemple : *Quelle est la surface d'un triangle rectangle dans lequel les côtés de l'angle droit ont 5 et 4 mètres?*

$$x = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ mètres carrés.}$$

EXERCICES.

117. Calculer l'aire d'un triangle rectangle dans lequel les côtés de l'angle droit ont tous deux $14^M,2$.

118. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse, double d'un des côtés de l'angle droit, a $7^M,3$; calculer l'autre côté (formule 42) et la surface du triangle.

TRIANGLES ISOCÈLES

On appelle triangle isocèle (*fig.* 7) celui qui a deux côtés égaux, *c* et *c*. Le troisième côté est la base du triangle. On peut calculer la hauteur d'un triangle isocèle quand on connaît sa base et l'un de ses côtés égaux, et, en appliquant la formule (33), calculer la surface du triangle. La formule qui donne la hauteur est la suivante :

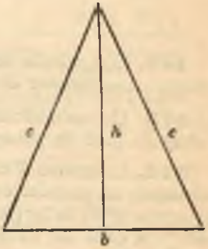

Fig. 7.

$$(\mathbf{44}) \qquad h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Exemple : *Quelles sont la hauteur et la superficie d'un triangle isocèle dont la base a 3 mètres et dont les côtés égaux ont chacun 5 mètres?*

$$x = \sqrt{5^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 4^M,769 \text{ (hauteur).}$$

$$y = \frac{3 \times 4,769}{2} = 7^{Mq},1535 \text{ (superficie).}$$

EXERCICE.

119. Un chevalet de peintre est formé de deux montants égaux ayant chacun $2^M,1$, et qui sont assemblés en angle au sommet et écartés à la base de $0^M,96$; un troisième montant, se repliant dans le plan des deux autres quand le chevalet est fermé, a alors sa base sur la même ligne que les deux autres, exactement au milieu de leur distance; quelle est la longueur du troisième montant?

On peut aussi, étant donnés la hauteur et l'un des côtés égaux, calculer la base et en déduire la surface :

$$(\mathbf{45}) \qquad b = 2 \times \sqrt{c^2 - h^2}.$$

Exemple : *Calculer la base et la surface d'un triangle* *isocèle dont les côtés égaux ont chacun 7 mètres et la hauteur 5 mètres.*

$$x = 2\sqrt{7^2 - 5^2} = 9^{M},796 \text{ (base).}$$

$$x = \frac{9,796 \times 5}{2} = 24^{Mq},49 \text{ (surface).}$$

EXERCICES.

120. Avec une échelle double de $2^{M},8$, on atteint une hauteur de $2^{M},7$; combien a-t-on donné de pied à l'échelle, c'est-à-dire quelle distance a-t-on mise entre les deux pieds de l'échelle?

121. Un fronton est formé de trois corniches, l'une horizontale, les deux autres obliques; celles-ci ont chacune $6^{M},25$ de long; quelle est la longueur de l'autre, le fronton ayant 3 mètres de hauteur ? Quelle est la superficie du fronton?

On peut enfin calculer les côtés égaux du triangle isocèle, quand on en connaît la base et la hauteur :

$$\textbf{(46)} \qquad c = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Exemple : *Quelle est la longueur des deux côtés égaux dans un triangle isocèle qui a 7 mètres de hauteur et 12 mètres de base ?*

$$x = \sqrt{7^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2} = 9^{M},219.$$

EXERCICE.

122. On veut construire une échelle triangulaire (*fig.* 8) de cinq échelons distants de 28 centimètres; le premier, situé à 28 centimètres du pied de l'échelle, aura $1^{M},02$ de long; le cinquième sera également à 28 centimètres du sommet. On demande la longueur qu'il faut donner aux montants.

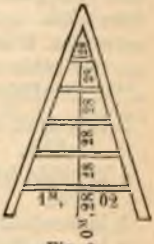

Fig. 8.

TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX

On appelle triangle équilatéral, ou triangle équiangle, ou triangle régulier, celui dont les trois côtés, et par conséquent les trois angles, sont égaux entre eux.

Dans un triangle équilatéral, il suffit de connaître la longueur d'un côté pour en déduire la hauteur, au moyen de la formule suivante :

(**47**) $$h=\sqrt{3\times\left(\frac{c}{2}\right)^2}.$$

Connaissant *h*, on calculera la surface, au moyen de la formule (33).

Exemple : *Calculer la hauteur et la surface d'un triangle équilatéral qui a 7 mètres de côté.*

$$x=\sqrt{3\times\left(\frac{7}{2}\right)^2}=6^{M},062 \text{ (hauteur)}.$$

$$y=\frac{7\times 6{,}062}{2}=21^{Mq},217 \text{ (surface)}.$$

EXERCICE.

123. Un hexagone régulier (*fig.* 9) peut être décomposé en 6 triangles équilatéraux dont les côtés sont égaux à ceux de l'hexagone ; quelle est la superficie d'un hexagone régulier dont le côté a 38 centimètres ?

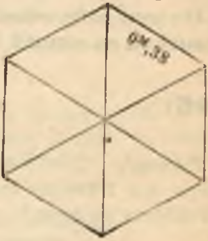

Fig. 9.

TRAPÈZES

Le trapèze (*fig.* 10) est un quadrilatère (polygone à quatre côtés), dont deux côtés seulement sont parallèles entre eux. Il est dit rectangle, quand un des côtés est perpendiculaire aux côtés parallèles. Appelant

B la grande base ou grand côté parallèle,

b la petite base ou petit côté parallèle,

h la hauteur ou la perpendiculaire commune aux bases,

S la superficie du trapèze,

on a :

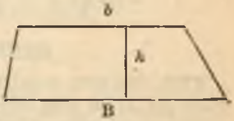

Fig. 10.

(**48**) $$S=\frac{(B+b)\times h}{2}.$$

Exemple : *Quelle est la superficie d'un trapèze qui a* 25 *et* 20 *mètres de bases et* 7 *mètres de hauteur ?*

$$x=\frac{(25+20)\times 7}{2}=157^{Mq},5.$$

EXERCICES.

124. Un terrain a été divisé en cinq lots dont deux ont la forme de triangles rectangles et trois la forme de trapèzes, conformément au croquis ci-joint (*fig.* 11); ces lots ayant été vendus au prix de 82 francs le mètre carré, on demande le prix de chaque lot et celui du terrain.

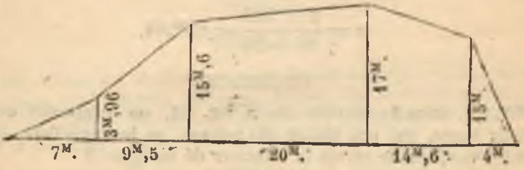

Fig. 11.

125. Pour mesurer la superficie d'un terrain, on l'a décomposé, conformément au croquis ci-joint (*fig.* 12), en triangles et trapèzes rectangles; quel resultat a-t-on obtenu?

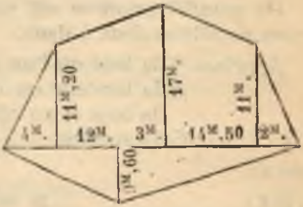

Fig. 12.

Si, connaissant la surface, la hauteur et l'une des bases du trapèze, on voulait connaître l'autre base, on l'obtiendrait par une des formules suivantes :

$$\text{(49)} \qquad B = \frac{2S}{h} - b, \qquad\qquad b = \frac{2S}{h} - B.$$

Exemple : *Un trapèze de* 121 *mètres carrés de superficie a une base de* 13 *mètres et une hauteur de* 11 *mètres; quelle est la longueur de l'autre base?*

$$x = \frac{2 \times 121}{11} - 13 = 9 \text{ mètres.}$$

EXERCICE.

126. Partager le terrain ci-joint, qui est un trapèze rectangle, en deux lots d'égale superficie, en le coupant par une droite menée du milieu du côté AB. (On cherchera à quelle distance de C, sur la ligne CD, doit aboutir cette droite.)

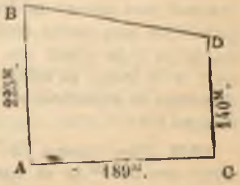

Fig. 13.

Si l'on connaissait la surface et les bases, on pourrait calculer la hauteur à l'aide de la formule suivante :

$$(50) \qquad h = \frac{2\,S}{B + b}.$$

Exemple : *Quelle est la hauteur d'un trapèze dont les bases ont* 15 *et* 20 *mètres et dont la surface a* 230 *mètres carrés ?*

$$x = \frac{2 \times 230}{15 + 20} = 13^{M},14.$$

EXERCICE.

127. Si, dans le trapèze de la fig. 13, on supposait connues les deux bases, qui ont 225 et 140 mètres, et la superficie, qui est de $34492^{Mq},5$, quelle serait la hauteur de la figure ?

PARALLÉLOGRAMMES

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.

Appelant b la base ou l'un quelconque des côtés,
h la hauteur ou la perpendiculaire commune à la base et au côté qui lui est parallèle,
S la surface,

on a :

$$(51) \qquad S = b\,h.$$

Exemple : *Quelle est la surface d'un parallélogramme dont la base a* $22^{M},25$ *et la hauteur* 8 *mètres ?*

$$x = 22,25 \times 8 = 178 \text{ mètres carrés.}$$

EXERCICES.

128. Un terrain ayant la forme d'un parallélogramme (*fig.* 14) dont la base a 50 mètres et la hauteur $18^{M},25$, a été divisé en trois lots, en partageant la base en segments de 10, de 25 et de 15 mètres, et menant, aux points de division, des parallèles aux petits côtés. Chacun des trois lots ayant été vendu au prix de 32 francs le mètre carré, on demande la superficie et le prix de chaque lot.

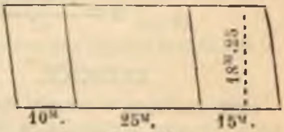

Fig. 14.

129. Une troupe de soldats est disposée sur 6 rangs espacés entre eux de $0^{M},85$ et composés de 35 hommes espacés en largeur de $0^{M},44$. On demande quelle est l'étendue du terrain occupé par cette troupe. (On n'oubliera pas que le nombre des espaces est égal à celui des rangs moins 1.)

Si l'on connaissait la surface et la hauteur du parallélogramme, on calculerait sans peine la base :

$$(52) \qquad b = \frac{S}{h}.$$

Exemple : *Quelle est la base d'un parallélogramme de* 200 *mètres carrés de superficie et dont la hauteur a* $7^M,25$?

$$x = \frac{200}{7,25} = 27^M,58.$$

EXERCICE.

130. Dans un terrain qui a la forme d'un parallélogramme de 15 mètres de hauteur, on veut tracer des lots de même forme, ayant la hauteur du terrain et $150^{Mq},75$ de superficie; quelle doit être la longueur de la base de ces lots?

Inversement, si l'on connaissait la surface et la base d'un parallélogramme, on pourrait calculer sa hauteur :

$$(53) \qquad h = \frac{S}{b}.$$

Exemple : *Quelle est la hauteur d'un parallélogramme de* 24 *mètres carrés de superficie et de* $6^M,25$ *de base ?*

$$x = \frac{24}{6,25} = 3^M,84.$$

EXERCICE.

131. On veut, dans un terrain en forme de parallélogramme et qui a 45632 mètres carrés de superficie et 62 mètres de base, découper, à l'aide de 3 murs parallèles à la base, quatre lots égaux entre eux; quelle devra être la distance entre les murs ?

RECTANGLE

Un rectangle (*fig.* 15) est un parallélogramme dont les quatre angles sont droits, et, par conséquent, les côtés adjacents perpendiculaires l'un à l'autre. Le rectangle jouit des propriétés du parallélogramme; mais, comme la hauteur s'y confond avec l'un des côtés, en appelant C et c les côtés, la formule (51) se transformera, pour le rectangle, en celle-ci

Fig. 15.

$$(54) \qquad S = C \times c.$$

Exemple : *Quelle est la superficie d'un rectangle de 12 mètres et de $4^{M},25$ de côtés ?*

$$x = 12 \times 4,25 = 51 \text{ mètres carrés.}$$

EXERCICES.

132. Une maison de 5 étages et de forme rectangulaire, ayant 24 mètres de façade sur $12^{M},35$ de profondeur, est habitée par 122 personnes; on demande combien chaque locataire occupe, en moyenne, de superficie.

133. Pour arroser trois jardins de forme rectangulaire et ayant, — le 1er, 22 mètres de long sur $9^{M},5$ de large, — le 2e, $18^{M},25$ sur $11^{M},3$, — le 3e, 32 mètres sur $10^{M},45$, on dispose de 6 mètres cubes d'eau par jour; on demande combien on peut donner d'eau aux jardins par jour et par mètre carré.

134. On achète des planches de bois étranger au prix de $9^{F},32$ le décimètre carré; à combien revient un meuble où l'on a employé 5 planches de $3^{M},20$ de long sur $0^{M},25$ de large ?

135. Un champ de forme rectangulaire, ayant 160 mètres de long sur 42 de large, a produit $191^{HL},52$ de pommes de terre, qu'on a vendues à 6 francs l'hectolitre; on demande combien ce champ a produit par are.

De la formule (54) on tire :

$$(55) \qquad C = \frac{S}{c} \text{ et } c = \frac{S}{C},$$

qui font connaître un des côtés du rectangle, quand on connaît l'autre côté et la surface.

Exemple : *Un rectangle de $135^{Mq},63$ de superficie a $82^{M},2$ de long; quelle est sa largeur ?*

$$x = \frac{135,63}{82,2} = 1^{M},65.$$

EXERCICES.

136. Un ruban a 25 mètres de long et $0^{M},04$ de large; quelle serait la longueur d'un autre ruban de même qualité et de même poids, mais n'ayant que $0^{M},025$ de large ? (Les poids sont proportionnels aux superficies, la qualité étant la même.)

137. Avec une certaine dépense, on a construit une section de route de 132 kilomètres et ayant $4^{M},16$ de largeur; quelle largeur pourrait-on donner à une autre route qui coûterait le même prix, et qui n'aurait que 120 kilomètres ?

LOSANGES

Le losange (*fig.* 16) est un parallélogramme dont les quatre côtés sont égaux. Il possède toutes les propriétés des parallélogrammes et quelques-unes qui lui sont propres, notamment celle qui est exprimée dans la formule ci-dessous, et qui est la plus importante.

Appelant

S la surface du losange,
D sa grande diagonale,
d sa petite diagonale,

on a :

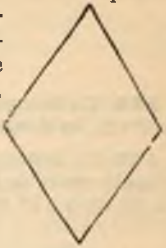

Fig. 16.

(**56**) $$S = \frac{D \times d}{2}.$$

Exemple : *Quelle est la superficie d'un losange dont les diagonales ont* $14^{M},25$ *et* $8^{M},4$ *?*

$$x = \frac{14,25 \times 8,4}{2} = 59^{Mq},85.$$

EXERCICES.

138. Quelle est la superficie d'un losange qui a $5^{M},4$ de périmètre et dont une diagonale a $0^{M},75$? (On remarquera : 1° que le périmètre est la somme de quatre côtés égaux; 2° que les diagonales sont perpendiculaires l'une à l'autre et se divisent mutuellement en deux parties égales, ce qui permettra de recourir à la formule (42) pour calculer une demi-diagonale.)

139. En joignant par des lignes droites les milieux des côtés d'un rectangle qui a 12 et 7 mètres de côtés (*fig.* 17), on a inscrit un losange dont on veut connaître la superficie. (On observera que les diagonales sont précisément égales aux côtés du rectangle.)

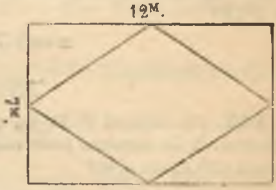

Fig. 17.

140. Quel est, dans le problème précédent et dans tous les cas semblables, le rapport de la superficie du losange à celle du rectangle ?

De la formule (56) on tire :

(**57**) $$D = \frac{2S}{d}, \quad d = \frac{2S}{D}.$$

Exemple : *Un losange de 40 mètres carrés de superficie a une diagonale de* $3^{M},25$; *quelle est la longueur de l'autre diagonale ?*

$$x = \frac{2 \times 40}{3,25} = 24^{M},61.$$

EXERCICES.

141. Un losange ayant une diagonale de $2^{M},5$ et une superficie de $3^{Mq},25$, on demande la longueur de son autre diagonale.

142. Un losange est divisé par ses deux diagonales en quatre triangles égaux de 1 mètre carré de superficie, et l'un des côtés de l'angle droit a $0^{M},82$; quelle est la longueur des deux diagonales ?

CARRÉ

Un carré (*fig.* 18) est un losange rectangle ou, en d'autres termes, un rectangle dont tous les côtés sont égaux. Le carré jouit donc des propriétés du parallélogramme, du rectangle et du losange; mais il a quelques propriétés particulières. Ainsi, appelant

Fig. 18.

S sa surface,
c son côté,

on a :

(58) $$S = c^2.$$

Exemple : *Quelle est la surface d'un carré dont le côté à* $2^{M},7$?

$$x = 2,7^2 = 7^{Mq},29.$$

EXERCICE.

143. On répand $0^{L},32$ de semence par mètre carré; combien faudrait-il de semence pour ensemencer un champ de forme carrée, ayant $62^{M},45$ de côté ?

De la formule précédente on tire :

(59) $$c = \sqrt{S},$$

formule qui permet de calculer le côté d'un carré dont on connaît la superficie.

Exemple : *Quel est le côté d'un carré qui a* $7^{Mq},29$ *de superficie ?*

$$x = \sqrt{7,29} = 2^{M},7.$$

EXERCICES.

144. Quel est le côté d'un carré équivalent à un rectangle qui a $6^{M},2$ et $8^{M},15$ de côtés?

145. Quelle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dans lequel les carrés construits sur les côtés de l'angle droit ont 25 mètres carrés et $18^{Mq},0625$?

146. Un trapèze a 28 et 18 mètres de bases et $3^{M},25$ de hauteur; quel est le côté du carré équivalent à ce trapèze?

147. Quel est le côté d'un carré double en superficie d'un losange dont les diagonales ont 21 et 20 mètres?

Le côté du carré peut aussi être calculé par la formule suivante, dans laquelle d représente la diagonale :

(60) $$c = \sqrt{\frac{d^2}{2}}.$$

Exemple : *Quel est le côté d'un carré dont la diagonale a 3 mètres ?*

$$x = \sqrt{\frac{3^2}{2}} = 2^{M},121.$$

EXERCICE.

148. Dans une équerre à 45°, les deux côtés de l'angle droit sont égaux entre eux; on demande quelle est la longueur de ces deux côtés, si le troisième côté a 26 centimètres. (On considérera ce côté comme la diagonale d'un carré dont l'équerre serait une moitié.)

On peut, réciproquement, calculer la diagonale quand on connaît le côté du carré.

(61) $$d = \sqrt{2\,c^2}$$

Exemple : *Quelle est la diagonale d'un carré dont le côté a 3 mètres ?*

$$x = \sqrt{2 \times 3^2} = 4^{M},242.$$

EXERCICE.

149. Une salle de forme carrée a été pavée avec 1024 carreaux de même forme ayant chacun $0^{M},28$ de côté; on demande : 1° la longueur des diagonales des carreaux; 2° la longueur de chaque côté de la salle; 3° la longueur des diagonales de la salle.

POLYGONES RÉGULIERS

Un polygone est dit régulier lorsque tous ses angles et tous ses côtés sont égaux entre eux.

En appelant (*fig.* 19) :

Fig. 19.

- a l'angle d'un polygone régulier,
- n le nombre de ses angles ou de ses côtés,
- d l'angle droit,

nous aurons :

(62) $$a = \frac{2\,d\,(n-2)}{n} = \frac{180^{\circ}\,(n-2)}{n},$$

formule qui permet de calculer la valeur d'un angle quand on connaît le nombre des côtés.

Exemple : *Quelle est la valeur, en degrés, de chacun des angles d'un polygone régulier de 20 côtés ?*

$$a = \frac{180 \times (20-2)}{20} = 162^{\circ}.$$

EXERCICES.

150. Quelle est la valeur, en degrés, de chacun des angles des polygones réguliers suivants : triangle (3 côtés), carré (4 côtés), pentagone (5 côtés), hexagone (6 côtés) ?

151. Quels sont les polygones réguliers avec lesquels on peut carreler un appartement ? (Les sommets des angles des polygones, devant toujours être assemblés autour d'un point, devront toujours donner une somme de 4 angles droits ou de 360 degrés ; on ne pourra donc employer aucun polygone dont l'angle ne serait pas un diviseur exact de 360. D'autre part, il devra y avoir au moins trois angles autour d'un point, ce qui fera rejeter tout polygone dont l'angle serait supérieur au tiers de 360 degrés ou à 120 degrés.)

On appelle cercle un polygone régulier d'un nombre infini de côtés, ou, autrement, une surface plane limitée par une courbe fermée, dite circonférence, dont tous les points sont à égale distance d'un même point appelé centre.

Une ligne droite qui mesure la distance du centre à un point de la circonférence s'appelle rayon.

Un cercle est dit inscrit à un polygone (*fig.* 20) lorsqu'il est tangent à tous ses côtés, c'est-à-dire lorsqu'il touche chacun d'eux en un seul point.

On appelle apothème d'un polygone régulier (*fig.* 20) le rayon du cercle inscrit à ce polygone.

Fig. 20.

Appelant :

S la surface d'un polygone régulier,
c un de ses côtés,
n le nombre de ses côtés,
a son apothème,

on a :

(63) $$S = \frac{can}{2}.$$

Exemple : *Quelle est la superficie d'un hexagone régulier dont le côté a* $2^{M},3$ *et l'apothème* $1^{M},99$?

$$x = \frac{2,3 \times 1,99 \times 6}{2} = 13^{Mq},731.$$

EXERCICE.

152. On démontre en géométrie que le rayon du cercle inscrit à un triangle régulier est égal au tiers de la hauteur du triangle; trouver la superficie d'un triangle régulier dont la hauteur a 15 centimètres, le côté $17^{cm},33$, par la formule (33) et par la formule (63); comparer les résultats.

On appelle cercle circonscrit à un polygone (*fig.* 21) celui dont la circonférence passe par tous les sommets du polygone.


Fig. 21.

Si l'on appelle :

a l'apothème d'un polygone régulier,
c son côté,
R le rayon du cercle circonscrit,

on aura :

(64) $$a = \sqrt{R^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}.$$

Exemple : *Quel est le rayon du cercle inscrit à un polygone régulier qui a 6 mètres de côté et dont le cercle circonscrit a un rayon de* $4^{M},24$?

$$x = \sqrt{4,24^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 2^{M},99.$$

EXERCICES.

153. Une salle de 7 mètres de long sur 5 mètres de large est carrelée avec des hexagones réguliers ayant 11 centimètres de côté et 22 centimètres de diagonale (11 centimètres de rayon du cercle circonscrit); on demande combien on a employé d'hexagones dans la longueur, combien dans la largeur et combien en tout.

154. On a employé, pour carreler une salle, 840 hexagones ayant 12 centimètres de côté et 24 centimètres de diagonale; on demande quelle est la superficie de la salle.

CIRCONFÉRENCE ET CERCLE

Le diamètre d'un cercle (*fig.* 22) est la droite qui, passant par le centre du cercle, se termine à deux points de la circonférence. Il équivaut à la somme de deux rayons.

Le rapport du diamètre à la circonférence, ou le nombre de fois que le diamètre est contenu dans la circonférence, est une quantité constante, qui est, à très peu près, égale à 3,1416.

Fig. 22.

Appelant :

P le périmètre du cercle ou la circonférence,
d le diamètre,
r le rayon,
π le rapport de la circonférence au diamètre (3,1416),

on a :

(65) $$P = \pi d \text{ ou } P = 2\pi r.$$

Exemple : *Quelle est la circonférence d'un cercle qui a 6 mètres de diamètre?*

$$x = 3{,}1416 \times 6 = 18^{M}{,}8496.$$

EXERCICES.

155. On a tracé le tour d'un bassin avec un cordeau servant de rayon et ayant $11^{M},25$ de long; combien le bassin aura-t-il de tour?

156. La lune étant éloignée de 384353 kilomètres et faisant le tour de la terre en $27^{J},33$, on demande l'étendue de son orbite et le chemin qu'elle fait dans l'espace en 1 heure?

157. La terre a 6366182 mètres de rayon à l'équateur et fait un tour sur elle-même en 24 heures; quelle est la vitesse par seconde d'un point de l'équateur ?

158. La grande aiguille d'une montre a $0^M,022$ de longueur et fait un tour en 1 heure; on demande de combien se déplace en 5 minutes la pointe de cette aiguille.

De la formule (65) on conclut cette autre :

$$d = \frac{P}{\pi} \text{ ou } r = \frac{P}{2\pi}, \tag{66}$$

qui permet de calculer le diamètre ou le rayon quand on connaît la circonférence.

Exemples : *Quel est le diamètre d'une circonférence qui a $7^M,37$?*

$$x = \frac{7,37}{3,1416} = 2^M,345.$$

Quel est le rayon d'une circonférence qui a 6 mètres ?

$$x = \frac{6}{2 \times 3,1416} = 0^M,954.$$

EXERCICES.

159. Quel est le diamètre d'un tronc d'arbre qui a $1^M,32$ de tour?

160. Quelle ouverture faut-il donner à un compas pour tracer une circonférence équivalente au périmètre d'un hexagone régulier dont le côté a $0^M,35$?

161. Quel est le rayon d'un arc de 30^0 ayant 157 mètres de développement ?

162. Une roue dentée fait mouvoir en ligne droite une crémaillère qui avance de $0^M,63$ pendant que la roue fait 3 tours; quel est le diamètre de la roue ?

163. Une voiture a parcouru en 150 tours de roue 425 mètres; quel est le rayon de ses roues ?

164. La roue de derrière d'un vélocipède, ayant $2^M,85$ de circonférence, fait 9 tours pendant que la roue de devant en fait 6; quels sont les rayons des deux roues?

La corde d'un arc (*fig.* 23) est la ligne droite qui joint ses deux extrémités, et sa flèche, la ligne perpendiculaire élevée au milieu de la corde et terminée à l'arc.

Appelant :

r le rayon d'un arc,
c la corde,
f la flèche,

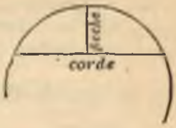

Fig. 23.

on a :

(67) $$r = \frac{c^2 + 4f^2}{8f}.$$

Exemple : *Quel est le rayon d'un arc dont la corde a* $2^{M},3$ *et la flèche* $0^{M},2$?

$$x = \frac{2,3^2 + 4 \times 0,2^2}{8 \times 0,2} = 3^{M},406.$$

EXERCICES.

165. On veut tracer une arcade ayant $3^{M},25$ d'ouverture et une flèche de $0^{M},85$; quelle longueur faut-il donner au rayon ?

166. D'une ancienne tour ronde il ne subsiste qu'un fragment de mur, par lequel on a pu mesurer une corde de 3 mètres ayant une flèche de $0^{M},65$; quels étaient le rayon et la circonférence de la tour ?

167. Quel est le rayon du cercle circonscrit à un polygone régulier dont le côté a 4 mètres et sous-tend un arc dont la flèche a $0^{M},13$?

Si l'on connaissait la flèche et le rayon d'un arc, on calculerait la corde au moyen de la formule suivante :

(68) $$c = \sqrt{4f \times (2r - f)}.$$

Exemple : *Quelle est la corde d'un arc dont la flèche a* $2^{M},10$ et *le rayon 5 mètres ?*

$$x = \sqrt{4 \times 2,1 \times [(2 \times 5) - 2,1)]} = 8^{M},146.$$

EXERCICE.

168. Quel est le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de $0^{M},35$ de rayon et dans lequel est inscrit un cercle de $0^{M},3$ de rayon ? (Le côté cherché est une corde ; sa flèche égale le rayon du cercle circonscrit, moins le rayon du cercle inscrit ou apothème.)

On peut enfin calculer la flèche au moyen de la formule suivante, quand on connait le rayon et la corde :

(69) $$f = r \pm \sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}.$$

Exemple : *Quelle est la flèche d'un arc qui a 4 mètres de corde et 16 mètres de rayon ?*

$$x = 16 - \sqrt{16^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2} = 0^{\text{M}},126.$$

$$y = 16 + \sqrt{16^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2} = 31^{\text{M}},874.$$

On remarquera qu'il y a deux solutions, à cause du signe $\pm$ devant le radical : c'est qu'en effet une même corde sous-tend toujours deux arcs de même rayon. On vérifiera que la somme des deux flèches est égale à 32 mètres, c'est-à-dire au diamètre.

EXERCICES.

169. Quelle est la flèche d'un arc de 6 mètres de corde et de 3 mètres de rayon ? (Dans ce cas particulier, la corde étant égale au double du rayon, c'est-à-dire au diamètre, on devra trouver la flèche égale au rayon et les deux solutions devront se réduire à une seule, la partie sous le radical étant nulle.)

170. Quelles sont les longueurs des deux segments d'un diamètre de 7 mètres coupé par une corde de 3 mètres qui lui est perpendiculaire ?

La surface du cercle est donnée par la formule suivante :

(70) $$S = \pi r^2.$$

Exemple : *Quelle est la surface d'un cercle qui a* 5 *mètres de rayon ?*

$$x = 3,1416 \times 5^2 = 78^{\text{Mq}},542$$

EXERCICE.

171. On a découpé dans une plaque de cuivre carrée, pesant $2^{\text{KG}},225$ et ayant $0^{\text{M}},842$ de côté, un cercle dont le diamètre est égal au côté du carré : combien pèse le cercle ?

SECTEUR DE CERCLE

Le secteur d'un cercle (*fig.* 24) est l'espace circonscrit par un arc et par les deux rayons menés par les extrémités de cet arc. On en calcule la surface par le moyen de la formule suivante, dans laquelle :

Fig. 24.

S représente l'aire du secteur,
a l'arc,
r le rayon.

(71) $$S = \frac{ar}{2}.$$

Exemple : *Quelle est l'aire d'un secteur de cercle dont l'arc a 16 mètres et le rayon 10 mètres ?*

$$x = \frac{16 \times 10}{2} = 80 \text{ mètres carrés.}$$

EXERCICE.

172. Quelle est l'aire d'un secteur de cercle qui a 5 mètres de rayon et dont l'arc a 30° ? (On réduira d'abord la valeur de l'arc en mètres.)

ELLIPSE

L'ellipse (*fig.* 25) est une courbe telle que la somme des distances de tous les points à deux points fixes appelés foyers (F, F′) est constante.

La droite qui joint les deux foyers et se termine à la courbe s'appelle grand axe de l'ellipse.

La droite perpendiculaire au milieu du grand axe et se terminant à la courbe s'appelle petit axe de l'ellipse.

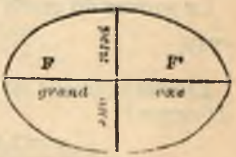

Fig. 25.

Soit :

A le grand axe de l'ellipse,
a son petit axe,
P son périmètre,

on a :

(72) $$P = \frac{\pi \times (A + a)}{2}.$$

Exemple : *Quelle est la longueur d'une ellipse dont le grand axe a 12 mètres et le petit* 8 ?

$$x = \frac{3,1416\,(12+8)}{2} = 31^{\text{M}},416.$$

EXERCICE.

173. La terre décrit autour du soleil une orbite elliptique dont le grand axe a 155363633 kilomètres et le petit axe 144038167 kilomètres; on demande l'espace parcouru par la terre dans une année.

La surface de l'ellipse est donnée par la formule suivante :

(73) $$S = \frac{\pi A a}{4}.$$

Exemple : *Quelle est la surface d'une ellipse dont le grand axe a 12 mètres et le petit axe* 9 ?

$$x = \frac{3,1416 \times 12 \times 9}{4} = 84^{\text{Mq}},8232.$$

EXERCICE.

174. Quelle est la surface d'une ellipse dont les axes ont tous les deux 7 mètres ? (L'ellipse proposée devra se confondre avec le cercle.)

On tire de la formule (73) :

(74) $$A = \frac{4S}{\pi a}, \quad a = \frac{4S}{\pi A}.$$

Exemple : *L'un des axes d'une ellipse de 14 mètres carrés de superficie a 16 mètres de longueur; quelle est la longueur de l'autre axe ?*

$$x = \frac{4 \times 14}{3,1416 \times 16} = 1^{\text{M}},114.$$

EXERCICE.

175. Un jardinier veut tracer une ellipse de 2 mètres carrés en donnant à l'un des axes une longueur de 2 mètres; quelle longueur doit-il donner à l'autre axe?

CHAPITRE II

VOLUMES

PYRAMIDES

Les pyramides (*fig.* 26) sont des solides formés par des triangles contigus, dont les sommets aboutissent au même point, et dont les bases, situées dans le même plan, forment un polygone.

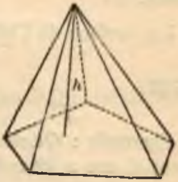

Fig. 26.

On dit que la pyramide est triangulaire, ou quadrangulaire, ou pentagonale, etc., selon que la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc.

La hauteur de la pyramide (h, *fig.* 26) est la perpendiculaire abaissée de son sommet sur sa base.

Appelant :

V le volume de la pyramide,
b sa base,
h sa hauteur,

on a :

(75)
$$V = \frac{b\,h}{3}.$$

Exemple : *Quel est le volume d'une pyramide dont la base a* $3^{Mq},25$ *et la hauteur* $2^{M},4$?

$$x = \frac{3,25 \times 2,4}{3} = 2^{Mc},6.$$

EXERCICES.

176. Quel est le volume d'une pyramide de $2^{M},7$ de hauteur, et dont la base est un triangle rectangle dans lequel les côtés de l'angle droit ont $1^{M},12$ et $0^{M},95$?

177. Quel est le poids d'une pyramide en marbre à base carrée, qui a $2^{M},05$ de hauteur et dont la base a $0^{M},66$ de côté, la densité du marbre étant 2,75, c'est-à-dire le décimètre cube pesant $2^{KG},75$?

178. La pyramide de Chéops, ou grande pyramide d'Égypte, est haute de 128 mètres, et sa base, de forme carrée, a 227 mètres de côté; on demande : 1° le volume de cette pyramide; 2° son poids, en supposant aux matériaux dont elle est composé une densité de 2,3.

179. Quel est le volume d'une pyramide à base carrée (*fig.* 27) de 2 mètres de côté, et dont les arêtes latérales ont 3 mètres ? (On trouvera la hauteur en considérant qu'elle a son pied à l'intersection des deux diagonales de la base, qu'on peut calculer, et qui se coupent mutuellement en deux parties égales. La diagonale est l'hypoténuse d'un des triangles de la base; la hauteur de la pyramide est l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle dont les autres côtés sont l'arête latérale et la demi-diagonale.)

Fig. 27.

De la formule (75) on tire :

(76) $$b = \frac{3\,V}{h}.$$

Exemple : *Quelle est la superficie de la base d'une pyramide qui a* $4^{Mc},4$ *de volume et* $2^{M},2$ *de hauteur?*

$$x = \frac{3 \times 4,4}{2,2} = 6 \text{ mètres carrés.}$$

EXERCICE.

180. Quel est le côté de la base carrée d'une pyramide qui a $8^{Mc},325$ de volume, et dont la hauteur est de 10 mètres?

On tire aussi de la formule (75) :

(77) $$h = \frac{3\,V}{b}.$$

Exemple : *Quelle est la hauteur d'une pyramide qui a* 32 *mètres cubes de volume et* 6 *mètres carrés de base?*

$$x = \frac{3 \times 32}{6} = 16 \text{ mètres.}$$

EXERCICE.

181. Une pyramide d'un volume de $7^{Mc},5$ a pour base un triangle équilatéral de 4 mètres de côté; quelle est la hauteur de cette pyramide ?

CÔNE

On appelle cône (*fig.* 28) une pyramide dont la base est une courbe.

Le cône est dit à *base circulaire* lorsque sa base est un cercle.

Il est *droit* lorsque la perpendiculaire abaissée de son sommet sur la base tombe au centre de celle-ci.

Fig. 28.

Appelant :

S la surface latérale du cône droit à base circulaire;
h sa hauteur;
g sa génératrice, c'est-à-dire la droite menée du sommet à l'un des points de la circonférence de la base;
r le rayon de la base,

on a :

(78) $$S = \pi r g.$$

ou :

(79) $$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

1er exemple : *Quelle est la surface latérale d'un cône droit à base circulaire dont la base a* $0^M,30$ *de rayon et la génératrice a* $0^M,65$?

$$S = 3,1416 \times 0,3 \times 0,65 = 0^{Mq},6126.$$

2e exemple : *Quelle est la surface latérale d'un cône droit à base circulaire dont la base a* $0^M,25$ *de rayon et dont la hauteur est de* $0^M,4$?

$$x = 3,1416 \times 0,25 \times \sqrt{0,25^2 + 0,4^2} = 0^{Mq},37.$$

EXERCICE.

182. Les 8 baleines d'un parapluie ouvert sont distantes l'une de l'autre, à leur extrémité inférieure, de $0^M,22$ et longues de $0^M,75$; on demande quelle surface de soie on a employée pour garnir ce parapluie. (On supposera le parapluie développé en cône, et l'on calculera le rayon de la base au moyen de sa circonférence.)

De la formule (78) on tire la formule :

(80) $$r = \frac{S}{\pi g},$$

qui donne le rayon de la base du cône quand on connaît sa surface latérale et sa génératrice.

Exemple : *Quel est le rayon de la base d'un cône droit à base circulaire qui a* $0^{Mq},46$ *de surface latérale et dont la génératrice a* $0^{M},75$?

$$x = \frac{0,46}{3,1416 \times 0,75} = 0^{M},195.$$

EXERCICE.

183. Pour faire un entonnoir, on a employé un secteur de ferblanc de $0^{Mq},066$ de surface, et de $0^{M},25$ de rayon; on demande quelle sera l'ouverture de l'entonnoir, c'est-à-dire le diamètre de la base du cône. (On considérera que le rayon du secteur est la génératrice du cône; on pourra donc calculer le rayon et en conclure le diamètre.)

On tire encore de la formule (78) :

(81)
$$g = \frac{S}{\pi r}.$$

Exemple : *Quelle est la génératrice d'un cône dont la surface est de 4 mètres carrés, et dont la base a un rayon de* $1^{M},2$?

$$x = \frac{4}{3,1416 \times 1,2} = 1^{M},061.$$

EXERCICE.

184. On a fait un parapluie avec $1^{Mq},62$ de soie, et le parapluie a, inférieurement, $3^{M},5$ de circonférence ; on demande quelle est la longueur des baleines.

La formule du volume de la pyramide (75), applicable au cône, devient, pour le cône droit à base circulaire :

(82)
$$V = \frac{\pi r^2 h}{3},$$

et

(83)
$$V = \frac{\pi r^2 \sqrt{g^2 - r^2}}{3}.$$

1er exemple : *Quel est le volume d'un cône droit à base circulaire qui a* $0^{M},16$ *de rayon à la base et* $0^{M},18$ *de hauteur ?*

$$x = \frac{3,1416 \times 0,16^2 \times 0,18}{3} = 0^{Mc},004825.$$

2e exemple : *Quel est le volume d'un cône droit à base circulaire qui a $0^{M},13$ de rayon à la base, et dont la génératrice a $0^{M},22$?*

$$x = \frac{3,1416 \times 0,13^2 \times \sqrt{0,22^2 - 0,13^2}}{3} = 0^{Mc},003149.$$

EXERCICES.

185. Un fourneau de mine, en faisant explosion, a produit dans le sol une excavation de forme conique ayant $1^{M},5$ de largeur et $1^{M},8$ de profondeur; on demande quelle est la quantité de terre rejetée par l'explosion.

186. Combien pèse un cône d'or massif qui a 3 centimètres de hauteur et dont la base a 2 centimètres de rayon, la densité de l'or étant 19,26 ($19^{G},26$ par centimètre cube)?

187. Quelle est la capacité d'un entonnoir dont la base a 8 centimètres de diamètre et dont la génératrice égale 9 centimètres?

On tire de la formule (82) :

$$r = \sqrt{\frac{3\,V}{\pi\, h}}. \tag{84}$$

Exemple : *Un cône droit à base circulaire a un volume de $2^{Mc},054$ et une hauteur de $0^{M},96$; quel est le rayon de sa base ?*

$$x = \sqrt{\frac{3 \times 2,054}{3,1416 \times 0,96}} = 2^{M},043.$$

EXERCICE.

188. Trouver le rapport des bases d'un cube et d'un cône à base circulaire qui ont même volume et même hauteur. (On prendra le volume du cube pour unité de volume, l'une de ses faces pour unité de superficie, l'une de ses arêtes pour unité de longueur.)

La même formule donne :

$$h = \frac{3\,V}{\pi r^2}. \tag{85}$$

Exemple : *Quelle est la hauteur d'un cône à base circulaire qui a un volume de $0^{Mc},456$ et dont la base a un rayon de $0^{M},64$?*

$$x = \frac{3 \times 0,456}{3,1416 \times 0,64^2} = 1^{M},063$$

EXERCICE.

189. Quel est le rapport de la hauteur d'un cône à l'arête d'un cube de même volume et de base équivalente ? (Même observation qu'au numéro précédent.)

TRONC DE PYRAMIDE A BASES PARALLÈLES

Si l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à la base, le solide qui en résulte (*fig.* 29) s'appelle un tronc de pyramide à bases parallèles.

Appelant :

V le volume du tronc,
B sa base inférieure,
b sa base supérieure,
h la hauteur du tronc ou la perpendiculaire commune aux deux bases,

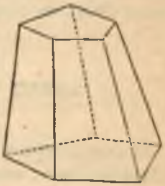

Fig. 29.

on a :

$$V = \frac{(B + b + \sqrt{B \times b}) \times h}{3}. \qquad \textbf{(86)}$$

Exemple : *Quel est le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, dont la base inférieure a 3 mètres carrés de superficie, la base supérieure 2 mètres carrés, et la hauteur* $0^{M},3$?

$$x = \frac{(3 + 2 + \sqrt{3 \times 2}) \times 0{,}3}{3} = 0^{Mc},745.$$

EXERCICE.

190. L'obélisque de la place de la Concorde, non compris le pyramidion qui le surmonte, est un tronc de pyramide à bases carrées, dont l'inférieure a $2^{M},425$ et la supérieure $1^{M},65$; sa hauteur est de 22 mètres. On demande : 1° son volume, 2° son poids, la densité du granit dont elle est composée étant 2,80 ($2^{KG},80$ par décimètre cube.)

On pourrait, si l'on connaissait les bases parallèles et le volume du tronc de pyramide, en calculer la hauteur, au moyen de la formule suivante :

$$h = \frac{3\,V}{B + b + \sqrt{B \times b}}. \qquad \textbf{(87)}$$

Exemple : *Quelle est la hauteur d'un tronc de pyramide* *dont les bases parallèles ont* 3 *et* 2 *mètres carrés, et dont le volume est de* 14 *mètres cubes?*

$$x = \frac{3 \times 14}{3 + 2 + \sqrt{3 \times 2}} = 5^{M},638.$$

EXERCICE.

191. A quelle hauteur faut-il couper une pyramide à base carrée de $0^{M},82$ de côté, pour que la section parallèle à la base ayant $0^{M},41$ de côté, le volume du tronc soit $0^{Mc},5$?

TRONC DE CONE A BASES CIRCULAIRES

Si l'on coupe un cône à base circulaire par un plan parallèle à la base, on obtient un solide (*fig.* 30) dont la surface latérale est donnée par la formule suivante :

Fig. 30.

(88) $$S = \pi h (R + r),$$

dans laquelle R représente le rayon de la grande base, r le rayon de la petite base, h la hauteur du tronc.

Exemple : *Quelle est la surface latérale d'un tronc de cône droit à bases circulaires de* $2^{M},5$ *et de* $1^{M},5$ *de rayon, et dont la hauteur est* $0^{M},45$?

$$x = 3,1416 \times 0,45 \times (2,5 + 1,5) = 5^{Mq},6548.$$

EXERCICES.

192. Quelle est la surface d'un abat-jour de lampe dont l'ouverture inférieure a 18 centimètres de diamètre, l'ouverture supérieure 6 centimètres et la hauteur 12 centimètres ?

193. Combien pèse une douzaine d'abat-jour en cuivre de $0^{M},0004$ d'épaisseur, $0^{M},05$ de hauteur, $0^{M},07$ de rayon à la base inférieure et $0^{M},03$ à la base supérieure, la densité du cuivre étant 8,95 ?

Si l'on connaissait la surface et les rayons des bases, on pourrait calculer la hauteur à l'aide de la formule suivante :

(89) $$h = \frac{S}{\pi (R + r)}.$$

Exemple : *Quelle est la hauteur d'un tronc de cône droit* *à bases circulaires ayant 24 et 6 centimètres de diamètre, et dont la surface est de 6600 centimètres carrés ?*

$$x = \frac{6600}{3,1416\,(24+6)} = 70 \text{ centimètres.}$$

EXERCICE.

194. Pour fabriquer un abat-jour de lampe, on a décrit, sur la feuille de papier (*fig.* 31), une circonférence de 25 centimètres de rayon, une seconde circonférence de 5 centimètres de rayon concentrique à la première, et l'on a retranché le cercle circonscrit par la seconde circonférence ; menant ensuite deux rayons R, R de la grande circonférence, on a retranché le quart de la couronne circulaire limitée par ces deux rayons, et l'on a collé bord à bord, suivant R et R, la partie restante ; on demande : 1° les rayons des deux bases de l'abat-jour ; 2° sa surface ; 3° sa hauteur.

Fig. 31.

On peut, de même, calculer l'un des rayons lorsqu'on connaît l'autre rayon, la hauteur et la surface latérale.

$$(90) \qquad R = \frac{S}{\pi h} - r, \qquad r = \frac{S}{\pi h} - R.$$

Exemple : *Un tronc de cône droit à base circulaire a* 2500 *centimètres carrés de surface latérale,* 10 *centimètres de hauteur,* 70 *centimètres de rayon à l'une des bases ; quel est le rayon de l'autre base ?*

$$x = \frac{2500}{3,1416 \times 10} - 70 = 9^{cm},5.$$

EXERCICE.

195. Avec des feuilles de cuivre qui pèsent 2 kilogrammes par mètre carré, on a fabriqué 10 abat-jour égaux, qui pèsent ensemble $3^{KG},5$, ont une ouverture inférieure de $0^{M},12$ de rayon et une hauteur de $0^{M},15$; on demande quel est le rayon de leur ouverture supérieure.

Le volume d'un tronc de cône à base circulaire se calcule par la formule suivante :

$$(91) \qquad V = \frac{\pi h\,[R^2 + r^2 + (R \times r)]}{3}.$$

Exemple : *Quel est le volume d'un tronc de cône à bases* *circulaires, qui a 24 centimètres de hauteur et dont les bases ont 8 et 3 centimètres de rayon ?*

$$x = \frac{3{,}1416 \times 24 \times [8^2 + 3^2 + (8 \times 3)]}{3} = 2437^{\text{cmc}},8816.$$

EXERCICE.

196. Une marmite de restaurant en forme de tronc de cône a 64 centimètres de diamètre au fond, 86 centimètres à l'ouverture supérieure et une profondeur de 120 centimètres ; combien peut-elle contenir de litres de bouillon ? (On réduira les dimensions en décimètres, pour obtenir directement des décimètres cubes ou litres.)

Si le volume et les rayons des bases étaient connus, on calculerait la hauteur par la formule suivante :

(92)
$$h = \frac{3\,V}{\pi\,[R^2 + r^2 + (R \times r)]}.$$

Exemple : *Quelle est la hauteur d'un tronc de cône dont les bases ont 8 et 5 centimètres de rayon et dont le volume est de 240 centimètres cubes ?*

$$x = \frac{3 \times 240}{3{,}1416 \times [8^2 + 5^2 + (8 \times 5)]} = 1^{\text{cm}},77.$$

EXERCICE.

197. Un bassin en forme de tronc de cône, qui a 24 mètres de diamètre au fond et 26 mètres au bord supérieur, a été rempli en 15 heures par une fontaine qui débite 2122 litres à l'heure ; on demande la profondeur de ce bassin.

PRISMES QUELCONQUES

Les prismes (*fig.* 32) sont des solides limités par deux bases ou polygones égaux et parallèles dont les côtés correspondants sont joints par des parallélogrammes. La hauteur du prisme est la perpendiculaire commune aux deux bases.

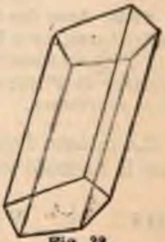

Fig. 32.

Appelant :

V le volume du prisme,
b sa base,
h sa hauteur,

on aura :

(93)
$$V = b\,h.$$

Exemple : *Quel est le volume d'un prisme dont la base a* $2^{Mq},25$ *et la hauteur* $0^{M},64$?

$$x = 2,25 \times 0,64 = 1^{Mc},44.$$

EXERCICES.

198. Un prisme a pour base un triangle rectangle dont l'hypoténuse a $1^{M},35$ et l'un des côtés de l'angle droit, égal à la hauteur du prisme, $1^{M},12$; quel est son volume ?

199. Un prisme rectangulaire (c'est-à-dire dont les arêtes latérales sont perpendiculaires aux bases) a pour base un trapèze dont les côtés parallèles ont 3 et 5 mètres, et la hauteur $1^{M},1$; l'arête latérale du prisme ayant $2^{M},45$, on demande son volume.

200. Une colonne en marbre de forme prismatique à six pans a pour base un hexagone régulier de $0^{M},26$ de côté; sa hauteur est de $2^{M},36$ et la densité du marbre 2,75 ; quels sont le volume et le poids de la colonne ? (On se rappellera que, dans l'hexagone régulier, le rayon du cercle circonscrit est égal au côté, et l'on en déduira l'apothème.)

201. Les rayons de miel des abeilles sont composés d'alvéoles de forme prismatique régulière, à 6 pans, de $0^{M},003$ de côté et de $0^{M},011$ de profondeur; le miel pesant $1^{KG},22$ le litre, on demande le poids du miel contenu dans un rayon de 5250 alvéoles ?

La formule (93) donne :

$$b = \frac{V}{h}, \tag{94}$$

nouvelle formule qui permet de calculer la base d'un prisme lorsqu'on connaît son volume et sa hauteur.

Exemple : *Quelle est la base d'un prisme dont le volume est de* $0^{Mq},765$ *et la hauteur* $0^{M},75$?

$$x = \frac{0,765}{0,75} = 1^{Mq},02.$$

EXERCICE.

202. Avec 1120 kilogrammes de plomb (densité 11,35) on a coulé une colonne de forme prismatique ayant $1^{M},8$ de hauteur; on demande quelle dimension on a donnée à la base du prisme.

On tire aussi de la formule (93) :

$$h = \frac{V}{b}, \tag{95}$$

formule qui donne la hauteur quand on connaît la base et le volume.

Exemple : *Quelle est la hauteur d'un prisme qui a 3 mètres cubes de volume et dont la base a* $0^{Mq},75$?

$$x = \frac{3}{0,75} = 4 \text{ mètres.}$$

EXERCICE.

203. Une citerne de forme prismatique, ayant $8^{Mq},25$ de base, reçoit les eaux de 632 mètres carrés de toits ; quelle hauteur d'eau a versée dans cette citerne un orage qui a donné $0^{M\bullet},025$ d'eau par mètre carré ?

PRISMES DROITS


Fig. 33.

Un prisme est dit droit (*fig.* 33) quand toutes ses faces latérales sont des rectangles.

Le prisme droit jouit des propriétés générales du prisme ; mais on remarquera que sa hauteur se confond avec l'une quelconque de ses arêtes latérales. Nous n'avons, à cela près, aucune observation particulière à faire sur ce solide, auquel on appliquera les formules (93, 94 et 95).

PARALLÉLIPIPÈDES RECTANGLES


Fig. 34.

Les parallélipipèdes (*fig.* 34) sont des prismes dont les bases sont des parallélogrammes, et qui sont, par conséquent, limités par six parallélogrammes parallèles et égaux deux à deux. On peut prendre pour base l'une quelconque des faces.

Les propriétés des parallélipipèdes sont celles des prismes, et on leur applique les mêmes formules (93, 94 et 95) ; mais il existe deux cas particuliers très importants, qui sont ceux des parallélipipèdes rectangles et du cube.

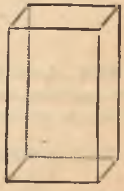
Fig. 35.

Un parallélipipède est dit rectangle (*fig.* 35) quand toutes ses faces sont des rectangles.

La hauteur de la base se confondant, en ce cas, avec un côté, et la hauteur du solide avec une arête latérale, si l'on appelle a, b et c les trois dimensions du solide, la formule (93) se transforme en celle-ci :

$$(96) \qquad V = a \times b \times c.$$

Exemple : *Quel est le volume d'un parallélipipède rectangle qui a* $3^{M},2$, $1^{M},4$ *et* $2^{M},5$ *de côtés ?*

$$x = 3,2 \times 1,4 \times 2,5 = 11^{Mc},2.$$

EXERCICES.

204. Un bassin de forme rectangulaire ayant $1^{M},24$ de long sur $5^{M},85$ de large est alimenté par une fontaine; l'eau ayant atteint, en 6 heures, dans le bassin, une hauteur de $2^{M},5$, on demande combien la fontaine débite de litres d'eau par minute.

205. La densité d'un bloc de marbre étant 2,75 (2^{KG} 75 par décimètre cube), et ses dimensions étant $0^{M},75$, $1^{M},12$, $1^{M},25$, on demande le poids de ce bloc.

206. L'air est composé, en volume, de 0,209 d'oxygène et de 0,791 d'azote; on demande le volume de l'air, de l'oxygène et de l'azote que contient une chambre longue de $5^{M},25$, large de $4^{M},15$, haute de $3^{M},52$.

De la formule (96) on tire :

$$(97) \qquad a = \frac{V}{bc},$$

nouvelle formule au moyen de laquelle on peut calculer l'une des dimensions d'un parallélipipède rectangle, quand on connaît son volume et ses autres arêtes.

Exemple : *Quelle est la hauteur d'un parallélipipède rectangle dont la base a 7 décimètres de long sur 6 décimètres de large, et qui a* $30^{dmc},786$ *de volume?*

$$x = \frac{30,786}{7 \times 6} = 0^{dm},733.$$

EXERCICES.

207. Une fontaine donnant 65 litres d'eau par minute coule dans un bassin de forme rectangulaire, qui a $18^{M},4$ de longueur sur $8^{M},75$ de largeur; quelle hauteur atteindra l'eau dans ce bassin, au bout de 7 heures?

208. Des terrassiers, occupés à creuser un fossé de 60 mètres de long sur $2^{M},5$ de largeur, ont achevé leur travail en 36 heures; ces ouvriers ayant extrait, en moyenne, 14 mètres cubes de terre par heure, on demande quelle était la profondeur du fossé.

CUBE

Le cube est un parallélipipède rectangle dont les trois côtés sont égaux ; en appelant c son arête et en lui appliquant la formule (96), on a donc :

(98) $$V = c^3.$$

Exemple : *Quel est le volume d'un cube qui a* $0^{M},25$ *de côté ?*

$$x = 0{,}25^3 = 0^{Mc},015625.$$

EXERCICES.

209. Des matières argentées par le procédé Ruolz étant couvertes d'une couche d'argent de $0^{M},00007$ d'épaisseur, on demande quelle surface on pourrait argenter avec un cube d'argent ayant $0^{M},015$ de côté.

210. Un cube de bois de $0^{M},12$ de côté pèse $1^{KG},25$; on demande la densité (le poids en kilogrammes par décimètre cube) de ce bois.

211. Combien peut contenir de dés de $1^{cm},3$ de côté une boîte rectangulaire de $16^{cm},9$ de longueur, $7^{cm},8$ de largeur et $6^{cm},5$ de profondeur ?

La formule précédente donne :

(99) $$c = \sqrt[3]{V}.$$

On peut donc calculer le côté d'un cube dont on connaît le volume.

Exemple : *Quel est le côté d'un cube dont le volume est* $3^{Mc},241792$?

$$x = \sqrt[3]{3{,}241792} = 1^{M},48.$$

EXERCICES.

212. Une caisse à eau en tôle, de forme cubique, ouverte dans la partie supérieure, contient $10^{Mc},648$ de liquide ; on demande le poids de la caisse vide, sachant que la tôle a $0^{M},005$ d'épaisseur et que sa densité (son poids en grammes par centimètre cube) est 7,79.

213. On veut construire une boîte en bois, de forme cubique, ayant $0^{M},009$ d'épaisseur, et pouvant contenir 1331 dés de $0^{M},011$ de côté; on demande quelles devront êtres les dimensions intérieures et extérieures de la boîte. (On remarquera que l'épaisseur s'ajoute deux fois à la dimension intérieure.)

CYLINDRES

Un cylindre (*fig.* 36) peut être considéré comme un prisme d'un nombre infini de faces; son volume, par conséquent, est égal au produit de sa base par sa hauteur.

Dans le cas particulier du cylindre droit à base circulaire la formule de la surface latérale est :

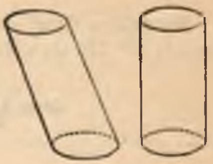

Fig. 36.

(100) $S = 2 \pi r h.$

Exemple : *Quelle est la surface latérale d'un cylindre droit à base circulaire qui a* $0^{M},8$ *de rayon à la base et* 3 *mètres de hauteur ?*

$$x = 2 \times 3{,}1416 \times 0{,}8 \times 3 = 15^{Mq},0796.$$

EXERCICES.

214. Quelle est la surface de frottement d'un piston cylindrique qui a $0^{M},45$ de diamètre et $0^{M},22$ de hauteur?

215. On a crépi, au prix de $0^{f},25$ le mètre carré, l'intérieur d'une citerne ronde ayant $2^{M},25$ de profondeur et $3^{M},84$ de circonférence; combien a coûté ce travail? (On remarquera, pour simplifier, que $2 \pi r$ est la formule de la circonférence.)

La formule du volume du prisme (93), appliquée au cylindre, devient :

(101) $V = \pi r^2 h.$

Exemple : *Quel est le volume d'un cylindre dont la base a* $0^{M},3$ *de rayon et qui a* $0^{M},7$ *de hauteur ?*

$$x = 3{,}1416 \times 0{,}3^2 \times 0{,}7 = 0^{Mc},197920.$$

EXERCICES.

216. On a recueilli dans une citerne de forme circulaire et de 3 mètres de diamètre les eaux d'un toit ayant 235 mètres carrés de projection horizontale, c'est-à-dire correspondant, au point de vue actuel, à une surface horizontale de cette dimension; or, pendant une pluie d'orage, le niveau des eaux de la citerne s'est élevé de $0^{M},5$; on demande combien il est tombé d'eau par mètre carré, durant cette pluie.

217. La densité du plomb étant 11,35, on demande le poids d'un tuyau de plomb de 25 mètres de long, $0^{M},04$ de diamètre extérieur et $0^{M},008$ d'épaisseur. (Le volume est donné par la différence du cylindre intérieur et du cylindre extérieur.)

De la formule (101) on tire :

(102) $$r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}.$$

Exemple : *Quel est le rayon de la base d'un cylindre qui a* $0^{Mc},746$ *de volume et* $0^{M},25$ *de hauteur ?*

$$x = \sqrt{\frac{0,746}{3,1416 \times 0,25}} = 0^{M},97.$$

EXERCICES.

218. On veut construire un décalitre cylindrique ayant une hauteur de 50 centimètres; quel diamètre faut-il donner à la base ?

219. On veut creuser une citerne ronde de $2^{M},8$ de profondeur, pouvant contenir 14 mètres cubes d'eau; quelle largeur faut-il donner à cette citerne ?

On tire de la même formule :

(103) $$h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Exemple : *Quelle est la hauteur d'un cylindre qui a un volume de* $0^{Mc},754$ *et dont le rayon de base a* $0^{M},62$?

$$x = \frac{0,754}{3,1416 \times 0,62^2} = 0^{M},624.$$

EXERCICES.

220. Quand la température du mercure s'élève de 1 degré, son volume s'accroît de 0,000156 du volume primitif; on demande de combien s'allonge la colonne mercurielle d'un thermomètre qui contient 2 centimètres carrés de mercure, et dont le tube a 3 millimètres de diamètre, quand la température s'élève de 14° à 15°.

221. On a déversé dans un puits de $1^{M},8$ d'ouverture les eaux d'une fontaine qui fournit 15 litres par minute, et le puits a été rempli en deux jours; quelle est sa profondeur ?

222. On veut découper une verge de fer de 2 centimètres de diamètre en tronçons d'un poids uniforme de $763^{G},42$; la densité du fer étant 7,79, on demande quelle longueur il faudra donner aux tronçons.

CAPACITÉ DES TONNEAUX

Les tonneaux, formés de deux plans circulaires égaux et parallèles, et d'une surface courbe engendrée par un arc de cercle dont le rayon varie à volonté dans certaines limites, n'ont pas une forme nécessairement déterminée, et l'on ne saurait, par conséquent, donner une formule absolue qui permette de les jauger exactement.

On a proposé un très grand nombre de formules donnant un résultat approximatif.

Celle qui a été adoptée par l'administration française est basée sur cette hypothèse que l'on peut réduire un tonneau à un cylindre ayant pour hauteur la longueur intérieure de la pièce, et dont la base aurait pour diamètre le diamètre de la pièce à la bonde, moins le tiers de la différence entre ce diamètre et celui du fond. Dans cette hypothèse, qui est une approximation suffisante, la capacité du tonneau se ramène à la formule suivante, dans laquelle R représente le rayon à la bonde, r le rayon du fond, h la longueur entre les fonds :

$$(\mathbf{104}) \qquad V = \pi h \left(\frac{2R + r}{3}\right)^2.$$

Exemple : *Quelle est la capacité d'un tonneau qui a* $1^{M},25$ *de longueur intérieure, 1 mètre de diamètre à la bonde et* $0^{M},70$ *de diamètre au fond ?*

$$x = 3{,}1416 \times 1{,}25 \times \left(\frac{(2\times 0{,}5) + 0{,}35}{3}\right)^2 = 0^{Mc},795217 = 795^{L},217.$$

EXERCICE.

223. Une ville perçoit 2 centimes de droit d'entrée par litre de vin ; combien est-il dû pour une pièce de vin qui a $0^{M},8$ de diamètre à chaque fond, $1^{M},2$ à la bonde et $1^{M},5$ de longueur intérieure ?

SPHÈRE

La sphère (*fig.* 37) est un solide qui a tous les points de sa surface à égale distance d'un même point appelé centre.

La droite qui joint le centre à un point quelconque de la surface s'appelle rayon de la sphère ; celle qui, passant par le centre, se termine à deux points de la surface est le diamètre de la sphère. Si l'on appelle S la surface, D le diamètre ou r le rayon de la sphère, on a :

Fig. 31.

(**105**) $$S = \pi D^2 = 4 \pi r^2.$$

Exemple : *Quelle est la surface d'une sphère de $2^M,5$ de diamètre ou de $1^M,25$ de rayon ?*

$$x = 3,1416 \times 2,5^2 = 4 \times 3,1416 \times 1,25^2 = 19^{Mq}635.$$

EXERCICES.

224. La terre a 6302378 mètres de rayon ; on demande quelle est sa superficie.

225. Combien faut-il de mètres carrés de toile pour fabriquer un aérostat de 6 mètres de diamètre ?

226. On veut faire peindre l'intérieur d'un dôme hémisphérique ayant 15 mètres d'ouverture ; la peinture étant estimée à $0^F,35$ le mètre carré, on demande ce qu'il en coûtera pour peindre le dôme entier.

La formule précédente donne :

(**106**) $$D = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \text{ et } r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}.$$

Exemple : *Quel est le diamètre ou quel est le rayon d'une sphère de $91^{Mq},125$ de surface ?*

$$x = \sqrt{\frac{91,125}{3,1416}} = 5^M,38 \text{ et } x' = \sqrt{\frac{91,125}{4 \times 3,1416}} = 2^M,69.$$

EXERCICES.

227. On a employé, dans la fabrication d'un aérostat, 432 mètres carrés de toile ; quel est son diamètre ?

228. Pour dorer une sphère, on a employé $0^G,15$ d'or ; sachant qu'il faut $0^G,005$ d'or pour dorer un mètre carré, on demande le rayon de la sphère.

Le volume de la sphère, quand on connaît son rayon ou son diamètre, se calcule au moyen de la formule suivante :

(**107**) $$V = \frac{4 \pi r^3}{3} = \frac{\pi D^3}{6}.$$

Exemple : *Quel est le volume d'une sphère qui a $0^{M},34$ de rayon ou $0^{M},68$ de diamètre ?*

$$x = \frac{4 \times 3,1416 \times 0,34^3}{3} = \frac{3,1416 \times 0,68^3}{6} = 0^{Mc},165.$$

EXERCICES.

229. La terre est une sphère de 6302 kilomètres de rayon; on demande quel est son volume.

230. Combien contient de litres une bassine hémisphérique ayant $0^{M},42$ d'ouverture ?

231. Quel est le poids d'un boulet sphérique de 13 centimètres de diamètre, et dont la densité est 7,2 ?

232. Combien faut-il de mètres cubes de gaz pour gonfler un aérostat à la fabrication duquel on a employé 144 mètres carrés de toile ?

On tire de la formule précédente :

$$(\mathbf{108}) \qquad r = \sqrt[3]{\frac{3\,V}{4\,\pi}} \quad \text{et} \quad D = \sqrt[3]{\frac{6\,V}{\pi}}.$$

Exemple : *Quel est le rayon ou le diamètre d'une sphère de $14^{Mc},425$ de volume ?*

$$x = \sqrt[3]{\frac{3 \times 14,425}{4 \times 3,1416}} = 1^{M},51 \text{ et } 2x = \sqrt[3]{\frac{6 \times 14,425}{3,1416}} = 3^{M},02.$$

EXERCICE.

233. Quel est le diamètre d'un boulet sphérique qui pèse 36 kilogrammes et dont la densité est 7,2 ?

SEGMENTS ET CALOTTES SPHÉRIQUES

On appelle segment sphérique (*fig.* 38) une portion de sphère comprise entre deux plans parallèles; calotte sphérique (*fig.* 39) la portion d'une sphère comprise entre sa surface et un plan qui la coupe.

Fig. 38.

Fig. 39.

La surface d'un segment sphérique et celle d'une calotte sphérique se calculent à l'aide de la formule suivante :

$$(\mathbf{109}) \qquad S = 2\pi R h,$$

dans laquelle R représente le rayon de la sphère et h la hauteur du segment ou de la calotte, c'est-à-dire la perpendiculaire commune aux deux cercles limitant le segment, ou la perpendiculaire élevée au milieu du cercle qui limite la calotte.

Exemple : *Quelle est la surface d'une zone qui a* $0^{M},35$ *de hauteur, la sphère ayant* $2^{M},4$ *de rayon?*

$$x = 2 \times 3,1416 \times 2,4 \times 0,35 = 5^{Mq},2779.$$

EXERCICE.

234. On a coupé une sphère de 2 mètres de rayon par trois plans perpendiculaires à un diamètre, et le divisant en trois parties qui sont entre elles comme les nombres 2, 3 et 5 ; on demande la superficie des deux calottes et du segment.

Le volume du segment sphérique se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$(\mathbf{110}) \qquad V = \frac{\pi h (3 R^2 + 3 r^2 + h^2)}{6},$$

dans laquelle R et r représentent les rayons des cercles qui limitent le segment.

Exemple : *Quel est le volume d'un segment sphérique qui a* $0^{M},8$ *de hauteur, et dont les bases ont* $0^{M},24$ *et* $0^{M},16$ *de rayon ?*

$$x = \frac{3,1416 \times 0,8 \times [(3 \times 0,24^2) + (3 \times 0,16^2) + (0,8^2)]}{6} = 0^{Mc},372.$$

EXERCICE.

235. On a coupé une sphère de 2 mètres de rayon de façon que les deux sections, qui sont des cercles parallèles, ont 2 et 4 mètres de rayon et sont distants entre eux de $0^{M},3$; quel est le volume du segment ?

Dans le cas de la calotte sphérique, r, et par conséquent $3\,r^2$, deviennent nuls et la formule se réduit à :

$$(\mathbf{111}) \qquad V = \frac{\pi h (3 R^2 + h^2)}{6}.$$

Exemple : *Quel est le volume d'une calotte sphérique qui a 2 mètres de hauteur et dont la base a 3 mètres de rayon ?*

$$x = \frac{3,1416 \times 2 \times [(3 \times 3^2) + (2^2)]}{6} = 32^{Mc},4632.$$

EXERCICE.

236. Une capsule de chimiste, en forme de calotte sphérique, a $0^M,24$ d'ouverture et $0^M,08$ de profondeur ; quelle est sa capacité ?

SECTEURS SPHÉRIQUES

Un secteur sphérique (*fig.* 40) peut être considéré comme un solide engendré par un secteur de cercle tournant autour d'un de ses rayons comme autour d'un axe. Il se compose d'une calotte sphérique dont la base a pour rayon la perpendiculaire abaissée d'une extrémité du rayon du secteur circulaire sur l'axe, et d'un cône qui a la même base et dont la hauteur égale le rayon de la sphère moins la hauteur de la calotte. On obtiendrait donc le volume du secteur en ajoutant le volume de la calotte à celui du cône ; mais on opère plus commodément au moyen de la formule suivante, dans laquelle h représente la hauteur de la calotte et R le rayon de la sphère.

Fig. 40.

(112)
$$V = \frac{2 \pi R^2 h}{3}.$$

Exemple : *Quel est le volume d'un secteur sphérique dont la sphère a 3 mètres de rayon et la calotte 2 mètres de hauteur ?*

$$x = \frac{2 \times 3,1416 \times 3^2 \times 2}{3} = 37^{Mc},699.$$

EXERCICE.

237. Combien pèse une grosse (douze douzaines) de toupies en bois de hêtre, en supposant que ces toupies sont des secteurs sphériques d'une hauteur totale de $0^M,06$, dont $0^M,045$ pour la hauteur de la partie conique, la densité du bois étant 0,845 ?

ELLIPSOÏDES DE RÉVOLUTION

Lorsqu'une demi-ellipse exécute autour d'un de ses axes un mouvement de rotation, elle engendre un solide qu'on appelle ellipsoïde de révolution.

Si le mouvement s'exécute autour du petit axe, l'ellipsoïde est dit aplati; s'il a lieu autour du grand axe, l'ellipsoïde est allongé.

Désignant par A le grand axe, par a le petit axe, par S la surface, on a :

$$S = \pi A a. \tag{113}$$

Exemple : *Quelle est la surface d'un ellipsoïde de révolution dont les axes ont l'un 4 mètres et l'autre 7 mètres?*

$$x = 3{,}1416 \times 7 \times 4 = 87^{Mq},9648.$$

EXERCICE.

238. Le globe terrestre a la forme d'un ellipsoïde de révolution dont le grand axe correspondrait à l'un des diamètres de l'équateur et l'autre au diamètre qui passe par les pôles; le premier de ces diamètres ayant 12755 kilomètres et le second 12712 kilomètres, on demande quelle est la superficie du globe.

Le volume de l'ellipsoïde de révolution s'obtient par la formule suivante :

$$V = \frac{\pi a a'^2}{6}, \tag{114}$$

dans laquelle a représente l'axe de révolution et a' l'autre axe.

Exemple : *Quel est le volume d'un ellipsoïde allongé dont l'axe de révolution a 7 mètres et l'autre axe 4 mètres ?*

$$x = \frac{3{,}1416 \times 7 \times 4^2}{6} = 58^{Mc},6432.$$

EXERCICES.

239. La terre est un ellipsoïde aplati dont le petit axe a 12712 kilomètres, et qui a, à l'équateur, 6377 kilomètres de rayon; on demande : 1° son volume; 2° son poids, sachant que sa densité moyenne est 5,44.

240. Quelle est la densité (poids en grammes d'un centimètre cube) d'une orange qui pèse 185 grammes et qui a la forme d'un ellipsoïde aplati dont la plus petite dimension a 6 centimètres et la plus grande 7 centimètres ?

PREMIER APPENDICE

FORMULES DE PHYSIQUE ET DE MÉCANIQUE

§ 1. — VOLUMES, POIDS ET DENSITÉS

Le volume d'un corps est la portion de l'espace qu'il occupe; son poids est la somme des forces qui le sollicitent à tomber; sa densité est le rapport de son poids à son volume ou, en d'autres termes, son poids absolu quand il est réduit à l'unité de volume.

Ayant choisi pour unité de densité la densité de l'eau, pour unité de volume le décimètre cube et pour unité de poids le poids du décimètre cube d'eau (1 kilogramme), on peut toujours trouver la densité d'un corps en divisant son poids par son volume, conformément à la formule :

(115) $$d = \frac{p}{V},$$

dans laquelle d représente la densité, p le poids et V le volume, mais à la condition que le poids soit exprimé en kilogrammes et le volume en décimètres cubes, ou le poids en grammes et le volume en centimètres cubes, etc., etc., ce qu'on obtient très facilement par de simples changements de virgules, car l'on sait que :

1 kilogramme = 10 hectogrammes = 100 décagrammes = 1000 grammes = 10000 décigrammes = 100000 centigrammes = 1000000 milligrammes = 0 tonne 001,

et que :

1 décimètre cube = 1000 centimètres cubes = 1000000 millimètres cubes = $0^{Mc},001$, etc.

Exemple : 400 *centimètres cubes d'argent fondu pèsent* 4188 *grammes ; on demande la densité de ce métal.*

La formule donne :

$$x = \frac{4188}{400} = 10,47.$$

La densité de l'argent fondu est donc de 10,47, c'est-à-dire que 1 centimètre cube d'argent fondu pèse $10^{G},47$, que 1 décimètre cube pèse $10^{KG},47$, etc.

EXERCICE.

241. Une pièce de 5 francs en argent contient $22^{G},5$ d'argent et $2^{G},5$ de cuivre ; on demande la densité de l'alliage, sachant que le volume de la pièce est de $2^{cmc},5024$.

De la formule (115) on tire :

(116) $$p = V d,$$

au moyen de laquelle on peut calculer le poids d'un corps dont on connaît le volume et la densité.

Exemple : *La densité de l'argent fondu étant* 10,47, *on demande le poids de* 400 *centimètres cubes de ce métal.*

Il vient, en appliquant la formule :

$$x = 400 \times 10,47 = 4188 \text{ grammes}.$$

EXERCICE.

242. La densité de l'or étant 19,26, on demande le poids d'une sphère massive d'or de 8 centimètres de diamètre.

De la formule (115) on tire également la formule :

(117) $$V = \frac{p}{d},$$

qui fait connaître le volume quand on connaît le poids et la densité.

Exemple : *Quel est le volume d'un lingot d'argent qui pèse* 4188 *grammes, la densité de l'argent étant* 10,47 ?

$$x = \frac{4188}{10,47} = 400 \text{ centimètres cubes}.$$

EXERCICE.

243. La terre pesant 6260000000000000000000 kilogrammes et sa densité moyenne étant 5,5, on demande son volume.

§ 2. — CALORIMÉTRIE

I. Chaleurs spécifiques.

On appelle calorie la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré la température d'un kilogramme d'eau, et chaleur spécifique la quantité de chaleur ou le nombre de calories nécessaires pour élever d'un degré la température d'un kilogramme d'un corps donné.

Ainsi, quand on dit que la chaleur spécifique de l'argent est 0,057, cela veut dire que la chaleur spécifique de l'argent est les 57 millièmes de celle de l'eau, ou, en d'autres termes, cela signifie que, tandis qu'il faut une certaine quantité de chaleur pour élever d'un degré la température d'un kilogramme d'eau, il ne faut que 0,057 de la même quantité pour élever d'un degré la température de l'argent.

Quand on connaît le poids d'un corps, la quantité en degrés dont sa température a varié, la quantité de chaleur ou le nombre de calories qu'il a absorbées ou perdues, on peut déterminer la chaleur spécifique de ce corps au moyen de la formule suivante :

(118)
$$c = \frac{q}{p\,(t' - t)},$$

dans laquelle c représente la chaleur spécifique, q la quantité de chaleur, p le poids du corps, t' sa température la plus élevée, t sa température la plus basse.

Il est à peine besoin de dire que $t' - t$ exprime la variation de la température et pourrait être représenté par un seul nombre, si l'on disait, par exemple, que la température du corps s'est élevée ou abaissée de 10 degrés, sans en exprimer ni la température initiale, ni la température actuelle.

Exemple : 5 *kilogrammes d'argent ont été portés de* 100° *à* 1000° (*température de fusion de ce corps*) *et ont absorbé* 256 *calories,* 5 ; *on demande la chaleur spécifique du métal.*

$$x = \frac{256,5}{5\,(1000 - 100)} = 0,057.$$

EXERCICES.

244. Pour fondre 2 kilogrammes de plomb à 20°, il a fallu développer 19 calories, 936 ; la température de fusion du plomb étant 332°, on demande la chaleur spécifique de ce corps.

245. 10 kilogrammes d'eau absorbant, pour passer de 0° à 100°, c'est-à-dire de l'état solide à l'état de vapeur, 1000 calories, on demande quelle est la chaleur spécifique de l'eau.

Quand on connaît la chaleur spécifique d'un corps, son poids et la variation de sa température, on calcule, au moyen de la formule suivante, le nombre de calories qu'il a absorbées ou perdues :

(119) $$q = c\,p\,(t' - t).$$

Exemple : *Un lingot d'argent pesant* 5 *kilogrammes et possédant une chaleur spécifique de* 0,057, *on demande quelle quantité de chaleur il perdrait en passant de* 1000°, *sa température de fusion, à* 100° ?

La formule donne :

$$x = 0{,}057 \times 5\,(1000 - 100) = 256 \text{ calories, } 5.$$

EXERCICES.

246. La chaleur spécifique de l'eau est 1; on demande quelle quantité de chaleur il faudrait pour porter 4 kilogrammes d'eau de 20° à la températnre de vaporisation, qui est 100°.

247. La combustion d'un kilogramme de houille développant 4500 calories et la chaleur spécifique du fer étant 0,1138, on demande combien il faudrait brûler de houille pour élever la température de 1000 kilogrammes de fer de 100° à 1500°, température de fusion du métal.

248. On a jeté 3 kilogrammes de plomb à 332° (température de fusion) dans de l'eau à 100°, et l'on a laissé le métal prendre la température du liquide; quelle quantité de chaleur lui a-t-il abandonnée, la chaleur spécifique du plomb étant 0,0314 ?

Le poids du corps s'obtient par la formule suivante, quand on connaît la quantité de chaleur absorbée ou abandonnée, la chaleur spécifique et la variation de la température :

(120) $$p = \frac{q}{c\,(t' - t)}.$$

Exemple : *Quel est le poids d'un lingot d'argent qui, chauffé de* 100° *à* 1000°, *a absorbé* 256^c,5, *la chaleur spécifique de l'argent étant* 0,057 ?

On a par la formule :

$$x = \frac{256{,}5}{0{,}057 \times (1000 - 100)} = 5 \text{ kilogrammes.}$$

EXERCICES.

249. Combien faut-il ajouter d'eau à 100° à 10 kilogrammes d'eau à 0° pour avoir de l'eau à 20° ?

250. La chaleur spécifique du mercure est 0,0332 et celle du plomb 0,0314. Combien faut-il verser de mercure à 33° dans 2 kilogrammes de plomb fondu à 332°, pour que le mélange prenne une température uniforme de 207° ?

La température maximum se calcule au moyen de la formule :

(121) $$t' = \frac{q}{cp} + t,$$

et la température minimum par la formule :

(122) $$t = t' - \frac{q}{cp}.$$

1er exemple : 5 *kilogrammes d'argent (chaleur spécifique* 0,057) *ont été chauffés de façon à absorber* 256 *calories*, 5; *leur température initiale était de* 100°; *quelle est leur température actuelle ?*

La température s'étant élevée, on appliquera la formule (121), qui donne :

$$t' = \frac{256{,}5}{0{,}057 \times 5} + 100 = 1000^{\circ}.$$

2e exemple : 5 *kilogrammes d'argent chauffés à* 1000° *ont abandonné, en se refroidissant,* 256 *calories*, 5 ; *on demande leur température actuelle.*

Elle est donnée par la formule (122) :

$$t = 1000 - \frac{256{,}5}{0{,}057 \times 5} = 100^{\circ}.$$

EXERCICES.

251. La combustion d'un kilogramme de houille développant 4500 calories, on demande à quelle température on pourrait (théoriquement) élever, en brûlant 1 tonne de houille, la température de 140 hectolitres d'eau.

252. On a employé, pour refroidir 2 hectolitres de bière à 90°, 40 kilogrammes de glace à — 2°, et la température de la glace, pendant cette opération, s'est élevée à 20° ; on demande la température actuelle de la bière, en supposant à ce liquide une chaleur spécifique égale à celle de l'eau, c'est-à-dire égale à 1.

II. Dilatations.

On démontre en physique que les variations de la température correspondent toujours à des variations proportionnelles dans le volume des corps, ou, en d'autres termes, qu'un corps se dilate en s'échauffant et se contracte en se refroidissant.

Mais, tous les corps ne se dilatant pas d'une même quantité pour une même variation de température, on a admis pour chacun d'eux un coefficient de dilatation, c'est-à-dire un nombre fixe indiquant de quelle quantité ce corps pris à l'unité de longueur (1 mètre) s'allonge lorsque sa température s'élève d'un degré.

On suppose ainsi qu'à chaque degré dont s'accroît la température d'un corps la longueur du corps s'accroît dans la même proportion, soit que le corps passe de 0° à 1°, ou de 1° à 2°, ou de 100° à 101°, etc., ce qui ne paraît pas bien rigoureusement exact; mais, en tout cas, l'erreur est assez faible pour qu'on puisse accepter en pratique le principe énoncé.

Lors donc qu'on dit que le coefficient de dilatation du fer est de 0,0000111, cela veut dire que si l'on ajoute 1° à la température d'une verge de fer, cette verge s'allonge de 111 dix-millionièmes de sa longueur antérieure, ou que la longueur d'une verge de fer de 1 mètre devient, en ce cas, $1^{M} + 0^{M},0000111 = 1^{M},0000111$.

Si l'on connaît la longueur d'un corps, la quantité dont elle s'est accrue sous l'influence de la chaleur, la température actuelle, la température initiale, on peut déterminer le coefficient de dilatation de ce corps au moyen de la formule suivante :

(123) $$d = \frac{l' - l}{l\,(t' - t)},$$

dans laquelle l représente la longueur initiale, l' la longueur actuelle, t la température initiale, t' la température actuelle.

Exemple : *Une verge de platine de* $1^{M},99009$ *de long et dont la température était à* 100° *a été chauffée à* 1100°, *et sa longueur actuelle est de* $2^{M},005$; *quel est le coefficient de dilatation du platine?*

La formule (123) donne immédiatement :

$$d = \frac{2{,}005 - 1{,}99009}{1{,}99009\,(1100 - 100)} = 0{,}000007492.$$

EXERCICE.

253. Dans un tube, la colonne mercurielle s'élève à 7 centimètres quand la température est à 0°, à $7^{cm},273$ quand la température atteint 250°; quel est le coefficient de dilatation du mercure ?

Si l'on connaissait la longueur minimum, la densité, la température initiale et la température actuelle, on obtiendrait la longueur maximum au moyen de la formule suivante :

(124) $$l' = l[d(t' - t) + 1].$$

Exemple : *Une verge de platine (coefficient de dilatation* 0,000007492) *ayant une longueur de* $1^M,99009$ *à* 100°, *on demande quelle sera sa longueur, si on la chauffe à* 1100°.

$$x = 1{,}99009\,[0{,}000007492\,(1100 - 100) + 1] = 2^M{,}005.$$

EXERCICE.

254. Un vase de forme cylindrique contient de l'eau à 10° qui atteint une hauteur de 20 centimètres; quelle hauteur atteindra cette eau, si on la chauffe à 25° ? (Coefficient de dilatation de l'eau : 0,008466.)

La formule suivante permet de calculer la longueur minimum, quand on connaît la longueur maximum, la variation de la température et le coefficient de dilatation :

(125) $$l = \frac{l'}{1 + d(t' - t)}.$$

Exemple : *Quelle est, à* 100°, *la longueur d'une verge de platine (coefficient de dilatation* 0,000007492) *qui, à* 1100°, *a une longueur de* $2^M,005$?

$$x = \frac{2{,}005}{1 + 0{,}000007492\,(1100 - 100)} = 1^M{,}99009.$$

EXERCICE.

255. Une barre de fer qui avait 3 mètres de long à la température de 250 degrés, s'est refroidie et est actuellement à 20 degrés quelle est sa longueur actuelle, le coefficient de dilatation du fer étant 0,0000111?

On peut enfin calculer la température maximum ou la température minimum par ces formules :

(126) $$t' = t + \frac{l' - l}{d\,l},$$

(127) $$t = t' - \frac{l' - l}{d\,l},$$

quand on connaît le coefficient de dilatation et la variation de la longueur.

1er exemple : *A quel degré faut-il porter la température d'une verge de platine dont la longueur actuelle est* $1^{M},99009$ *et la température actuelle* 100°, *pour que sa longueur atteigne* $2^{M},005$? (Coefficient de dilatation 0,000007492.)

$$t' = 100 + \frac{2{,}005 - 1{,}99009}{0{,}000007492 \times 1{,}99009} = 1100^{\circ}.$$

2e exemple : *Une verge de platine chauffée à* 1100° *a une longueur de* $2^{M},005$; *quelle sera sa longueur quand sa température sera descendue à* 100° ?

$$t = 1100 - \frac{2{,}005 - 1{,}99009}{0{,}000007492 \times 1{,}99009} = 100^{\circ}.$$

EXERCICES.

256. La plus haute des pyramides d'Égypte a 146 mètres d'élévation. En supposant que cette hauteur eût été mesurée à une température de 0° et que la pierre dont le monument est construit eût pour coefficient de dilatation 0,00000897, qui est celui du granit, on demande quelle température devrait avoir la pyramide pour gagner $0^{M},25$ de hauteur.

257. Un navire en fer, mesuré à une température de 20°, avait une longueur totale de 82 mètres; dans un voyage dans les mers polaires, on a observé que sa longueur s'était trouvée réduite à $81^{M},94$; on demande quelle était la température au moment de cette dernière observation, le coefficient de dilatation du fer étant 0,0000111.

§ 3. — CHUTE DES CORPS

Si l'on appelle h l'espace parcouru dans un temps donné par un corps qui tombe librement, u la vitesse qu'il possédait au commencement de sa chute, t le temps pendant lequel il est tombé, g l'intensité de la pesanteur ou la vitesse des corps qui tombent librement et sans vitesse initiale, au bout de la première seconde, on a la formule :

(128) $$h = u\,t + \frac{g\,t^2}{2},$$

au moyen de laquelle on peut calculer l'espace parcouru par le corps, les autres éléments de la question étant connus. (On remarquera que $u\,t$ est annulé, si la vitesse initiale est nulle, et h devient alors égal à $\frac{g\,t^2}{2}$.)

Exemple : *Un corps possède une vitesse initiale de* 3 *mètres par seconde ; quel espace parcourra-t-il en* 5 *secondes, l'intensité de la pesanteur étant* 9,8098 ?

$$x = 3 \times 5 + \frac{9{,}8098 \times 5^2}{2} = 137^{\text{M}},62.$$

EXERCICE.

258. L'intensité de la pesanteur (vitesse des corps qui tombent, après la première seconde), décroissant graduellement de l'équateur aux pôles, est 9,7821 à l'équateur et 9,8315 au Spitzberg ; on demande l'espace parcouru en 8 secondes par un corps qui tombe, sans vitesse initiale, en chacun de ces deux endroits. (*ut* est annulé dans la formule, la vitesse initiale étant nulle.)

On pourrait également calculer l'espace parcouru par le corps si, au lieu de connaître la durée de la chute, on connaissait la vitesse acquise. La formule serait alors :

(129) $$h = \frac{v^2 - u^2}{2\,g},$$

en appelant v la vitesse acquise et remarquant que u^2 est annulé, si la vitesse initiale est nulle.

Exemple : *Un corps possédant une vitesse initiale de* 3 *mètres par seconde acquiert à Paris, au bout de* 5 *se-*

condes, une vitesse de $52^{M},049$*; quel espace aura-t-il parcouru pendant ce temps, l'intensité de la pesanteur à Paris étant* 9,8098 ?

$$h = \frac{52,049^2 - 3^2}{2 \times 9,8098} = 137^{M},62.$$

EXERCICE.

259. L'intensité de la pesanteur est 9,7821 à l'équateur et 9,8315 au Spitzberg; quel chemin devra parcourir un corps tombant en chute libre, sans vitesse initiale, pour y acquérir une vitesse de $78^{M},256$ à la seconde ?

La vitesse acquise, quand on connaît la vitesse initiale, le temps et l'intensité de la pesanteur, se calcule au moyen de la formule suivante :

(130) $$v = u + g\,t.$$

Exemple : *Un corps tombant sans vitesse initiale acquiert, au bout de la première seconde, une vitesse de* $9^{M},8098$; *on demande quelle vitesse il aurait acquise au bout de 5 secondes, s'il tombait avec une vitesse initiale de 3 mètres par seconde.*

$$x = 3 + 9,8098 \times 5 = 52^{M},049.$$

EXERCICE.

260. L'intensité de la pesanteur est 9,7821 à l'équateur et 9,8315 au Spitzberg ; quelle sera, dans ces deux localités, la vitesse acquise au bout de 8 secondes par un corps tombant en chute libre, sans vitesse initiale?

Si, au lieu du temps, on connaissait la hauteur de chute, on calculerait également la vitesse acquise à l'aide de cette autre formule :

(131) $$v = \sqrt{u^2 + 2\,g\,h}.$$

Exemple: *Un corps tombe d'une hauteur de* $137^{M},62$ *avec une vitesse initiale de 3 mètres par seconde; quelle sera sa vitesse au bout de sa course, si l'intensité de la pesanteur est* 9,8098 ?

$$x = \sqrt{3^2 + 2 \times 9,8098 \times 137,62} = 52^{M},049.$$

EXERCICE.

261. L'intensité de la pesanteur est 9,7821 à l'équateur et 9,8315 au Spitzberg ; quelle sera, dans ces deux localités, la vitesse acquise par un corps tombant sans vitesse initiale, après une chute de $313^{M},027$ à l'équateur ou de $314^{M},608$ au Spitzberg?

On pourrait calculer, pour un lieu donné, l'intensité de la pesanteur ou vitesse des corps après une seconde, en chute libre, sans vitesse initiale, si l'on connaissait la hauteur et la durée de la chute d'un corps tombant avec une vitesse initiale donnée. L'intensité de la pesanteur serait alors donnée par la formule suivante :

(132) $$g = \frac{2(h - ut)}{t^2}.$$

Exemple : *Quelle est l'intensité de la pesanteur à Paris, où un corps, tombant avec une vitesse initiale de 3 mètres, parcourt, en 5 secondes, une distance verticale de* $137^{M},62$?

$$x = \frac{(2[137,62 - (3 \times 5)]}{5^2} = 9,8098.$$

EXERCICE.

262. Quelle est l'intensité de la pesanteur à l'équateur, où un corps tombant en chute libre, sans vitesse initiale, parcourt, en 8 secondes, une distance verticale de $313^{M},027$, et au Spitzberg, où dans les mêmes conditions, l'espace parcouru est $314^{M},608$?

Si, au lieu du temps, on connaissait la vitesse acquise à bout de chute, on trouverait de même l'intensité de la pesanteur par la formule :

(133) $$g = \frac{v^2 - u^2}{2h}.$$

Exemple : *Quelle est l'intensité de la pesanteur à Paris, où un corps, tombant avec une vitesse initiale de 3 mètres, possède une vitesse de* $52^{M},049$ *à la seconde quand il a parcouru* $137^{M},62$?

$$x = \frac{52,049^2 - 3^2}{2 \times 137,62} = 9,8098.$$

EXERCICE.

263. Quelle est l'intensité de la pesanteur au Spitzberg, où un corps tombant en chute libre, sans vitesse initiale, acquiert, lorsqu'il a parcouru $314^{M},608$, une vitesse de $78^{M},652$ à la seconde ?

On trouverait, au moyen de la formule suivante, la vitesse initiale, si l'on connaissait l'intensité de la pesanteur, la vitesse acquise et la hauteur de chute :

(134) $$u = \frac{2h - g t^2}{2t}.$$

Exemple : *A Paris, où l'intensité de la pesanteur est* 9,8098, *on a trouvé qu'un corps, tombé d'une hauteur indéterminée, avait parcouru, en* 5 *secondes, un espace de* $137^{M},625$; *on demande quelle était la vitesse initiale de ce corps.*

$$x = \frac{(2 \times 137,625) - (9,8098 \times 5^2)}{2 \times 5} = 3 \text{ mètres.}$$

EXERCICE.

264. A l'équateur, un corps, tombant librement, a parcouru $313^{M},027$ en 8 secondes ; l'intensité de la pesanteur étant, pour cette latitude, 9,7821, on demande quelle était la vitesse initiale du corps observé.

Si, au lieu du temps, on connaissait la vitesse acquise, la même question serait résolue par la formule suivante :

(135) $$u = \sqrt{v^2 - 2gh}.$$

Exemple : *Quelle était la vitesse initiale d'un corps qui, après avoir parcouru en tombant un espace de* $137^{M},62$, *en un lieu où l'intensité de la pesanteur est* 9,8098, *était animé d'une vitesse de* $52^{M},049$ *par seconde ?*

$$x = \sqrt{52,049^2 - (2 \times 9,8098 \times 137,62)} = 3 \text{ mètres.}$$

EXERCICE.

265. L'intensité de la pesanteur est, au Spitzberg, 9,8315. On y a observé la chute d'un corps qui, après avoir parcouru en ligne verticale $314^{M},608$, était animé d'une vitesse de $78^{M},652$ à la seconde; on demande quelle était la vitesse initiale de ce corps.

§ 4. — THÉORIE DU PENDULE

La durée des oscillations du pendule, sensiblement indépendante de leur amplitude, varie avec l'intensité de la pesanteur, qui elle-même varie avec les latitudes. Quand on connaît la longueur d'un pendule et l'intensité de la pesanteur, on peut, à l'aide de la formule suivante, calculer la durée de ses oscillations. Dans cette formule, et dans celles qu'on en déduit, t représente la durée de l'oscillation, π le rapport invariable de la circonférence au diamètre (3,1416), l la longueur du pendule et g l'intensité de la pesanteur.

(136) $$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Exemple : *On demande la durée, à Paris, où l'intensité de la pesanteur est* 9,8098, *de l'oscillation d'un pendule de* $0^{M},99394$.

$$t = 3{,}1416 \sqrt{\frac{0{,}99394}{9{,}8098}} = 1 \text{ seconde.}$$

EXERCICE.

266. A l'équateur, où l'intensité de la pesanteur est 9,7821, quelle serait la durée de l'oscillation d'un pendule qui aurait $0^{M},99113$ de long ?

La longueur à donner au pendule pour que ses oscillations aient une durée déterminée se trouve au moyen de la formule suivante :

(137) $$l = \frac{g\,t^2}{\pi^2}.$$

Exemple : *Trouver la longueur du pendule à secondes pour Paris, où l'intensité de la pesanteur est* 9,8098.

$$x = \frac{9{,}8098 \times 1^2}{3{,}1416^2} = 0^{M},99394.$$

EXERCICE.

267. Quelle longueur faudrait-il donner à un pendule, à Paris, où l'intensité de la pesanteur est 9,8098, pour lui faire battre une oscillation en 6 secondes ?

Le pendule donne un moyen commode (le seul réellement pratique) de déterminer, pour un point quelconque de la surface du globe, l'intensité de la pesanteur. Il suffit de prendre un pendule d'une longueur connue, de le faire osciller pendant un temps donné, de compter ses oscillations et de déduire la durée de chaque oscillation. On calcule alors l'intensité de la pesanteur au moyen de la formule :

(138) $$g = \frac{\pi^2\,l}{t^2}.$$

Exemple : *A Paris, la longueur du pendule à secondes (donnant une oscillation dans une seconde) est de* $0^{M},99394$; *quelle est, sur ce point du globe, l'intensité de la pesanteur ou vitesse acquise, en une seconde, par un corps qui tombe librement, sans vitesse initiale ?*

$$g = \frac{3,1416^2 \times 0,99394}{1^2} = 9,8098.$$

EXERCICE.

268. Au Cap, on a observé qu'un pendule d'une longueur de $0^{M},99264$ donnait 60 oscillations en 1 minute; quelle est, pour ce pays, l'intensité de la pesanteur ?

DEUXIÈME APPENDICE

USAGE DES TABLES DE LOGARITHMES

Les tables de logarithmes sont basées sur les rapports qui lient les termes d'une progression par quotient correspondant à ceux d'une progression par différence qui a le même nombre de termes.

Le terme qui correspond, dans la progression par différence, à un terme d'une progression par quotient s'appelle logarithme de ce terme, et celui-ci s'appelle nombre.

Dans les deux tableaux suivants, qui sont deux pages détachées d'une table de logarithmes, les nombres sont inscrits dans la première colonne verticale à gauche, sous la lettre N, et les logarithmes correspondants sous les colonnes verticales suivantes.

Dans la colonne des nombres, on ne tient aucun compte de la virgule, et le nombre 1620, qui est en tête de la colonne, peut se lire indifféremment : 1620, ou 162,0, ou 16,20, ou 1,620, ou 0,1620, etc., etc.

Les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui occupent la première colonne horizontale, doivent être ajoutés par la pensée à la droite de l'un des nombres de la première colonne verticale, de façon que le nombre déjà cité devient : 16200, 16201, 16202, etc., etc.

Les deux premiers chiffres du nombre (16 dans le cas actuel) ne sont répétés que de cinq en cinq nombres, et le second nombre de la colonne, représenté par les chiffres 21, doit se lire 1621, le suivant 1622, etc.

Table de logarithmes.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.	
1620	209.5150	5418	5686	5954	6222	6490	6758	7026	7294	7562		268
21	7830	8098	8366	8634	8902	9170	9437	9705	9973			1 27
	210									0241		2 54
22	0508	0776	1044	1312	1579	1847	2115	2382	2650	2918		3 80
23	3185	3453	3720	3988	4255	4523	4790	5058	5325	5593		4 107
24	5860	6128	6395	6662	6930	7197	7464	7732	7999	8266		5 134
1625	8534	8801	9068	9335	9603	9870					267	6 161
	211						0137	0404	0671	0938	1 27	7 188
26	1205	1472	1740	2007	2274	2541	2808	3075	3342	3609	2 53	8 214
27	3876	4142	4409	4676	4943	5210	5477	5744	6010	6277	3 80	9 241
28	6544	6811	7078	7344	7611	7878	8144	8411	8678	8944	4 107	
29	9211	9447	9744								5 134	
	212			0011	0277	0544	0810	1077	1343	1610	6 160	
1630	1876	2142	2409	2675	2942	3208	3474	3744	4007	4273	7 187	
31	4540	4806	5072	5338	5605	5871	6137	6403	6669	6935	8 214	
32	7202	7468	7734	8000	8266	8532	8798	9064	9330	9596	9 240	266
33	9862											1 27
	213	0128	0394	0660	0926	1191	1457	1723	1989	2255		2 53
34	2521	2786	3052	3318	3584	3849	4115	4381	4646	4912		3 80
1635	5178	5443	5709	5974	6240	6505	6771	7037	7302	7568		4 106
36	7833	8098	8364	8629	8895	9160	9425	9691	9956			5 133
	214									0221		6 160
37	0487	0752	1017	1283	1548	1813	2078	2343	2609	2874	265	7 186
38	3139	3404	3669	3934	4199	4464	4730	4995	5260	5525	1 27	8 213
39	5790	6055	6319	6584	6849	7114	7379	7644	7909	8174	2 53	9 239
1640	8438	8703	8968	9233	9498	9762					3 80	
	215						0027	0292	0556	0821	4 106	
41	1086	1350	1615	1880	2144	2409	2673	2938	3203	3467	5 133	
42	3732	3996	4260	4525	4789	5054	5318	5583	5847	6111	6 159	
43	6376	6640	6904	7169	7433	7697	7961	8226	8490	8754	7 186	
44	9018	9282	9546	9811							8 212	264
	216				0075	0339	0603	0867	1131	1395	9 239	1 2
1645	1659	1923	2187	2451	2715	2979	3243	3507	3771	4034		2 5
46	4298	4562	4826	5090	5354	5617	5881	6145	6409	6672		3 7
47	6936	7200	7463	7727	7991	8254	8518	8781	9045	9309		4 10
48	9572	9836										5 13
	217		0099	0363	0626	0890	1153	1416	1680	1943		6 15
49	2207	2470	2733	2997	3260	3523	3786	4050	4313	4576	263	7 185
1650	4839	5103	5366	5629	5892	6155	6418	6682	6945	7208	1 26	8 211
51	7471	7734	7997	8260	8523	8786	9049	9312	9575	9838	2 53	9 23
52	218.0100	0363	0626	0889	1152	1415	1677	1940	2203	2466	3 79	
53	2729	2991	3254	3517	3779	4042	4305	4567	4830	5092	4 105	
54	5355	5618	5880	6143	6405	6668	6930	7193	7455	7718	5 132	
1655	7980	8242	8505	8767	9030	9292	9554	9816			6 158	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.	

Table de logarithmes.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
9960	998.2593	2637	2681	2724	2768	2811	2855	2899	2942	2986	44
61	3029	3073	3117	3160	3204	3247	3291	3335	3378	3422	1 | 4
62	3465	3509	3553	3596	3640	3683	3727	3771	3814	3858	2 | 9
63	3901	3945	3988	4032	4076	4119	4163	4206	4250	4294	3 | 13
64	4337	4381	4424	4468	4512	4555	4599	4642	4686	4729	4 | 18
9965	4773	4817	4860	4904	4947	4991	5035	5078	5122	5165	5 | 22
66	5209	5252	5296	5340	5383	5427	5470	5514	5557	5601	6 | 26
67	5645	5688	5732	5775	5819	5862	5906	5950	5993	6037	7 | 31
68	6080	6124	6167	6211	6255	6298	6342	6385	6429	6472	8 | 35
69	6516	6560	6603	6647	6690	6734	6777	6821	6864	6908	9 | 40
9970	6952	6995	7039	7082	7126	7169	7213	7256	7300	7344	
71	7387	7431	7474	7518	7561	7605	7648	7692	7736	7779	
72	7823	7866	7910	7953	7997	8040	8084	8128	8171	8215	
73	8258	8302	8345	8389	8432	8476	8519	8563	8607	8650	
74	8694	8737	8781	8824	8868	8911	8955	8998	9042	9086	
9975	9129	9173	9216	9260	9303	9347	9390	9434	9477	9521	
76	9564	9608	9651	9695	9739	9782	9826	9869	9913	9956	
77	999.0000	0043	0087	0130	0174	0217	0271	0304	0348	0391	
78	0435	0479	0522	0566	0609	0653	0696	0740	0783	0827	
79	0870	0914	0957	1001	1044	1088	1131	1175	1218	1262	
9980	1305	1349	1392	1436	1479	1523	1567	1610	1654	1697	
81	1741	1784	1828	1871	1915	1958	2002	2045	2089	2132	
82	2176	2219	2263	2306	2350	2393	2437	2480	2524	2567	
83	2611	2654	2698	2741	2785	2828	2872	2915	2959	3002	
84	3046	3089	3133	3176	3220	3263	3307	3350	3394	3437	
9985	3481	3524	3568	3611	3651	3698	3742	3785	3829	3872	
86	3916	3959	4003	4046	4090	4138	4177	4220	4264	4307	
87	4350	4394	4437	4481	4524	4568	4611	4655	4698	4742	
88	4785	4829	4872	4916	4959	5003	5046	5090	5133	5177	
89	5220	5264	5307	5351	5394	5438	5481	5524	5568	5611	
9990	5655	5698	5742	5785	5829	5872	5916	5959	6003	6046	
91	6090	6133	6177	6220	6263	6307	6350	6394	6437	6481	
92	6524	6568	6611	6655	6698	6742	6785	6828	6872	6915	
93	6959	7002	7046	7089	7133	7176	7220	7263	7307	7350	
94	7393	7437	7480	7524	7567	7611	7654	7698	7751	7785	
9995	7828	7871	7905	7958	8002	8045	8089	8132	8176	8219	
96	8262	8306	8349	8393	8436	8480	8523	8567	8610	8653	
97	8697	8740	8784	8827	8871	8914	8958	9001	9044	9088	
98	9131	9175	9218	9262	9305	9349	9392	9435	9479	9522	
99	9565	9609	9653	9696	9739	9783	9826	9870	9913	9957	
10000	0000.0000	0434	0869	1303	1737	2171	2606	3040	3474	3908	
01	4343	4777	5211	5645	6080	6514	6948	7382	7817	8251	
02	8685	9119	9553	9988							
	0001.				0422	0856	1290	1724	2159	2593	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

Dans les logarithmes, on a supprimé la partie entière, qu'on appelle la caractéristique; mais rien n'est plus facile que de la suppléer au moyen de l'observation suivante : la caractéristique d'un logarithme contient autant d'unités, moins une, que le nombre contient de chiffres dans sa partie entière. Ainsi, la table donnant pour la partie décimale du logarithme du premier nombre inscrit 2095150, le logarithme de 1620 sera 3,2095150; celui de 162,0 sera 2,2095150; celui de 16,20 sera 1,2095150; celui de 1,620 sera 0,2095150. Si nous reculions encore la virgule vers la gauche, on aurait les caractéristiques négatives — 1, — 2, — 3, etc.

On indique ces caractéristiques négatives au moyen du signe — placé au-dessus de la caractéristique, de cette façon : $\bar{1}$,2095150; $\bar{2}$,2095150; $\bar{3}$,2095150.

PREMIER PROBLÈME

Trouver dans les tables le logarithme d'un nombre donné.

PREMIER CAS

Soit à trouver le logarithme du nombre 163,76. J'écris d'abord la caractéristique, qui est 2, le nombre ayant trois chiffres à sa partie entière. Pour trouver la partie décimale, je prends, dans la partie gauche de la colonne 0, les trois chiffres isolés qui sont placés le plus près au-dessus du nombre proposé, et qui sont 214 dans le cas actuel. J'ai donc 2,214. Pour avoir les quatre décimales suivantes, je parcours la colonne horizontale correspondant au nombre 1637, jusqu'à ce que j'arrive à la colonne verticale désignée par le chiffre 6, qui est le dernier chiffre du nombre proposé. A l'intersection des deux colonnes, je trouve 2078, que j'ajoute à la droite du logarithme. J'obtiens ainsi, pour le logarithme demandé, 2,2142078.

EXERCICE.

269. Trouver les logarithmes des nombres 1; 2; 3; 270; 4728; 25000; 14701; 0,00032576; 0,008.

DEUXIÈME CAS

Soit à trouver le logarithme du nombre 1641,27, qui a un chiffre de plus que les nombres des tables. Négligeant tout d'abord le dernier chiffre 7, je cherche, comme ci-dessus, le logarithme de 1641.2, que je trouve égal à 3,2151615. Suivant ensuite la colonne horizontale où j'ai trouvé les quatre derniers chiffres jusqu'à la dernière colonne verticale, appelée colonne des différences, je remarque la plus prochaine table de différences, laquelle porte en tête 265; dans cette table, je cherche le chiffre 7, dernier chiffre du nombre proposé, et je trouve inscrit à côté 186, que j'ajoute à la dernière partie du logarithme précédemment trouvé, de la façon suivante :

$$\begin{array}{r} 3,2151615 \\ 186 \\ \hline 3,2151801 \end{array}$$

Le logarithme cherché est 3,2151801.

EXERCICE.

270. Trouver les logarithmes des nombres 876714; 125,467; 0,0743211; 0,2222224.

TROISIÈME CAS

Soit à trouver le logarithme du nombre 1,647959, qui a deux chiffres de plus que les nombres des tables. Faisant d'abord abstraction de ces deux chiffres, je cherche le logarithme de 1,6479, qui est 0,2169309. Je cherche ensuite, dans la table des différences, la différence correspondant à 5; elle est 132, et je l'inscris comme dans le cas précédent :

$$\begin{array}{r} 0,2169309 \\ 132 \end{array}$$

Je cherche, dans la même table, la différence correspondant à 9, qui est 238; je l'inscris sous la précédente, mais en la reculant d'un rang vers la droite, comme il suit :

$$\begin{array}{rl} 0,2169309 & \\ 132 & \\ 23 & 8 \end{array}$$

J'additionne, en négligeant le 8, mais en forçant d'une unité la colonne suivante, parce que 8 est supérieur à 5, et j'obtiens

$$\begin{array}{rl} 0,2169309 & \\ 132 & \\ 23 & 8 \\ \hline 0,2169465 & \end{array}$$

Le logarithme cherché est donc 0,2169465.

EXERCICE.

271. Trouver les logarithmes des nombres 4023012; 0,5678341; 444,4444; 0,02020202; 2,437612.

DEUXIÈME PROBLÈME

Trouver le nombre correspondant à un logarithme donné.

PREMIER CAS

Soit à trouver le nombre correspondant au logarithme 3,9988911, qui se trouve dans les tables. Négligeant la caractéristique, je cherche dans la partie gauche de la colonne 0 les trois premiers chiffres, 998, du logarithme, puis, en descendant, dans la partie droite de la même colonne, les quatre chiffres les plus approchés, par différence, des quatre derniers chiffres 8911. J'arrive ainsi à 8694, dont je suis la colonne horizontale, jusqu'à ce que je rencontre 8911, dernière partie du logarithme. Dans la même colonne horizontale, je prends le nombre correspondant 9974, et dans la même colonne verticale, le chiffre 5, inscrit en tête de la colonne, et que j'écris à la suite. J'obtiens ainsi 99745. Mais, comme la caractéristique est 3, j'aurai quatre chiffres à la partie entière du nombre, qui est donc 9974,5.

EXERCICE.

272. Trouver les nombres correspondant aux logarithmes 2,8970550; 9,7802669; $\bar{2}$,8312233; 0,2938044.

DEUXIÈME CAS

Soit à trouver le nombre correspondant au logarithme 2,9992847, qui ne se trouve pas dans les tables. Je cherche, comme ci-dessus, le logarithme le plus approché par différence du logarithme donné, et je trouve 2,9992828, qui correspond au nombre 998,35. Je soustrais le logarithme trouvé du logarithme donné, et je trouve pour différence 19, que je cherche dans la plus prochaine colonne des différences. La différence 19 ne s'y trouve pas, mais j'y vois 18, qui n'en diffère que d'une unité, et à côté je trouve inscrit le chiffre 4; je l'écris à la droite du nombre précédemment trouvé, 998,35, et j'ai ainsi, pour le nombre cherché, 998,354. Si l'on avait voulu obtenir un plus grand nombre de décimales, après avoir écrit 4 comme ci-dessus, on aurait retranché 18, la différence trouvée, de 19, la différence cherchée, on aurait multiplié par 10 le reste 1, on aurait pris la différence 9, la plus approchée de 10, et inscrit à la droite du nombre le chiffre correspondant 2. Le nombre serait ainsi devenu 998,3542.

Autre exemple : Chercher, avec huit figures (huit chiffres significatifs), le nombre correspondant au logarithme 2,2155576. Je cherche le nombre correspondant au logarithme approché par différence du logarithme proposé, c'est-à-dire au logarithme 2,2155318, et je trouve 164,26. Faisant ensuite la différence des deux logarithmes, je trouve 258, que je cherche dans la table des différences. La différence approchée est 239, qui correspond au chiffre 9 ; j'ajoute ce chiffre au nombre trouvé, qui devient 164,269. Je fais la différence de 239 et de 258 ; je trouve 19, que je multiplie par 10. La différence approchée de 190 est 186, correspondant à 7, que j'ajoute au nombre, lequel devient 164,2697. Enfin, je fais la différence de 186 et de 190, et je trouve 4, que je multiplie par 10. La différence, 40, ne se trouvant pas, je prends par défaut 27, auquel correspond le chiffre 1, que j'ajoute au nombre. Ce nombre devient ainsi 164,26971.

EXERCICE.

273. Trouver avec huit figures les nombres correspondant aux logarithmes 2,9999995 ; 1,4324626 ; 0,6961111 ; $\bar{3}$,1613994.

APPLICATIONS

Au moyen des tables de logarithmes, on peut faire : les multiplications, en additionnant des logarithmes ; les divisions, par des soustractions ; les élévations aux puissances, par des multiplications ; les extractions de racines, par des divisions.

MULTIPLICATION

(139) $$\log.\,(a \times b) = \log.\,a + \log.\,b.$$

Le logarithme d'un produit étant égal à la somme des logarithmes de ses facteurs, comme l'indique la formule ci-dessus, il en résulte que, pour multiplier des nombres entre eux, il faut chercher leurs logarithmes, en faire la somme et chercher le nombre correspondant à cette somme considérée comme logarithme.

Exemple : *Multiplier* 1620,543 *par* 6,161425.

Appliquant la règle ci-dessus, je cherche d'abord le logarithme du multiplicande 1620,543. La caractéristique de ce logarithme est 3. Les trois premiers chiffres décimaux du logarithme, trouvés immédiatement dans la colonne 0, sont 209. J'écris donc 3,209. J'ajoute ensuite les quatre décimales 6490, correspondant à la colonne 5, et j'obtiens 3,2096490, qui est le logarithme de 1620,5. Je cherche dans la table des différences la différence correspondant au chiffre 4, qui vient après 5 dans le nombre; elle est égale à 107; je l'écris sous le logarithme, comme il suit :

$$\begin{array}{r} 3{,}2096490 \\ 107 \end{array}$$

Je cherche de même la différence correspondant à 3, dernier chiffre du nombre; je la trouve égale à 80, et je l'écris ainsi sous le logarithme :

$$\begin{array}{r} 3{,}2096490 \\ 107 \\ 80 \end{array}$$

Additionnant, en négligeant le 0 à droite, je trouve :

$$\log.\ 1620{,}543 = 3{,}2096605.$$

Je cherche de même le logarithme de 6,161425, et je le trouve égal à 0,7896812.

Additionnant les logarithmes, j'obtiens 3,9993417, qui est le logarithme du produit. Il suffira donc de chercher le nombre correspondant à ce logarithme pour trouver le produit demandé.

On procède comme il suit à cette recherche. Dans la colonne 0, on cherche 999, premiers chiffres de la partie décimale du logarithme du produit. Dans la même colonne, on cherche, en descendant, à droite, quatre chiffres dont la valeur approche autant que possible, par différence, de 3417, et l'on s'arrête à 3046. On suit la colonne horizontale, pour se rapprocher encore de 3417, et l'on s'arrête à 3394, qui correspond à la colonne 8. On écrit alors 9984, nombre correspondant; dans la colonne horizontale, on ajoute 8, chiffre correspondant dans la colonne verticale, et l'on a 99848. Mais, comme la caractéristique est 3, le nombre aura quatre chiffres à sa partie entière, et j'écris 9984,8. Pour obtenir deux décimales de plus, je fais la différence de 3,9993417, logarithme du produit, et de 3,9993394, logarithme approché; le reste 23 ne se trouve pas dans la table des différences; mais à la différence approchée, 22, correspond le chiffre 5, que j'ajoute à la suite du nombre, lequel devient ainsi 9984,85. Retranchant la différence approchée 22 de la vraie différence 23, multipliant le reste 1 par 10, je cherche 10 dans la table des différences; à défaut de 10, je choisis 9, différence approchée, et j'ajoute 2, chiffre correspondant, à la suite du nombre, qui devient enfin 9984,852. C'est le produit cherché.

La suite des opérations, bien plus longues à décrire qu'à effectuer, se résume ainsi :

$$\begin{aligned}
\log.\ 1620{,}543 &= 3{,}2096605\\
\log.\ 6{,}161425 &= \underline{0{,}7896812}\\
\log.\ \text{produit} &= 3{,}9993417 = \log.\ 9984{,}852.
\end{aligned}$$

EXERCICE.

274. Multiplier 45,74 par 0,99988; 0,7847 par 0,301268; 16835,2 par 14,7614.

DIVISION

$$\textbf{(140)} \qquad \mathrm{Log.}\ \frac{a}{b} = \log.\ a - \log.\ b.$$

Le logarithme d'un quotient étant égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur, pour opérer une division, il faut chercher les logarithmes des deux termes, retrancher le logarithme du diviseur de celui du dividende, et chercher le nombre correspondant à la différence considérée comme logarithme.

Exemple : *Soit à diviser* 4378,095 *par* 57,04.

On complétera le nombre des chiffres du diviseur en lui ajoutant trois zéros. L'opération générale se dispose comme il suit :

$$\begin{aligned}
\log.\ 4378{,}095 &= 3{,}6412853\\
\log.\ 57{,}04000 &= \underline{1{,}7561795}\\
\log.\ \text{quotient} &= 1{,}8851058 = \log.\ 76{,}75483.
\end{aligned}$$

Autre exemple : *Diviser* 75,06 *par* 892,5274.

$$\begin{aligned}
\log.\ 75{,}06000 &= 1{,}8754086\\
\log.\ 892{,}5274 &= \underline{2{,}9506216}\\
\log.\ \text{quotient} &= \bar{2}{,}9247870 = \log.\ 0{,}084098.
\end{aligned}$$

Autre exemple : *Évaluer en fraction décimale la fraction ordinaire* $\frac{45728}{323782}$.

$$\begin{aligned} \text{log. } 45728{,}00 &= 4{,}6601822 \\ \text{log. } 323782{,}0 &= 5{,}5102527 \\ \hline \text{log. quotient} &= \bar{1}{,}1499295 = \text{log. } 0{,}1412308. \end{aligned}$$

EXERCICE.

275. Diviser 4257869 par 160237; 454,8203 par 25,55666; 0,3 par 42,58411; 2 par 3 avec sept décimales.

FORMATION DES PUISSANCES ET INTÉRÊTS COMPOSÉS

$$(\mathbf{141}) \qquad \text{log. } a^n = (\text{log. } a) \times n.$$

Le logarithme d'une puissance est égal au logarithme de la racine multiplié par l'exposant de la puissance (c'est le sens de la formule ci-dessus). Il suit de là que, pour former la puissance d'un nombre, il faut chercher le logarithme de ce nombre, multiplier ce logarithme par l'exposant de la puissance, et chercher le nombre correspondant au produit considéré comme logarithme.

Exemple : *Élever* 1,4725 *à la cinquième puissance.*

$$\text{log. } 1{,}472500 = 0{,}1680553$$
$$0{,}1680553 \times 5 = 0{,}8402765 = \text{log. } 6{,}922716.$$

Autre exemple : *Élever* 1,015 *à la centième puissance.*

$$\text{log. } 1{,}015000 = 0{,}00646604$$
$$0{,}00646604 \times 100 = 0{,}6466040 = \text{log. } 4{,}432042.$$

EXERCICE.

276. Former les puissances suivantes : 2^{14}; $0{,}05^{8}$; $47{,}6831^{7}$.

Applications : *Que devient, au bout de* 20 *ans, un capital de* 12000 *francs placé à* 5 *pour* 100, *et dont on laisse accumuler les intérêts ?*

En appliquant à la formule (9) les propriétés des logaritames, elle devient :

$$(\mathbf{142}) \qquad \text{log. } C = \text{log. } A + \text{log. } \frac{u+i}{u} \times t.$$

En appliquant cette formule au cas présent, on a :

$$x = 12000 \times 1{,}05^{20},$$

d'où :

$$\log. x = \log. 12000 + \log. 1{,}05 \times 20.$$
$$\log. 12000 = 4{,}0791812;$$
$$\log. 1{,}05 = 0{,}0211893;$$
$$0{,}0211893 \times 20 = 0{,}4237860;$$
$$4{,}0791812 + 0{,}4237860 = 4{,}5029672 = \log. 31839^{\text{F}},57,$$

capital cherché.

EXERCICES.

277. Que deviendrait un capital de 1 franc placé à 5 pour 100 pendant 100 ans, si on laissait les intérêts s'accumuler ?

278. Un chef de famille, voulant enrichir sa descendance, place une somme de 10 francs à 5 pour 100, en formulant la condition que ses héritiers ne pourront ni toucher les intérêts ni déplacer le capital qu'au bout de 300 ans ; que sera devenu, au bout de ce temps, le capital placé ?

De la précédente formule on tire :

$$(143) \qquad t = \frac{\log. C - \log. A}{\log. \dfrac{u+1}{u}},$$

formule au moyen de laquelle on peut calculer le temps dans les questions d'intérêt composé.

Exemple : *En combien de temps un capital de* 78500 *francs, placé à* 5 *pour* 100, *produira-t-il* 43255 *francs d'intérêt composé, c'est-à-dire deviendra-t-il* 121755 *francs ?*

La formule donne :

$$x = \frac{\log. 121755 - \log. 78500}{\log. 1{,}05}.$$

Or log. 121755 = 5,0859470 ; log. 78500 = 4,8948697 ; leur différence égale 0,1910773. Divisant cette différence par 0,0211893, logarithme de 1,05, on trouve : 9 ans, 64 jours.

Il va sans dire qu'on peut faire cette division par logarithmes. On évitera, en ce cas, les caractéristiques négatives en supprimant les virgules des deux termes.

EXERCICES.

279. En combien de temps un capital placé à 5 pour 100 sera-t-il doublé, si on laisse ses intérêts s'accumuler? (On pourra choisir un capital quelconque; le plus simple est de le faire égal à 1 et de chercher en combien de temps il sera égal à 2.)

280. Un paysan a enterré, à l'âge de 38 ans, une somme de 25000 francs; après sa mort, ses héritiers ont calculé que cette somme placée à 5 pour 100 aurait rendu 62000 francs d'intérêt composé; à quel âge le paysan est-il mort?

La formule (9) donne aussi :

$$(\mathbf{144})\quad \log.\,(u+i)=\frac{\log.\,C-\log.\,A}{t}+\log.\,u,$$

qui permet de calculer le taux.

Exemple : *A quel taux faut-il placer une somme de* 3000 *francs pour qu'elle devienne, avec les intérêts accumulés,* 4320 *au bout de* 7 *ans ?*

$$\log.\,(100+x)=\frac{\log.\,4320-\log.\,3000}{7}+\log.\,100,$$

$$=\frac{3,6354837-3,4771213}{7}+2=2,0226232.$$

Donc $100+x$, dont le logarithme est 2,0226232, est égal à 105,34, et, par conséquent,

$$x=105,34-100=5\text{ fr. }34.$$

EXERCICES.

281. A quel taux faut-il placer un capital pour le faire doubler en 14 ans au moyen des intérêts annuels ? (On pourra prendre un capital quelconque; le plus simple sera de faire le capital égal à 1.)

282. Une personne emprunte un capital de 35000 francs au taux de 6 pour 100, à condition de le rendre, avec les intérêts accumulés, au bout de 5 ans; mais, dans le même temps, elle fait fructifier ce capital, et au bout des 5 ans, après s'être acquittée avec son créancier, elle se trouve avoir réalisé un bénéfice de 3000 francs. Quel intérêt lui a rendu le capital qu'elle avait emprunté

Au moyen de la formule (10) nous avons :

$$\textbf{(145)}\qquad \log. A = \log. C - \left(\log. \frac{u+i}{u} \times t\right).$$

Exercice : *Quel est le capital qui, placé à* 5 *pour* 100 *pendant* 12 *ans, est devenu* 12550 *francs par l'accumulation des intérêts ?*

La formule donne :

$$\log. x = \log. 12550 - \log. 1{,}05 \times 12.$$

Or

$$\log. 12550 = 4{,}0986437 ;\ \log. 1{,}05 = 0{,}0211893.$$

Donc

$$\log. x = 4{,}0986437 - 0{,}0211893 \times 12 = 3{,}8443721$$
$$= \log. 6988{,}31.$$

EXERCICE.

283. Quel capital faut-il placer à 5 pour 100, pour que, en laissant accumuler les intérêts, on jouisse, au bout de 10 ans, d'un revenu de 6000 francs ?

EXTRACTION DES RACINES

$$\textbf{(146)}\qquad \log. \sqrt[n]{a} = \frac{\log. a}{n}.$$

Le logarithme d'une racine est égal au logarithme de la puissance divisé par l'indice de la racine. On en conclut que, pour extraire une racine, il faut chercher le logarithme de la puissance, le diviser par l'indice de la racine et chercher le nombre correspondant au quotient considéré comme logarithme.

Exemple : *Extraire la racine* 9° *de* 7437,761.

$$\text{Log.} \sqrt[9]{7437{,}761} = \frac{\log. 7437{,}761}{9} = \frac{3{,}8714247}{9} = 0{,}4301583$$
$$= \log. 2{,}6925162.$$

La racine cherchée est donc 2,6925162.

EXERCICE.

284. Calculer les racines suivantes :

$$1^\circ\ \sqrt[100]{9{,}5}\ ;\qquad 2^\circ\ \sqrt[9]{800{,}8008}.$$

FIN

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

TABLE ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

D

E

F

G

H

I

L

M

P

R

S

FIN DE LA TABLE ALPHABÉTIQUE.

TABLE GÉNÉRALE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

PREMIÈRE PARTIE

FORMULES ARITHMÉTIQUES

DEUXIÈME PARTIE

FORMULES GÉOMÉTRIQUES

FIN DE LA TABLE GÉNÉRALE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE CHARLES BLOT, RUE BLEUE, 7

Ouvrages de M. D.

PUBLIÉS PAR L

—

LEÇONS NORMALES D'ALGÈBR[illegible] **quée**, à l'usage des divers Établissem[illegible] d'un très grand nombre d'Exercices [illegible] de leurs Solutions raisonnées et d'une Série d'Exercices et Problèmes gradués à résoudre. — *Nouvelle édition revue avec soin et augmentée;* vol. in-12. . . . . 2 fr. 75

SOLUTIONS RAISONNÉES DES EXERCICES ET PROBLÈMES contenus dans les **Leçons normales d'Algèbre élémentaire.** — Augmentées d'un grand nombre de Problèmes nouveaux avec leurs Solutions raisonnées et certains Développements sur plusieurs sujets d'Algèbre. . . . . 3 fr.

LEÇONS NORMALES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, théorique et appliquée, à l'usage des divers Établissements d'Instruction publique. — Augmentées d'un PRÉCIS DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE, d'un très grand nombre d'Exercices et Problèmes suivis immédiatement de leurs Solutions raisonnées et d'une Série d'Exercices et Problèmes gradués à résoudre. — *Nouvelle édition revue et augmentée;* beau volume in-12 avec un grand nombre de dessins gravés sur cuivre et intercalés dans le texte . . . . 2 fr. 60

SOLUTIONS RAISONNÉES DES EXERCICES ET PROBLÈMES contenus dans les **Leçons normales de Géométrie élémentaire.** — Augmentées d'un grand nombre de Problèmes nouveaux avec leurs Solutions raisonnées et certains Développements sur plusieurs sujets de Géométrie; volume in-12. . . . 2 fr. 60

LEÇONS NORMALES DE PHYSIQUE ÉLÉMENTAIRE, théorique et appliquée, à l'usage des divers Établissements d'Instruction publique. — Augmentées d'une Série d'Expériences raisonnées, de Problèmes résolus et de plus de 300 dessins intercalés dans le texte. — *Nouvelle édition revue et augmentée;* beau volume de 432 pages, papier glacé. . . . . 3 fr. 50

LEÇONS NORMALES DE CHIMIE ÉLÉMENTAIRE, théorique et appliquée, à l'usage des divers Établissements d'Instruction publique. Augmentées d'une Série d'Expériences raisonnées, de Problèmes résolus et d'un très grand nombre de dessins intercalés dans le texte. — *Nouvelle édition revue et augmentée;* beau volume in-12 de 456 pages, papier glacé. . . . . 3 fr. 50

COURS COMPLET D'ARPENTAGE ÉLÉMENTAIRE, théorique et appliqué, à l'usage des divers Établissements d'Instruction publique. — Augmenté d'un très grand nombre d'Applications suivies immédiatement de leurs Solutions raisonnées, plus de 200 dessins gravés sur cuivre, intercalés dans le texte et deux planches de topographie gravées sur acier et lavées. — *Nouvelle édition, revue et augmentée;* beau volume in-12, papier glacé. . . . . 3 fr. 15

TRAITÉ COMPLET DE LA DIVISION DES CHAMPS dans tous les cas. — GÉODÉSIE USUELLE comprenant toutes les méthodes arithmétiques et graphiques, *simples, claires* et *précises*, pour diviser les Terrains d'une forme régulière et irrégulière en portions équivalentes et proportionnelles d'après les différentes conditions imposées par les Copartageants. — Augmentée d'un très grand nombre d
elle édi
le texte

PETITE
CATÉCH
d'une m
par un
Nouvelle
sur cuiv