Sammlung Göschen

Projektive Geometrie

in

synthetischer Behandlung

von

l Doehlemann

Figuren

Sammlung Göschen

Unser heutiges Wissen
in kurzen, klaren,
allgemeinverständlichen
Einzeldarstellungen

Jede Nummer in eleg. Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig

Zweck und Ziel der „Sammlung Göschen" ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.

Ein ausführliches Verzeichnis der bisher erschienenen Nummern befindet sich am Schluß dieses Bändchens

Sammlung Göschen

Projektive Geometrie

in

synthetischer Behandlung

von

Dr. Karl Doehlemann
Professor an der Universität München

Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage

Mit 91 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1905

Literatur.

a) Grundlegende Werke.

Poncelet: Traité des propriétés projectives des figures. Paris. 1822.
Möbius: Der barycentrische Calcul. Leipzig. 1827.
Steiner: Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander usw. Berlin. 1832.
v. Staudt: Geometrie der Lage. Nürnberg. 1847.
Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg. 1856. 1857. 1860.
Chasles: Traité de Géométrie supérieure. Paris. 1852.
Traité des sections coniques. Paris. 1865.

b) Lehrbücher.

Steiner: Vorlesungen über synthetische Geometrie.
1. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearbeitet von Geiser. Leipzig. 1887.
2. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektivische Eigenschaften. 3. Auflage, besorgt von Sturm. Leipzig. 1898.

Cremona: Elemente der projektivischen Geometrie. Deutsch von Trautvetter. Stuttgart. 1882.
Hankel: Vorlesungen über die Elemente der projektivischen Geometrie. Leipzig. 1875.
Bobek: Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene. Leipzig. 1889.
Thomae: Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung. Halle a/S. 1894.

In den bisher unter b) genannten Werken finden bloß „ebene" Gebilde Berücksichtigung. Auch räumliche Gebilde, Flächen usw. behandeln:

Enriques: Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Fleischer. Leipzig. 1903.
Reye: Die Geometrie der Lage. 3 Abteilungen. 1. Abteil, 4. Auflage. Leipzig. 1899. 2. und 3. Abteil. Leipzig. 1892. Zur Einführung in das Studium genügt die 1. Abteilung.

Vielfach benutzt ferner die darstellende Geometrie die Methoden der projektiven Geometrie. Deshalb finden sich auch in den Lehrbüchern der erstgenannten Disziplin Darstellungen der projektiven Geometrie. Wir nennen folgende:

Schlotke: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. IV. Teil: Projektivische Geometrie. Dresden. 1896.
Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Band. Leipzig. 1884. VI. Abschnitt.
Rohn und Papperitz: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Band. 2. Auflage. Leipzig. 1901.

Für schon weiter Fortgeschrittene sei endlich noch das Werk erwähnt:

Fiedler: Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 1. Teil. Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektivischen Geometrie. 4. Auflage. Leipzig. 1904. 2. Teil. Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. 3. Auflage. Leipzig. 1885. 3. Teil. Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage. 3. Auflage. Leipzig. 1888.

Inhalt.

Seite

I. Abschnitt: Die perspektive Beziehung der Grundgebilde.
§ 1. Die Grundgebilde 5
§ 2. Schneiden und Projizieren. Das Gesetz der Dualität 8
§ 3. Die uneigentlichen Elemente 17
§ 4. Die perspektive Beziehung der Grundgebilde . . 22
§ 5. Die Maßbestimmung im Strahlenbüschel . . . 25
§ 6. Die Maßbestimmung in der Punktreihe . . . 28
§ 7. Das Doppelverhältnis 31

II. Abschnitt: Harmonische Gebilde.
§ 8. Weitere Eigenschaften des Doppelverhältnisses . 39
§ 9. Das harmonische Doppelverhältnis 44
§ 10. Das vollständige Viereck und Vierseit . . . 47
§ 11. Metrische Relationen bei harmonischen Gebilden . 54

III. Abschnitt: Die projektive Beziehung der einförmigen Grundgebilde.
§ 12. Die konstruktive Behandlung d. projektiven Beziehung 56
§ 13. Die perspektive Orientierung projektiver Grundgebilde erster Stufe 61
§ 14. Anwendungen 63
§ 15. Metrische Relationen. Spezielle Fälle 68

IV. Abschnitt: Die projektive Beziehung auf dem gleichen Träger.
§ 16. Die Doppelelemente und ihre Konstruktion . . 71
§ 17. Die involutorische Beziehung 85
§ 18. Die Punktinvolution 89
§ 19. Die Strahleninvolution 92
§ 20. Die Involutionen beim vollständigen Viereck und Vierseit. Transversalen beim Dreieck. . . . 95

V. Abschnitt: Die Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Grundgebilde erster Stufe.
§ 21. Das Erzeugnis zweier projektiver, in der gleichen Ebene gelegener Strahlenbüschel 101
§ 22. Der Satz von Pascal 112
§ 23. Das Erzeugnis zweier projektiver, in der gleichen Ebene gelegener Punktreihen 118
§ 24. Der Satz von Brianchon 125
§ 25. Identität der Kurven 2. Ordnung und 2. Klasse . 130
§ 26. Die verschiedenen Arten der Kegelschnitte . . 134

VI. Abschnitt: Die Polarentheorie der Kegelschnitte.
§ 27. Pol und Polare 149
§ 28. Das Polardreieck 154
§ 29. Mittelpunkt, Durchmesser, Achsen eines Kegelschnittes 158

VII. Abschnitt: Die Kegel- und Regel-Flächen zweiter Ordnung als Erzeugnisse projektiver Grundgebilde.
§ 30. Über Flächen im allgemeinen 164
§ 31. Die Kegelfläche 2. Ordnung 169
§ 32. Die geradlinige Fläche 2. Ordnung 173
Register 180

Die leitenden Gesichtspunkte.

1. Eine prinzipiell strenge Darstellung hat erst für den weiter Fortgeschrittenen Wert. Dem Anfänger ist besser gedient mit einer Behandlung, welche die verschiedenen Seiten des Stoffes zur Geltung bringt. Demgemäß ist die „Projektive Geometrie“ nicht rein vom Standpunkte der Geometrie der Lage aus durchgeführt, sondern es wird auch der Begriff des Doppelverhältnisses benutzt. Viele Beweise lassen sich dann auch einfacher durchführen als bei der rein konstruierenden Methode.
2. Auf anschauliche Konstruktionen, sowie konstruktive Durchführung der Figuren und Aufgaben ist jedoch ein Hauptgewicht gelegt.
3. Die Raumgeometrie ist prinzipiell von der ebenen Geometrie nicht zu trennen. Denn die neuere Geometrie soll insbesondere auch das Anschauungsvermögen ausbilden. Dies ist schon erforderlich für die Figuren der ebenen Geometrie, um die Strahlen, Punkte usw. bei ihrer Bewegung zu verfolgen.
4. Für gewisse Begriffe und Beweise muß auf die analytische Geometrie verwiesen werden, so z. B. bei der Ordnung und Klasse einer Kurve. Ebenso erbringt erst die Rechnung die Beweise, daß die durch projektive Grundgebilde erzeugten neuen Gebilde die allgemeinen ihrer Art sind.
5. In dem zu Gebote stehenden Raum konnten nur die wichtigsten und in erster Linie die projektiven Eigenschaften zur Sprache kommen. Metrische Beziehungen bei Kegelschnitten, die Kreispunkte, Brennpunktseigenschaften usw. finden ihre Behandlung ohnedies passender in der analytischen Geometrie.

I. Abschnitt.

Die perspektive Beziehung der Grundgebilde.

§ 1. Die Grundgebilde.

1. Die projektive (neuere, synthetische) Geometrie wurde nach mancherlei Ansätzen aus früherer Zeit in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts zu einem System ausgebaut und zwar in Frankreich durch Poncelet und Chasles, in Deutschland durch Möbius, Plücker und namentlich durch Steiner und v. Staudt. Von der Geometrie der Alten unterscheidet sich die neuere Geometrie vor allem dadurch, daß sie von gewissen einfachen „Grundgebilden" ausgeht und aus ihnen in einheitlicher, systematischer Weise alle übrigen geometrischen Gebilde ableitet.

Die Grundgebilde erster Stufe.

2. Die „Elemente" der Geometrie sind der Punkt, die Ebene und die Gerade. Diese letztere nennen wir Strahl, wenn sie bloß als Ganzes betrachtet wird. Aus diesen drei Elementen werden die Grundgebilde der neueren Geometrie in folgender Weise zusammengesetzt. Denken wir uns eine unbegrenzte Gerade g, so enthält dieselbe unendlich viele Punkte, die wir uns auf ihr aufgereiht denken, etwa wie Perlen auf einer gerade gespannten Schnur. Die Gerade, aufgefaßt als Inbegriff aller ihrer Punkte, bezeichnen wir als gerade Punktreihe

oder kurz als Punktreihe. Weil die Punkte auf der Geraden angeordnet sind, nennen wir die Gerade den Träger der Punktreihe. Das erzeugende Element der Punktreihe ist also der Punkt.

Durch eine Gerade kann man unendlich viele Ebenen legen, annäherungsweise wie die Blätter eines aufgeschlagenen Buches. Die Gesamtheit der Ebenen, die durch eine Gerade hindurchgehen, nennen wir einen Ebenenbüschel.

Die Gerade heißt der Träger oder die Achse des Ebenenbüschels. Als erzeugendes Element dient in diesem Falle die Ebene.

Nehmen wir endlich eine Ebene ε und in ihr einen Punkt S, so können wir in dieser Ebene unendlich viele Gerade oder Strahlen ziehen, die überdies durch S gehen, ähnlich wie die Speichen eines Rades. Den Inbegriff aller dieser Strahlen nennt man einen Strahlenbüschel. Der Punkt S heißt der Mittelpunkt des Büschels. Als erzeugendes Element ist hier die Gerade, d. h. der Strahl, verwendet.

Die Punktreihe, der Ebenenbüschel und der Strahlenbüschel heißen die Grundgebilde erster Stufe oder die einförmigen Grundgebilde.

Die Grundgebilde zweiter Stufe.

3. Gehen wir aus von einem Punkte S im Raume, so gibt es durch ihn unendlich viele Strahlen und Ebenen. Den Inbegriff aller dieser Elemente bezeichnen wir als Bündel und zwar als Strahlenbündel oder Ebenenbündel, je nachdem wir Strahlen oder Ebenen als Elemente wählen. Der Punkt S heißt der Mittelpunkt des Bündels. Eine Ebene des Strahlenbündels S wird erzeugt durch die Strahlen des Strahlenbüschels,

der in dieser Ebene liegt und S zum Mittelpunkt hat. Im Ebenenbündel dagegen ist jeder Strahl aufzufassen als Achse eines Ebenenbüschels, dessen Ebenen sämtlich dem Bündel angehören. Es enthält demnach der Bündel unendlich viele Strahlenbüschel und Ebenenbüschel.

Betrachten wir ferner eine unendlich ausgedehnte Ebene ε mit allen in ihr gelegenen Punkten und Geraden, so nennt man den Inbegriff aller dieser Elemente ein ebenes System oder ein Feld. Wir sprechen von einem Punktfeld oder einem Strahlenfeld, je nachdem wir die Punkte oder die Strahlen im Auge haben. Im Punktfeld sind die einzelnen Geraden aufzufassen als Punktreihen, im Strahlenfeld die einzelnen Punkte als Strahlenbüschel. Das ebene System enthält unendlich viele Punktreihen und Strahlenbüschel.

Der Bündel und das ebene System bilden zusammen die beiden Grundgebilde zweiter Stufe. Sie enthalten unendlich viele Grundgebilde erster Stufe.

Das Grundgebilde dritter Stufe.

4. Als Grundgebilde dritter Stufe können wir den ganzen, unendlichen Raum mit allen in ihm enthaltenen Punkten, Ebenen und Strahlen bezeichnen. Jeder seiner Punkte kann als Mittelpunkt eines Bündels, jede seiner Ebenen als Träger eines ebenen Systems, jeder seiner Strahlen als Achse eines Ebenenbüschels oder als Träger einer Punktreihe genommen werden.

Die Gesamtheit von unendlich vielen, durch irgend ein geometrisches oder analytisches Gesetz definierten Elementen irgendwelcher Art heißt eine Mannigfaltigkeit. Demnach sind die Grundgebilde Mannigfaltigkeiten von Punkten, Ebenen und Strahlen.

Um übrigens schon durch die äußere Form der Darstellung den Überblick über die zu betrachtenden Gebilde zu erleichtern, wollen wir für die geometrischen Elemente eine bestimmte Art der Bezeichnung festhalten. Wir bezeichnen: Punkte durchweg mit großen lateinischen Buchstaben, z. B. A, B, P, S; Gerade oder Strahlen mit kleinen lateinischen Buchstaben, wie a, b, g; Ebenen endlich stets mit kleinen griechischen Buchstaben, z. B. α, β, ε.

§ 2. Schneiden und Projizieren. Das Gesetz der Dualität.

Die Operation des Schneidens.

5. Zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, oder eine Gerade und eine nicht durch sie hindurchgehende Ebene liefern einen Schnittpunkt; zwei Ebenen bestimmen eine Schnittgerade. Das neue Schnittelement ist nur dann nicht vorhanden, wenn die gegebenen Elemente parallel sind. Diese spezielle Lage wollen wir zunächst von der Betrachtung ausschließen. In jedem der drei obengenannten Fälle suchen wir ein Element, das den beiden gegebenen Elementen gemeinsam ist. Wir bezeichnen diese Operation als die des Schneidens und müssen sie jetzt auch auf die Grundgebilde ausdehnen.

Betrachten wir einen Strahlenbüschel S (Fig. 1) und eine Gerade g, die in der Ebene des Büschels liegen, aber nicht durch seinen Mittelpunkt hindurchgehen möge, so können wir die Strahlen des Büschels mit g zum Schnitt bringen. Wir erhalten also auf g eine Punktreihe, insofern jeder Punkt dieser Geraden als Schnittpunkt von g mit einem Strahl des Büschels aufgefaßt werden kann. Dies drücken wir in der Weise aus, daß wir sagen: Die Gerade g schneidet den Büschel S in einer Punktreihe.

Im gleichen Sinne sind folgende Sätze zu verstehen: Eine Gerade schneidet einen Ebenenbüschel, dessen Achse sie nicht trifft, in einer Punktreihe. — Eine Ebene schneidet einen Ebenenbüschel, dessen Achse sie nicht enthält, in einem Strahlenbüschel. — Eine Ebene schneidet einen Strahlenbündel, durch dessen Mittelpunkt sie nicht hindurchgeht, in einem Punktfeld. — Es entstehen demnach aus den Grundgebilden durch die Operation des Schneidens auch nur wieder Grundgebilde.

Die Operation des Projizierens.

6. Zwei Punkte können wir durch eine Gerade verbinden, zwei sich schneidende Gerade durch eine Ebene, einen Punkt und eine nicht durch ihn hindurchgehende Gerade ebenfalls durch eine Ebene. Wir bezeichnen diese Operation als die des Projizierens. Sie unterscheidet sich übrigens von der des Schneidens nur durch die Art der gegebenen Elemente. Bei beiden Operationen aber handelt es sich darum, daß man die gegebenen Elemente als Träger von Grundgebilden betrachtet und ein diesen Grundgebilden gemeinsames Element bestimmt.

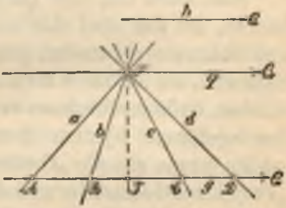

Fig. 1.

Wenden wir nun auch die Operation des Projizierens auf die Grundgebilde an. Es sei z. B. eine Punktreihe g gegeben und ein Punkt S außerhalb derselben (Fig. 1). Dann können wir jeden Punkt von g mit S verbinden und erhalten durch diese Verbindungsstrahlen den Strahlenbüschel S. Von ihm sagen wir: er projiziert aus S die Punktreihe.

Ebenso wird ein Punktfeld aus irgend einem, ihm nicht angehörenden Punkte durch einen Strahlenbündel projiziert.

Die Operation des Projizierens kann auch von einer Geraden aus erfolgen. Ist s irgend eine Gerade und g eine Punktreihe, wobei g und s sich nicht schneiden, so kann man durch die Punkte von g und durch s Ebenen legen. Es wird also die Punktreihe g aus s durch einen Ebenenbüschel projiziert.

Auch durch die Operation des Projizierens entstehen somit aus den Grundgebilden wieder nur Grundgebilde. Durch Projizieren und Schneiden gehen also die Grundgebilde ineinander über.

Man kann nun eine Darstellung der Geometrie durchführen, bei der man bloß die Operationen des Projizierens und Schneidens benutzt, jede Abmessung aber, sei es von Strecken, sei es von Winkeln, also auch jede Rechnung mit solchen Größen durchaus vermeidet. Das in dieser Weise durchgeführte System geometrischer Untersuchung bezeichnet man als die „Geometrie der Lage“ oder auch als „Projektive Geometrie“ und die dabei sich ergebenden Eigenschaften der Gebilde als „projektive“. Die zweckmäßigste Art der Behandlung dieser Geometrie wird die konstruierende oder synthetische sein, doch bietet die moderne Mathematik auch die Mittel zu einem analytischen Aufbau der projektiven Geometrie. Im Gegensatz zu diesen Untersuchungsmethoden nennt man diejenige geometrische Darstellung, welche von vornherein die Begriffe der Strecke und des Winkels einführt und auch die Beziehungen zwischen diesen Größen in Betracht zieht, „metrische“

oder „messende“ Geometrie oder auch „Geometrie des Maßes“.

Wir werden im folgenden nicht streng eine Methode zur Durchführung bringen, sondern, wie es für den Anfänger vorteilhafter erscheint, eine gemischte Methode anwenden.

Ist es möglich, aus zwei Elementen durch eine der Operationen des Projizierens oder Schneidens ein neues Element abzuleiten, so wollen wir dies letztere einfach durch die in Klammern gesetzten beiden Elemente bezeichnen. Die Verbindungsgerade zweier Punkte A und B nennen wir demnach (A B), wofür wir auch häufig bloß A B schreiben, wenn eine Verwechslung mit der Strecke A B ausgeschlossen ist. Zwei sich schneidende Gerade a und b bestimmen die Ebene (a b), eine Ebene α und eine Gerade g den Schnittpunkt (α g) usw.

Das Gesetz der Dualität.

7. Denken wir uns zwei Ebenen ε_1 und ε_2 irgendwie im Raume angenommen und in der ersten zwei Punkte A und B, in der zweiten zwei Gerade a und b gegeben. Dann können wir A und B durch eine Gerade (A B) verbinden und andererseits a und b in einem Punkte (a b) zum Schnitt bringen. Der Operation des Projizierens, angewandt auf zwei Punkte, ordnen wir damit die Operation des Schneidens, durchgeführt für zwei Gerade, zu. Liegen in der ersten Ebene drei Punkte A, B, C auf einer Geraden g, so können wir in der zweiten Ebene drei Gerade a, b, c betrachten, die durch einen Punkt G gehen. Wenn ferner in ε_1 zwei Gerade c und d einen Schnittpunkt bestimmen, so steht dem die Tatsache gegenüber, daß zwei Punkte C und D in ε_2 zur Konstruktion einer Verbindungslinie benutzt werden können.

Nun wollen wir annehmen, wir hätten in der Ebene ε_1 für irgend einen Satz der Geometrie der Lage den Beweis erbracht. Es muß also in der Ebene ε_1 eine Figur gegeben sein, deren Elemente durch reine Lagenbeziehungen bestimmt sind, und aus diesen Bestimmungsstücken wird durch irgendwelche wiederholte Anwendung der Operationen des Projizierens und Schneidens der Satz abgeleitet. Dann muß es aber möglich sein, zunächst in der Ebene ε_2 eine entsprechende Figur anzulegen, indem man immer Punkte und Gerade der ε_1 durch Gerade und Punkte in ε_2 ersetzt, und auch der Beweis wird sich Schritt für Schritt übertragen lassen, sofern man nur, wie oben erwähnt, die Operationen des Projizierens und Schneidens vertauscht. Von einer metrischen Größe, einem Winkel oder einer Strecke, darf natürlich weder in der Figur noch in dem Beweise des ursprünglichen Satzes ein Gebrauch gemacht werden, da sich diese Begriffe nicht durch die beiden Fundamentaloperationen definieren und also auch nicht übertragen lassen. Ein Beispiel wird dies sofort klarmachen.

Nehmen wir an, es wäre uns gelungen, folgenden Satz zu beweisen: Auf zwei Geraden g und g_1 einer Ebene sind beliebig je drei Punkte A, B, C bzw. A_1, B_1, C_1 gegeben (Fig. 2). Man zieht die Verbindungslinien (AB_1), (A_1B), (BC_1), (B_1C), (CA_1), (C_1A). Ferner bringen wir (AB_1) und (A_1B) in einem Punkte C_2, (BC_1) und (B_1C) in A_2, (CA_1) und (C_1A) in B_2 zum Schnitt. Dann liegen die drei Punkte A_2, B_2, C_2 auf einer Geraden g_2.

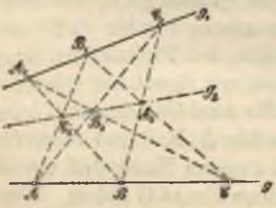

Fig. 2.

Um die entsprechende Figur in der zweiten Ebene ε_2 zu bilden, geben wir uns zwei beliebige Punkte G und G_1 (Fig. 3) und durch jeden 3 Gerade a, b, c bzw. a_1 b_1 c_1. Wir zeichnen die Schnittpunkte$(a b_1)$, $(a_1 b)$, $(b c_1)$, $(b_1 c)$, $(c a_1)$, $(c_1 a)$. Es sei ferner c_2 die Verbindungslinie von $(a b_1)$ und $(a_1 b)$, a_2 die von $(b c_1)$ und $(b_1 c)$, b_2 die von $(c a_1)$ und $(c_1 a)$. Dann gehen die drei Geraden a_2, b_2, c_2 durch einen Punkt G_2. Diesen Satz, das Gegenbild des vorigen, kann man ohne weiteres als richtig aufstellen, wenn der erste bewiesen ist. Man bezeichnet den Zusammenhang, der zwischen den beiden Ebenen besteht, als das Gesetz der Dualität oder Reziprozität (Poncelet 1822, Gergonne 1826).

Fig. 3.

Statt zweier Ebenen können wir aber auch eine Ebene und ein Bündel in Beziehung setzen. Sooft wir einen Punkt der Ebene ins Auge fassen, wählen wir im Bündel einen Strahl. Der Verbindungslinie zweier Punkte entspricht im Bündel die Verbindungsebene der zwei zugeordneten Stellen usw. Eine dritte Fassung des Dualitätsgesetzes gewinnen wir, wenn wir zwei Bündel dual aufeinander beziehen, wobei dann den Strahlen und Ebenen des einen die Ebenen und Strahlen des anderen zugewiesen werden. Endlich brauchen wir uns nicht auf die Geometrie der Ebene oder des Bündels zu beschränken, sondern können auch im Raum eine solche Beziehung herstellen. Den Punkten entsprechen in diesem Falle Ebenen und der Operation des Projizierens, welche aus zwei Punkten ihre Verbindungslinie ableitet, ordnen wir die Operation des Schneidens zu, bei welcher aus zwei Ebenen ihre Schnittlinie hervorgeht. Bei der Dualität im Raume geht also eine Gerade wieder in eine Gerade über. Wir wollen diese sämtlichen Beziehungen in einer Tabelle zur Darstellung bringen, indem wir immer zwei sich „dual" entsprechende Begriffe oder Sätze links und rechts auf die gleiche Zeile setzen.

a) Duale Beziehung zwischen zwei Ebenen.

Punkt A	Gerade a
Zwei Punkte A und B bestimmen eine Verbindungslinie (A B).	Zwei Gerade a und b bestimmen einen Schnittpunkt (a b).
Drei Punkte A, B, C, die auf einer Geraden g liegen.	Drei Gerade a, b, c, die durch einen Punkt G gehen.
Punktreihe g	Strahlenbündel G

usw.

b) Duale Beziehung zwischen der Ebene und dem Bündel.

Punkt A	Strahl a
Zwei Punkte A und B bestimmen eine Verbindungsgerade (AB).	Zwei Strahlen a und b bestimmen eine Verbindungsebene (a b).
Drei Punkte A, B, C, die auf einer Geraden g liegen.	Drei Strahlen a, b, c, die in einer Ebene γ liegen.
Punktreihe g	Strahlenbüschel γ

usw.

c) Duale Beziehung zwischen zwei Bündeln.

Strahl a	Ebene α
Zwei Strahlen a und b bestimmen eine Verbindungsebene (a b).	Zwei Ebenen α und β bestimmen eine Schnittgerade ($\alpha\,\beta$).
Drei Strahlen a, b, c, die in einer Ebene λ liegen.	Drei Ebenen α, β, γ, die durch eine Gerade l gehen.
Strahlenbündel λ	Ebenenbüschel l

usw.

d) Duale Beziehung im Raume.

Punkt A	Ebene α
Zwei Punkte A und B bestimmen eine Verbindungsgerade (A B).	Zwei Ebenen α und β bestimmen eine Schnittgerade ($\alpha\,\beta$).
Drei Punkte A, B, C bestimmen eine Ebene (ABC).	Drei Ebenen α, β, γ bestimmen einen Schnittpunkt (α, β, γ).
Drei Punkte A, B, C, die auf einer Geraden g liegen.	Drei Ebenen α, β, γ, die durch eine Gerade l hindurchgehen.
Punktreihe g	Ebenenbündel l
Strahlenbüschel	Strahlenbüschel
Ebenenbündel A	Punktfeld α

usw.

Die in der letzten Zeile gegebene Zuordnung stimmt überein mit der unter b) direkt abgeleiteten. Projiziert man zwei nach a) dual aufeinander bezogene ebene Systeme aus zwei Punkten, so erhält man die in c) behandelten dualen Bündel. In gleicher Weise kann man natürlich auch eine Ebene oder einen Bündel dual auf sich selbst beziehen.

Weitere Beispiele.

8. Einige weitere Beispiele mögen zur Erläuterung dienen. In der nämlichen Ebene seien zwei Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ so gezeichnet, daß die Verbindungslinien $(A_1 A_2)$, $(B_1 B_2)$, $(C_1 C_2)$ durch einen Punkt S laufen (Fig. 25). Als bewiesen werde nun vorausgesetzt, daß dann die Seiten $(A_1 B_1)$ und $(A_2 B_2)$, ferner $(A_1 C_1)$ und $(A_2 C_2)$, endlich $(B_1 C_1)$ und $(B_2 C_2)$ sich bzw. in drei Punkten schneiden, die auf einer Geraden s liegen. Bilden wir, unter Anwendung des Dualitätgesetzes a) der Ebene, zu diesem Satze den entsprechenden. Dann haben wir auszugehen von zwei Gruppen von je drei Geraden a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3, also von zwei Dreiseiten, welche so liegen, daß die drei Schnittpunkte $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$ und $(c_1 c_2)$ einer Geraden angehören, und wir können behaupten, daß die Schnittpunkte $(a_1 b_1)$ und $(a_2 b_2)$, ferner $(a_1 c_1)$ und $(a_2 c_2)$, endlich $(b_1 c_1)$ und $(b_2 c_2)$ drei Verbindungslinien liefern, die durch einen Punkt laufen. In diesem Falle gibt also die duale Übertragung des Satzes gerade dessen Umkehrung. Unter Anwendung der in b) besprochenen Dualität hätten wir aus dem ursprünglichen Satze einen neuen über zwei einem Bündel angehörende Dreikante ableiten können.

Wir werden im folgenden vielfach Gelegenheit haben, namentlich das Dualitätsgesetz der Ebene anzuwenden. Ist z. B. eine projektive Betrachtung für zwei in einer Ebene befindliche Punktreihen durchgeführt, so können wir sie unmittelbar auf zwei Strahlenbüschel der gleichen Ebene übertragen.

Eine duale Beziehung zweier Bündel erhalten wir z. B., wenn wir jeder Ebene des einen Bündels den Strahl im andern Bündel zuordnen, der auf ihr senkrecht steht. Dann entspricht von selbst auch jeder

Ebene des zweiten Bündels der zu ihr normale Strahl des ersten Bündels (Polare Zuordnung auf der Kugel, Polardreikant).

Fig. 4.

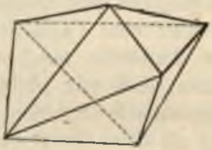

Fig. 5.

Um für die Dualität im Raume ein Beispiel zu geben, sei daran erinnert, daß jedem Polyeder (Vielflach), das etwa e Ecken, f Flächen, k Kanten besitzt, ein „reziprokes“ entspricht mit e Flächen, f Ecken und wiederum k Kanten. So steht z. B. dem von 6 Vierecken begrenzten allgemeinen Hexaeder (Fig. 4) das von 8 Dreiecken gebildete allgemeine Oktaeder (Fig. 5) gegenüber.

In der Geometrie des Maßes gilt das Dualitätsgesetz nicht mehr; wohl aber kann man Analogien auffinden.

§ 3. Die uneigentlichen Elemente.

Der unendlich ferne Punkt einer Geraden.

9. Den in 5. besprochenen Prozeß des Schneidens konnten wir nicht mehr zur Durchführung bringen, wenn die in Betracht zu ziehenden Elemente parallel waren, z. B. bei zwei parallelen Geraden. Wir wollen nun sehen, wie wir, wenigstens formal, den genannten Prozeß auch auf diesen Fall ausdehnen können.

Schneiden wir (Fig. 1) einen Strahlenbüschel S mit einer Geraden g, die in der Ebene des Büschels liegt, ohne ihm anzugehören. Die einzelnen Strahlen a, b, c, d . . . des Büschels mögen von g in A, B, C, D . . . getroffen werden. Dann gibt es nach den Voraussetzungen der Euklidischen Geometrie durch S eine und nur eine Parallele q zur Geraden g. Indem wir diese Annahme machen, wollen wir ausdrücklich bemerken, daß wir nicht imstande sind, dieselbe durch mathematische Schlüsse zu beweisen, daß wir sie vielmehr als eines der grundlegenden Axiome vorausschicken müssen. Würde man statt desselben ein anders lautendes Axiom an die Spitze stellen, so erhielte man ein anderes, in sich aber ebenso logisch geschlossenes System einer Geometrie.

Demnach schneiden alle die unendlich vielen Strahlen des Büschels S die Gerade g je in einem Punkte, nur der Parallelstrahl q liefert keinen Schnittpunkt mit g. Es ist nun namentlich für die einfachere Formulierung allgemeiner Sätze ein Vorteil, diese Ausnahmestellung des Parallelstrahles wenigstens in dem Ausdruck zu beseitigen. Wir erreichen dies, indem wir uns so ausdrücken: „Der Parallelstrahl q schneidet die Gerade g in einem unendlich fernen Punkt Q.“ Zu den im Endlichen gelegenen, eigentlichen Punkten der Geraden g nehmen wir also noch einen „uneigentlichen“, fingierten, hinzu, dem wir uns in der Vorstellung nähern, wenn wir die Gerade nach der einen oder andern Seite über alle Grenzen hinaus verlängern. Man kann sich auch einen Strahl denken, der sich um S dreht, und diesen kurz vor und nach der Lage betrachten, in der er zu g parallel ist.

Wir wollen diesen uneigentlichen (adjungierten), unendlich fernen Punkt der Geraden mit Q bezeichnen und durch Hinzufügung eines Pfeiles andeuten, daß er auf der Geraden g im Unendlichen liegt.

Ziehen wir in der Ebene des Strahlenbüschels S irgend eine weitere Gerade h parallel zu g, so werden wir auch von dieser Parallelen h sagen, daß sie durch den nämlichen, unendlich fernen Punkt Q geht. Ein unendlich ferner Punkt ist folglich gleichbedeutend mit einer bestimmten „Richtung". Die Gesamtheit von unendlich vielen, zueinander parallelen Geraden, die alle in einer Ebene liegen, wird nach dieser Anschauung aufzufassen sein als ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der den sämtlichen Parallelen gemeinsame unendlich ferne Punkt ist. Ein solcher Strahlenbüschel heißt wohl auch ein „Parallelstrahlenbüschel".

In entsprechender Weise bilden alle Geraden im Raume, die zu irgend einer Geraden g parallel laufen, also alle die gleiche Richtung haben, einen „Parallelstrahlenbündel".

Die unendlich ferne Gerade einer Ebene.

10. Nehmen wir jetzt eine Ebene als gegeben an, so liegen in ihr in jeder Richtung Punkte im Unendlichen. Alle diese uneigentlichen Punkte werden eine gewisse Mannigfaltigkeit bilden, und jede Gerade g der Ebene hat mit derselben einen Punkt gemein, nämlich den unendlich fernen Punkt dieser Geraden g.

Wenn wir also sagen: die unendlich fernen Punkte der gegebenen Ebene liegen auf einer „unendlich fernen" Geraden, so ergibt sich der unendlich ferne Punkt einer Geraden g dieser Ebene als Schnittpunkt derselben mit dieser „unendlich fernen" Geraden. Natürlich entzieht sich das Unendliche jeder Vorstellung. Wenn wir aber diese uneigentliche Gerade einer Ebene hinzunehmen, so können wir unter dieser Annahme, vorausgesetzt, daß sich im weiteren Verlauf keine Widersprüche ergeben, das Unendliche formal wie das Endliche behandeln.

Eine Ebene enthält also eine unendlich ferne Gerade. Die letztere muß als bestimmt angesehen werden, sobald die Ebene gegeben ist. Alle Punkte dieser unendlich fernen Geraden liegen im Unendlichen, sind also uneigentliche. Eine unendlich ferne Gerade hat keine bestimmte Richtung. Irgend zwei parallele Gerade dieser Ebene schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden der Ebene. Wir können jetzt z. B. allgemein sagen: Zwei Gerade in einer Ebene bestimmen einen Schnittpunkt.

Die unendlich ferne Ebene des Raumes.

11. Um diese Anschauung weiter für den Raum auszubilden, sei S der Mittelpunkt eines Ebenenbündels, ε eine ihm nicht angehörende Ebene. Jede Ebene des Bündels liefert mit ε eine Schnittgerade. Ferner gibt es nach den Sätzen der Elementargeometrie durch S eine und zwar nur eine Parallelebene ξ zu ε. Diese Ebene ξ allein liefert mit ε keine Schnittgerade. Um nun nicht alle Sätze, die sich auf die Schnittlinie zweier Ebenen beziehen, für parallele Ebenen besonders formulieren zu müssen, drücken wir uns so aus: Die Parallelebene ξ hat mit ε eine uneigentliche, unendlich ferne Gerade gemein. Dies stimmt dann auch zusammen mit den Anschauungen von 10. Weiter gehen alle zu ε parallelen Ebenen durch die gleiche unendlich ferne Gerade. Sagen wir von parallelen Ebenen, sie haben die gleiche „Stellung", so ist also eine unendlich ferne Gerade im Raume durch die Stellung einer Ebene bestimmt.

Alle zu einer gegebenen Ebene parallelen Ebenen bilden einen „Parallelebenenbüschel", dessen Achse die durch die Stellung der Parallelebenen gegebene unendlich ferne Gerade ist.

„Eine Ebene ist parallel einer Geraden“ heißt: die Ebene geht durch den unendlich fernen Punkt der Geraden.

Im Raume können wir unendlich viele, unendlich ferne Punkte und Geraden aufsuchen. Jede Gerade enthält einen unendlich fernen Punkt, jede Ebene eine unendlich ferne Gerade. Wir bleiben also in Übereinstimmung mit den bisherigen Formulierungen, wenn wir uns so ausdrücken: Alle unendlich fernen Punkte und unendlich fernen Geraden des Raumes erfüllen eine Ebene, die „unendlich ferne“ Ebene des Raumes.

Sie enthält lauter uneigentliche Elemente und hat keine bestimmte Stellung.

So z. B. können wir den Satz: „Zwei Punkte bestimmen eine Verbindungsgerade“ jetzt ganz allgemein aussprechen. Liegen beide Punkte im Endlichen, so ist die durch sie bestimmte Gerade ihre Verbindungslinie; ist einer der beiden gegebenen Punkte ein unendlich ferner, so wird die Verbindungsgerade die Parallele, welche durch den einen Punkt parallel zu der Richtung geht, in welcher der andere gegebene unendlich ferne Punkt liegt; sind die beiden gegebenen Punkte unendlich fern, d. h. hat man zwei Gerade, auf denen im Unendlichen die beiden gegebenen Punkte liegen sollen, so ist die Verbindungsgerade eine bestimmte unendlich ferne Gerade. Eine Ebene, welche zu den beiden gegebenen Geraden parallel ist, gibt die Stellung aller Ebenen, die durch diese unendlich ferne Gerade hindurchgehen.

§ 4. Die perspektive Beziehung der Grundgebilde.

Punktreihe und Strahlenbüschel in perspektiver Lage.

12. Wenn wir wie in 9. einen Strahlenbüschel S mit einer Geraden g zum Schnitt bringen (Fig. 1), so entspricht jedem Punkte von g ein Strahl des Büschels, nämlich der durch ihn hindurchgehende. Nehmen wir auch den unendlich fernen Punkt Q von g hinzu und behandeln ihn im Ausdruck wie einen eigentlichen Punkt, so entspricht ihm der Strahl q des Büschels. Damit ist also auch die Zuordnung zwischen den Punkten der Punktreihe und den Strahlen des Büschels eine ausnahmslose geworden. Weil jedem Element des einen Gebildes ein und nur ein Element des anderen Gebildes entspricht, so sagen wir, die beiden Gebilde, Punktreihe und Strahlenbüschel, seien „eindeutig“ aufeinander bezogen. Ferner liegen je zwei entsprechende Elemente ineinander.

Wir nennen diese Beziehung zwischen der Punktreihe und dem Strahlenbüschel ferner eine „perspektive“. Dies ist zunächst nur ein anderer Ausdruck dafür, daß die Punktreihe ein Schnitt des Strahlenbüschels ist. Ebenso heißt die Punktreihe, wonach eine Gerade einen Ebenenbüschel schneidet, oder der Strahlenbüschel, in welchem eine Ebene einen Ebenenbüschel trifft, perspektiv zu dem Ebenenbüschel. Das Zeichen für perspektiv ist $\overline{\wedge}$.

Auch das Punktfeld, welches irgend eine Ebene aus einem Strahlenbündel ausschneidet, wird perspektiv zu dem Strahlenbündel sein.

Perspektive Punktreihen.

13. Um jetzt auch gleichartige Grundgebilde eindeutig aufeinander zu beziehen, bringen wir einen Strahlenbüschel S zum Schnitt mit zwei Geraden g und g_1 seiner Ebene,

von denen keine dem Büschel angehört (Fig. 6). Irgend ein Strahl a trifft g in A, g_1 in A_1, ein Strahl b liefert die Schnittpunkte B und B_1 usw. Jedem Punkte der einen Punktreihe z. B. A entspricht dann ein und nur ein Punkt A_1 der anderen Punktreihe, und dies bleibt auch richtig für die unendlich fernen Punkte Q und R_1 von g und g_1. Denn diesen entsprechen die Punkte Q_1 und R, in denen die durch S zu g und g_1 gezogenen Parallelstrahlen q und r die Träger g_1 und g bezüglich schneiden.

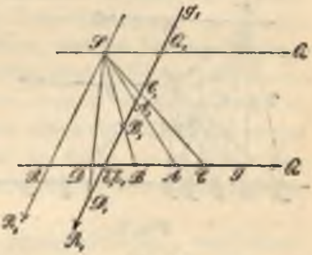

Fig. 6.

Dadurch sind die Punktreihen g und g_1 eindeutig aufeinander bezogen. Je zwei entsprechende Punkte liegen auf dem nämlichen Strahl des Büschels S oder „enthalten" diesen Strahl. Es mag noch bemerkt werden, daß im Schnittpunkte von g und g_1 entsprechende Punkte E und E_1 der beiden Punktreihen vereinigt sind. Wir nennen die beiden Punktreihen g und g_1, die also Schnitte eines Büschels sind, perspektiv.

In der gleichen Weise wird ein Strahlenbündel von zwei beliebigen Ebenen in perspektiven Punktfeldern geschnitten.

Perspektive Strahlenbüschel.

14. Entwerfen wir nun die Figur, welche der Figur 6 nach dem Dualitätsgesetz der Ebene (7a) entspricht. Wir haben dann eine Punktreihe g aus zwei Punkten S und S_1 zu projizieren, wobei g, S und S_1 einer Ebene angehören mögen (Fig. 7). Jedem Strahl z. B. a des

Büschels S ordnen wir denjenigen Strahl a_1 des Büschels S_1 zu, der den gleichen Punkt A der Punktreihe g enthält. Die Parallelen q und q_1 durch S und S_1 zu g sind dann auch als entsprechende Strahlen aufzufassen, da beide den unendlich fernen Punkt Q von g projizieren. Die eindeutige Beziehung der beiden Büschel S und S_1 ist demzufolge wieder eine lückenlose. Im Verbindungsstrahl $S S_1$, der beiden Büscheln angehört, liegen entsprechende Strahlen e und e_1 der Strahlenbüschel vereinigt. Zwei solche Büschel, welche die gleiche Punktreihe projizieren, nennen wir wiederum „perspektiv".

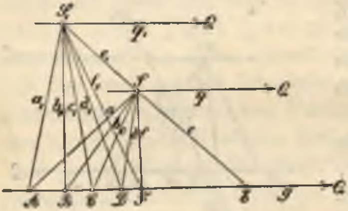

Fig. 7.

Auch die beiden Strahlenbüschel, nach denen ein Ebenenbüschel von irgend zwei beliebigen Ebenen geschnitten wird, liegen zueinander „perspektiv".

Projizieren wir ein ebenes System aus zwei Punkten, so sind die entstehenden Bündel ebenfalls perspektiv. Je zwei entsprechende Strahlen der Bündel enthalten denselben Punkt, je zwei entsprechende Ebenen dieselbe Gerade dieses ebenen Systems.

Allgemein können wir jetzt die Definition für perspektive Grundgebilde erster und zweiter Stufe, sowohl gleichartige als ungleichartige, in folgender Weise aussprechen:

Definition: „Zwei Grundgebilde erster oder zweiter Stufe heißen perspektiv, wenn eine eindeutige Beziehung ihrer Elemente hergestellt ist entweder dadurch, daß jedes Element des einen Grundgebildes das entsprechende Element des anderen Grundgebildes enthält, oder dadurch, daß je zwei entsprechende Elemente der beiden Grundgebilde ein und dasselbe Element eines dritten Grundgebildes enthalten."

§ 5. Die Maßbestimmung im Strahlenbüschel.

15. Nachdem wir die Definition perspektiver Grundgebilde durch eine reine Lagenbeziehung gewonnen haben, wollen wir untersuchen, welche Zusammenhänge zwischen entsprechenden Elementen solcher Gebilde die Rechnung liefert. Zu dem Zweck ist es aber vorher nötig, die einzelnen Elemente eines Grundgebildes erster Stufe nicht bloß wie bisher in ihrer geometrischen Anordnung, sondern auch rechnerisch, also durch Zahlenwerte festzulegen.

Beginnen wir mit dem Strahlenbüschel, weil dieser kein uneigentliches Element enthält und daher die zu betrachtenden Verhältnisse unverschleiert zur Erscheinung kommen.

Winkel zweier Strahlen. Trennungsstrahl.

16. Sind a und b zwei Strahlen eines Büschels (Fig. 8), so wollen wir unter a b den Winkel verstehen, den der Strahl a mit dem Strahl b bildet, und die Reihenfolge der Buchstaben soll den Sinn der Drehung angeben, in welchem der Winkel durchlaufen wird, also von a nach b hin. Dann ist dieser Ausdruck a b doppeldeutig; denn es kann darunter jeder der in der Figur bezeichneten Winkel verstanden werden.

Hat man drei Strahlen a, b, c, so können wir mittels derselben, wie wir der Anschauung entnehmen wollen, eine Drehungsrichtung bestimmen, indem wir unter dem

„Sinn a b c" diejenige Drehung verstehen, welche a direkt nach b überführt, ohne daß der Strahl c dabei überschritten wird (Fig. 9).

Fig. 8.

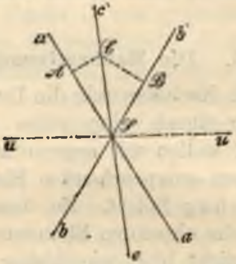

Fig. 9.

Um nun im Büschel die Winkel eindeutig zu erhalten, wählen wir einen festen Strahl u und verstehen unter a b den im Sinne a b u genommenen Winkel. Dieser ist dann eindeutig (Fig. 9). Der Hilfsstrahl u möge der „Trennungsstrahl" heißen. Da sich die Drehungen a b und b a zerstören, so hat man

$$ab + ba = 0 \quad \text{oder} \quad ab = -ba.$$

Ist c irgend ein weiterer Strahl, so gilt, ganz unabhängig von der Lage der Strahlen, die Beziehung

$$ab + bc = ac$$

oder

$$ab + bc + ca = 0$$

und allgemein für die Strahlen a, b, c, . . . m, n

$$ab + bc + \ldots + mn + na = 0.$$

Man kann diese Festsetzung auch so aussprechen, daß man durch den Trennungsstrahl den Büschel halbiert und sich bei der Betrachtung auf eine Hälfte beschränkt*).

Parameter eines Strahles.

17. Um die einzelnen Strahlen eines Büschels durch Zahlenwerte festzulegen, wählen wir zwei Strahlen a und b als „Fundamentalstrahlen" und außerdem den Trennungsstrahl u (Fig. 9). Irgend ein weiterer Strahl des Büschels bildet mit den festen Strahlen a und b die Winkel ac und bc (die beide kleiner als 180°). Ist C ein Punkt von c und sind CA und CB die von C auf a und b gefällten Senkrechten, so hat der Quotient

$$\lambda = \frac{AC}{BC} = \frac{\sin ac}{\sin bc}$$

für alle Punkte des Strahles c den gleichen Wert. Wir geben diesem aus lauter positiven Zahlen gebildeten Bruche das Vorzeichen $+$, wenn die Drehungen ac und bc gleichen Sinn haben, dagegen das Vorzeichen $-$, wenn diese Drehungen entgegengesetzt gerichtet sind.

Dann entspricht jedem Strahl des Büschels ein solcher Wert λ. Den Fundamentalstrahlen a und b sind die Werte $\lambda = 0$ bzw. $\lambda = \infty$ zugeordnet; für die Halbierungslinien der Winkel, welche die Fundamentalstrahlen bilden, ergeben sich die Zahlen $\lambda = +1$ und $\lambda = -1$. Durch die Werte 0 und ∞ hindurch geht λ von positiven zu negativen Werten über.

*) Zu den gleichen Formeln gelangt man ohne die Annahme eines Trennungsstrahles, wenn man sich nach dem Vorgange von Möbius in der Ebene von vornherein einen bestimmten Drehungssinn gibt und alle vorkommenden Winkel in diesem Sinne gemessen positiv, im entgegengesetzten Sinne durchlaufen negativ rechnet.

Umgekehrt kann man zu einem auch dem Vorzeichen nach gegebenen Werte $\lambda = \lambda_0$ nur einen und immer einen zugehörigen Strahl bestimmen. Denn angenommen, es sei p dieser Strahl, so muß sein:

$$\frac{\sin a p}{\sin b p} = \lambda_0 .$$

Führt man $b p = ba + a p$ ein, so liefert eine leichte Rechnung:

$$\operatorname{tg} a p = \frac{\lambda_0 \cdot \sin b a}{1 - \lambda_0 \cdot \cos b a} .$$

Damit ist der Winkel a p bestimmt; auf welcher Seite von a der Strahl p aber liegen muß, ergibt sich aus dem Vorzeichen von λ_0, unter Berücksichtigung der angeführten Verteilung der Zahlenwerte von λ in dem Büschel.

Aufgabe 1. Man finde durch Zeichnung und Rechnung die Strahlen, welche den Werten $+\frac{2}{3}$ und $-\frac{2}{3}$ von λ entsprechen.

§ 6. Die Maßbestimmung in der Punktreihe.

Strecke zwischen zwei Punkten.

18. Die Mannigfaltigkeit der Punkte einer Punktreihe g wird erst durch die Annahme des unendlich fernen Punktes U derselben zu einer zusammenhängenden, indem dann die Gerade gewissermaßen durch das Unendliche hindurch sich schließt. Irgend zwei Punkte A und B der Geraden bestimmen dementsprechend zunächst zwei Strecken, von denen die eine, der Weg von A nach B, endlich ist, während die andere, der Weg von A durch das Unendliche nach B, unendlich ist.

Drei Punkte A, B, C bestimmen wieder einen „Sinn ABC", nämlich die Bewegungsrichtung, bei der wir von A direkt nach B gelangen, ohne C zu passieren.

Da unendlich große Strecken nicht zu verwenden sind, so werden wir unter AB die endliche der beiden oben erwähnten Strecken verstehen. Dies stimmt aber damit überein, daß wir den unendlich fernen Punkt U als „Trennungspunkt" einführen, ganz wie in 16. beim Büschel den Trennungsstrahl. Unter AB ist folglich die im „Sinne ABU" genommene Strecke zu verstehen.

Dann gelten offenbar die Beziehungen

$$AB + BA = 0 \quad \text{oder} \quad AB = -BA$$

und für drei Punkte erhält man, wie immer sie auch liegen,

$$AB + BC = AC$$

oder

$$AB + BC + CA = 0,$$

ferner allgemein für die Punkte $A, B, C \ldots M, N$

$$AB + BC + \ldots + MN + NA = 0.$$

Parameter eines Punktes.

19. Um nun die einzelnen Punkte der Punktreihe durch Zahlenwerte festzulegen, gehen wir von zwei festen Punkten A und B aus, den „Fundamentalpunkten". Irgend ein Punkt C der Punktreihe bestimmt dann den Streckenquotienten

$$\lambda = \frac{AC}{BC}.$$

Diesem Bruche, dessen Zähler und Nenner die Maßzahlen der Strecken AC und BC enthält, geben wir das Vorzeichen $+$, wenn AC und BC in gleicher Richtung laufen, C also nicht auf der Strecke A B gelegen ist, dagegen das Vorzeichen —, wenn A C und B C nach entgegengesetzten Richtungen sich erstrecken, demnach C auf der Strecke A B liegt. Jedem Punkte der Geraden können wir in dieser Weise einen ganz bestimmten Parameterwert zuordnen; dem Punkte A entspricht der Wert $\lambda = 0$, dem Punkte B der Wert $\lambda = \infty$.

Umgekehrt gibt es stets nur einen Punkt derart, daß für ihn dieser Quotient einen auch dem Vorzeichen nach gegebenen Wert $\lambda = \lambda_0$ hat. Denn ist P der gesuchte Punkt, so muß sein

$$\frac{AP}{BP} = \lambda_0$$

oder, wenn $BP = BA + AP$ gesetzt wird,

$$AP = \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0} \cdot BA\,.$$

Wählen wir, was das einfachste ist, eine bestimmte Richtung auf der Geraden, etwa die von A nach B, als die positive, so sind alle im entgegengesetzten Sinne durchlaufenen Strecken negativ zu rechnen. Es ergibt sich dann aus der letzten Gleichung die Strecke A P samt ihrer Richtung.

Dem Werte $\lambda = 1$ entspricht kein eigentlicher Punkt auf der Geraden; wir ordnen ihm den unendlich fernen Punkt der Geraden zu, womit gezeigt ist, auf welchem Wege die Analysis zur Einführung dieses Elementes gelangt.

Aufgabe 2. Man zeichne und berechne die Punkte, welche den Werten -1, $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ des Parameters λ entsprechen.

Für das dritte Grundgebilde erster Stufe, den Ebenenbüschel, brauchen wir keine eigene Betrachtung durchzuführen: wir schneiden ihn mit einer Ebene, etwa senkrecht zur Achse, in einem Strahlenbüschel und erhalten die Ebenen des Büschels dann durch die Parameterwerte, welche den Strahlen dieses Strahlenbüschels zugewiesen sind.

§ 7. Das Doppelverhältnis.

Doppelverhältnis von vier Punkten.

20. Sind in einer Punktreihe g außer den zwei Fundamentalpunkten A und B zwei weitere Punkte C und D gegeben und bestimmen wir für diese nach der in 19. gegebenen Festsetzung die Streckenverhältnisse $\frac{AC}{BC}$ und $\frac{AD}{BD}$, so können wir aus diesen beiden das neue Verhältnis bilden:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Dieser Ausdruck wird sich als charakteristisch für die Lage der vier Punkte A, B, C, D erweisen. Wir nennen ihn, seiner Bildung gemäß, das „Doppelverhältnis" der vier Punkte und bezeichnen ihn durch (A B C D). Es ergibt sich also folgende

Definition: „Unter dem Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden verstehen wir den Ausdruck

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

wobei jedes der einzelnen Verhältnisse mit dem ihm nach 19. zukommenden Vorzeichen zu versehen ist."

Die vier Punkte erscheinen dabei in zwei Gruppen geteilt, welche zunächst **nicht** gleichartig behandelt sind. Denn A und B dienten als Fundamentalpunkte und C und D wurden auf diese bezogen. Es ist aber sofort zu beweisen, daß diese beiden Punktpaare in dem Ausdruck des Doppelverhältnisses ganz die gleiche Rolle spielen. Denn es ist ja

$$(C\,D\,A\,B) = \frac{C\,A}{D\,A} : \frac{C\,B}{D\,B} = \frac{A\,C}{A\,D} : \frac{B\,C}{B\,D} = (A\,B\,C\,D).$$

Man darf also die beiden Punktpaare miteinander vertauschen.

Getrennte Punktpaare.

21. Für die gegenseitige Lagenbeziehung zweier Punktgruppen A, B und C, D sind nun folgende zwei Fälle als wesentlich zu unterscheiden:

a) Die beiden Punktpaare A, B und C, D liegen so, daß man beim Übergang von A nach B auf dem einen oder anderen Wege einen der Punkte C oder D passieren muß (Fig. 10 a). Von den Punkten C und D wird dann

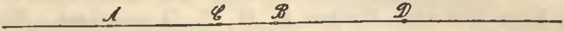

Fig. 10a.

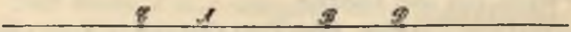

Fig. 10b.

einer auf der Strecke AB, der andere außerhalb dieser Strecke gelegen sein. Wir sagen in diesem Falle: die beiden Punktpaare „trennen sich“ gegenseitig. Von den beiden Teilverhältnissen in dem Ausdruck des Doppelverhältnisses (A B C D) ist demnach das eine positiv, das andere negativ, das ganze Doppelverhältnis hat mithin einen **negativen** Wert.

b) Kann man auf einem der beiden Wege von A nach B gelangen, ohne C oder D zu überschreiten, so trennen sich die beiden Punktpaare nicht (Fig. 10 b). Es liegen dann C und D beide auf der Strecke A B oder beide außerhalb derselben; die Teilverhältnisse in dem Ausdruck (A B C D) haben beide negative oder beide positive Vorzeichen, das Doppelverhältnis selbst nimmt jedenfalls einen positiven Wert an.

Diese Eigenschaften sind auch umkehrbar. Wir können also sagen: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Punktpaare A, B und C, D sich trennen, ist die, daß das Doppelverhältnis (A B C D) einen negativen Wert hat.

Doppelverhältnis von vier Strahlen.

22. Ganz analoge Betrachtungen gelten für den Strahlenbüschel. Gehen wir aus von den zwei (festen) Strahlen a und b und dem Trennungsstrahl u, so können wir für zwei weitere Strahlen c und d die Verhältnisse bilden:

$$\frac{\sin a c}{\sin b c} \quad \text{und} \quad \frac{\sin a d}{\sin b d},$$

deren Vorzeichen nach 17. zu bestimmen sind.

Dividieren wir den ersten Quotienten durch den zweiten, so nennen wir diesen Ausdruck das „Doppelverhältnis" der vier Strahlen a, b, c, d und bezeichnen ihn durch (a b c d), so daß also

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{\sin a c}{\sin b c} : \frac{\sin a d}{\sin b d}.$$

Der Unterschied, der zwischen den Strahlen a, b und c, d zunächst gemacht wurde, ist wiederum nur ein scheinbarer. Denn es ist ja

$$(c\,d\,a\,b) = \frac{\sin c\,a}{\sin d\,a} : \frac{\sin c\,b}{\sin d\,b} = \frac{\sin a\,c}{\sin a\,d} : \frac{\sin b\,c}{\sin b\,d} = (a\,b\,c\,d).$$

Dagegen haben wir vorerst noch einen Trennungsstrahl nötig.

Für die gegenseitige Lagenbeziehung zweier Strahlenpaare a, b und c, d sind nun wieder folgende Fälle charakteristisch. Man sagt: Die Strahlenpaare a, b und c, d „trennen einander“, wenn man den Strahl a durch Drehung nicht mit dem Strahle b zur Deckung bringen

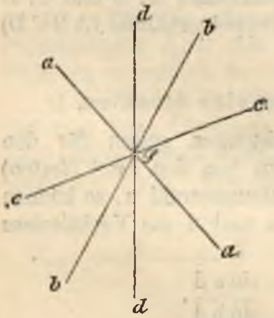

Fig. 11 a.

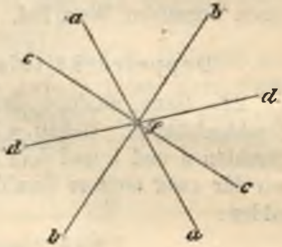

Fig. 11 b.

kann, ohne c oder d zu passieren (Fig. 11 a). Kann man dagegen a auf einem der beiden Wege nach b überführen, ohne dabei über c oder d zu kommen, so trennen die beiden Strahlenpaare sich nicht (Fig. 11 b). Diese Eigenschaft zweier Strahlenpaare, sich zu trennen, ist ganz unabhängig von der Annahme eines Trennungsstrahles.

Das oben definierte Doppelverhältnis (a b c d) von vier Strahlen wird nun negativ, wenn die Strahlen a, b und c, d sich trennen, positiv, wenn dies nicht der Fall.

Dann können wir aber auch auf Grund dieser Eigenschaft das Vorzeichen des **ganzen** Doppelverhältnisses bestimmen und nicht das der Teilquotienten.

Wir lassen also jetzt den Trennungsstrahl weg; dann sind zwar alle Winkel, wie z. B. a c, doppeldeutig, der Sinus dieser Winkel aber ist der gleiche, da sie sich zu 180^{0} ergänzen; die einzelnen Teilquotienten nehmen wir positiv, das Vorzeichen bestimmen wir am ganzen Ausdruck. Wir erhalten dann die

Definition: „Unter dem Doppelverhältnis (abcd) von vier Strahlen eines Büschels verstehen wir den Ausdruck

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{\sin a\,c}{\sin b\,c} : \frac{\sin a\,d}{\sin b\,d},$$

der das positive oder negative Vorzeichen erhält, je nachdem die Strahlenpaare a, b und c, d sich nicht trennen oder trennen."

Damit sind wir von einem Trennungsstrahl unabhängig geworden. Ohne denselben können aber die Winkelrelationen von 16. nicht mehr angesetzt werden.

Ganz im gleichen Sinne sprechen wir von dem Doppelverhältnis $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$, das vier Ebenen α, β, γ, δ eines Ebenenbüschels bilden, indem wir setzen

$$(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = \frac{\sin \alpha\,\gamma}{\sin \beta\,\gamma} : \frac{\sin \alpha\,\delta}{\sin \beta\,\delta}.$$

Dabei ist z. B. unter $\alpha\,\gamma$ einer der Winkel zu verstehen, welche die Ebene α mit der Ebene γ bildet.

Unveränderlichkeit des Doppelverhältnisses gegenüber den Operationen des Projizierens und Schneidens.

23. Verbinden wir jetzt die für die Punktreihe und für den Strahlenbüschel unabhängig voneinander durch-

geführten Betrachtungen, indem wir den Büschel S mit einer Geraden g seiner Ebene zum Schnitt bringen (Fig. 1). Der Strahl a des Büschels schneide g in A, der Strahl b in B usw. Da wir von jedem Strahl des Büschels immer den Halbstrahl auszeichnen, der den Schnittpunkt mit g trägt, so kommt die Betrachtung eigentlich darauf hinaus, daß wir den Parallelstrahl u durch S zu g als Trennungsstrahl einführen. Schneidet ferner der durch S senkrecht zu g gehende Strahl t in T diese Gerade, so ist

$$2\,\Delta SAC = SA \cdot SC \cdot \sin ac = ST \cdot AC \tag{1}$$

$$2\,\Delta SBC = SB \cdot SC \cdot \sin bc = ST \cdot BC \tag{2}$$

$$2\,\Delta SAD = SA \cdot SD \cdot \sin ad = ST \cdot AD \tag{3}$$

$$2\,\Delta SBD = SB \cdot SD \cdot \sin bd = ST \cdot BD\,. \tag{4}$$

Alle von S aus laufenden Strecken SA, SB usw. wollen wir als positive Zahlen nehmen. Dann folgt aus (1) und (2) durch Division

$$\frac{SA \cdot \sin ac}{SB \cdot \sin bc} = \frac{AC}{BC}\,. \tag{5}$$

Hier stimmt das nach 19. bestimmte Vorzeichen des Streckenquotienten rechts mit dem nach 17. zu bestimmenden Vorzeichen des Sinusquotienten links überein, wie sich geometrisch sofort ergibt. Ebenso liefern die Gleichungen (3) und (4)

$$\frac{SA \cdot \sin ad}{SB \cdot \sin bd} = \frac{AD}{BD}\,. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt dann durch Division

$$(abcd) = (ABCD), \tag{7}$$

also

Satz 1. „Das Doppelverhältnis von vier Strahlen eines Büschels ist gleich dem analog gebildeten der vier

Schnittpunkte, welche irgend eine Gerade mit den vier Strahlen liefert."*)

Schneiden wir den gleichen Büschel noch mit einer zweiten Geraden g_1 (Fig. 6), so folgt, daß auch $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (a\,b\,c\,d)$, also durch Vergleich mit (7)

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1) \tag{8}$$

oder

Satz 2. „Irgend vier Strahlen eines Büschels werden von jeder Geraden in vier Punkten von gleichem Doppelverhältnis geschnitten."

Man kann diesen Satz auch so aussprechen: Projiziert man vier Punkte einer Geraden von einem beliebigen Punkte aus auf eine andere Gerade, so bleibt das Doppelverhältnis der vier Punkte unverändert. Ebenso zeigt die Betrachtung von Figur 7, daß

$$(ABCD) = (a\,b\,c\,d) = (a_1\,b_1\,c_1\,d_1),$$

also

$$(a\,b\,c\,d) = (a_1\,b_1\,c_1\,d_1) \tag{9}$$

oder

Satz 3. „Irgend vier Punkte einer Geraden werden aus jedem Punkte durch vier Strahlen von gleichem Doppelverhältnis projiziert."

Für den Ebenenbüschel gelangen wir zu ganz ähnlichen Sätzen. Sind α, β, γ, δ vier Ebenen eines solchen, so ist, wie man leicht ableitet, das Doppelverhältnis $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ derselben identisch mit dem Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte, die irgend eine Gerade mit den vier Ebenen liefert, oder auch mit dem Doppelverhältnis der vier Strahlen,

---

*) Pappus von Alexandria (4. Jahrh. n. Chr.), Mathematicae collectiones.

wonach irgend eine Ebene die vier Ebenen trifft. Diesen Satz und die drei vorigen Sätze können wir in dem allgemeineren zusammenfassen:

Satz 4. „In zwei perspektiven Grundgebilden erster Stufe bilden irgend vier Elemente des einen Grundgebildes und die ihnen entsprechenden des anderen das gleiche Doppelverhältnis."

Damit haben wir für perspektive Grundgebilde erster Stufe außer der Lagenbeziehung auch eine metrische Beziehung gefunden, welche entsprechende Elemente solcher Gebilde miteinander verknüpft.

Endlich können wir die Operation des Schneidens oder Projizierens nicht bloß einmal, sondern auch öfter vornehmen, ohne dadurch den Wert des Doppelverhältnisses von vier Elementen zu ändern. Wir erhalten demgemäß ganz allgemein

Satz 5. „Leitet man aus vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe durch die beliebig oft angewandten Operationen des Projizierens und Schneidens vier neue Elemente eines anderen Grundgebildes ab, so ist das Doppelverhältnis der ersten vier Elemente gleich dem analog gebildeten Doppelverhältnis der letzten vier entsprechenden Elemente. Das Doppelverhältnis von vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe erweist sich also diesen Operationen gegenüber als eine unveränderliche (invariante) Zahl."

II. Abschnitt.

Harmonische Gebilde.

§ 8. Weitere Eigenschaften des Doppelverhältnisses.

Die Werte der Doppelverhältnisse, die sich aus vier Elementen bilden lassen.

24. Den Begriff des Doppelverhältnisses müssen wir noch nach verschiedenen Richtungen hin weiter untersuchen.

Sind vier Elemente eines einförmigen Grundgebildes, z. B. vier Punkte A, B, C, D einer Punktreihe gegeben, so können wir sie auf 24 verschiedene Arten zu einem Doppelverhältnisse zusammenfassen, da man aus vier Elementen 24 Ausdrücke ABCD, ABDC usw. bilden kann. Nicht alle diese Ausdrücke sind aber ihrem Zahlenwert nach verschieden. Wir sahen schon in 20., daß

$$(ABCD) = (CDAB)\,. \tag{1}$$

Ferner ist auch

$$(BADC) = \frac{BD}{AD} : \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

also

$$(BADC) = (ABCD). \tag{2}$$

Vermöge der in (1) und (2) ausgedrückten Sätze können wir nun aus einem Ausdruck wie (ABCD) noch drei andere ableiten, die den gleichen Zahlenwert besitzen, nämlich

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA).$$

Die 24 verschiedenen Ausdrücke liefern also höchstens sechs verschiedene Zahlenwerte. Ist etwa $(ABCD) = \lambda$, so lassen sich die übrigen Zahlenwerte durch diesen einen in folgender Weise ausdrücken. Es ist zunächst, wie sich sofort ergibt,

$$(3) \qquad (ABDC) = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ferner wird

$$(ACBD) = \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{(AC + CB)\,(CA + AD)}{CB \cdot AD}$$

$$= 1 + \frac{AC \cdot AD + CB \cdot CA + AC \cdot CA}{CB \cdot AD}$$

$$= 1 + \frac{AC \cdot (BC + CA + AD)}{CB \cdot AD)} = 1 - \lambda .$$

Also

$$(4) \qquad (ACBD) = 1 - (ABCD) = 1 - \lambda.$$

Ganz ähnlich beweist man, daß

$$(5) \qquad (ADCB) = \frac{(ABCD)}{(ABCD) - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Als Endresultat ergeben sich demnach folgende sechs verschiedene Werte, von denen jeder in vierfacher Weise geschrieben werden kann:

$(ABCD) = \lambda$	$(ABDC) = \frac{1}{\lambda}$
$(ACBD) = 1 - \lambda$	$(ACDB) = \frac{1}{1-\lambda}$
$(ADCB) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$	$(ADBC) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$.

Das Doppelverhältnis als Koordinate.

25. Halten wir jetzt von den vier Punkten ABCD drei, etwa A, B, C, fest, während D die Punktreihe durchwandert, so wird das Doppelverhältnis (ABCD) für jede Lage von D einen bestimmten Wert annehmen. Fällt insbesondere D in den unendlich fernen Punkt der Punktreihe, den wir mit D_∞ bezeichnen wollen, so ergibt sich

$$(ABCD_\infty) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD_\infty}{BD_\infty} = \frac{AC}{BC},$$

weil der Quotient $\frac{AD_\infty}{BD_\infty} = 1$ nach 19. Es reduziert sich also für diesen Punkt das Doppelverhältnis auf ein einfaches Streckenverhältnis. Es wird aber ferner auch jeder Zahlenwert nur bei einer Lage des Punktes erreicht, wie wir aus dem folgenden Satze schließen:

Satz 6. „Sind drei Punkte A, B, C einer Punktreihe gegeben, sowie ein Zahlenwert λ von bestimmten Vorzeichen, so gibt es einen und nur einen Punkt D der Punktreihe, welcher mit A, B und C ein Doppelverhältnis $(ABCD) = \lambda$ bildet."

Denn es ist für diesen gesuchten Punkt D

$$(ABCD) = \lambda = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}, \text{ also } \frac{AD}{BD} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{AC}{BC}.$$

Hier muß $\frac{AC}{BC}$ mit einem bestimmten Vorzeichen versehen werden (vgl. 19.), so daß auch $\frac{AD}{BD}$ der Größe und dem Vorzeichen nach gegeben ist, also wird der Punkt D dadurch eindeutig festgelegt.

Natürlich gilt der eben bewiesene Satz in entsprechender Weise auch für den Strahlen- und Ebenenbüschel. Hält man drei Elemente eines Grundgebildes erster Stufe fest, so kann man die Lage eines vierten beweglichen Elementes festlegen durch den Zahlenwert des Doppelverhältnisses, welches dieses vierte Element mit den drei festen bildet. Das Doppelverhältnis dient also als Koordinate, deren Zahlenwerte die einzelnen Elemente liefern.

Aufgabe 3. Gegeben sind die Punkte A, B, C einer Punktreihe in der Anordnung der Figur 12. Man untersuche den Verlauf des Doppelverhältnisses (A B C D), wenn D die Punktreihe durchläuft.

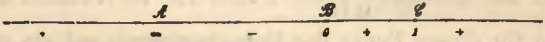

Fig. 12.

Eine einfache Betrachtung liefert folgende Zusammenstellung:

D im Unendlichen:	$(ABCD) = \frac{AC}{BC}$	. . . +
D geht vom Unendlichen bis A:	„	. . . +
D fällt nach A:	„	. . . ∞
D geht von A bis B: . . .	„	. . . —
D fällt nach B:	„	. . . 0
D geht von B nach C: . . .	„	. . . +
D fällt nach C:	„	. . . + 1
D geht von C ins Unendliche:	„	. . . + .

Wir wollen noch ausdrücklich bemerken, daß (ABCD) bloß dann den Wert + 1 annimmt, wenn der bewegliche Punkt D nach C rückt. — Man führe die entsprechende Betrachtung durch für eine andere Anordnung der Punkte A, B, C.

Aufgabe 4. Gegeben sind drei Punkte A, B, C einer Geraden (Fig. 13); man konstruiere einen Punkt D auf der Geraden, so daß (ABCD) $= -\frac{2}{3}$.

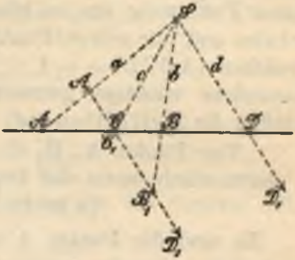

Fig. 13.

Lösung. Wir ziehen durch C irgend eine Gerade und tragen auf ihr die entgegengesetzt gerichteten Strecken $CA_1 = 2$, $CB_1 = 3$ ab unter Zugrundelegung einer ganz beliebigen Maßeinheit, konstruieren den Schnittpunkt S der Verbindungslinien AA_1 und BB_1 und ziehen durch S eine Parallele zu A_1B_1, dann schneidet diese Parallele die gegebene Gerade im gesuchten Punkte D. Denn wenn wir C gleichzeitig mit C_1 bezeichnen, den unendlich fernen Punkt von SD dagegen D_1 und die Strahlen von S nach A, B, C, D der Reihe nach a, b, c, d nennen, so ist nach 23. bzw. 25.

$$(a\,b\,c\,d) = (ABCD) = A_1B_1C_1D_1 = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = -\frac{2}{3}.$$

Man konstruiere auch noch den Punkt E, für welchen (ABCE) $= +\frac{2}{3}$.

§ 9. Das harmonische Doppelverhältnis.

Definition harmonischer Elemente.

26. Gehen wir von drei beliebigen Punkten A, B, C einer Punktreihe aus, so können wir nach Satz 6 immer einen und nur einen Punkt D des Trägers finden, für welchen $(ABCD) = -1$. Vier solche Punkte haben besonders wichtige geometrische Eigenschaften. Wir stellen die Definition auf:

„Vier Punkte A, B, C, D einer Punktreihe heißen harmonisch, wenn das Doppelverhältnis

$$(ABCD) = -1 .\text{“}$$

Es sind die Punkte A und B einerseits, C und D anderseits einander zugeordnet und aus 21. folgern wir unmittelbar, daß die Punktpaare A, B und C, D sich trennen. Man sagt deswegen wohl auch, daß zwei solche Punktpaare sich harmonisch trennen.

Ganz entsprechend sind vier harmonische Strahlen a, b, c, d eines Strahlenbüschels oder vier harmonische Ebenen $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ eines Ebenenbüschels dadurch definiert, daß bezüglich $(a\,b\,c\,d) = -1$ oder $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = -1$.

Die 6 Werte von Doppelverhältnissen, welche sich nach 24. aus vier Elementen bilden lassen, reduzieren sich bei vier harmonischen Punkten, also für $\lambda = -1$, ersichtlich auf die folgenden 3 Werte: $-1, 2, \frac{1}{2}$.

Natürlich trennen sich auch hier wieder die beiden Paare von zugeordneten Elementen. Ferner folgt aus Satz 5 von 23. noch

Satz 7. „Vier harmonische Elemente eines Grundgebildes erster Stufe gehen durch die Operationen des Schneidens und Projizierens stets wieder in vier harmonische Elemente über.“

Konstruktion harmonischer Elemente.

27. Sind drei Punkte A, B, C einer Punktreihe gegeben, so gibt es, wie wir bereits wissen, bloß einen Punkt D, der zu C harmonisch liegt bezüglich A und B, d. h. so liegt, daß

$$(1) \qquad (ABCD) = -1 .$$

Daraus folgt sofort

$$(2) \qquad \frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD} .$$

Die Punkte C und D teilen also die Strecke AB, abgesehen vom Vorzeichen, im gleichen Verhältnis. Diese Bemerkung liefert folgende Konstruktion: Wir ziehen (Fig. 14) durch die gegebenen Punkte A und B zwei beliebige, parallele Gerade AA′ und BB′ und durch C eine beliebige Linie, welche diese Parallelen in X und Y′ trifft. Schneiden wir dann (mittels des Zirkels) die Strecke BY = Y′B ab, so liefert die Verbindungslinie XY im Schnittpunkt mit g den gesuchten Punkt D. Mißt nämlich die Strecke AX m Längeneinheiten, die Strecke BY und die ihr gleiche Y′B n Längeneinheiten, wobei m und n positive Zahlen, so ist mit Rücksicht auf die Vorzeichen

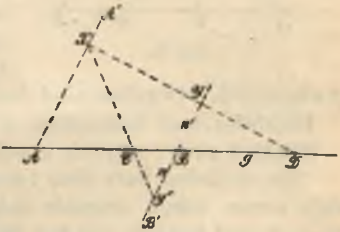

Fig. 14.

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{m}{n} \text{ und } \frac{AD}{BD} = +\frac{m}{n},$$

also in der Tat die Bedingung (2) und folglich auch (1) erfüllt.

Nehmen wir in Figur 15 an, die gegebenen Punkte liegen so, daß C die Mitte der Strecke AB, dann wird offenbar $m = n$ und XY parallel zu g, der Punkt D rückt ins Unendliche, also

Satz 8. „Die Mitte C einer Strecke AB und der unendlich ferne Punkt D des Trägers der Strecke sind vier harmonische Punkte.“

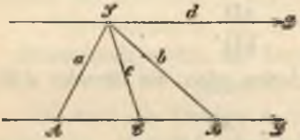

Fig. 15.

Projizieren wir diese vier harmonischen Punkte aus einem Punkte S, so erhalten wir nach Satz 4 vier harmonische Strahlen a, b, c, d. Man benutze diese Betrachtungen zur Lösung der

Aufgabe 5. Gegeben sind drei Strahlen a, b, c eines Büschels; man konstruiere den vierten harmonischen Strahl d zu c bezüglich a und b.

Ein einfacher Satz über harmonische Strahlen ergibt sich ferner durch folgende Betrachtung: Ist ABC ein Dreieck und halbiert man den Winkel bei A sowie dessen Nebenwinkel durch Linien, welche die Seite BC beziehungsweise in D und E treffen, so teilen nach bekannten planimetrischen Sätzen die Punkte D und E die Seite BC im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten; also liegen B, C, D, E harmonisch, es ist $(BCDE) = -1$ und es sind auch die aus A nach diesen Punkten zielenden Strahlen harmonisch, so daß wir erhalten

Satz 9. „Irgend zwei Strahlen und die zwei Halbierungslinien der von ihnen gebildeten Winkel bilden ein harmonisches Quadrupel. Die letzteren beiden zugeordneten Strahlen stehen aufeinander senkrecht.“

Aufgabe 6. Man bilde eine Umkehrung dieses Satzes.

§. 10. Das vollständige Viereck und Vierseit.

Geometrische Definition von vier harmonischen Punkten.

28. Vier harmonische Punkte lassen sich nun nicht bloß durch die analytische Beziehung definieren, daß ihr Doppelverhältnis den Zahlenwert -1 besitzt, sondern auch durch eine rein geometrische, durch eine Lagenbeziehung, wie wir jetzt zeigen wollen.

Sind vier Punkte E, F, G, H in einer Ebene ganz beliebig gegeben (Fig. 16a oder Fig. 16b), so bestimmen

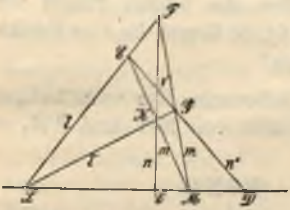

Fig. 16a.

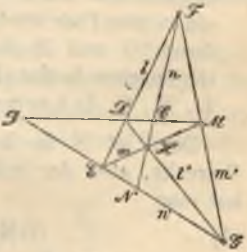

Fig. 16b.

sie zunächst sechs Linien, welche je zwei dieser vier Punkte verbinden. Die Gesamtheit dieser sechs Linien nennen wir das „vollständige Viereck“ der Punkte E, F, G, H. Die sechs Linien heißen die „Seiten“, die Punkte E, F, G, H die „Ecken“ des Viereckes. Zu jeder Seite des vollständigen Viereckes, z. B. zur Verbindungslinie EF oder l können wir eine zweite, in diesem Falle die Verbindungslinie GH oder l′ finden derart, daß zwei solche Seiten zusammen alle die vier gegebenen Ecken des Viereckes enthalten. Wir nennen zwei solche Seiten „Gegenseiten“ des vollständigen Viereckes und erhalten augenscheinlich drei Paare von Gegenseiten, l, l', m, m', n, n'. Je zwei zusammengehörige Gegenseiten liefern endlich noch einen Schnittpunkt, nämlich l und l' den Punkt L, m und m' den Punkt M und n und n' den Punkt N. Diese drei Punkte L, M, N heißen „Nebenecken" des Viereckes.

Der Zusammenhang dieser Figur mit harmonischen Punkten wird nun hergestellt durch folgenden

Satz 10. „Haben vier Punkte L, M, C, D einer Geraden die Eigenschaft, daß durch L ein erstes Paar von Gegenseiten eines vollständigen Viereckes, durch M ein zweites Paar von Gegenseiten hindurchgeht, während durch C und D die Seiten des letzten Paares von Gegenseiten laufen (Fig. 16), so liegen die vier Punkte L, M, C, D harmonisch."

Denn ist N die letzte Nebenecke des vollständigen Vierecks, also der Schnittpunkt von EG und FH, so hat man

$$(1)\qquad (LMCD) = (EGND),$$

wie sich ergibt, wenn man die links stehenden Punkte aus dem Punkte F auf n' projiziert (Satz 2 S. 37). Projiziert man aber die letzten vier Punkte aus H auf LM, so wird

$$(2)\qquad (EGND) = (MLCD),$$

also folgt

$$(3)\qquad (LMCD) = (MLCD).$$

Anderseits zeigt aber die Rechnung, daß allgemein

$$(MLCD) = \frac{1}{(LMCD)},$$

mithin in (3)

$$(LMCD)^2 = 1.$$

Es kann also das Doppelverhältnis der vier Punkte L, M, C, D bloß die Werte $+1$ oder -1 haben. Der Wert $+1$ ist aber ausgeschlossen, da er nach 25. Aufgabe 3 bloß erreicht wird, wenn von den vier Punkten des Doppelverhältnisses zwei zusammenfallen. Dies ist in unserer Figur jedoch nicht möglich. Es muß folglich sein

$$(L M C D) = -1,$$

d. h. die vier Punkte liegen harmonisch.

Es sind dann auch E, G, N, D vier harmonische Punkte und die Strahlen von F oder H aus nach ihnen sind ebenfalls harmonisch.

Wir benutzen diese Eigenschaft des vollständigen Vierecks, um eine zweite Lösung zu gewinnen für die

Aufgabe 7. Gegeben sind drei Punkte A, B, C auf einer Geraden; zu C den vierten harmonischen bezüglich A und B zu konstruieren.

Wir ziehen (Fig. 17) durch den gegebenen Punkt C eine beliebige Gerade, wählen auf ihr irgend zwei Punkte E und F, ziehen die Verbindungslinien EA, EB, sowie FA und FB. Ist dann G der Schnittpunkt von FA und BE, ferner H der Schnittpunkt von FB und AE, so liefert GH auf der gegebenen Geraden den vierten harmonischen Punkt D. Der Beweis ergibt sich sofort aus der Betrachtung des vollständigen Vierecks EFGH.

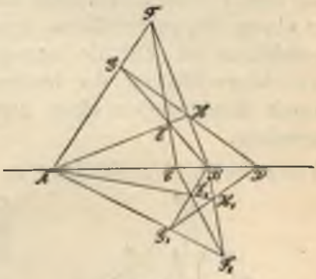

Fig. 17.

Natürlich kann man die verschiedensten Vierecke zur Konstruktion benutzen. In der Figur ist noch ein zweites Viereck $E_1 F_1 G_1 H_1$ gezeichnet. Es muß dann $G_1 H_1$ durch den gleichen Punkt D gehen.

Diese Konstruktion erfordert bloß das Ziehen von geraden Linien, ist also mittels des Lineals allein ausführbar, während bei der in 27. gegebenen Lösung auch der Zirkel benutzt werden mußte.

Liegen umgekehrt vier harmonische Punkte A, B, C, D gegeben vor und zeichnet man in der eben durchgeführten Weise zu A und B den vierten harmonischen bezüglich C, so muß dieser mit D zusammenfallen.

Zu bemerken ist noch, daß in bezug auf das vollständige Viereck die beiden Punktpaare der harmonischen Gruppe eine verschiedene Rolle spielen, indem nämlich A und B Nebenecken sind, während durch C und D die Gegenseiten laufen. Wir wissen aber schon aus dem Früheren (20.), daß von den beiden Punktpaaren in einem Doppelverhältnis keines vor dem anderen ausgezeichnet ist. Für die harmonischen Punkte wäre diese Gleichberechtigung der beiden Paare auch geometrisch durch Konstruktion eines zweiten Viereckes leicht zu erweisen.

Aufgabe 8. Die Strahlen a, b, c eines Büschels sind gegeben; zu c den vierten harmonischen bezüglich a und b zu konstruieren.

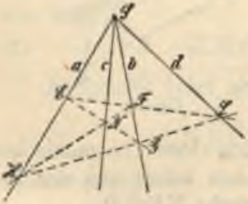

Fig. 18.

Wir wählen auf c einen Punkt N beliebig (Fig. 18), ziehen durch ihn irgend zwei Gerade E G und H F, bringen EF und HG in L zum Schnitt, dann ist S L der verlangte Strahl d. Die Konstruktion erfordert bloß das Ziehen von geraden Linien, ist „linear", wie wir sagen.

Geometrische Definition von vier harmonischen Strahlen.

29. Irgend vier Gerade e, f, g, h einer Ebene bestimmen ein „vollständiges Vierseit". Es hat 6 Ecken, nämlich die sämtlichen Schnittpunkte, welche je zwei der vier Geraden liefern. Dieselben gruppieren sich zu 3 Paaren von „Gegenecken" L, L′, M, M′, N, N′ (Fig. 19 a oder b) in der Art, daß durch ein Paar solcher Gegenecken z. B. N, N′ alle vier Seiten des Vierseits hindurchgehen. Je zwei Gegenecken können wir durch eine Gerade verbinden und erhalten so drei „Nebenseiten l, m, n" des vollständigen Vierseits.

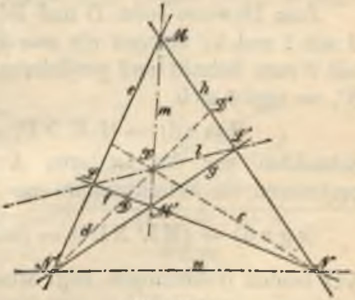

Fig. 19 a.

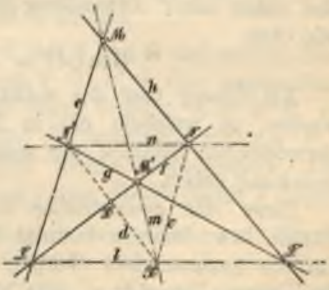

Fig. 19 b.

Das vollständige Vierseit, das nach dem Gesetz der Dualität der Ebene (7 a) dem vollständigen Viereck entspricht, gibt die Möglichkeit, vier harmonische Strahlen rein geometrisch zu definieren durch folgenden

Satz 11. „Haben vier Strahlen l, m, c, d, die einem Strahlenbüschel X angehören, die Eigenschaft, daß auf l ein erstes Paar L, L′ von Gegenecken eines vollständigen Vierseits e, f, g, h, auf m ein zweites Paar M, M′ von Gegenecken gelegen ist, während die Strahlen c und d das dritte Paar N, N′ von Gegenecken enthalten (Fig. 19), so liegen die vier Strahlen l, m, c, d harmonisch.“

Zum Beweise seien D und D′ die Schnittpunkte von d mit f und h; bringen wir nun die Strahlen l, m, c, d mit f zum Schnitt und projizieren die Schnittpunkte aus N′, so ergibt sich

$$(l\,m\,c\,d) = (L\,M'\,N\,D) = (e\,g\,n\,d).$$

Schneiden wir die letzteren 4 Strahlen mit h und projizieren die Schnittpunkte aus X, so wird

$$(e\,g\,n\,d) = (M\,L'\,N\,D') = (m\,l\,c\,d) = \frac{1}{(l\,m\,c\,d)}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt wieder

$$(l\,m\,c\,d)^2 = 1$$

und daher unter Anwendung der gleichen Schlußweise wie oben

$$(l\,m\,c\,d) = -1.$$

Als Übung mag das vollständige Vierseit ermittelt werden, zu welchem die in Aufgabe 8 konstruierten harmonischen Strahlen die soeben beschriebene Lagenbeziehung haben.

Diese rein geometrische Eigenschaft harmonischer Punkte bzw. Strahlen benutzt die Geometrie der Lage, um die harmonischen Gebilde zu definieren und ihre Beziehungen abzuleiten, wie hier nicht weiter erörtert werden soll; das Doppelverhältnis von vier Elementen dagegen in der hier gegebenen Definition muß sie von ihren Betrachtungen ausschließen wegen der darin vorkommenden Strecken oder Winkel. Den Inbegriff von irgend vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe bezeichnet man in der Geometrie der Lage nach v. Staudt als einen „Wurf“.

Um eine Anwendung dieser Betrachtungen zu geben, beweisen wir noch folgenden Satz:

Hat man in einer Ebene zwei gerade Linien a und b und einen Punkt S und legen wir durch S beliebige Gerade, welche a und b je in A, B, A′, B′, usw. schneiden (Fig. 20); ziehen wir ferner A B′ und A′ B, welche einen Punkt D liefern, A′ B″ und A″ B′, welche sich in D′ schneiden usw., so liegen alle so konstruierten Punkte D auf einer Geraden, welche auch den Schnittpunkt F der gegebenen Geraden a und b enthält.

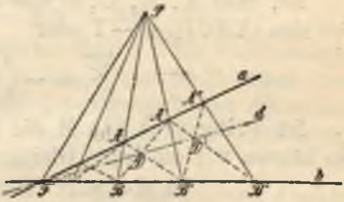

Fig. 20.

Denn verbinden wir F mit S und D und nennen diese Strahlen s und d, so sind a, b, s, d vier harmonische Strahlen, wie sich aus dem Viereck A A′ B′ B ergibt, also (a b s d) = − 1. Zu den drei Strahlen a, b, s gibt es aber bloß einen vierten harmonischen, also müssen alle Punkte D auf einem Strahl durch F liegen.

Aufgabe 9. Gegeben sind in einer Ebene zwei Gerade a und b, deren Schnittpunkt nicht mehr gezeichnet werden kann, und ein Punkt D. Man soll diesen Punkt

D mit dem unzugänglichen Schnittpunkt durch eine Gerade verbinden.

Wir benutzen den eben bewiesenen Satz und ziehen durch D (vgl. Fig. 20) irgend zwei Gerade A B′ und A′ B. Dann liefern A B und A′ B′ einen Punkt S. Irgend eine durch S weiter gezogene Gerade, welche a und b in A″ und B″ trifft, bestimmt einen Punkt D′, der mit D verbunden die gesuchte Gerade gibt.

§ 11. Metrische Relationen bei harmonischen Gebilden.

30. Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte, so ist also (ABCD) = −1 oder

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}.$$

Ist weiter (Fig. 21) M die Mitte der Strecke A B, so können wir die letzte Gleichung auch schreiben:

$$\frac{AM + MC}{BM + MC} = \frac{DM + MA}{BM + MD}.$$

Multipliziert man aus, so ergibt sich unter Rücksicht auf die Gleichung AM = MB

(1) $$MC \cdot MD = MA^2 = MB^2.$$

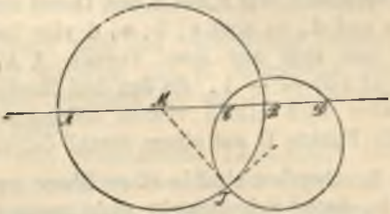

Fig. 21.

Dies liefert einen leicht in Worte zu fassenden Satz über harmonische Punkte. Ist umgekehrt Gleichung (1) erfüllt, so liegen die Punkte harmonisch.

Legen wir durch die Punkte C und D irgend einen Kreis und von M aus eine Tangente an ihn, so ist $MC \cdot MD$ die Potenz des Punktes M in bezug auf diesen Kreis und gleich dem Quadrat der Tangente. Wird der Berührungspunkt der Tangente mit T bezeichnet, so hat man demnach

$$MT^2 = MC \cdot MD. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$MT = MA = BM,$$

d. h. T liegt auf dem Kreise über AB als Durchmesser. Die Tangenten an die beiden Kreise in T stehen also aufeinander senkrecht oder anders ausgedrückt: die beiden Kreise schneiden sich rechtwinkelig oder orthogonal. Damit ist bewiesen:

Satz 12. „Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte, so schneidet jeder Kreis durch die beiden zugeordneten Punkte C und D den über AB als Durchmesser beschriebenen Kreis orthogonal."

Aufgabe 10. Sind a, b, c, d vier harmonische Strahlen, so daß also $(abcd) = -1$, und ist m einer der Strahlen, welche den Winkel von a und b halbieren, so beweise man die der Gleichung (1) entsprechende Relation

$$\operatorname{tg}(mc) \cdot \operatorname{tg}(md) = \operatorname{tg}^2(ma) = \operatorname{tg}^2(mb).$$

III. Abschnitt.

Die projektive Beziehung der einförmigen Grundgebilde.

§ 12. Die konstruktive Behandlung der projektiven Beziehung.

Definition projektiver Grundgebilde.

31. An perspektiven Grundgebilden erster Stufe haben wir im I. Abschnitt zweierlei Eigenschaften als charakteristisch erkannt: die Eigenschaft der Lage (14.) und die daraus sich ergebende metrische Eigenschaft der Gleichheit der Doppelverhältnisse von je vier entsprechenden Elementen (23.). Denken wir uns nun in zwei perspektiven Grundgebilden erster Stufe, z. B. zwei Punktreihen g und g_1 (Fig. 6), die sämtlichen entsprechenden Punkte wie A und A_1, B und B_1 usw. in irgend einer Weise an den (etwa als materiell gedachten) Punktreihen markiert. Heben wir nun den geometrischen Zusammenhang zwischen den Punktreihen g und g_1 und dem Strahlenbüschel S auf, indem wir g und g_1 in irgend eine beliebige Lage bringen. Während dadurch die perspektive Lagenbeziehung zerstört wird, bleibt die metrische Eigenschaft nach wie vor erhalten. Wir nennen die Punktreihen dann noch „projektiv", wofür auch das Zeichen $\overline{\wedge}$ gebraucht wird. Allgemein stellen wir auf als

Definition: „Zwei Grundgebilde erster Stufe heißen projektiv, wenn sie eindeutig, Element für Element, dadurch aufeinander bezogen sind, daß je vier Elemente des einen Gebildes und die vier entsprechenden des anderen das gleiche Doppelverhältnis bilden."

Um uns solche projektive Grundgebilde zu verschaffen, steht uns zunächst kein anderes Mittel zu Gebote, als daß wir zwei Grundgebilde perspektiv aufeinander beziehen und dann gewissermaßen „auseinandernehmen". Es ist aber leicht, auch direkt eine projektive Beziehung zwischen zwei Grundgebilden erster Stufe zu vermitteln.

Konstruktion projektiver Punktreihen.

32. Wir führen dies zunächst durch für zwei Punktreihen, deren Träger g und g_1 sich in einer Ebene befinden mögen. Irgend drei beliebigen Punkten A, B, C auf g ordnen wir drei beliebige Punkte A_1, B_1, C_1 auf g_1 zu. Wir verbinden (Fig. 22) A mit A_1 und wählen auf dieser Verbindungslinie zwei beliebige Punkte S und S_1. Die Linien SB und S_1B_1 mögen sich in $\mathbf{B}$, SC und S_1C_1 in $\mathbf{C}$ schneiden. Weiter legen wir durch $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ eine Linie p, welche AA_1 in $\mathbf{A}$ treffen möge. Zu einem beliebigen Punkte D von g verschaffen wir uns jetzt einen entsprechenden auf g_1 in folgender Weise: SD trifft p in $\mathbf{D}$, und $S_1\mathbf{D}$ schneidet g_1 in einem Punkte D_1, der dem Punkte D zugewiesen wird. Dann ist offenbar für jede Lage von D nach den Sätzen von 23.

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1) = (\mathbf{ABCD}).$$

Beschreibt D die eine Punktreihe, so durchwandert D_1 die andere und es sind immer die Büschel S und S_1 je perspektiv zur Punktreihe $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ ... auf p und also auch zueinander perspektiv. Es bilden folglich auch irgend vier Punkte auf g und die vier entsprechenden auf g_1 das gleiche Doppelverhältnis. Damit haben wir in der Tat projektive Punktreihen konstruiert und gleichzeitig gefunden, daß wir drei Paare entsprechender Punkte beliebig annehmen können. Dadurch ist die projektive Beziehung gerade bestimmt.

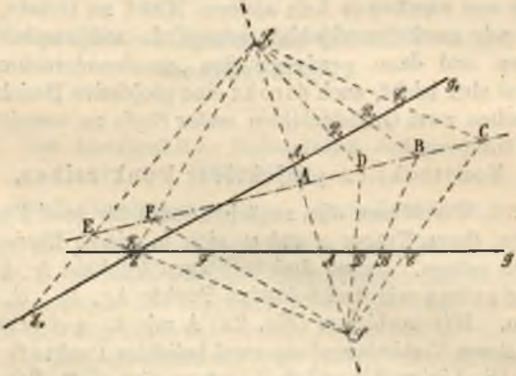

Fig 22.

Aufgabe 11. Man konstruiere die Punkte, welche den unendlich fernen Punkten von g und g_1 bezüglich entsprechen. — Der Schnittpunkt der beiden Träger g und g_1 kann als Punkt von g mit E und als Punkt von g_1 mit F_1 bezeichnet werden. Man konstruiere die beiden entsprechenden Punkte E_1 und F (siehe Fig. 22).

Konstruktion projektiver Strahlenbüschel.

33. Zwei in einer Ebene befindliche Strahlenbüschel projektiv aufeinander zu beziehen, gelingt durch die entsprechende duale Betrachtung. Wir greifen im Büschel

S drei beliebige Strahlen a, b, c heraus, denen wir im Büschel S_1 drei beliebige Strahlen a_1, b_1, c_1 zuordnen (Fig. 23). Durch den Schnittpunkt von a und a_1 ziehen wir willkürlich zwei Gerade g und g_1 und bringen g in A, B, C zum Schnitt mit den Strahlen a, b, c, die Gerade g_1 hingegen mit a_1, b_1, c_1 in A_1, B_1, C_1. Dann liefern die Verbindungslinien BB_1 und CC_1 in ihrem Schnitte einen Punkt P. Zu einem beliebigen Strahl d des Büschels S finden wir nun, wie folgt, den entsprechenden: d trifft g in D, DP schneidet g_1 in D_1 und S_1D_1 ist der entsprechende Strahl d_1 im Büschel S_1.

Fig. 23.

Leicht erkennt man, daß wieder

$$(a\,b\,c\,d) = (a_1\,b_1\,c_1\,d_1)\,.$$

Die Punktreihen auf g und g_1, welche durch entsprechende Strahlen der Büschel S und S_1 ausgeschnitten werden, sind perspektiv.

Aufgabe 12. Man zeichne in den beiden projektiven Büscheln die Strahlen e_1 und f, welche dem Verbindungsstrahl SS_1 entsprechen, wenn dieser als e und f_1 genommen wird.

Um eine Punktreihe und einen Strahlenbüschel projektiv aufeinander zu beziehen, schneiden wir den Büschel mit einer Geraden in einer Punktreihe und beziehen diese auf die gegebene Punktreihe.

Wären ein Ebenenbüschel und ein Strahlenbüschel in projektive Beziehung zu setzen, so bringen wir die Ebene des Strahlenbüschels zum Schnitt mit dem Ebenenbüschel und beziehen die beiden Strahlenbüschel projektiv aufeinander.

Zusatz. Statt durch eine geometrische Konstruktion können wir uns die projektive Beziehung auch von Anfang an durch eine Doppelverhältnisrelation festgelegt denken. Sind z. B. g und g_1 die Träger zweier Punktreihen und A, B, C sowie A_1, B_1, C_1 beliebig auf ihnen ausgewählt, so bildet ein beliebiger Punkt D auf g mit A, B, C ein Doppelverhältnis von bestimmtem Wert $(ABCD) = \lambda$. Dann gibt es auf g_1 einen Punkt D_1, für welchen $(A_1B_1C_1D_1) = \lambda$. Dies ist der D entsprechende Punkt D_1. Es gilt also die Beziehung

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1).$$

Die angeführten Konstruktionen lehren, Elemente zu finden, die stets dieser oder einer entsprechenden Beziehung genügen.

Es drängt sich aber noch die Frage auf: Ist vielleicht die soeben direkt begründete projektive Beziehung allgemeinerer Art als die Beziehung, in der zwei perspektive Grundgebilde stehen, nachdem ihre gegenseitige Lagenbeziehung aufgehoben ist?

Dies ist bei den Grundgebilden erster Stufe in der Tat nicht der Fall. Denn wir wollen im folgenden Paragraphen zeigen, daß sich zwei projektive Grundgebilde erster Stufe stets in perspektive Lage bringen (perspektiv „orientieren“) lassen.

§ 13. Die perspektive Orientierung projektiver Grundgebilde erster Stufe.

Projektive Punktreihen, in perspektive Lage gebracht.

34. Liegen zwei in der soeben beschriebenen Weise projektiv aufeinander bezogene Punktreihen g und g_1 vor, in denen also vier beliebigen Punkten der einen vier Punkte der anderen entsprechen vom gleichen Doppelverhältnis, so seien E und E_1 irgend zwei einander entsprechende Punkte. Dann gilt für drei weitere entsprechende Punktpaare A, A_1, B, B_1, C, C_1 die Relation

(1) $$(ABEC) = (A_1B_1E_1C_1)\,.$$

Bringen wir nun g und g_1 in eine solche gegenseitige Lage, daß E_1 auf E zu liegen kommt, während die Träger g und g_1 selbst nicht zusammenfallen. Wir verbinden A mit A_1, B mit B_1 und zeichnen den Schnittpunkt S dieser Verbindungsstrahlen*). Dann geht auch die Linie CC_1 durch diesen Punkt S. Denn angenommen, die Verbindungslinie SC_1 treffe g in C', so ist nach 23. Satz 2

(2) $$(ABEC') = (A_1B_1E_1C_1)\,,$$

also mit Rücksicht auf (1)

(3) $$(ABEC) = (ABEC')\,.$$

Dann muß aber notwendig C' mit C zusammenfallen, also $C' \equiv C$ sein; denn es gibt nach 25. nur einen Punkt C, der mit A, B und E ein Doppelverhältnis von gegebenem Werte (ABEC) bildet. Ganz in der gleichen Weise zeigt

---

*) Es wird dem Leser geraten, die Figuren nach den Angaben des Textes stets selbst zu entwerfen, auch wenn sie beigedruckt sind. Es erleichtert das Verständnis ungemein, wenn man die Figur, Schritt für Schritt der Entwicklung folgend, erst allmählich entstehen sieht.

man, daß jede Verbindungslinie irgend zweier anderer entsprechender Punkte, wie D und D_1 usw., auch immer durch den Punkt S gehen muß. Die beiden Punktreihen sind also dargestellt als Schnitte des Büschels S, sie sind in perspektive Lage gebracht.

Dies ist offenbar noch auf unendlich verschiedene Arten möglich, da ja nur nötig war, irgend zwei entsprechende Punkte der projektiven Punktreihen im Schnittpunkt der beiden Träger zur Deckung zu bringen. Der Punkt S heißt auch das „Zentrum der Perspektivität“. Wir erhalten also den

Satz 13. „Hat man zwei projektive Punktreihen g und g_1 und liegen im Schnittpunkte der beiden Träger entsprechende Punkte der Punktreihen vereinigt, während die Träger g und g_1 selbst nicht zusammenfallen, so sind die beiden Punktreihen perspektiv, d. h. alle Verbindungslinien entsprechender Punkte von g und g_1 laufen durch einen Punkt, das Zentrum der Perspektivität.“

Projektive Strahlenbüschel, in perspektive Lage gebracht.

35. Um zwei in einer Ebene befindliche projektive Strahlenbüschel S und S_1 in perspektive Lage zu bringen, greifen wir irgend zwei entsprechende Strahlen e und e_1 heraus und bringen sie zur Deckung, jedoch so, daß S und S_1 nicht aufeinander zu liegen kommen. Dann zeigt die duale Betrachtung, daß die Büschel perspektiv liegen. Dies liefert den

Satz 14. „Liegen zwei in einer Ebene befindliche projektive Strahlenbüschel so, daß in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte entsprechende Strahlen der beiden

Büschel vereinigt sind, während die Mittelpunkte nicht zusammenfallen, so sind die Büschel „perspektiv", d. h. alle entsprechenden Strahlen schneiden sich auf einer Geraden, der »Achse der Perspektivität«."

Die Aufgabe, eine Punktreihe und einen zu ihr projektiven Strahlenbüschel perspektiv zu legen, verlangt, den Büschel so zu orientieren, daß drei Strahlen a, b, c durch die ihnen entsprechenden Punkte A, B, C der Punktreihe gehen. (Beweis!) Dies ist auf Grund planimetrischer Sätze leicht durchführbar.

Mehr Schwierigkeiten bietet es, einen Strahlenbüschel und einen zu ihm projektiven Ebenenbüschel in perspektive Lage zu bringen. Wir übergehen die Lösung, da sie für das Folgende ohne Belang ist.

§ 14. Anwendungen.

36. Fügen wir bei, daß die in § 12 durchgeführten Betrachtungen noch manche Spezialisierungen zulassen. So kann man z. B. bei der Konstruktion der projektiven Punktreihen in 32. die auf dem Verbindungsstrahl AA_1 noch ganz beliebig angenommenen Punkte S und S_1 auch so wählen, daß S nach A_1 und S_1 nach A fällt. Dann hat man zur Durchführung der gleichen Betrachtung wie damals die Linienpaare

$$\left.\begin{matrix} A\,B_1 \\ A_1B \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} A\,C_1 \\ A_1C \end{matrix}\right\}$$

zu benutzen, deren erstes einen Punkt **B**, das zweite einen Punkt **C** liefert (Fig. 24), während die Verbindungslinie **BC** der perspektive Schnitt der Büschel A und A_1 ist, den wir mit p_0 bezeichnen wollen. Irgend zwei entsprechende Punkte D und D_1 der projektiven Punktreihen sind daraus zu erhalten, daß das Linienpaar

$$\left.\begin{matrix} A\,D_1 \\ A_1 D \end{matrix}\right\}$$

einen auf p_0 gelegenen Schnittpunkt **D** besitzt. Konstruiert man jetzt wieder die dem Schnittpunkt von g und g_1 entsprechenden Punkte, so liefert die Figur unmittelbar das Ergebnis, daß dies die Punkte E_1 und F sind, in denen p_0 den Trägern g_1 und g begegnet.

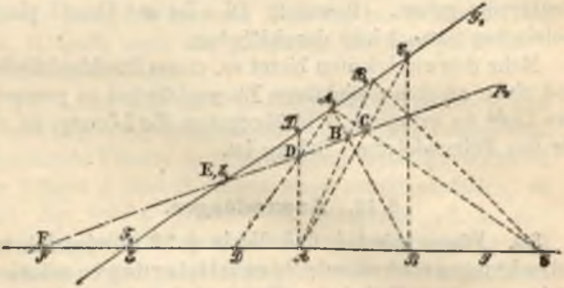

Fig. 24.

Ist nun die projektive Beziehung von g und g_1 gegeben, so sind damit diese Punkte E_1 und F und also auch p_0 bestimmt. Ebensogut wie nach A und A_1 hätten wir die Hilfspunkte S_1 und S aber auch nach B und B_1 oder nach C und C_1 usw. verlegen können und müssen dadurch die gleiche Achse p_0 erhalten. Wir haben also bewiesen:

Satz 15. „Hat man zwei projektive Punktreihen A, B, C, ... und A_1, B_1, C_1, ... auf zwei festen Trägern g und g_1 und betrachtet alle möglichen Linienpaare wie

$$\left.\begin{matrix} A\,B_1 \\ A_1 B \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} A\,C_1 \\ A_1 C \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} A\,D_1 \\ A_1 D \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} B\,C_1 \\ B_1 C \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} B\,D_1 \\ B_1 D \end{matrix}\right\} \text{ usw., so liegen}$$

die Schnittpunkte, welche jedes dieser Linienpaare liefert, auf einer Geraden p_0, welche aus den Trägern g und g_1 diejenigen Punkte ausschneidet, die den im Schnittpunkt von g und g_1 vereinigten Punkten entsprechen."

Aufgabe 13. Für zwei in einer Ebene befindliche projektive Strahlenbüschel läßt sich ein entsprechender Satz aufstellen. Man beweise ihn.

Der Satz von Desargues.

37. Als ein Beispiel für die Brauchbarkeit dieser Betrachtungen erweisen wir noch folgenden in 8. schon erwähnten

Satz 16. „Wenn zwei in einer Ebene gelegene Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ die Eigenschaft haben, daß 1) die Verbindungslinien A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 durch einen Punkt gehen, so weiß man, daß 2) die Schnittpunkte von A_1B_1 und A_2B_2, A_1C_1 und A_2C_2, B_1C_1 und B_2C_2 auf einer Geraden liegen, und aus 2) folgt auch umgekehrt 1)."

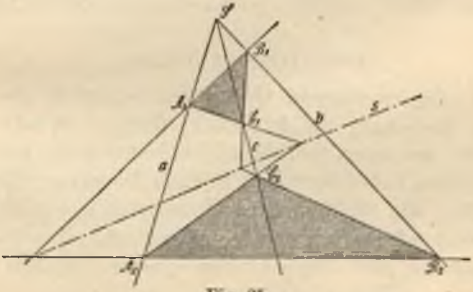

Fig. 25.

Nehmen wir drei durch einen Punkt S gehende Strahlen a, b, c (Fig. 25) und auf ihnen bezüglich die Punktpaare A_1, A_2, B_1, B_2 und C_1, C_2, so ist damit die Bedingung 1) für die beiden Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ erfüllt. Betrachten wir nun den Büschel S, so schneidet derselbe die Geraden $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ in zwei perspektiven Punktreihen. Diese perspektiven Punktreihen projizieren wir aus C_1 und C_2 beziehungsweise. Dann sind diese Büschel C_1 und C_2 projektiv und, wie man leicht erkennt, überdies perspektiv, da der Verbindungsstrahl $C_1 C_2$ sich selbst entspricht. Es schneiden sich mithin entsprechende Strahlen auf einer Geraden, der Achse der Perspektivität; also müssen auf einer Geraden S liegen: der Schnittpunkt von $A_1 C_1$ und $A_2 C_2$, der Schnittpunkt von $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$, und der Schnittpunkt von $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ (da auch nach ihm entsprechende Strahlen der Büschel C_1 und C_2 laufen). Damit ist der Satz bewiesen. Ganz ähnlich verfährt man bei der Umkehrung desselben.

Zusatz. Liegen die beiden gegebenen Dreiecke in verschiedenen Ebenen, so ergeben sich die gleichlautenden Sätze durch einfache stereometrische Betrachtungen.

Analytischer Ansatz.

38. Die rechnende Geometrie behandelt die projektive Beziehung in folgender Weise: Werden die Elemente des einen Grundgebildes erster Stufe durch die Werte eines Parameters λ, z. B. eines Doppelverhältnisses (vgl. 25.), die eines zweiten Grundgebildes durch einen Parameter μ festgelegt und besteht zwischen λ und μ eine in bezug auf jede dieser Größen lineare Relation

$$\alpha\lambda\mu + \beta\lambda + \gamma\mu + \delta = 0, \tag{1}$$

wo α, β, γ, δ beliebige, aber feste Zahlenwerte sind, so ordnet diese Gleichung, nach λ oder nach μ aufgelöst, jedem Wert des einen Parameters einen des andern zu.

Es sind also auch die beiden Grundgebilde erster Stufe dadurch eindeutig, Element für Element, aufeinander bezogen. Weiter zeigt man: Sind die beiden Grundgebilde eindeutig aufeinander bezogen und zwar durch eine solche „bilineare“ Gleichung wie (1), so folgt daraus schon, daß vier Elemente des einen Grundgebildes und ihre vier entsprechenden das gleiche Doppelverhältnis bilden, d. h. daß die Grundgebilde projektiv sind. Eine solche Relation (1) stellt also den analytischen Ausdruck der Projektivität dar.

Wir wollen dies am einfachsten Beispiel zweier projektiver Punktreihen g und g_1 noch genauer verfolgen. Auf g wird ein Punkt O willkürlich angenommen und ein beliebiger Punkt P von g durch seine Abszisse $OP = x$ festgelegt, deren Zahlenwert nach der einen Seite positiv, nach der entgegengesetzten Seite negativ zu nehmen ist. Ebenso werden die Punkte von g_1 durch Abszissen x_1 dargestellt. Zwischen diesen Parametern möge jetzt die Gleichung bestehen:

$$(2) \qquad \alpha x x_1 + \beta x + \gamma x_1 + \delta = 0 .$$

Dann ist vermöge derselben auch

$$(3) \quad x = -\frac{\gamma x_1 + \delta}{\alpha x_1 + \beta} \quad \text{und} \quad x_1 = -\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma} .$$

Diese Gleichungen gestatten, zu jedem x oder x_1 das entsprechende x_1 oder x zu berechnen. Der Ausdruck für das Doppelverhältnis von vier Punkten P, P', P'', P''' wird aber, wie man sofort erkennt,

$$(4) \qquad (PP'P''P''') = \frac{x - x''}{x' - x''} : \frac{x - x'''}{x' - x'''} ,$$

wenn diese Punkte durch die Abszissen x, x', x'', x''' gegeben sind. Den vier Punkten P, P', P'', P''' entsprechen vier andere Punkte P_1, P_1', P_1'', P_1''' auf g_1 mit den Abszissen

$$x_1 = -\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma}, \quad x_1' = -\frac{\beta x' + \delta}{\alpha x' + \gamma} \text{ usw.}$$

Dann zeigt eine leichte Rechnung, daß

$$(P_1 P_1' P_1'' P_1''') = (P P' P'' P''').$$

§ 15. Metrische Relationen. Spezielle Fälle.

Die Fluchtpunkt-Relation.

39 Führen wir in die Beziehung, welche die Gleichheit der Doppelverhältnisse von je vier entsprechenden Punkten in zwei projektiven Punktreihen zum Ausdruck bringt, die uneigentlichen Punkte der beiden Träger g und g_1 ein, so erhalten wir eine metrische Relation im speziellen Sinn, indem die Doppelverhältnisse in einfache Verhältnisse übergehen. Denken wir uns nämlich die beiden Punktreihen irgendwie perspektiv gelegt und sind (Fig. 6) R und Q_1 die den unendlich fernen Punkten von g_1 und g entsprechenden Punkte, die wir als „Fluchtpunkte" bezeichnen, so hat man

$$(ABRQ) = (A_1 B_1 R_1 Q_1)$$

und daraus mit Rücksicht auf 25.

$$\frac{AR}{BR} = \frac{B_1 Q_1}{A_1 Q_1}$$

oder

$$AR \cdot A_1 Q_1 = BR \cdot B_1 Q_1 .$$

Es sind also alle diese Rechtecke, je mit entsprechenden Punkten A, A_1, B, B_1, C, C_1 ... gebildet, flächengleich. Den gemeinsamen Flächeninhalt derselben erhält man auch, wenn man das im Schnittpunkt der Träger vereinigte Punktpaar E, E_1 herausgreift, für welches

$$ER \cdot E_1 Q_1 = Q_1 S \cdot RS = k.$$

Es ist also

$$AR \cdot A_1 Q_1 = BR \cdot B_1 Q_1 = \ldots = k = \text{konst.}$$

Ähnliche, kongruente Punktreihen.

40. Aus der allgemeinen projektiven Beziehung zweier Punktreihen ergibt sich eine spezielle, wenn wir die uneigentlichen oder unendlich fernen Punkte der beiden Träger besonders berücksichtigen, was dadurch möglich wird, daß wir dieselben in der projektiven Beziehung einander entsprechen lassen. Sind Q und Q_1 diese unendlich fernen Punkte, so ist also

$$(ABCQ) = (A_1 B_1 C_1 Q_1),$$

folglich

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1 C_1}{B_1 C_1}$$

oder auch

$$\frac{AC}{A_1 C_1} = \frac{BC}{B_1 C_1} = c.$$

Es muß daher überhaupt das Verhältnis irgend zweier entsprechender Strecken unveränderlich $= c$ sein. Solche Punktreihen heißen „ähnlich“.

Ist $c = 1$, so sind je zwei entsprechende Strecken gleich lang, die projektiven Punktreihen werden als „kongruent“ bezeichnet.

Aufgabe 14. Man zeige, daß man ähnliche (unter Umständen kongruente) Punktreihen erhält, wenn man zwei parallele Gerade mit einem beliebigen Strahlenbüschel oder zwei beliebige Gerade mit einem Parallelstrahlenbüschel schneidet.

Ebenso heißen zwei projektive Strahlenbüschel kongruent, wenn irgend zwei Strahlen den gleichen Winkel einschließen wie die ihnen entsprechenden. Solche Strahlenbüschel erhält man z. B., wenn man eine Punktreihe aus zwei Punkten S und S_1 projiziert, die gleichweit entfernt von derselben und auf einer Senkrechten zu ihr liegen, oder auch dadurch, daß man zwei zur unendlich fernen Geraden perspektive Büschel betrachtet, in denen folglich entsprechende Strahlen immer parallel laufen.

IV. Abschnitt.

Die projektive Beziehung auf dem gleichen Träger.

§ 16. Die Doppelelemente und ihre Konstruktion.

Bestimmung einer projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger.

41. Denken wir uns zwei Punktreihen g und g_1 projektiv aufeinander bezogen. Dann können wir auch den Träger der einen Punktreihe mit dem der andern zusammenfallen lassen. Wir haben also nur noch einen Träger, der gewissermaßen doppelt zu nehmen und „projektiv auf sich selbst bezogen" ist. Die Möglichkeit einer solchen Beziehung läßt sich auch direkt leicht erkennen: denn ordnen wir drei Punkten A, B, C eines Trägers g drei andere Punkte A_1, B_1, C_1 des gleichen Trägers zu, so ist dadurch die projektive Beziehung auf der Punktreihe g festgelegt. Um sie nämlich konstruktiv zu verfolgen, projizieren wir A, B, C aus einem beliebigen (nicht auf g gelegenen) Punkt S und A_1, B_1, C_1 aus einem Punkte S_1 je durch einen Strahlenbüschel. Dann ist die projektive Beziehung dieser beiden Büschel bestimmt und entsprechende Strahlen derselben schneiden entsprechende Punkte auf g aus. Ist ein Punkt auf dem Träger g gegeben, ohne daß hinzugefügt ist, welcher der beiden Punktreihen er angehören soll, so kann man ihn

als Punkt der einen oder andern Punktreihe nehmen und demgemäß mit J oder K_1 bezeichnen. Verbindet man ihn dann entweder mit S oder mit S_1, so ist es möglich, die beiden entsprechenden Punkte J_1 und K zu finden, welche im allgemeinen nicht zusammenfallen werden. Ganz ebenso können wir auch einen Strahlenbüschel oder einen Ebenenbüschel projektiv auf sich selbst beziehen.

Der Sinn projektiver Gebilde.

42. Ist ein Grundgebilde erster Stufe, z. B. eine Punktreihe g, g_1, projektiv auf sich bezogen und durchlaufen wir das eine der beiden Systeme in einem gewissen Sinne, z. B. im Sinne A B C, wenn dies drei Punkte von g, so wird auch für die Elemente des zweiten Systems g_1 dadurch eine gewisse Anordnung festgelegt, indem sich, wie leicht zu erkennen ist, auch für dies Gebilde ein einziger Sinn ausbildet, der durch die drei entsprechenden Punkte A_1, B_1, C_1 bereits bestimmt ist. In der Tat denken wir uns die beiden Punktreihen auf getrennten Trägern und in perspektive Lage gebracht, so daß sie als Schnitte des gleichen Strahlenbüschels erscheinen, so wird durch den Sinn A B C auch in diesem Büschel ein gewisser Sinn festgelegt, und dieser überträgt sich wiederum auf die zweite Punktreihe. Derselbe bleibt der gleiche, unabhängig davon, welche Tripel A, B, C bzw. A_1, B_1, C_1 man herausgreift.

Die beiden projektiven Gebilde auf dem gleichen Träger, Punktreihen, Strahlenbüschel oder Ebenenbüschel, heißen nun „gleichsinnig“ oder „gleichlaufend“, wenn der zweite Sinn mit dem ersten übereinstimmt (Fig. 26a), dagegen „ungleichsinnig“ oder „entgegengesetztlaufend“, wenn dies nicht der Fall ist (Fig. 26b). Man bemerke, daß zwei projektive Gebilde auf dem gleichen Träger also stets entweder durchaus im Sinn übereinstimmen oder durchaus entgegengesetzten Sinn haben. Dagegen ist es nicht möglich, daß sie etwa in einem Gebiete im gleichen, in einem andern Gebiete im entgegengesetzten Sinne laufen.

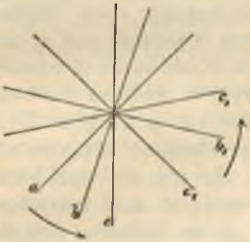

Fig. 26 a.

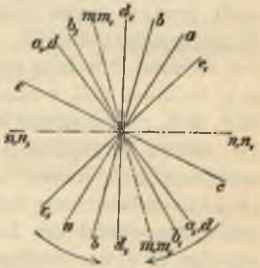

Fig. 26 b.

Die Doppelelemente.

43. Bis hierher unterschied sich die projektive Beziehung auf dem gleichen Träger nicht wesentlich von der früher auf verschiedenen Trägern betrachteten. Ein neuer Gesichtspunkt wird erst durch folgende Fragestellung gewonnen: Enthält ein projektiv auf sich selbst bezogener Träger Elemente, die sich mit den ihnen entsprechenden decken? Können wir z. B. bei einer projektiven Beziehung auf einer Geraden einen Punkt X finden, der mit dem entsprechenden X_1 zusammenfällt? Wir werden einen solchen Punkt einen „Doppelpunkt" nennen; ihnen entsprechen „Doppelstrahlen" und „Doppelebenen" beim Strahlen- bzw. Ebenenbüschel.

Bevor wir nun allgemein diese Doppelelemente konstruieren lernen, wollen wir sehen, wie sich ihre Existenz in gewissen Fällen schon aus der geometrischen Anschauung herleiten läßt.

Betrachten wir eine ungleichsinnige Projektivität in einem Strahlenbüschel. Ein beweglich gedachter Strahl durchläuft den ersten Büschel im Sinne a b c (Fig. 26 b) nach irgend einem Gesetze, etwa mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit. Die Bewegung eines Strahles des zweiten Büschels sei dadurch bestimmt, daß er sich in a_1 befinden soll, wenn der erste Strahl mit a zusammenfällt, in b_1, wenn dieser b passiert usw., daß also überhaupt die beiden beweglichen Strahlen im gleichen Zeitmoment sich immer in entsprechenden Strahlen der projektiven Beziehung befinden. Hat nun der erste Strahl von a ausgehend die Lage a_1 erreicht und bezeichnen wir ihn in dieser Stellung mit d, so befindet sich der entsprechende Strahl in d_1. Wo nun d_1 auch gelegen sein mag, jedenfalls haben die von a bzw. a_1 überstrichenen Winkelräume a a_1 und d d_1 infolge des entgegengesetzten Drehungssinnes einen Teil gemeinsam, — in dem in der Figur gezeichneten Falle z. B. den Winkelraum d d_1 —, und in diesem, der von den beiden beweglichen Strahlen im entgegengesetzten Sinne überstrichen wird, muß es einmal vorkommen, daß die Strahlen übereinander wegeilen. Einer solchen Stellung, wo sich für einen Moment die beiden Strahlen decken, entspricht aber offenbar ein Doppelstrahl m, m_1 der beiden Büschel.

Lassen wir ferner den ersten Strahl von der Lage d aus seine Bewegung fortsetzen, bis er mit a zusammengefallen ist, so bewegt sich während dieser Zeit der zweite Strahl im entgegengesetzten Sinne von d_1 nach a_1 und es muß sich also auch im Winkelraum a a_1 ein zweiter Doppelstrahl n, n_1 der Büschel befinden, welcher vom ersten Doppelstrahl m sowohl durch das Strahlenpaar a, a_1 als auch durch das Paar d, d_1 getrennt wird. Die gleiche Betrachtung ist auch für Punktreihen durchführbar, so daß damit bewiesen:

Satz 17. „In einer ungleichsinnigen projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger gibt es stets zwei Doppelelemente, welche durch jedes Paar entsprechender Elemente getrennt werden. Diese zwei Doppelelemente können folglich nie zusammenfallen.“

Auf die nicht einfachen Voraussetzungen und Betrachtungen, welche nötig sind, um diesen Satz zu beweisen, ohne die Anschauung zu Hilfe zu nehmen, gehen wir nicht ein.

Während in ungleichsinnigen projektiven Gebilden 1. Stufe demnach stets zwei nicht zusammenfallende Doppelelemente auftreten, kann man bei gleichsinnigen Projektivitäten dies nicht behaupten. In ihnen können Doppelelemente auftreten oder auch nicht.

Dagegen ist es unmöglich, daß mehr als zwei Doppelelemente vorhanden sind. Denn angenommen, es gebe in einer projektiven Beziehung auf einer Punktreihe drei Doppelpunkte M, N, P, so wäre für ein Paar entsprechender Punkte A und A_1

$$(M N P A) = (M_1 N_1 P_1 A_1),$$

wobei M_1 mit M, N_1 mit N, P_1 mit P zusammenfällt. Es ist aber unmöglich, daß zwei verschiedene Punkte A und A_1 mit drei Punkten das nämliche Doppelverhältnis bilden, also fällt auch A mit A_1 und überhaupt jeder Punkt mit seinem entsprechenden zusammen und es ergibt sich:

Satz 18. „Wenn in einer projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger drei Elemente mit den ihnen entsprechenden sich decken, so deckt sich überhaupt jedes Element mit dem entsprechenden, d. h. man hat eine Identität.“

Demnach kann die Zahl der auftretenden Doppelelemente 0, 1 oder 2 sein. Ihre Bestimmung läßt sich zurückführen auf den Fall der Konstruktion der Doppelpunkte zweier ineinanderliegender projektiver Punktreihen. Denn aus einem projektiv auf sich bezogenen Strahlenbüschel schneidet eine Gerade seiner Ebene zwei projektive Punktreihen aus, nach deren Doppelpunkten die Doppelstrahlen des Büschels laufen, und ein projektiv auf sich bezogener Ebenenbüschel wird von einer beliebigen Ebene in einem projektiv auf sich bezogenen Strahlenbüschel geschnitten, durch dessen Doppelstrahlen auch die Doppelebenen des Ebenenbüschels gehen. Zur Konstruktion der Doppelpunkte zweier projektiver Punktreihen bedienen wir uns eines Kreises, der ein für allemal gezeichnet vorliegen kann, müssen aber zu dem Zweck noch vorher eine Eigenschaft des Kreises kennen lernen.

Fig. 27.

Hilfssatz über den Kreis.

44. Sind P und P_1 zwei beliebige Punkte auf einem Kreis (Fig. 27) und projizieren wir aus ihnen die übrigen Punkte des Kreises, also den Punkt A durch die Strahlen a und a_1, den Punkt B durch die Strahlen b und b_1 usw., so erhalten wir

die Büschel P und P_1, und diese sind projektiv, d. h. es gilt der

Satz 19. „Aus irgend zwei beliebigen Punkten eines Kreises werden die übrigen Punkte desselben durch projektive Büschel projiziert."

In der Tat ist ja

$$\sphericalangle (a\,b) = \sphericalangle (a_1\,b_1)$$

oder

$$\sphericalangle (a\,d) = 180^0 - \sphericalangle (a_1\,d_1).$$

In beiden Fällen wird

$$\sin (a\,b) = \sin (a_1\,b_1)$$
$$\sin (a\,d) = \sin (a_1\,d_1).$$

Es ist folglich auch

$$(a\,b\,c\,d) = (a_1\,b_1\,c_1\,d_1),$$

wenn dies irgend vier Strahlenpaare sind, die aus P und P_1 Punkte der Kreisperipherie projizieren; also sind die Büschel P und P_1 projektiv; ihre besondere Eigentümlichkeit besteht darin, daß sie kongruent (vgl. 40.) und gleichsinnig sind.

Die Steinersche Konstruktion der Doppelelemente.

45. Es liege jetzt ein Kreis gezeichnet vor und in seiner Ebene befinde sich der Träger g, auf dem eine projektive Beziehung durch die Punktpaare $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_1$ gegeben ist (Fig. 28). Um nun über das Vorhandensein von Doppelpunkten einen sicheren Aufschluß zu gewinnen, wählen wir zunächst auf dem Kreise beliebig einen Punkt S und ziehen die Linien S$\mathbf{A}$, S$\mathbf{B}$, S$\mathbf{C}$, S$\mathbf{A}_1$, S$\mathbf{B}_1$, S$\mathbf{C}_1$, welche den Kreis zum zweitenmal in A, B, C, A_1, B_1, C_1 schneiden mögen. Wir haben

dann die beiden gegebenen Punktreihen „auf den Kreis projiziert“.

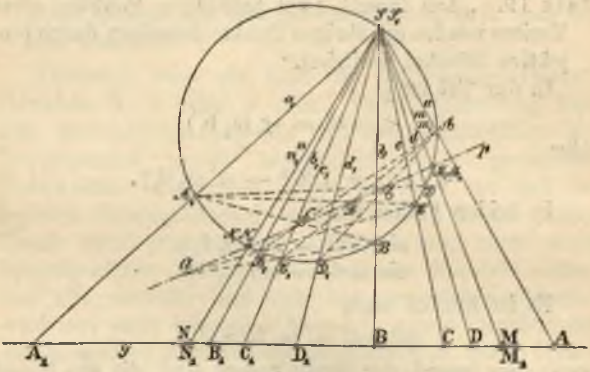

Fig. 28.

Bezeichnen wir ferner die eben genannten sechs Strahlen der Reihe nach mit a, b, c, a_1, b_1, c_1, so liegen in S projektive Büschel vereinigt, also

(1) Büschel $(a, b, c \ldots) \,\overline{\wedge}\,$ Büschel $(a_1, b_1, c_1 \ldots)$.

Projizieren wir nun die Punkte A, B, C usw. aus A_1, sowie die Punkte A_1, B_1, C_1 usw. aus A je durch einen Strahlenbüschel, so ergeben sich nach dem soeben bewiesenen Hilfssatz folgende Projektivitäten:

(2) Büschel $A(A_1, B_1, C_1 \ldots) \,\overline{\wedge}\,$ Büschel $S(a_1, b_1, c_1 \ldots)$,

(3) Büschel $A_1(A, B, C \ldots) \,\overline{\wedge}\,$ Büschel $S(a, b, c \ldots)$*).

*) Die Bezeichnung ist leicht verständlich: Büschel $A(A_1, B_1, C_1, \ldots)$ bedeutet den Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt A, dessen Strahlen nach A_1, B_1, C_1, ... laufen.

Da aber nach (1) auch die Büschel rechts projektiv sind, so folgt

(4) Büschel $A(A_1, B_1, C_1 \ldots) \barwedge$ Büschel $A_1(A, B, C \ldots)$.

Diese Büschel sind aber nicht bloß projektiv, sondern auch perspektiv nach Satz 14, da in der Verbindungslinie AA_1 der Büschelmittelpunkte entsprechende Strahlen der beiden Büschel sich decken; folglich liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden p.

Schneiden sich mithin AB_1 und A_1B in $\mathfrak{C}$, ferner AC_1 und A_1C in $\mathfrak{B}$, so ist die Verbindungslinie $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ die Achse p der Perspektivität.

Ist also $\mathfrak{E}$ ein beliebiger Punkt auf p, so liefern $A\mathfrak{E}$ und $A_1\mathfrak{E}$ die zweiten Schnittpunkte D_1 und D mit dem Kreise, und D und D_1 geben aus S auf g projiziert zwei entsprechende Punkte $\mathbf{D}$ und $\mathbf{D}_1$ der projektiven Punktreihen.

Nun möge die Achse p den Kreis in M und N schneiden. Führt man dann für diese Punkte von p die gleiche Betrachtung durch wie gerade für den beliebigen Punkt $\mathfrak{E}$, so ergibt sich aus der Figur, daß M und N aus S auf g projiziert die Doppelpunkte $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ der projektiven Punktreihen liefern.

In den Linien SM und SN haben wir ferner die D o p p e l s t r a h l e n der in S vereinigten projektiven Strahlenbüschel (a, b, c) und (a_1, b_1, c_1) ermittelt. Wenn also die Achse p den Hilfskreis schneidet, so treten reelle Doppelelemente in den beiden projektiven Gebilden auf (hyperbolische Projektivität). Trifft die Linie p dagegen den Kreis nicht, so gibt es keine (reellen) Doppelelemente (elliptische Projektivität). Berührt endlich die Linie p den Kreis, so haben wir den Übergangsfall der

„parabolischen" Projektivität, bei der die beiden Doppelelemente sich in ein einziges vereinigt haben. Die letztgenannte projektive Beziehung ist notwendig eine gleichsinnige, da bei einer ungleichsinnigen Projektivität die beiden Doppelelemente sich nach Satz 17 nicht vereinigen können.

Zusatz. Statt der Punkte A und A_1 hätte man ebensogut auch B und B_1 oder C und C_1 usw. als Mittelpunkte der perspektiven Büschel wählen können. Die Punkte M und N, also auch die Gerade p müssen sich dadurch ebenso ergeben. Es muß demnach auch der Schnittpunkt $\mathfrak{A}$ von BC_1 und B_1C, der Schnittpunkt $\mathfrak{F}$ von BD_1 und B_1D usw. auf p liegen. Die Achse p enthält mithin alle Schnittpunkte wie

$$\left.\begin{array}{l} A\ B_1 \\ A_1 B \end{array}\right\}\mathfrak{C} \qquad \left.\begin{array}{l} A\ C_1 \\ A_1 C \end{array}\right\}\mathfrak{B} \qquad \left.\begin{array}{l} A\ D_1 \\ A_1 D \end{array}\right\}\mathfrak{E}$$

$$\left.\begin{array}{l} B\ C_1 \\ B_1 C \end{array}\right\}\mathfrak{A} \qquad \left.\begin{array}{l} B\ D_1 \\ B_1 D \end{array}\right\}\mathfrak{F} \qquad \left.\begin{array}{l} C\ D_1 \\ C_1 D \end{array}\right\}\mathfrak{G}$$

usw.

Diese Konstruktion der Doppelelemente ersann der deutsche Geometer Jacob Steiner. [Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises. Berlin 1833.]

Ein weiterer Satz über die Doppelelemente.

46. Sind M, N die Doppelpunkte, A, A_1, B, B_1 zwei Paare entsprechender Punkte zweier projektiver Punktreihen, so hat man

$$(MNAB) = (M_1 N_1 A_1 B_1)\,.$$

Führt man die Ausdrücke für die Doppelverhältnisse ein, so ergibt eine leichte Umformung die andere Relation

$$(MNAA_1) = (MNBB_1)\,.$$

Der Wert dieses Doppelverhältnisses muß also für alle Paare entsprechender Punkte der gleiche sein, etwa $= k =$ konst. Damit ist für reelle Doppelelemente bewiesen der allgemein gültige

Satz 20. „Je zwei entsprechende Elemente einer projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger bilden mit den beiden Doppelelementen ein konstantes Doppelverhältnis."

Wird also beispielsweise ein Paar entsprechender Elemente einer projektiven Beziehung durch die beiden Doppelelemente getrennt oder nicht getrennt, so hat jedes Paar entsprechender Elemente die gleiche Eigenschaft.

Bestimmung der Doppelelemente durch die Rechnung.

47. Bemerken wir noch kurz, wie die Rechnung die Doppelelemente liefert. Wird eine und dieselbe Gerade als X- und X_1-Achse genommen, so ist eine projektive Beziehung auf derselben nach 38. gegeben durch eine Gleichung

$$\alpha x x_1 + \beta x + \gamma x_1 + \delta = 0.$$

Ein Doppelpunkt hat die Eigenschaft, daß für ihn $x = x_1$, vorausgesetzt, daß wir die x und x_1 vom gleichen Anfangspunkt aus und in derselben Richtung positiv rechnen. Setzen wir also in der Relation $x = x_1$, so kommt die quadratische Gleichung

$$\alpha x^2 + (\beta + \gamma) x + \delta = 0,$$

deren beide Wurzeln die Abszissen der Doppelpunkte liefern. Sind die Wurzeln der Gleichung imaginär, so gibt es keine Doppelpunkte; wir sagen: die Doppelpunkte sind imaginär.

Alle Aufgaben, deren Lösung schließlich auf eine Gleichung 2. Grades führt, bezeichnen wir als Aufgaben 2. Grades. Ihre geometrische Erledigung finden diese immer durch die soeben bewiesene Steinersche Konstruktion, bei der ein Kreis und außerdem das Lineal zu benutzen ist. Führt eine Aufgabe analytisch zu einer linearen Gleichung, also zu einer Gleichung 1. Grades, so wird sie als Aufgabe 1. Grades bezeichnet. Konstruktiv muß sie sich dann behandeln lassen lediglich unter Benutzung des Lineals. Bei einer solchen linearen Aufgabe kommen also bloß die Operationen vor: den Schnittpunkt zweier Geraden zu zeichnen und durch zwei Punkte eine Gerade zu legen. Bei der Steinerschen Konstruktion dagegen hatte man die Schnittpunkte einer Geraden (p) mit einem Kreis zu zeichnen.

Aufgabe 15. Eine Gerade g soll projektiv so auf sich bezogen werden, daß den zwei gegebenen Punkten A und B zwei andere A_1 und B_1 entsprechen, und daß der weiter gegebene Punkt M einer der Doppelpunkte der projektiven Beziehung wird.

1. Lösung. Bezeichnet man M auch noch als M_1, so hat man drei Paare entsprechender Punkte und kann unter Zuhilfenahme eines Kreises nach 45. den noch fehlenden Doppelpunkt finden. Man führe die Konstruktion wirklich durch.

2. Lösung. Ist von den beiden Doppelelementen eines gegeben, so hängt die Aufgabe, das fehlende zu bestimmen, nur noch von einer linearen Gleichung ab; sie ist also eine Aufgabe 1. Grades und muß sich folglich auch ohne Benutzung eines Kreises, lediglich mit dem Lineal lösen lassen. In der Tat ziehen wir durch M irgend eine Gerade und wählen auf ihr die

Punkte S und S_1 willkürlich. Aus S projizieren wir die Punkte A, B, M, aus S_1 die Punkte A_1, B_1, M_1. Dann sind diese beiden Büschel projektiv, sofern entsprechende Strahlen derselben je entsprechende Punkte der Punktreihen projizieren; die Büschel sind aber überdies wieder perspektiv, weil im Verbindungsstrahl SS_1 entsprechende Strahlen vereinigt liegen. Sie liefern eine Perspektivitätsachse p, die bestimmt ist durch die Punkte **A** und **B**, wobei der erstere der Schnittpunkt von SA und S_1A_1, während in **B** sich SB und S_1B_1 begegnen. Der Schnittpunkt von p mit g ist dann aber der zweite Doppelpunkt N der projektiven Beziehung.

Man beweise ferner: Geht p auch durch M, so erhalten wir eine parabolische Projektivität; sie ist schon bestimmt, wenn wir uns das eine Paar A, A_1 geben und den Punkt M, in welchem sich die 2 Doppelelemente vereinigt haben sollen.

Ist M wieder einfacher Doppelpunkt, aber im Unendlichen gelegen, so erhalten wir ähnliche Punktreihen (40.), da die unendlich fernen Punkte der beiden Träger sich dann entsprechen; dieselben haben im Endlichen noch einen Doppelpunkt.

Wählen wir kongruente Punktreihen (40.), also $AB = \pm A_1B_1$, so erhalten wir für das untere Vorzeichen eine ungleichsinnige Projektivität mit noch einem im Endlichen gelegenen Doppelpunkt. Für das obere Vorzeichen sind die kongruenten Punktreihen gleichsinnig. Dann rückt auch der zweite Doppelpunkt ins Unendliche, so daß also diese Beziehung als eine parabolische Projektivität mit unendlich fernem Doppelpunkt anzusehen ist, eine Eigenschaft, die auch umgekehrt genügt, um kongruente gleichsinnige Punktreihen zu definieren.

Aufgabe 16. Man beweise, daß zwei kongruente Strahlenbüschel in vereinigter Lage imaginäre Doppelstrahlen haben, wenn sie gleichsinnig sind, dagegen immer zwei reelle und aufeinander senkrecht stehende Doppelstrahlen, wenn sie nach entgegengesetzen Richtungen laufen.

Lösung. Benutzen wir den Steinerschen Kreis, so wird die Gerade p im ersten Falle die unendlich ferne Gerade, welche den Kreis nicht trifft. Im zweiten Falle erkennt man unmittelbar, daß die Doppelstrahlen die Linien sein müssen, welche die von entsprechenden Strahlen wie a und a_1, b und b_1 usf. gebildeten Winkel halbieren.

Aufgabe 17. Von einer projektiven Beziehung auf einer Geraden sind gegeben ein Paar entsprechender Punkte A, A_1, sowie die beiden Doppelpunkte M und N. Weitere entsprechende Punkte zu konstruieren.

Aufgabe 18. In einem Strahlenbüschel sind gegeben die Strahlenpaare a, a_1, b, b_1 und der Strahl m. Man beziehe den Büschel projektiv so auf sich, daß m ein Doppelstrahl und a, a_1 und b, b_1 zwei Paare entsprechender Strahlen.

Lösung. Ziehe durch einen Punkt von m zwei Gerade g und g_1 und bringe sie bezüglich zum Schnitt mit den Büscheln.

Aufgabe 19. Von einer projektiven Beziehung eines Strahlenbüschels sind gegeben ein Paar entsprechender Strahlen a, a_1, sowie die beiden Doppelstrahlen m und n. Weitere entsprechende Strahlen zu konstruieren.

Aufgabe 20. Gegeben sind drei Gerade g_1, g_2, g_3, und drei Punkte P_1, P_2, P_3; man zeichne ein Dreieck A_1, A_2, A_3, dessen Ecken in dieser Reihenfolge bezüglich auf den drei Geraden liegen und dessen Seiten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ bzw. durch die Punkte P_1, P_2, P_3 hindurchgehen.

Lösung. Wählen wir auf g_1 einen Punkt A_1 ganz beliebig, ziehen wir die Verbindungslinie $A_1 P_1$, welche g_2 in A_2 treffen möge. Die Verbindungslinie $A_2 P_2$ schneide g_3 in A_3 und die Verbindungslinie $A_3 P_3$ endlich liefere auf g_1 einen Schnittpunkt A_1'. Lassen wir A_1 die Punktreihe g_1 durchlaufen, so beschreibt der Punkt A_1' eine dazu projektive Punktreihe. Wir bestimmen diese projektive Beziehung, indem wir zu drei Lagen des einen Punktes die entsprechenden des andern zeichnen. Sind dann die Doppelpunkte dieser projektiven Punktreihe reell vorhanden, so liefert jeder derselben ein Dreieck von der verlangten Eigenschaft. Verallgemeinerung für n-Ecke!

§ 17. Die involutorische Beziehung.

Herleitung der involutorischen Beziehung.

48. Betrachten wir noch einen speziellen, aber besonders wichtigen Fall der projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger. Eine Punktreihe sei projektiv auf sich bezogen und einem beliebigen Punkte A entspreche ein Punkt A_1. Bezeichnen wir den gleichen Punkt A mit B_1, indem wir ihn als einen Punkt des zweiten Systems auffassen, so wird ihm ein Punkt B zugewiesen sein, der von A_1 verschieden ist. Es fragt sich nun: Kann B mit A_1 zusammenfallen und kann dies noch für weitere Punkte einer projektiven Beziehung eintreten? Darauf gibt Antwort folgender

Satz 21. „Wenn in einer projektiven Beziehung auf einer Punktreihe einmal die beiden einem Punkte entsprechenden Punkte zusammenfallen, so fallen sie für jeden Punkt zusammen."

Wählen wir, um dies nachzuweisen, A und A_1 sowie C und C_1 ganz beliebig (Fig. 29), B_1 ferner falle mit A

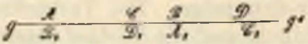

Fig. 29.

und B mit A_1 zusammen, dann ist durch die drei Paare A, B, C, A_1, B_1, C_1 sicher eine projektive Beziehung bestimmt. Bezeichnen wir jetzt den Punkt C mit D_1, so entspricht ihm ein Punkt D derart, daß

$$
\begin{aligned}
(ABCD) &= (A_1B_1C_1D_1) \\
&= (BAC_1C) \\
\text{oder nach 24.} \qquad &= (ABCC_1).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt aber dann, daß D mit C_1 zusammenfällt. Ganz in der gleichen Weise zeigt man, daß einem beliebigen Punkte E, F_1 ein Punkt E_1, F entspricht. Es ist also nicht nötig, die beiden Punktreihen in der Bezeichnung zu unterscheiden, jedem Punkte des Trägers ist ein bestimmter Punkt zugewiesen. Es zerfällt der ganze Träger in Punktpaare und wir wollen die Punkte eines Paares als entsprechende oder zugeordnete Punkte bezeichnen. Die analogen Betrachtungen gelten für den Strahlen- und Ebenenbüschel. Wir nennen eine solche projektive Beziehung, in der jedem Element ein anderes doppelt entspricht, eine „involutorische" oder auch eine „Involution" von Punkten bzw. Strahlen oder Ebenen. Bezeichnen wir in Fig. 29 den Punkt AB_1 mit $\mathbf{A}$, den Punkt A_1B mit $\mathbf{A}'$, C und C_1 mit $\mathbf{B}$ und $\mathbf{B}'$, so zeigt die eben durchgeführte Betrachtung, daß die Involution auf der Geraden durch die beiden Paare von zugeordneten

Punkten **A**, **A′** und **B**.**B′** gerade bestimmt ist oder allgemein

Satz 22. „Eine Involution ist durch zwei Paare von zugeordneten Elementen bestimmt.“

Drei Paare zugeordneter Elemente einer Involution sind demnach nicht voneinander unabhängig; es muß also z. B. für eine Punktinvolution zwischen den Strecken, welche drei beliebige Punktpaare A, A′, B, B′, C, C′ bestimmen, ein Zusammenhang bestehen. In der Tat ist ja

$$(A\,B\,A'\,C') = (A'\,B'\,A\,C)$$

und daraus folgt

$$A\,B' \cdot B\,C' \cdot C\,A' = -\,A'B \cdot B'C \cdot C'A$$

oder auch

$$\frac{A\,B'}{A'B} \cdot \frac{B\,C'}{B'C} \cdot \frac{C\,A'}{C'A} = -\,1\,.$$

Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so kann man aus ihr auf die Gleichheit der obigen Doppelverhältnisse schließen, und die drei Punktpaare gehören einer Involution an.

Die Doppelelemente einer Involution.

49. Die Doppelelemente der projektiven Beziehung finden wir natürlich auch wieder bei der Involution. Jedes Doppelelement stellt ein Paar von Elementen vor, die einander unendlich nahe gerückt sind. Sind die Doppelelemente vorhanden, so heißt die Involution eine „hyperbolische“, bei nicht vorhandenen Doppelelementen dagegen eine „elliptische“ und endlich eine „parabolische“, wenn die Doppelelemente sich in ein Element vereinigt haben.

Sind M, N die Doppelpunkte einer Punktinvolution, während A, A′, B, B′ usw. Paare von zugeordneten Punkten, so folgt aus Satz 20 (S. 81), der hier ja auch gilt,

$$(M\,N\,A\,A') = (M\,N\,A'A) = \text{konst.} = k.$$

Es ist aber nach 24., Gleichung (3)

$$(M\,N\,A'A) = \frac{1}{(M\,N\,A\,A')},$$

also

$$(M\,N\,A\,A')^2 = 1\,.$$

Als Wert des Doppelverhältnisses (M N A A′) ergibt sich daraus -1, da der Wert $+1$ nicht zulässig (25. Aufg. 3.); es ist also $k = -1$ und A und A′ liegen harmonisch zu M und N, ebenso B und B′ usw. Allgemein kann man beweisen

Satz 23. „Eine Involution besteht aus all den Paaren von Elementen, welche die zwei Doppelelemente, (die reell oder imaginär sein können), harmonisch trennen.“

Gibt man sich also z. B. irgend zwei Gerade m und n, die sich in S schneiden, so kann man zu jedem beliebigen Strahle a des Büschels S einen Strahl a′ konstruieren, derart, daß a und a′ das Strahlenpaar m, n harmonisch trennen. Alle diese Strahlenpaare a, a′ bilden eine Strahleninvolution.

Irgend eine nicht durch S gehende Gerade wird von derselben in einer Punktinvolution geschnitten, wie überhaupt aus involutorischen Gebilden durch Projizieren und Schneiden wiederum solche Gebilde hervorgehen.

Läßt man m und n oder allgemein die Doppelelemente einer Involution zusammenfallen, so muß von den beiden Elementen eines jeden Paares der Involution eines sich stets mit diesem Doppelelement vereinigen. In einer solchen parabolischen (uneigentlichen) Involution entspricht daher dem Doppelelement jedes Element des Trägers. Man beachte diesen Unterschied im Vergleich zur parabolischen Projektivität.

§ 18. Die Punktinvolution.

Die verschiedenen Typen.

50. Hat man eine Punktinvolution auf einer Geraden, so kann man auch zum unendlich fernen Punkt O' ihres Trägers sich den entsprechenden Punkt O verschaffen. Dieser Punkt O heißt der Mittelpunkt der Involution. Weitere Paare entsprechender Punkte seien A, A', B, B' usw. Dann gilt die Relation

$$(A B O O') = (A' B' O' O),$$

da ja die involutorische Beziehung nur ein spezieller Fall der projektiven. Rechnet man die Ausdrücke aus und beachtet, daß O' im Unendlichen liegt, so ergibt sich

$$A O \cdot A' O = B O \cdot B' O.$$

Demnach muß dies Produkt, gebildet für irgend zwei entsprechende Punkte, immer den gleichen Wert haben. Bezeichnen wir denselben mit c, so sind folgende Fälle möglich:

1) c positiv, also etwa $c = d^2$. Dann müssen die Strecken $A O$ und $A' O$, $B O$ und $B' O$ usw. stets gleichgerichtet sein, da ihr Produkt positiv*). Es liegen also entsprechende Punkte A, A' usw. immer auf der gleichen Seite von O, beide rechts oder beide links vom Mittelpunkt O (Fig. 30 a). In der Entfernung d vom Mittelpunkt finden wir rechts und links die Doppelpunkte dieser hyperbolischen Involution.

---

*) Wir wählen auf dem Träger der Involution eine Richtung als die positive.

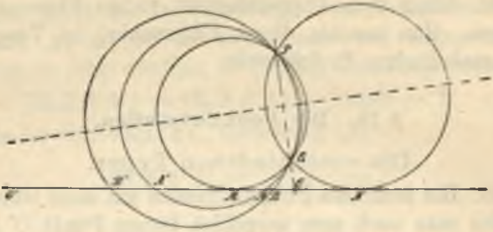

Fig. 30 a.

2) c negativ, so daß $c = -d^2$. Dann müssen entsprechende Punkte wie A, A′ usw. stets auf verschiedenen Seiten von O liegen, der eine rechts, der andere links vom Mittelpunkt (Fig. 30 b). Die Involution besitzt keine Doppelpunkte, ist elliptisch.

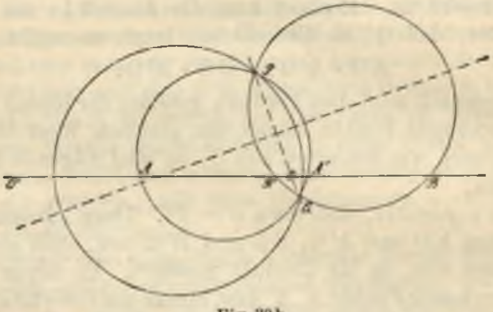

Fig. 30 b.

3) $c = 0$ liefert den Übergangsfall. Soll das Produkt $AO \cdot A'O$ stets Null sein, so muß von den zwei Punkten A, A′ usw. immer einer nach O fallen. Jedem Punkte des Trägers entspricht also der Mittelpunkt O und in diesen rücken gleichzeitig die beiden Doppelpunkte. Dies ist eine parabolische Involution.

Aus 1) und 2) ergibt sich noch die Regel: Wenn die beiden Punktpaare A, A' und B, B' sich trennen, so existieren keine Doppelpunkte (Fig. 30 b); wenn aber eine der Strecken AA' und BB' ganz innerhalb oder ganz außerhalb der andern liegt, so sind reelle Doppelpunkte vorhanden (Fig. 30 a).

Geometrische Erzeugung einer Punktinvolution.

51. Sind zwei Punktpaare A, A', B, B' einer Punktinvolution gegeben (Fig. 30 a oder 30 b), so legen wir durch einen beliebigen Punkt P und durch A und A', sowie durch P, B und B' je einen Kreis. Diese beiden Kreise schneiden sich zum zweitenmal in einem Punkte Q. Die Verbindungslinie PQ trifft den Träger der Involution in einem Punkte O. Alle Kreise, die durch P und Q gehen, bilden einen „Kreisbüschel". Schneidet irgend einer dieser Kreise den Träger in den Punkten C und C', so ergibt sich nach planimetrischen Sätzen

$$OP \cdot OQ = OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC'.$$

Also bilden die Punktpaare, in denen der Kreisbüschel den Träger g schneidet, die gegebene Punktinvolution. O ist der Mittelpunkt derselben. Trennen sich die Punktpaare A, A', B, B' **nicht** wie in Figur 30 a, so gibt es in dem Büschel auch zwei Kreise, welche den Träger berühren. Die Berührungspunkte sind die Doppelpunkte M, N der Involution. In der Figur 30 b, wo die Punktpaare A, A', B, B' sich trennen, existieren keine Doppelpunkte. Umgekehrt wird jeder Kreisbüschel von irgend einer Geraden seiner Ebene in einer Punktinvolution geschnitten, die jedem der drei genannten Typen angehören kann. Legt man die Gerade durch P oder Q, so erhält man auf ihr als Schnitt mit dem Kreisbüschel eine parabolische Involution.

§ 19. Die Strahleninvolution.

Das rechtwinkelige Strahlenpaar einer Strahleninvolution.

52. War für die metrische Behandlung der Punktinvolution der Mittelpunkt derselben von Bedeutung, so können wir bei einer Strahleninvolution immer ein Strahlenpaar finden, dessen beide Elemente aufeinander senkrecht stehen.

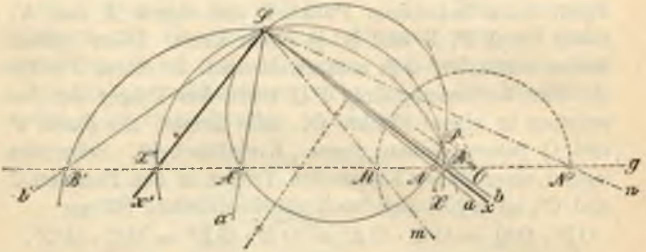

Fig. 31 a.

In der Tat ist im Punkte S eine Involution gegeben durch die Strahlenpaare a, a′ und b, b′, so schneiden wir mit einer beliebigen Geraden g diese Strahleninvolution in einer Punktinvolution A, A′, B, B′ (Fig. 31a und 31b). Durch die Punkte S, A, A′ sowie durch S, B, B′ zeichnen wir bzw. Kreise, die sich zum zweitenmal in P begegnen. Dann können wir die Punktinvolution auf g auch vermittels des Kreisbüschels durch S und P erzeugen. In diesem findet sich aber stets auch ein Kreis, der seinen Mittelpunkt auf g hat. Begegnet dieser der Geraden g in X und X′, so werden diese beiden Punkte aus S durch ein Strahlenpaar x, x′ der Strahleninvolution projiziert, das einen rechten Winkel einschließt.

In Figur 31a sind die Doppelpunkte M und N der Punktinvolution auf g konstruiert, indem nach 51. vom Schnittpunkt O aus an einen der Kreise des Büschels die Tangente gezeichnet wurde. Nach ihnen laufen die Doppelstrahlen m und n der Strahleninvolution; die Strahlen x, x′ halbieren nach Aufgabe 6 die Winkel von

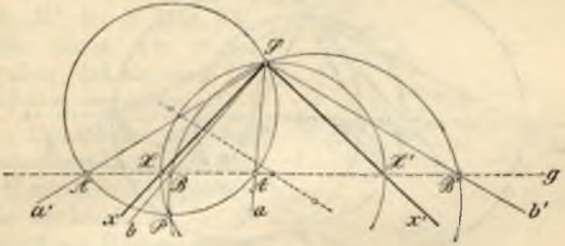

Fig. 31 b.

m und n. Es gilt ferner auch (vgl. Aufgabe 10) die Relation

$$\operatorname{tg}(xa) \cdot \operatorname{tg}(xa') = \operatorname{tg}(xb) \cdot \operatorname{tg}(xb') \ldots = \operatorname{tg}^2(xm) = \operatorname{tg}^2(xn)$$
$$= \text{konst.}$$

Die Rechtwinkelinvolution.

53. Errichtet man zu den Strahlen a, b, c eines Büschels in dessen Mittelpunkte S die Senkrechten a′, b′, c′ . . . (Fig. 32), so sind die Büschel a, b, c . . . und a′, b′, c′ . . . projektiv. Sie stehen aber weiter in involutorischer Beziehung. Denn dem Strahle a′, genommen als Strahl d, entspricht wieder a als Element d′.

Diese Paare rechter Winkel bilden eine Strahleninvolution, die man als rechtwinkelige Strahleninvolution, als „zirkulare" oder kurz als „Rechtwinkelinvolution" bezeichnet. Selbstverständlich hat sie keine reellen Doppelstrahlen.

Zwei Paare rechtwinkeliger Strahlen a, a′ und b, b′ bestimmen jedenfalls eine Involution. Schneiden wir sie durch eine Gerade g in der Punktinvolution A, A′, B, B′ (Fig. 32) und legen abermals durch S, A, A′ sowie

Fig. 32.

durch S, B, B′ je einen Kreis. Der zweite Schnittpunkt P dieser Kreise liegt dann symmetrisch zu S in bezug auf g, und alle Kreise des dadurch bestimmten Kreisbüschels haben ihre Mittelpunkte auf dieser Geraden. Folglich wird irgend ein Strahl c der Involution auf dem ihm zugeordneten c′ senkrecht stehen. Es folgt daher

Satz 24. „Eine Strahleninvolution besitzt stets ein Strahlenpaar, dessen Strahlen aufeinander senkrecht stehen. Treten aber in einer Involution zwei Paare zueinander rechtwinkeliger Strahlen auf, so steht jeder Strahl auf dem ihm entsprechenden senkrecht, die Involution ist eine Rechtwinkelinvolution."

§ 20. Die Involutionen beim vollständigen Viereck und Vierseit. Transversalen beim Dreieck.

Schnitt einer Geraden mit einem vollständigen Viereck.

54. Ist ein vollständiges Viereck E, F, G, H gegeben und irgend eine Gerade g, so schneidet dieselbe die drei Gegenseitenpaare l, l′, m, m′, n, n′ des Vierecks in drei Punktpaaren L, L′, M, M′, N, N′ (Fig. 33), von denen wir zeigen wollen, daß sie einer Involution angehören.

Fig. 33.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt von EG und FH mit X und projizieren die Punkte E, X, G, N′ zuerst aus F, dann aus H auf g, so ergibt sich

$$(EXGN') = (LNM'N') = (MNL'N'),$$

folglich

$$(LNM'N') = (MNL'N') = (L'N'MN).$$

Mithin gibt es eine projektive Beziehung, in der den Punkten L, N, M′, N′ der Reihe nach die Punkte L′, N′, M, N zugeordnet sind, und diese muß eine involutorische sein, da sich die Punkte N und N′ in doppelter Weise entsprechen (Satz 20 S. 81). Damit ist bewiesen der von Desargues (1639) herrührende

Satz 25. „Die drei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden von irgend einer Geraden in drei Punktpaaren einer Involution geschnitten.“

Wählen wir die schneidende Gerade speziell so, daß sie durch zwei Nebenecken des vollständigen Vierecks hindurchgeht, z. B. durch L und M (28. Fig. 16), so vereinigen sich in L und M je zwei entsprechende Punkte der Involution; also werden dies die Doppelpunkte der ausgeschnittenen Involution und das letzte Paar von Gegenseiten liefert ein Punktpaar, das zu M und N harmonisch liegt (49. Satz 23); damit sind wir auf die Figur zurückgekommen, aus welcher wir früher die geometrische Definition harmonischer Punkte ableiteten.

Aufgabe 21. Eine Punktinvolution auf einer Geraden ist durch die Punktpaare L, L′, M, M′ gegeben; man konstruiere zu einem beliebig angenommenen Punkte N den entsprechenden N′.

Lösung. Unter Bezugnahme auf Satz 25 verschaffen wir uns ein zweckmäßig gelegenes vollständiges Viereck, indem wir durch N irgend eine Gerade ziehen, auf ihr beliebig die Punkte F und H wählen, ferner die Geraden FL, FM′, HL′, HM zeichnen. Dann schneiden sich FL und HM in E, FM′ und HL′ in G und die Verbindungslinie EG liefert in ihrem Schnittpunkt mit dem Träger den gesuchten Punkt N′. Diese Konstruktion erfordert bloß das Ziehen von geraden Linien, ist also der Natur der Aufgabe gemäß eine rein „lineare“.

Für das vollständige Vierseit läßt sich dann ohne weiteres aussprechen

Satz 26. „Die drei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits werden aus jedem Punkte seiner Ebene durch drei Strahlenpaare einer Involution projiziert.“

Aufgabe 22. Eine Strahleninvolution ist durch zwei Strahlenpaare gegeben; zu einem beliebig angenommenen weiteren Strahle den entsprechenden zu konstruieren und zwar lediglich mit Benutzung des Lineals.

Aufgabe 23. Schneidet eine beliebige Gerade g die Nebenseiten L L′, M M′, N N′ eines vollständigen Vierseits in den Punkten X, Y, Z und ermittelt man zu X den vierten harmonischen X′ in bezug auf L, L′, ebenso zu M, M′ und N, N′ die vierten harmonischen Y′, Z′, so liegen X′, Y′, Z′ wieder auf einer Geraden g′.

Zum Beweise bringe man g mit der Verbindungslinie X′Y′ in P zum Schnitte und betrachte die Strahleninvolution, durch welche die Gegeneckenpaare aus P projiziert werden. Läßt man g ins Unendliche rücken, so folgt daraus der Satz von Gauß: Die Mitten der Strecken L L′, M M′, N N′, welche von den Gegeneckenpaaren eines vollständigen Vierseits gebildet werden, liegen auf einer Geraden.

Sätze über das Dreieck.

55. Ist ein Dreieck A B C gegeben und in seiner Ebene ein Punkt P sowie eine Gerade p, so wollen wir P aus den Ecken auf die Dreiecksseiten projizieren nach A_1, B_1, C_1 (Fig. 34) und anderseits p mit den Dreiecksseiten in A′, B′, C′ zum Schnitt bringen. Auf jeder Dreiecksseite liegen also vier Punkte. Projizieren wir dieselben aus P auf die Transversale p und treffen PA, PB, PC in **A**, **B**, **C** diese Gerade, so ist

$$(ABC_1C') = (\mathbf{ABC}C')$$
$$(BCA_1A') = (\mathbf{BCA}A')$$
$$(CAB_1B') = (\mathbf{CAB}B').$$

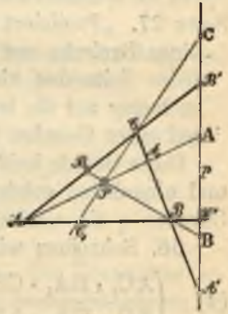

Fig. 34.

Führen wir auf der rechten Seite die Ausdrücke für die Doppelverhältnisse ein und bilden das Produkt, so ergibt sich

$$(1)\ (A B C_1 C')(B C A_1 A')(C A B_1 B') = -\frac{\mathbf{B}C' \cdot \mathbf{C}A' \cdot \mathbf{A}B'}{\mathbf{A}C' \cdot \mathbf{B}A' \cdot \mathbf{C}B'}.$$

Nun werden aber die drei Gegenseitenpaare des vollständigen Vierecks ABCP von p in den Punkten

$$\mathbf{A}A',\ \mathbf{B}B',\ \mathbf{C}C'$$

geschnitten, die folglich einer Involution angehören, und es gilt (vgl. 48. S. 87) die Beziehung

$$(2)\qquad \frac{\mathbf{A}B' \cdot \mathbf{B}C' \cdot \mathbf{C}A'}{A'\mathbf{B} \cdot B'\mathbf{C} \cdot C'\mathbf{A}} = -1\,.$$

Demnach wird in (1)

$$(3)\qquad (A B C_1 C')(B C A_1 A')(C A B_1 B') = -1\,.$$

Dieser Zusammenhang besteht zwischen den drei Doppelverhältnissen, wobei der Punkt P und die Gerade p noch beide ganz willkürlich angenommen werden konnten. Haben zwei dieser Doppelverhältnisse den Wert -1, so ergibt sich folglich für das dritte der gleiche Wert, so daß damit bewiesen

Satz 27. „Projiziert man einen Punkt Q aus den Ecken eines Dreiecks auf dessen Seiten und konstruiert auf jeder Seite den vierten harmonischen dieses Punktes in bezug auf die beiden Dreiecksecken, so liegen diese auf einer Geraden q."

Diese Gerade heißt die „Harmonikale" des Punktes Q und umgekehrt gehört zu jeder beliebig angenommenen Geraden q ein solcher Punkt Q.

56. Schreiben wir die Gleichung (3) in der Form

$$(4)\qquad \left(\frac{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1}{BC_1 \cdot CA_1 \cdot AB_1}\right) \cdot \left(\frac{BC' \cdot CA' \cdot AB'}{AC' \cdot BA' \cdot CB'}\right) = -1\,,$$

so zeigt sich, daß der erste Klammerausdruck bloß vom Punkte P, der zweite lediglich von der Geraden p abhängt. Wählen wir nun als Gerade p die unendlich ferne Gerade, so werden für diese die drei Quotienten $\frac{BC'}{AC'}$, $\frac{CA'}{BA'}$, $\frac{AB'}{CB'}$ je der Einheit gleich, also ist auch

$$(5) \qquad \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = -1$$

oder

$$(5^a) \qquad AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = -BC_1 \cdot AB_1 \cdot CA_1 .$$

Damit haben wir den Satz des Ceva (1678) erhalten:

Satz 28. „Schneiden die durch einen Punkt gehenden Ecktransversalen eines Dreiecks ABC die Gegenseiten in A_1, B_1, C_1, so gilt die Beziehung

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = -1 .\text{“}$$

Es gilt aber auch die Umkehrung:

„Treffen drei Ecktransversalen eines Dreiecks ABC in A_1, B_1, C_1 die Gegenseiten und ist die Beziehung (5) erfüllt, so schneiden sich die drei Linien AA_1, BB_1, CC_1 in einem Punkte.“

Denn projizieren wir den Schnittpunkt von AA_1 und BB_1 aus C nach C_1', so liefert der obige Satz:

$$\frac{AC_1'}{BC_1'} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = -1 ,$$

so daß in Verbindung mit (5)

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_1'}{BC_1'},$$

also muß C_1' mit C_1 zusammenfallen. Die Vorzeichen erhalten wir am sichersten, indem wir in der Gleichung (5) die Vorzeichen der drei Teilquotienten bestimmen.

Verbinden wir endlich noch (5) mit (4), so ergibt sich

$$\frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} \cdot \frac{AB'}{CB'} = 1 \tag{6}$$

oder der Satz des Menelaos (100 nach Chr.):

Satz 29. „Schneidet eine beliebige Transversale die Seiten eines Dreiecks ABC in A', B', C', so gilt die Beziehung

$$\frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{CA'}{BA'} \cdot \frac{AB'}{CB'} = 1$$

oder

$$BC' \cdot CA' \cdot AB' = AC' \cdot BA' \cdot CB' \text{“}$$

und umgekehrt:

„Enthalten die Seiten eines Dreiecks drei Punkte A', B', C' und gilt die Beziehung (6), so liegen diese drei Punkte auf einer Geraden.“

Diese Umkehrung beweist man ganz ähnlich, wie die des Satzes von Ceva.

Aufgabe 24. Man beweise, daß sich in jedem Dreieck
a) die drei Seiten-Halbierenden,
b) die Winkel-Halbierenden,
c) die drei Höhen

je in einem Punkte schneiden.

Aufgabe 25. Einem Dreieck ABC ist ein Kreis umschrieben und die Tangenten des Kreises in den Eckpunkten werden mit den Gegenseiten zum Schnitt gebracht. Man beweise, daß diese drei Punkte auf einer Geraden liegen (Gerade von Lemoine).

V. Abschnitt.

Die Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Grundgebilde erster Stufe.

---

§ 21. Das Erzeugnis zweier projektiver, in der gleichen Ebene gelegener Strahlenbüschel.

Die Erzeugung neuer Gebilde.

57. Im bisherigen haben wir uns damit beschäftigt, die einförmigen Grundgebilde projektiv aufeinander oder auf sich selbst zu beziehen und die Eigenschaften solcher Beziehungen zu untersuchen. Dies ist aber nicht unser Endzweck; vielmehr wollen wir jetzt projektive Grundgebilde erster Stufe dazu benutzen, um aus ihnen neue geometrische Gebilde abzuleiten. In zwei projektiven Grundgebilden sind ja die Elemente einzeln einander zugeordnet. Wenn nun zwei solche einander entsprechende Elemente vermöge der Operationen des Projizierens oder Schneidens ein neues Element festlegen, so bestimmen die beiden projektiven Grundgebilde — vorausgesetzt, daß man alle die unendlich vielen entsprechenden Elemente zusammen nimmt — eine unendliche Anzahl neuer Elemente, also ein neues geometrisches Gebilde, das wir als „Erzeugnis" der projektiven Grundgebilde bezeichnen.

Hat man z. B. zwei projektive Strahlenbüschel, die in einer Ebene gelegen sind, so kann man jeden Strahl des einen Büschels mit dem ihm entsprechenden des andern Büschels zum Schnitt bringen und man erhält so zunächst lauter einzelne Punkte, die aber um so mehr einen ununterbrochenen Linienzug, also eine „Kurve" bilden werden, je mehr man die Strahlen in den Büscheln verdichtet.

Zwei beliebig im Raume gelegene projektive Strahlenbüschel dagegen würden zunächst kein neues Gebilde „erzeugen“, weil zwei im Raum befindliche Gerade kein neues Element festlegen.

Hat man zwei projektive Punktreihen, so kann man jeden Punkt mit seinem entsprechenden durch eine Gerade verbinden und erhält so als Erzeugnis ein System von unendlich vielen Geraden. Dies ist möglich, gleichgültig, ob die Punktreihen in einer Ebene liegen oder beliebig im Raume. Das Erzeugnis ist freilich in beiden Fällen ein ganz verschiedenes. Denn bei der ersten Annahme liegen alle diese Verbindungsgeraden in der gleichen Ebene, bei der zweiten sind sie im Raume angeordnet. Auf diese Weise kann man neue geometrische Gebilde erzeugen, und dies sind gerade die einfachsten und wichtigsten der Geometrie und die nämlichen, zu denen man auch durch die anderen mathematischen Untersuchungsmethoden geführt wird. Wir betrachten zunächst das Erzeugnis zweier projektiver Strahlenbüschel in der gleichen Ebene. Dies ist, wie bereits erwähnt, eine Kurve. Daher müssen wir einige auf diesen Gegenstand sich beziehende Bemerkungen vorausschicken.

Ordnung und Klasse einer Kurve.

58. Unter einer „ebenen Kurve“ oder kurz einer „Kurve“ wollen wir einen ununterbrochenen Linienzug verstehen, dessen einzelne, alle in einer Ebene befindliche Punkte sich nach einem mathematischen Gesetze bestimmen*). In der rechnenden (analytischen) Geometrie

*) Auf die genaueren, zum Teil schwierigen Definitionen, wie sie nur die Analysis zu liefern imstande ist, können wir hier nicht eingehen.

teilt man die Kurven ein nach der Natur der Gleichung, durch welche sie, etwa in rechtwinkeligen Koordinaten x, y, dargestellt werden. Diese Gleichung kann durch eine „transzendente" Funktion der Variabeln gegeben werden — „transzendente Kurven", oder durch eine „algebraische" Funktion — „algebraische" Kurven. Die Aufgabe, die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit einer Kurve zu bestimmen, führt dann auf eine Gleichung, deren Wurzeln, sofern sie reell sind, die geometrisch in die Erscheinung tretenden Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve liefern; etwaigen imaginären Wurzeln dagegen entsprechen keine geometrisch sichtbaren Schnittpunkte. Ist die Kurvengleichung transzendent, so erhält man auf einer beliebigen Geraden im allgemeinen unendlich viele Schnittpunkte mit der Kurve, da auch die Gleichung für die Schnittpunkte dann transzendent sein wird. Liegt eine algebraische Kurvengleichung vor vom Grade n (bei der also die Summe der Exponenten von x und y in jedem Term n nicht übersteigt, aber mindestens einmal erreicht), so ist auch die Gleichung zur Bestimmung der Schnittpunkte der Kurve mit einer Geraden algebraisch und vom n^{ten} Grad. Diese Zahl n nennen wir die „Ordnung" der Kurve ohne Rücksicht darauf, ob die Wurzeln der letzteren Gleichung reell oder (paarweise) komplex sind. Natürlich kann dann auch die Zahl der reellen Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit einer solchen Kurve n^{ter} Ordnung nie größer, sondern höchstens $= n$ sein. Doch braucht die Zahl von n reellen Schnittpunkten mit einer Geraden nicht erreicht zu werden. Es kann vielmehr vorkommen, daß, n z. B. als gerade vorausgesetzt, eine beliebige Gerade immer nur $n - 2$ oder $n - 4$ usw. reelle Schnittpunkte mit der Kurve n^{ter} Ordnung liefert.

Um zu dem Begriff der Tangente einer Kurve zu gelangen, sei P ein Punkt einer Kurve, P_1 ein anderer Punkt derselben. Der Punkt P_1 rückt auf der Kurve gegen P hin. Dann kann man immer die Verbindungslinie PP_1 zeichnen. Je mehr sich nun P_1 dem Punkte P nähert, um so mehr nimmt die Verbindungslinie PP_1 eine bestimmte Grenzlage, die der Tangente in P, an, die erreicht wird, wenn P_1 mit P zusammenfällt. Die Differentialrechnung lehrt durch die Rechnung diese Tangente zu ermitteln, sofern die Funktion, deren geometrisches Bild die gegebene Kurve ist, die nötigen Voraussetzungen erfüllt. Eine Kurve bestimmt also auch eine unendliche Anzahl von geraden Linien, ihre Tangenten. Jede Tangente berührt im „Berührungspunkt" die Kurve.

Ist umgekehrt eine Reihe von unendlich vielen Geraden gegeben, die ununterbrochen (stetig) aufeinander folgen, so ist auch dadurch eine Kurve bestimmt, die von diesen Geraden als Tangenten „umhüllt" wird (Fig. 35). Halten wir eine der Geraden, etwa t fest, und wählen eine zweite, etwa t_1, näher und näher an t, so nähert sich der Schnittpunkt von t und t_1 mehr und mehr einem bestimmten Punkt auf t, den er erreicht, wenn t_1 mit t zusammenfällt. Dieser Punkt ist der Berührungspunkt T von t mit der umhüllten Kurve. Von den durch T an die Kurve gehenden Tangenten haben sich also zwei in der Tangente t vereinigt.

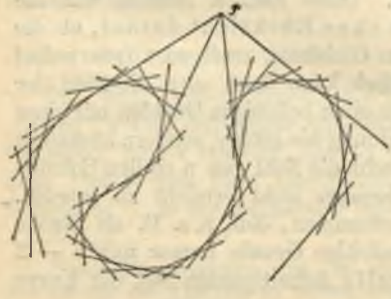

Fig. 35.

Die Aufgabe, die Tangenten einer algebraischen Kurve zu bestimmen, die durch einen beliebigen Punkt P in der Ebene der Kurve gehen (Fig. 35), führt rechnerisch auf eine gewisse Gleichung. Den Grad dieser Gleichung bezeichnet man als die „Klasse" der Kurve und zwar in rein analytischem Sinne, also ohne Rücksicht auf die Realität dieser Tangenten. Diese Zahl ist dann auch wieder eine obere Grenze für die Anzahl der reellen Tangenten, die durch einen Punkt an eine Kurve gehen können. An eine Kurve ν^{ter} Klasse können also auch von keinem Punkte aus mehr als ν reelle Tangenten gezogen werden.

Die Kurve 2. Ordnung.

59. Betrachten wir jetzt das Erzeugnis zweier projektiver Strahlenbüschel S und S_1 in der gleichen Ebene.

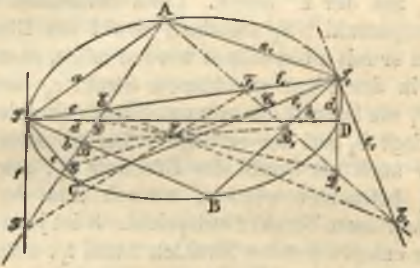

Fig. 36.

Die projektive Beziehung derselben sei festgelegt durch die drei Paare entsprechender Strahlen a, a_1, b, b_1, c, c_1, welche sich bezüglich in **A**, **B**, **C**, schneiden (Fig. 36)*). Um weitere Punkte der von den Büscheln erzeugten Kurve zu erhalten, konstruieren wir noch andere entsprechende

*) Man lege sich, wie immer, die Figur selbst an.

Strahlen der beiden Büschel nach der in 33. (Fig. 23) gegebenen Methode. Wir wählen zwei Gerade g und g_1 beliebig durch **A**, bringen g mit a, b, c in A, B, C, g_1 mit a_1, b_1, c_1 in A_1, B_1, C_1 zum Schnitt; dann liefern BB_1 und CC_1 in ihrem Schnittpunkt das Zentrum P der Perspektivität für die Punktreihen auf g und g_1.

Zu einem beliebigen Strahl d des Büschels S finden wir dann den entsprechenden d_1 im Büschel S_1 gemäß der Vorschrift, daß der Schnittpunkt D von d und g mit dem Schnittpunkt D_1 von d_1 und g_1 auf einer Geraden durch P liegen muß. Die Strahlen d und d_1 schneiden sich in einem weiteren Punkt **D** der erzeugten Kurve, die wir kurz mit k^2 bezeichnen wollen und von der wir auf diese Weise beliebig viel Punkte zeichnen können.

Wir behaupten nun, daß auch die Büschelmittelpunkte S und S_1 auf der k^2 liegen. Denn betrachten wir den Verbindungsstrahl SS_1 als einen Strahl des Büschels S, weswegen er mit e bezeichnet werden möge, so entspricht ihm der in der Figur gezeichnete Strahl e_1 und es erscheint S_1 als Schnitt der entsprechenden Strahlen e und e_1, also liegt S_1 auf der erzeugten Kurve. Ebenso kann SS_1 aber auch als Strahl des Büschels S_1, also als ein Strahl f_1 betrachtet werden, wonach ihm der in der Figur konstruierte Strahl f entspricht. S ist jetzt Schnittpunkt der entsprechenden Strahlen f und f_1, mithin ebenfalls ein Punkt von k^2.

Die Kurve k^2 ist ferner von der 2. Ordnung, d. h. eine beliebige Gerade l schneidet sie im allgemeinen in zwei Punkten. Um dies zu beweisen, konstruieren wir in einer eigenen, neuen Figur die Schnittpunkte A, B, C von l mit den Strahlen a, b, c und die Schnittpunkte A_1, B_1, C_1 von l mit a_1, b_1, c_1. Denken wir uns die beiden projektiven Büschel S und S_1 mit l geschnitten, so sind die auf l entstehenden Punktreihen A, B, C ... und A_1, B_1, C_1 ... ebenfalls projektiv. Ist M ein Doppelpunkt dieser beiden Punktreihen, so schneiden sich in ihm entsprechende Strahlen S M und S_1 M der beiden Büschel, folglich liegt ein solcher Doppelpunkt auf der k^2. Andererseits muß ein Schnittpunkt von l mit k^2 notwendig einen Doppelpunkt der projektiven Punktreihen liefern. Folglich liegen auf der Geraden l so viel Schnittpunkte mit der Kurve k^2, als Doppelpunkte der beiden projektiven Punktreihen vorhanden sind, d. h. zwei, die natürlich reell oder nicht vorhanden (imaginär) oder in einem Punkte vereinigt sein können. Die Kurve k^2 ist also von der 2. Ordnung. Wir nennen sie wohl auch eine „Punktreihe 2. Ordnung". Die wirkliche Durchführung der Konstruktion der Schnittpunkte auf l folgt später als Aufgabe 26 (S. 112).

Kehren wir nun wieder zu der Figur 36 zurück. Jede durch S gehende Gerade wie z. B. d hat also mit der k^2 außer S noch **einen** Punkt gemein und zwar ist dies **der** Punkt **D**, wo d von dem entsprechenden Strahl d_1 getroffen wird. Betrachten wir nun aber den Strahl f, so wird **dieser** Strahl von dem entsprechenden Strahl f_1 wieder in S getroffen: es fallen mithin für den Strahl f die **beiden** Schnittpunkte mit der k^2 nach S, demnach ist f die Tangente in S an die Kurve k^2. Ebenso folgert man, daß der Strahl e_1 die Kurve k^2 in S_1 berührt.

Zusammenfassend gelangen wir zu folgendem

Satz 30. „Das Erzeugnis zweier projektiver, in der gleichen Ebene befindlicher Strahlenbüschel ist eine Kurve 2. Ordnung, welche auch durch die Büschelmittelpunkte hindurchgeht und in diesen diejenigen Strahlen zu Tangenten hat, welche dem Verbindungsstrahl der Mittelpunkte bezüglich entsprechen."

Weitere Sätze über die Kurve 2. Ordnung.

60. Die Punkte S und S_1 nahmen bis jetzt eine ausgezeichnete Stellung ein gegenüber den anderen Punkten der k^2. Trotzdem spielen sie auf dieser Kurve keine besondere Rolle, vielmehr können, wie wir jetzt zeigen wollen, irgend zwei beliebige Punkte von k^2 als Mittelpunkte projektiver Büschel genommen werden, welche die Kurve k^2 erzeugen.

Es seien wieder (Fig. 37) die beiden projektiven Strahlenbüschel S und S_1 gegeben durch die Strahlenpaare a, a_1, b, b_1, c, c_1, welche die Punkte **A**, **B**, **C** liefern, ferner seien durch **A** die Hilfsgeraden g und g_1 gezeichnet und das Zentrum P der perspektiven Punktreihen auf g und g_1 konstruiert.

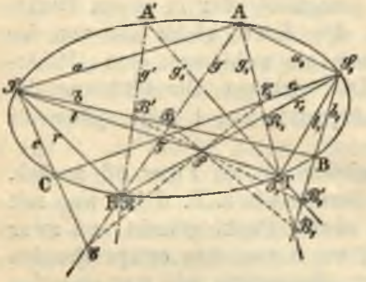

Fig. 37.

Wenn wir dann S P ziehen, so ist der Schnittpunkt **T** von S P mit g_1 ein Punkt der erzeugten Kurve k^2 und ebenso der Punkt **R**, in welchem g von S_1 P getroffen wird. Die Richtigkeit dieser Behauptungen ergibt sich direkt durch die Bemerkung, daß S**T** und S_1**T**, ebenso S**R** und S_1**R** gemäß unserer Konstruktion entsprechende Strahlen t, t_1 bzw. r, r_1 sind. — Man erhält dann die nämliche projektive Beziehung der Büschel S und S_1, also auch die gleiche Kurve k^2, wenn man statt von den Strahlenpaaren a, a_1, b, b_1, c, c_1 ausgeht von den drei Strahlenpaaren b, b_1, r, r_1, t, t_1.

Wir denken uns nun, wir hätten die Kurve k^2, ausgehend von den projektiven Büscheln S und S_1, konstruiert. Darauf greifen wir auf ihr drei Punkte beliebig heraus, die wir **B**, **T**, **R** nennen, während die nach ihnen laufenden Strahlen der Büschel S und S_1 bzw. b, b_1, t, t_1, r, r_1 heißen mögen, und stellen uns jetzt die Aufgabe, die Figur 37 zu rekonstruieren, also zwei Gerade g und g_1 zu finden, welche die Konstruktion der projektiven Beziehung vermitteln.

Ziehen wir S**T** und S_1**R**, so liefert ihr Schnittpunkt einen Punkt P. Durch P wollen wir jetzt irgend eine Gerade ziehen, welche die Strahlen b und b_1 bezüglich in B' und B_1' trifft. Wir zeichnen den Schnittpunkt **A'** von **R**B' und **T**B_1'. Bezeichnen wir die Geraden **RA'** und **TA'** bzw. mit g' und g_1', so können wir unter Benutzung von P als Perspektivitätszentrum die Büschel S und S_1 jetzt projektiv aufeinander beziehen, und diese projektive Beziehung muß notwendig die gleiche sein, wie die ursprünglich gegebene, da sie in drei Paaren entsprechender Strahlen b, b_1, t, t_1, r, r_1 mit ihr übereinstimmt. Dann schneiden sich aber in **A'** entsprechende Strahlen der gegebenen projektiven Büschel, d. h. **A'** liegt auch auf der Kurve k^2.

Nun war aber die Gerade durch P, welche B' und B_1' auf b und b_1 ausschnitt, noch ganz beliebig. Lassen wir sie den Büschel P durchlaufen, so beschreiben B' und B_1' auf b und b_1 zueinander perspektive Punktreihen. Die Strahlen **R**B' und **T**B_1', welche diese Punktreihen je aus **R** und **T** projizieren, werden also projektive Strahlenbüschel durchlaufen und entsprechende Strahlen dieser Büschel schneiden sich immer in Punkten **A'** der Kurve k^2. Folglich werden die Punkte **A'** aus **R** und **T** durch projektive Büschel projiziert.

Die Rechnung zeigt nun ferner, daß die durch projektive Strahlenbüschel erzeugte Kurve die allgemeinste Kurve 2. Ordnung ist. Wir haben also den

Satz 31. „Die Punkte einer Kurve 2. Ordnung werden aus zwei beliebigen ihrer Punkte durch projektive Strahlenbüschel projiziert."

Zusatz 1. Da wir in den Büschelmittelpunkten S und S_1 nach 59. die Tangenten an die Kurve 2. Ordnung konstruieren konnten, so ist es uns jetzt auch möglich, in einem beliebigen Punkt der Kurve die Tangente zu zeichnen, indem wir den Mittelpunkt des einen erzeugenden Büschels in diesen Punkt verlegen.

Zusatz 2. Der Kreis ist auch eine Kurve 2. Ordnung und besitzt die in Satz 31 zum Ausdruck gebrachte Eigenschaft (44.), die wir übrigens bei der Steinerschen Konstruktion bereits benutzten (45.). Da aber diese Konstruktion bloß diese Eigenschaft voraussetzte, so könnten wir dazu statt des Kreises auch eine beliebige Kurve 2. Ordnung benutzen.

Bestimmung einer Kurve 2. Ordnung.

61. Aus der Erzeugung der Kurve 2. Ordnung durch projektive Büschel folgt auch leicht, daß es eine und nur eine solche Kurve gibt, welche fünf beliebig in einer Ebene gelegene Punkte 1, 2, 3, 4, 5 enthält. Denn wählen wir z. B. die Punkte 1 und 2 als Büschelmittelpunkte, so müssen den Strahlen 13, 14, 15 der Reihe nach entsprechen die Strahlen 23, 24, 25, wodurch die projektive Beziehung der Büschel gerade festgelegt ist. Die Büschel 1 und 2 erzeugen dann die durch die fünf Punkte gehende Kurve 2. Ordnung. Es kann keine zweite solche Kurve geben. Denn auch eine solche zweite Kurve würde aus 1 und 2 durch projektive Büschel projiziert

und diese projektive Beziehung muß mit der eben bestimmten notwendig zusammenfallen, da sie drei Paare entsprechender Strahlen mit ihr gemein hat. Also folgt

Satz 32. „Durch fünf beliebige Punkte einer Ebene geht eine und stets eine Kurve 2. Ordnung."

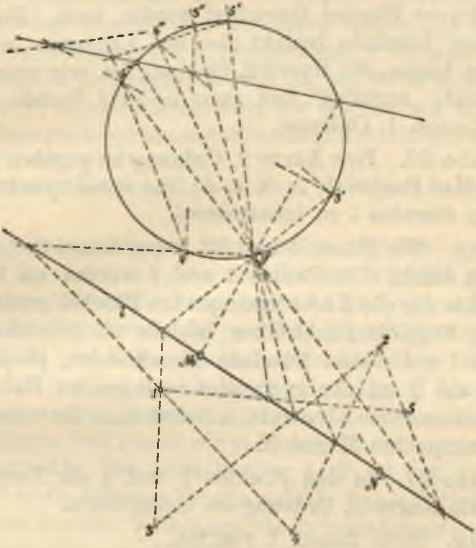

Fig. 38.

Würden von den fünf gegebenen Punkten drei, etwa die Punkte 3, 4, 5 in einer Geraden p liegen, so wären die Strahlenbüschel aus 1 und 2 perspektiv und die Gerade p wäre die Achse der Perspektivität. Das Erzeugnis dieser perspektiven Strahlenbüschel 1 und 2 bestände zunächst in der Geraden p, da sich ja entsprechende

Strahlen stets auf p begegnen. Weiter gehört aber auch die Verbindungslinie 12 der Büschelmittelpunkte diesem Erzeugnis an. Denn in ihr fallen zwei entsprechende Strahlen der perspektiven Büschel ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammen, so daß jeder Punkt dieser Linie als Schnittpunkt dieser beiden entsprechenden Strahlen der perspektiven Büschel betrachtet werden kann. Bei perspektiven Büscheln besteht also das Erzeugnis in zwei geraden Linien, die Kurve 2. Ordnung ist, wie man sich ausdrückt, „zerfallen“ und zwar in zwei Gerade, d. h. zwei Kurven 1. Ordnung.

Aufgabe 26. Eine Kurve 2. Ordnung ist gegeben durch die fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5; die Schnittpunkte mit einer Geraden l zu konstruieren.

Lösung. Wir führen den in 59. angegebenen Gedankengang durch. Die Punkte 1 und 2 werden als Mittelpunkte der die Kurve erzeugenden Büschel genommen (Fig. 38); die Punktreihen, welche die gegebene Gerade l auf diesen Büscheln ausschneidet, projizieren wir aus S auf den gezeichnet vorliegenden Hilfskreis. Die Steinersche Konstruktion liefert dann die verlangten Schnittpunkte M und N.

Aufgabe 27. In den Punkten 1 und 4 die Tangenten an die Kurve 2. Ordnung zu konstruieren.

Lösung. Siehe Zusatz 1 von 60.

§ 22. Der Satz von Pascal.

Gegenseiten eines Sechsecks.

62. Aus irgend sechs Punkten in einer Ebene kann man in sehr verschiedener Weise Sechsecke bilden. Verteilt man die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 in irgend einer Anordnung auf die sechs Punkte, so ist dadurch das Sechseck

1 2 3 4 5 6 festgelegt, dessen Ecken in der Reihenfolge der Ziffern durchlaufen werden. In einem solchen Sechseck, dessen Seiten sich im übrigen noch ganz beliebig schneiden dürfen, kann man dreimal je zwei Seiten einander zuordnen, nämlich die Seiten 12 und 45, dann 23 und 56, endlich 34 und 61. Wir nennen die zwei Seiten eines solchen Paares, zwischen denen immer vier Seiten des Sechseckes gelegen sind, „Gegenseiten". Schneiden sich 12 und 45 in X, 23 und 56 in Y, 34 und 61 in Z, so sind also X, Y, Z die Schnittpunkte der Gegenseiten und für jede Numerierung kann man diese drei Punkte konstruieren.

Das einer Kurve 2. Ordnung eingeschriebene Sechseck.

63. Betrachten wir jetzt in Figur 37 das Sechseck der auf der Kurve k^2 gelegenen Punkte **ATSBS$_1$R**, das wir in dieser Reihenfolge mit 1 2 3 4 5 6 numerieren. Dann sind in ihm Gegenseiten **AT** und **BS$_1$**, ferner **TS** und **S$_1$R**, endlich **SB** und **RA**. Die Schnittpunkte dieser Gegenseiten sind der Reihe nach B_1, P, B und nach der Figur liegen diese drei Punkte auf einer Geraden. Vermöge dieser Eigenschaft fanden wir ja immer andere Punkte **A′**... der Kurve k^2. Die sechs Punkte **A**, **T**, ..., **R** können aber als sechs beliebige Punkte auf der Kurve 2. Ordnung betrachtet werden. Würde man sie in irgend einer anderen Weise numerieren, so könnte man auch wieder die Punkte, auf welche die Zahlen 3 und 5 fallen, als Mittelpunkt der die Kurve erzeugenden Strahlenbüschel nehmen, die Punkte mit den Ziffern 2 und 6 ließen wir die Rolle der Punkte **R** und **T** spielen usw. Wir erhalten dann ein neues Sechseck, aber auch in diesem müssen wiederum die Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden liegen; demnach ergibt sich der

Satz 33. „Sind sechs beliebige Punkte auf einer Kurve 2. Ordnung gegeben und numeriert man sie in irgend einer Weise zu einem Sechseck, so liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseiten dieses Sechsecks auf einer Geraden."

Dies ist der wichtigste Lehrsatz von Pascal, den dieser, 16 Jahre alt, im Jahre 1640 veröffentlichte. Ein Sechseck, in dem die Gegenseitenschnittpunkte auf einer Geraden liegen, heißt auch ein Pascalsches Sechseck und diese Gerade die Pascalsche Linie (P. L.).

Wenn ferner bei der in 60. gegebenen Konstruktion die Punkte A', ..., die man für verschiedene durch P gehende Gerade erhielt, stets auf der Kurve 2. Ordnung k^2 lagen, so liefert dieses offenbar den

Satz 34. „Gehören in einem Sechseck, das irgendwie numeriert ist, die Schnittpunkte der Gegenseiten einer Geraden an, so liegen die sechs Ecken des Sechsecks auf einer Kurve 2. Ordnung."

Es geht also die durch fünf der Ecken des Sechseckes bestimmte Kurve 2. Ordnung dann von selbst auch durch die letzte Ecke des Sechsecks. Ein Pascalsches Sechseck ist mithin stets einer Kurve 2. Ordnung eingeschrieben. Wenn ferner bei irgend einer Numerierung in einem Sechseck die Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden liegen, so hat das Sechseck diese Eigenschaft bei jeder möglichen Numerierung.

Spezialisierungen des Pascalschen Satzes.

64. Aus dem Satze von Pascal können wir noch andere, speziellere Sätze ableiten. Lassen wir von den Ecken des der Kurve eingeschriebenen Sechsecks die Ecke 2 der Ecke 1 auf der Kurve näher und näher rücken, so fällt schließlich 2 mit 1 zusammen, so daß man bloß

noch ein Fünfeck hat, als Verbindungsseite 1 2 aber müssen wir die Tangente in 1 betrachten. Wie sich der Pascalsche Satz dann modifiziert, dürfte aus Figur 39a zu entnehmen sein.

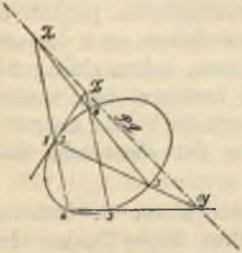

Fig. 39a.

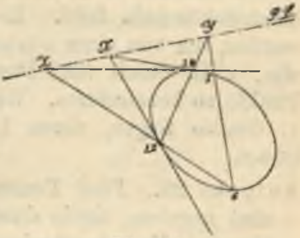

Fig. 39b.

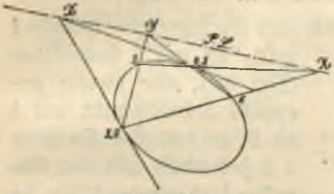

Fig. 39c.

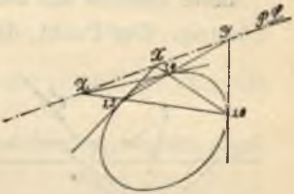

Fig. 39d.

Ebenso können wir zweimal zwei Ecken des Sechsecks zusammenrücken lassen und erhalten dadurch zwei in den Figuren 39b und 39c dargestellte Sätze.

Wenn endlich dreimal zwei Ecken zusammenfallen, so ergibt sich der in Figur 39d zur Anschauung gebrachte

Satz 35. „Hat man ein einer Kurve 2. Ordnung eingeschriebenes Dreieck, so liegen die Schnittpunkte jeder Dreiecksseite mit der Tangente in der gegenüberliegenden Ecke in einer Geraden.“

Anwendungen des Pascalschen Satzes.

65. Der Satz von Pascal gab seiner Ableitung nach nur einen anderen, bequemeren Ausdruck für die Konstruktion, vermittels welcher man entsprechende Strahlen in den eine Kurve 2. Ordnung erzeugenden projektiven Strahlenbüscheln fand. Er kann daher auch benutzt werden, um von einer solchen Kurve, sofern sie irgendwie, z. B. durch fünf Punkte, bestimmt ist, weitere Punkte zu konstruieren. Wir lassen die beiden Aufgaben 1. Grades folgen, deren Lösung der Pascalsche Satz leistet.

Aufgabe 28. Fünf Punkte einer Kurve 2. Ordnung sind gegeben, sowie durch einen dieser Punkte eine Gerade. Man konstruiere den zweiten Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kurve 2. Ordnung.

Lösung. Der Punkt, durch den die gegebene Gerade l geht, sei mit 1 bezeichnet (Fig. 40), der zweite gesuchte Schnittpunkt auf l sei 2, so daß also die Seite 1 2 jedenfalls mit der Geraden l zusammenfällt; die übrigen gegebenen Punkte mögen mit 3, 4, 5, 6 bezeichnet werden. Das Sechseck, welches der gesuchte Punkt 2 mit den gegebenen Punkten bildet, ist ein Pascalsches. Die Pascalsche Linie (P. L.) können wir konstruieren als Verbindungslinie der Punkte X und Z, wobei X Schnittpunkt von 1 2 und 4 5, Z Schnittpunkt von 3 4 und 6 1. Auf ihr müssen sich auch schneiden 2 3 und 5 6. Die letztere Linie liefert also

Fig. 40.

auf der P. L. den Punkt Y und 3 Y schneidet den gesuchten Punkt 2 auf 1 aus.

Aufgabe 29. Von einer Kurve 2. Ordnung sind fünf Punkte gegeben; in einem derselben die Tangente an die Kurve zu konstruieren.

Lösung. In der Absicht, uns ein Pascalsches Sechseck bzw. Fünfeck zu numerieren, bezeichnen wir den Punkt, in dem die Tangente konstruiert werden soll, mit 1, 2 (Fig. 41); die anderen gegebenen Punkte mit 3, 4, 5, 6. Dann kann man wieder die Punkte Y und Z der Pascalschen Linie, also diese selbst konstruieren. Auf ihr schneidet 4 5 den Punkt X aus, durch den nach den Erörterungen von 61. die Tangente 1 2 im Punkte 1 geht.

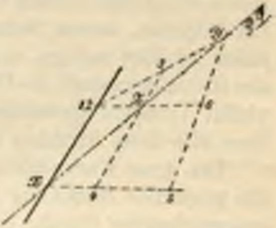

Fig. 41.

Eine andere Lösung der vorstehenden Aufgabe ergab sich aus 60. Zusatz 1.

Ganz in ähnlicher Weise behandelt man die beiden folgenden Aufgaben.

Aufgabe 30. Von einer Kurve 2. Ordnung sind vier Punkte gegeben und in einem derselben die Tangente; in einem der übrigen Punkte die Tangente an die Kurve zu konstruieren.

Aufgabe 31. Von einer Kurve 2. Ordnung sind drei Punkte gegeben und in zweien derselben die Tangenten an die Kurve; im dritten Punkte die Tangente zu konstruieren.

§ 23. Das Erzeugnis zweier projektiver, in der gleichen Ebene gelegener Punktreihen.

Die Kurve 2. Klasse.

66. Zwei in einer Ebene befindliche, projektiv aufeinander bezogene Punktreihen g und g_1 liefern ein Erzeugnis, sofern wir je zwei entsprechende Punkte derselben durch eine Gerade verbinden. Wir erhalten zunächst ein Polygon, dessen Seiten von solchen Verbindungsgeraden gebildet werden, und schließlich, nach Ausführung des Grenzübergangs, als Umhüllungsgebilde der unendlich vielen Verbindungsstrahlen eine Kurve, deren Tangenten eben alle diese Strahlen sind.

Um diese Kurve näher zu untersuchen, sei (Fig. 42) die projektive Beziehung von g und g_1 durch drei Paare entsprechender Punkte gegeben, A, A_1, B, B_1, C, C_1, welche verbunden drei Tangenten a, b, c der erzeugten Kurve liefern. Weitere Tangenten derselben finden wir unter Benutzung der in 32. (Figur 22) angegebenen Methode zur Konstruktion entsprechender Punkte der projektiven Punktreihen. Es werden also auf a die Punkte S und S_1 beliebig angenommen, sodann aus ihnen g und g_1 durch perspektive Strahlenbüschel projiziert, welche als perspektiven Schnitt die Gerade p liefern.

Zu einem beliebigen Punkte D auf g finden wir nun den entsprechenden D_1 auf g_1 mit Rücksicht darauf, daß sich SD und S_1D_1 wieder in einem Punkte **D** von p schneiden müssen. DD_1 ist dann eine weitere Tangente der erzeugten Kurve.

Unter Anwendung der gleichen Konstruktion ermitteln wir jetzt auch die Punkte E_1 und F, welche dem Schnittpunkt von g und g_1 entsprechen, wenn wir ihn als E und F_1 bezeichnen. Es treten dabei die Hilfspunkte **E** und **F** auf. Dann ist aber g die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte F und F_1, während g_1 die entsprechenden Punkte E und E_1 verbindet. Also sind auch g und g_1 Tangenten der erzeugten Kurve, die wir $\varkappa^2$ nennen wollen.

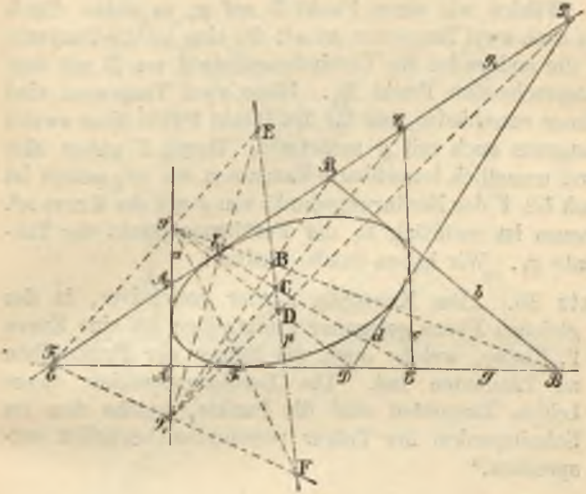

Fig. 42.

Diese Kurve ist von der 2. Klasse, d. h. durch einen beliebigen Punkt P gehen, algebraisch gesprochen, zwei ihrer Tangenten. Dies erkennen wir an einer *eigenen* Figur in folgender Weise. Um die durch P gehenden Tangenten der $\varkappa^2$ zu finden, haben wir bloß zuzusehen, wie oft es vorkommen kann, daß eine Verbindungslinie entsprechender Punkte von g und g_1 durch P läuft.

Projizieren wir nun aber die Punktreihen g und g_1 aus P je durch einen Strahlenbüschel, so haben die Doppelstrahlen dieser projektiven Büschel die Eigenschaft, Tangenten durch P an die Kurve $\varkappa^2$ zu liefern, und nur für diese Doppelstrahlen tritt dies ein. Die Kurve $\varkappa^2$ ist also in der Tat von der 2. Klasse.

Wählen wir einen Punkt D auf g, so gehen durch ihn auch zwei Tangenten an $\varkappa^2$: die eine ist die Tangente g, die andere ist die Verbindungslinie d von D mit dem entsprechenden Punkt D_1. Diese zwei Tangenten sind immer verschieden, nur für den Punkt F fällt diese zweite Tangente auch mit g zusammen. Durch F gehen also zwei unendlich benachbarte Tangenten der $\varkappa^2$, mithin ist nach 58. F der Berührungspunkt von g mit der Kurve $\varkappa^2$. Ebenso ist natürlich E_1 der Berührungspunkt der Tangente g_1. Wir haben damit erhalten:

Satz 36. „Das Erzeugnis zweier projektiver, in der gleichen Ebene gelegener Punktreihen ist eine Kurve 2. Klasse, welche auch die Träger der Punktreihen zu Tangenten hat. Die Berührungspunkte dieser beiden Tangenten sind die Punkte, welche den im Schnittpunkte der Träger vereinigten bezüglich entsprechen.“

Weitere Eigenschaften der Kurve 2. Klasse.

67. In den soeben durchgeführten Betrachtungen waren die Tangenten g und g_1, die Träger der projektiven Punktreihen, vor den übrigen Tangenten wie a, b, c, ... ausgezeichnet. Wir wollen nun zeigen, daß irgend zwei Tangenten der Kurve $\varkappa^2$ die Rolle von g und g_1 übernehmen können, indem die übrigen Tangenten auch auf ihnen projektive Punktreihen ausschneiden.

Konstruieren wir wieder (Fig. 43), ausgehend von drei Paaren A, A_1, B, B_1, C, C_1 entsprechender Punkte, den perspektiven Schnitt p. Dieser treffe g und g_1 in zwei Punkten, die als Hilfspunkte **Q** und **R** betrachtet

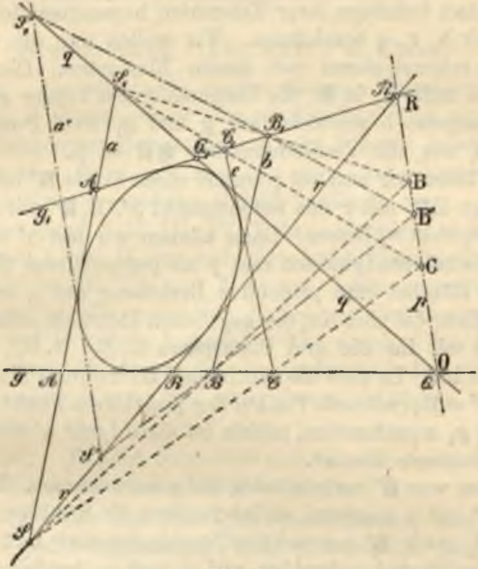

Fig. 43.

werden mögen. Dann erkennt man, daß S_1**Q** eine Tangente q der erzeugten Kurve (Q fällt mit **Q** zusammen, während Q_1 der Schnitt von S_1**Q** und g_1 ist), und ebenso ist S**R** eine Tangente r von $\varkappa^2$.

Statt nun von g, g_1, a, b, c als Tangenten der erzeugten Kurve $\varkappa^2$ auszugehen, können wir auch g, g_1, b, r, q zur Bestimmung von $\varkappa^2$ benutzen, da ja r und q in gleicher Weise entsprechende Punkte der gegebenen projektiven Punktreihen g und g_1 ausschneiden.

Denken wir uns jetzt die Kurve $\varkappa^2$ tangentenweise konstruiert, indem wir von g, g_1, a, b, c ausgehen. Dann seien drei beliebige ihrer Tangenten herausgegriffen, die wir mit b, r, q bezeichnen. Wir wollen nun die vorige Figur rekonstruieren mit diesen Elementen. Die Tangente r trifft g_1 in **R**, die Tangente q den Träger g in **Q**, die Tangente b schneidet auf g und g_1 zwei Punkte B und B_1 aus, die Verbindungslinie **QR** sei p.

Wählen wir nun auf p irgend einen Punkt **B**′ beliebig, so möge B**B**′ mit r den Schnittpunkt S′, B_1**B**′ mit q den Schnittpunkt S_1' liefern. Dann können wir mit S′ und S_1' als Büschelmittelpunkten und p als perspektivem Schnitt dieser Büschel eine projektive Beziehung auf g und g_1 herstellen, die aber mit der gegebenen identisch sein muß, da sie mit ihr die drei Punktpaare B, B_1, R, R_1, Q, Q_1 gemein hat. Es muß also auch die Verbindungslinie S′S_1' oder a′ entsprechende Punkte der projektiven Punktreihen g und g_1 ausschneiden, mithin ist diese Linie a′ ebenfalls eine Tangente von $\varkappa^2$.

Nun war **B**′ noch beliebig auf p anzunehmen. Lassen wir **B**′ auf p wandern, so beschreiben die Strahlen aus B und B_1 nach **B**′ perspektive Strahlenbüschel, und diese Strahlenbüschel schneiden auf r und q bezüglich die Punkte S′ und S_1' aus. Es müssen also auch die Punktreihen S′ und S_1' als Schnitte mit perspektiven Büscheln projektiv sein oder mit anderen Worten: die Geraden a′, die sämtlich Tangenten der Kurve $\varkappa^2$, schneiden auf den Tangenten r und q projektive Punktreihen aus.

Die Analysis ergänzt diese Betrachtungen, indem sie zeigt, daß j e d e Kurve 2. Klasse als Erzeugnis projektiver

Punktreihen dargestellt werden kann. Demnach ist bewiesen:

Satz 37. „Auf irgend zwei Tangenten einer Kurve 2. Klasse schneiden die übrigen Tangenten dieser Kurve projektive Punktreihen aus."

Bestimmung einer Kurve 2. Klasse.

68. Aus der eben nachgewiesenen Erzeugung der Kurven 2. Klasse ergibt sich unmittelbar, daß man sich fünf Tangenten einer solchen Kurve beliebig geben darf, daß es also stets eine und nur eine solche Kurve gibt, welche fünf vorgegebene Gerade berührt.

Denn sind I, II, III, IV, V diese Geraden, so wählen wir etwa I und II aus und ordnen die Punkte einander zu, welche III, IV und V je auf ihnen ausschneiden. Dadurch ist die projektive Beziehung der Punktreihen auf I und II gerade festgelegt. Die durch diese Punktreihen erzeugte Kurve ist die verlangte. Es gibt nur eine solche Kurve, wie man ebenso zeigt wie in 61., also folgt

Satz 38. „Es gibt eine und nur eine Kurve 2. Klasse, welche fünf beliebige Gerade berührt."

Gehen von den fünf gegebenen Geraden drei, etwa III, IV und V durch einen Punkt S, so werden die Punktreihen auf I und II perspektiv. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte bilden also den Strahlenbüschel S. Außerdem fallen aber in dem Schnittpunkt von I und II entsprechende Punkte E und E_1 der perspektiven Punktreihen auf I und II zusammen. Jede durch E gehende Linie kann mithin als eine Gerade gelten, welche entsprechende Punkte, nämlich E und E_1, verbindet. Es gehört also auch der Strahlenbüschel E dem Erzeugnis.

der perspektiven Punktreihen auf I und II an. Das Erzeugnis perspektiver Punktreihen besteht folglich in zwei Strahlenbüscheln, deren Strahlen je den Büschelmittelpunkt umhüllen. Die Kurve 2. Klasse ist in ein Punktpaar, d. h. in zwei „Kurven 1. Klasse“ zerfallen.

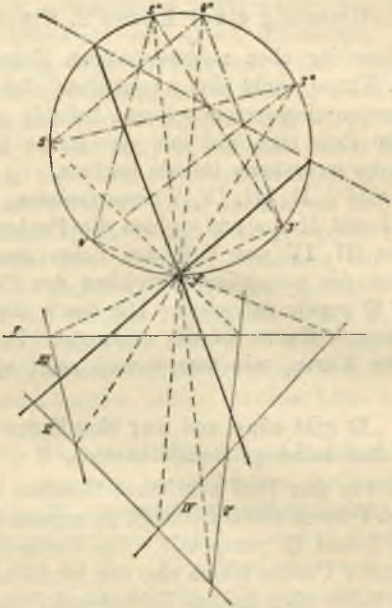

Fig. 41.

Aufgabe 32. Von einer Kurve 2. Klasse sind fünf Tangenten gegeben, man zeichne die durch einen Punkt S an die Kurve gehenden Tangenten.

Lösung. In Verfolgung des in 66. bereits erörterten Gedankengangs greifen wir zwei der gegebenen Tangenten, etwa I und II heraus (Fig. 44), markieren die Punktreihen, welche die drei übrigen Tangenten auf ihnen ausschneiden, und projizieren diese auf den Hilfskreis, von dem wir annehmen, daß er durch den gegebenen Punkt S gehe. Die Doppelstrahlen der dadurch entstehenden Strahlenbüschel, die nach 45. konstruiert sind, liefern die gesuchten Tangenten.

§ 24. Der Satz von Brianchon.

Gegenecken eines Sechsseits.

69. Irgend sechs Gerade in einer Ebene lassen sich in verschiedenster Weise zu einem Sechsseit zusammenfassen. Verteilen wir auf die sechs Geraden irgendwie die Nummern I, II, III, IV, V, VI und durchlaufen die Seiten in der Reihenfolge der Nummern, so sind als Schnittpunkte aufeinander folgender Seiten auch sechs Ecken bestimmt, nämlich der Schnittpunkt von I und II, den wir als Punkt (I, II) bezeichnen, der Punkt (II, III) usw., endlich der Punkt (VI, I). Es folgt also auf VI wieder I. (Zyklische Vertauschung.) Aus diesen sechs Ecken eines numerierten Sechsseits lassen sich drei Paare von „Gegenecken" bilden, die Ecke (I, II) und (VI, V), dann (II, III) und (V, VI), endlich (III, IV) und (VI, I). Je zwei solche Gegenecken können wir durch eine Gerade verbinden und erhalten so drei Verbindungslinien von Gegenecken, die wir in der angegebenen Reihenfolge x, y, z nennen.

Das einer Kurve 2. Klasse umschriebene Sechsseit.

70. Betrachten wir jetzt in Figur 43 das Sechsseit $aqgbg_1r$ und numerieren es in dieser Reihenfolge mit

I, II, III, IV, V, VI, so sind die Verbindungslinien der Gegenecken die drei Geraden S_1B_1, **QR**, BS, welche nach der Figur durch einen Punkt **B** gehen. Die sechs Seiten des Sechsseits dürfen als sechs beliebige Tangenten der Kurve 2. Klasse angesehen werden. Würde man sie in irgend einer andern Weise numerieren, so könnte man doch wieder die Tangenten, welche dann die Nummern III und V tragen, als erzeugende Punktreihen für die Kurve 2. Klasse benutzen, ferner könnte man die Tangente mit der Nummer I die Rolle der Tangente a spielen lassen usw., kurz man erhielte für das neue Sechsseit, das der anderen Numerierung entspricht, auch wieder einen (anderen) Punkt **B**, durch den die drei Verbindungslinien der Gegenecken hindurchgehen müßten. Es ist also bewiesen:

Satz 39. „Irgend sechs Tangenten einer Kurve 2. Klasse liefern, auf irgend eine Weise numeriert, ein der Kurve umschriebenes Sechsseit, in dem sich die Verbindungslinien der Gegenecken in einem Punkt schneiden."

Das ist der Lehrsatz von Brianchon, den dieser französische Gelehrte 1806 veröffentlichte. Den Punkt **B**, in dem sich die Verbindungslinien der Gegenecken schneiden, nennen wir den Brianchonschen Punkt (B. P.).

Aber auch eine Umkehrung dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Figur 43. Dort fanden wir ja weitere Tangenten a′ der Kurve 2. Klasse, indem wir immer Sechsseite konstruierten, für welche sich $S'B$ und $S_1'B_1$ in Punkten **B′** von **QR** begegneten. Wir können also auch behaupten:

Satz 40. „Wenn in einem irgendwie numerierten Sechsseit die Verbindungslinien der Gegenecken sich in einem Punkte schneiden, so ist das Sechsseit einer Kurve 2. Klasse umschrieben, d. h. die Kurve 2. Klasse, welche fünf dieser Seiten berührt, berührt von selbst auch die sechste Seite des Sechsseits."

Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, daß sich die Sätze von Pascal und Brianchon nach dem Gesetz der Dualität für die Ebene entsprechen.

Spezialisierungen des Brianchonschen Satzes.

71. Denken wir uns ein einer Kurve 2. Klasse umschriebenes Sechsseit gegeben und halten wir fünf

Fig. 45a.

Fig. 45b.

Fig. 45c.

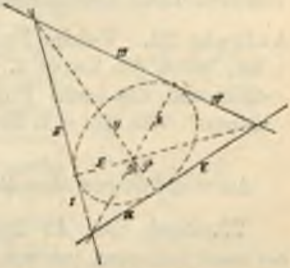

Fig. 45d.

seiner Seiten, etwa I, III, IV, V, VI fest, während wir die Seite II sich so ändern lassen, daß sie, stets Tangente der Kurve bleibend, sich der Seite I mehr und mehr nähert. Ist dann im Grenzfall II mit I zusammengefallen, so haben wir statt des Sechsseits ein

Fünfseit. Dagegen sind noch sechs Ecken vorhanden. Denn als Schnittpunkt von I und II müssen wir den Berührungspunkt der Tangente I mit der Kurve nehmen. Der Brianchonsche Satz läßt sich dann in entsprechender Weise für dies Fünfseit formulieren: es mag genügen, auf Figur 45a zu verweisen, die den Satz veranschaulicht. Ferner können wir in dem Sechsseit zweimal zwei Tangenten zusammenfallen lassen, wodurch wir aus dem Satze von Brianchon Sätze über das Vierseit erhalten, das einer Kurve 2. Klasse umschrieben ist. Die Figuren 45b und 45c werden hinreichen, um auch den Wortlaut derselben zu liefern. Fallen endlich dreimal zwei Tangenten zusammen, so erhalten wir (Fig. 45d) den

Satz 41. „Hat man ein einer Kurve 2. Klasse umschriebenes Dreieck, so gehen die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt."

Aufgabe 33. Welche Form nimmt der Pascalsche Satz an, wenn die Kurve 2. Ordnung in zwei Gerade zerfällt und die sechs Punkte zu je dreien auf ihnen liegen? Wie läßt sich der duale Satz beweisen? Vgl. 7.

Anwendungen des Brianchonschen Satzes.

72. Nach Satz 40 können wir das Brianchonsche Sechsseit benutzen, um von einer Kurve 2. Klasse weitere Tangenten zu konstruieren und die beiden folgenden Aufgaben zu behandeln.

Aufgabe 34. Von einer Kurve 2. Klasse kennt man fünf Tangenten und auf einer derselben einen Punkt P. Man soll die zweite, durch diesen Punkt gehende Tangente der Kurve zeichnen.

Lösung. Wir numerieren uns ein Brianchonsches Sechsseit. Die Tangente, auf der P liegt, sei I (Fig. 46), die gesuchte Tangente sei II, die übrigen gegebenen Tangenten erhalten die Nummern III, IV, V, VI. Dann ist P der Schnittpunkt (I, II). Die Linien x und z können wir zeichnen und sie liefern den Brianchonschen Punkt (B. P.). Durch ihn und (V, VI) geht y und diese Linie schneidet auf III einen Punkt aus, der mit P verbunden die gesuchte Tangente gibt.

Fig. 46.

Aufgabe 35. Eine Kurve 2. Klasse ist gegeben durch fünf Tangenten; den Berührungspunkt einer derselben zu bestimmen.

Lösung. Die Tangente, deren Berührungspunkt bestimmt werden soll, bezeichnen wir mit I und II (Fig. 47), die übrigen mit III ... VI. Dann kann man zwei der Verbindungslinien der Gegenecken, nämlich z und y zeichnen, deren Schnitt der Brianchonsche Punkt ist. Durch diesen und (IV, V) geht x und diese Linie schneidet auf I den Berührungspunkt T aus.

Fig. 47.

Ganz in ähnlicher Weise sind folgende Aufgaben zu behandeln:

Aufgabe 36. Von einer Kurve 2. Klasse sind fünf Tangenten gegeben; eine Tangente an die Kurve zu zu zeichnen, die parallel einer der gegebenen ist. Lösung wie Aufgabe 34, nur liegt P in unendlicher Ferne.

Aufgabe 37. Von einer Kurve 2. Klasse sind vier Tangenten gegeben und auf einer derselben ist ihr Berührungspunkt bekannt; man konstruiere die Berührungspunkte der anderen Tangenten.

Lösung. Brianchonscher Satz für ein Vierseit.

Aufgabe 38. Von einer Kurve 2. Klasse sind zwei Tangenten gegeben und ihre Berührungspunkte, sowie eine dritte Tangente; man zeichne deren Berührungspunkt.

§ 25. Identität der Kurven 2. Ordnung und 2. Klasse.

Die Mac-Laurinsche Konfiguration.

73. Hatten wir eine Kurve 2. Ordnung durch projektive Büschel erzeugt, so konnten wir in jedem ihrer Punkte die Tangente bestimmen. Von welcher Klasse ist nun die erzeugte Kurve 2. Ordnung?

Lag andererseits eine Kurve 2. Klasse vor als Erzeugnis projektiver Punktreihen, so war auf jeder Tangente ein Punkt, der Berührungspunkt, festgelegt. Von welcher Ordnung ist die von den Berührungspunkten gebildete Kurve?

Um diese naheliegenden Fragen zu beantworten, gehen wir aus von einer Kurve 2. Klasse, die durch vier Tangenten a, b, c, d und den Berührungspunkt A von a bestimmt sein möge (Fig. 48). Die Berührungspunkte B, C, D von b, c, d, die damit dann schon gegeben sind, wollen wir nun nicht wie in Aufgabe 37 mittels des Brianchonschen Satzes bestimmen, sondern unter Benutzung des Satzes 15 in 36. Für den vorliegenden Fall haben wir zu berücksichtigen, daß auf irgend zwei Tangenten einer Kurve 2. Klasse die übrigen Tangenten projektive Punktreihen ausschneiden, und ferner, daß die auf

Grund des angezogenen Satzes zu konstruierende Linie p_0 die Berührungspunkte der beiden Tangenten ausschneidet (66.). Die Tangenten a, b, c, d bilden nun ein vollständiges Vierseit. Es sei der Schnittpunkt von a und b mit M bezeichnet, also kurz (ab) = M, ebenso (cd) = M_1,

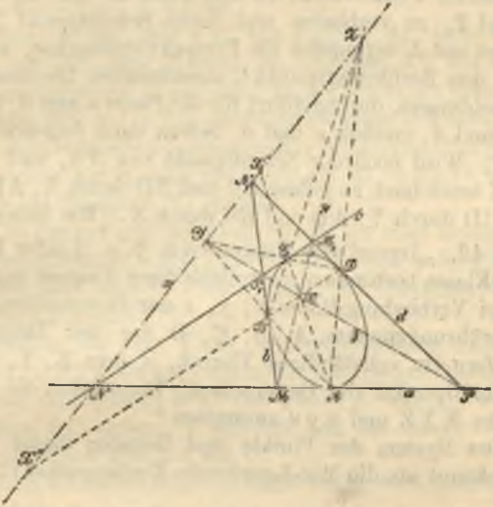

Fig. 48.

ferner (ac) = N, (bd) = N_1, endlich (ad) = P und (bc) = P_1, so daß N, N_1, M, M_1, P, P_1 die drei Paare von Gegenecken des Vierseites. Weiter bezeichnen wir die Verbindungslinie NN_1 mit x, MM_1 mit y, PP_1 mit z.

Greifen wir jetzt zunächst die beiden Tangenten a und b heraus, so schneiden die übrigen Tangenten c, d usw. auf a und b projektive Punktreihen aus und zwar entsprechen den Punkten N, P bezüglich die Punkte P_1, N_1.

Die Linie p_0 des Satzes 15 geht mithin durch den Schnittpunkt Y der Verbindungslinien PP_1 und NN_1 und außerdem durch A. Es schneidet also die Verbindungslinie AY auf b den Berührungspunkt B aus.

Betrachten wir in gleicher Weise a und c als Träger projektiver Punktreihen, so haben wir M und M_1 sowie P und P_1 zu verbinden und deren Schnittpunkt X bestimmt mit A verbunden die Perspektivitätsachse, welche auf c den Berührungspunkt C ausschneidet. Die analogen Betrachtungen, durchgeführt für die Paare a und d, b und c, b und d, endlich c und d, liefern dann folgendes Resultat: Wird noch der Schnittpunkt von NN_1 und MM_1 mit Z bezeichnet, so gehen AC und BD durch X, AB und und CD durch Y, AD und BC durch Z. Wir haben also

Satz 42. „Irgend vier Tangenten a, b, c, d einer Kurve 2. Klasse bestimmen ein vollständiges Vierseit mit den drei Verbindungslinien x, y, z der Gegenecken. Die Berührungspunkte A, B, C, D der vier Tangenten liefern ein vollständiges Viereck, in dem X, Y, Z die Schnittpunkte der Gegenseiten. Dann fallen die Dreiecke XYZ und xyz zusammen."

Das System der Punkte und Geraden dieser Figur ist bekannt als die Mac-Laurinsche Konfiguration (1748).

Die Kurve 2. Klasse ist von der 2. Ordnung.

74. Diese Figur benutzen wir jetzt, um weitere Tangenten einer Kurve 2. Klasse und deren Berührungspunkte zu konstruieren, wenn die erstere durch drei Tangenten a, b, c und die Berührungspunkte A und C der ersten und dritten bestimmt ist. In der Tat vertrauen wir uns der Führung der Figur an und wählen auf der Verbindungslinie AC einen Punkt X beliebig. MX schneide c in M_1, P_1X die Tangente a in P; dann ist, wie wir beweisen

werden, PM_1 eine weitere Tangente d der Kurve 2. Klasse. Denn numerieren wir ein Sechsseit derart, daß a mit I und II, b mit III, c mit IV und V, PM_1 oder d mit VI bezeichnet wird, so berühren diese 6 Linien eine Kurve 2. Klasse, da AC, MM_1, PP_1 sich in einem Punkte X begegnen (71., Figur 45c). Also ist d eine weitere Tangente der Kurve 2. Klasse.

Bringen wir jetzt PM_1 mit P_1M in N_1, ferner NN_1 in Y mit PP_1 zum Schnitt, so schneidet AY auf b den Berührungspunkt B aus, und es ist leicht zu erkennen, daß nun BX auf d den Berührungspunkt D liefert. Das folgt ohne weiteres aus einem neuen Brianchonschen Sechsseit, indem wir b als I und II, c als III, d als IV und V und a als Tangente VI wählen.

Die ganze Figur zeigt nun wieder die oben bewiesenen Eigenschaften, d. h. CD geht durch Y, oder anders ausgedrückt: man kann D auch erhalten als Schnittpunkt der Strahlen BX und CY.

Lassen wir jetzt X auf AC fortrücken, so beschreibt der Strahl BX einen zur Punktreihe X perspektiven Strahlenbüschel und ebenso MX; der Punkt Z wandert auf der Geraden BC weiter, Y auf AB und der Strahl CY beschreibt einen Büschel um C.

Man hat mithin folgende Reihe von perspektiven Grundgebilden:

Strahlenbüschel BX	$\doublebarwedge$	Punktreihe	$X \doublebarwedge$	Strahlenbüschel	MX
	$\doublebarwedge$	„	$Z \doublebarwedge$	„	NZ
	$\doublebarwedge$	„	$Y \doublebarwedge$	„	CY.

Also ist auch

$$\text{Strahlenbüschel } BC \barwedge \text{ Strahlenbüschel } CY.$$

Folglich ist der Ort der Punkte D dargestellt als Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel, also liegen alle Berührungspunkte D der Tangenten der Kurve 2. Klasse auf einer Kurve 2. Ordnung, welche natürlich auch durch die Punkte A, B, C, D geht, da ja die bewegliche Tangente d auch mit a, b, c, d zusammenfallen kann.

Die entsprechende duale Betrachtung, deren Durchführung dem Leser angeraten wird, zeigt, daß die Tangenten einer Kurve 2. Ordnung eine Kurve 2. Klasse bilden. Wir haben demnach

Satz 43. „Die Berührungspunkte der Tangenten einer Kurve 2. Klasse liegen auf einer Kurve 2. Ordnung, und die Tangenten einer Kurve 2. Ordnung bilden eine Kurve 2. Klasse.“

Ob man also von projektiven Punktreihen oder projektiven Strahlenbüscheln ausgeht, man erhält die gleiche Kurve, nur das einemal tangentenweise, das anderemal punktweise erzeugt. Die Kurven 2. Klasse sind auch von der 2. Ordnung und umgekehrt. Wir wollen diese Kurven 2. Ordnung und 2. Klasse „Kegelschnitte“ nennen. Die Berechtigung dieser Bezeichnung wird in einem späteren Abschnitte dargetan werden.

§ 26. **Die verschiedenen Arten der Kegelschnitte.**

Unendlich ferne Punkte. Asymptoten.

75. Wir wollen jetzt sehen, welche verschiedene Formen die Kegelschnitte annehmen können. Man teilt diese Kurven ein nach ihrem Verhalten gegenüber der unendlich fernen Geraden der Ebene, in welcher der Kegelschnitt liegt. Der Kegelschnitt kann diese unendlich ferne Gerade nämlich entweder in zwei reellen Punkten schneiden oder sie gar nicht schneiden (d. h. in zwei imaginären Punkten) oder er kann sie berühren. Um für diese abstrakten Möglichkeiten geometrisch brauchbare Unter-

scheidungen zu erhalten, sei ein Kegelschnitt durch projektive Büschel S und S_1 erzeugt, deren projektive Beziehung durch drei Paare entsprechender Strahlen a, b, c und a_1, b_1, c_1 festgelegt sein möge. Um nun die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der unendlich fernen Geraden zu bestimmen, haben wir nur das Verfahren, auf Grund dessen wir in 59. und Aufgabe 26 (S. 112) die Schnittpunkte einer endlichen Geraden l mit dem Kegelschnitt bestimmten, entsprechend umzuändern. Da sich in jedem Punkte des Kegelschnittes entsprechende Strahlen der projektiven Büschel S und S_1 begegnen, so sind etwaige unendlich ferne Punkte des Kegelschnittes dadurch ausgezeichnet, daß nach ihnen entsprechende Strahlen der Büschel S und S_1 laufen, die überdies noch parallel sind. Um solche Strahlen zu finden, verschieben wir den Büschel S_1 parallel zu sich selbst, bis S_1 nach S fällt. Dies führen wir aus, indem wir durch S folgende Strahlen ziehen: $a_1' \# a_1$, $b_1' \# b_1$, $c_1' \# c_1$. Dann ist, wie leicht zu sehen, auch der Büschel (a, b, c) projektiv zum Büschel (a_1', b_1', c_1'), wobei dem Strahl a der Strahl a_1' entspricht usw. Die Doppelstrahlen dieser Büschel aber liefern entsprechende Strahlen der Büschel S und S_1', die parallel laufen. Denn wenn $n = n_1'$ ein solcher Doppelstrahl, so ist $n_1 \# n_1'$, also auch $n \# n_1$. Die genannten Doppelstrahlen, die sich nach der Steinerschen Konstruktion ermitteln lassen, geben folglich die Richtungen, in denen unendlich ferne Punkte des Kegelschnittes gelegen sind. Jede Parallele zu einer solchen Richtung geht auch durch diesen unendlich fernen Punkt der Kurve hindurch. Dies entspricht dem Umstand, daß durch irgend einen im Endlichen gelegenen Punkt einer Kurve ein Büschel von Strahlen hindurchgeht. Wie nun in diesem eben genannten Strahlenbüschel die Tangente an die Kurve enthalten ist, so ist auch in dem Parallelstrahlenbüschel durch einen unendlich fernen Punkt einer Kurve ein Strahl vorhanden, für welchen auch noch der zweite Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt in den unendlich fernen Punkt fällt und von dem wir also sagen können, daß er die Kurve in dem unendlich fernem Punkte berührt oder daß er als Tangente in diesem Punkte anzusehen ist. Wir nennen allgemein die Tangente in einem unendlich fernen Punkt einer Kurve eine „Asymptote" der Kurve. Ihre Konstruktion bleibt die gleiche wie die der Tangente, nur tritt an Stelle des im Endlichen gelegenen Punktes der durch eine Richtung gegebene unendlich ferne Punkt.

Ellipse, Hyperbel, Parabel.

76. Zurückkehrend zur Einteilung der Kegelschnitte müssen wir mithin folgende Fälle unterscheiden:

Fig. 49.

a) Die beiden projektiven Strahlenbüschel (a, b, c) und (a_1', b_1', c_1') haben keine Doppelstrahlen. Der erzeugte Kegelschnitt besitzt keine unendlich fernen Punkte, liegt also ganz im Endlichen. Man nennt ihn „Ellipse" (ἔλλειψις) (Fig. 49). Sie kann speziell in den Kreis übergehen*).

*) Es gibt Kurven höherer Ordnung, die infolge ihrer ovalen Form sich äußerlich nur wenig von einer Ellipse unterscheiden. Wählt man auf einer solchen Kurve zwei Punkte S und S_1 beliebig, so kann man die Strahlenbüschel S und S_1 durch die Kurve eindeutig aufeinander beziehen, indem man solche Strahlen einander zuweist, die sich auf der Kurve begegnen. Trotzdem sind diese Büschel dann nicht projektiv, und es ist das Doppelverhältnis von vier Strahlen des einen nicht gleich dem der entsprechenden Strahlen des

b) Die Doppelstrahlen der beiden projektiven Büschel sind reell. Der Kegelschnitt hat also zwei reelle, unendlich ferne Punkte. Er heißt Hyperbel (ὑπερβολή) (Fig. 50). Die Asymptoten sind a und b. Die Kurve besteht aus zwei Teilen, die sich den Asymptoten mehr und mehr nähern. Die Kurve hat nur z w e i unendlich ferne Punkte,

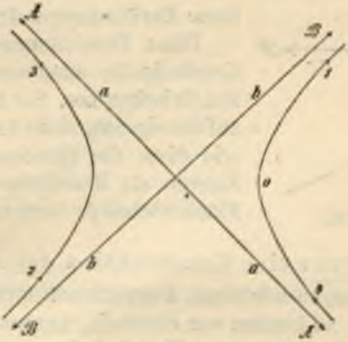

Fig. 50.

nämlich die unendlich fernen Berührungspunkte A und B von a und b. Geht man auf der Kurve von 0 aus gegen 1 ins Unendliche, so kehrt man daraus über B zurück nach 2; geht man in der Richtung nach 3 ins Unendliche, so kehrt man auf der anderen Seite der Asymptote über A nach 4 zurück. Die Kurve schließt sich also durch das Unendliche hindurch.

---

anderen. Denn analytisch betrachtet, schneidet irgend ein Strahl durch S die Kurve a u ß e r in den zwei reellen Punkten noch in imaginären Punkten, die für die Rechnung ebenso zu berücksichtigen sind wie die geometrisch sichtbaren Punkte. (Vgl. die Definition projektiver Grundgebilde in 31.)

c) Die beiden projektiven Strahlenbüschel haben einen Doppelstrahl. Die Kurve besitzt einen unendlich fernen (doppelt zählenden) Punkt, berührt also die unendlich ferne Gerade. Sie heißt Parabel (παραβολή) (Fig. 51). Die Asymptote derselben ist die unendlich ferne Gerade, auf ihr liegt der unendlich ferne Berührungspunkt P.

Fig. 51.

Diese Bezeichnungen der drei Kegelschnitte stammen schon von den Griechen her. Sie beziehen sich auf die eigentümliche Art und Weise, wie diese die Gleichungen dieser Kurven als Beziehungen zwischen Flächeninhalten deuteten.

Tangentenweise Konstruktion der Parabel.

77. Erzeugen wir einen Kegelschnitt durch projektive Punktreihen, so können wir ebenfalls, wenn auch weniger einfach, die drei Arten von Kegelschnitten unterscheiden. Wann die Parabel entsteht, ist sofort einzusehen: nämlich immer und nur dann, wenn die unendlich fernen Punkte der erzeugenden Punktreihen g und g_1 in der projektiven Beziehung einander entsprechen. Denn dann ist die Verbindungslinie dieser beiden unendlich fernen Punkte, also die unendlich ferne Gerade der Ebene, eine Tangente der erzeugten Kurve, diese muß demnach eine Parabel sein. Projektive Punktreihen, in denen sich die unendlich fernen Punkte entsprachen, nannten wir aber (40.) ähnliche; folglich schneiden die Tangenten einer Parabel auf irgend zwei festen Tangenten derselben solche ähnliche Punktreihen aus. Daraus ergibt sich eine einfache Konstruktion der Tangenten einer Parabel. Sind g

und g_1 die gegebenen Tangenten (Fig. 52) und bezeichnen wir deren Berührungspunkte mit 5 und 0, so teilen wir die Strecken von ihnen aus bis zum Schnittpunkt von g und g_1 je in fünf gleiche Teile. Dann liefern entsprechende Teilpunkte verbunden stets eine Tangente der Parabel. Durch Fortsetzung der Teilung erhält man, wie aus der Figur zu ersehen, weitere Tangenten derselben.

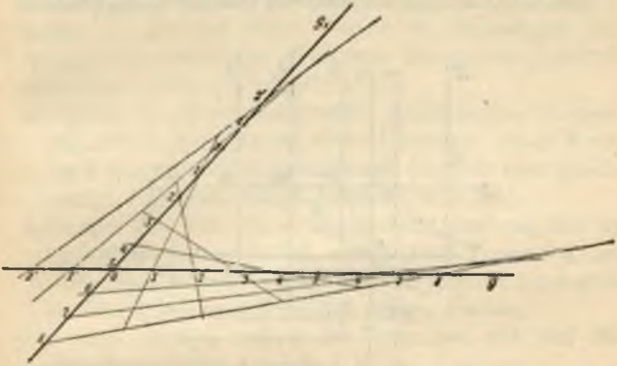

Fig. 52.

Aufgaben über die Hyperbel und Parabel.

78. Wir fügen hier noch einige Aufgaben bei, aus denen hervorgehen mag, daß unendlich ferne Elemente (Asymptoten, unendlich ferne Gerade) ganz ebenso konstruktiv verwendet werden können, wie im Endlichen gelegene Bestimmungsstücke.

Aufgabe 39. Von einer Hyperbel sind gegeben die Richtungen der Asymptoten und drei Punkte. Weitere Punkte der Kurve, sowie die Asymptoten selbst zu konstruieren.

Lösung. Sind s und s_1' die Richtungen der Asymptoten (Fig. 53), so sind also die unendlich fernen Punkte S und S_1 dieser Geraden Punkte der Hyperbel. Wir wählen sie als Mittelpunkte von die Kurve erzeugenden Strahlenbüscheln, die in diesem Falle in Parallelstrahlenbüschel übergehen. Durch die weiter gegebenen Punkte **A**, **B**, **C** sind dann den drei Strahlen a, b, c des Büschels S als entsprechende im Büschel S_1 die Strahlen

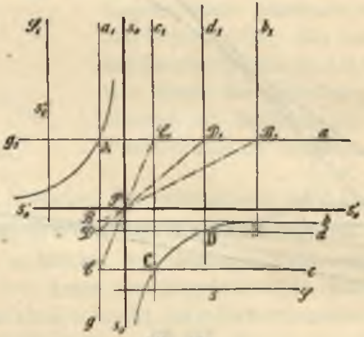

Fig. 53.

a_1, b_1, c_1 zugewiesen. Wir konstruieren die projektive Beziehung der beiden Büschel nach 33., lassen aber zur Vereinfachung g mit a_1 und g_1 mit a zusammenfallen. Dann erhalten wir in bekannter Weise das Zentrum P der Perspektivität als (Schnitt von BB_1 und CC_1) und zu irgend einem Strahle d den entsprechenden d_1, dessen Schnittpunkt **D** mit d der Hyperbel als Punkt angehört.

Um die Asymptoten, also die Tangenten in den Punkten S und S_1 zu finden, haben wir nach Satz 30 S. 107

die Verbindungslinie $S S_1$ als Strahl des einen und des anderen Büschels zu nehmen und immer den entsprechenden Strahl im anderen Büschel zu suchen. Diese Verbindungslinie $S S_1$ ist hier die unendlich ferne Gerade und sie trifft g und g_1 in den unendlich fernen Punkten dieser Geraden. Man findet dann durch konsequente Durchführung der Konstruktion, daß die Asymptoten die Linien s_0 und s_0' sind, die durch P parallel zu s und s' laufen. — In der Figur stehen die Richtungen der Asymptoten aufeinander senkrecht. Eine solche Hyperbel heißt eine „gleichseitige“.

Aufgabe 40. Zwei kongruente, gleichsinnige Strahlenbüschel in der gleichen Ebene erzeugen einen Kreis, zwei kongruente, ungleichsinnige dagegen eine gleichseitige Hyperbel. (Vgl. Aufgabe 16 S. 84.)

Aufgabe 41. Von einem Kegelschnitt sind gegeben ein unendlich ferner Punkt, sowie zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten. Man zeichne die Asymptote in dem gegebenen unendlich fernen Punkte.

Lösung. Sind a und b die Tangenten mit den Berührungspunkten A und B, während S der gegebene unendlich ferne Punkt (Fig. 54), so sei die gesuchte Asymptote die Verbindungslinie 1 2, A sei 3, 4 und 5, 6 falle mit B zusammen. Dann erhalten wir in dem Pascalschen Sechseck 1 2 3 4 5 6 die Punkte Y und Z der Pascalschen Linie (Satz 34 S. 114), auf der sich auch 1 2 und

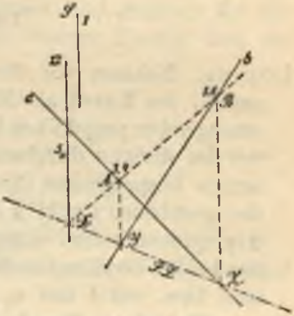

Fig. 54.

45 schneiden müssen. Es geht also durch diesen Schnittpunkt X die Asymptote s_0.

Man zeichne auch die zweite Asymptote.

Aufgabe 42. Man löse die Aufgabe 39 unter Anwendung des Pascalschen Satzes.

Aufgabe 43. Von einer Hyperbel sind gegeben die beiden Asymptoten und ein Punkt; man zeichne weitere Punkte der Kurve.

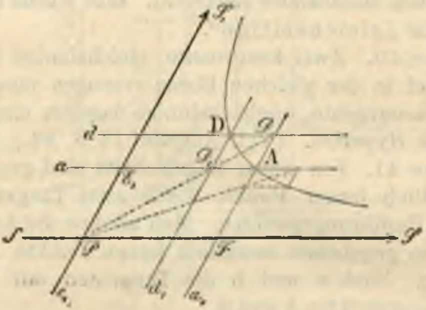

Fig. 55.

Lösung. Nehmen wir die unendlich fernen Punkte S und S_1 der Kurve als Mittelpunkte der die Hyperbel erzeugenden projektiven Strahlenbüschel und verfahren wir im übrigen durchaus nach der in 59. Figur 36 bereits besprochenen Methode. Die Parallelen durch den gegebenen Punkt **A** der Hyperbel (Fig. 55) zu den Asymptoten liefern entsprechende Strahlen a und a_1 der beiden Strahlenbüschel und die Asymptoten selbst sind bzw. mit f und e_1 zu bezeichnen, während die unendlich ferne Gerade die Bezeichnungen f_1 und e trägt. Für die Hilfsgeraden g und g_1 wollen wir im vorliegenden Falle eine speziellere Annahme machen, indem wir g mit a_1 und g_1 mit a zusammenfallen lassen. Dann kommt der Hilfspunkt P der Figur 36 in den Schnittpunkt der beiden Asymptoten (also in den Mittelpunkt der Hyperbel) zu liegen. Weitere Punkte der Kurve ermitteln wir, indem wir durch P irgend eine Gerade ziehen, welche a_1 und a in D und D_1 trifft. Die Parallelen d und d_1 geben in ihrem Schnitte einen weiteren Punkt **D** der Hyperbel.

Die Figur 55 läßt weiter erkennen, daß unsere Konstruktion neuer Hyperbelpunkte geometrisch auch in der Weise gedeutet werden kann, daß durch dieselbe das Parallelogramm $\mathbf{A}FPE_1$ der Figur in ein flächengleiches mit der Ecke **D** verwandelt wird. Wir haben mithin folgende metrische Eigenschaft der Hyperbel bewiesen: Zieht man durch die Punkte einer Hyperbel Parallele zu den Asymptoten, so besitzt das von diesen Parallelen und von den Asymptoten gebildete Parallelogramm konstanten Flächeninhalt.

Aufgabe 44. Von einer Parabel sind gegeben der unendlich ferne Punkt, zwei weitere Punkte und die Tangente in einem derselben; die Kurve zu zeichnen.

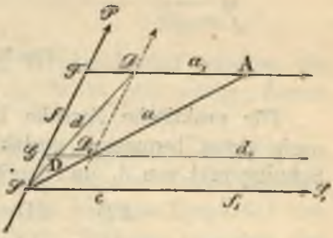
Fig. 56.

Lösung. Wird mit S_1 der unendlich ferne Punkt, mit S der Punkt bezeichnet, dessen Tangente gegeben ist (Fig. 56), so wählen wir wiederum diese beiden Punkte als Zentren der projektiven Strahlenbüschel. Die unendlich ferne Gerade muß dann als Tangente e_1 in S_1 aufgefaßt werden, während f die gegebene Tangente ist. Deren unendlich ferner Punkt gibt bei Durchführung ganz der gleichen Betrachtung wie vorhin den Hilfspunkt P. Um weitere Punkte der Parabel zu zeichnen, haben wir also mit irgend einer Parallelen zu f die Geraden a_1 und a in D und D_1 zu schneiden. Die Strahlen d und d_1 begegnen sich in einem neuen Punkte **D** der Parabel.

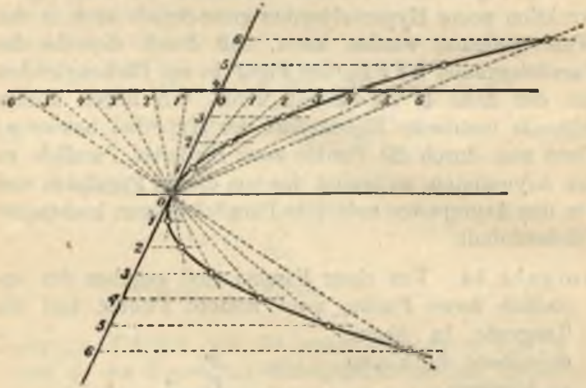

Fig. 57.

Für praktische Zwecke läßt sich dieses Verfahren noch etwas bequemer gestalten. Bezeichnen wir den Schnittpunkt von d_1 und f mit G, so gilt die Proportion

$$\frac{FD}{FA} = \frac{SD_1}{SA} = \frac{SG}{SF}.$$

Wenn also z. B.

$$\mathrm{FD} = \frac{1}{n}\,\mathrm{FA},$$

so ist auch

$$\mathrm{SG} = \frac{1}{n}\,\mathrm{SF}.$$

Darauf beruht folgende bekannte Konstruktion der Parabel: wir teilen (Fig. 57) die Strecke **FA** sowohl als auch SF in gleichviel gleiche Teile, z. B. vier, und ziehen die zugehörigen Strahlen der Büschel. Die Teilung darf nach beiden Seiten fortgesetzt werden.

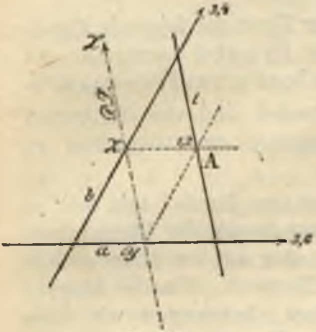

Fig. 58.

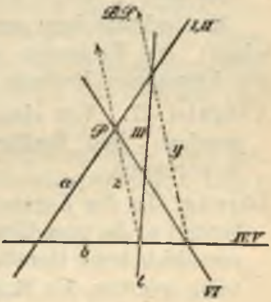

Fig. 59.

Aufgabe 45. Von einer Hyperbel sind gegeben die beiden Asymptoten und ein Punkt; man zeichne dessen Tangente.

Lösung. Sind a und b die Asymptoten und ist **A** der weiter gegebene Punkt (Fig. 58), so liefert der Satz von Pascal ohne weiteres die gesuchte Tangente t und es zeigt sich aus der Figur, daß das zwischen den

Asymptoten liegende Stück der Tangente durch den Berührungspunkt halbiert wird.

Aufgabe 46. Von einer Hyperbel sind gegeben die beiden Asymptoten und eine Tangente; weitere Tangenten der Kurve zu zeichnen.

Lösung. Bezeichnen wir die eine Asymptote a mit I und II, die andere b mit IV und V, die gegebene Tangente t mit III, während die gesuchte Tangente VI durch einen auf a beliebig angenommenen Punkt P gehen soll (Fig. 59). Der Brianchonsche Punkt wird in diesem Falle ein unendlich ferner und die Hauptdiagonalen y und z sind parallel.

Man erkennt dann aus der Figur die folgende Eigenschaft: Die Tangenten einer Hyperbel begrenzen mit den Asymptoten Dreiecke von konstantem Flächeninhalte.

Aufgabe 47. Von einer Parabel sind vier Tangenten gegeben. Den Berührungspunkt einer derselben zu konstruieren.

Lösung. Da der Kegelschnitt eine Parabel sein soll, so berührt er die unendlich ferne Gerade der Ebene; diese unendlich ferne Gerade ist aber mit der Ebene gleichzeitig gegeben als fünfte Tangente. Um die Aufgabe zu lösen, bezeichnen wir diejenige Tangente, deren Berührungspunkt wir finden wollen, mit I und II, die unendlich ferne Gerade mit III, mit IV, V, VI die drei anderen Tangenten (Fig. 60). Dann ist (II, III) der unendlich ferne Punkt der mit II bezeichneten Tangente, (III, IV) der unendlich ferne Punkt von IV.

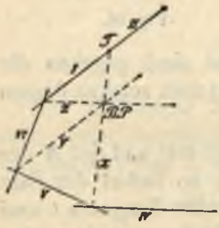

Fig. 60.

Durch den Brianchonschen Satz finden wir nun leicht den Berührungspunkt T auf der Tangente I.

Aufgabe 48. Parallel einer gegebenen Richtung an eine Parabel die Tangente zu konstruieren.

Lösung. Verlangt man allgemein, die Tangenten eines Kegelschnittes zu ermitteln, welche zu einer gegebenen Geraden l parallel sind, so gibt es deren zwei. Denn die Aufgabe kommt darauf hinaus, durch den Schnittpunkt von l mit der unendlich fernen Geraden die Tangenten an den Kegelschnitt zu legen. Berührt aber der Kegelschnitt die unendlich ferne Gerade, wie dies bei der Parabel der Fall ist, so ist die unendlich ferne Gerade selbst eine der Tangenten durch diesen Punkt, es bleibt also bloß noch eine im Endlichen gelegene Tangente, parallel der Geraden l, die Aufgabe wird eine lineare.

Ist nun die Parabel etwa gegeben durch zwei Tangenten a und b mit ihren Berührungspunkten A und B (Fig. 61), so numerieren wir uns ein Brianchonsches Sechsseit. I, II fallen auf a, III und IV auf b, V sei die gesuchte, zur gegebenen Geraden l parallele Tangente, VI sei die unendlich ferne Gerade. Dann ergibt sich V wieder durch Konstruktion des Brianchonschen Punktes, wobei noch zu beachten, daß der Schnittpunkt (V, VI) natürlich der unendlich ferne Punkt von l ist.

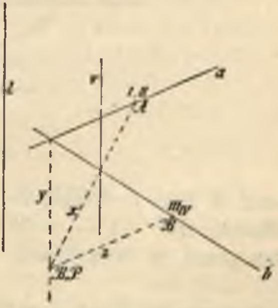

Fig. 61.

Aufgabe 49. Eine Parabel ist gegeben durch vier Tangenten. Ihren unendlich fernen Punkt (die Richtung der Achse) zu bestimmen.

F g. 62.

Lösung. Bezeichnen wir (Fig. 62) die vier gegebenen Tangenten mit I, II, III, IV, die unendlich ferne Gerade mit V und VI, so gibt die Linie y, welche in dem Brianchonschen Sechsseit nach dem Berührungspunkt (V, VI) läuft, die Richtung, in welcher der unendlich ferne Punkt der Parabel liegt.

VI. Abschnitt.

Die Polarentheorie der Kegelschnitte.

§ 27. Pol und Polare.

Konjugierte Punkte und konjugierte Gerade.

79. Liegt ein Kegelschnitt k^2 gegeben vor und ist g eine Gerade, welche ihn in den Punkten A und B trifft (Fig. 63), so kann man zu irgend einem Punkte X von g

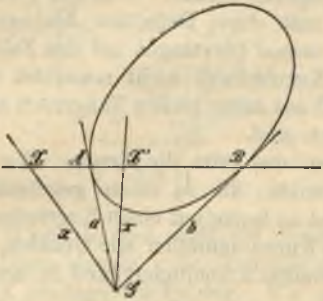

Fig. 63.

den vierten harmonischen X′ bezüglich A und B konstruieren, so daß also $(XX'AB) = -1$. Wir nennen zwei solche Punkte X und X′ „konjugiert" in bezug auf den Kegelschnitt.

Berührtdie Gerade g den Kegelschnitt, so vereinigen sich A und B in einem Punkt, etwa C. Der vierte harmonische zu einem Punkt X fällt dann, wo auch X auf der Tangente liegen mag, wieder mit C zusammen. Zu jedem Punkte einer Tangente ist also der Berührungspunkt konjugiert.

Gehen andererseits von einem Punkte G aus zwei Tangenten a und b an den Kegelschnitt, so kann man zu irgend einer Geraden x durch G den vierten harmonischen Strahl x' bestimmen in bezug auf a, b. Es ist also dann $(xx'ab) = -1$. Wir nennen zwei solche Strahlen x, x' „konjugierte Gerade" in bezug auf den Kegelschnitt. Rückt G auf den Kegelschnitt nach G_0, so fallen die beiden Tangenten in eine zusammen, nämlich in die Tangente c in G_0 an den Kegelschnitt. Zu irgend einer Geraden durch den Punkt G_0 des Kegelschnittes ist dann c stets die konjugierte Gerade. — In der rechnenden Geometrie kann man diese Definition konjugierter Punkte und Geraden formal übertragen auf den Fall, wo die Gerade g den Kegelschnitt nicht schneidet oder wo von dem Punkte G aus keine reellen Tangenten an den Kegelschnitt möglich sind.

Wir stellen uns jetzt die Fragen: Wo liegen überhaupt alle Punkte, die zu einem gegebenen Punkte X konjugiert sind in bezug auf einen Kegelschnitt? Ferner: Was für eine Kurve umhüllen alle Geraden, die zu einer gegebenen Geraden x konjugiert sind in bezug auf einen Kegelschnitt?

Polare eines Punktes.

80. Wir gehen aus von der Mac-Laurinschen Konfiguration, wie sie in Figur 48 S. 131 erörtert wurde. Bringen wir dort noch AC in X', BD in X'' zum Schnitt mit NN_1, so folgt aus dem Viereck ABCD, daß sowohl $(XX'AC) = -1$ als auch $(XX''BD) = -1$.

Es sei nun der Kegelschnitt gegeben, sowie der Punkt X; durch X ziehen wir eine Sehne AC beliebig. Bringen wir die Tangenten a und c in A und C in N zum Schnitt und konstruieren ferner X′ als den vierten harmonischen zu X bezüglich A und C, so ist durch N und X′ die Linie NN_1 oder x festgelegt. Wie man also auch eine Sehne BD durch X zieht, der vierte harmonische X″ zu

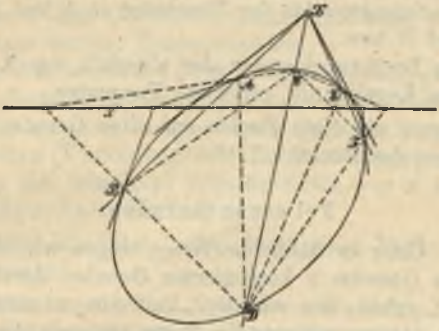

Fig. 64.

X bezüglich B und D muß stets auf dieser Linie x gelegen sein. Diese Gerade x ist demnach der Ort aller zum Punkte X konjugierter Punkte. Wir nennen sie die „Polare“ des Punktes X in bezug auf den Kegelschnitt. Auf ihr müssen sich dann auch die Tangenten b und d in B und D begegnen. Ebenso ist XZ oder y die Polare von Y und XY oder z die Polare von Z.

Es ergeben sich also folgende Eigenschaften der Polaren eines Punktes, die wir durch die Figur 64 zur Anschauung bringen:

Satz 44. „Hat man einen Punkt X und einen Kegelschnitt und zieht durch ihn alle möglichen Linien, welche in A, B oder C, D oder E, F usw. den Kegelschnitt treffen, und konstruiert man

1) zu A, B oder C, D oder E, F usw. den vierten harmonischen in bezug auf X,
2) die zwei anderen Nebenecken der vollständigen Vierecke ABCD, ABEF usw.,
3) die Schnittpunkte der Tangenten in A und B, in C und D usw.,
4) die Berührungspunkte der allenfalls von X aus an den Kegelschnitt gehenden Tangenten,

so liegen alle diese Punkte auf einer Geraden x, der Polaren des Punktes X.“*)

Pol einer Geraden.

81. Ganz in ähnlicher Weise zeigen wir, daß alle zu einer Geraden x konjugierten Geraden durch einen Punkt X gehen, den wir den „Pol“ von x nennen. In der Tat denken wir uns in Figur 48 noch die Linien NX und N_1X gezogen, die mit x' bzw. x'' bezeichnet werden mögen, so ist sowohl $(xx'ac) = -1$ als auch $(xx''bd) = -1$. Haben wir nun x oder NN_1 beliebig angenommen, ferner von einem Punkte N aus die Tangenten a und c an den Kegelschnitt gezogen, welche in A und C berühren, so können wir X schon bestimmen als Schnittpunkt von AC und dem Strahle x', der zu x harmonisch ist bezüglich a und c. Wo dann auch auf x

*) In dieser Figur, sowie in den folgenden ist der Bequemlichkeit wegen als Kegelschnitt eine Ellipse gewählt. Selbstverständlich gelten die Sätze für jeden Kegelschnitt, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist.

ein Punkt N_1 weiter angenommen wird, immer muß die Berührungssehne B D der durch N_1 gehenden Tangenten b und d durch den bereits festgelegten Punkt X gehen und immer muß auch der Strahl x'', der zu x harmonisch in bezug auf b und d, ebenfalls durch X laufen. Damit ergibt sich (Fig. 48)

Satz 45. „Legt man von den Punkten einer Geraden x aus die Tangentenpaare an einen Kegelschnitt und konstruiert

1) zu x den vierten harmonischen Strahl bezüglich eines solchen Tangentenpaares,
2) in dem von zwei solchen Tangentenpaaren gebildeten vollständigen Vierseit die zwei anderen Nebenseiten,
3) die zu einem Tangentenpaar gehörige Berührungssehne (Verbindungslinie der Berührungspunkte),
4) in den (etwaigen) Schnittpunkten von x mit dem Kegelschnitt die Tangenten,

so gehen alle diese Linien durch einen Punkt X, den Pol von x.“

Natürlich gehört zu X wieder x als Polare. Ferner folgt aus 3) in den beiden letzten Sätzen noch:

Zusatz. „Liegt der Punkt X auf dem Kegelschnitt, so wird seine Polare die Tangente und ebenso wird der Pol einer Tangente der Berührungspunkt derselben.“

Auf Grund dieser Sätze können wir jetzt auch eine strengere, von der Realität der Schnittpunkte bzw. Tangenten unabhängige Definition konjugierter Elemente aufstellen in folgender Weise:

„Zu einem Punkte sind konjugiert in bezug auf einen Kegelschnitt alle Punkte seiner Polaren.“ Ferner:

„Zu einer Geraden sind konjugiert in bezug auf einen Kegelschnitt alle Geraden, die durch den Pol der ersteren gehen.“

Es folgt daraus dann unmittelbar:

„Sind zwei Punkte konjugiert, so geht die Polare eines jeden durch den andern“ und:

„Von zwei konjugierten Geraden enthält jede den Pol der andern.“

Aufgabe 50. Zerfällt der Kegelschnitt (die Kurve 2. Ordnung) in zwei Gerade, so folgt aus Satz 43 (S. 134) der früher (S. 53) erwähnte Satz. Welcher Satz ergibt sich, wenn der Kegelschnitt (als Kurve 2. Klasse) in zwei Punkte zerfällt?

§ 28. **Das Polardreieck.**

82. Wählen wir einen Punkt X in der Ebene eines Kegelschnittes beliebig und zeichnen seine Polare x; auf x sei der Punkt Y beliebig angenommen. Dann muß die Polare y von Y jedenfalls durch X gehen, da X und Y konjugierte Punkte. Der Schnittpunkt von x und y sei Z. Dieser Punkt Z ist konjugiert zu X und Z ist auch konjugiert zu Y, also ist XY oder z die Polare des Punktes Z. In XYZ haben wir folglich ein Dreieck gefunden von der Eigenschaft, daß jede seiner Ecken die gegenüberliegende Seite zur Polaren hat. Ein solches Dreieck nennen wir ein „Polardreieck“ des Kegelschnittes.

Wir haben schon in Figur 48 auf S. 131 in XYZ ein Polardreieck erhalten; aus dieser Figur können wir entnehmen, wie man sich in anderer Weise ein Polardreieck eines Kegelschnittes verschaffen kann. Sind nämlich A, B, C, D irgend vier Punkte auf dem Kegelschnitt, so konstruieren wir in dem vollständigen Viereck derselben die drei Nebenecken: diese bilden dann ein Polardreieck. — Ist umgekehrt in Figur 65 ein Polardreieck XYZ eines Kegelschnitts gegeben, so finden wir in folgender Weise eine Gruppe von Punkten A, B, C, D, die zu ihm in der gleichen Beziehung steht. Wir wählen A beliebig irgendwo auf dem Kegelschnitt, ziehen A Z, welche Linie zum zweitenmal in B den Kegelschnitt trifft; dann verbinden wir X mit A und B, wodurch wir die Schnittpunkte C und D auf diesen Verbindungslinien erhalten. Der Schnittpunkt von C D und A B muß nun auf der Polaren x von X liegen,

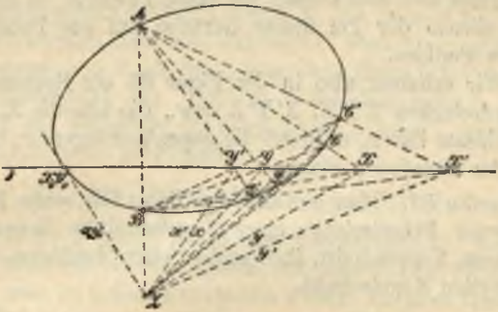

Fig. 65.

also geht C D durch Z. Ebenso müssen A D und B C durch Y laufen. — Lassen wir jetzt den Punkt X auf Z fortrücken und konstruieren für jede Lage seine Polare. Um z. B. die Polare für X′ zu finden, ziehen wir A X′, welche Linie den Kegelschnitt nochmals in C′ trifft. Dann liefert B C′ auf z den Punkt Y′, so daß Z Y′ oder x′ die Polare von X′ wird. Es ist folglich

$$
\begin{aligned}
\text{P. Reihe } (X, X' \ldots) &\;\overline{\wedge}\; \text{Str. Büschel } A\,(X, X' \ldots)\\
&\;\overline{\wedge}\; \text{Str. Büschel } B\,(C, C' \ldots)\\
&\;\overline{\wedge}\; \text{P. Reihe } (Y, Y' \ldots)\\
&\;\overline{\wedge}\; \text{Str. Büschel } Z\,(Y, Y' \ldots).
\end{aligned}
$$

Also ist auch die Punktreihe X, X' ... projektiv zum Büschel x, x' ... der Polaren und wir erhalten

Satz 46. „Rückt ein Punkt X auf einer Geraden z fort, so beschreibt seine Polare x in bezug auf einen Kegelschnitt einen Strahlenbüschel um den Pol Z von z, und dieser Strahlenbüschel ist projektiv zu der von dem Punkte beschriebenen Punktreihe."

Dreht sich eine Gerade um einen Punkt Z, so bewegt sich ebenso der Pol dieser Geraden auf der Polaren z dieses Punktes.

Wir erhalten also in der Figur 65 ein System von Polardreiecken XYZ, X'Y'Z usw., die alle die Ecke Z gemeinsam haben, während die gegenüberliegenden Seiten auf der Geraden z liegen.

Aufgabe 51. Man beweise den Satz: Die sechs Ecken zweier Polardreiecke eines Kegelschnittes liegen auf einem Kegelschnitt, ihre sechs Seiten berühren einen zweiten Kegelschnitt.

Die zu einer Geraden und zu einem Punkte in bezug auf einen Kegelschnitt gehörige Involution.

83. Die Punktreihe X, X' ... ist nicht bloß projektiv zur Punktreihe Y, Y' ... (Fig. 65), sondern sie liegt zu ihr involutorisch, da ja die Polare y von Y durch X geht. Die Paare X, Y, X', Y' ... bilden eine Punktinvolution, eben die Involution konjugierter Punkte auf z. Ebenso gehören die Strahlenpaare x, y, x', y' ... einer Involution an, der Involution konjugierter Geraden durch Z. Schneidet z den Kegelschnitt in reellen Punkten, so sind dies die Doppelpunkte der Punktinvolution (z. B. X_0, Y_0). Gehen von Z aus reelle Tangenten an den Kegelschnitt, so liefern diese die Doppelstrahlen der Strahleninvolution

(z. B. x_0, y_0). Aber auch wenn z den Kegelschnitt nicht in reellen Punkten trifft, so kann man trotzdem die Punktinvolution nach dem eben Bemerkten festlegen. Sie wird dann natürlich eine elliptische und kann dazu dienen, die imaginären Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitt in geometrisch brauchbarer Weise zu ersetzen. Wenn ferner von Z aus keine Tangenten an den Kegelschnitt gezogen werden können, so wird die Involution der konjugierten Geraden durch Z, die immer noch bestimmt werden kann, eine elliptische. Statt der imaginären Tangenten von Z aus führt man dann diese Involution in die Betrachtung ein. Berührt z den Kegelschnitt, oder fällt Z auf denselben, so wird die zu z oder Z gehörige Involution eine parabolische.

Das Dualitätsgesetz in der Ebene.

84. Ist in einer Ebene ein Kegelschnitt k^2, speziell etwa auch ein Kreis, gegeben und irgend eine Figur, so kann man zu jedem Punkte die Polare, zu jeder Geraden den Pol in bezug auf k^2 zeichnen. Den Punkten einer Geraden entsprechen dann nach Satz 46 (S. 156) Gerade, die alle durch den Pol dieser Geraden gehen. Vier Punkten einer Geraden sind also vier Strahlen durch einen Punkt zugeordnet, und es ist überdies das Doppelverhältnis der vier Strahlen gleich dem der vier Punkte. Dem Schnittpunkt zweier Geraden entspricht die Verbindungslinie der Pole der beiden Geraden usw. Aus der ersten Figur können wir demnach eine zweite ableiten, die ihr genau nach dem Dualitätsgesetz der Ebene 7. a entspricht. Jetzt ist aber zwischen den beiden Figuren auch ein direkter, geometrischer Zusammenhang hergestellt, sie sind „reziprok" zueinander in bezug auf den Kegelschnitt. Irgend einer Kurve als Ort von Punkten entspricht eine

Kurve, eingehüllt von den entsprechenden Geraden. Die Klasse dieser letzteren ist gleich der Ordnung der ersten Kurve. Die Punkte des Kegelschnittes k^2 sind dadurch ausgezeichnet, daß die ihnen entsprechenden Geraden, nämlich die Tangenten von k^2, durch sie hindurchgehen.

§ 29. Mittelpunkt, Durchmesser, Achsen eines Kegelschnittes.

Der Mittelpunkt.

85. Aus den allgemeinen Sätzen der Polarentheorie erhalten wir wieder spezielle, metrische, wenn wir das Unendlich-Ferne hereinziehen. Wir haben die Annahme als zulässig und notwendig erkannt, daß alle unendlich fernen Punkte einer Ebene auf einer Geraden liegen. Auch zu dieser unendlich fernen Geraden können wir dann den Pol zeichnen in bezug auf einen Kegelschnitt, und wir erhalten ihn, indem wir von den Punkten der unendlich fernen Geraden aus Tangentenpaare an den Kegelschnitt legen. Die zugehörigen Berührungssehnen gehen alle durch diesen Pol. Wir nennen den Pol der unendlich fernen Geraden den „Mittelpunkt" des Kegelschnittes, jede durch ihn gehende Sehne einen „Durchmesser". Die beiden Schnittpunkte eines Durchmessers mit dem Kegelschnitt müssen harmonisch getrennt werden durch den Mittelpunkt und durch den Schnittpunkt des Durchmessers mit der unendlich fernen Geraden, also muß jeder Durchmesser im Mittelpunkt halbiert werden (Satz 44,1 S. 152).

Für die Ellipse und Hyperbel liegt der Mittelpunkt im Endlichen, bei der letzteren ist er (Satz 45,4 S. 153) der Schnittpunkt der Asymptoten; für die Parabel, welche die unendlich ferne Gerade berührt, fällt der Mittelpunkt in den Berührungspunkt der unendlich fernen Geraden, also in den unendlich fernen Punkt der Parabel. Alle Durchmesser der Parabel sind folglich parallel.

Es hat sich mithin ergeben:

Satz 47. „Die Verbindungslinien der Berührungspunkte paralleler Tangenten eines Kegelschnittes (Ellipse oder Hyperbel) gehen alle durch den Mittelpunkt und heißen Durchmesser. Jeder Durchmesser wird im Mittelpunkt halbiert (Fig. 66a und 66b)."

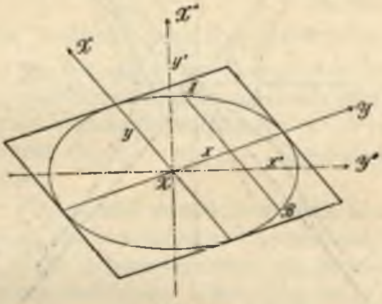

Fig. 66a.

Konjugierte Durchmesser.

86. Nehmen wir jetzt in Figur 65 (S. 155) z als die unendlich ferne Gerade. Dann wird Z der Mittelpunkt des Kegelschnittes (Fig. 66a und 66b). Die Linien x, y, x′, y′ werden konjugierte Gerade durch den Mittelpunkt: wir nennen sie „konjugierte Durchmesser". Jeder von ihnen ist also die Polare des unendlich fernen Punktes des anderen. Zieht man zu einem der konjugierten Durchmesser eine parallele Sehne AB, so muß die Mitte dieser

Sehne auf dem konjugierten Durchmesser liegen, da sie mit X zusammen A und B harmonisch trennt. In bezug auf konjugierte Durchmesser zeigt also der Kegelschnitt eine „schiefe Symmetrie". Dies liefert

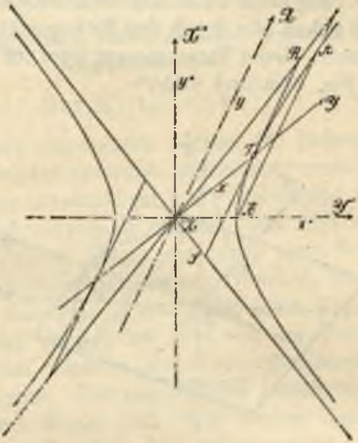

Fig. 66b.

Satz 48. „Die konjugierten Geraden durch den Mittelpunkt eines Kegelschnitts liefern die Involution der konjugierten Durchmesser. Jeder von zwei konjugierten Durchmessern halbiert alle Sehnen, die zum anderen parallel laufen. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel zum konjugierten Durchmesser. Je zwei konjugierte Durchmesser bilden mit der unendlich fernen Geraden ein Polardreieck (Fig. 66a und 66b)."

Hat man (Fig. 66c) eine Parabel und sind AB, A'B'... parallele Sehnen, M, M'... deren Mitten, so liegen diese alle auf einem Durchmesser, der durch den unendlich fernen Punkt S der Parabel geht. Der Durchmesser schneidet die Parabel nochmals in T und die Tangente in diesem Punkte ist parallel AB.

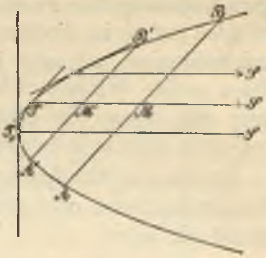

Fig. 66c.

Die Achsen eines Kegelschnittes.

87. In der Involution der konjugierten Durchmesser eines Mittelpunkt-Kegelschnittes sind nach Satz 24 (S. 94) stets auch zwei aufeinander senkrechte (x″, y″) vorhanden. Man bezeichnet dieselben als die „Hauptachsen“ des Kegelschnittes.

Bei der Ellipse muß gemäß ihrer Definition (vgl. 76.) die Involution der konjugierten Durchmesser eine elliptische sein, beide Achsen schneiden die Kurve in reellen Punkten (große und kleine Achse) (Fig. 66a).

Zum Mittelpunkt der Hyperbel dagegen gehört eine Involution mit reellen Doppelstrahlen. Diese sind die Asymptoten der Kurve. Jede Asymptote ist also zu sich selbst konjugiert. Irgend zwei konjugierte Durchmesser der Hyperbel trennen die Asymptoten harmonisch. Daraus folgt unmittelbar, daß der Berührungspunkt T einer Tangente (Fig. 66b) in der Mitte des Abschnittes RS liegt, den die Asymptoten auf der Tangente erzeugen. Die Achsen halbieren die Winkel der Asymptoten; die eine, x″, schneidet die Hyperbel in reellen, die andere, y″, in imaginären Punkten.

Treten in der Involution der konjugierten Durchmesser eines Kegelschnittes zwei Paare aufeinander senkrechter Strahlen auf, so ist die Involution nach Satz 24 (S. 94) eine rechtwinkelige und alle konjugierten Durchmesserpaare bilden rechte Winkel. Dieser Fall tritt immer und nur dann ein, wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht. Denn wir können behaupten:

Ist die zum Mittelpunkte eines Kegelschnittes gehörige Strahleninvolution eine rechtwinkelige, so ist der Kegelschnitt ein Kreis.

Bezeichnen wir nämlich mit M den Mittelpunkt, mit A einen festen, mit B einen veränderlichen Punkt des Kegelschnittes, so geht nach Satz 48 (S. 160) der zur Richtuug AB konjugierte Durchmesser durch die Mitte von AB und steht auf AB senkrecht, folglich ist $MB = MA$ und alle Punkte des Kegelschnittes haben von M den gleichen Abstand.

Dagegen kann man bei jedem Kegelschnitt einzelne Punkte finden, welche sich dadurch auszeichnen, daß die zu ihnen in bezug auf den Kegelschnitt gehörigen Strahleninvolutionen rechtwinkelige sind. Dies sind die „Brennpunkte“ des Kegelschnittes.

Unter den parallelen Durchmessern einer Parabel gibt es einen T_0S, der senkrecht steht auf der Tangente, die in seinem (eigentlichen) Schnittpunkt T_0 mit der Parabel konstruiert werden kann (Fig. 66c). Dieser Durchmesser heißt die „Achse“, der Punkt T_0 der „Scheitel“ der Parabel.

Aufgabe 52. Schneidet eine beliebige Gerade eine Hyperbel in den Punkten A und B und die Asymptoten in C und D, so ist $CA = BD$. Beweis durch Anwendung des soeben bewiesenen Satzes über die Tangente.

Aufgabe 53. Ein Kegelschnitt ist durch fünf Punkte oder fünf Tangenten gegeben. Seinen Mittelpunkt zu konstruieren.

Lösung. Man verschaffe sich parallele Tangenten und damit einen Durchmesser.

Aufgabe 54. Man betrachte die Mac-Laurinsche Konfiguration (Fig. 48) für den Fall, daß z die unendlich ferne Gerade ist, und leite auf diese Weise den Satz ab: In irgend einem, einem Kegelschnitt umschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalen konjugierte Durchmesser.

VII. Abschnitt.

Die Kegel- und Regel-Flächen 2. Ordnung als Erzeugnisse projektiver Grundgebilde.

§ 30. Über Flächen im allgemeinen.

Regelflächen.

88. Eine Fläche (z. B. eine Ebene, eine Kugel, ein Kegel) enthält zweifach unendlich viele (∞^2) Punkte, welche durch ein mathematisches Gesetz bestimmt werden. In der rechnenden Geometrie wird eine Fläche definiert durch eine Gleichung, der die Koordinaten (x, y, z) eines jeden ihrer Punkte genügen müssen.

Eine Fläche kann insonderheit die Eigenschaft haben, daß es möglich ist, sie durch Bewegung einer festen Kurve, die wir uns etwa aus Draht hergestellt denken, zu erzeugen. Im einfachsten Falle wird diese Kurve eine Gerade sein. Die Flächen, die auf diese Weise durch Bewegung einer Geraden entstehen, heißen allgemein „Regelflächen". Sie enthalten, gemäß ihrer Erzeugung, ein einfach unendliches System von geraden Linien, die wir die „Erzeugenden" der Fläche nennen. Solche „geradlinige" Flächen treten uns entgegen, sobald wir die Erzeugnisse projektiver Grundgebilde erster Stufe betrachten, die beliebig im Raume liegen, wie ja z. B. zwei beliebig im Raume gelegene projektive Punktreihen nach 57. (S. 102) als Erzeugnis ein solches System von einfach unendlich vielen, im Raume angeordneten Geraden lieferten.

Wir können nun zwei durchaus verschiedene Typen von Regelflächen unterscheiden je nach dem Verhalten unendlich benachbarter Erzeugenden der Fläche. Folgende Fälle sind nämlich zu trennen:

a) Irgend zwei unendlich benachbarte Erzeugende der Fläche schneiden sich stets. Dann bestimmen dieselben eine Ebene, und der zwischen den Erzeugenden gelegene Teil der Ebene ist ein Element der Fläche. Es sind also die Elemente der Fläche sämtlich eben (Fig. 67). Eine solche Fläche (die auch durch Bewegung einer Ebene erzeugt werden kann) heißt eine „abwickelbare" (développable). Irgend zwei einander nicht unendlich benachbarte Erzeugende der Fläche brauchen sich natürlich nicht zu schneiden.

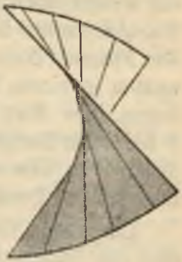

Fig. 67.

Die einfachste abwickelbare Fläche ist der „Kegel". Er entsteht, wenn eine Gerade sich irgendwie bewegt, während einer ihrer Punkte festgehalten wird. Dieser fixierte Punkt heißt die „Spitze" des Kegels. Liegt die Spitze im Unendlichen, bewegt sich also eine Gerade nach irgend einem Gesetze, aber stets parallel zu sich selbst, so entsteht aus dem Kegel der „Zylinder".

b) Je zwei unendlich benachbarte Gerade der Flächen schneiden sich nicht. Die einzelnen Elemente der Fläche sind nicht eben, sondern gekrümmt, da zwei Nachbargerade auf der Fläche, so nahe aneinander man sie auch wählen mag, sich nicht schneiden, sondern windschief zueinander verlaufen. Solche Flächen heißen „windschiefe" Regelflächen. Wir werden ein Beispiel einer solchen Fläche weiter unten kennen lernen.

Tangentialebene einer Fläche.

89. Ist auf einer Fläche ein Punkt P gegeben, so können wir durch P auf der Fläche unendlich viele Kurven zeichnen, etwa die Schnittkurven mit den Ebenen eines Büschels, dessen Achse durch P geht. Jede dieser Kurven besitzt in P eine Tangente, und diese Tangente hat mit der betreffenden Kurve, also auch mit der Fläche, zwei Nachbarpunkte in P gemein, ist also auch eine Tangente der Fläche. Nun zeigt die Analysis, daß alle diese Tangenten in einem Punkte P an eine Fläche in einer Ebene liegen, der Tangentialebene in P an die Fläche. P heißt der Berührungspunkt der Tangentialebene. Jede durch P in dieser Ebene gezogene Gerade hat in P zwei benachbarte Punkte mit der Fläche gemein.

Liegt eine Gerade h ganz auf einer Fläche, so geht also die Tangentialebene in jedem Punkte von h jedenfalls durch diese Gerade hindurch.

Liegen auf einer Fläche zwei gerade Linien, die sich schneiden, so ist die Tangentialebene in ihrem Schnittpunkt bestimmt als die Ebene dieser beiden Geraden, gleichgültig, ob die beiden Geraden unendlich benachbart sind oder ob sie einen endlichen Winkel einschließen.

Ist P ein Punkt einer Kegelfläche, so geht die Tangentialebene in P jedenfalls durch die Erzeugende hindurch, welche durch P läuft. Dies ist die Verbindungslinie von P mit der Spitze S des Kegels. Durch S gibt es eine zu dieser Erzeugenden benachbarte Erzeugende und die durch beide bestimmte Ebene muß die Tangentialebene in P sein. Es ist also für alle Punkte einer Erzeugenden einer Kegelfläche (und allgemeiner einer abwickelbaren Fläche) die Tangentialebene die gleiche. Folglich berührt die Tangentialebene einer Kegelfläche oder abwickelbaren

Fläche längs einer Erzeugenden die Fläche (Beispiel: der Kreiskegel).

Ordnung und Klasse einer Fläche.

90. Unter der Ordnung einer Fläche versteht man die Anzahl der Schnittpunkte, welche eine beliebige Gerade mit der Fläche liefert und zwar im algebraischen Sinne, also ohne Rücksicht auf die Realität (vgl. 58.). Diese Ordnung gibt dann auch die Maximalzahl der reellen Schnittpunkte, welche eine Gerade mit der Fläche gemein haben kann.

Hat man eine Kegelfläche, z. B. eine von der 2. Ordnung, so wird sie von irgend einer Geraden in zwei Punkten geschnitten. Nach diesen zwei Punkten laufen nun zwei Erzeugende der Kegelfläche, nämlich die Verbindungslinien derselben mit der Spitze. Die durch die Gerade und die Spitze gehende Ebene hat mit der Kegelfläche die genannten beiden Erzeugenden und bloß diese gemein. Bei einer Kegelfläche gibt also die Ordnung auch die Zahl der Erzeugenden, welche eine beliebige, durch die Spitze gehende Ebene aus dem Kegel ausschneidet.

Der Schnitt irgend einer Ebene mit einer Fläche n^{ter} Ordnung ist eine Kurve n^{ter} Ordnung, da jede Gerade in dieser Ebene n Punkte mit der Fläche, folglich ebenso viele mit der Schnittkurve gemein hat.

Unter der Klasse einer Fläche verstehen wir die Anzahl der Tangentialebenen, die durch eine beliebige Gerade an die Fläche gelegt werden können, auch wieder im Sinne der Analysis.

Eine Kegelfläche, überhaupt jede abwickelbare Fläche besitzt nur einfach unendlich viele (∞^1) Tangentialebenen. Bei diesen Flächen definiert man die Klasse als die Zahl ihrer Tangentialebenen, die durch einen beliebigen Punkt hindurchgehen.

Beispiel einer windschiefen Regelfläche.

91. Gegeben sind drei Gerade h, h_1, h_2, von denen keine zwei in einer Ebene liegen. Eine Gerade bewegt sich so, daß sie beständig jede dieser drei Geraden schneidet. Man beweise:

1) Die bewegte Gerade schneidet auf den drei festen Geraden projektive Punktreihen aus.
2) Schneidet irgend eine Gerade die bewegte Gerade in drei ihrer Lagen, so schneidet sie dieselbe in jeder Lage.

Zunächst ist zu zeigen, wie man sich Gerade verschaffen kann, welche h, h_1 und h_2 begegnen. Wählen

Fig. 68.

wir auf h einen Punkt A willkürlich (Fig. 68), so können wir durch A und h_1 eine Ebene (Ah_1), sowie durch A und h_2 eine Ebene (Ah_2) legen. Diese beiden Ebenen schneiden sich dann in einer Geraden a, welche h_1 in A_1, sowie h_2 in A_2 trifft, also die verlangte Eigenschaft hat. Auf diese Weise können wir unendlich viele solche Gerade b, c, d usw. finden, indem wir auf h Punkte $B, C, D \ldots$ wählen. Es ist klar, daß irgend zwei solche Gerade, z. B. a und b, sich nicht schneiden. Denn wenn sie sich schneiden würden, lägen sie in einer Ebene, und in der gleichen Ebene müßten auch h, h_1, h_2 liegen, was gegen unsere Voraussetzung ist. Also beschreibt die Gerade eine windschiefe Regelfläche. Es ist aber dann nach Satz 4 (S. 38)

$$(ABCD) = [(Ah_1)(Bh_1)(Ch_1)(Dh_1)] = (A_2 B_2 C_2 D_2)$$

und

$$(ABCD) = [(Ah_2)(Bh_2)(Ch_2)(Dh_2)] = (A_1 B_1 C_1 D_1),$$

folglich

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2).$$

Damit ist der erste Teil unserer Behauptung bewiesen.

Es sei ferner eine Gerade h_x gefunden, welche a, b und c schneidet. Projizieren wir nun die projektiven Punktreihen $A, B, C \ldots$ auf h und $A_1, B_1, C_1 \ldots$ auf h_1 je aus h_x durch einen Ebenenbüschel, so sind diese Ebenenbüschel projektiv. Dann sind aber folgende Ebenen identisch:

$$(Ah_x) \equiv (A_1 h_x) \equiv (h_x a)$$
$$(Bh_x) \equiv (B_1 h_x) \equiv (h_x b)$$
$$(Ch_x) \equiv (C_1 h_x) \equiv (h_x c).$$

Es fallen also in den projektiven Büscheln drei Ebenen mit ihren entsprechenden zusammen, folglich muß überhaupt *jede* Ebene mit ihrer entsprechenden identisch sein. Es ist demnach auch $(Dh_x) \equiv (D_1 h_x)$, d. h. die Gerade d und überhaupt *jede* solche Gerade schneidet h_x.

§ 31. Die Kegelfläche 2. Ordnung.

92. Betrachten wir jetzt zwei projektive Ebenenbüschel mit den Achsen s und s_1, die sich in S schneiden mögen (Fig. 69). Dann liefern je zwei entsprechende Ebenen eine Schnittlinie, die auch durch S geht. Das Erzeugnis der projektiven Ebenenbüschel ist demnach eine Kegelfläche mit der Spitze S. Wir fragen zunächst nach

der Ordnung derselben. Zählen wir also ab, in wieviel Punkten eine beliebige Gerade g dieser Kegelfläche begegnet. Zu dem Zwecke werde durch g irgend eine Ebene gelegt. Diese wird die projektiven Ebenenbüschel s und s_1 in zwei projektiven Strahlenbüschel S und S_1 schneiden,

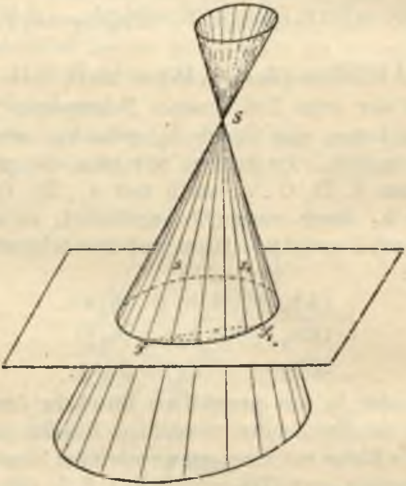

Fig. 60.

und die Schnittkurve der Ebene mit der Kegelfläche stellt sich dar als das Erzeugnis dieser projektiven Strahlenbüschel. Also ist diese Schnittkurve der Ebene mit dem Kegel ganz allgemein ein Kegelschnitt. Die Gerade g aber trifft diesen in zwei Punkten und das sind zugleich ihre Schnittpunkte mit der Kegelfläche. Es ist mithin die Kegelfläche von der 2. Ordnung. Die analytische

Geometrie zeigt überdies, daß sich jede Kegelfläche 2. Ordnung in dieser Weise durch projektive Ebenenbüschel erzeugen läßt. Es ist also die hier betrachtete Kegelfläche die allgemeine 2. Ordnung. Fügen wir noch die Bemerkung hinzu, daß eine Tangentialebene des Kegels die gewählte Ebene in einer Linie schneidet, welche Tangente des Schnittkegelschnittes in dieser Ebene sein muß, so ergibt sich ganz ebenso wie in 59.

Satz 49. „Zwei projektive Ebenenbüschel mit sich schneidenden Achsen s und s_1 erzeugen durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen einen allgemeinen Kegel 2. Ordnung, der auch die Achsen s und s_1 als Erzeugende enthält. Die Tangentialebenen längs dieser beiden Erzeugenden sind die Ebenen, welche der Verbindungsebene $(s s_1)$ bezüglich entsprechen. Der Schnitt des Kegels mit einer beliebigen Ebene ist ein Kegelschnitt. Der Kegel ist auch von der 2. Klasse."

Da jede Erzeugende des Kegels in ihrer ganzen Ausdehnung zu beiden Seiten der Spitze zu nehmen ist, so besteht der Kegel aus zwei in der Spitze zusammenhängenden Mänteln. Was den Schnitt des Kegels mit einer Ebene ε betrifft, so ergeben sich die drei möglichen Fälle folgendermaßen: Legen wir durch die Spitze S des Kegels eine Ebene $\varepsilon_0 \parallel \varepsilon$, so kann ε_0 zwei reelle Erzeugende mit dem Kegel gemeinsam haben. Dann ist der Schnitt von ε mit dem Kegel eine Hyperbel, deren Asymptotenrichtungen durch diese beiden Erzeugenden gegeben sind. Oder ε_0 hat keine reelle Erzeugende mit dem Kegel gemein, in diesem Falle ist der Schnitt von ε mit dem Kegel eine Ellipse. Wenn endlich ε_0 den Kegel berührt, so wird man in ε als Schnitt eine Parabel erhalten. Damit ist die Bezeichnung dieser Kurven als „Kegelschnitte" gerechtfertigt. Sie stammt schon von den Griechen her*).

93. Legt man von einem Punkte S im Raume die projizierenden Strahlen nach den Punkten eines Kreises, so erhält man eine Kegelfläche. Wählt man zwei ihrer Erzeugenden aus, so kann man mit diesen als Achsen die Kegelfläche durch projektive Ebenenbüschel erzeugen, ausgehend von der Erzeugung des Kreises durch projektive Strahlenbüschel. Die Kegelfäche ist also von der 2. Ordnung — sie ist, wie man zeigen kann, identisch mit der allgemeinen Kegelfläche 2. Ordnung — und wird also von einer beliebigen Ebene in einem Kegelschnitt geschnitten. Dies liefert den

Satz 50. „Projiziert man einen Kreis aus irgend einem Punkte auf eine Ebene, so ist die Projektion ein Kegelschnitt."

Wird der Punkt S speziell auf der Senkrechten angenommen, die man im Mittelpunkte M des Kreises auf der Ebene desselben errichten kann, so erhält man einen speziellen Kegel 2. Ordnung, der auch erzeugt werden kann durch Drehung eines rechtwinkeligen Dreieckes um die Kathete SM. Dieser Kegel heißt „gerader Kreiskegel", „Umdrehungskegel", „Rotationskegel". Der Schnitt desselben mit einer beliebigen Ebene ist aber auch wieder ein Kegelschnitt.

Nimmt man die Achsen s und s_1 der projektiven Ebenenbüschel parallel an, so rückt die Spitze S des Kegels ins Unendliche und man erhält als Erzeugnis einen „Zylinder 2. Ordnung". Derselbe kann drei verschiedene Formen annehmen, je nachdem die unendlich ferne Ebene zwei reelle oder zwei zusammenfallende

*) Apollonius von Pergae: „Conica" (250 v. Chr.).

oder zwei imaginäre Gerade aus dem Zylinder ausschneidet. Es gibt deswegen einen hyperbolischen (Fig. 70a), einen parabolischen (Fig. 70b) und einen elliptischen (Fig. 70c) Zylinder 2. Ordnung. Man kann zeigen, daß der letztere auch erhalten wird, wenn man durch die Punkte eines Kreises in beliebiger Richtung unter sich parallele Gerade legt.

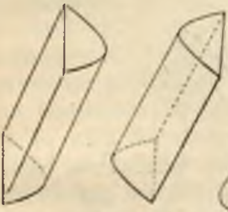
Fig. 70a.

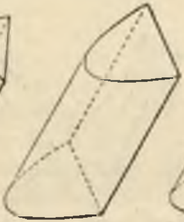
Fig. 70b.

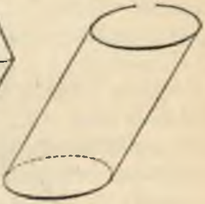
Fig. 70c.

Steht endlich die Richtung dieser parallelen Geraden auf der Ebene des Kreises senkrecht, so geht der elliptische Zylinder in den „Umdrehungs“-, „Rotations“- oder „Kreis“-Zylinder über.

§ 32. Die geradlinige Fläche 2. Ordnung.

94. Betrachten wir jetzt zwei projektive Ebenenbüschel in allgemeiner Lage, deren Achsen s und s_1 sich also nicht schneiden. Je zwei entsprechende Ebenen der Büschel, wie etwa α und α_1, werden sich in einer Geraden h schneiden, die sowohl s in P als s_1 in P_1 treffen muß (Fig. 71). Wir erhalten auf diese Weise unendlich viele Gerade h, h_1, h_2 usw., die offenbar eine windschiefe Regelfläche bilden (Beweis dafür wie in 91.). Wir nennen

das System dieser Geraden auch eine „Regelschar“ und bezeichnen es kurz mit [h]. Die dadurch gegebene Regelfläche ist von der 2. Ordnung. Denn schneiden wir sie mit irgend einer Ebene, so werden die projektiven Ebenenbüschel s und s_1 in projektiven Strahlenbüscheln S und S_1 getroffen, deren Erzeugnis den Schnitt mit der Ebene liefert. Es schneidet also die beliebige Ebene die Regelfläche nach einem Kegelschnitt, mithin ist die Fläche von

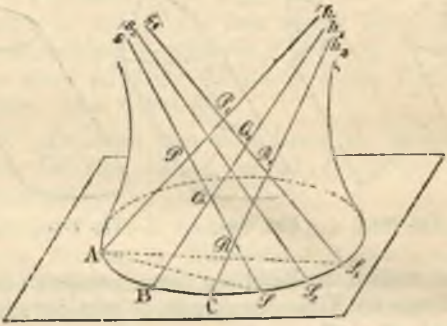

Fig. 71.

der 2. Ordnung. Die Rechnung zeigt wieder, daß die allgemeine Fläche 2. Ordnung, wie sie durch eine beliebige Gleichung 2. Grades gegeben wird, in dieser Weise erzeugt werden kann. Diese geradlinige Fläche 2. Ordnung heißt auch „einschaliges Hyperboloid“.

Es ergibt sich sofort auch eine zweite Erzeugung unserer Fläche. Trifft die Erzeugende h_1 in Q und Q_1, ferner h_2 in R und R_1 die Achsen s und s_1 usw., so ist die Reihe der Punkte P_1, Q_1, R_1 . . . perspektiv zu den Ebenen α, β, γ des Büschels s, durch die sie ausgeschnitten wird. Ebenso ist die Punktreihe P, Q, R ... auf s zum Ebenenbüschel α_1, β_1, γ_1 ... perspektiv. Da aber die beiden Ebenenbüschel projektiv, so ist auch die Punktreihe P, Q, R ... projektiv zur Punktreihe P_1, Q_1, R_1 ... Die Regelschar [h] kann also auch dadurch erhalten werden, daß man in zwei projektiven Punktreihen im Raume entsprechende Punkte durch Gerade verbindet.

Daraus folgt aber noch eine weitere merkwürdige Eigenschaft. Ist nämlich s_2 irgend eine Gerade, welche die drei Geraden h, h_1, h_2 schneidet, so sind alle Voraussetzungen erfüllt, um den in 91., 2) ausgesprochenen Satz anwenden zu können. Demnach muß s_2 jede Gerade h der Regelschar [h] schneiden und jede Gerade, welche h, h_1, h_2 trifft, hat diese Eigenschaft. Alle diese Geraden bilden aber wieder eine Regelschar [s], die auch von der 2. Ordnung, und alle Erzeugende dieser zweiten Regelschar müssen ebenfalls auf unserer Fläche 2. Ordnung gelegen sein, da durch jeden Punkt einer Geraden von [s] ja eine Gerade von [h] geht. Die Achsen s und s_1 gehören auch zu dieser Regelschar [s]. Wir haben folglich:

Satz 51. „Das Erzeugnis zweier projektiver Ebenenbüschel in allgemeiner Lage ist eine Regelschar [h] oder eine geradlinige Fläche 2. Ordnung. Dieselbe Fläche kann auch dadurch erzeugt werden, daß man in zwei projektiven Punktreihen im Raume entsprechende Punkte durch Gerade verbindet. Auf der Fläche liegt noch eine zweite Regelschar [s]. Alle Geraden h sind untereinander windschief, ebenso alle Geraden s, aber jede Gerade h schneidet jede Gerade s. Irgend zwei Gerade einer Regelschar werden von den Geraden der anderen Schar in projektiven Punktreihen geschnitten."

Die Fläche ist dieselbe wie die in 91. erwähnte, und sie läßt sich in doppelter Weise durch Bewegung einer Geraden erzeugen. Denn greift man irgend drei Gerade der einen Regelschar heraus und läßt eine Gerade sich so bewegen, daß sie stets diese drei Geraden schneidet, so beschreibt die bewegte Gerade die andere Regelschar. Hat man überhaupt zwei Systeme [h] und [s] von unendlich vielen Geraden derart, daß alle Geraden eines Systems untereinander windschief sind, während jede Gerade des einen Systems jede des anderen schneidet, so bilden dieselben die beiden Regelscharen einer solchen geradlinigen Fläche 2. Ordnung (Monge 1795).

95. Legt man durch eine Gerade h_x der Regelschar [h] irgend eine Ebene, so wird diese noch eine Gerade aus der Fläche ausschneiden, da die Schnittkurve im ganzen von der 2. Ordnung sein muß. Diese Gerade kann dann, da sie h_x schneidet, nur der Regelschar [s] angehören und heiße s_x. Für den Schnittpunkt von h_x und s_x ist die Ebene also (89.) die Tangentialebene. Es muß folglich jede Ebene, die durch eine Gerade der Fläche 2. Ordnung hindurchgeht, eine Tangentialebene der Fläche sein. In jedem Punkte der Fläche wird die Tangentialebene bestimmt als die Ebene der beiden durch diesen Punkt gehenden Erzeugenden.

Die verschiedenen Typen der geradlinigen Fläche 2. Ordnung erhalten wir, wenn wir uns die Fläche durch projektive Punktreihen s und s_1 erzeugt denken. Es sind dann folgende zwei Fälle möglich:

a) Die unendlich fernen Punkte von s und s_1 entsprechen einander nicht in der projektiven Beziehung dieser beiden Punktreihen. Es entspricht also z. B. dem unendlich fernen Punkt von s ein bestimmter endlicher Punkt auf s_1. Die Parallele durch diesen Punkt zu s ist eine Erzeugende h_s der Regelschar [h]. In gleicher Weise gibt es zu jeder Erzeugenden eine parallele Erzeugende der anderen Schar. Die dadurch erzeugte Fläche lag unseren bisherigen Betrachtungen zugrunde und wir nannten sie bereits das einschalige Hyperboloid (Fig. 72). Die unendlich ferne Ebene schneidet die Fläche in einem Kegelschnitt.

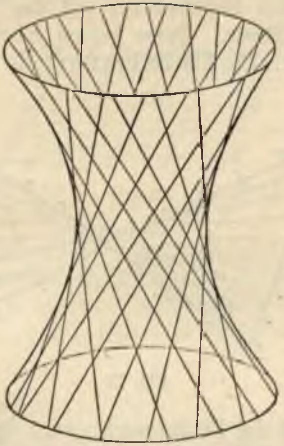

Fig. 72.

b) Tritt der speziellere Fall ein, daß die unendlich fernen Punkte von s und s_1 einander entsprechen, so sind diese Punktreihen ähnlich. Die Verbindungslinie dieser beiden unendlich fernen Punkte ist eine ganz im Unendlichen gelegene Gerade h_∞, die bestimmt ist durch die Stellung der Ebene, welche parallel zu s und s_1 läuft. Alle Geraden der Regelschar [s] müssen aber h_∞ schneiden, also sind sie alle parallel zu dieser Ebene.

Die unendlich ferne Ebene enthält nun von unserer Fläche die Gerade h_∞, sie muß mithin noch eine Gerade s_∞ der anderen Schar enthalten. Alle Geraden h müssen s_∞ schneiden, also sind auch alle Geraden der Regelschar [h] parallel einer bestimmten Ebene. Die dadurch entstehende Fläche heißt „windschiefes" oder „hyperbolisches Paraboloid" (Fig. 73). Die Geraden einer jeden der beiden Regelscharen auf der Fläche sind je parallel einer Ebene. Diese beiden Ebenen heißen die „Leitebenen". Die Fläche berührt die unendlich ferne Ebene.

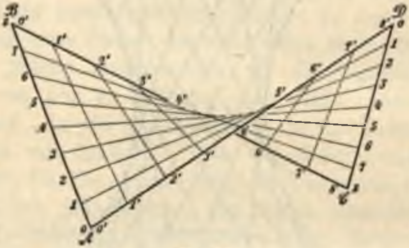

Fig. 73.

Man erhält die Fläche auch, wenn man eine Gerade sich so bewegen läßt, daß sie beständig zwei feste Gerade schneidet und dabei parallel bleibt zu einer gegebenen festen Ebene.

Eine einfache Erzeugung dieser Fläche besteht darin, daß man (Fig. 73) in einem Tetraeder zwei Paare von Gegenkanten (AB und CD, BC und AD) in gleichviel Teile teilt und entsprechende Teilpunkte verbindet.

Daß diese beiden Systeme von Geraden der gleichen Fläche angehören, folgt leicht aus den abgeleiteten Sätzen. Wählt man ferner eine Ebene, welche zu AB und CD parallel ist, so gibt sie die Stellung der einen Leitebene, während die andere Leitebene zu den Gegenkanten BC und AD parallel läuft. Schneiden sich zwei Ebenen dieser beiden Ebenenbüschel in einer Geraden g und nehmen wir eine Tafel senkrecht zu g, um in diese das Tetraeder und die Geraden der Fläche orthogonal zu projizieren, so erhalten wir als Bild das Parallelogramm $A_1 B_1 C_1 D_1$ (Fig. 74) sowie die Parallelen zu den Seiten.

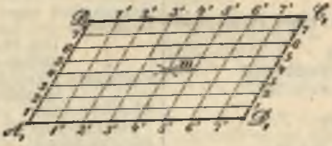

Fig. 74.

Der Schnittpunkt m_1 der Diagonalen ist die Projektion der Linie m, welche die Mitten des letzten Paares von Gegenkanten AC und BD des Tetraeders verbindet. Die beiden Leitebenen sind also auch zu m parallel.

Register.

(Die beigesetzten Zahlen geben die Seite des Buches an.)

Abwickelbare Fläche 165.
Achse eines Ebenenbüschels 6.
Achse der Perspektivität 63.
Achsen eines Kegelschnittes 161.
Ähnliche Punktreihen 69.
Asymptoten 136.

Berührungspunkt einer Tangente 104.
Berührungspunkt einer Tangentialebene 166.
Brennpunkte 162.
Brianchonscher Punkt 126.
Brianchonscher Satz 126.

Ceva, Satz des 99

Desargues, Satz des 65.
Developpable Fläche 165
Doppelelemente einer projektiven Beziehung 73.
Doppelpunkte, Konstruktion der 77.
Doppelverhältnis v. vier Ebenen 35.
" " " Punkten 31.
" " " Strahlen 33.
Duale Figuren 13, 157.
Dualität, Gesetz der 13, 157.
Durchmesser eines Kegelschnittes 158.

Ebenenbündel 6.
Ebenenbüschel 6.
Ebenes System 7.
Einförmige Grundgebilde 6.
Einhüllende Kurve 104.
Ellipse 136.
Elliptische Involution 87.
Entgegengesetzt laufende Punktreihen 72.
Entgegengesetzt laufende Strahlenbüschel 72.
Erzeugende einer Fläche 164.
Erzeugnis zweier projektiver Ebenenbüschel 164, 168.
Erzeugnis zweier projektiver Punktreihen 118, 173.
Erzeugnis zweier projektiver Strahlenbüschel 105.
Erzeugung neuer Gebilde 101.

Feld 7.
Fläche, geradlinige, 2. Ordnung 173.
Fluchtpunkte 68.

Gauß, Satz von 97.
Gegenecken eines Sechsseits 125.
Gegenecken eines Vierseits 51.
Gegenseiten eines Sechsecks 113.
Gegenseiten eines Vierecks 47.
Geometrie der Lage 10.
" des Maßes 11.
" projektive 10.
Getrennte Punktpaare 32.
" Strahlenpaare 34.
Gleichlaufende, gleichsinnige Punktreihen 72.
Gleichlaufende, gleichsinnige Strahlenbüschel 72.
Grundgebilde 5, 6, 7.

Harmonikale 98
Harmonische Ebenen 44.
" Punkte 44, 45, 48, 54.
" Strahlen 44, 46, 52, 55.
Hyperbel 137.
Hyperbolische Involution 87.
Hyperbolisches Paraboloid 178.
Hyperboloid, das einschalige 174, 177.

Imaginäre Doppelpunkte 81.
Imaginäre Punkte eines Kegelschnittes 157.
Imaginäre Tangenten eines Kegelschnittes 157.
Involution von Ebenen 86.
" " Punkten 86.
" " Strahlen 86.
" rechtwinklige, zirkulare 93.
Involutorische Lage 86.

Kegelfläche, allgemeine 165.
Kegelfläche 2. Ordnung 169.
Kegelschnitte, die 134, 171.
Klasse einer Fläche 167.
" " Kurve 105.
Kongruente Punktreihen 69.
" Strahlenbüschel 70.

Konjugierte Durchmesser 159.
„ Gerade 150, 153.
„ Punkte 149, 153.
Kreisbüschel 91.
Kreiskegel 172.
Kreiszylinder 173.
Kurve 2. Klasse 118.
„ 2. Ordnung 105.

Leitebenen 178.
Lemoine, Gerade von 100

Mac-Laurinsche Konfiguration 130.
Mannigfaltigkeit 7.
Maßbestimmung in der Punktreihe 28.
Maßbestimmung im Strahlenbüschel 25.
Menelaos, Satz des 100
Metrische Geometrie 10.
Mittelpunkt eines Kegelschnittes 158.
Mittelpunkt einer Punktinvolution 89.
Mittelpunkt ein. Strahlenbündels 6.
„ „ Strahlenbüschels 6.

Nebenecken eines Vierecks 48.
Nebenseiten eines Vierseits 51.

Ordnung einer Fläche 167.
„ „ Kurve 103.

Parabel 138.
Parabolische Involution 87.
Paraboloid, hyperbolisches 178.
Parameter eines Punktes 29.
„ „ Strahles 27.
Pascalsche Linie 114.
Pascalscher Satz 114.
Perspektive Beziehung der Grundgebilde 24.
Perspektive Punktreihen 22.
„ Strahlenbüschel 23.
Perspektivitätsachse 63.
Perspektivitätszentrum 62.
Pol einer Geraden 152.
Polardreieck 154.
Polare eines Punktes 150.
Projektive Grundgebilde 57.
„ Punktreihen 57.
„ Strahlenbüschel 58.
Projektivität 57.
Projizierens, die Operation des 9.
Punktfeld 7.
Punktreihe 5, 6.

Rechtwinkelinvolution 93.
Regelfläche, allgemeine 164.
„ 2. Ordnung 173.
Regelschar 178.
Reziproke Figuren 13, 157.
Reziprozität, Gesetz der 13, 157.
Rotationskegel 172.
Rotationszylinder 173.

Schneidens, Operation des 8.
Sinn in einer Punktreihe 29.
Sinn in einem Strahlenbüschel 26.
Steinersche Konstruktion 77.
Strahl 5.
Strahlenbündel 6.
Strahlenbüschel 6.
Strahlenfeld 9.
Strecke zwischen zwei Punkten 29.
System, ebenes 7.

Tangente einer Kurve 104.
Tangentialebene einer Fläche 166.
Träger eines Ebenenbüschels 6.
Träger einer Punktreihe 6.
Transversalen beim Dreieck 99.
Trennungspunkt 29.
Trennungsstrahl 26.

Umdrehungskegel 172.
Umdrehungszylinder 173.
Umhüllende Kurve 104.
Uneigentliche Elemente 17.
Uneigentliche, unendlich ferne Ebene 20.
Uneigentliche, unendlich ferne Gerade 19.
Uneigentlicher, unendlich ferner Punkt 17.
Ungleichsinnige Punktreihen 72.
„ Strahlenbüschel 72.

Viereck, das vollständige 47.
Vierseit, das vollständige 51.

Winkel zweier Strahlen 25.
Wurf von vier Elementen 54.

Zentrum der Perspektivität 62.
Zylinder, elliptischer, parabolischer, hyperbolischer 173.
Zylinderfläche, allgemeine 165.
„ 2. Ordnung 172.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände.

Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Berlin u. Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 232.

Agrikulturchemie. I: Pflanzenernährung v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Agrikulturchemische Kontrollwesen, Das, von Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Akustik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik u. Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, Prof an der Univers. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— **Musikalische,** v. Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Univers. Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.

Algebra. Arithmetik u. Algebra v. Dr. H. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Alpen, Die, von Dr. Rob. Sieger, Prof. an der Universität Graz. Mit 19 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 129.

Altertümer, Die deutschen, v. Dr. Franz Fuhse, Direktor d. städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abb. Nr. 124.

Altertumskunde, Griechische, von Prof. Dr. Rich. Maisch, neubearb. von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

— **Römische,** von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollb. Nr. 45.

Amphibien siehe: Tierreich III.

Analyse, Techn.-Chem., von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechn. Schule i. Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— — Repetitorium und Aufgabensammlung z. Differentialrechnung v. Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.

— — **II:** Integralrechnung. Von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium i. Stuttgart. M. 89 Fig. Nr. 88.

Analysis, Höhere, Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 50 Fig. Nr. 147.

— **Niedere,** von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.

Arbeiterfrage, Die gewerbliche, von Werner Sombart, Prof. an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Arbeiterversicherung, Die, v. Prof. Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Arithmetik und Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— — Beispielsammlung zur Arithmetik u. Algebra v. Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Armenwesen u. Armenfürsorge. Einführung in die soziale Hilfsarbeit von Dr. Adolf Weber in Bonn. Nr. 346.

Ästhetik, Allgemeine, von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer an d. Kgl. Akademie der bildenden Künste in Stuttgart. Nr. 300.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. W. F. Wislicenus, Prof. a. d. Univers. Straßburg. Mit 36 Abb. u. 1 Sternk. Nr. 11.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbild. Nr. 91.

Aufgabensammlg. f. Analyt. Geometrie d. Ebene v. O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 256.

— — **d. Raumes** von O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 8 Fig. Nr. 309.

— **Physikalische,** v. G. Mahler, Prof. der Mathem. u. Physik am Gymnas. in Ulm. Mit d. Resultaten. Nr. 243.

Aufsatzentwürfe von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von Wilh. Weitbrecht, Prof. der Geodäsie in Stuttgart. Mit 15 Figuren und 2 Tafeln. Nr 302.

Bade- und Schwimmanstalten, Oeffentliche, von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.

Baukunst, Die, des Abendlandes von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbild. Nr. 74.

Betriebskraft, Die zweckmäßigste, von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 1. Teil: Die mit Dampf betriebenen Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- u. Betriebskosten M 14 Abb. Nr. 224.

— — 2. Teil: Verschiedene Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 29 Abbild. Nr. 225.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 15 Abbild. Nr. 96.

Biologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Biologie der Tiere, Abriß der, von Dr. Heinr. Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Nr. 131.

Bleicherei siehe: Textil-Industrie III.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor d. Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Mit 16 Abbild. Nr. 303.

Buchführung in einfachen und doppelten Posten von Rob. Stern, Oberlehrer der Offentl. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule z. Leipzig. Mit vielen Formularen. Nr. 115.

Buddha von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbild. Nr. 119.

Chemie, Allgemeine und physikalische, von Dr. Max Rudolphi, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Fig. Nr. 71.

Chemie, Analytische, von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— — II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

— **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

— — siehe auch: Metalle. — Metalloide.

Chemie, Geschichte der, von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

— **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

— — III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— — IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

— **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

— **Physiologische,** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — II: Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.

Chemisch-Technische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

Christentum. Die Entwicklung des Christentums innerhalb des Neuen Testaments. Von Prof. Dr. Lic. Carl Clemen. Nr. 388.

Dampfkessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Fig. Nr. 9.

Dampfmaschine, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Fig. Nr. 8.

Dampfturbinen, Die, ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ingenieur Hermann Wilda, Oberlehrer am staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abbild. Nr. 274.

Dichtungen a. mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl m. Einltg. u. Wörterb. herausgegeb. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Dietrichepen. Kudrun u. Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Univers. Münster. Nr. 10.

Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. a. Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Eisenbetonbau, Der, von Reg.-Baumeister Karl Rößle. Mit 75 Abbildungen. Nr. 349.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hütteningen. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.

— II. Teil: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Eisenkonstruktionen im Hochbau von Ingenieur Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Fig. Nr. 322.

Elektrizität. Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. a. d. Univers. Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.

Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel in Friedrichshagen. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Fig. Nr. 252.

— — II. Teil: Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Fig. Nr. 253.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. M. 47 Fig. Nr. 196.

— — II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Fig. Nr. 197.

— — III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Fig. Nr. 198.

Entwicklung, Die, der sozialen Frage von Prof. Dr. Ferdinand Tönnies. Nr. 353.

Entwicklung, Die, des Christentums siehe: Christentum.

— **der Handfeuerwaffen** siehe: Handfeuerwaffen.

Entwicklungsgeschichte der Tiere von Dr. Johannes Meisenheimer, Prof. der Zoologie an der Universität Marburg. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

— — II: Organbildung. Mit 46 Fig. Nr. 379.

Epigonen, Die, des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied des Königl. Preußischen Meteorologischen Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbild. und 3 Taf. Nr. 175.

Ethik von Professor Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. I. Teil. Mit 50 Abbild. Nr. 268.

— — 2. Teil. Mit 50 Abbild. Nr. 269.

Explosivstoffe. Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Neubabelsberg. Mit 6 Abbild. u. 12 Tab. Nr. 333.

Familienrecht. Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Nr. 305.

Färberei siehe: Textil-Industrie III.

Feldgeschütz, Das moderne, I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschließlich der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1850 bis 1890, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

Feldgeschütz, Das moderne, II: Die Entwicklung des heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 11 Abbild. Nr. 307.

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Fig. und 1 Tafel. Nr. 155.

Festigkeitslehre von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. M. 56 Fig. Nr. 288.

Fette, Die, und Oele sowie die Seifen- u. Kerzenfabrikation und die Harze, Lacke, Firnisse mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin I: Einführung in die Chemie, Besprechung einiger Salze und die Fette und Öle. Nr. 335.

— — II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbild. Nr. 336.

— — III: Harze, Lacke, Firnisse. Nr. 337.

Filzfabrikation siehe: Textil-Industrie II.

Finanzwissenschaft v. Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. I: Allgemeiner Teil. Nr. 148.

— — II: Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.

Firnisse siehe: Fette und Öle III.

Fische. Das Tierreich IV: Fische von Privatdozent Dr. Max Rauther in Gießen. Mit 37 Abbild. Nr. 356.

Fischerei und Fischzucht v. Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

Formelsammlung, Mathemat., u. Repetitorium d. Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes, d. Different.- u. Integralrechn. v. O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. Mit 18 Fig. Nr. 51.

— **Physikalische**, von G. Mahler, Prof. a. Gymn. in Ulm. Mit 65 Fig. Nr. 136.

Forstwissenschaft von Dr. Ad. Schwappach, Professor an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.

Fremdwort, Das, im Deutschen von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.

Fremdwörterbuch, Deutsches, von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.

Gardinenfabrikation siehe: Textil-Industrie II.

Gaskraftmaschinen, Die, von Ing. Alfred Kirschke in Halle a. S. Mit 55 Figuren. Nr. 316.

Genossenschaftswesen, Das, in Deutschland. Von Dr. Otto Lindecke, Sekretär des Hauptverbandes deutscher gewerblicher Genossenschaften. Nr. 384.

Geodäsie von Dr. C. Reinhertz, Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild. Nr. 102.

Geographie, Astronomische, von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Mit 52 Abbild. Nr. 92.

— **Physische**, von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbild. Nr. 26.

— s. auch: Landeskunde. — Länderkunde.

Geologie in kurzem Auszug für Schulen und zur Selbstbelehrung zusammengestellt von Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. und 4 Taf. mit 51 Fig. Nr. 13.

Geometrie, Analytische, der Ebene von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Fig. Nr. 65.

— — **Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene** von O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Fig. Nr. 256.

— **Analytische, des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbild. Nr. 89.

— — **Aufgabensammlung z. Analyt. Geometrie d. Raumes** von O. Th. Bürklen, Prof. a. Realgymn. i. Schwäb.-Gmünd. M. 8 Fig. Nr. 309.

— **Darstellende**, von Dr. Robert Haußner, Prof. an der Univ. Jena. I. Mit 110 Fig. Nr. 142.

Geometrie, Analyt., Aufgabensammlung z. Analytischen Geometrie der Ebene, von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarb. Fig. Nr. 41.

— **Projektive**, in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Professor an der Universität München. Mit 91 Fig. Nr. 72.

Geschichte, Badische, von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim und Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.

— **der Christlichen Balkanstaaten** (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.

— **Bayerische**, von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

— **des Byzantinischen Reiches** von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

— **Deutsche, I: Mittelalter** (bis 1519) von Dr. F. Kurze, Prof. am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 33.

— — **II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** (1500—1648) von Dr. F. Kurze, Professor am Königl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 34.

— — **III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648—1806) von Dr. F. Kurze, Prof. am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 35.

— — siehe auch: Quellenkunde.

— **Englische**, von Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.

— **Französische**, von Dr. R. Sternfeld, Prof. a. d. Univers. Berlin. Nr. 85.

— **Griechische**, von Dr. Heinrich Swoboda, Prof. an der deutschen Univers. Prag. Nr. 49.

— **des 19. Jahrhunderts** v. Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Univers. Bonn. 1. Bdchn.: 1800—1852. Nr. 216.

— — 2. Bdchn.: 1853 bis Ende d. Jahrh. Nr. 217.

— **Israels** bis auf die griech. Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Geschichte Lothringens, v. Dr. Hermann Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.

— **des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, Prof. a. d. Univers. München. M. 9 Bild. u. 1 Kart. Nr. 43.

— **Oesterreichische, I**: Von der Urzeit bis zum Tode König Albrechts II. (1439) von Professor Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Mit 11 Stammtaf. Nr. 104.

— — **II**: Vom Tode König Albrechts II. bis zum Westfälischen Frieden (1440 bis 1648), von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Mit 3 Stammtafeln. Nr. 105.

— **Polnische**, v. Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.

— **Römische**, von Realgymnasial-Dir. Dr. Jul. Koch in Grunewald. Nr. 19.

— **Russische**, v. Dr. Wilh. Reeb, Oberl. am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.

— **Sächsische**, von Professor Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.

— **Schweizerische**, von Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.

— **Spanische**, von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.

— **Thüringische**, von Dr. Ernst Devrient in Jena. Nr. 352.

— **der Chemie** siehe: Chemie.

— **der Malerei** siehe: Malerei.

— **der Mathematik** s.: Mathematik.

— **der Musik** siehe: Musik.

— **der Pädagogik** siehe: Pädagogik.

— **der Philologie** s.: Philologie.

— **der Physik** siehe: Physik.

— **des deutschen Romans** s.: Roman.

— **der Seemacht** s.: Seemacht.

— **der deutschen Sprache** siehe: Grammatik, Deutsche.

— **des deutschen Unterrichtswesens** siehe: Unterrichtswesen.

— **des Zeitungswesens** s.: Zeitungswesen.

— **der Zoologie** siehe: Zoologie.

Geschichtswissenschaft, Einleitung in die, von Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 270.

Geschütze, Die modernen, der Fußartillerie. I: Vom Auftreten der gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890 v. Mummenhoff, Major beim Stabe des Fußartillerie-Regiments Generalfeldzeugmeister (Brandenburgisches Nr. 3). Mit 50 Textbildern. Nr. 334.

— — II: Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 31 Textbildern. Nr. 362.

Gesetzbuch, Bürgerliches, siehe: Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches.

Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.

Gewerbehygiene von Dr. E. Roth in Potsdam. Nr. 350.

Gewerbewesen von Werner Sombart, Prof. an d. Handelshochschule Berlin. I. II. Nr. 203. 204.

Gewichtswesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Gleichstrommaschine, Die, von C. Kinzbrunner, Ingenieur und Dozent für Elektrotechnik an der Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Fig. Nr. 257.

Gletscherkunde von Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbild. im Text und 11 Taf. Nr. 154.

Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach u. Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Grammatik, Deutsche, und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

— **Griechische**, I: Formenlehre von Dr. Hans Meltzer, Prof. an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 117.

— — II: Bedeutungslehre und Syntax von Dr. Hans Meltzer, Prof. an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 118.

Grammatik, Lateinische. Grundriß der lateinischen Sprachlehre von Prof. Dr. W. Votsch in Magdeburg. Nr. 82.

— **Mittelhochdeutsche.** Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Prof. an der Univers. Rostock. Nr. 1.

— **Russische**, von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 66.

— — siehe auch: Russisches Gesprächsbuch. — Lesebuch.

Handelskorrespondenz, Deutsche, von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.

— **Englische**, von E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.

— **Französische**, von Professor Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.

— **Italienische**, von Prof. Alberto de Beaux, Oberlehrer am Kgl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.

— **Russische**, von Dr. Theodor von Kawraysky in Leipzig. Nr. 315.

— **Spanische**, von Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.

Handelspolitik, Auswärtige, von Dr. Heinr. Sieveking, Prof. an der Univers. Marburg. Nr. 245.

Handelswesen, Das, von Geh. Oberregierungsrat Dr. Wilh. Lexis, Prof. a. d. Univers. Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

— — II: Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Handfeuerwaffen, Die Entwicklung der, seit der Mitte des 19. Jahrhunderts und ihr heutiger Stand von G. Wrzodek, Oberleutnant im Infanterie-Regiment Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Posensches) Nr. 59 und Assistent der Königl. Gewehr-Prüfungskommission. Mit 21 Abb. Nr. 366.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Königlichen Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Harze, Lacke, Firnisse von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle III.) Nr. 337.

Hauptliteraturen, Die, d. Orients v. Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. a. d. Univers. Wien. I. II. Nr. 162. 163.

Heizung und Lüftung von Ingenieur Johannes Körting in Düsseldorf. I.: Das Wesen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 34 Fig. Nr. 342.

— — II.: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Fig. Nr. 343.

Heldensage, Die deutsche, von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Prof. an der Univers. Münster. Nr. 32.

— siehe auch: Mythologie.

Hygiene des Städtebaus, Die, von Professor H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit 30 Abb. Nr. 348.

— **des Wohnungswesens** von Prof. H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit 5 Abbild. Nr. 363.

Industrie, Anorganische Chemische, v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Taf. Nr. 205.

— — II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Taf. Nr. 206.

— — III: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

Industrie der Silikate, der künstl. Bausteine und des Mörtels. I: Glas und keramische Industrie von Dr. Gustav Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Taf. Nr. 233.

— — II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Taf. Nr. 234.

Infektionskrankheiten, Die, und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildung. u. einer Fiebertafel. Nr 327.

Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymn. in Stuttgart. Mit 89 Fig. Nr. 88.

— Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung v. Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsgymn. in Stuttgart. Mit 52 Fig. Nr. 147.

Kartenkunde, geschichtlich dargestellt von E. Gelcich, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo und F. Sauter, Prof. am Realgymn. in Ulm, neu bearb. von Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin. Mit 70 Abbild. Nr. 30.

Kerzenfabrikation siehe: Fette und Öle II.

Kirchenlied. Martin Luther, Thom. Murner, und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Kirchenrecht von Dr. Emil Sehling, ord. Professor d. Rechte in Erlangen. Nr. 377.

Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Koppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. und 2 Fig. Nr. 114.

Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Prof. der Geschichte an der Univers. Berlin. Nr. 156.

Kolonialrecht, Deutsches, von Dr. H. Edler von Hoffmann, Privatdoz. an der Univers. Göttingen Nr. 318.

Kompositionslehre. Musikalische Formenlehre von Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.

Kontrollwesen, Das agrikulturchemische, von Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Körper, der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbild. und 1 Taf. Nr. 18.

Kostenanschlag siehe: Veranschlagen.

Kristallographie von Dr. W. Bruhns, Prof. an der Univers. Straßburg. Mit 190 Abbild Nr. 210.

Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Univers. Münster. Nr. 10.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Kultur, Die, der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Privatdozent an der Univers. Wien. Nr. 189.

Kulturgeschichte, Deutsche, von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Künste, Die graphischen, von Carl Kampmann, Fachlehrer a. d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbild. und Beilagen. Nr. 75.

Kurzschrift siehe: Stenographie.

Lacke siehe: Fette und Öle III.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Prof. am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

— **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Professor a. Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen und Profil. Nr. 63.

Landeskunde u. Wirtschaftsgeographie d. Festland. Australien von Dr. Kurt Hassert, Professor der Geographie an d. Handels-Hochschule in Köln. Mit 8 Abbild., 6 graphisch. Tabellen und 1 Karte. Nr. 319.

Landeskunde von Baden von Prof. Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. Mit Profil, Abbild. und 1 Karte. Nr. 199.

— **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Prof. an d. Kgl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbild. u. 1 Karte. Nr. 176.

— **von Britisch-Nordamerika** von Prof. Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbild. und 1 Karte. Nr. 284.

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildgn. u. 1 Karte. Nr. 215.

— **der Iberischen Halbinsel** von Dr. Fritz Regel, Prof. an der Univers. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbild. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

— **von Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Professor an der Univers. Berlin. Mit 10 Textillustration. und 1 Karte. Nr. 244.

— **des Europäischen Rußlands nebst Finnlands** von Professor Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.

— **des Königreichs Sachsen** v. Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 258.

Landeskunde von Skandinavien (Schweden, Norwegen und Dänemark) von Heinrich Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbild. und 1 Karte. Nr. 202.

— **des Königreichs Württemberg** v. Dr. Kurt Hassert, Prof. d. Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbild. u. 1 Karte. Nr. 157.

Landes- u. Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Vollbild. u. 1 Karte. Nr. 345.

Landwirtschaftliche Betriebslehre von Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 227.

Leben, Deutsches, im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- und Kunstepen und zum Minnesang Von Prof Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. 1. Teil: Öffentliches Leben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 93.

— — 2. Teil: Privatleben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 328.

Lessings Emilia Galotti. Mit Einleitung und Anmerkungen von Prof. Dr. W. Votsch. Nr. 2.

— **Minna v. Barnhelm.** Mit Anm. von Dr. Tomaschek. Nr. 5.

Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

Literatur, Althochdeutsche, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

— **des 16. Jahrhunderts I: Martin Luther, Thom. Murner u. das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

— — **II: Hans Sachs.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos und Fabel. Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.
— **Deutsche, des 17. und 18. Jahrhunderts** von Dr. Paul Legband in Berlin. Erster Teil. Nr. 364.
Literaturen, Die, des Orients. I. Teil: Die Literaturen Ostasiens und Indiens v. Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Nr. 162.
— II. Teil: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken, von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Nr. 163.
Literaturgeschichte, Deutsche, von Dr. Max Koch, Professor an der Univers. Breslau. Nr. 31.
— **Deutsche, der Klassikerzeit** von Carl Weitbrecht, Prof. an der Techn. Hochschule Stuttgart. Nr. 161.
— **Deutsche, des 19. Jahrhunderts** v. Carl Weitbrecht, Prof. an d. Techn. Hochschule Stuttgart, neubearb. von Dr. Rich. Weitbrecht in Wimpfen. I. II. Nr. 134. 135.
— **Englische,** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.
— — Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286. 287.
— **Griechische,** mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 70.
— **Italienische,** von Dr. Karl Voßler, Prof. a. d. Univ Heidelberg. Nr. 125.
— **Nordische,** I. Teil: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Prof. an d. Univers. Rostock. Nr. 254.
— **Portugiesische,** von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule München. Nr. 213.
— **Römische,** von Dr. Hermann Joachim in Hamburg. Nr. 52.
— **Russische,** von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.
— **Slavische,** von Dr. Josef Karásek in Wien. 1. Teil: Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.
— — 2. Teil: Das 19. Jahrh. Nr. 278.
Literaturgeschichte, Spanische, von Dr. Rudolf Beer in Wien. I. II. Nr. 167. 168.
Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.
Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie v Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.
Luther, Martin, Thom. Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.
Magnetismus. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.
Malerei, Geschichte der, I. II. III. IV. V. von Dr. Rich. Muther, Prof. an d. Univers. Breslau. Nr. 107—111.
Mälzerei. Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. P. Dreverhoff, Direktor der Öffentl. u. I. Sächs. Versuchsstat. für Brauerei u Mälzerei, sow. d. Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Nr. 303.
Maschinenelemente, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Fr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.
Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.
Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. August Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.
Materialprüfungswesen. Einführ. i. d. mod. Technik d. Materialprüfung von K. Memmler, Diplomingenieur. Ständ. Mitarbeiter a. Kgl. Material-Prüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel f. Festigkeitsversuche. Mit 58 Fig. Nr. 311.
— — II: Metallprüfung u. Prüfung v. Hilfsmaterialien d. Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Fig. Nr. 312.

Mathematik, Geschichte der, von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univ. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

Meereskunde, Physische, von Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbild. im Text und 8 Taf. Nr. 112.

Messungsmethoden, Physikalische v. Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Fig. Nr. 301.

Metalle (Anorganische Chemie 2. Teil) v. Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Metalloide (Anorganische Chemie 1. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Metallurgie von Dr. Aug. Geitz, diplom. Chemiker in München, I. II. Mit 21 Fig. Nr. 313. 314.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Prof. an der Univers. Innsbruck. Mit 49 Abbild. und 7 Taf. Nr. 54.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.

Mineralogie von Dr. R. Brauns, Prof. an der Univers. Bonn. Mit 130 Abbild. Nr. 29.

Minnesang und Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Prof. an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Morphologie, Anatomie u. Physiologie der Pflanzen. Von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 141.

Münzwesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Murner, Thomas. Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrh. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberl. am Nikolaigymn. zu Leipzig. Nr. 7.

Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen, von Dr. A. Möhler in Pfrungen. Zwei Bändchen. Mit zahlreichen Abbild. und Musikbeilagen. Nr. 121 und 347.

Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre) v. Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.

Musikästhetik von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

Musikgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.

— **des 19. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164. 165.

Musiklehre, Allgemeine, v. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Mythologie, Germanische, von Dr. Eugen Mogk, Prof. an der Univers. Leipzig. Nr. 15.

— **Griechische und römische,** von Dr. Herm. Steuding, Prof. am Kgl. Gymnasium in Wurzen. Nr. 27.

— siehe auch: Heldensage.

Nadelhölzer, Die, von Dr. F. W. Neger, Prof. an der Kgl. Forstakad. zu Tharandt. Mit 85 Abb., 5 Tab. und 3 Karten. Nr. 355.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigations-Schule zu Lübeck. Mit 56 Abbild. Nr. 84.

Nibelunge, Der, Nôt in Auswahl und Mittelhochdeutsche Grammatik m. kurz. Wörterbuch v. Dr. W. Golther Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 1.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großh. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Fig. Nr. 123.

Pädagogik im Grundriß von Prof. Dr. W. Rein, Direktor des Pädagog. Seminars an der Univ. Jena. Nr. 12.

— **Geschichte der,** von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

Paläontologie v. Dr. Rud. Hoernes, Prof. an der Univ. Graz. Mit 87 Abbild. Nr. 95.

Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Fig. Nr. 260.

Perspektive nebst einem Anhang üb. Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Architekt Hans Freyberger, Oberl. an der Baugewerkschule Köln. Mit 88 Abbild. Nr. 57.

Petrographie von Dr. W. Bruhns, Prof. a. d. Univers. Straßburg i. E. Mit 15 Abbild. Nr. 173.

Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Oberlehrer Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbild. Nr. 44.

Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Pflanzenkrankheiten v. Dr. Werner Friedr. Bruck, Privatdozent in Gießen. Mit 1 farb. Taf. u. 45 Abbild. Nr. 310.

Pflanzen-Morphologie, -Anatomie und -Physiologie von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakad. Eisenach. Mit 50 Abbild Nr. 141.

Pflanzenreich, Das. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakad. Eisenach. Mit 50 Fig. Nr. 122.

Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 158.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Philologie, Geschichte der klassischen, von Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. an der Universität Münster in Westfalen. Nr. 367.

Philosophie, Einführung in die, von Dr. Max Wentscher, Prof. a. d. Univers. Königsberg. Nr. 281.

— Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Photographie, Die. Von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Taf. und 52 Abbild. Nr. 94.

Physik, Theoretische, von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Mechanik und Akustik. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht und Wärme. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

— — IV. Teil: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Fig. Nr. 374.

— **Geschichte der,** von A. Kistner, Prof. an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.

— — II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Fig. Nr. 294.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Prof. d. Mathem. u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 65 Fig. Nr. 136.

Physikalische Messungsmethoden v. Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Fig. Nr 301.

Plastik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Taf. Nr. 116.

— **des 19. Jahrhunderts** von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern. Nr. 321.

Poetik, Deutsche, von Dr. K. Borinski, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.

Posamentiererei siehe: Textil-Industrie II.

Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie, von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Psychophysik, Grundriß der, von Dr. G. F. Lipps in Leipzig. Mit 3 Fig. Nr. 98.

Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der kgl. höheren Maschinenbauschule in Posen. Mit zahlr. Abbild. Nr. 290.

Quellenkunde zur deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Univers. Tübingen. 2 Bde. Nr. 279. 280.

Radioaktivität von Chemiker Wilh. Frommel. Mit 18 Abbild. Nr. 317.

Rechnen, Kaufmännisches, von Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139. 140. 187.

Recht d. Bürgerlich. Gesetzbuches. Zweites Buch: Schuldrecht I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.

— — II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse v. Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 324.

— Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Prof. an der Univers. Göttingen. Nr. 305.

Rechtslehre, Allgemeine, von Dr. Th. Sternberg, Privatdoz. an der Univers. Lausanne. I: Die Methode. Nr. 169.

— II: Das System. Nr. 170.

Rechtsschutz, Der internationale gewerbliche, von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.

Redelehre, Deutsche, v. Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Mit einer Taf. Nr. 61.

Redeschrift siehe: Stenographie.

Religionsgeschichte, Alttestamentliche, von D. Dr. Max Löhr, Prof. an der Univers. Breslau. Nr. 292.

— **Indische**, von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.

— — siehe auch Buddha.

Religionswissenschaft, Abriß der vergleichenden, von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.

Renaissance. Die Kultur d. Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Privatdoz. an der Univ. Wien. Nr. 189.

Reptilien siehe: Tierreich III.

Roman. Geschichte d. deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielke. Nr. 229.

Russisch-Deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 68.

Russisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 67.

— — siehe auch: Grammatik.

Sachs, Hans. Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.

Säugetiere. Das Tierreich I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.

Schattenkonstruktionen v. Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Fig. Nr. 236.

Schmarotzer u. Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde v. Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. d. Univers. Graz. Mit 67 Abbild. Nr. 151.

Schule, Die deutsche, im Auslande, von Hans Amrhein, Direktor der deutschen Schule in Lüttich. Nr. 259.

Schulpraxis. Methodik der Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.

Seemacht, Die, in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

Seerecht, Das deutsche, von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. I. Allgemeine Lehren: Personen und Sachen des Seerechts. Nr. 386.

— — II. Die einzelnen seerechtlichen Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts und außervertragliche Haftung. Nr. 337.

Seifenfabrikation, Die, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle II.) Mit 25 Abbild. Nr. 336.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeb. von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Univers. Breslau. Nr. 138.

Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Soziale Frage siehe: Entwicklung

Spinnerei siehe: Textil-Industrie I.

Spitzenfabrikation siehe: Textilindustrie II.

Sprachdenkmäler, Gotische, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.

Sprachwissenschaft, Germanische, v. Dr. Rich. Loewe in Berlin. Nr. 238.

— **Indogermanische,** v. Dr. R. Meringer, Prof. a d. Univ. Graz. Mit einer Taf. Nr. 59.

— **Romanische,** von Dr. Adolf Zauner, Privatdozent an der Univers. Wien. I: Lautlehre u. Wortlehre I. Nr. 128.

— — II: Wortlehre II u. Syntax. Nr. 250.

— **Semitische,** von Dr. C. Brockelmann, Prof. an der Univers. Königsberg. Nr. 291.

Staatslehre, Allgemeine, von Dr. Hermann Rehm, Prof. an d. Univ. Straßburg i. E. Nr. 358.

Staatsrecht, Preußisches, von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univers. Bonn. 2 Teile. Nr. 298 u. 299.

Stammeskunde, Deutsche, von Dr. Rudolf Much, a. o. Prof. an der Univers Wien. Mit 2 Karten und 2 Taf. Nr. 126.

Statik, I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper v. W. Hauber, Diplom.-Ing. Mit 82 Fig. Nr. 178.

— II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Fig. Nr. 179.

Stenographie nach dem System von F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Mitglied des Kgl. Stenogr. Instituts Dresden. Nr. 246.

Stenographie. Die Redeschrift des Gabelsbergerschen Systems von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 368.

— Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken u. einem Anhang v. Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses Oranienstein. Nr. 86.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Prof. an der Univers. Tübingen. Mit 34 Abbild. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 44 Fig. Nr. 97.

Stilkunde von Karl Otto Hartmann, Gewerbeschulvorstand in Lahr. Mit 7 Vollbildern und 195 Text-Illustrationen. Nr. 80.

Technologie, Allgemeine chemische, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

— **Mechanische,** von Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke i. Braunschweig. Nr. 340/41.

Teerfarbstoffe, Die, mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.

Telegraphie, Die elektrische, von Dr. Lud. Rellstab M. 19 Fig. Nr. 172.

Testament. Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. W. Staerk in Jena. Nr. 272.

— Die Entstehung des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

— **Neutestamentliche Zeitgeschichte** I: Der historische und kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums von Lic. Dr. W Staerk, Privatdoz. in Jena. Mit 3 Karten. Nr. 325.

— — II: Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit einer Planskizze Nr. 326.

Textil-Industrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr 184.

— — II. Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Thermodynamik (Technische Wärmelehre) v. K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ingenieuren. M. 54 Fig. Nr. 242.

Tierbiologie siehe: Biologie d. Tiere.

Tiere siehe auch: Entwicklungsgeschichte.

Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Prof. der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Tierkunde v. Dr. Franz v. Wagner, Prof. an der Univers. Graz. Mit 78 Abbild. Nr. 60.

Tierreich, Das, I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.

— — III: Reptilien und Amphibien. Von Dr. Franz Werner, Privatdozent an der Univ. Wien. Mit 48 Abbild. Nr. 383.

— — IV: Fische von Privatdozent Dr. Max Rauther in Gießen. Nr. 356.

Tierzuchtlehre, Allgemeine u. spezielle, v. Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.

Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Dr. Gerh. Hessenberg, Privatdoz. an der Techn. Hochschule in Berlin. Mit 70 Fig. Nr. 99.

Unterrichtswesen, Das öffentliche, Deutschlands i. d. Gegenwart von Dr. Paul Stötzner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.

— **Geschichte des deutschen Unterrichtswesens** von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.

— — II. Teil: Vom Beginn d. 19. Jahrh. bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Urgeschichte der Menschheit v. Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Univ. Wien. Mit 53 Abbild. Nr. 42.

Urheberrecht, Das, an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken der bildenden Künste und Photographie von Staatsanwalt Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.

Urheberrecht, Das deutsche, an literarischen, künstlerischen u. gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. [illegible]

Vektoranalysis v. Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent am Phys. Institut d. Technischen Hochschule in Hannover. Mit 11 Fig. Nr. 354.

Veranschlagen, Das, im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen des Kostenanschlags von Emil Beutinger, Architekt BDA., Assistent an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Figuren. Nr. 385.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Univ. Freiburg i. B. Nr. 180.

Versicherungswesen, Das, von Dr. iur. Paul Moldenhauer, Dozent der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. Nr. 262.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, k. u. k. Kustos der ethnogr. Sammlung des naturhistor. Hofmuseums u. Privatdoz. an d. Univers. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.

Volksbibliotheken (Bücher- u. Lesehallen), ihre Einrichtung und Verwaltung von Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.

Volkslied, Das deutsche, ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 1. Bändchen. Nr. 25.

— — 2. Bändchen. Nr. 132.

Volkswirtschaftslehre v. Dr. Carl Johs. Fuchs, Prof. an der Univers. Freiburg i. B. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 177.

Waltharilied, Das, im Versmaße der Urschrift übersetzt und erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer a. Realgymnasium i. Weimar. Nr. 46.

Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule und a. d. Techn. Hochsch. in Stuttgart. Nr. 23.

50

Warenkunde, von Dr. Karl Hassack, Professor u. Leiter der k. k. Handelsakademie in Graz. I. Teil: Unorganische Waren. Mit 40 Abbild. Nr. 222.

— II. Teil: Organische Waren. Mit 36 Abbild. Nr. 223.

Warenzeichenrecht, Das. Nach dem Gesetz zum Schutz der Warenbezeichnungen vom 12. Mai 1894. Von Regierungsrat J. Neuberg, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 360.

Wärme. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik) von K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ingenieure. Mit 54 Fig. Nr. 242.

Wäscherei siehe: Textil-Industrie III.

Wasser, Das, und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe von Dr. Ernst Leher, Dipl.-Ingen. in Saalfeld. Mit 15 Abbild. Nr. 261.

Weberei siehe: Textil-Industrie II.

Wettbewerb, Der unlautere, von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg. Nr. 339.

Wirkerei siehe: Textil-Industrie II.

Wolfram von Eschenbach. Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskolleg. z. Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— **Deutsches,** von Dr. Ferd. Detter, Prof. an d. Universität Prag. Nr. 64.

Zeichenschule von Prof. K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Taf. in Ton-, Farben- und Golddruck u. 200 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

Zeichnen, Geometrisches, von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn, Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster. Mit 290 Fig. und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Zeitungswesen, Das moderne, (Syst. d. Zeitungslehre) v. Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.

— **Allgemeine Geschichte des,** von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Zoologie, Geschichte der, von Prof. Dr. Rud. Burckhardt. Nr. 357.

Zwirnerei siehe: Textil-Industrie I.

Weitere Bände erscheinen in rascher Folge.

GJG