Sammlung Göschen

Niedere Analysis

von

Prof. Dr. Benedikt Sporer

figuren

Sam… f.

Verzei… .

Ackerbau- … alt
Dr. Bau…
Ernst Lau… eb.

Akustik. Th… 53.
chanik u. … Professor an der Universität Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.

— **Musikalische,** v. Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Universität Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.

Algebra. Arithmetik und Algebra von Dr. Herm. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Alpen, Die, von Dr. Rob. Sieger, Priv.-Dozent a. d. Universität u. Professor a. d. Exportakademie d. k. k. Handelsmuseums in Wien. Mit 19 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 129.

Altertümer, Die deutschen, v. Dr. Franz Fuhse, Dir. d. städt. Museums i. Braunschweig. Mit 70 Abb. Nr 124.

Altertumskunde, Griech., v. Prof. Dr. Rich. Maisch, neu bearbeitet von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

— **Römische,** von Dr. Leo Bloch, Dozent an der Universität Zürich. Mit 8 Vollbildern. Nr. 45.

Analyse, Techn.-Chem., von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechn. Schule i. Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Realgymn. u. an der Realanstalt in Ulm. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— — — Repetitorium und Aufgabensammlung z. Differentialrechnung v. Dr. Friedr. Junker, Prof. am Realgymnasium und an der Realanstalt in Ulm. Mit 42 Fig. Nr. 146.

— — **II:** Integralrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Prof. a. Realgymnasium und an der Realanstalt in Ulm. Mit 89 Fig. Nr. 88.

— — — Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Real-

Arbeiterfrage, Die gewerbliche, von Werner Sombart, Professor an der Universität Breslau. Nr. 209.

Arithmetik und Algebra von Dr. Herm. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— — Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. 2765 Aufgaben, systematisch geordnet, von Dr. Hermann Schubert, Professor an d. Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. W. F. Wislicenus, Prof. a. d. Universität Straßburg. Mit 36 Abbild. und einer Sternkarte. Nr. 11.

Astrophysik, die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. a. d. Universität Straßburg. Mit 11 Abbild. Nr. 91.

Aufsatzentwürfe von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.

Baukunst, Die, des Abendlandes von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbildungen. Nr. 74.

Bausteine, Industrie der künstlichen siehe Industrie der Silikate.

Betriebskraft, Die zweckmäßigste, von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 1. Teil: Die mit Dampf betriebenen Motoren. Mit 14 Abbildungen. Nr. 224.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Professor am Kgl. Kaiser-Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbildungen. Nr. 96.

Biologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Biologie der Tiere I: Entstehung u. Weiterbild. d. Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur v. Dr. Heinr. Simroth, Professor a. d. Universität Leipzig. Mit 33 Abbild. Nr. 131.

— **II:** Beziehungen der Tiere zur organischen Natur von Dr. Heinr. Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.

Bleicherei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Wilhelm Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Brant. Hans Sachs und Johann Fischart nebst einem Anhang: Brant und Hutten. Ausgew. u. erläut. v. Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

Buchführung. Lehrgang der einfachen u. dopp. Buchhaltung von Rob. Stern, Oberlehrer der Öff. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule z. Leipzig. Mit vielen Formularen. Nr. 115.

Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy in Bonn. Nr. 174.

Burgenkunde, Abriß der, v. Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.

Chemie, Allgemeine und physikalische, von Dr. Max Rudolphi, Doz. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

— **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Waldhof. Nr. 37.

— — siehe auch: Metalloide.

— **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Waldhof. Nr. 38.

— **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

— — III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— — IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

Chemisch-Technische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

Cid, Der. Geschichte des Don Ruy Diaz, Grafen von Bivar. Von J. G. Herder. Hrsg. u. erläutert von Prof. Dr. E. Naumann in Berlin. Nr. 36.

Dampfkessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Fig. Nr. 9.

Dampfmaschine, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 48 Fig. Nr. 8.

Dichtungen a. mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl m. Einltg. u. Wörterb. herausgegeb. v. Dr. Herm. Jantzen in Breslau. Nr. 137.

Dietrichepen. Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Universität Münster. Nr. 10.

Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Realgymn. u. a. d. Realanst. in Ulm. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Realgymnasium und an der Realanstalt in Ulm. Mit 42 Figuren. Nr. 146.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilh. Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hütteningen. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.

— II. Teil: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Elektrizität. Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Professor a. d. Univers. Wien. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 47 Fig. Nr. 196.

Elektrotechnik II: Die Gleichstromtechnik Mit 74 Figuren. Nr. 197.

— **III:** Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Figuren. Nr. 198.

Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitgl. des Kgl. Preuß. Meteorolog. Inst. zu Potsdam. Mit 14 Abbild. und 8 Tafeln. Nr. 175.

Ethik von Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Färberei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe v. Dr. Wilh. Massot, Lehrer a. d. Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie i. Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Figuren und 1 Tafel. Nr. 155.

Filzfabrikation. Textil-Industrie II. Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Finanzwissenschaft v. Geh. Reg.-Rat Dr. R. van der Borght in Friedenau-Berlin. Nr. 148.

Fischart, Johann. Hans Sachs u. Joh. Fischart nebst e. Anh.: Brant u. Hutten. Ausgewählt u. erläut. von Professor Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

Fischerei und Fischzucht v. Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

Formelsammlung, Mathemat., u. Repetitorium d. Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln u. Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes, d. Different.- u. Integralrechn. v. O. Th. Bürklen, Prof. a. Kgl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. Mit 18 Fig. Nr. 51.

Formelsammlung, Physikalische, v. G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Forstwissenschaft v. Dr. Ad. Schwappach, Professor an d. Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstl. Versuchswesens. Nr. 106.

Fremdwort, Das, im Deutschen v. Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.

Gardinenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

Geodäsie von Dr. C. Reinhertz, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild. Nr. 102.

Geographie, Astronomische, von Dr. Siegm. Günther, Professor a. d. Technischen Hochschule München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

— **Physische,** von Dr. Siegmund Günther, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

— siehe auch: Landeskunde — Länderkunde.

Geologie v. Professor Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. und 4 Tafeln mit über 50 Fig. Nr. 13.

Geometrie, Analytische, d. Ebene von Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Fig. Nr. 65.

— **Analytische, des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.

— **Darstellende,** v. Dr. Rob. Haußner, Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe. I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.

— **Ebene,** von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarb. Figuren. Nr. 41.

Geometrie, Projektive, in synthet. Behandlg. v. Dr. Karl Doehlemann, Prof. a. d. Universität München. Mit 85 zum Teil zweifarb. Fig. Nr. 72.

Geschichte, Badische, von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim und Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.

— **Bayerische,** von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

— **des Byzantinischen Reiches** von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

— **Deutsche, im Mittelalter** (bis 1500) von Dr. F. Kurze, Oberl. am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 33.

— — **im Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** von Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 34.

— **Französische,** von Dr. R. Sternfeld, Prof. a. d. Univers. in Berlin. Nr. 85.

— **Griechische,** von Dr. Heinrich Swoboda, Prof. an der deutschen Universität Prag. Nr. 49.

— **des 19. Jahrhunderts** von Oskar Jäger, o. Honorarprof. a. d. Univers. Bonn. 1. Bdchn.: 1800—1852. Nr. 216.

— — 2. Bdchn.: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.

— **Israels** bis auf die griech. Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

— **des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, Professor an der Universität München. Mit 6 Bildern und 1 Karte. Nr. 43.

— **Oesterreichische, I:** Von der Urzeit bis 1526 von Hofrat Dr. Frz. v. Krones, Professor an der Universität Graz. Nr. 104.

— — **II:** Von 1526 bis zur Gegenwart v. Hofrat Dr. Frz. v. Krones, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 105.

— **Römische,** neu bearb. v. Realgymnasialdirektor Dr. Jul. Koch. Nr. 19.

— **Russische,** von Dr. Wilhelm Reeb, Oberlehrer am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.

— **Sächsische,** von Prof. Dr. Otto Kaemmel, Rektor des Nicolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.

Geschichte, Schweizerische, von Dr. K. Dändliker, Professor an der Universität Zürich. Nr. 188.

— **der Malerei** siehe: Malerei.

— **der Mathematik** siehe: Mathematik.

— **der Musik** siehe: Musik.

— **der Pädagogik** siehe: Pädagogik.

— **des deutschen Romans** s.: Roman.

— **der deutschen Sprache** siehe: Grammatik, Deutsche.

Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberrealschuldirektor in Freiburg i. B. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.

Gewerbewesen von Werner Sombart, Professor an d. Universität Breslau. I. II. Nr. 203. 204.

Glas- und keramische Industrie siehe: Industrie der Silikate.

Gletscherkunde von Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.

Götter- und Heldensage, Griechische und römische, von Dr. Herm. Steuding, Professor am Königl. Gymnasium in Wurzen. Nr. 27.

— siehe auch: Heldensage. — Mythologie.

Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach u. Gottfried v. Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg in Pr. Nr. 22.

Grammatik, Deutsche, und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Prof. Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

— **Griechische, I:** Formenlehre von Dr. Hans Meltzer, Prof. an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 117.

— — **II:** Bedeutungslehre und Syntax von Dr. Hans Meltzer, Prof. a. d. Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 118.

Grammatik, Lateinische. Grundriß der lateinischen Sprachlehre v. Prof. Dr. W. Votsch, Magdeburg. Nr. 82

— **Mittelhochdeutsche.** Der Nibelunge Nôt in Auswahl und Mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Professor an der Universität Rostock. Nr. 1.

— **Russische,** von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 66.

— — siehe auch: Russisches Gesprächsbuch, — Lesebuch.

Handelskorrespondenz, Deutsche, von Prof. Th. de Beaux, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig Nr. 182.

— **Englische,** v. E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.

— **Französische,** von Professor Th. de Beaux, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 183.

— **Italienische,** von Professor Alberto de Beaux, Oberlehrer am Kgl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg in Pr. Nr. 22.

Hauptliteraturen, Die, d. Orients von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. I. II. Nr 162. 163.

Heldensage, Die deutsche, von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Professor a. d. Universität Münster. Nr. 32.

— siehe auch: Götter- und Heldensage. — Mythologie.

Herder, der Cid. Geschichte des Don Ruy Diaz, Grafen v. Bivar. Herausg. und erläutert von Prof. Dr. Ernst Naumann in Berlin. Nr. 36.

Hutten. Hans Sachs und Johann Fischart nebst einem Anhang: Brant und Hutten. Ausgewählt u. erläut. von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

Industrie, Anorganische Chemische v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I.: Die Leblancsodaindustrie u ihre Nebenzweige Mit 12 Tafeln. Nr 205.

— — II.: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie u. Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.

— — III.: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

— **der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels** von Dr. Gust Rauter in Charlottenburg. I.: Glas- und keramische Industrie. Mit 12 Tafeln. Nr. 233.

— — II.: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Integralrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Realgymnasium und an der Realanstalt in Ulm. Mit 89 Figuren. Nr. 88.

— Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Frdr. Junker, Professor am Realgym. und an der Realanstalt in Ulm. Mit 50 Figuren. Nr. 147.

Kartenkunde, geschichtlich dargestellt von E. Gelcich, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo und F. Sauter, Professor am Realgymnasium in Ulm, neu bearb. von Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft f. Erdkunde in Berlin. Mit 70 Abb. Nr. 30.

Kirchenlied. Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrh. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen v. Professor G. Berlit, Oberl. am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Klimalehre von Professor Dr. W. Koppen, Meteorologe d. Seewarte Hamburg. Mit 7 Tafeln und 2 Figuren. Nr. 114.

Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Professor der Geschichte a. d. Universität Berlin. Nr. 156.

Kompositionslehre. Musikalische Formenlehre von Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.

Körper, Der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberrealschuldirektor in Freiburg i. B. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbild. u. 1 Tafel. Nr. 18.

Kristallographie von Dr. W. Bruhns, Professor an der Universität Straßburg. Mit 190 Abbild. Nr. 210.

Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 10.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Kultur, Die, der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 189.

Kulturgeschichte, Deutsche, v. Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Künste, Die graphischen, von Carl Kampmann, Fachlehrer an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 3 Beilagen und 40 Abbildungen. Nr. 75.

Kurzschrift. Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einigungs-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken und einem Anhang von Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses in Oranienstein. Nr. 86.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisko-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

Länderkunde der außereuropäischen Erdteile von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen und Profilen. Nr. 63.

Landeskunde von Baden von Prof. Dr O. Kienitz in Karlsruhe. Mit Profilen, Abbild. u. 1 Karte. Nr. 199.

— **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Professor an der Kgl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbild. u. 1 Karte. Nr. 176

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildgn. u. 1 Karte. Nr. 215.

— **von Skandinavien** (Schweden, Norwegen und Dänemark) v. Heinr. Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbild. und 1 Karte. Nr. 202.

— **des Königreichs Württemberg** v. Dr. Kurt Hassert, Professor der Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 157.

Landwirtschaftliche Betriebslehre von Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 227.

Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert. Kulturhistor. Erläuterungen zum Nibelungenlied und zur Kudrun. Von Professor Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel und 30 Abbildungen. Nr. 93.

Lessings Emilia Galotti. Mit Einleitung und Anmerkungen von Oberlehrer Dr. Votsch. Nr. 2.

— **Minna v. Barnhelm.** Mit Anmerkungen v. Dr. Tomaschek. Nr. 5.

— **Nathan der Weise.** Mit Anmerkungen von den Professoren Denzel und Kraz. Nr. 6.

Licht. Theoret. Physik. II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

Literatur, Althochdeutsche, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Professor am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Literaturdenkmale des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen in Breslau. Nr. 181.

Literaturen, Die, des Orients. I. Teil: Die Literaturen Ostasiens und Indiens von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 162.

— — II. Teil: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent a. d. Universität Wien. Nr. 163.

Literaturgeschichte, Deutsche, von Dr. Max Koch, Professor an der Universität Breslau. Nr. 31.

— **Deutsche, der Klassikerzeit** von Dr. Carl Weitbrecht, Prof. an der Technischen Hochschule Stuttgart. Nr. 161.

— **Deutsche, d. 19. Jahrhunderts** von Dr. Carl Weitbrecht, Prof a. der Technischen Hochschule Stuttgart. I. II. Nr. 134. 135.

— **Englische,** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

— **Griechische,** mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Professor an der Universität Greifswald. Nr. 70.

— **Italienische,** von Dr. Karl Voßler, a. d. Universität Heidelberg. Nr. 125.

— **Portugiesische,** von Dr. Karl v. Reinhardstoettner, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule in München. Nr. 213.

— **Römische,** von Dr. Hermann Joachim in Hamburg. Nr. 52.

— **Russische,** von Dr. Georg Polonskij in München. Nr 166.

— **Spanische,** von Dr. Rudolf Beer in Wien. I. II. Nr. 167. 168.

Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithm. und trigonometr. Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Herm. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Luther, Martin, Thomas Murner u. d. Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Magnetismus. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Universität Wien. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.

Malerei, Geschichte der, I. II. III IV. V. von Dr. Rich. Muther, Prof. an der Universität Breslau. Nr. 107—111.

Maschinenelemente, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Fr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Nr. 221.

Mathematik, Geschichte der, von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Mechanik. Theoretische Physik. I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an d Univ. Wien. Mit 19 Abb. Nr. 76.

Meereskunde, Physische, von Dr. Gerh. Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbild. im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Metalle, (Anorganische Chemie 2. Teil) v. Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Fortsetzung auf der 8. Vorsatzseite!

Sammlung Göschen

Niedere Analysis

von

Prof. Dr. Benedikt Sporer

Mit 5 Figuren

Zweite, verbesserte Auflage

Zweiter Abdruck

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1903

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Kettenbrüche. Diophantische Gleichungen.

Zweiter Abschnitt.

Kombinationslehre. Determinanten.

Erster Abschnitt.

Kettenbrüche. Diophantische Gleichungen.

I. Kapitel.

Kettenbrüche.

§ 1. Begriff des Kettenbruchs.[1]

1. Ein fortgesetzter Bruch von der Form

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4}}}} \quad \text{oder} \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}}$$

heißt ein Kettenbruch. Die Brüche $\frac{b}{a}$ und $\frac{1}{a}$ führen die Bezeichnung Teilbrüche, b heißt der Teilzähler, a der Teilnenner.

2. Wir beschränken uns auf die zweite Art von Kettenbrüchen, in denen alle Teilzähler gleich der Einheit, alle Teilnenner positiv und ganzzahlig sind, und lassen außerdem noch den Wert a_0 weg. Den so erhaltenen Kettenbruch schreiben wir abgekürzt:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \quad \text{oder } (1 : a_1, a_2, a_3, a_4).$$

---

[1] Die Kettenbrüche finden sich erstmals bei Lord Brounker (1620—1684); die erste eingehende Theorie derselben gab Euler (1707—1783).

§ 2. Verwandlung eines Bruches in einen Kettenbruch.

1. **Beispiel.** Es soll der Bruch $\frac{157}{283}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden.

$$\frac{157}{283}=\frac{1}{\frac{283}{157}}=\frac{1}{1+\frac{126}{157}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{157}{126}}}=\frac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{31}{126}}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}+\cfrac{1}{\frac{126}{31}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}+\cfrac{1}{4}+\frac{2}{31}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}+\cfrac{1}{4}+\cfrac{1}{\frac{31}{2}}}$$

$$=\cfrac{1}{1}+\cfrac{1}{1}+\cfrac{1}{4}+\cfrac{1}{15}+\cfrac{1}{2} \qquad =(1:1,\ 1,\ 4,\ 15,\ 2).$$

2. Die hier angewandte Bestimmung der Teilnenner ist dieselbe wie die, die zur Aufsuchung des gemeinschaftlichen Teilers der Zahlen 157 und 283 führt, und wir erhalten dieselben rascher durch fortgesetzte Division wie folgt:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r}
 & 1 & 1 & 4 & 15 & 2 \\
283 & 157 & 126 & 31 & 2 & 1 \\
157 & 126 & 124 & 30 & & \\
\hline
126 & 31 & 2 & 1 & &
\end{array}$$

§ 3. Verwandlung eines Kettenbruches in einen gewöhnlichen Bruch. Näherungswerte.

1. Berücksichtigt man bei einem Kettenbruch nur den ersten Nenner, also nur den Bruch $\frac{1}{a_1}$ und läßt alle folgenden Brüche weg, so erhält man den ersten

Näherungswert $\frac{z_1}{n_1} = \frac{1}{a_1}$. Berücksichtigt man ebenso nur den Teil $\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$ des Kettenbruches, so erhält man den zweiten Näherungswert $\frac{z_2}{n_2} = \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1}$. Ebenso findet man den dritten Näherungswert

$$\frac{z_3}{n_3} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = \frac{a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_3 + a_1} \text{ u. s. f.}$$

2. Von diesen Näherungswerten ist der erste zu groß, da der Nenner a_1 zu klein ist; der zweite dagegen ist zu klein, da $\frac{1}{a_2} > \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}$, also der Nenner des Bruches $a_1 + \frac{1}{a_2}$, den wir in Rechnung ziehen, größer als sein wirklicher Wert ist. Der dritte Näherungswert ist wieder zu groß, der vierte zu klein u. s. w. **Die Näherungswerte eines Kettenbruchs sind also abwechslungsweise kleiner und größer als der wirkliche Wert desselben.**

3. Es ist $\frac{z_1}{n_1} = \frac{1}{a_1}$, $\frac{z_2}{n_2} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1}$

$$= \frac{a_2 z_1 + 0}{a_2 n_1 + 1}, \quad \frac{z_3}{n_3} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = \frac{\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) z_1 + 0}{\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) n_1 + 1}$$

$$= \frac{a_3 a_2 z_1 + z_1}{a_3 (a_2 n_1 + 1) + n_1} = \frac{a_3 z_2 + z_1}{a_3 n_2 + n_1},$$

$$\frac{z_4}{n_4}=\frac{\left(a_3+\frac{1}{a_4}\right)z_2+z_1}{\left(a_3+\frac{1}{a_4}\right)n_2+n_1}=\frac{a_4(a_3z_2+z_1)+z_2}{a_4(a_3n_2+n_1)+n_2}=\frac{a_4z_3+z_2}{a_4n_3+n_2}.$$

Ist allgemein bis zu einem bestimmten Werte k: $\frac{z_k}{n_k}=\frac{a_k z_{k-1}+z_{k-2}}{a_k n_{k-1}+n_{k-2}}$, so erhält man den folgenden Näherungswert, indem man a_k durch $a_k+\frac{1}{a_{k+1}}$ ersetzt, oder:

$$\frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}=\frac{\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)z_{k-1}+z_{k-2}}{\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)n_{k-1}+n_{k-2}}=$$

$$\frac{a_{k+1}(a_k z_{k-1}+z_{k-2})+z_{k-1}}{a_{k+1}(a_k\cdot n_{k-1}+n_{k-2})+n_{k-1}}=\frac{a_{k+1}z_k+z_{k-1}}{a_{k+1}n_k+n_{k-1}}.$$

Die Regel gilt also auch für den (k + 1)ten Näherungsbruch, wenn sie bis zum kten gilt. Sie gilt aber, wie direkt gezeigt wurde, für den vierten, also gilt sie für den fünften, sechsten u. s. f., d. h. allgemein für ein beliebiges k (Schluß von k auf k + 1).

Führt man noch die uneigentlichen Näherungswerte $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ ein, so erhält man zur Berechnung eines Kettenbruchs, etwa des Kettenbruchs (1 : 2, 3, 1, 4, 5, 3, 2), das folgende Schema:

a	—	—	2	3	1	4	5	3	2
z	1	0	1	3	4	19	99	316	731
n	0	1	2	7	9	43	224	715	1654

z; $1 = 2 \cdot 0 + 1$, $3 = 3 \cdot 1 + 0$, $4 = 1 \cdot 3 + 1$, $19 = 4 \cdot 4 + 3, \ldots$

n; $2 = 2 \cdot 1 + 0$, $7 = 3 \cdot 2 + 1$, $9 = 1 \cdot 7 + 2$, $43 = 4 \cdot 9 + 7, \ldots$

Die Näherungswerte sind: $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{19}{43}, \frac{99}{224}$, $\frac{316}{715}$ und $\frac{731}{1654}$.

§ 4. Eigenschaften der Näherungswerte.

1. Es ist $z_2 n_1 - n_2 z_1 = -1$, $z_3 n_2 - z_2 n_3 = +1$, $z_4 n_3 - z_3 n_4 = -1$. Nimmt man an, die Regel gelte bis zu einem bestimmten k, d. h. es sei

$$z_k \cdot n_{k-1} - z_{k-1} \cdot n_k = \pm 1, \text{ so ist:}$$

$$z_{k+1} \cdot n_k - z_k \cdot n_{k+1} = (a_{k+1} \cdot z_k + z_{k-1}) n_k - (a_{k+1} \cdot n_k + n_{k-1}) z_k$$
$$= -(z_k n_{k-1} - z_{k-1} \cdot n_k) = \mp 1.$$

Nun gilt aber die Regel für $k = 4$, d. h. sie gilt für $k = 5, 6, 7$ und also auch für ein beliebiges k.

2. Hieraus folgt direkt: $\frac{z_k}{n_k} - \frac{z_{k-1}}{n_{k-1}} = \pm \frac{1}{n_k \cdot n_{k-1}}$, oder:

Der Unterschied zweier aufeinanderfolgender Näherungswerte ist eins, dividiert durch das Produkt der Nenner derselben.

3. Wie man in § 3 fand, liegt der Wert z eines Kettenbruchs zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungswerten desselben. Bezeichnet man also den wirklichen Wert des Kettenbruchs mit q, so ist entweder $\frac{z_k}{n_k} > q > \frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}$ oder $\frac{z_k}{n_k} < q < \frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}$. Der Fehler, den

man begeht, wenn anstatt des Kettenbruchs der kte Näherungswert gesetzt wird, ist also jedenfalls kleiner als der Unterschied des kten und $k+1$ ten Näherungswertes, also kleiner als $\frac{1}{n_k \cdot n_{k+1}}$ und somit umsomehr $< \frac{1}{n_k^2}$, oder:

Der Fehler, den man begeht, wenn man an Stelle eines Kettenbruchs einen Näherungswert setzt, ist kleiner als eins, dividiert durch das Quadrat des Nenners des Näherungsbruches. Die Näherungswerte schließen also den wirklichen Wert des Kettenbruchs in immer engere Grenzen ein.

4. Liegt der Wert eines Bruches $\frac{r}{s}$ zwischen zwei Näherungswerten eines Kettenbruchs, so müssen die Zahlen r und s größer sein als die Zähler und Nenner dieser letzten Brüche, denn wir haben z. B. für ungerade k:

$$\frac{z_k}{n_k} > \frac{r}{s} > \frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}, \text{ also } \frac{z_k}{n_k} - \frac{z_{k+1}}{n_{k+1}} > \frac{z_k}{n_k} - \frac{r}{s} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{n_k \cdot n_{k+1}} > \frac{z_k \cdot s - n_k \cdot r}{n_k \cdot s}, \text{ also } \frac{1}{n_{k+1}} > \frac{z_k \cdot s - n_k \cdot r}{s}.$$

Aus $\frac{z_k}{n_k} > \frac{r}{s}$ folgt aber, daß $\frac{z_k \cdot s - n_k \cdot r}{n_k \cdot s} > 0$ ist, d. h. der Zähler des letzten Bruches ist entweder $\geqq 1$ und somit $\frac{1}{n_{k+1}} > \frac{1}{s}$. Ist dies aber der Fall, so muß

$s > n_{k+1}$ sein, und da $\frac{r}{s} > \frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}$ ist, so ist auch $r > z_{k+1}$.

Ist k gerade, so erleidet der Beweis unwesentliche Änderungen. *Durch die Näherungswerte ist also der Kettenbruch durch kleinste Zahlen so genau als möglich ausgedrückt und namentlich kann ein Näherungswert nicht vereinfacht werden.*

§ 5. Verwandlung eines Kettenbruchs in eine Reihe.

Es ist:

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{1}{n_1}, \quad \frac{z_2}{n_2} - \frac{z_1}{n_1} = \frac{-1}{n_1 n_2}, \quad \frac{z_3}{n_3} - \frac{z_2}{n_2} = +\frac{1}{n_2 n_3}, \ldots .$$

$$\frac{z_k}{n_k} - \frac{z_{k-1}}{n_{k-1}} = \pm \frac{1}{n_k \cdot n_{k-1}}.$$

Ist aber $\frac{z_k}{n_k}$ der letzte Näherungswert des Kettenbruchs, d. h. der Wert q desselben, so folgt durch Addition dieser Gleichungen:

$$\frac{z_k}{n_k} = q = \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_2 n_3} - \frac{1}{n_3 n_4} + \ldots \pm \frac{1}{n_{k-1} \cdot n_k}.$$

§ 6. Unendliche Kettenbrüche. Irrationalität derselben.

1. Setzen sich die Teilbrüche eines Kettenbruchs unbegrenzt fort, so heißt der Kettenbruch ein *unendlicher*. Bilden die Nenner der Teilbrüche von einem bestimmten ab Perioden, so ist der Kettenbruch ein *periodischer*. Es heißt *reinperiodisch*, wenn

die erste Periode mit dem ersten Teilnenner, **unreinperiodisch**, wenn sie später beginnt. Solche Kettenbrüche sind z. B.:

$(1:1, 2, 3, 5, 7, 3, 1, 4, \ldots)$ unendl. nichtperiodischer Kettenbruch,

$(1:4, 5, \overline{2, 3}, 2, 3, 2, 3, \ldots)$ unendl. unreinperiodischer Kettenbruch,

$(1:\overline{2, 3, 5}, 2, 3, 5, 2, 3, 5, \ldots)$ unendl. reinperiodischer Kettenbruch.

2. Von jedem periodischen Kettenbruch können wir stets den Wert berechnen. Um z. B. den Wert des Kettenbruchs $(1:\overline{1, 2}, 1, 2 \ldots)$ zu finden, setzen wir diesen Wert $= x$ und erhalten die Gleichung

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + x}} \quad \text{oder} \quad \frac{2+x}{3+x} = x, \; x = \sqrt{3} - 1.$$

Ist der Kettenbruch unreinperiodisch, so berechnen wir zuerst den Wert des Kettenbruchs von der ersten Periode ab und entwickeln dann die Näherungswerte.

So wird z. B.:

$$\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}} = \frac{1}{4 + \sqrt{3} - 1} = \frac{1}{3 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3}).$$

3. Der Wert eines Kettenbruchs in unter den in § 1, 2 gegebenen Beschränkungen stets kleiner als eins. Setzen wir nun:

$$\frac{u}{v}=\cfrac{1}{a_r+\cfrac{1}{a_{r+1}+\dots}}\;,\quad \frac{u_1}{v_1}=\cfrac{1}{a_{r+1}+\cfrac{1}{a_{r+2}+\dots}}$$

$$\frac{u_2}{v_2}=\cfrac{1}{a_{r+2}+\cfrac{1}{a_{r+3}+\dots}}\;,$$

so haben wir

$$\frac{u}{v}=\cfrac{1}{a_r+\frac{u_1}{v_1}}\,,\quad \frac{u_1}{v_1}=\frac{v-u\,.\,a_r}{u}\,,$$ oder da beide Brüche nicht vereinfacht werden können, $v_1 = u$ und $\frac{u_2}{v_2}=\frac{v_1-u_1\,.\,a_{r+1}}{u_1}$, also $v_2=u_1$ etc. Wir können also die Reihe

$$\frac{u}{v}\quad\frac{u_1}{v_1}\quad\frac{u_2}{v_2}\quad\frac{u_3}{v_3}\quad\dots$$

ersetzen durch die andere Reihe

$$\frac{u}{v}\quad\frac{u_1}{u}\quad\frac{u_2}{u_1}\quad\frac{u_3}{u_2}\quad\dots.$$

Nun müssen aber die Brüche $\frac{u}{v}$ nach obigem echte Brüche sein, d. h. wir haben

$$v>u>u_1>u_2>u_3\dots.$$

oder die Zähler und Nenner der obigen Brüche bilden eine Reihe von Werten, die abnehmen. Wäre nun der Wert eines unendlichen Kettenbruchs von einem bestimmten Teilbruch abgenommen rational, d. h. also u und v endliche rationale Zahlen, so müßten die folgenden Werte u_1 u_2 u_3 ... der Grenze Null sich nähern; somit aber wäre der Kettenbruch kein unendlicher mehr, oder mit anderen Worten ein unendlicher Kettenbruch kann von einem bestimmten Teilbruch ab nicht durch einen rationalen Bruch dargestellt werden, und damit ist dies auch für den Kettenbruch selbst nicht möglich.

Jeder unendliche Kettenbruch ist also irrational.

4. Aus § 56 folgt ferner, daß ein solcher unendlicher Kettenbruch stets einen endlichen Wert hat, d. h. konvergent ist.

§ 7. Verwandlung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch.

1. Das hierbei in Anwendung kommende Verfahren möge ein Beispiel zeigen. Es sei $\sqrt{31}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln.

$$x = \sqrt{31} = 5 + \frac{\sqrt{31}-5}{1} = 5 + \frac{6}{\sqrt{31}+5} = 5 + \frac{1}{x_1}.$$

Die $\sqrt{31}$ liegt zwischen 5 und 6, kann also durch 5 und einen echten Bruch dargestellt werden. In diesem multiplizieren wir Zähler und Nenner mit $\sqrt{31}+5$ und erhalten daraus $\frac{6}{\sqrt{31}+5}$.

$$x_1 = \frac{\sqrt{31}+5}{6} = 1 + \frac{\sqrt{31}-1}{6} = 1 + \frac{5}{\sqrt{31}+1} = 1 + \frac{1}{x_2}.$$

($\sqrt{31}+5$ liegt zwischen 10 und 11; 6 ist also einmal in dem Zähler enthalten.)

$$x_2 = \frac{\sqrt{31}+1}{5} = 1 + \frac{\sqrt{31}-4}{5} = 1 + \frac{3}{\sqrt{31}+4} = 1 + \frac{1}{x_3},$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{31}+4}{3} = 3 + \frac{\sqrt{31}-5}{3} = 3 + \frac{2}{\sqrt{31}+5} = 3 + \frac{1}{x_4},$$

$$x_4 = \frac{\sqrt{31}+5}{2} = 5 + \frac{\sqrt{31}-5}{2} = 5 + \frac{3}{\sqrt{31}+5} = 5 + \frac{1}{x_5},$$

$$x_5 = \frac{\sqrt{31}+5}{3} = 3 + \frac{\sqrt{31}-4}{3} = 3 + \frac{5}{\sqrt{31}+4} = 3 + \frac{1}{x_6},$$

$$x_6 = \frac{\sqrt{31}+4}{5} = 1 + \frac{\sqrt{31}-1}{5} = 1 + \frac{6}{\sqrt{31}+1} = 1 + \frac{1}{x_7},$$

$$x_7 = \frac{\sqrt{31}+1}{6} = 1 + \frac{\sqrt{31}-5}{6} = 1 + \frac{1}{\sqrt{31}+5} = 1 + \frac{1}{x_8},$$

$$x_8 = \frac{\sqrt{31}+5}{1} = 10 + \frac{\sqrt{31}-5}{1} = 10 + \frac{6}{\sqrt{31}+5} = 10 + \frac{1}{x_1}.$$

Es ist also $\sqrt{31} = 5 + (1:\overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}, 1, 1, 3, 5, 3, \ldots)$.

2. Zerlegt man den Teilnenner 10 in $5+5$, so nimmt der Ausdruck für $\sqrt{31}$ die Form $5 + 1 : 1, 1, 3, 5, 1, 1, 5+5, 1, 1, 3, 5, 3 \ldots\ldots$ an.

Die so erhaltenen Teilnenner bilden symmetrische Perioden, und zwar ist der letzte Teilnenner der Periode (10 in obigem Beispiel) stets gleich der doppelten ganzen Zahl, die vor dem Kettenbruch steht.

Jede Quadratwurzel in einen Kettenbruch verwandelt liefert einen solchen periodischen Kettenbruch. Diese Kettenbrüche sind für die Auflösung der sogen. Pellschen Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ in ganzen Zahlen von Bedeutung, doch können wir hierauf nicht eingehen.

II. Kapitel.

Diophantische Gleichungen.[1]

§ 8. Definition der diophantischen Gleichungen.

1. Ist irgend eine Gleichung, etwa $3x + 2y = 7$, mit zwei Unbekannten gegeben, so genügt diese nicht zur Bestimmung der Unbekannten x und y. Wir

[1] Diophantos von Alexandrien (ca. 360 n. Chr.), nach dem diese Gleichungen benannt sind, gab ein Werk über unbest. Gleichungen zweiten und höheren Grades heraus.

können vielmehr für die eine dieser Unbekannten einen beliebigen Wert ansetzen und erhalten dann immer für die andere Unbekannte einen zweiten Wert. So erfüllen z. B. die obigen Gleichungen die Wertepaare

$$x = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3$$

$$y = 3\frac{1}{2},\ 2\frac{3}{4},\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1 \text{ u. s. w.}$$

Unter den unendlich vielen Wertepaaren von x und y, die wir auf diese Art erhalten, können nun auch solche sein, für die sowohl x als auch y ganze Zahlen sind, und es ist gerade unsere Aufgabe, aus den obigen Wertepaaren diese ganzzahligen und unter diesen insbesondere wieder diejenigen auszuscheiden, die sowohl für x als auch für y positiv sind. Ein solches Wertepaar für die obige Gleichung ist z. B. $x = 1$, $y = 2$.

2. Sind mehr als zwei Unbekannte gegeben, so können wir zwei Fälle unterscheiden. Es können nämlich zu deren Bestimmung eine oder mehrere Gleichungen dienen. Unsere Aufgabe ist aber auch jetzt noch wesentlich dieselbe.

§ 9. Die Auflösungsmethode von Euler.

1. Ist irgend eine Gleichung des ersten Grades $ax + by = c$ gegeben, so ist klar, daß wir zunächst annehmen dürfen, daß a, b und c ganze Zahlen sind und daß a, b und c keinen gemeinschaftlichen Teiler besitzen. Wäre letzteres der Fall, so könnten wir durch Division diesen Teiler ausscheiden. Es müssen aber auch die Koeffizienten a und b unter sich relativ prim sein, indem sonst auch c mit a und b einen Teiler ge-

meinsam haben müßte, wenn die Gleichung durch ganze Zahlen auflösbar sein soll.

2. Um die von Euler angewandte Methode klarer zu machen, wollen wir dieselbe an einem bestimmten Beispiel in Anwendung bringen.

Es sei die Gleichung $7x + 11y = 47$ aufzulösen. Wir haben: $x = \frac{47 - 11y}{7} = 6 - y + \frac{5 - 4y}{7}$. Wir haben also die Division durchgeführt und einen Rest $\frac{5 - 4y}{7}$ erhalten. Soll x eine ganze Zahl sein, so muß aber notwendig auch dieser Rest eine solche sein, d. h. setzen wir denselben $= z$, so erhalten wir eine neue diophantische Gleichung $5 - 4y = 7z$ oder $4y + 7z = 5$, in der die Koeffizienten von z und y kleinere Zahlen sind. Aus dieser Gleichung erhalten wir wieder: $y = \frac{5 - 7z}{4} = 1 - z + \frac{1 - 3z}{4} = 1 - z + u$, wo u ebenfalls eine ganze Zahl sein muß. Die neue diophantische Gleichung $u = \frac{1 - 3z}{4}$ liefert wieder

$$3z + 4u = 1, \; z = \frac{1 - 4u}{3} = -u + \frac{1 - u}{3}.$$

Setzen wir in letzterem Bruch für u den Wert 1, so erhalten wir $z = -1$ und hieraus $y = 1 - z + u = 3$, $x = 6 - y + z = 2$.

Unsere Methode bezweckte also, aus der gegebenen Gleichung eine andere abzuleiten, die kleinere Koeffizienten hatte, aus dieser wieder eine mit noch kleinern Koeffizienten, bis wir zuletzt auf einen Bruch $\frac{1 - u}{3}$ kamen, der für $u=1$ eine ganze Zahl wurde. Wir hätten hierbei natürlich für u auch z. B. den Wert 4 wählen können. Wir wären auch etwas rascher zum Ziele gekommen, wenn wir z. B. in $\frac{1-3z}{4}$ für z den Wert -1 genommen hätten. Auch hätten wir $y=\frac{5-7z}{4}$ $=1-2z+\frac{1+z}{4}$ setzen können. Letzteres wäre eine ganze Zahl geworden für $z=3$ oder $z=7$ u. s. f.

Haben wir in der abgeleiteten Gleichung eine Wurzel gefunden, so finden wir rückwärts die Lösung der gegebenen Gleichung.

3. Sind auf diese Art für x und y zwei zusammengehörige Werte α und β bestimmt worden, so ist es leicht, aus diesen unendlich viele andere solche Wertepaare abzuleiten, die alle die Gleichung $ax+by=c$ befriedigen. Solche Werte sind allgemein

$$x=\alpha+bk,\quad y=\beta-ak,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl ist, wie wir sofort durch Einsetzen dieser Werte in die gegebene Gleichung sehen. Geben wir k alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhalten wir alle ganzzahligen Wurzelpaare, welche die Gleichung befriedigen.

So erhalten wir für obige Gleichung

$$x=2+11k,\quad y=3-7k.$$

Soll hierbei x und y positiv sein, so muß k notwendig Null sein, d. h. $x=2$, $y=3$ ist das einzige Paar positiver Wurzeln der Gleichung. Andere ganzzahlige Wurzeln sind z. B. in folgendem Schema enthalten.

k =	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
x =	−42	−31	−20	−9	+2	+13	+24	35	46	57	68
y =	+31	24	17	10	3	−4	−11	−18	−25	−32	−39

§ 10. **Auflösung durch Kettenbrüche.**

1. Um die Gleichung $ax - by = 1$ für $a < b$ aufzulösen, verwandelt man den Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch und sucht den vorletzten Näherungswert desselben, der $\frac{z}{n}$ sein möge. Der letzte Näherungswert ist dann $\frac{a}{b}$ selbst. Dann ist immer: $an - bz = \pm 1$, und wir haben offenbar für x und y entweder die Wurzeln

$$x = +n,\ y = +z \text{ oder } x = -n,\ y = -z.$$

Sei z. B. $23x - 37y = -1$ aufzulösen, so findet man $\frac{23}{37} = (1 : 1, 1, 1, 1, 1, 4)$. Daraus die Näherungswerte $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{23}{37}$. Der vorletzte $\frac{5}{8}$ gibt das Wertepaar $x = 8$, $y = 5$ oder allgemeiner

$$x = 8 + 37k,\ y = 5 + 23k.$$

2. Ist die Gleichung $ax + by = 1$ gegeben, so erhalten wir für $a < b$, ebenso $x = +n$, $y = -z$ oder $x = -n$, $y = +z$.

3. Wenn endlich die Gleichung $ax \pm by = c$ aufzulösen ist, folgt, abgesehen vom Vorzeichen, $x = nc$, $y = zc$.

4. Ist $a > b$, so verwandelt man $\frac{b}{a}$ in einen Kettenbruch und verfährt ebenso.

5. Diese Auflösung läßt sich noch wie folgt abändern. Es sei $13x+5y=41$ aufzulösen. Der vorletzte Näherungswert von $\frac{5}{13}$ ist $\frac{2}{5}$. Setzen wir $5x+2y=k$, so liefert die Auflösung der Gleichungen nach x und y sofort:

$$x=82-5k$$
$$y=-205+13k.$$

§ 11. Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten.

1. Es seien z. B. die Gleichungen

$$ax+by+cz=d \text{ und } a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$

gegeben. Man kann aus diesen eine Unbekannte ausscheiden und erhält dadurch eine Gleichung des ersten Grades, die nur noch zwei Unbekannte enthält. Scheidet man etwa z aus, und findet $x=\alpha+\alpha_1 k$, $y=\beta+\beta_1 k$, so setzt man diese Werte in die eine der gegebenen Gleichungen ein und erhält dadurch eine neue Gleichung zwischen k und z. Diese, nach k und z aufgelöst, gibt die Lösung.

2. Beispiel.

$$4x+3y+2z=16,\ 5x+6y+7z=38.$$

y eliminiert, gibt $3x-3z=-6$ oder $x-z=-2$. Hieraus durch Erraten $x=0$, $z=2$ oder allgemein $x=k$, $z=2+k$. Setzt man diese Werte in die erste gegebene Gleichung ein, so findet man: $6k+3y=12$ oder $2k+y=4$, $k=1+u$, $y=2-2u$, und hieraus $x=1+u$, $z=3+u$.

Gibt man u alle möglichen ganzen Werte, so erhält man z. B.:

$u=$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x=$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$y=$	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10
$z=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Sollen x, y und z positiv sein, so gibt es nur die Wertegruppen, die zu $u=-1$, $u=0$ und $u=1$ gehören.

§ 12. Eine Gleichung des ersten Grades mit drei Unbekannten. $ax+by+cz=d$.

1. Soll eine solche aufgelöst werden, so dürfen auch in dieser die Werte a, b, c keinen gemeinschaftlichen Teiler besitzen, der nicht auch in d enthalten ist. Die Lösung selbst enthält in den Ausdrücken für x, y und z zwei Unbestimmte. Ein Beispiel wird auch hier den Gang der Lösung am besten zeigen.

$5x+9y-2z=17,$

$$x=\frac{17+2z-9y}{5}=3-y+\frac{2+2z-4y}{5}=3-y+p$$

$5p=2+2z-4y,$

$$y=\frac{2z+2-5p}{4}=-p+\frac{2+2z-p}{4}=-p+q,$$

$4q=2+2z-p,\ z=2q-1+\frac{p}{2},\ p=2r,$

$z=2q+r-1,\ y=q-2r,\ x=4r-q+3.$

Hierbei sind r und q beliebige ganze Zahlen. Setzt man z. B. $q=1$, $r=2$, so erhält man $x=10$, $y=-3$, $z=3$.

2. Sollen nur ganze positive Werte für die Unbekannten bestimmt werden, so bedarf dies beinahe

immer einer besondern Untersuchung. Wählen wir zunächst q negativ, so müßte, damit y positiv ist, auch r negativ sein. Für $q = 0$ gehen die Wurzeln über in $x = 4r + 3$, $y = -2r$, $z = r - 1$, d. h. es müßte auch r wieder negativ sein, da sonst y negativ würde, q kann also nicht negativ und auch nicht $= 0$ sein. In beiden Fällen wäre sonst z negativ. Ist dagegen $q > 0$, so gibt es für jeden Wert q immer ganze positive Werte für die Unbekannten x, y und z, die die Gleichung befriedigen. So haben wir z. B. für $q = 2$, für x, y und z die Werte $x = 4r + 1$, $y = 2 - 2r$, $z = 3 + r$, es muß dann also $r = 0$ oder $= +1$ sein, damit die drei Werte der Unbekannten positiv sind. Für die Wurzeln selbst erhalten wir z. B. so die Wertegruppen:

q =	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7
r =	0	0	1	0	1	1	2	1	2	1	2	3	1	2
x =	2	1	5	0	4	3	7	2	6	1	5	3	0	4
y =	1	2	0	3	1	2	0	3	1	4	2	0	5	3
z =	1	3	4	5	6	8	9	10	11	12	13	14	13	11

§ 13. **Rationale pythagor. Dreiecke.** $x^2 + y^2 = z^2$.

1. Es ist $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$. Setzt man $z + y = \frac{m}{n} \cdot x$, $z - y = \frac{n}{m} \cdot x$, so ist $z = \frac{m^2 + n^2}{2m \cdot n} x$, $y = \frac{m^2 - n^2}{2m \cdot n} x$. Hieraus erhält man die ganzzahligen Lösungen $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$.

Solche rationale ganzzahlige Wurzeln der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ sind z. B. gegeben durch:

m =	1	1	1	1	1	2	2	2	3
n =	2	4	6	8	10	3	5	7	4
x =	4	8	12	16	20	12	20	28	24
y =	3	15	35	63	99	5	21 ~~19~~	45	7
z =	5	17	37	65	101	13	29	53	25

Wir haben hierbei m und n nicht beide ungerade oder gerade und relativ prim angenommen. Aus jeder Lösung gehen deren unzählige hervor (durch Multiplikation mit einer beliebigen ganzen Zahl). Irgend drei Wurzeln x, y, z der obigen Gleichung können als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aufgefaßt werden.

Anmerkung. Ein weiteres Eingehen auf die Gleichungen des zweiten und höheren Grades müssen wir uns hier versagen, da dieselben doch mehr ins Gebiet der Zahlentheorie fallen. Im übrigen verweisen wir auf Eulers Algebra (und zwar hauptsächlich auf die späteren französischen Ausgaben), in der eine Menge von Beispielen solcher Gleichungen des zweiten und höheren Grades behandelt sind.

II. Abschnitt.

Kombinationslehre. Determinanten

III. Kapitel.

Kombinationslehre.

§ 14. Aufgabe der Kombinationslehre. Elemente. Gruppen. Einteilung.

1. Die Kombinationslehre behandelt die Gesetze, nach denen eine gewisse Anzahl von Einzeldingen oder Größen ohne Rücksicht auf ihre Beschaffenheit sich zusammensetzen lassen. Diese Einzeldinge führen die Bezeichnung Elemente und werden durch Ordnungszahlen (Buchstaben oder Ziffern) bezeichnet.

2. Mehrere zusammengestellte Elemente bilden eine Gruppe oder eine Komplexion. So ist abc eine solche aus den Elementen a, b und c; ebenso 4132 von 1, 2, 3, 4.

3. Die Kombinationen selbst zerfallen wieder in Permutationen, Kombinationen im engern Sinne und Variationen.

Permutationen.

§ 15. Bildung und Anzahl der Permutationen aus lauter verschiedenen Elementen.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! \qquad 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n! \qquad P(n) = n!$$

1. Eine Anzahl Elemente permutieren oder umstellen heißt, dieselben in alle möglichen Reihenfolgen bringen. So sind die Permutationen von

a, b, c:	abc	acb	bac	bca	cab	cba

1, 2, 3, 4:	1234	2134	3124	4123
	1243	2143	3142	4132
	1324	2314	3214	4213
	1342	2341	3241	4231
	1423	2413	3412	4312
	1432	2431	3421	4321.

2. Alle Permutationen, die mit demselben Element beginnen, bilden eine **Ordnung**, die mit 2 oder 3 oder mehreren gleichen Elementen beginnen, eine **Unterordnung**. Folgen in einer Permutation die Elemente nicht in ihrer natürlichen Reihenfolge, so bilden sie eine **Inversion**. So enthält 2413 die Inversionen 21, 41, 43. Die Anzahl aller möglichen Permutationen aus n Elementen wird mit P (n) bezeichnet.

3. Um die Permutationen der Elemente 1, 2, 3, 4, 5 zu erhalten, gehen wir aus von den Permutationen der Elemente 1, 2, 3, 4 und setzen das Element 5 sowohl vor als nach den einzelnen Permutationen, sowie auch zwischen je zwei Elemente jeder Permutation von 1, 2, 3, 4. So erhalten wir z. B. aus 3214 die Permutationen:

53214 35214 32514 32154 32145.

4. Als Anzahlen der möglichen Permutationen ergibt sich hieraus sofort:

$P(0) = 1 = 1!$ $\quad P(4) = 4 . P(3) = 1 . 2 . 3 . 4 = 4!$

$P(2) = 1 . 2 = 2!$ $\quad P(5) = 5 . P(4) = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 5!$

$P(3) = 1 . 2 . 3 = 3!$ $\quad P(6) = 6 . P(5) = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 6!$

$$P(n) = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots n = n!$$

Das abgekürzte Produkt n! wird nFakultät gelesen.

§ 16. Permutationen aus teilweise gleichen Elementen.

$$P'(n) = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

Um die Anzahl der Permutationen aus Elementen zu bilden, die nicht alle verschieden sind, z. B. aus 1, 1, 1, 2, 3, 4, versehen wir die gleichen Elemente zunächst mit Indices 1, 2, 3 und denken uns jetzt aus 1_1, 1_2, 1_3, 2, 3, 4 die Permutationen gebildet. Deren Anzahl ist 6! Greifen wir unter diesen Permutationen irgend eine heraus, etwa $1_2\,4\,3\,1_1\,5\,1_3$, so sind unter den übrigen noch fünf andere, $1_1\,4\,3\,1_2\,5\,1_3$, $1_1\,4\,3\,1_3\,5\,1_2$, $1_2\,4\,3\,1_3\,5\,1_1$, $1_3\,4\,3\,1_1\,5\,1_2$ und $1_3\,4\,3\,1_2\,5\,1_1$, die sich von der ersten nur durch die Stellung der Indices unterscheiden, oder sehen wir von diesen Indices wieder ab, so sind unter den 6! Permutationen je 3! unter sich gleich. Die Zahl 6! ist also durch 3! zu dividieren und wir erhalten, wenn wir die Anzahl der möglichen Permutationen der obigen Elemente mit P′(6) bezeichnen, $P'(6) = \frac{6!}{3!}$ und allgemein, wenn unter n Elementen α gleiche sind, $P'(n) = \frac{n!}{\alpha!}$. Sind noch β andere Elemente und ebenso γ weitere Elemente je unter sich gleich, so folgt ganz ebenso allgemein $P'(n) = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$.

§ 17. Permutationen in lexikographischer Anordnung.

1. Sind die Elemente Buchstaben und sind die Permutationen wie die Wörter eines Lexikons (oder wenn die Elemente Zahlen sind ihrem Werte nach) geordnet, so heißt die Anordnung **lexikographisch**.

2. Um die Permutationen in dieser Anordnung zu bilden, können wir von der Permutation 12345 (z. B.

bei fünf Elementen) ausgehen und dieselbe von rechts nach links durchlaufen, bis wir auf zwei Elemente stoßen, die nicht in Inversion stehen. Dies sind hier die Elemente 4 und 5. 5 setzen wir an Stelle von 4 und erhalten so 12354. Verfahren wir hier ebenso, so erhalten wir als erstes Paar von Elementen, die nicht in Inversion stehen, 34. An Stelle von 3 setzen wir 4 und lassen die übrigen durchlaufenen Elemente in ihrer natürlichen Reihe folgen, erhalten also 12435. Hieraus finden wir 12453, dann 12534 etc. Dieses Bildungsgesetz gilt auch für den Fall, daß die Elemente teilweise gleich sind.

§ 18. Bildung einer bestimmten Permutation in lexikographischer Anordnung.

1. Beispiel. Die 329. Permutation von 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu bilden.

329

Elemente	Zahl der vorangehenden Permutationen in den Ordnungen		Vorangehende Ordnungen	Element	Rest
123456	329 : 5!	(120)	2	3	89
12456	89 : 4!	(24)	3	5	17
1246	17 : 3!	(6)	2	4	5
126	5 : 2!	(2)	2	6	1
12	1 : 1!	(1)	0	1	1
2	1 : 0!	(1)	0	2	1

Die 329. Permutation ist 354612.

Wir finden zunächst, daß die gesuchte Permutation in der dritten Ordnung zu suchen ist, indem jede Ordnung 5! oder 120 Permutationen enthält und 120 zweimal in 329 enthalten ist. Das erste Element ist also 3. Unsere Aufgabe ist jetzt die, von den Permutationen der Elemente 1, 2, 4, 5, 6 die 89. zu suchen. Von dieser erhalten wir wieder als erstes Element 5 u. s. w. Führt die Division auf eine ganze Zahl ohne Rest, so ist die nächst kleinere Zahl zu nehmen.

2. Beispiel. Die 367. Permutation von abbbccd zu bestimmen.

367

Elemente	Zahl der Permutationen in den Ordnungen	Hiervon gehen Permutationen voran	Element	Rest
abbbccd	60 + 180 + 120 + 60	60 + 180 + 120 = 360	d	7
abbbcc	10 + 30 + 20	0	a	7
bbbcc	6 + 4	6	c	1
bbbc	3 + 1	0	b	1
bbc	2 + 1	0	b	1
bc	1 + 1	0	b	1

Die 367. Permutation ist dacbbbc.

Es gilt hier gleichfalls das bei Beispiel 1 Bemerkte, nur enthalten die einzelnen Ordnungen nicht mehr gleichviel Permutationen.

§ 19. Bestimmung der Stellung einer Permutation in lexikographischer Anordnung.

1. Beispiel. Zu bestimmen, die wievielte Permutation dafbec von abcdef ist.

dafbec

Elemente	Element	Vorangehende Elemente	Vorangehende Permutationen
a b c d e f	d	3	$3 \cdot 5! = 360$
a b c e f	a	0	$0 \cdot 4! = 0$
b c e f	f	3	$3 \cdot 3! = 18$
b c e	b	0	$0 \cdot 2! = 0$
c e	e	1	$1 \cdot 1! = 1$
c	c	0	$0 \cdot 0! = 0$
			zusammen 379.

dafbec ist die 380. Permutation von abcdef. (Es gehen ihr voran 379.)

2. Beispiel. Die Stellung der Permutation 321421 von 112234 zu bestimmen.

321421

Elemente	Element	Zahl der Permutationen in den Ordnungen	Hiervon gehen voran
112234	3	$60+60+30+30$	$60+60=120$
11224	2	$12+12+6$	$12 = 12$
1124	1	$6+3+3$	$0 = 0$
124	4	$2+2+2$	$2+2 = 4$
12	2	$1+1$	$1 = 1$
1	1	1	$0 = 0$
			zusammen 137.

321421 ist also die 138. Permutation von 112234.

Das angewandte Schema bedarf in beiden Fällen kaum einer Erklärung. Bei einiger Übung kann dasselbe bedeutend verkürzt werden.

Sollen von irgend einem Wort, z. B. amor, die Permutationen bestimmt werden, so ersetzt man am einfachsten jeden Buchstaben des Wortes durch eine Ziffer. also a durch 1, m durch 2, o durch 3, r durch 4 und löst die betreffende Aufgabe an den Ziffern 1, 2, 3, 4 und ersetzt diese am Schlusse wieder durch die entsprechenden Buchstaben.

Kombinationen und Variationen.

§ 20. Kombinationen ohne Wiederholung.

$$C^p(n) = \frac{n \,.\, (n-1)\,(n-2) \ldots (n-p+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots p} = \binom{n}{p}.$$

1. Kombinieren oder Zusammenstellen heißt, eine bestimmte Anzahl p von gegebenen n Elementen, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, zu verbinden. Die Kombinationen aus p Elementen bilden hierbei die pte Klasse und ihre Anzahl bezeichnet man durch $C^p(n)$. So sind für die Elemente a, b, c, d die Kombinationen der

1. Klasse (Unionen): a, b, c, d,
2. Klasse (Amben): ab ac ad bc bd cd,
3. Klasse (Ternen): abc abd acd bcd,
4. Klasse (Quaterne): abcd.

2. Um die Anzahl der Kombinationen z. B. aus sechs Elementen zu bestimmen, geht man von den Unionen, also den Kombinationen der ersten Klasse, etwa 1, 2, 3, 4, 5, 6 aus. Jede dieser Kombinationen verbindet man mit den übrigen fünf Elementen und erhält daraus $6 \,.\, 5 = 30$ Gruppen zu je zwei Elementen. Verbindet man auch hier jede Gruppe mit jedem der vier fehlenden Elemente, so ergeben sich $6 \,.\, 5 \,.\, 4$ Gruppen zu drei Elementen, ebenso $6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3$ Gruppen zu vier Elementen u. s. w. Alle diese Gruppen treten aber in

ihren sämtlichen Permutationen auf, d. h. man erhält die betreffende Kombinationszahl, indem man durch die entsprechenden Permutationszahlen die obigen Zahlen dividiert. Man findet also:

$$C^1(6) = \frac{6}{1} = \binom{6}{1} = 6 \qquad C^4(6) = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = \binom{6}{4} = 15$$

$$C^2(6) = \frac{6.5}{1.2} = \binom{6}{2} = 15 \qquad C^5(6) = \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = \binom{6}{5} = 6$$

$$C^3(6) = \frac{6.5.4}{1.2.3} = \binom{6}{3} = 20 \quad C^6(6) = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} = \binom{6}{6} = 1.$$

Allgemein ist $C^p(n) = \frac{n.(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p} = \binom{n}{p}$

Der abgekürzte Quotient $\binom{n}{p}$ wird n über p gelesen.

§ 21. Kombinationen mit Wiederholung.

$${}^wC^p(n) = \binom{n+p-1}{p}.$$

Darf bei der Bildung einer Kombination ein Element mehr als einmal verwandt werden, so entstehen die Kombinationen mit Wiederholung. Die aus der dritten Klasse aus den Elementen 1234 sind so z. B.:

111 112 113 114 122 123 124 133 134 144
222 223 224 233 234 244
333 334 344
444.

Addiert man zu den Ziffern dieser Kombinationen die Ziffern 0, 1, 2, so gehen dieselben über in die Kombinationen dritter Klasse ohne Wiederholung aus 6 Elementen, nämlich in:

123	124	125	126	134	135	136	145	146	156
234	235	236	245	246	256				
345	346	356							
456.									

Die Anzahl der Kombinationen der dritten Klasse mit Wiederholung aus 4 Elementen ist also

$$\binom{4+2}{3} = \binom{6}{3} = 20.$$

Ganz ebenso erhält man aus den Kombinationen mit Wiederholung der pten Klasse durch Addition der Ziffern 0, 1, 2 . . ., p — 1 zu den einzelnen Elementen derselben die Kombinationen der pten Klasse ohne Wiederholung aus $(n + p - 1)$ Elementen. Die Anzahl der Kombinationen pter Klasse mit Wiederholung aus n Elementen ist also ${}^{w}C^{p}(n) = \binom{n+p-1}{p}$.

§ 22. Variationen.

$$V^{p}(n) = n\,.\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-p+1) \text{ und } {}^{w}V^{p}(n) = n^{p}.$$

1. Bildet man aus den einzelnen Kombinationen sämtliche Permutationen, so entstehen die Variationen. Unter diesen unterscheiden wir wieder zwischen Variationen ohne Wiederholung und Variationen mit Wiederholung.

2. Die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung ergibt sich sofort aus der Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung, es ist die Anzahl der Variationen pter Klasse aus n Elementen

$$V(n)^{p} = n\,.\,(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

3. Um die Anzahl der Variationen mit Wiederholung zu erhalten, geht man von den Variationen der ersten Klasse aus. Deren Anzahl ist n. Jede dieser

Variationen verbindet man mit jedem der n Elemente und erhält dadurch die Variationen der zweiten Klasse, deren Anzahl $= n^2$ ist.

Jede dieser Variationen verbindet man mit jedem der n Elemente und erhält dadurch die Anzahl der Variationen der 3. Klasse $= n^3$. Ebenso findet man ganz allgemein ${}^{w}V^{p}(n) = n^{p}$.

§ 23. Eigenschaften des Binomialkoeffizienten.

1. Es ist:

$$(a+b)^n$$
$$= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} \cdot a^{n-3} b^3 \ldots + b^n.$$

(Vergl. Sammlung Göschen, Algebra, § 30.)

Die Kombinationszahlen sind also nichts anderes als Binomial-Koeffizienten.

Führen wir für a^n und b^n noch die Koeffizienten $\binom{n}{o}$ und $\binom{n}{n}$ ein, so erhalten wir, da $\binom{n}{o} = \binom{n}{n} = 1$ ist:

$$(a+b)^n = \binom{n}{o} \cdot a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

wobei $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

2. Setzen wir $a = b = 1$, so erhalten wir:

$$2^n = \binom{n}{o} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

3. Setzen wir dagegen $a = 1$, $b = -1$, so wird:

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots \pm \binom{n}{n-1} \mp \binom{n}{n}.$$

4. Es ist

$$\binom{n+1}{p} = \frac{(n+1)n.(n-1)\dots(n-p+2)}{1.2.3\dots p}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} + \frac{n(n-1)(n-2).(n-p+2}{(p-1)!}$$

oder $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1},$$

$$\binom{n-1}{p} = \binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p-1} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus durch Addition:

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \dots + \binom{p-1}{p-1}.$$

5. Aus $(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha$

und $(x+1)^\beta = x^\beta + \binom{\beta}{1}x^{\beta-1} + \binom{\beta}{2}x^{\beta-2} + \dots + \binom{\beta}{\beta}$

folgt durch Multiplikation:

$$(1+x)^{\alpha+\beta} = 1 + \binom{\alpha+\beta}{1}x + \binom{\alpha+\beta}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}$$

$$= \left(1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 \dots\right)\left(x^\beta + \binom{\beta}{1}x^{\beta-1} + \binom{\beta}{2}x^{\beta-2} + \dots\right)$$

Setzen wir in diesen beiden Ausdrücken die Koeffizienten der Potenzen von x einander gleich, so erhalten wir z. B.:

$$\binom{\alpha+\beta}{\beta} = 1 + \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{1} + \binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{2} + \binom{\alpha}{3}\binom{\beta}{3} + \dots + \binom{\alpha}{\alpha}\binom{\beta}{\alpha}.$$

$(\alpha < \beta)$. Hieraus:

$$\binom{2\alpha}{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1}^2 + \binom{\alpha}{2}^2 + \binom{\alpha}{3}^2 + \dots \binom{\alpha}{\alpha}^2$$

$$\binom{\alpha+\beta}{\beta+p}=\binom{\alpha}{p}\binom{\beta}{0}+\binom{\alpha}{p+1}\binom{\beta}{1}+\binom{\alpha}{p+2}\binom{\beta}{2}+\binom{\alpha}{p+3}\binom{\beta}{3}+\ldots$$

und

$$\binom{\alpha+\beta}{p}=\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{p}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{p-1}+\binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{p-2}+\cdots+\binom{\alpha}{p}\binom{\beta}{0}$$

IV. Kapitel.

Determinanten.

§ 24. Definition der Determinanten.

1. Sind uns etwa die folgenden 16 Größen

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \qquad b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \qquad c_1\, c_2\, c_3\, c_4 \qquad d_1\, d_2\, d_3\, d_4$$

gegeben und bilden wir aus diesen Größen Produkte, welche vier Faktoren enthalten, und kommt in jedem dieser Produkte jede der Größen a, b, c, d und jeder der vier Indices 1, 2, 3, 4 vor, so erhalten wir im ganzen 24 solcher Teilprodukte.

Diese Teilprodukte lassen sich alle aus dem Produkt $a_1\, b_2\, c_3\, d_4$ dadurch ableiten, daß wir die Permutationen der Indices 1, 2, 3, 4 bilden. Dies geschieht, indem wir je einen der Indices mit einem anderen vertauschen. Ändern wir noch bei jeder dieser Vertauschungen das Vorzeichen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&a_1 b_2 c_3 d_4 - a_1 b_2 c_4 d_3 + a_1 b_3 c_4 d_2\\
&- a_1 b_3 c_2 d_4 + a_1 b_4 c_2 d_3 - a_1 b_4 c_3 d_2\\
&+ a_2 b_4 c_3 d_1 - a_2 b_4 c_1 d_3 + a_2 b_3 c_1 d_4\\
&- a_2 b_3 c_4 d_1 + a_2 b_1 c_4 d_3 - a_2 b_1 c_3 d_4\\
&+ a_3 b_1 c_2 d_4 - a_3 b_1 c_4 d_2 + a_3 b_2 c_4 d_1\\
&- a_3 b_2 c_1 d_4 + a_3 b_4 c_1 d_2 - a_3 b_4 c_2 d_1\\
&+ a_4 b_3 c_2 d_1 - a_4 b_3 c_1 d_2 + a_4 b_2 c_1 d_3\\
&- a_4 b_2 c_3 d_1 + a_4 b_1 c_3 d_2 - a_4 b_1 c_2 d_3 .
\end{aligned}$$

2. Diese Summe von 24 Produkten nennt man eine Determinante und bezeichnet sie abgekürzt durch:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = (a\,b\,c\,d)$$

$$= \Sigma \pm a_1\, b_2\, c_3\, d_4 \ldots$$

3. Jede der Größen a, b, c, d heißt Glied oder Element. Die Anzahl der Glieder ist 16 und allgemein n^2.

Die Glieder a und ebenso die Glieder b, c und d bilden je eine Horizontalreihe, die Glieder mit gleichen Indices eine Vertikalreihe der Determinante. Die Determinante selbst heißt von der 4ten Ordnung oder vom 4ten Grade.

§ 25. Bestimmung des Vorzeichens eines Teilprodukts.

1. Auf das Vorzeichen eines Teilprodukts einer Determinante ist nur die Anzahl der Vertauschungen bestimmend, die nötig sind, um es aus dem ersten Glied abzuleiten. Soll so z. B. von dem Teilprodukt $a_5\, b_3\, c_1\, d_2\, e_4$ einer Determinante 5ter Ordnung das Vorzeichen bestimmt werden, so bilden wir aus 5 3 1 2 4 die folgenden Permutationen:

1 3 5 2 4 1 2 5 3 4 1 2 3 5 4
1 2 3 4 5.

Um das gegebene Produkt zu bilden, waren also eine gerade Anzahl von Vertauschungen nötig, und das Vorzeichen desselben ist also positiv.

2. Bilden wir aus dem Produkte $a_2 b_1 c_3$ einer Determinante 3ter Ordnung durch cyklische Vertauschung die neuen Produkte $a_1 b_3 c_2$, $a_3 b_2 c_1$, so sind, um jedes Produkt in das vorangehende überzuführen, 2 Vertauschungen nötig, also haben alle drei Produkte dasselbe Vorzeichen und zwar das Vorzeichen —.

D u r c h c y k l i s c h e V e r t a u s c h u n g d e r I n d i c e s ä n d e r t s i c h a l s o d a s V o r z e i c h e n d e r T e i l p r o d u k t e e i n e r D e t e r m i n a n t e d e s 3 t e n G r a d e s, o d e r a l l g e m e i n e r: u n g e r a d e n G r a d e s, n i c h t.

3. Ganz ebenso findet man, daß d u r c h c y k l i s c h e V e r t a u s c h u n g d e r I n d i c e s b e i d e n T e i l p r o d u k t e n e i n e r D e t e r m i n a n t e g e r a d e r O r d n u n g d a s V o r z e i c h e n s i c h b e i j e d e r V e r t a u s c h u n g ä n d e r t. So entstehen also z. B. aus $+ a_1 b_2 c_3 d_4$ die Teilprodukte:

$$- a_2 b_3 c_4 d_1 + a_3 b_4 c_1 d_2 - a_4 b_1 c_2 d_3$$

auf diese Art.

§ 26. **Berechnung der Determinante dritter Ordnung.**

1. Aus dem Obigen ergibt sich für die Berechnung der Determinante 3ter Ordnung die folgende Regel:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \Bigg|$$

W i r s c h r e i b e n d i e D e t e r m i n a n t e z w e i m a l n e b e n e i n a n d e r, b e g i n n e n m i t d e n W e r t e n a d e r e r s t e n D e t e r m i n a n t e u n d l e s e n i n d e r R i c h t u n g d e r D i a g o n a l e n a c h r e c h t s abwärts. Diese Produkte haben das Vorzeichen +, also:

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2.$$

Hierauf gehen wir aus von den Werten a der 2ten Determinante und lesen wieder in der Richtung der Diagonale, diesmal aber nach links abwärts und erhalten:

$$-a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1.$$

2. Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{matrix} \Bigg|$$

$$\Delta = +1.9.25 + 4.16.9 + 9.4.16 - 1.16.16 - 4.4.25 - 9.9.9 = -8.$$

§ 27. Vertauschung von Horizontal- und Vertikalreihen.

1. Aus der Definition der Determinante folgt unmittelbar:

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man alle Horizontalreihen mit allen Vertikalreihen vertauscht, d. h. die Determinante um eine Diagonale dreht. Es ist also z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. Ebenso erhalten wir:

Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn eine Horizontalreihe (oder

Vertikalreihe) mit einer anderen Horizontalreihe (Vertikalreihe) vertauscht wird.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 12 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Sind in einer Determinante also zwei gleiche Horizontalreihen oder Vertikalreihen enthalten, so ist ihr Wert stets Null, da durch eine Vertauschung keine Änderung in ihrem Werte eintritt.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 11 & 6 \\ 7 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Unterscheiden sich zwei Horizontalreihen (oder Vertikalreihen) nur durch einen besonderen Faktor, so verschwindet die Determinante gleichfalls. Dieser Faktor ist offenbar auch ein Faktor der ganzen Determinante und kann als solcher ausgeschieden werden, wodurch die Determinante zwei gleiche Reihen erhält.

§ 28. Addition besonderer Determinanten.

1. Haben zwei Determinanten derselben Ordnung alle Horizontalreihen oder Vertikalreihen bis auf eine gleich, so wird ihre Summe erhalten, indem man die Elemente der ungleichen Horizontalreihen (resp. Ver-

tikalreihen) addiert und die übrigen Reihen unverändert läßt.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1+\gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Analoges gilt bezüglich der Subtraktion.

2. In Verbindung mit dem in Nummer 3 und 4 des vorigen Paragraphen Gefundenen folgt daraus wieder:

Eine Determinante wird nicht geändert, wenn man zu jedem Element einer Reihe die mit konstanten Faktoren multiplizierten Elemente einer anderen oder auch mehrerer solcher anderer Reihen hinzufügt.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 12 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} + 0.$$

3. Ebenso finden wir:

Wenn die Elemente einer Reihe gleich sind den Summen der mit konstanten Faktoren multiplizierten entsprechenden Elemente anderer Reihen, so ist der Wert der Determinante Null.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_2 + \mu a_3 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_2 + \mu b_3 & b_2 & b_3 \\ \lambda c_2 + \mu c_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_2 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_2 & b_2 & b_3 \\ \lambda c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mu a_3 & a_2 & a_3 \\ \mu b_3 & b_2 & b_3 \\ \mu c_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Damit ist die **Möglichkeit gegeben, alle Glieder einer Reihe bis auf eines zum Verschwinden zu bringen.** Alsdann geht die Determinante in eine andere über, die um einen Grad niedriger ist.

Beispiel:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 1 & 2 \\ 5 & -18 & -3 & -1 \\ 3 & -11 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Die 2te Vertikalreihe entsteht durch Subtraktion der Glieder der mit 4 multiplizierten ersten, die dritte ebenso durch Subtraktion der mit 2 multiplizierten Glieder der 2ten Vertikalreihe und die vierte endlich durch Subtraktion der Glieder der 2ten und 3ten Vertikalreihe. Setzen wir noch den Faktor -1 vor die Determinante, so folgt daraus:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 18 & -3 & -1 \\ 11 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

§ 29. Subdeterminanten.

1. **Unterdrückt man in einer Determinante eine Anzahl von Horizontal- und die gleiche Anzahl von Vertikalreihen, so ergibt sich eine Subdeterminante.** So sind von der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

z. B. die folgenden Determinanten Subdeterminanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_2 & d_2 & b_2 \\ c_3 & d_3 & b_3 \\ c_4 & d_4 & b_4 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

2. Bezeichnen wir die zum Werte a_1 gehörige Subdeterminante mit α_1, die etwa zu c_3 gehörige mit γ_3, so erhalten wir für die Berechnung einer Determinante

$$\varDelta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots \text{ oder}$$
$$\varDelta = a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 + \ldots$$

So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

3. Weiter folgt unmittelbar aus § 27, daß z. B.

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + \ldots = 0 \text{ ist.}$$

So ist in Bezug auf die letztere Determinante

$$a_2 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ und}$$

$$a_3 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Bei diesen Unterdeterminanten ist zu beachten, daß die Reihenfolge der Buchstaben und Indices genau eingehalten wird. Diese Reihenfolge ist abc abc, so daß auf b also c und dann erst a folgt. Ebenso folgt auf 2 die Zahl 3 und auf diese die Zahl 1 bei der dreireihigen Determinante.

§ 30. Multiplikation zweier Determinanten.

1. Jede Determinante kann auf einfache Art in eine solche höherer Ordnung verwandelt werden; wie, zeigt am einfachsten ein Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Werden zwei Determinanten der dritten Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

miteinander multipliziert, so kann das Produkt als neue Determinante dargestellt werden und zwar ist dasselbe:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1, & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2, & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1, & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2, & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1, & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2, & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

Zerlegen wir nämlich diese Determinante nach § 28 in 27 andere Determinanten, so verschwinden von diesen 21, und es bleiben nur noch sechs Determinanten übrig, die alle die eine Determinante zum Faktor haben. Setzen wir diesen Faktor vor eine Klammer, so ist dann der Klammerausdruck die zweite Determinante. Wir wollen, um den Gang des Beweises zu zeigen, uns auf ein Produkt zweier Determinanten 2ter Ordnung beschränken.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta, & c\alpha + d\beta \\ a\gamma + b\delta, & c\gamma + d\delta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\alpha, & c\alpha + d\beta \\ a\gamma, & c\gamma + d\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b\beta, & c\alpha + d\beta \\ b\delta, & c\gamma + d\delta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\alpha & c\alpha \\ a\gamma & c\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a\alpha & d\beta \\ a\gamma & d\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b\beta & c\alpha \\ b\delta & c\gamma \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b\beta & d\beta \\ b\delta & d\delta \end{vmatrix} = 0 + a\,d \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} - b\,c \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

$$+ 0 = (a\,d - b\,c) \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

3. Sind die Determinanten nicht von derselben Ordnung, so werden sie zuerst in solche derselben Ordnung verwandelt. Sind die Determinanten höherer Ordnung als der dritten, so ist das Produkt von analoger Form.

§ 31. Auflösung der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

1. Lösen wir die Gleichungen

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

nach x und y auf, so erhalten wir:

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

2. Soll die Werte x und y noch eine dritte Gleichung $a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$ erfüllen, so folgt, wenn wir die für x und y gefundenen Werte in diese Gleichung einsetzen, unmittelbar:

$$a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante stellt also die Bedingung dar, daß obige drei Gleichungen gleichzeitig gültig sind.

3. Haben wir ebenso die Gleichungen

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0,$$

so folgt aus diesen sofort, wenn wir dieselben als Gleichungen für x und y allein ansehen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 z + d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 z + d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 z + d_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

$$z \,.\, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$z = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

und ebenso:

$$x = -\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$y = -\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Soll also der Wert einer Unbekannten aus den obigen drei Gleichungen gebildet werden, so geht man aus von der Determinante der Koeffizienten der Unbekannten. Die Unbekannte ist dann immer gleich dem negativen Werte eines Bruches, dessen Nenner diese Determinante und dessen Zähler eine Determinante ist, die aus dem Nenner dadurch hervorgeht, daß die Koeffizienten der Unbekannten durch die Absolutglieder der Gleichung ersetzt werden.

4. Ist außer den obigen drei Gleichungen noch eine vierte gegeben: $a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0$, so finden wir für das gleichzeitige Bestehen dieser Gleichung wieder wie oben:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus folgt, daß die für drei Unbekannte angegebene Regel auch für vier Unbekannte und überhaupt allgemein gilt.

5. Beispiel.

$$3x + 5y - 13 = 0$$
$$2x + 3z - 18 = 0$$
$$2y - z - 1 = 0$$

$$x = -\begin{vmatrix} -13 & 5 & 0 \\ -11 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 : -8 = 1$$

$$y = -\begin{vmatrix} 3 & -13 & 0 \\ 2 & -11 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -16 : -8 = 2$$

$$z = -\begin{vmatrix} 3 & 5 & -13 \\ 2 & 0 & -11 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -24 : -8 = 3$$ [1]

---

[1] Über eingehendere Untersuchungen vergl. etwa Hesse, Determinanten, oder Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transformation, oder Baltzer, Determinanten.

III. Abschnitt.

Arithmetische Reihen höherer Ordnung. Figurierte Zahlen. Interpolation.

V. Kapitel.

Arithmetische Reihen höherer Ordnung.[1]

§ 32. Entstehung der arithmetischen Reihen. Differenzenreihen.

1. Setzt man in dem Ausdruck

$$y_x = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

für x nacheinander die Werte 0, 1, 2, 3, ... oder allgemeiner die Glieder einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung, so erhält man Werte

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots$$

welche eine arithmetische Reihe der nten Ordnung bilden.

2. Bezeichnet man mit Δy_p die Differenz $y_{p+1} - y_p$, so hat man

$$\Delta y_p = a_0\left((p+1)^n - p^n\right) + a_1\left((p+1)^{n-1} - p^{n-1}\right) + \ldots$$
$$= a'_0 p^{n-1} + a'_1 p^{n-2} + a'_2 p^{n-3} + \ldots + a'_{n-1}.$$

Entwickelt man nämlich die Potenzen von $(p+1)$, so verschwindet das Glied mit p^n. Setzt man anstatt p wieder x, so folgt aus der Definition der arithmetischen Reihen unmittelbar, daß die Reihe der Differenzen

---

[1] Die ersten arithm. Reihen finden sich bereits in Stifels Arithmetica integra.

$$\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \ldots$$

eine arithmetische Reihe der Ordnung (n — 1) bildet.

3. Bezeichnet man ebenso die Differenzen der aufeinanderfolgenden Glieder dieser Reihe mit $\Delta^2 y$, so erhält man eine Reihe der Ordnung (n — 2)

$$\Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, \Delta^2 y_2, \Delta^2 y_3, \ldots$$

Fährt man so fort, so kommt man zuletzt auf eine Reihe der ersten Ordnung, deren sämtliche Differenzen gleich sind.

4. Ist die Reihe z. B. gegeben durch $y = 2x^3 + x^2 - x + 1$, so erhält man daraus die

Reihe der 3. Ordn.: 1 3 19 61 141 271 ... und die
I. Differenzenreihe: 2 16 42 80 130 ...
II. Differenzenreihe: 14 26 38 50 62 ...
III. Differenzenreihe: 12 12 12 12 ...

5. Allgemein erhält man

$y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \ldots\ldots\ldots$ (arithmetische Reihe),
$\Delta y_0 \quad \Delta y_1 \quad \Delta y_2 \quad \Delta y_3 \ldots\ldots$ (I. Differenzenreihe),
$\Delta^2 y_0 \quad \Delta^2 y_1 \quad \Delta^2 y_2 \quad \Delta^2 y_3 \ldots\ldots$ (II. Differenzenreihe),
$\Delta^3 y_0 \quad \Delta^3 y_1 \quad \Delta^3 y_2 \ldots\ldots\ldots$ (III. Differenzenreihe),
. . . .

§ 33. Bildung des allgemeinen Gliedes aus einer Reihe.

1. Soll umgekehrt aus der Reihe der Ausdruck für das allgemeine Glied y_x der Reihe bestimmt werden, so hat man zunächst die Ordnung der Reihe durch Bildung der Differenzenreihen festzustellen und erhält daraus für y_x

$$y_x = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Setzt man hierin für x die Werte 0, 1, 2, 3 . . ., so erhält man dann zur Bestimmung der Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, $(n + 1)$ Gleichungen, indem man die erhaltenen Werte für y_x den Werten der Glieder der gegebenen Reihe gleichsetzt.

2. Ist z. B. die Reihe

$$1 \quad 3 \quad 11 \quad 31 \quad 69 \quad 131 \quad 223 \ldots$$

gegeben, so erhält man die Ordnung der Reihe durch Bildung der Differenzenreihen

$$2 \quad 8 \quad 20 \quad 38 \quad 62 \quad 92 \ldots$$
$$6 \quad 12 \quad 18 \quad 24 \quad 30 \ldots$$
$$6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \ldots$$

Da die Differenzenreihe 6, 12, 18, 24 ... von der ersten Ordnung ist, ist die gegebene Reihe von der dritten Ordnung und das allgemeine Glied heißt demnach $y_x = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$. Setzt man hier $x = 0, 1, 2, 3$, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 = a_3 \\ y_1 &= 3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ y_2 &= 11 = 8a_0 + 4a_1 + 2a_2 + a_3 \\ y_3 &= 31 = 27a_0 + 9a_1 + 3a_2 + a_3 \end{aligned}$$

Subtrahiert man jede dieser Gleichungen von der nächstfolgenden, so erhält man:

$$\begin{aligned} 2 &= a_0 + a_1 + a_2. \\ 8 &= 7a_0 + 3a_1 + a_2 \\ 20 &= 19a_0 + 5a_1 + a_2 \end{aligned}$$

Hieraus ebenso:

$$\begin{aligned} 6 &= 6a_0 + 2a_1 \\ 12 &= 12a_0 + 2a_1, \quad 6 = 6a_0, \text{ also:} \end{aligned}$$

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1 \text{ und } y = x^3 + x + 1.$$

3. Zur Bestimmung der allgemeinen Glieder y_x dienen $(n+1)$ Glieder der Reihe. Es müssen dies nicht notwendig die ersten $(n+1)$ Glieder der Reihe sein, doch ist dann die Bestimmung von y_x nicht immer so einfach.

§ 34. Ableitung der allgemeinen Glieder aus den Differenzenreihen.[1]

$$y_x = y_0 + \binom{x}{1} \Delta y_0 + \binom{x}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{x}{3} \Delta^3 y_0 + \cdots$$

1. Es ist

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0, \quad \Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0, \ldots$$

[1] Diese Formel für das allg. Glied gab Newton.

$y_2 = y_1 + \Delta y_1, \quad \Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1, \quad \Delta^2 y_2 = \Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1, \ldots$
$y_3 = y_2 + \Delta y_2, \quad \Delta y_3 = \Delta y_2 + \Delta^2 y_2, \quad \Delta^2 y_3 = \Delta^2 y_2 + \Delta^3 y_2, \ldots$
. . . .

Hieraus erhalten wir:

$$y_0 = y_0$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$
$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$$
$$y_4 = y_3 + \Delta y_3 = y_0 + 4\Delta y_0 + 6\Delta^2 y_0 + 4\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0$$

. . . . Allgemein

$$y_x = y_0 + \binom{x}{1}\Delta y_0 + \binom{x}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{x}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

2. Um die Richtigkeit dieser Formeln zu zeigen, wollen wir annehmen, sie gelte bis zu einem bestimmten x. Es ist dann:

$$\begin{aligned} y_{x+1} &= y_x + \Delta y_x \\ &= y_0 + \binom{x}{1}\Delta y_0 + \binom{x}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{x}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots \\ &\qquad + \Delta y_0 + \binom{x}{1}\Delta^2 y_0 + \binom{x}{2}\Delta^3 y_0 + \ldots \\ &= y_0 + \binom{x+1}{1}\Delta y_0 + \binom{x+1}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{x+1}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots \end{aligned}$$

(Vergl. § 23. 4).

Gilt die Gleichung also für x, so gilt sie auch für $(x+1)$. Da sie aber für $x = 1, 2, 3, 4$ gilt, so gilt sie auch für $x = 5, 6$ u. s. w., d. h. allgemein.

3. Für das allgemeine Glied erhalten wir in dem Beispiel in § 33 auf diese Art

$$y_x = 1 + \binom{x}{1}2 + \binom{x}{2}.6 + \binom{x}{3}.6 = x^3 + x + 1.$$

§ 35. Summierung der arithmetischen Reihe.

$$S_x = \binom{x+1}{1} y_0 + \binom{x+1}{2} \cdot \Delta y_0 + \binom{x+1}{3} \cdot \Delta^2 y_0 + \ldots \text{ und}$$

$$S_x = A_0 x^{n+1} + A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \ldots$$

1. Aus der Definition der arithmetischen Reihe und ihrer Differenzenreihen folgt unmittelbar, daß, wenn man die Summe der Glieder von y_0 bis y_x mit S_x bezeichnet, die Werte der S_x eine Reihe der $(n+1)$ten Ordnung bilden, deren Anfangsglied man gleich 0 wählen kann und deren erste Differenzenreihe die gegebene Reihe ist. Daraus folgt unmittelbar

$$S_x = \binom{x+1}{1} y_0 + \binom{x+1}{2} \Delta y_0 + \binom{x+1}{3} \Delta^2 y_0 + \ldots$$

2. Man kann aber auch auf analoge Weise wie in § 33 die Summe der Reihe bis zum xten Gliede mit

$$S_x = A_0 x^{n+1} + A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \ldots$$

bezeichnen. Soll z. B. die Summenformel für die Reihe der dritten Ordnung

$$0 \quad 1 \quad 8 \quad 27 \quad 64 \quad 125 \ldots$$

gefunden werden, so setzt man

$$S_x = A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4$$

und erhält für $x = 0, 1, 2, 3, 4$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
S_0 &= 0 = A_4, \quad A_4 = 0 \\
S_1 &= 1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\
S_2 &= 9 = 16\,A_0 + 8\,A_1 + 4\,A_2 + 2\,A_3 + A_4 \\
S_3 &= 36 = 81\,A_0 + 27\,A_1 + 9\,A_2 + 3\,A_3 + A_4 \\
S_4 &= 100 = 256\,A_0 + 64\,A_1 + 16\,A_2 + 4\,A_3 + A_4.
\end{aligned}$$

Hieraus wie in § 33

$$\begin{array}{l}
1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \\
8 = 15\,A_0 + 7\,A_1 + 3\,A_2 + A_3 \\
27 = 65\,A_0 + 19\,A_1 + 5\,A_2 + A_3 \\
\underline{64 = 175\,A_0 + 37\,A_1 + 7\,A_2 + A_3} \\
7 = 14\,A_0 + 6\,A_1 + 2\,A_2 \\
19 = 50\,A_0 + 12\,A_1 + 2\,A_2 \qquad\qquad 12 = 36\,A_0 + 6\,A_1 \\
\underline{37 = 110\,A_0 + 18\,A_1 + 2\,A_2,} \qquad\quad \underline{18 = 60\,A_0 + 6\,A_1,} \text{ also:} \\
6 = 24\,A_0
\end{array}$$

$$A_0 = \frac{1}{4},\quad A_1 = \frac{1}{2},\quad A_2 = \frac{1}{4},\quad A_3 = 0,\quad A_4 = 0, \text{ und}$$

$$S_x = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$
$$= \left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2.$$

§ 36. Schlußdifferenz. Multiplikation der Glieder zweier Reihen.

1. Wie wir sahen, ist eine arithmetische Reihe gegeben durch $y_x = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. Wir fanden für die erste Differenzenreihe

$$\Delta y_x = a_0\left((x+1)^n - x^n\right) + a_1\left((x+1)^{n-1} - x^{n-1}\right) + \ldots$$

§ 32. oder:

$$= n\,.\,a_0 x^{n-1} + a_1' x^{n-2} + a_2' x^{n-3} + \ldots,$$

wo a_1', a_2', a_3' irgend welche Ausdrücke in den Koeffizienten a_0, a_1, $a_2 \ldots$ sind. Gleicherart finden wir:

$$\Delta^2 y_x = a_0\,.\,n\,.\,(n-1)\,x^{n-2} + a_1'' x^{n-3} + \ldots$$

$$\Delta^3 y_x = a_0\,.\,n\,.\,(n-1)(n-2)\,x^{n-3} + a_1^{III} x^{n-4} + \ldots$$

$$\Delta^4 y_x = a_0\,.\,n(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-4} + a_1^{IV} x^{n-5} + \ldots$$

. . . .

$$\Delta^{n-1} y_x = n!\, a_0 x + a$$
$$\Delta^n y_x = n!\, a_0.$$

Bezeichnen wir $\Delta^n y_x$ als Schlußdifferenz, so finden wir also, daß die Schlußdifferenz nur abhängig ist von dem Koeffizienten der höchsten Potenz von x, welche in dem allgemeinen Glied y_x enthalten ist. Alle Reihen derselben Ordnung, für welche dieser Koeffizient derselbe ist, haben also auch die gleiche Schlußdifferenz.

2. Folgerung. Die nten Potenzen der natürlichen Zahlen bilden eine arith. Reihe nter Ordnung mit der Schlußdifferenz n!, also die Quadratzahlen eine arith. Reihe der zweiten Ordnung mit der Schußdifferenz 2!, die Kuben eine der dritten Ordnung mit der Schlußdifferenz 3! u. s. w.

3. Setzen wir für x die Glieder einer zweiten Reihe $y'_x = b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots$ mit der Schlußdifferenz $d_1 = p!\, b_0$ ein, so erhalten wir eine neue Reihe, deren allgemeines Glied gegeben ist durch

$$y_x' = a_0 (b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots)^n + a_1 (b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots)^{n-1} + \ldots$$
$$= a_0 b_0^n x^{np} + c_1 x^{np-1} + \ldots$$

Die Schlußdifferenz dieser neuen Reihe ist, wenn wir die Schlußdifferenz der gegebenen Reihe mit d bezeichnen,

$$D = (np)!\, a_0 b_0^n = \frac{(np)!}{n!(p!)^n} d\, d_1^n.$$

$$\left(\text{Es ist } a_0 = \frac{d}{n!},\ b_0 = \frac{d_1}{p!}\right).$$

Hieraus folgt noch, daß $\frac{(np)!}{n!(p!)^n}$ eine ganze Zahl ist.

Ist $p = 1$, so erhalten wir eine Reihe derselben Ordnung (vergl. § 33).

4. Multiplizieren wir dagegen jedes Glied y_x mit dem entsprechenden Glied y_x', so erhalten wir eine weitere Reihe, die gegeben ist durch

$$z_x = y_x \cdot y'_x = a_0 b_0 x^{n+p} + e_1 x^{n+p-1} + e_2 x^{n+p-2} + \ldots$$

Die Schlußdifferenz dieser Reihe ist

$$D_1 = (n+p)! a_0 \cdot b_0 = \frac{(n+p)!}{n!p!} d d_1.$$

Multiplizieren wir also die entsprechenden Glieder zweier Reihen der nten und der pten Ordnung, so erhalten wir eine Reihe der Ordnung $(n+p)$.

5. Potenzieren wir ebenso die Glieder einer arith. Reihe nter Ordnung mit der Zahl p, so erhalten wir eine Reihe von der Ordnung $n \cdot p$.

6. Ebenso erhalten wir unmittelbar: z. B.: Das erste, dritte, fünfte, siebente Glied einer arith. Reihe bilden wieder eine arith. Reihe derselben Ordnung. Und:

Addieren wir zu den Gliedern einer arith. Reihe der nten Ordnung die Glieder etc. einer arith. Reihe von niedrigerer Ordnung, so erhalten wir eine Reihe derselben Ordnung.

§ 37. Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen. Die Bernoullischen Zahlen.

1. 0 1 4 9 16 . . . Quadrate der nat. Zahlen.
   1 3 5 7 . . .
   2 2 2 2 . . .

$$S(x^2)=\binom{x+1}{1}.0+1.\binom{x+1}{2}+2\binom{x+1}{3}$$
$$=\frac{x(x+1)(2x+1)}{3!}.$$

2. 0 1 8 27 64 125 ... Kuben der nat.
1 7 19 37 61 ... [Zahlen.
6 12 18 24 ...
6 6 6 6 ...

$$S(x^3)=0.\binom{x+1}{1}+1.\binom{x+1}{2}+6\binom{x+1}{3}+6\binom{x+1}{4}$$
$$=\frac{x^2(x+1)^2}{4}.$$

3. Überhaupt erhalten wir auf diese Art:

$$S(x)=\frac{1}{2}x(x+1)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2},$$

$$S(x^2)=\frac{x}{3!}(x+1)(2x+1)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$$
$$+\frac{\binom{2}{1}}{2}\cdot\frac{1}{6}x,$$

$$S(x^3)=\frac{x^2(x+1)^2}{4}=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{\binom{3}{1}}{2}\cdot\frac{1}{6}x^2,$$

$$S(x^4)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{\binom{4}{1}}{2}\cdot\frac{1}{6}x^3-\frac{\binom{4}{3}}{4}\cdot\frac{1}{30}x,$$

$$S(x^5)=\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{2}+\frac{\binom{5}{1}}{2}\cdot\frac{1}{6}x^4-\frac{\binom{5}{3}}{4}\cdot\frac{1}{30}x^2,$$

$$S(x^6)=\frac{x^7}{7}+\frac{x^6}{2}+\frac{\binom{6}{1}}{2}\cdot\frac{1}{6}x^5-\frac{\binom{6}{3}}{4}\cdot\frac{1}{30}x^3+\frac{\binom{6}{5}}{6}\cdot\frac{1}{42}\cdot x,$$

$$S(x^7) = \frac{x^8}{8} + \frac{x^7}{2} + \frac{\binom{7}{1}}{2} \cdot \frac{1}{6} x^6 - \frac{\binom{7}{3}}{4} \cdot \frac{1}{30} x^4 + \frac{\binom{7}{5}}{6} \cdot \frac{1}{42} x^2,$$

$$S(x^8) = \frac{x^9}{9} + \frac{x^8}{2} + \frac{\binom{8}{1}}{2} \cdot \frac{1}{6} x^7 - \frac{\binom{8}{3}}{4} \cdot \frac{1}{30} x^5 + \frac{\binom{8}{5}}{6} \cdot \frac{1}{42} x^3$$

$$- \frac{\binom{8}{7}}{8} \cdot \frac{1}{30} x \text{ u. s. w.}$$

4. Setzen wir allgemein die Brüche

$$\frac{1}{6} = B_1, \ \frac{1}{30} = B_2, \ \frac{1}{42} = B_3, \ \frac{1}{30} = B_4 \text{ u. s. w.,}$$

so finden wir:

$$S(x^n) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \frac{\binom{n}{1}}{2} \cdot B_1 x^{n-1} - \frac{\binom{n}{3}}{4} \cdot B_2 x^{n-3} + \frac{\binom{n}{5}}{6} \cdot B_3 x^{n-5} - \ldots$$ [1]

Die Zahlen $B_1, B_2, B_3, B_4 \ldots$ heißen die **Bernoullischen Zahlen**. Um dieselben zu bestimmen, können wir umgekehrt von der letzten Reihe ausgehen. Setzen wir in dieser nämlich $x = 1$, so wird $S(x^n) = 1$ und wir haben

$$1 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} + \frac{\binom{n}{1}}{2} B_1 - \frac{\binom{n}{3}}{4} B_2 + \frac{\binom{n}{5}}{6} B_3 - \frac{\binom{n}{7}}{8} \cdot B_4 \ldots .$$

Wird hierin für n nacheinander 2, 4, 6, 8 . . ., so können wir aus der letzteren Gleichung die Werte dieser Bernoullischen Zahlen bestimmen. Es ist so z. B. weiter $B_5 = \frac{5}{66}$, $B_6 = \frac{691}{2730}$, $B_7 = \frac{7}{6}$, $B_8 = \frac{3617}{510}$,

$$B_9 = \frac{43867}{798}, \ B_{10} = \frac{174611}{330}.$$

[1] Betreffs des Beweises dieses Satzes müssen wir auf umfassendere Werke verweisen oder z. B. auf Klügels math. Wörterbuch.

Diese Bernoullischen Zahlen selbst sind von großer Bedeutung für die höhere Algebra.

5. Die oben entwickelten Summen lassen sich ihrerseits wieder zur Summierung arithm. Reihen benutzen. Soll z. B. die Summenformel für eine Reihe aufgestellt werden, deren allgemeines Glied $y_x = 3x^3 + 2x^2 + x - 1$ ist, so erhalten wir für die Summe derselben

$$S_x = 3 \,.\, S(x^3) + 2\,S(x^2) + S(x^1) - S(x^0)$$

$$= \frac{3}{4} x^2 (x+1)^2 + \frac{2}{6} \,.\, x(x+1)(2x+1) + \frac{x \,.\, (x+1)}{2} - (x+1)$$

$$= \frac{3}{4} x^4 + \frac{13}{6} x^3 + \frac{9}{4} x^2 - \frac{1}{6} x - 1.$$[1]

§ 38. Limes $S(x_n) : x^{n+1} = 1 : (1+n)$ (für $n = \infty$).

Die obigen Summen für die Potenzen der natürlichen Zahlen finden verschiedene Verwendung, so namentlich in der Mechanik. Hierbei ist es oft nicht nötig, den Wert der Summe selbst zu kennen, sondern man muß vielmehr wissen, welchem Wert der Bruch

$$\frac{1^n + 2^n + 3^n + \ldots + x^n}{x^{n+1}}$$

sich nähert, wenn x über alle Grenzen wächst.

Wir erhalten aus

$$S(x^n) = \binom{x+1}{1} . 0 + \binom{x+1}{2} \cdot \Delta y_0 + \binom{x+1}{3} \Delta^2 y_0 + \ldots$$
$$+ \binom{x+1}{n+1} \cdot \Delta^n y_0,$$

aber daß der Koeffizient der höchsten Potenz von x in dem letzten Glied enthalten ist, und zwar ist derselbe

[1] Formeln für Summen dieser Potenzen gab zuerst Faulhaber in seiner Academia Algebra. 1631.

$\frac{\Delta^n y_0}{(n+1)!}$. Wie wir aber sahen, ist die Schlußdifferenz $n!$, d. h. es ist $\Delta^n y_0 = n!$ und wir erhalten somit als das Glied, das die höchste Potenz von x bildet, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Unsere Summe nimmt also (wie wir auch direkt aus der allgemeinen Formel für $S(x^n)$ in § 37 hätten anführen können) die Form:

$$S(x^n) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + A x^n + B x^{n-1} + \ldots$$

an. Dividieren wir durch x^{n+1}, so erhalten wir aber:

$$\frac{S(x^n)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1} + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \ldots.$$

und hieraus für $x = \infty$, $\lim \frac{S x^n}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$.

§ 39. Multiplikation der Glieder einer arithmetischen Reihe mit Binomial-Koeffizienten. Eigenschaften der letzteren.

$\binom{q}{0} y_p - \binom{q}{1} y_{p+1} + \binom{q}{2} y_{p+2} - \binom{q}{3} y_{p+3} + \ldots \pm \binom{q}{q} y_{p+q} = 0$ (für $q > n$). $1^q - \binom{q}{1} \cdot 2^q + \binom{q}{2} \cdot 3^q - \ldots \pm (q+1)^q = \pm q!$

1. Es ist offenbar für Reihen erster Ordnung

$$y_p - 2 y_{p+1} + y_{p+2} = 0.$$

Setzt man hierin anstatt y_p Δy_p, so ist auch

$$\Delta y_p - 2 \Delta y_{p+1} + \Delta y_{p+2} = 0.$$

Ist die Reihe der Δy_p aber vom ersten Grad, so folgt, wenn wir an Stelle vom Δy den Wert $y_{p+1} - y_p$ einsetzen, für die Reihe der zweiten Ordnung:

$$y_p - 3 y_{p+1} + 3 y_{p+2} - y_{p+3} = 0.$$

Schreibt man an Stelle der y wieder Δy, und führt anstatt des Δy die Glieder einer Reihe dritter Ordnung ein, so wird $y_p - 4y_{p+1} + 6y_{p+2} - 4y_{p+3} + y_{p+4} = 0.$

Wird auf diese Art fortgefahren, so erhält man aus der Gleichung für die Reihe (q—1)ter Ordnung

$$y_p - \binom{q}{1} y_{p+1} + \binom{q}{2} y_{p+2} - \binom{q}{3} y_{(p+3)} + \cdots \pm \binom{q}{q} y_{p+q} = 0$$

unmittelbar die Gleichung für die Reihe qter Ordnung

$$y_p - \binom{q+1}{1} y_{p+1} + \binom{q+1}{2} y_{p+2} + \cdots \pm \binom{q+1}{q} y_{p+q+1} = 0;$$

d. h. die Gleichung ist allgemein gültig.

2. Ist aber z. B. für die Reihe dritter Ordnung

$$y_p - 4y_{p+1} + 6y_{p+2} - 4y_{p+3} + y_{p+4} = 0$$

und also auch

$$-y_{p+1} + 4y_{p+2} - 6y_{p+3} + 4y_{p+4} - y_{p+5} = 0,$$

so folgt durch Addition:

$$y_p - 5y_{p+1} + 10y_{p+2} - 10y_{p+3} + 5y_{p+4} - y_{p+5} = 0.$$

Aus dieser Reihe folgt wieder

$$y_p - 6y_{p+1} + 15y_{p+2} - 20y_{p+3} + 15y_{p+4} - 6y_{p+5} - y_{p+3} = 0.$$

Ebenso erhält man für eine Reihe der nten Ordnung für $q > n$:

$$\binom{q}{0} y_p - \binom{q}{1} y_{p+1} + \binom{q}{2} y_{p+2} - \binom{q}{3} y_{p+3} + \cdots \pm \binom{q}{q} y_{p+q} = 0.$$

3. Sind die Glieder der arithmetischen Reihe insbesondere Potenzen der natürlichen Zahlen, so erhält man hieraus:

$$\binom{q}{0} \cdot 1^n - \binom{q}{1} \cdot 2^n + \binom{q}{2} \cdot 3^n - \binom{q}{3} \cdot 4^n + \cdots \pm \binom{q}{q} \cdot (q+1)^n = 0$$

und allgemeiner:

$$\binom{q}{0} a^n - \binom{q}{1} (a+1)^n + \binom{q}{2} (a+2)^n - \binom{q}{3} (a+3)^n + \cdots$$
$$\pm \binom{q}{q} \cdot (a+q)^n = 0.$$

4. Ebenso ist

$$\Delta y_p = y_{p+1} - y_p$$
$$\Delta^2 y_p = y_{p+2} - 2y_{p+1} + y_p$$
$$\Delta^3 y_p = y_{p+3} - 3y_{p+2} + 3y_{p+1} - y_p$$

und allgemein:

$$\Delta^q y_p = y_{p+q} - \binom{q}{1} y_{p+q-1} + \binom{q}{2} y_{p+q-2} - \ldots \pm y_p.$$

Sind die Glieder einer arithmetischen Reihe die Potenzen 1^q, 2^q, 3^q etc., so wird aber $\Delta^q y_p = q!$ und wir haben, wenn wir den Ausdruck rechts umgekehrt schreiben, die merkwürdige Beziehung

$$\pm q! = 1^q - \binom{q}{1} \cdot 2^q + \binom{q}{2} \cdot 3^q - \binom{q}{3} \cdot 4^q + \ldots \pm (q+1)^q,$$

wobei links das Zeichen + für gerade, das Zeichen — für ungerade q zu nehmen ist.

VI. Kapitel.

Figurierte Zahlen.

§ 40. Entstehung der figurierten Zahlen.[1]

1. Bildet man von der Reihe

$$1 \quad d \quad d \quad d \quad d \ldots$$

die Summenreihen, so erhält man

(I.)	1	$1+d$	$1+2d$	$1+3d$	$1+4d$	$1+5d$
(II.)	1	$2+d$	$3+3d$	$4+6d$	$5+10d$	$6+15d$

[1] Mit den figurierten Zahlen beschäftigte man sich namentlich viel in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts, so z. B. Faulhaber in Ulm, der in den Pyramidalzahlen allerlei Winke über die göttliche Weltordnung zu finden hoffte, aber auch zur Kenntnis der Lehre derselben beitrug. Später waren es Jakob und Joh. Bernoulli und Wallis, die sich besonders mit ihnen abgaben.

(III.)	1	$3+d$	$6+4d$	$10+10d$	$15+20d$	$21+35d$
(IV.)	1	$4+d$	$10+5d$	$20+15d$	$35+35d$	$56+70d$

u. s. w.

2. Setzt man in die Reihe II. für d nacheinander die Werte 0, 1, 2, 3 . . ., so entstehen die Reihen:

1	2	3	4	5	6 . . .	(natürl. Zahlen),
1	3	6	10	15	21 . . .	(Dreieckszahlen),
1	4	9	16	25	36 . . .	(Quadratzahlen),
1	5	12	22	35	51 . . .	(Fünfeckszahlen),
1	6	15	28	45	66 . . .	(Sechseckszahlen)

u. s. w.

Diese Zahlen führen den Namen Polygonal- oder Vieleckszahlen.

3. Nimmt man ebenso in der Reihe III. für d nacheinander die Werte 1, 2, 3 . . ., so erhält man die Pyramidalzahlen:

1	4	10	20	35 . . .	(dreiseitige Pyramidalzahlen),
1	5	14	30	55 . . .	(vierseitige Pyramidalzahlen),
1	6	18	40	75 . . .	(fünfseitige Pyramidalzahlen)

u. s. w.

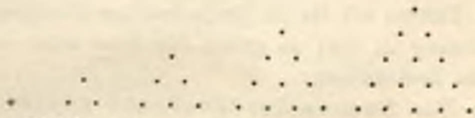
4. Wird weiter in den Reihen I., II., III . . . für d der Wert 0 gesetzt, so ergeben sich aus der Reihe die eigentlichen figurierten Zahlen:

1	1	1	1	1	1	(fig. Zahl. d. 1. Ord.)
1	2	3	4	5	6	(„ „ „ 2. „)
1	3	6	10	15	21	(„ „ „ 3. „)
1	4	10	20	35	56	(„ „ „ 4. „)
1	5	15	35	70	126	(„ „ „ 5. „)

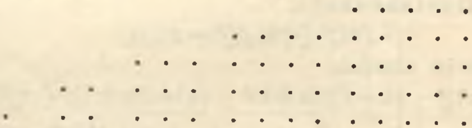
u. s. w.

§ 41. Polygonalzahlen. Bildung von Figuren aus Kugeln.

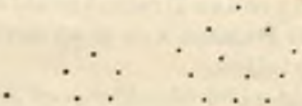
1. Bildet man aus einer Anzahl von Punkten oder Kugeln Figuren in der Gestalt von Dreiecken, so geben uns die Dreieckszahlen an, wie viele Kugeln oder Punkte wir hierzu brauchen. Es ist dies aus der folgenden Anordnung ersichtlich:



2. Gleiches gilt für die Quadratzahlen:



Ebenso für die Fünfeckszahlen:



Von den Fünfeckszahlen an ist die Bildung dieser Figuren keine so übersichtliche mehr.

3. In der obigen Reihe II. (§ 40) ist das n te Glied $y_n = n + \frac{n(n-1)}{2} d.$

Bezeichnet man die Polygonalzahl durch F_p^n, wo p die Zahl der Seiten des zugehörigen Polygons angibt, so hat man:

$$F_3^n = n + \frac{n(n-1)}{1 . 2} . 1 = \binom{n+1}{2},$$

$$F_4{}^n = n + \frac{n(n-1)}{1.2} . 2 = n^2,$$

$$F_5{}^n = n + \frac{n.(n-1)}{1.2} . 3 = \frac{n(3n-1)}{2},$$

$$F_6{}^n = n + \frac{n(n-1)}{1.2} . 4 = n.(2n-1) \text{ u. s. w.}$$

4. Führen wir für die Dreieckszahlen die besondere Bezeichnung Δ_n ein, so gelten für diese unter andern folgende Beziehungen:

a) Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ist wieder eine Dreieckszahl.

$$(\Delta_n)^2 + (\Delta_{n+1})^2 = \Delta_{(n+1)^2}.$$

Es ist nämlich

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n^2+2n+1)(n^2+2n+2)}{1.2}$$

b) Die Summe der Quadrate von 2p aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen läßt sich stets als die Summe von p andern Dreieckszahlen darstellen.

$$(\Delta_n)^2 + (\Delta_{n+1})^2 + (\Delta_{n+2})^2 + \ldots + (\Delta_{n+2p-1})^2$$
$$= \Delta_{(n+1)^2} + \Delta_{(n+2)^2} + \Delta_{(n+3)^2} + \ldots + \Delta_{(n+2p-1)^2}.$$

c) Der Unterschied der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ist ein Würfel.

$$(\Delta_{n+1})^2 - (\Delta_n)^2 = (n+1)^3.$$

d) Die Summe der dritten Potenzen der natürlichen Zahlen ist stets das Quadrat einer Dreieckszahl.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + q^3 = \frac{q^2(q+1)^2}{4} = (\Delta_q)^2. \text{ (Vergl. § 37.)}$$

§ 42. Pyramidalzahlen.

Bildet man ebenso aus Kugeln regelmäßige Pyramiden, so erhält man aus der Anzahl der Kugeln die Pyramidalzahlen. Bezeichnet man die n-seitige Pyramidalzahl mit $P_{(n)}$, so folgt aus Gleichung (III.) in § 40, wenn x die Zahl der Kugeln in einer Seite der Grundfläche der Pyramide ist:

$$P_n = \binom{x+1}{2} + \binom{x+1}{3} . (n-2).$$

Hieraus folgt wieder für die

3seitigen Pyramidalzahlen $P_3 = \binom{x+1}{2} + \binom{x+1}{3}$

$$= \binom{x+2}{3},$$

4 " " $P_4 = \binom{x+1}{2} + 2 . \binom{x+1}{3}$

$$= \frac{x(x+1)(2x+1)}{3!},$$

5 " " $P_5 = \binom{x+1}{2} + 3\binom{x+1}{3}$

$$= \frac{x^2(x+1)}{2},$$

6 " " $P_6 = \binom{x+1}{2} + 4\binom{x+1}{3}$

$$= \frac{x(x+1)(4x-1)}{3!}$$

u. s. w.

§ 43. Die eigentlichen figurierten Zahlen.

Wir erhalten für die Summen derselben:

$$S_1 = \binom{1}{0} + \binom{2}{0} + \binom{3}{0} + \binom{4}{0} + \ldots + \binom{n}{0} = \binom{n}{1} \quad \text{(1. Ordnung)},$$

$$S_2 = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} + \ldots + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2} \text{ (2. Ordnung)},$$

$$S_3 = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \ldots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3} \text{ (3. Ordnung)},$$

$$S_4 = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \ldots + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{4} \text{ (4. Ordnung)},$$

und allgemein:

$$S_{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

(vgl. § 23).

§ 44. Berechnung von Kugelhaufen.

1. Außer in dreieckigen und quadratischen Haufen lassen sich Kugelhaufen noch auf rechteckiger Basis aufbauen. Die Berechnung der Anzahl von Kugeln in einer drei- oder vierseitigen Pyramide ist gegeben durch die drei- und vierseitigen Pyramidalzahlen.

2. Ist die Grundlage ein Rechteck und sind in der längern Grundkante a, in der kürzern b Kugeln, so ist die Anzahl der Kugeln in der untern Schicht $= a \,.\, b$. In der über dieser gelegenen Schicht sind in der längern Kante nur noch $(a-1)$, und in der kürzern noch $b-1$, d. h. in der Schicht selbst sind $(a-1)\,(b-1)$ Kugeln. Ebenso ist die Zahl der Kugeln in der nächsten Schicht $=(a-2)\,.\,(b-2)$ u. s. w. Die Zahl der Schichten ist für den vollständigen Haufen gleich b, und wir erhalten also für die Berechnung der Anzahl Kugeln im Kugelhaufen die Summe der Glieder der arithmetischen Reihe

$$ab \quad (a-1)(b-1) \quad (a-2)(b-2) \ldots . (a-b+1) \,.\, 1.$$

Die zu dieser Reihe gehörigen Differenzenreihen sind aber

$$-(a+b-1) \quad -(a+b-3) \quad -(a+b-5) \quad \ldots,$$
$$2 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad 2$$

Es ist also

$$S = \binom{b}{1}.\,ab - \binom{b}{2}(a+b-1) + 2.\binom{b}{3}$$
$$= \frac{b}{6}(3ab - b^2 + 3a + 1) = \frac{b.(b+1).(3a-b+1)}{6}.$$

Schreibt man diese Formel $S = \frac{b.(b+1)}{2}.\frac{3a-b+1}{3}$, so gibt der erste Faktor die Zahl der Kugeln an, die in einer dreiseitigen Seitenfläche sich befinden, während der zweite Faktor das arithmetische Mittel aus den Zahlen der Kugel im Rücken des Haufens und aus den zu ihm parallelen Grundkanten desselben ist.

VII. Kapitel.

Interpolation.

§ 45. Von den Funktionen im allgemeinen.

1. Ist irgend eine Gleichung

$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ oder $y = \operatorname{tang} x$

gegeben, so heißt in dieser y eine **Funktion** von x. Setzt man für x verschiedene Werte, so erhält man auch für y solche verschiedene Werte. So findet man im ersten Beispiel für $x = 1$, $y = f(1) = a + b + c + d$, im zweiten für $x = 0$, $y = 0$.

2. x und y heißen die **Variabeln** oder **Veränderlichen** oder auch **Argumente**. Das Zeichen

der Funktion wird durch Buchstaben ausgedrückt, denen — jedoch nicht immer — eine oder mehrere Veränderliche in Klammern beigefügt sind, wie durch

$$f(x),\ g(x),\ h(x, y),\ F(x),\ F(z).$$

3. f(1) bedeutet eine Funktion, in der für die Variable, etwa x, der Wert 1 gesetzt worden ist. Ebenso bedeutet f(1, 2) eine Funktion, etwa von (x, y), in der für x der Wert 1, für y der Wert 2 gesetzt worden ist.

4. Eine Funktion heißt rational, wenn in ihr nur eine endliche Anzahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen oder Divisionen auftreten. Kommen die Veränderlichen überdies in keinem Divisor vor, so heißt die Funktion ganz, andernfalls gebrochen. So sind z. B.

$$y = (ax + b)(cz + d) \text{ und } y = ax^2 + 2bx + c$$

ganze rationale Funktionen,

$$y = \frac{a}{x},\quad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

gebrochene rationale Funktionen.

5. Eine Funktion heißt vom nten Grad, wenn sie ganz ist und die Form

$$y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + p \text{ oder}$$

$$y = ax^n + bx^{n-1}.z + cx^{n-2}.z^2 + \ldots. + gz^n$$
$$+ hx^{n-1} + i.x^{n-2}.z + \ldots.$$

hat, d. h. wenn die Veränderlichen in den beiden Summen Glieder der Form x^α resp. $x^\beta . z^\gamma$ bilden und α resp. $\beta + \gamma$ höchstens $= n$ ist. Funktionen der vier ersten Grade heißen auch linear, quadratisch, kubisch und biquadratisch.

6. Kommen in einer Funktion Wurzeln vor, wie

in $y = \sqrt{x}$, so nennt man die Funktion **irrational**. Funktionen, in denen andere Operationen als die genannten auftreten, wie log x, sin x, e^x etc., heißen **transcendent.**

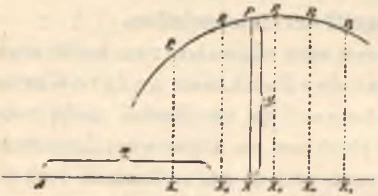
§ 46. Begriff der Interpolation.

1. **Interpolieren** oder **einschalten** heißt aus gegebenen Werten der Funktion andere Werte derselben berechnen. Es ist hierbei nicht notwendig, daß von der Funktion ein allgemeiner Ausdruck bekannt ist. Selbst wenn dem so ist, so kann er doch so kompliziert sein, daß er sich zur direkten Ausrechnung nicht eignet. So sind auch von unseren meisten Tabellen, trotzdem die entwickelten Funktionen bekannt waren, nur die wenigsten Werte direkt bestimmt worden; die weitaus größte Zahl derselben ist vielmehr aus jenen wenigen Werten durch Interpolation gefunden worden. Die Lehre von der Interpolation ist deshalb wichtig.

2. Wir setzen voraus, daß sich die Funktion, um die es sich handelt, entweder vollständig, oder doch mit jeder beliebigen Annäherung nach steigenden Potenzen einer Veränderlichen entwickeln lasse. Es ist hierbei unsere Aufgabe, aus einer gegebenen Anzahl von Werten, die die Funktion für gewisse Argumente annimmt, eine neue Funktion zu finden, welche der unbekannten oder doch zu sehr verwickelten Funktion so nahe kommt, daß, für gewisse Werte der Argumente wenigstens, die gefundene Funktion ohne merklichen Fehler gesetzt werden darf.

3. Um dies auch geometrisch zur Anschauung zu bringen, wollen wir auf einer Geraden von einem Punkt A aus die Argumente $AX_1 = x$, $AX_2 = x_2$, $AX_3 = x_3$ etc.

abtragen und auf der Geraden in den Punkten $X_1, X_2, X_3 \ldots$ Lote $X_1 P_1$, $X_2 P_2$, $X_3 P_3$, ... gleich den zugehörigen Funktionswerten errichten. Verbinden wir die Endpunkte dieser Lote jetzt durch einen Kurvenzug, so werden wir annehmen dürfen, daß z. B. für Werte x, die nahe bei x_3 liegen, die zugehörigen Werte y gefunden werden, indem wir von A aus $AX = x$ abtragen und in X auf AX ein Lot errichten; das Stück dieses Lotes zwischen AX und dem Kurvenzug ist dann der zu x gehörige Funktionswert y.



§ 47. Interpolation bei arithmetischen Reihen.

$$y = y_0 + \frac{z}{n+1} \cdot \Delta y_0 + \frac{z \cdot (z-n-1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2} + \frac{z(z-n-1)(z-2n-2)}{(n+1)^3} \cdot \frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \ldots$$

1. Ist irgend eine arithmetische Reihe gegeben, deren allgemeines Glied durch die Gleichung

$$y_x = y_0 + \binom{x}{1} \Delta y_0 + \binom{x}{2} \cdot \Delta^2 y_0 + \binom{x}{3} \Delta^3 y_0 + \ldots$$

bestimmt ist, und sollen zwischen die Glieder dieser Reihe je n weitere Glieder eingeschaltet werden, so haben wir nur an Stelle von x nacheinander die Werte $0, \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1}, \ldots 1, \frac{n+2}{n+1} \ldots$ zu setzen. Die Bezeichnung $\binom{x}{p}$ bleibt hierbei dieselbe, nur ist jetzt x keine ganze Zahl mehr, d. h. es ist z. B.

$$\binom{x}{2} = \frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2} .$$

Setzen wir aber allgemein $x = \frac{z}{n+1}$, so geht das allgemeine Glied der neuen Reihe über in

$$y_z = y_0 + \binom{\frac{z}{n+1}}{1} \cdot \Delta y_0 + \binom{\frac{z}{n+1}}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{\frac{z}{n+1}}{3} \Delta^3 y_0 + \ldots$$

$$= y_0 + \frac{z}{n+1} \cdot \frac{\Delta y_0}{1!} + \frac{z(z-n-1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{2!} +$$

$$\frac{z(z-n-1)(z-2n-2)}{(n+1)^3} \cdot \frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \ldots$$

und die interpolierte Reihe wird erhalten, indem wir hier für z nacheinander die Werte 0, 1, 2, 3 . . . setzen.

2. Ist z. B. die Reihe zweiter Ordnung 4, 7, 12 . . . gegeben und sollen zwischen je zwei Glieder dieser Reihe zwei neue Glieder eingeschaltet werden, so haben wir aus dem allgemeinen Glied

$$y_x = 4 + \binom{x}{1} \cdot 3 + \binom{x}{2} 2$$

für die interpolierte Reihe das neue allgemeine Glied

$$y_z = 4 + \frac{z}{3} \cdot 3 + \frac{z \cdot (z-3)}{9} \cdot \frac{2}{1 \cdot 2} = 4 + z + \frac{1}{9} z(z-3).$$

Setzen wir hierin $z = 0, 1, 2, 3 \ldots$, so erhalten wir die Reihe

$$4 \quad 4\frac{7}{9} \quad 5\frac{7}{9} \quad 7 \quad 8\frac{4}{9} \quad 10\frac{1}{9} \quad 12.$$

3. Wir haben in obigem Beispiel die Werte der interpolierten Glieder direkt aus dem allgemeinen Glied der neuen Reihe entwickelt. Es ist dies aber praktisch oft zu umständlich, namentlich dann, wenn der Aus-

druck für das allgemeine Glied y_z ein zur Berechnung von y_z etwas unbequemer wird. Haben wir nämlich die ersten Glieder der interpolierten Reihe so weit gefunden, daß wir die Schlußdifferenz der neuen Reihe durch die Differenzenreihen ableiten können, so können wir von der Schlußdifferenz aus rückwärts die Differenzenreihen und die interpolierte Reihe aufbauen. Das obige Beispiel würde uns die folgende Entwickelung geben, wobei die Zahlen rechts der Geraden rückwärts von der Reihe der Schlußdifferenzen aus aufgebaut sind, während nur die 2 ersten interpolierten Zahlen der Reihe direkt bestimmt worden sind.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
4 & & 4\frac{7}{9} & & 5\frac{7}{9} & & 7 & & 8\frac{4}{9} & & 10\frac{1}{9} & & 12 & & 14\frac{1}{9} & \\
& \frac{7}{9} & & \frac{9}{9} & & \frac{11}{9} & & \frac{13}{9} & & \frac{15}{9} & & \frac{17}{9} & & \frac{19}{9} & & \frac{21}{9} \\
& & \frac{2}{9} & & \frac{2}{9} & & \frac{2}{9} & & \frac{2}{9} & & \frac{2}{9} & & \frac{2}{9} & & \frac{2}{9} &
\end{array}$$

§ 48. **Interpolationsformel für Argumente, die eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden.**

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} \cdot \frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{1 \cdot 2} \frac{\Delta^2 y_0}{(\Delta x)^2} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\Delta^3 y_0}{(\Delta x)^3} + \dots$$

1. Bilden die gegebenen Argumente eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung $x_0, x_1, x_2, x_3 \dots x_n$, so können wir annehmen, daß die Funktionswerte $y_0, y_1, y_2 \dots y_n$ eine arithmetische Reihe von höchstens der n ten Ordnung bilden. Das allgemeine Glied dieser Reihe wird aber die Form

$$y_z = y_0 + \binom{z}{1} \Delta y_0 + \binom{z}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{z}{3} \Delta^3 y_0 + \dots$$

haben.

2. Setzen wir $x_1 = x_0 + \Delta x$, $x_2 = x_0 + 2\Delta x$, $x_3 = x_0 + 3\Delta x \ldots$, $x_p = x_0 + p \cdot \Delta x$, so finden wir für $z = p$ $x_p = x_0 + p\Delta x = x_1 + (p-1)\Delta x = x_2 + (p-2)\Delta x = \ldots$ und hieraus wieder

$$p = \frac{x_p - x_0}{\Delta x},\ p - 1 = \frac{x_p - x_1}{\Delta x},\ p - 2 = \frac{x_p - x_2}{\Delta x}\ \text{u. s. w., also:}$$

$$p(p-1) = \frac{(x_p - x_0)(x_p - x_1)}{(\Delta x)^2},$$

$$p(p-1)(p-2) = \frac{(x_p - x_0)(x_p - x_1)(x_p - x_2)}{(\Delta x)^3}\quad \text{u. s. w.}$$

Diese Werte in die obige Gleichung eingesetzt, gibt aber, wenn zugleich $x_p = x$ gesetzt wird, die Interpolationsformel:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} \cdot \frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{x - x_0}{1} \cdot \frac{x - x_1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{(\Delta x)^2} + \frac{x - x_0}{1} \cdot \frac{x - x_1}{2} \cdot \frac{x - x_2}{3} \cdot \frac{\Delta^3 x_0}{(\Delta x)^3} + \ldots$$

3. B e i s p i e l. Es soll aus den bekannten Werten der Logarithmen von 103, 104, 105 und 106 der Logarithmus von 104,5 gefunden werden.

Wir verlassen hierbei, wie bei der eigentlichen Interpolationsrechnung überhaupt, die Anordnung, die wir bei den arithmetischen Reihen getroffen hatten, indem wir die Funktionswerte nicht mehr horizontal, sondern vertikal schreiben. Sonst bleibt sich die Anordnung wesentlich gleich.

Arg.	y.	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
103	log 103 = 2 . 012 837 225			
		4 196 114		
104	log 104 = 2 . 017 033 339		— 40 154	
		4 155 960		760.
105	log 105 = 2 . 021 189 299		— 39 394	
		4 116 566		
106	log 106 = 2 . 025 305 865			

Es ist hier $x - x_0 = 1{,}5$; $x - x_1 = 0{,}5$; $x - x_2 = -0{,}5$; $x - x_3 = -1{,}5$, also

$$y_{4\frac{1}{2}} = y = y_0 + \frac{3}{2} \cdot \Delta y_0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y}{1.2} - \frac{3.1.1}{2.2.2} \cdot \frac{\Delta^3 y}{1.2.3}$$

$$= 2.012\,837\,225 + 0.006\,29\,4\,171 - 0.000\,015\,058$$

$$- 0.000\,0\,000\,48 = 2.019\,116\,290$$

Letzterer Wert ist auf 9 Stellen genau. Im Schema haben wir der Einfachheit halber bei den Differenzen die Nullen im Anfang weggelassen.

§ 49. Die Interpolationsformel von Lagrange.

$$y = \frac{(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2)\,(x_0 - x_3) \ldots (x_0 - x_n)} \cdot y_0$$

$$+ \frac{(x - x_0)\,(x - x_2)\,(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)\,(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n)}\, y_1$$

$$+ \frac{(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)\,(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)}\, y_2 + \ldots$$

Wird

$$y_x = A_0 y_0 + A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_n y_n$$

gesetzt, so müssen für x_0 sämtliche Glieder außer $A_0\, y_0$ verschwinden. Dies ist nur dann möglich, wenn alle Koeffizienten A außer A_0 den Faktor $(x - x_0)$ enthalten. Setzt man ebenso $x = x_1$, so müssen wieder alle Koeffizienten außer A_1 verschwinden, d. h. den Faktor $x - x_1$ enthalten. Es folgt dies daraus, daß die Gleichung gelten muß, gleichgültig, welche Werte wir den einzelnen Funktionsgrößen y beilegen, d. h. für alle beliebigen Werte $y_1, y_2, y_3 \ldots$ Fährt man so fort, so findet man, daß die obige Gleichung in folgende übergeht:

$$y_x = a_0 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) y_0$$

$$+ a_1 (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)\, y_1$$

$$+ a_2 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n)\, y_2$$

$$+ a_4 (x - x_0 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) \ldots (x - x_n)\, y_3 + \ldots$$

Setzt man hier aber $x = x_0$, $x = x_1$ u. s. w., so erhält man:

$$y_0 = a_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\ldots(x_0 - x_n)\, y_0,$$
$$y_1 = a_1 (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)\, y_1,$$
$$y_2 = a_2 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)\, y_2 \text{ u. s. w.}$$

und also

$$a_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\ldots(x_0 - x_n)},$$
$$a_1 = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)},$$
$$a_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)} \text{ u. s. w.}$$

Diese Werte in die letzte Gleichung für y_x eingesetzt, gibt die Interpolationsformel.

§ 50. Interpolationsformel von Newton.[1]

$$y_x = y_0 + A_0 (x - x_0) + A_1 (x - x_0)(x - x_1) + A_2 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$$

1. Die Interpolationsformel von Lagrange zeichnet sich durch ihre Gleichartigkeit in Bezug auf die Argumente aus, aber sie ist in dieser Form doch wenig geeignet zur Interpolation selbst, da sie auf umständliche Rechnungen führt. Es bedarf deshalb einer Umformung derselben. Es ist:

$$\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - x_0}{x_0 - x_2} + 1;$$

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0 - x_2}\right) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$
$$+ \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_0}{x_0 - x_2} = 1 + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_0}{x_0 - x_2}. \quad \text{(I.)}$$

Ebenso ist

$$\frac{x - x_3}{x_0 - x_3} = 1 + \frac{x - x_0}{x_0 - x_3}, \text{ und } \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_0 - x_3}$$

[1] Principia Philos. natur.

$$=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_0-x_3}$$

$$=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_2}+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_3}.\ \text{(II.)}$$

(Durch Einsetzen von I.)

Weiter ist

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_1-x_3}=1+\frac{x-x_1}{x_1-x_2}+\frac{x-x_1}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_3}.\ \text{(III).}$$

$$\frac{x-x_3}{x_2-x_3}=1+\frac{x-x_2}{x_2-x_3}.\ \text{(IV).}$$

2. Setzt man diese Werte in die Lagrange-Formel ein, so erhält man:

$$y_x=\left(1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_2}+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_3}\right)y_0$$

$$+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\left(1+\frac{x-x_1}{x_1-x_2}+\frac{x-x_1}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_3}\right)y_1$$

$$+\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\left(1+\frac{x-x_2}{x_2-x_3}\right)y_2$$

$$+\frac{x-x_0}{x_3-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_3-x_2}\cdot y_3,\ \text{oder:}$$

$$y_x=y_0+(x-x_0)\left\{\frac{y_0}{x_0-x_1}+\frac{y_1}{x_1-x_0}\right\}$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)\left\{\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right\}$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\left\{\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right\}.$$

Diese Formel ist deshalb für die Berechnung geeigneter, weil die Ausdrücke in den Klammern ein für allemal berechnet werden können. Außerdem ist in dieser Formel die Korrektion ersichtlich, welche eintritt, wenn zur Berechnung ein weiteres Element hinzutritt.

3. Die Ausdrücke in den Klammern lassen sich aber noch auf einfache Art rasch ausrechnen. Bezeichnet man dieselben durch A_0, A_1, A_2 . . ., so geht die Formel über in

$$y_x = y_0 + A_0(x - x_0) + A_1(x - x_0)(x - x_1) + A_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots$$

Sei weiter $x = x_1$, so folgt

$$y_1 = y_0 + A_0(x_1 - x_0), \quad A_0 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \left\{\frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0}\right\}$$

Ist ferner:

$$B_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad C_0 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \quad D_0 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \text{ etc.; so ist:}$$

$$A_1 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{B_0 - A_0}{x_2 - x_0}.$$

Ist ebenso weiter:

$$B_1 = \frac{C_0 - B_0}{x_3 - x_1}, \quad C_1 = \frac{D_0 - C_0}{x_4 - x_2}, \quad D_1 = \frac{E_0 - D_0}{x_5 - x_3}, \ldots$$

so erhält man ebenso:

$$A_2 = \frac{B_1 - A_1}{x_3 - x_0}, \quad B_2 = \frac{C_1 - B_1}{x_4 - x_1}, \quad C_2 = \frac{D_1 - C_1}{x_5 - x_2},$$

$$A_3 = \frac{B_2 - A_2}{x_4 - x_0}, \quad B_3 = \frac{C_2 - B_2}{x_5 - x_1}, \ldots$$

$$A_4 = \frac{B_3 - A_3}{x_5 - x_0} \text{ u. s. w.}$$

In dieser letzteren Form ist die Interpolationsformel bereits von Newton gegeben worden. Betreffs der Anordnung erhalten wir das folgende Schema:

Arg.	y	A_0, B_0, C_0, D_0	A_1, B_1, C_1	A_2, B_2	A_3
x_0	y_0				
		$A_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$			
x_1	y_1		$A_1 = \frac{B_0 - A_0}{x_2 - x_0}$		
		$B_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		$A_2 = \frac{B_1 - A_1}{x_3 - x_0}$	
x_2	y_2		$B_1 = \frac{C_0 - B_0}{x_3 - x_1}$		$A_3 = \frac{B_2 - A_2}{x_4 - x_0}$
		$C_0 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$		$B_2 = \frac{C_1 - B_1}{x_4 - x_1}$	
x_3	y_3		$C_1 = \frac{D_0 - C_0}{x_4 - x_2}$		
		$D_0 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$			
x_4	y_4				

4. **Beispiel.** Aus den gegebenen Werten von sin 42° 0′, sin 42° 2′, sin 42° 3,′ sin 42° 5′ und sin 42° 6′ soll sin 42° 4′ berechnet werden.

Argument x	y
$x_0 = 42° 0'$	$\sin x_0 = 0.612\ 907\ 053\ 653$
$x_1 = 42° 2'$	$\sin x_1 = 0.613\ 155\ 257\ 923$
$x_2 = 42° 3'$	$\sin x_2 = 0.613\ 279\ 337\ 366$
$x_3 = 42° 5'$	$\sin x_3 = 0.613\ 527\ 450\ 853$
$x_4 = 42° 6'$	$\sin x_4 = 0.613\ 651\ 484\ 891$

A_0, B_0, C_0, D_0	A_0, B_1, C_1	A_2, B_2	A_3
124 102 135			
	-7564		
124 079 443		-0_5	
	-7566_3		0
124 056 744		-0_5	
	-7568_7		
124 034 038			

$$\sin 42° 4' = 0{,}612\ 907\ 053\ 653 + 4.0{,}000\ 124\ 102\ 135 - 4.2.0{,}000\ 000\ 007\ 564 - 4.2.1.0{,}000\ 000\ 000\ 000_5$$
$$= 0{,}613\ 403\ 401\ 677 \text{ (auf 12 Stellen genau).}$$

IV. Abschnitt.

Unendliche Reihen.

VIII. Kapitel.

Summierbare Reihen. Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

§ 52. Bildung summierbarer Reihen.

1. Wir haben bereits summierbare Reihen kennen gelernt, nämlich die arithmetischen Reihen. So ist z. B. die Summe der Reihe

$$1 \,.\, 3 + 3 \,.\, 5 + 5 \,.\, 7 + 7 \,.\, 9 + \ldots + (2x - 1)(2x + 1)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(2x - 1)(2x + 1)(2x + 3).$$

Andere Beispiele summierbarer Reihen bilden die geometrischen Reihen (vergl. Sammlung Göschen, Algebra, § 27). Wir haben z. B.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}.$$

2. Außer den arithmetischen und geometrischen Reihen lassen sich noch eine Menge anderer Reihen aufstellen, deren Summen gefunden werden können. Es sei irgend eine Reihe

$$a + b + c + d + e \ldots + p$$

gegeben. Aus dieser Reihe läßt sich die neue Reihe

$$(a - b) + (b - c) + (c - d) + \ldots + (o - p)$$

bilden, deren Summe $= a - p$ ist.

3. Beispiele. a) Aus $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$ erhält man:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n}, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{(n-1).n}$$
$$=\frac{n-1}{n} \text{ (I).}$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit 2:

$$\frac{1}{\binom{2}{2}}+\frac{1}{\binom{3}{2}}+\frac{1}{\binom{4}{2}}+\ldots+\frac{1}{\binom{n}{2}}=\frac{2(n-1)}{n}, \text{ oder:}$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{2}{(n-1).n}=\frac{2(n-1)}{n} \text{ (II).}$$

(Reihe der reziproken Dreieckszahlen.)

Dividieren wir dagegen die Reihe (I.) durch 4, so erhalten wir

$$\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\ldots+\frac{1}{2n(2n-2)}=\frac{n-1}{4n},$$

oder:

$$\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2-1}$$
$$=\frac{n-1}{4n} \text{ (III).}$$

b) Aus

$$\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)+\ldots$$
$$+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

folgt ebenso nach Division durch 2:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \text{ (IV).}$$

Hieraus erhalten wir die Reihe der reziproken Pyramidalzahlen durch Multiplikation mit 6:

$$\frac{1}{\binom{3}{3}}+\frac{1}{\binom{4}{3}}+\frac{1}{\binom{5}{3}}+\ldots\frac{1}{\binom{n+2}{3}}=\frac{3n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}, \text{ oder:}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{\binom{n+2}{3}}=\frac{3n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}.$$

Ebenso wird:

$$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\ldots$$
$$+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

4. Wir können aus der Reihe $a+b+c+\ldots+t$ aber auch noch die Reihe

$(a-c)+(b-d)+(c-e)+\ldots+(r-t)=a+b-s-t$

bilden. So erhalten wir aus der Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$$

die neue Reihe

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$$
$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

oder nach Division durch 2:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.6}+\ldots+\frac{1}{n.(n+2)}$$
$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \text{ (V.) oder:}$$

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}$$
$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$$

5. Ein anderes Verfahren geht von Reihen aus, die nach Potenzen einer Veränderlichen x geordnet sind. Es sei etwa die Reihe

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+\ldots+\frac{1}{n}x^{n-1}$$

gegeben, deren Summe wir mit S bezeichnen wollen. Durch Multiplikation mit $(x-1)$ erhalten wir:

$$(x-1)S=-1+\frac{1}{1.2}x+\frac{1}{2.3}x^2+\frac{1}{3.4}x^3+\ldots$$
$$+\frac{1}{n(n-1)}x^{n-1}+\frac{1}{n}x^n.$$

Setzen wir hier $x=1$, so finden wir:

$$1=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n},$$

d. h. die Reihe I.

Multiplizieren wir dagegen mit x^2-1 und setzen das eine Mal $x=+1$, das zweite Mal $x=-1$, so erhalten wir aus der obigen Reihe

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{n(n-2)}=\frac{(3n-1)(n-2)}{4n(n-1)}$$

(vergl. Reihe V.) und

$$\frac{1}{1.3}-\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}-\frac{1}{4.6}+\ldots\pm\frac{1}{n(n-2)}$$
$$=\frac{1}{4}\pm\left(\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2n}\right)\ \text{(VI)}.$$

Desgleichen finden wir durch Multiplikation mit $(2x-1)$ für $x=\frac{1}{2}$:

$$\frac{3}{1.2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2.3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{3.4}\cdot\frac{1}{8}+\ldots$$

$$+\frac{n}{(n-2)(n-1)}\cdot\frac{1}{2^{n-2}}=1-\frac{1}{(n-1)2^{n-2}} \text{ (VII).}$$

Ebenso können wir auch etwa mit x^2-3x+2 multiplizieren und x gleich einer der Wurzeln der Gleichung $x^2-3x+2=0$ setzen, und würden dadurch eine neue Reihe erhalten.

§ 52. Summierbare unendliche Reihen.

Setzt man in den Reihen des § 51 für n den Wert ∞, so gehen dieselben über in

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots \text{ in inf.} =1,$$

$$\left(\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}, \text{ für } n=\infty, =1\right),$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots=2,$$

$$\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\ldots=\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots=\frac{1}{4}, \text{denn:}$$

$$\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}=\frac{1+\frac{3}{n}}{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}, \left(\text{für } n=\infty, =\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\ldots=\frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\ldots=\frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{1.3}-\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}-\frac{1}{4.6}+\ldots=\frac{1}{4},$$

$$\frac{3}{1.2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2.3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{3.4}\cdot\frac{1}{8}+\ldots=1.$$

§ 53. Weitere summierbare Reihen.

Bezeichnet man die nte figurierte Zahl kter Ordnung mit f_n^k und multipliziert die Glieder der Reihe der figurierten Zahlen kter Ordnung mit den Gliedern der Reihe

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1},$$

so erhält man die Reihe:

$$1+f_2^k.x+f_3^k.x^2+f_4^k.x^3+\ldots+f_n^k.x^{n-1}=S_n^k,$$

wo S_n^k die Summe der Reihe bezeichnen möge.

Durch Multiplikation mit $(1-x)$ folgt aber:

$$S_n^k(1-x)=1+(f_2^k-1)x+(f_3^k-f_2^k)x^2+\ldots-f_n^k.x^n$$
$$=1+f_2^{k-1}.x+f_3^{k-1}.x^2+f_4^{k-1}.x^3+\ldots$$
$$+f_n^{k-1}.x^{n-1}-f_n^k.x^n=S_n^{k-1}-f_n^k.x^n.$$

Es ist nämlich

$$f_p^k-f_{p-1}^k=\binom{k+p-1}{k-1}-\binom{k+p-2}{k-1}=\binom{k+p-2}{k-2}=f_p^{k-1}$$

(vergl. § 23 und § 43).

Kennt man also den Wert von S_n^{k-1}, so kann man daraus den Wert von S_n^k berechnen. Nun ist aber der Wert der Reihe

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}$$

bekannt und man findet also z. B.:

$$S^2_n=1+2x+3x^2+\ldots+n.x^{n-1}=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{n.x^n}{1-x},$$

$$S^3{}_n = 1 + 3x + 6x^2 + \ldots + \binom{n+1}{2} . x^{n-1}$$

$$= \left(\frac{1-x^n}{(1-x)^3}\right) - \frac{n . x^n}{(1-x)^2} - \binom{n+1}{2} . \frac{x^n}{1-x},$$

$$S^4{}_n = 1 + 4x + 10x^2 + \ldots + \binom{n+2}{3} . x^{n-1}$$

$$= \frac{1-x^n}{(1-x)^4} - \binom{n}{1} . \frac{x^n}{(1-x)^3} - \binom{n+1}{2} \frac{x^n}{(1-x)^2} - \binom{n+2}{3} \frac{x^n}{1-x}$$

§ 54. Einteilung der unendlichen Reihen in konvergente und divergente Reihen.

1. Unter Reihen versteht man, wie bereits durch das Bisherige bekannt ist, eine Anzahl von algebraischen Größen, die durch Addition oder Subtraktion miteinander verbunden sind. Ist die Anzahl der Glieder eine endliche, so heißt die Reihe **endlich**, ist die Anzahl der Glieder dagegen unendlich groß, so heißt die Reihe selbst **unendlich**.

2. Ist es möglich, für eine Reihe einen **endlichen Wert anzugeben, dem der Wert der Reihe immer näher und näher kommt, je mehr Glieder der Reihe in Rechnung genommen werden, so sagt man, die Reihe konvergiere gegen diesen endlichen Wert, und die Reihe selbst heißt konvergent.** Den Wert, dem die Reihe sich nähert, bezeichnet man als ihren Grenzwert:[1] derselbe wird durch limes, abgekürzt lim, bezeichnet. So ist z. B.

$$\lim\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots\right) = 1.$$

[1] Vergl. hiezu § 60.

3. Ist es dagegen nicht möglich, einen solchen endlichen Grenzwert anzugeben, sondern wird der Wert der Reihe mit der Zahl der Glieder selbst unendlich groß, so sagt man, die Reihe divergiere, oder sie sei divergent. Eine solche divergente Reihe ist z. B.

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 \ldots$$

4. Außer konvergenten und divergenten unterscheidet man manchmal noch eine dritte Art von Reihen, nämlich oszillierende Reihen. Bei diesen kann man keinen bestimmten Wert für die Reihe angeben; man wird vielmehr, je nach der Zahl der Glieder, die man nimmt, zwei verschiedene Werte erhalten, denen die Reihe sich nähert. So erhalten wir in der Reihe

$$2 - 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{8} + 1\frac{1}{16} - \ldots,$$

je nachdem wir eine gerade oder ungerade Zahl von Gliedern nehmen, für eine große Anzahl von Gliedern nahezu den Wert $\frac{2}{3}$ oder $1\frac{2}{3}$, d. h. der Wert der Reihe schwankt zwischen $\frac{2}{3}$ und $1\frac{2}{3}$. Man spricht bei diesen Reihen manchmal auch von einem mittleren Wert derselben.

§ 55. Beispiele konvergenter und divergenter Reihen.

1. Das einfachste Beispiel einer konvergenten Reihe ist die geometrische Reihe, deren Exponent (Quotient) kleiner als Eins ist. So haben wir als Wert S der Reihe

$$S = 1 + x + x^2 + \ldots \text{ für } x < 1,\ S = \frac{1}{1-x}.$$

Wird aber $x = 1$, so wird S unendlich groß und ist $x > 1$, so ist dem noch mehr so.

2. Andere Beispiele von konvergenten Reihen haben wir bereits oben angegeben (vergl. § 52).

3. Bilden wir die reziproken Werte der natürlichen Zahlen, so erhalten wir die harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Diese Reihe ist divergent. Um dies zu zeigen, fassen wir die Glieder der Reihe wie folgt zusammen:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

Die Ausdrücke in den Klammern sind aber einzeln größer als

$$2 \cdot \frac{1}{4}, 4 \cdot \frac{1}{8}, 8 \cdot \frac{1}{16}, 16 \cdot \frac{1}{32}, \ldots$$

d. h. der Wert jedes Klammernausdrucks ist $> \frac{1}{2}$, und der Wert der Reihe selbst ist also größer als der der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

d. h. unendlich groß.

4. Setzen wir ebenso anstatt der natürlichen Zahlen in obiger Reihe die Glieder einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung, so finden wir, daß auch die Reihe

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \frac{1}{a+3d} + \frac{1}{a+4d} + \ldots$$

divergiert. Denn ist etwa $a > d$, und setzen wir anstatt d den Wert a, so erhalten wir die Reihe

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a} + \ldots = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right),$$

d. h. eine divergente Reihe. In letzterer ist aber jedes Glied kleiner als das entsprechende Glied der ersten, also ist die ursprüngliche Reihe um so mehr divergent. Ist $a < d$, so ersetzen wir a durch d und verfahren ebenso.

§ 56. Konvergenz der Reihen, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

1. Soll eine Reihe überhaupt einen endlichen Wert haben oder konvergieren, so müssen deren Glieder, wenigstens von einem bestimmten an, kleiner und kleiner werden und zwar müssen sie zuletzt Null zur Grenze haben. Eine Abnahme der Glieder allein genügt nicht, wie z. B die Reihe

$$0{,}11 + 0{,}101 + 0{,}1001 + 0{,}10001 + \ldots$$

zeigt, deren Wert unendlich groß ist.

Wir haben also als erste Bedingung der Konvergenz einer Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

daß limes $u_n = 0$ für $n = \infty$ ist.

2. Nehmen aber die Glieder einer Reihe, von einem bestimmten an, immer mehr ab und haben dieselben Null zur Grenze, so konvergiert die Reihe stets, wenn die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

Um dies zu zeigen, wollen wir annehmen, daß diese Eigenschaft der Glieder mit dem ersten beginne. Wäre dem nicht so, so würden wir einfach den Teil der Reihe, der diese Eigenschaft nicht zeigt, besonders berechnen.

Wir erhalten aus $S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \ldots$

$$S = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \ldots,$$

d. h. die Reihe hat jedenfalls einen positiven Wert, da alle Ausdrücke in den Klammern positiv sind, oder es ist $S > 0$.

Schreiben wir dagegen

$$S = u_1 - \{(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + (u_6 - u_7) + \ldots\},$$

so finden wir ebenso, daß der Wert der Reihe auch $< u_1$ ist, oder daß

$$u_1 > S > 0,$$

d. h. die Reihe konvergiert.

3. Bezeichnen wir weiter den Wert der ersten n Glieder der Reihe mit S_n, so haben wir für den Wert der übrigen Glieder

$$R = +(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots).$$

Für diesen Rest erhalten wir ebenfalls, daß sein Wert zwischen 0 und u_{n+1} liegt. Vernachlässigen wir also alle Glieder der Reihe vom nten ab, so ist der Fehler, den wir begehen, jedenfalls kleiner als das Glied u_{n+1} der Reihe, oder es ist, absolut genommen, $S - S_n < u_{n+1}$.

4. So erhalten wir z. B. in der Reihe

$$\frac{1}{1\,.\,2} - \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} - \frac{1}{4\,.\,5} + \frac{1}{5\,.\,6} - \ldots$$

$S_5 = 0,4$. Dieser Wert ist zu groß, aber der Fehler, der begangen wird, wenn wir anstatt der Reihe S_5 setzen, ist $< \frac{1}{6\,.\,7}$, d. h. $< 0{,}023\ldots$, und der wirkliche Wert der Reihe liegt also zwischen $0{,}377\ldots$ und $0{,}4$.

Reihen mit nur positiven Gliedern.

§ 57. Kennzeichen der Konvergenz.

1. Es gibt keine allgemeine Regel, nach der bei jeder Reihe sofort entschieden werden kann, ob sie konvergiert oder divergiert. Man ist vielmehr genötigt, in jedem besondern Fall eine besondere Untersuchung darüber anzustellen, ob die Reihe konvergiert oder nicht. Ein wichtiges Mittel hierfür ist aber die Vergleichung der Reihe mit einer andern Reihe, von der man weiß, ob sie konvergent oder divergent ist. Sind von zwei Reihen

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$
$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

deren Glieder alle positiv sind, von einem bestimmten ab wenigstens, die Glieder der einen Reihe alle kleiner als die entsprechenden der andern, d. h. ist z. B. $v_p < u_p$, so wird die Reihe V konvergieren, wenn die Reihe U konvergiert. Ist dagegen $v_p > u_p$, so wird auch die Reihe V gleichzeitig mit der Reihe U divergieren.

2. Unter den Reihen, über deren Konvergenz oder Divergenz sofort entschieden werden kann, ist aber insbesondere die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Deren Summe erhalten wir $= \frac{1 - x^n}{1 - x}$. Die Reihe konvergiert für $x < 1$, divergiert dagegen für $x \geqq 1$.

Es sei nun für die gegebene Reihe

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots,$$

wenigstens von einem bestimmten Gliede ab, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \varepsilon$, wo ε einen bestimmten Wert <1 hat. Wir haben dann: $u_{n+1} < \varepsilon . u_n$, $u_{n+2} < \varepsilon u_{n+1} < \varepsilon^2 . u_n$, $u_{n+3} < \varepsilon^3 . u_n$ u. s. w. und somit:

$\lim (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots) \leqq \varepsilon u_n + \varepsilon^2 u_n + \varepsilon^3 u_n + \ldots$ oder

$\lim (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots) \leqq u_n (\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4) + \ldots)$ d. h.

$$\leqq u_n . \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \text{ d. h. } = 0,$$

oder die Reihe konvergiert.

3. Ist dagegen $\varepsilon > 1$, so erhält man ebenso:

$\lim (u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots) \geqq u_n \varepsilon \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}$, d. h. $= \infty$;

die Reihe divergiert. Wir haben also:

Ist von einem bestimmten Glied ab lim $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \varepsilon$ und ist ε um eine angebbare Größe von Eins verschieden, so konvergiert die Reihe U. Ist dagegen limes $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq \varepsilon$ und ist ε um einen angebbaren Wert größer als Eins, so divergiert die Reihe.

4. Wir wollen ausdrücklich noch hinzufügen, daß dieser Satz meistens für die Untersuchung der Konvergenz oder Divergenz einer Reihe genügt, daß aber aus jeder Reihe, von der wir wissen, wann sie konvergiert oder divergiert, ein Mittel zur Untersuchung der Konvergenz oder Divergenz anderer Reihen abgeleitet werden kann.

5. Beispiel. Für die Reihe

$$\frac{1}{1.2} + \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{4.5} + \ldots$$

haben wir

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x.(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)} = x . \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = x \text{ (für } n=\infty).$$

Die Reihe konvergiert also für $x<1$, divergiert dagegen für $x>1$.

§ 58. Konvergenz für den Grenzfall $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.[1]

1. Das obige Mittel zur Untersuchung der Konvergenz oder Divergenz einer Reihe versagt für den Fall, daß $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ist. So z. B. für die Reihe

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots,$$

Es ist hier

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}},$$

d. h. für $n=\infty$, $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Um zu untersuchen, ob die Reihe konvergiert oder divergiert, vergleichen wir dieselbe mit der Reihe

$$S_1 = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots$$

deren Wert wir aus § 52 als $=2$ fanden und von der wir wissen, daß sie konvergent ist. Jedes Glied der Reihe S ist aber jetzt gleich oder kleiner als das entsprechende Glied der Reihe S_1, d. h. der Wert der ge-

---

[1] Vergl. hierüber z B. Stern, Algebr. Analysis.

gebenen Reihe ist kleiner als der Wert der Reihe S_1. Er liegt somit, da er jedenfalls positiv ist. zwischen 0 und 2. In der Tat ist der Wert der Reihe $\frac{\pi^2}{6}$.

2. Um auch für diesen Grenzfall ein Mittel zur Untersuchung zu erhalten, das in vielen Fällen genügt, gehen wir von der Reihe

$$S_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots$$

aus. Diese Reihe ist, wie wir bereits sahen, für $m = 1$ divergent. Sie ist dies also noch viel mehr für $m < 1$. So ist z. B. die Reihe

$$S_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

ebenfalls eine divergente Reihe, indem alle Glieder dieser Reihe größer sind als die entsprechenden Glieder der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ (das erste ausgenommen).

3. Wir haben für ein beliebiges $k > 1$:

$$\frac{1}{(k+1)^m} + \frac{1}{(k+2)^m} + \frac{1}{(k+3)^m} + \ldots + \frac{1}{(k+k)^m}$$
$$< k \cdot \frac{1}{k^m}, \text{ d. h. } < \frac{1}{k^{m-1}}.$$

Daraus finden wir aber:

$$S^m = 1 + \frac{1}{2^m} + \left(\frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m}\right) + \left(\frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{8^m}\right) + \ldots$$
$$< 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{4^{m-1}} + \frac{1}{8^{m-1}} + \ldots$$

Letztere Reihe konvergiert aber nur für $\frac{1}{2^{m-1}} < 1$, oder $2^{m-1} > 1$, d. h. $m > 1$, also konvergiert auch die gegebene Reihe S_m für $m > 1$, andernfalls divergiert sie.

4. Nun ist aber:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^m}{(n+1)^m} = \frac{n^m}{n^m + m \cdot n^{m-1} + \binom{m}{2} \cdot n^{m-2} + \ldots}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{m}{n} + \binom{m}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots}.$$

(Wir setzen hier voraus, daß der binomische Satz für jedes m gelte, wie erst in §§ 64—67 gezeigt werden wird.)

Vernachlässigen wir alle Glieder im Nenner mit Ausnahme der beiden ersten $1 + \frac{m}{n}$, was wir dürfen, da für unendlich große n die folgenden Glieder gegen $\frac{m}{n}$ unendlich klein sind, und setzen wir $\frac{m}{n} = \alpha$, $m = n\alpha$, so erhalten wir für den Grenzfall $\lim \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ die folgende Regel:

Ist $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha}$ und ist α positiv, nähert sich aber mit unbegrenzt wachsendem n der Null, so wird die Reihe konvergieren, wenn $n \cdot \alpha$ um eine angebbare Größe größer als Eins ist; sie wird dagegen divergieren, wenn $n \cdot \alpha$ um einen solchen Wert kleiner als Eins ist.

Wir haben hierbei α als positiv vorauszusetzen, da für negative α auch m negativ sein würde und die

Reihe dann in die andere, stets divergente Reihe

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots$$

übergehen würde.

5. Beispiel. a) Soll die Reihe

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} + \frac{1}{21} + \ldots$$

untersucht werden, deren allgemeines Glied $\frac{1}{n^2+n+1}$ ist, so erhalten wir:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2+(n+1)+1} = \frac{n^2+n+1}{n^2+3n+3}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{-2}{(n^2+n+1)n}} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}},$$

$\alpha = \frac{2}{n}$, $n\alpha = 2$, d. h. die Reihe konvergiert.

b) Ist auch hier $n\alpha = 1$, so versagt auch dieses Mittel zur Untersuchung der Konvergenz oder Divergenz einer Reihe, und es ist dann in jedem einzelnen Fall eine besondere Untersuchung zu veranstalten.

§ 59. Konvergenz der Potenzreihen mit komplexem Argument.

Ersetzen wir in der Reihe (Potenzreihe)

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

das Argument x durch die komplexe Größe $y + iz$, wo $y^2 + z^2 = X^2$ und $\frac{z}{y} = \operatorname{tang}\varphi$, also

$$y + iz = X(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so geht die Reihe in die folgende über:

$$a_0 + a_1 X(\cos\varphi + i\sin\varphi) + a_2 X^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

$$+ a_3 X(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) + ..$$
$$= a_0 + a_1 X \cos\varphi + a_2 X^2 \cos 2\varphi + ..$$
$$+ i.(a_1 X \sin\varphi + a_2 X^2 \sin 2\varphi + ..),$$

und wir haben:

Eine Potenzreihe ist für ein komplexes Argument stets konvergent, wenn sie es für den Modul des Arguments ist. X heißt der Modul von $y + iz$.

§ 60. Allgemeine Konvergenzbedingung. Unbedingte und bedingte Konvergenz.

1. Wir haben oben unsere Untersuchungen über Konvergenz wesentlich auf Reihenvergleichung gestützt. Es bleibt uns noch übrig, das allgemeine Kriterium der Konvergenz einer Reihe anzuführen. Es sei

$$s_p = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_p,$$

es ist alsdann die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe, daß

$$s_{p+q} - s_q = s_{p+1} + s_{p+2} + \ldots + s_{p+q}$$

nur durch Wahl von p für jedes q beliebig klein gemacht werden kann.

Wir müssen jedoch dieserhalb auf eingehendere Werke verweisen.[1]

2. Wie wir weiter oben fanden, ist eine Reihe von Gliedern mit abwechselnd positiven und negativen Vorzeichen konvergent, wenn die Glieder der Reihe gegen Null konvergieren.

Eine solche Reihe wird dann immer konvergieren, wenn die Reihe der Glieder

---

[1] Vergl. etwa: Encykl. der math. Wissenschaften, Bd. 1, A. 3, p. 78 oder Lipschitz, Grundlehre der Analysis, Bd. 1, p. 502 u. f.

sämtlich mit positiven Vorzeichen genommen konvergiert. Hierbei ist es dann gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Glieder einer solchen Reihe zusammengefaßt werden. In diesem Falle sagt man, die Reihe konvergiere (absolut) unbedingt. Ist jedoch die Reihe der Glieder mit lauter positiven Vorzeichen nicht konvergent, so kann durch Umordnung der Glieder die Konvergenz der Reihe verloren gehen oder aber die Reihe zwar noch konvergieren, aber gegen einen anderen Wert. Daß dies bei jeder solchen Reihe auch wirklich eintreten kann, ist von Riemann gezeigt worden. Eine solche Reihe heißt bedingt konvergent.[1] Doch müssen wir auch hier auf umfassendere Werke verweisen; wie etwa auf die angeführte Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

IX. Kapitel.

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten. Umkehrung von Reihen.

§ 61. Darstellung einer Funktion durch eine unendliche Reihe.

1. Sei irgend eine Funktion y durch die beiden Reihen

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \text{ und}$$
$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

dargestellt und seien diese Reihen für bestimmte Werte

---

[1] Die Unterscheidung zwischen bedingter und unbedingter Konvergenz rührt von Dirichlet her.

von $x = 0$, einschließlich bis zu einem bestimmten anderen Werte, konvergent, so folgt für $x = 0$ unmittelbar $a_0 = b_0$ und hieraus

$$y_1 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots$$
$$y_2 = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots;$$

woraus wieder $a_1 = b_1$ und sofort $a_2 = b_2$ etc. folgt. Es ist hierbei aber notwendig, daß die Reihen auch für $x = 0$ konvergent sind, andernfalls sind diese Schlüsse nicht zulässig. Entsprechendes gilt für die folgenden Untersuchungen.

Eine Funktion kann also nur auf eine einzige Art, wenn überhaupt, durch eine endliche oder unendliche Reihe von Gliedern, die steigende Potenzen einer Veränderlichen sind, dargestellt werden.

2. Eine unmittelbare Folge hiervon ist: Verschwindet der Wert einer Potenzreihe für jeden Wert der Veränderlichen, so sind sämtliche Koeffizienten der Glieder der Reihe gleich Null.

§ 62. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten.

1. Auf dem in § 61 Entwickelten beruht die Methode der unbestimmten Koeffizienten. Das dabei angewandte Verfahren nimmt an, eine Funktion lasse sich in eine Potenzreihe entwickeln, also in eine Reihe

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

deren Koeffizienten aber vorerst noch unbestimmt sind und zu deren Bestimmung aus den Eigenschaften der Funktion Gleichungen abgeleitet werden. Bei der gefundenen Reihe ist aber stets eine Untersuchung über ihre Konvergenz oder Divergenz zu veranstalten, denn nur unter der Bedingung ihrer Konvergenz dürfen wir die Funktion gleich der Reihe setzen. Einige Beispiele werden das Verfahren am besten zeigen.

2. Beispiel. $y = \frac{1}{1-2x+x^2}$ soll in eine Reihe entwickelt werden.

$$\frac{1}{1-2x+x^2} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)$$

Hieraus durch Multiplikation

$$1 = \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots \\ \quad -2a_0 x - 2a_1 x^2 - 2a_2 x^3 - 2a_3 x^4 - \ldots \\ \qquad\qquad + a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + \ldots \end{cases}$$

Setzen wir die Koeffizienten der Potenzen von x rechts und links einander gleich, so erhalten wir (nach § 61):

$$\begin{array}{ll} 1 = a_0 & \text{oder } a_0 = 1 \\ 0 = a_1 - 2a_0 & a_1 = 2 \\ 0 = a_2 - 2a_1 + a_0 & a_2 = 3 \\ 0 = a_3 - 2a_2 + a_1 & a_3 = 4 \\ 0 = a_4 - 2a_3 + a_2 \text{ u. s. w.} & a_4 = 5 \text{ u. s. w., also} \end{array}$$

$$y = \frac{1}{1-2x+x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \ldots$$

limes $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} \cdot x = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x = x$; d. h. die letzte Gleichung für y ist gültig für $x < 1$ (absolut genommen).

3. Der Nachweis der Bedingungen, unter denen die erhaltene Reihe konvergiert, ist nicht immer so einfach wie bei obigem Beispiel; so erhalten wir z. B.

$$y = \frac{1}{1-x+x^2} = 1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10} + \ldots$$

Hier können wir am einfachsten je zwei Glieder der Reihe zusammenfassen und erhalten

$$y = (1 + x) - x^3(1 + x) + x^6(1 + x) - \ldots,$$

d. h. eine geometrische Reihe, die für $x < 1$ (absolut genommen) konvergiert.

§ 63. Umkehrung von Reihen.

Ist eine Reihe $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ gegeben, so heißt die Reihe umkehren, aus derselben eine Reihe für x, also eine Reihe $x = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 \ldots$ ableiten. Auch diese Aufgabe läßt sich am einfachsten durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten lösen. Soll z. B. aus

$$y = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + \ldots \quad \text{(I)}$$

(konvergent für $x^2 < 1$)

umgekehrt für x eine Reihe in y entwickelt werden, so haben wir:

$$x = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \ldots \quad \text{(II)}.$$

Hieraus erhalten wir für $x = 0$, $y = 0$, d. h. $A_0 = 0$, oder $x = A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \ldots$ Setzen wir für x in Reihe I. diesen Wert ein, so erhalten wir:

$$y = A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \ldots + \frac{1}{2}(A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \ldots)^2$$

$$+ \frac{1}{3}(A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \ldots)^3 + \frac{1}{4}(A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \ldots)^4 + \ldots$$

$$= A_1 y + (A_2 + \frac{1}{2} A_1^2) y^2 + (A_3 + \frac{1}{2} 2 A_1 . A_2 + \frac{1}{3} A_1^3) y^3$$

$$+ (A_4 + \frac{1}{2}(2 A_1 . A_3 + A_2^2) + \frac{1}{3} . 3 A_1^2 A_2 + \frac{1}{4} A_1^2) y^4 + \ldots$$

Hieraus durch Gleichsetzung der Koeffizienten der Potenzen von y rechts und links:

$$1 = A_1 \qquad\qquad A_1 = 1$$

$$0 = A_2 + \frac{1}{2} A_1^2 \qquad\qquad A_2 = -\frac{1}{2!}$$

$$0 = A_3 + A_1 A_2 + \frac{1}{3} A_1^3 \qquad\qquad A_3 = +\frac{1}{3!}$$

$$0 = A_4 + A_1 A_3 + \frac{1}{2} A_2^2 + A_1^2 A_2 + \frac{1}{4} A_1^2 \text{ u. s. w.} \qquad A_4 = -\frac{1}{4!}$$

u. s. w., also

$$x = y - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} - \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} - \dots$$

Letztere Reihe ist konvergent für jeden Wert von y.

X. Kapitel.

Die binomische Reihe.

§ 64. Der binomische Satz für ganze negative Exponenten.

$$(1+x)^{-n} = 1 + \binom{-n}{1} x + \binom{-n}{2} x^2 + \binom{-n}{3} x^3 + \dots$$

(für $x^2 < 1$.)

1. Der binomische Satz ist für ganze positive Exponenten bereits in der Algebra erledigt worden (vergl. Sammlung Göschen, Algebra, § 30). Es erübrigt uns also noch, den Fall der ganzen negativen Exponenten und den der gebrochenen Exponenten zu erledigen.

2. Um die Gültigkeit der Formel für diesen Fall zu zeigen, wollen wir zunächst eine Gleichung von der Form $A x^3 + B x^2 + B x + D = 0$ betrachten, deren Wurzeln

x_1, x_2, x_3 sein mögen. Subtrahieren wir von derselben etwa $Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 + D = 0$, so erhalten wir eine neue Gleichung $A(x^3 - x_1^3) + B(x^2 - x_1^2) + C(x - x_1) = 0$, die durch $x - x_1$ teilbar ist. Wir schließen daraus, daß die gegebene Gleichung den Faktor $x - x_1$ enthält, und daß sie auf die Form $A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ gebracht werden kann. Eine unmittelbare Folge hiervon ist aber der Satz:

Ist irgend eine Gleichung des nten Grades mit einer Unbekannten gegeben, so kann dieselbe nicht mehr als n Wurzeln haben. Hat sie nämlich mehr als n Wurzeln, so müssen notwendig alle Koeffizienten A, B, C ... verschwinden und dann befriedigt jeder beliebige Wert für die Unbekannte die Gleichung.

3. Es ist aber für ganze p und q:

$$(1+x)^p = \binom{p}{0} + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \dots$$

$$(1+x)^q = \binom{q}{0} + \binom{q}{1}x + \binom{q}{2}x^2 + \binom{q}{3}x^3 + \dots$$

und somit:

$$(1+x)^p \cdot (1+x)^q = (1+x)^{p+q} = \binom{p}{0}\binom{q}{0}$$

$$+\left\{\binom{p}{0}\binom{q}{1} + \binom{p}{1}\binom{q}{0}\right\}x + \left\{\binom{p}{0}\binom{q}{2} + \binom{p}{1}\binom{q}{1} + \binom{p}{2}\binom{q}{0}\right\}x^2$$

$$+\left\{\binom{p}{0}\binom{q}{3} + \binom{p}{1}\binom{q}{2} + \binom{p}{2}\binom{q}{1} + \binom{p}{3}\binom{q}{0}\right\}x^3 + \dots$$

$$= \binom{p+q}{0} + \binom{p+q}{1}x + \binom{p+q}{2}x^2 + \binom{p+q}{3}x^3 + \dots$$

Hieraus folgt aber:

$$\binom{p}{0}\binom{q}{0} = \binom{p+q}{0},$$

$$\binom{p}{0}\binom{q}{1}+\binom{p}{1}\binom{q}{0}=\binom{p+q}{1},$$

$$\binom{p}{0}\binom{q}{2}+\binom{p}{1}\binom{q}{1}+\binom{p}{2}\binom{q}{0}=\binom{p+q}{2},$$

. . . .

$$\binom{p}{0}\binom{q}{a}+\binom{p}{1}\binom{q}{a-1}+\binom{p}{2}\binom{q}{a-2}+\ldots+\binom{p}{a}\binom{q}{0}=\binom{p+q}{a} \quad \text{(I).}$$

Entwickeln wir aber die letzte Gleichung und ordnen nach Potenzen von q, so werden wir eine Gleichung von der Form

$$A \,.\, q^a + B q^{a-1} + C q^{a-2} + \ldots = 0$$

erhalten. Da diese Gleichung für alle möglichen ganzen Werte p und q gilt, so werden wir aber für ein und dasselbe p jedenfalls mehr als a Werte q erhalten, welche diese Gleichung befriedigen, oder mit anderen Worten, es wird überhaupt jeder beliebige Wert für q der Gleichung genügen, oder die Gleichung (I.) gilt nicht nur für ganze p und q, sondern überhaupt für beliebige p und ebenso für solche q.

4. Es sei nun

$$y=\binom{-n}{0}+\binom{-n}{1}x+\binom{-n}{2}x^2+\binom{-n}{3}x^3+\ldots$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots,$$

so erhalten wir:

$$y\,.\,(1+x)^n=1+\left(\binom{-n}{1}+\binom{+n}{1}\right)x$$

$$+\left\{\binom{n}{0}\binom{-n}{2}+\binom{n}{1}\binom{-n}{1}+\binom{n}{2}\binom{-n}{0}\right\}x^2$$

$$+\left\{\binom{n}{0}\binom{-n}{3}+\binom{n}{1}\binom{-n}{2}+\binom{n}{2}\binom{-n}{1}+\binom{n}{3}\binom{-n}{0}\right\}x^3+\ldots$$

$$= 1 + \binom{0}{1}x + \binom{0}{2}x^2 + \binom{0}{3}x^3 + \ldots = 1,$$

also

$$y \cdot (1+x)^n = 1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n},$$

oder

$$(1+x)^{-n} = 1 + \binom{-n}{1}x + \binom{-n}{2}x^2 + \binom{-n}{3}x^3 + \ldots$$

§ 65. Der binomische Satz für gebrochene positive Exponenten.

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = 1 + \binom{\frac{p}{q}}{1}x + \binom{\frac{p}{q}}{2}x^2 + \binom{\frac{p}{q}}{3}x^3 + \binom{\frac{q}{q}}{4}x^4 + \ldots$$

Es sei wieder

$$y = \binom{\frac{1}{q}}{0} + \binom{\frac{1}{q}}{1}x + \binom{\frac{1}{q}}{2}x^2 + \ldots$$

So ist auch

$$y \cdot y = y^2 = \binom{\frac{2}{q}}{0} + \binom{\frac{2}{q}}{1}x + \binom{\frac{2}{q}}{2}x^2 + \binom{\frac{2}{q}}{3}x^3 + \ldots$$

$$y \cdot y^2 = y^3 = \binom{\frac{3}{q}}{0} + \binom{\frac{3}{q}}{1}x + \binom{\frac{3}{q}}{2}x^2 + \binom{\frac{3}{q}}{3}x^3 + \ldots$$

und allgemein:

$$y^a = \binom{\frac{a}{q}}{0} + \binom{\frac{a}{q}}{1}x + \binom{\frac{a}{q}}{2}x^2 + \ldots$$

Setzen wir hierin $a=q$, so folgt aber

$$y^q=1+x, \text{ d. h. } y=(1+x)^{\frac{1}{q}}, \text{ oder}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{q}}=1+\binom{\frac{1}{q}}{1}x+\binom{\frac{1}{q}}{2}x^2+\ldots,$$

und hieraus

$$y^p=(1+x)^{\frac{p}{q}}=1+\binom{\frac{p}{q}}{1}x+\binom{\frac{p}{q}}{2}x^2+\ldots$$

§ 66. Der binomische Satz für gebrochene negative Exponenten.

$$(1+x)^{\frac{-p}{q}}=1+\binom{\frac{-p}{q}}{1}x+\binom{\frac{-p}{q}}{2}x^2+\binom{\frac{-p}{q}}{3}x^3+\ldots$$

Nehmen wir auch hier wieder an, es sei:

$$y=\binom{\frac{-p}{q}}{0}+\binom{\frac{-p}{q}}{1}x+\binom{\frac{-p}{q}}{2}x^2+\ldots,$$

so erhalten wir durch Multiplikation mit

$$(1+x)^{\frac{p}{q}}=\binom{\frac{p}{q}}{0}+\binom{\frac{p}{q}}{1}x+\binom{\frac{p}{q}}{2}x^2+\ldots \text{ wie in § 64, 4.}$$

$$y\cdot(1+x)^{\frac{p}{q}}=1, \text{ oder } y=(1+x)^{\frac{-p}{q}}, \text{ also}$$

$$(1+x)^{\frac{-p}{q}}=1+\binom{\frac{-p}{q}}{1}x+\binom{\frac{-p}{q}}{2}x^2+\ldots$$

§ 67. Konvergenz und Divergenz der Binomialreihe.

1. Wir haben es bis jetzt unterlassen, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Binomialreihe konvergiert oder divergiert. Erinnern wir uns, daß

$$\binom{q}{n+1} = \binom{q}{n} \cdot \frac{q-n}{n+1}$$

ist, so erhalten wir aus der Reihe für $(1+x)^q$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q-n}{n+1} \cdot x = -\frac{1-\frac{q}{n}}{1+\frac{1}{n}} x = -x, \text{ oder:}$$

Die Binomialreihe konvergiert stets für positive oder negative x kleiner als Eins.

2. Ist $x = 1$, so bedarf es einer weitern Untersuchung, ob die Reihe konvergiert oder nicht. Wir haben wieder

$$\lim \frac{u_{n+1}}{n_n} = -\frac{n-q}{n+1}.$$

Wir finden hieraus, daß für jedes beliebige q und hinreichend großes n der Quotient $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ negativ wird, oder, daß die Glieder der Binomialreihe für diesen Fall abwechselnd positiv und negativ sind. Es genügt also, wenn die Glieder überhaupt abnehmen oder der Quotient $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ kleiner als Eins bleibt. Dem ist aber so für $n - q < n + 1$, das heißt:

Ist $x = +1$, so konvergiert die Reihe für alle Exponenten, die > -1 sind, und es ist für einen solchen Exponenten also

$$(1+1)^q = 2^q = 1 + \binom{q}{1} + \binom{q}{2} + \binom{q}{3} + \cdots$$

3. Nehmen wir dagegen $x = -1$, so haben alle Glieder der Reihe, von einem bestimmten ab wenigstens, dasselbe Vorzeichen. Wir haben aber jetzt:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-q}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{q+1}{n-q}} = \frac{1}{1+\alpha},$$

$$\text{also } n \cdot \alpha = \frac{n}{n-q} \cdot (q+1) = q+1. \text{ Also:}$$

F ü r $x = -1$ d a g e g e n k o n v e r g i e r t d i e R e i h e n u r n o c h f ü r p o s i t i v e E x p o n e n t e n q.

§ 68. Binomialreihe für $(a \pm b)^n$

$$(a \pm b)^n = a_n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} b^2 \pm \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot b^3 + \ldots$$

Setzen wir in der Formel für $(1 \pm x)^n$ für x den Wert $\frac{b}{a}$, und multiplizieren wir mit a^n, so erhalten wir die Binomialreihe für $(a \pm b)^n$:

$$(a \pm b)^n = a^n \pm \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \ldots$$

Über deren Konvergenz gilt das in § 67 Gefundene in entsprechender Umformung der Bedingungen.

§ 69. Umwandlung von Wurzeln in unendliche Reihen.

1. Soll z. B. die Quadratwurzel aus 50 in eine unendliche Reihe verwandelt werden, so wählt man das Quadrat, das 50 am nächsten liegt, also 49. Man hat dann

$$\sqrt{50} = \sqrt{49+1} = \sqrt{49\left(1+\frac{1}{49}\right)} = 7\left(1+\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$=7\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{49^2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{49^3}-\frac{5}{128}\cdot\frac{1}{49^4}+\ldots\right)$$

$$=7\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{49}A_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49}A_2-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{49}A_3+\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{49}A_4-\ldots\right)$$

$$=7{,}071\,067\,81187.$$

In letzterer Gleichung bedeutet A_p immer den Wert des vorangehenden Gliedes der Reihe.

Ebenso ist

$$\sqrt{35}=\sqrt{36-1}=\sqrt{36\left(1-\frac{1}{36}\right)}=6\left(1-\frac{1}{36}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Ist kein Quadrat vorhanden, das nahezu gleich dem Radikanten ist, so würde diese Art der Auflösung auf wenig rasch konvergierende Reihen führen. Man sucht dann aber durch passende Umformungen zu andern, zur Berechnung besser geeigneten Reihen zu kommen. So hat man z. B.

$$\sqrt{7}=\frac{1}{3}\sqrt{63}=\frac{1}{3}\sqrt{64-1}=\frac{1}{3}\sqrt{64\left(1-\frac{1}{64}\right)}$$

$$=\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Wie die Quadratwurzel kann jede beliebige Wurzel auf diese Art in eine Reihe verwandelt werden, so z. B.

$$\sqrt[3]{3}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{24}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{27-24}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$$

u. s. w.

XI. Kapitel.

Die Exponentialreihe. Die logarithmische Reihe. Logarithmen.

§ 70. Die Zahl e.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

1. Es ist nach dem binomischen Satz

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \binom{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \binom{m}{2}\frac{1}{m^2} + \binom{m}{3}\cdot\frac{1}{m^3} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m.(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{m^3} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + 1.\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!} + 1.\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{1}{3!} + \cdots$$

Hieraus erhält man für $m = \infty$

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$= 2,718\,281\,828459\ldots$$

2. Die Reihe für e selbst ist konvergent, indem $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n}$ ist.

3. Die Zahl e selbst ist, wie wir sehen werden, die Basis des natürlichen Logarithmensystems und nimmt überhaupt in der niederen Analysis wie die Zahl π eine ungemein wichtige Stelle ein. Sie ist wie die Zahl π transcendent und kann also durch keinen Bruch dargestellt werden. Wäre e nämlich $= \frac{r}{s}$, so erhielten

wir durch Multiplikation der Reihe mit s! aus der Reihe eine ganze Zahl und die Reihe

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}+\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}+\ldots,$$

und es müßte der Wert dieser Reihe ebenfalls eine ganze Zahl sein. Der Wert der letzten Reihe ist aber kleiner als der Wert der Reihe

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^3}+\ldots,$$

also kleiner als $\frac{1}{s}$, also unmöglich eine ganze Zahl, und somit kann auch e nicht gleich dem Bruch $\frac{r}{s}$ sein. [1]

4. Aus dieser Betrachtung folgt auch, daß der Fehler, den man begeht, wenn man die Reihe nur bis zum Gliede $\frac{1}{s!}$ nimmt, $< \frac{1}{s \cdot s!}$ ist. So finden wir z. B.

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=2,718\,055\ldots$$

Der Fehler, den wir begehen, beträgt weniger als $\frac{1}{6 \cdot 6!}=\frac{1}{4320}=0,00023.$

§ 71. Die Exponentialreihe.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

[1] Ein anderer Beweis geht von der Entwicklung von e in einen Kettenbruch aus. Es ist

$$e=2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\ldots}}}$$

und es lässt sich auf ähnliche Art wie in § 6 zeigen, dass dieser Bruch stets irrational ist. Vgl. Schlömilch a. a. O.

1. Wir haben ebenso

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

Setzen wir aber für m den Wert $\mu \,.\, x$, so erhalten wir auch:

$$\left(1+\frac{x}{\mu \,.\, x}\right)^{\mu x} = \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu x} = e^x, \text{ also}$$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

2. Diese Reihe konvergiert für jeden Wert für x, indem $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n}$ beliebig klein gemacht werden kann. Die Reihe selbst heißt die Exponentialreihe.

3. Wir können diese Reihe auch durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten ableiten.

Da a^x für $x=0$ den Wert 1 annimmt, können wir setzen:

$$a^x = 1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots \text{ und}$$
$$a^y = 1+Ay+By^2+Cy^3+\ldots$$

Durch Multiplikation erhalten wir aber daraus:

$$a^{x+y} = 1+Ax(1+Ay+By^2+Cy^3+\ldots)$$
$$+Mx^2+Nx^3+\ldots \text{ und auch}$$
$$a^{x+y} = 1+A(x+y)+B(x+y)^2+\ldots$$
$$=1+(A+2By+3Cy^2+4Dy^3+\ldots)x+Px^2+Qx^3+\ldots$$

Hieraus erhalten wir aber durch Gleichsetzung der Koeffizienten

$$A=A, \qquad A=A$$
$$A^2=2B, \qquad B=\frac{A^2}{2!}$$
$$AB=3C, \qquad C=\frac{A^3}{3!}$$

$$AC = 4D, \qquad D = \frac{A^4}{4!} \text{ u. s. w., oder}$$

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1!} + \frac{A^2x^2}{2!} + \dots,$$

worin A und a voneinander abhängig sind.

Setzen wir hierin $A = 1$, so erhalten wir, wenn wieder

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots \text{ ist:}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

§ 72. Die Reihe für a^x.

$$a^x = 1 + \frac{la \cdot x}{1!} + \frac{(la)^2 x^2}{2!} + \frac{(la)^3 \cdot x^3}{3!} + \dots$$

Wählen wir die Zahl e zur Basis eines Logarithmensystems und bezeichnen die zu dieser Basis gehörigen Logarithmen zum Unterschied der Logarithmen der Basis 10 mit l oder mit log. nat., so erhalten wir für $e^y = a$, $y = la$ und $a^x = e^{xy} = e^{x\,la}$. Setzen wir diesen Wert in die Exponentialreihe ein, so erhalten wir aus derselben

$$a^x = 1 + \frac{la \cdot x}{1!} + \frac{(la)^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{(la)^3 x^3}{3!} + \dots$$

Diese Reihe konvergiert für jeden Wert a und x.

§ 73. Das natürliche und das künstliche Logarithmensystem.

$$a^x = 1 + x \cdot \frac{\log a}{\log e} + \frac{x^2}{2!} \cdot \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^2 + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{\log a}{\log e}\right)^3 + \dots$$

$$\log e = 0{,}434294481903 \dots .$$

1. Unter den Logarithmensystemen sind es zwei, die durch ihre Eigenschaften sich vor allen andern

auszeichnen. Es sind dies das künstliche und das natürliche Logarithmensystem. Das künstliche hat den Vorzug, daß es sich am besten für unser dekadisches Zahlensystem eignet, indem die Potenzen der Zahl 10 unmittelbar gegeben sind. Das natürliche Logarithmensystem dagegen hat den Vorzug, daß alle Formeln und Reihen, die in ihm auftreten, die einfachste Gestalt annehmen. Die Basis dieses Systems ist die Zahl e. Die natürlichen Logarithmen sind zudem diejenigen, die in der höheren Mathematik beinahe ausschließlich vorkommen. Außerdem können die künstlichen Logarithmen auf eine einfache Art aus den natürlichen berechnet werden. Es sei nämlich $10 = e^x$. Wir haben dann $1 = x \log e$. Ist ebenso $a = 10^y = e^{xy}$, also $\log a = y$, $l\,a = xy$, so haben wir

$$\begin{aligned} \log a &= l\,a \,.\, \log e \qquad (I.) \\ &= l\,a \,.\, 0{,}434294481903 \ldots \end{aligned}$$

Da weiter aus $10 = e^x$ auch $l\,10 = x$ sich ergibt, so folgt noch

$$l\,a = \log a \,.\, l\,10 = \log a \,.\, 2{,}302585092994 \ldots \text{(II)}.$$

Die künstlichen Logarithmen werden also aus den natürlichen durch Multiplikation mit 0,43429448 erhalten, und ebenso finden wir die natürlichen durch Multiplikation mit 2,30258509 aus den künstlichen.

Die Zahl $0{,}43429448 \ldots = \log e = \frac{1}{l\,10}$ heisst der **Modul** des künstlichen Logarithmensystems.

2. Setzen wir in die Gleichung für a^x für $l\,a$ den Wert $\frac{\log a}{\log e}$, so geht die Gleichung über in

$$a^x = 1 + \left(\frac{\log a}{\log e}\right) \cdot \frac{x}{1} + \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{\log a}{\log e}\right)^3 \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$ [1]

§ 74. Die logarithmische Reihe.

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

1. Es ist $(1+x) = e^{l(1+x)} = \left(1 + \frac{l(1+x)}{m}\right)^m$ mit beliebiger Annäherung für sehr große m. Daraus folgt aber:

$$\sqrt[m]{1+x} = 1 + \frac{l(1+x)}{m}.$$

Setzen wir hierin $m = \frac{1}{y}$, so erhalten wir hieraus wieder:

$$l(1+x) = \frac{(1+x)^y - 1}{y} = \binom{y}{1} \cdot \frac{x}{y} + \binom{y}{2}\frac{x^2}{y} + \binom{y}{3}\frac{x^3}{y} + \ldots$$

$$= x + \frac{1.(y-1)}{1.2} x^2 + \frac{1.(y-1)(y-2)}{1.2.3} x^3$$

$$+ \frac{1.(y-1)(y-2)(y-3)}{1.2.3.4} x^4 + \ldots$$

Ist m unendlich groß und y also $= 0$, so folgt daraus: $l\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

2. Wir hätten auch diese Reihe durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten ableiten können. Nehmen wir an, daß

$$l(1+x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

so finden wir zunächst für $x = 0$, $l1 = 0$, $A = 0$ oder:

$$l(1+x) = +Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

[1] Durch Entwicklung von $l(1+x)$ in einen Kettenbruch kann gezeigt werden, dass die natürlichen Logarithmen der rationalen Zahlen irrational sind. Vgl. Schlömilch a. a. O.

Ebenso ist:

$$(1+x+y) = +B(x+y)+C(x+y)^2+D(x+y)^3+\ldots$$
$$= +Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots+y(B+2Cx+3Dx^2+\ldots$$
$$+My^2+Ny^3+\ldots$$

Ferner ist

$$l(1+x+y) = l(1+x)\left(1+\frac{y}{1+x}\right) = l(1+x)+l\left(1+\frac{y}{1+x}\right)$$
$$= Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots+B\frac{y}{1+x}+\left(\frac{y}{1+x}\right)^2\cdot Cx+\ldots$$
$$= Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots+By(1-x+x^2-x^3+x^4+\ldots)$$
$$\frac{y^2}{(1+x)^2}B+\ldots$$

Werden die Koeffizienten von y in diesen beiden Gleichungen für $l(1+x+y)$ einander gleich gesetzt, so erhalten wir aber

$$B(1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots) = B+2Cx+3Dx^2+\ldots$$
$$B = B, \qquad B = B,$$
$$-B = 2C, \qquad C = -\frac{B}{2},$$
$$+B = 3D, \qquad D = +\frac{B}{3},$$
$$-B = 4E, \qquad E = -\frac{B}{4} \text{ u. s. w., also}$$
$$l(1+x) = B\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)$$

Wählen wir zur Basis unseres Logarithmensystems aber die Zahl e, so erhalten wir:

$$1+x = e^{l(1+x)} = e^{B\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)}$$
$$= 1+\frac{B}{1!}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right)+\frac{B^2}{2!}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right)+\ldots$$

und hieraus $B=1$.

3. Es erübrigt uns noch, die Konvergenz der Reihe für $l(1+x)$ zu untersuchen. Es ist klar, daß die Reihe konvergiert für positive und negative x kleiner als Eins. Ist $x = +1$, so konvergiert die Reihe gerade noch, da die Glieder abnehmen und abwechselnd positiv und negativ sind. Ist dagegen $x = -1$, so divergiert die Reihe. Daß für diesen Fall die Reihe divergieren muß, geht auch daraus schon hervor, daß $l\,0 = -\infty$ ist.

4. Insbesondere erhalten wir also:

$$l\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \ldots$$

§ 75. Weitere Reihen zur Berechnung der Logarithmen.

1. $\frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

2. $\frac{1}{2} l(z) = \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots$

3. $\frac{1}{2} l \frac{q+1}{q} = \frac{1}{2q+1} + \frac{1}{3(2q+1)^3} + \frac{1}{5(2q+1)^5} + \ldots$

4. $l x = \frac{l(x+1) + l(x-1)}{2} + \frac{1}{2 . x^2} + \frac{1}{4 . x^4} + \frac{1}{6 . x^6} + \ldots$

1. Wird anstatt x in der logarithmischen Reihe $-x$ gesetzt, so erhält man

$$l(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

Hieraus folgt durch Subtraktion dieses Wertes von dem Wert für $l(1+x)$ die erste Gleichung.

2. Für $\frac{1+x}{1-x} = z$ erhalten wir $x = \frac{z-1}{z+1}$.

Diese Werte in die erste Gleichung eingesetzt, gibt die zweite Gleichung für $\frac{1}{2}\,l\,z$.

3. Wird ebenso $\frac{1+x}{1-x}=\frac{q+1}{q}$ gesetzt, so erhält man $x=\frac{1}{2q+1}$ und hieraus die Gleichung 3.

4. Aus $l(1+y)$ folgt weiter

$$l\left(1+\frac{1}{x}\right)=l\,\frac{x+1}{x}=l(1+x)-lx=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\ldots$$

Ebenso ist:

$$l\left(1-\frac{1}{x}\right)=l(x-1)-lx=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}-\ldots$$

Daraus folgt durch Addition:

$$l\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)=l(x+1)+l(x-1)-2\,l(x)$$
$$=-2\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{6x^6}+\ldots\right)$$

oder:

$$lx=\frac{l(x+1)+l(x-1)}{2}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{6x^6}+\ldots$$

So ist z. B.

$$l3=\frac{l4+l2}{2}+\frac{1}{2.3^2}+\frac{1}{4.3^4}+\frac{1}{6.3^6}+\ldots$$

$$l5=\frac{l4+l6}{2}+\frac{1}{2.5^2}+\frac{1}{4.5^4}+\frac{1}{6.5^6}+\ldots$$

5. Die hier entwickelten Reihen sind zur Berechnung der Logarithmen deshalb geeigneter, weil sie rascher konvergieren als die Reihen für $l(1+x)$ und $l(1-x)$.

XII. Kapitel.

Die trigonometrischen Funktionen. Imaginäre Logarithmen.

§ 76. Die Reihen für sin x und cos x.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

1. Setzen wir in der Exponentialreihe anstatt x den Wert i x, so erhalten wir

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$
$$+ i . \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)$$
$$= \cos x + i . \sin x.$$

2. Um die Richtigkeit dieser Formel zu zeigen, benützen wir zur Ableitung der Reihen für sin x und cos x die Methode der unbestimmten Koeffizienten. Es ist:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y.$$

Setzen wir, da $\cos 0 = 1$ ist,

$$\cos x = 1 + A x^2 + B x^4 + C x^6 + \ldots,$$

was wir tun dürfen, da $\cos(-x) = +\cos x$ ist; so erhalten wir:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 + A\left((x+y)^2 + (x-y)^2\right)$$
$$+ B\left((x+y)^4 + (x-y)^4\right) + \ldots = 2 + 2(A x^2 + B x^4 + C x^6 \ldots)$$
$$+ 2\left(A + \binom{4}{2} B x^2 + \binom{6}{2} C x^4 + \ldots\right) y^2 + M y^4 + N y^6 + \ldots$$

$$2\cos x \,.\, \cos y = 2(1 + A x^2 + B x^4 + C x^6 + \ldots)(1 + A y^2 + B y^4 + C y^6 + \ldots) = 2(1 + A x^2 + B x^4 + C x^6 + \ldots) + 2(1 + A x^2 + B x^4 + \ldots) A y^2 + R y^4 + S y^6 + \ldots$$

Hieraus durch Gleichsetzung der Koeffizienten von y^2:

$$A = A \qquad \text{also } A = A$$

$$\binom{4}{2} B = A^2 \qquad B = \frac{2A^2}{4.3} = \frac{2^2 A^2}{4!}$$

$$\binom{6}{2} C = A B \qquad C = \frac{2^2 . A^3}{6.5.4.3} = \frac{2^3 A^3}{6!}$$

$$\binom{8}{2} D = A C \qquad D = \frac{2^3 A^4}{8.7.6.5.4.3} = \frac{2^4 A^4}{8!} \text{ u. s. w.}$$

$$\cos x = 1 + A x^2 + \frac{4A^2}{4!} x^4 + \frac{8A^3}{6!} x^6 + \frac{16A^4}{8!} x^8 + \ldots$$

3. Ebenso sei

$$\sin x = A_1 x + B_1 x^3 + C_1 x^5 + D_1 x^7 + \ldots,$$

was wir immer tun dürfen, da $\sin 0 = 0$ und $\sin x = -\sin(-x)$. Setzen wir diesen und den gefundenen Wert für $\cos x$ etwa in die Gleichung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ein, so erhalten wir:

$$(A_1 x + B_1 x^3 + C_1 x^5 + \ldots)^2 + \left(1 + A x^2 + \frac{4A^2}{4!} x^4 + \ldots\right)^2 = 1$$

und hieraus

$$A_1^2 + 2A = 0, \qquad A_1 = \sqrt{-2A}$$

$$2A_1 B_1 + A^2 + \frac{8A^2}{4!} = 0, \qquad B_1 = \frac{1}{3} A \sqrt{-2A}$$

$$2A_1 C_1 + B_1^2 + \frac{8A^3}{4!} + \frac{16A^3}{6!} = 0, \quad C_1 = \frac{1}{30} A^2 \sqrt{-2A} \text{ u. s. w.}$$

4. Zur Bestimmung von A dient der Umstand, daß für sehr kleine Werte von x man $\sin x = x$ setzen darf. Daraus folgt aber:

$$\sin x = x = A_1 x + B_1 x^3 + \ldots$$

$$A_1 = 1, \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B_1 = -\frac{1}{3!}, \quad C_1 = +\frac{1}{5!}, \text{ etc.,}$$

d. h. wir erhalten

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

§ 77. Relationen zwischen den Funktionen sin x, cos x und e^{ix}

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ (\cos x + i \sin x)^n = \cos n x + i \sin n x. \end{cases}$$

1. Wie wir sahen, ist

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Setzen wir anstatt x, $-x$, so erhalten wir ebenso: $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$. Hieraus folgt:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad \text{(I.)}$$

2. Aus $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$ folgt weiter:

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos(x + y) + i \sin(x + y),$$

ebenso: (II.)

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)(\cos z + i \sin z)$$
$$= \cos(x + y + z) + i \sin(x + y + z).$$

Insbesondere folgt daraus:

$(\cos x + \sin x)^n = \cos n x + i \sin n x$. (III.) (Vergl. Sammlung Göschen Nr. 47, Algebra, § 31; Satz von Moivre.)

3. Werden in der Gleichung (II) die reellen und

imaginären Werte einander gleich gesetzt, so erhalten wir daraus:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Überhaupt lassen sich auf diese Art beinahe alle trigonometrischen Relationen zwischen Winkeln leicht ableiten, und wir wollen uns beschränken, darauf hinzuweisen. Betreffs der Verwendung des Satzes von Moivre zur Lösung der Gleichung $x^n \pm 1 = 0$ müssen wir auf Sammlung Göschen, Algebra, § 31 verweisen.

§ 78. Die Reihen für tang x und cot x.

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots$$
$$= 2^2(2^2-1)\frac{B_1}{2!}x + 2^4(2^4-1)\frac{B_2}{4!}\cdot x^3$$
$$+ 2^6(2^6-1)\frac{B_3}{6!}x^5 + \ldots$$

$$\cot x = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{x}\left(1 - 2^2\frac{B_1}{2!}x^2 - 2^4\frac{B_2}{4!}x^4 - 2^6\cdot\frac{B_3}{6!}x^6 - \ldots\right.$$

1. Es ist

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots}$$
$$= x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \ldots$$

Die Glieder x^2, x^4, x^6 . . . fallen weg, indem $\operatorname{tang}(-x) = -\operatorname{tang} x$ ist.

Daraus folgt aber:

$$-\frac{1}{3!}=A-\frac{1}{2!},\ A=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{3}=\frac{2^2(2^2-1)}{2!}.B_1$$

$$\frac{1}{5!}=B-\frac{A}{2!}+\frac{1}{4!},\ B=\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!}+\frac{A}{2!}=\frac{2}{15}$$

$$=\frac{2^4(2^4-1)}{4!}B_2$$

$$-\frac{1}{7!}=C-\frac{B}{2!}+\frac{A}{4!}-\frac{1}{6!},\ C=\frac{17}{315}=\frac{2^6(2^6-1)}{6!}B_3$$

u. s. w. Hierbei sind B_1, B_2, B_3 die Bernoullischen Zahlen.

2. Ebenso erhält man die Reihe für cot x, indem man setzt:

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots}$$

$$=\frac{1}{x}(1+Ax^2+Bx^4+\ldots)$$

§ 79. Reihen für cos m x und sin m x.

$$\cos mx=\cos^m x-\binom{m}{2}\cos^{m-2}x.\sin^2 x+\binom{m}{4}\cos^{m-4}x\sin^4 x$$

$$-\binom{m}{6}\cos^{m-6}x\sin x^6+\ldots$$

$$\sin mx=\binom{m}{1}.\cos^{m-1}x\sin x-\binom{m}{3}\cos^{m-3}x.\sin^3 x$$

$$+\binom{m}{5}.\cos x^{m-5}x.\sin^5 x-\ldots$$

1. Es ist nach dem Satz von Moivre:

$$\cos mx+i\sin mx=(\cos x+i\sin x)^m=$$

$$\cos x^m+i.\binom{m}{1}\cos^{m-1}x.\sin x+i^2.\binom{m}{2}\cos^{m-2}x.\sin^2 x$$

$$+ i^3 \binom{m}{3} \cos x^{m-3} \sin x + i^4 . \binom{m}{4} \cos^{m-4} x \sin^4 x + \ldots$$

Durch Gleichsetzung der reellen und der imaginären Teile rechts und links gehen hieraus unmittelbar die Formeln für $\cos m x$ und $\sin m x$ hervor.

2. So erhält man z. B.:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = -1 + 2\cos^2 x,$$
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$
$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x . \sin^2 x + \sin^4 x$$
$$= 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x,$$
$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$$
$$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x \text{ u. s. w.}$$

Ganz ebenso findet man:

$$\sin 2x = 2\cos x \sin x,$$
$$\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x,$$
$$\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x,$$
$$\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x \text{ u. s. w.}$$

§ 80. Reihen für $\cos^n x$ und $\sin^n x$.

$$2^{n-1}\cos^n x = \cos n x + \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}} \text{ (wenn n gerade)},$$

$$2^{n-1}\cos^n x = \cos n x + \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x + \ldots$$
$$\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\cos x \text{ (wenn n ungerade)},$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}} . 2^{n-1} . \sin^n x = \cos n x - \binom{n}{1}\cos(n-2)x$$
$$+ \binom{n}{2}\cos(n-4)x \mp \ldots \pm \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}} \text{ (für gerade n)},$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{n-1} \cdot \sin^n x = \sin n x - \binom{n}{1} \sin(n-2)x$$

$$+ \binom{n}{2} \sin(n-4)x - \ldots \pm \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \sin x \text{ (für ungerade n).}$$

1. Setzen wir

$$\cos x + i \sin x = r, \quad \cos x - i \sin x = s,$$

so erhalten wir $rs = 1$ und

$$2 \cos x = r + s, \text{ also:}$$

$$2^n \cos^n x = (r+s)^n = r^n + \binom{n}{1} r^{n-1} s + \binom{n}{2} r^{n-2} s^2 + \ldots$$

$$= (r^n + s^n) + \binom{n}{1}(r^{n-1}s + rs^{n-1}) + \binom{n}{2}(r^{n-2}s + r^2 s^{n-2} +) + \ldots$$

Hierbei ist das letzte Glied dieser Reihe für gerade n

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} \cdot s^{\frac{n}{2}}$$

und für ungerade n dagegen

$$\binom{n}{\frac{n-1}{2}} \left(r^{\frac{n-1}{2}} \cdot s^{\frac{n+1}{2}} + r^{\frac{n+1}{2}} \cdot s^{\frac{n-1}{2}} \right).$$

Berücksichtigen wir aber, daß $rs = 1$ ist, so folgt daraus weiter:

$$2^n \cos^n x = (r^n + s^n) + \binom{n}{1}(r^{n-2} + s^{n-2}) + \binom{n}{2}(r^{n-4} + s^{n-4}) + \ldots$$

Nach dem Satz von Moivre haben wir aber ferner:

$$r^p + s^p = (\cos x + i \sin x)^p + (\cos x - i \sin x)^p$$

$$= \cos p x + i \sin p x + \cos p x - i \sin p x = 2 \cos p x,$$

also wird:

$$2^{n-1} \cos^n x = \cos n x + \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x + \ldots,$$

wobei das letzte Glied $\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}$ oder $\binom{n}{\frac{n-1}{2}} \cos x$ ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Ganz ebenso ergeben sich aus (r—s) die Formeln für $2^{n-1}\sin x$.

2. Insbesondere erhalten wir:

$$2\cos^2 x = \cos 2x + 1$$
$$4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x$$
$$8\cos^4 x = \cos 4x + 4\cos 2x + 3$$
$$16\cos^5 x = \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos\alpha.$$
$$32\cos^6 x = \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10$$

. . . .

$$2\sin^2 x = -\cos 2x + 1$$
$$4\sin^3 x = -\sin 3x + 3\sin\alpha.$$

. . . .

§ 81. Die Reihen.

$$S_1 = 1 + x\cos\alpha + x^2\cos 2\alpha + x^3\cos 3\alpha + \dots = \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$$

$$S_2 = 1 + x\sin\alpha + x^2\sin 2\alpha + x^3\sin 3\alpha + \dots = 1 + \frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}.$$

1. Wir haben $S_1 + i\,.\,S_2 = 1 + i + x(\cos\alpha + i\sin\alpha) + x^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \dots$ oder:

$$S_1 + iS_2 = 1 + i + x\,.\,e^{\alpha i} + x^2\,.\,{}^{2\alpha i} + x^3 e^{3\alpha i} + \dots$$
$$= i + \left\{1 + (x\,.\,e^{\alpha i}) + (x\,.\,e^{\alpha i})^2 + (x\,.\,e^{\alpha i})^3 + \dots\right\}$$
$$= i + \frac{1}{1 - xe^{\alpha i}} = i + \frac{1}{1 - x(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$$
$$= i + \frac{(1 - x\cos\alpha + ix\sin\alpha)}{(1 - x\cos\alpha)^2 + x^2\sin^2\alpha}$$
$$= \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} + i\left(1 + \frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}\right).$$

Hieraus folgen durch Gleichsetzung der reellen und imaginären Teile die obigen Reihen.

2. Gleicherweise läßt sich jede Reihe

$$S' = a + b x \cos\alpha + c x^2 \cos 2\alpha + d x^3 \cos 3\alpha + \ldots \text{ oder}$$

$$S'_1 = a + b x \sin\alpha + c x^2 \sin 2\alpha + d x^3 \sin 3\alpha + \ldots$$

summieren, wenn die Summenformel für $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ bekannt ist.

§ 82. Imaginäre Logarithmen.

$$l\,a = \alpha \pm 2k\pi i, \quad l(-a) = \alpha \pm (2k\pi + 1)i,$$

$$l(a + bi) = \frac{1}{2}\,l(a^2 + b^2) + \varphi i \pm 2k\pi i,$$

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{l\,i}{i}.$$

1. Für irgend eine ganze Zahl k ist

$$\cos 2k\pi \pm i \sin 2k\pi = 1, \text{ also}$$

$$e^{\pm 2k\pi i} = 1.$$

Hieraus finden wir aber, wenn $a = e^\alpha$,

$$a = e^\alpha = e^{\alpha \pm 2k\pi i} \text{ und also:}$$

$$l\,a = \alpha \pm 2k\pi i.$$

Zu jeder positiven Zahl a gehören also unendlich viele Logarithmen, es ist von denselben aber nur einer reell.

2. Ebenso ist für ganze k

$$\cos(2k + 1)\pi \pm i \sin(2k + 1)\pi = -1,$$

$$\text{oder } e^{\pm(2k\pi + \pi)i} = -1, \text{ also}$$

$$-a = e^\alpha(-1) = e^{\alpha \pm (2k + 1)\pi i} \text{ oder}$$

$$l(-a) = \alpha \pm (2k + 1)\pi i.$$

Die unendlich vielen Logarithmen einer negativen Zahl sind also alle komplex imaginär.

3. Weiter ist

$$\cos\left(\pm 2k + \frac{1}{2}\right)\pi + i\sin\left(\pm 2k + \frac{1}{2}\right)\pi = i,$$

$$\text{oder } i = e^{\pm 2k\pi i + \frac{1}{2}\pi i},$$

also

$$ai = e^{\alpha} \cdot i = e^{\alpha \pm 2k\pi i + \frac{1}{2}\pi i} \text{ und}$$

$$l(ai) = \alpha \pm 2k\pi i + \frac{1}{2}\pi i \text{ und}$$

$$l(-ai) = \alpha \pm 2k\pi i - \frac{1}{2}\pi i.$$

Insbesondere folgt aus $i = e^{\pm 2k\pi i + \frac{1}{2}\pi i}$ für $k = 0$ noch $i = e^{\frac{1}{2}\pi i}$ oder: $l\,i = \frac{1}{2}\pi i$, oder endlich:

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{l\,i}{i}.$$

4. Ist endlich eine komplexe Zahl $a + bi$ gegeben, so haben wir:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\left((\cos(\varphi \pm 2k\pi)\right.$$
$$\left. + i\sin(\varphi \pm 2k\pi)\right) = r \cdot e^{\varphi i \pm 2k\pi i}.$$

Hierbei ist:

$$r^2 = a^2 + b^2, \ \frac{b}{a} = \operatorname{tang}\varphi, \text{ also } \varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}.$$

Daraus folgt aber:

$$l(a + bi) = l\,r + i\varphi \pm 2k\pi i$$
$$= \frac{1}{2}l(a^2 + b^2) \pm 2k\pi i + i \operatorname{arc\,tang}.\frac{b}{a}.$$

Die Zahl r heißt der **Modul** der komplexen Zahl.

XIII. Kapitel.

Die cyklometrischen Funktionen.

§ 83. Die Reihen für arc sin x und arc cos x.

$$x = \sin x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\sin^5 x}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\sin^7 x}{7} + \dots$$

1. Setzen wir $\sin x = y$, so folgt aus der Reihe

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ und aus}$$

$x = A.y + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots$ (Umkehrung der Reihe in § 76)

zunächst, daß die geraden Potenzen von y verschwinden, indem in der ersten Reihe x mit y das Vorzeichen wechselt.

Wird für y in der zweiten Reihe der Wert aus der ersten Reihe eingesetzt, so erhalten wir daraus:

$$x = A\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) + C\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)^3 + \dots$$

Durch Gleichsetzung der Koeffizienten der Potenzen von x finden wir hieraus:

$1 = A,$ also: $A = 1$

$0 = -\frac{A}{3!} + C,$ $C = \frac{1}{3!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

$0 = +\frac{A}{5!} - 3C \cdot \frac{1}{3!} + E,$ $E = \frac{3}{40} = \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5}$

$$0=-\frac{A}{7!}+\frac{3}{5!}C+\frac{3C}{3!3!}+\frac{5E}{3!}+G,\ G=\frac{5}{5}=\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{7}$$

u. s. w. Es ist also:

$$x=y+\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{y^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{y^7}{7}+\dots \text{ oder:}$$

$$x=\sin x+\frac{1}{2}\,\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin^5 x}{5}$$

$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\sin^7 x}{7}-\dots$$

2. Setzen wir hierin für x den Wert $\frac{\pi}{2}-x$, so folgt aus der Reihe

$$x=\frac{\pi}{2}-\cos x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^3 x}{3}-\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\cos^5 x}{5}$$

$$-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\cos^7 x}{7}-\dots$$

3. Die beiden für x gefundenen Reihen sind stets konvergent für $\sin^2 x$, resp. $\cos^2 x<1$, da $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\sin^2 x$ resp. $=\cos^2 x$. Sie sind aber auch noch konvergent für $\sin x$ oder $\cos x=1$, denn wir finden für diesen Fall:
$\alpha=\frac{3}{2n}$ und also $n\alpha=\frac{3}{2}$, d. h. $n\alpha>1$.

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}=\frac{4n^2-4n+1}{4n^2+2n}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{6n-1}{4n^2+2n}}=\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}.$$

§ 84. Die Reihen für arc tang x und arc cot x.

$$x = \operatorname{tang} x - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{tang}^7 x + \ldots$$

1. Ganz ebenso finden wir aus der Reihe für tang x durch Umkehrung die Reihe für arc tang x. Wir können aber auch noch einen andern Weg einschlagen. Es ist

$$e^{2ix} = \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x} = \frac{1 + i\operatorname{tang} x}{1 - i\operatorname{tang} x}, \text{ also:}$$

$$2ix = l\,\frac{1 + i\operatorname{tang} x}{1 - i\operatorname{tang} x}.$$

Entwickeln wir diesen Wert nach § 75 in eine Reihe, und dividieren wir mit 2i, so erhalten wir

$$x = \operatorname{tang} x - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{tang}^7 x + \ldots$$

2. Setzen wir auch hier wieder für x den Wert $\frac{\pi}{2} - x$, so folgt daraus:

$$x = \frac{\pi}{2} - \cot x + \frac{1}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + \ldots$$

3. Diese beiden für x erhaltenen Reihen konvergieren für jeden Wert von $\operatorname{tang}^2 x$ resp. $\cot^2 x < 1$. Sie sind gerade noch konvergent für einen Wert $= +1$ (§ 53), sie divergieren aber für Werte > 1.

XIV. Kapitel.

Die Berechnung der Zahl π.

§ 85. Berechnung von π aus der Reihe für arc sin x.

1. Setzen wir in der Reihe für arc. sin x für x z. B. den Wert $\frac{\pi}{6}$, so erhalten wir die Reihe

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} + \ldots \left(\sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right).$$

2. Ebenso erhalten wir für $x = \frac{\pi}{4}$, $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{5} + \ldots \text{ oder}$$

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots\right)\sqrt{2}$$

3. Auf die gleiche Art können wir noch beliebig viele Reihen für π ableiten.

§ 86. Berechnung von π aus der Reihe für arc tang x. Die Leibnizsche Reihe.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots$$

1. Wird ebenso in der Reihe für arc tang x für x der Wert $\frac{\pi}{2}$ gesetzt, so erhält man die Leibnizsche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Ebenso findet man z. B. für $x = \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{tang} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3\sqrt{3}} + \ldots$$

oder:

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots\right)$$

2. Alle die so erhaltenen Reihen sind aber für die Berechnung der Zahl π wenig geeignet, da sie zu langsam konvergieren. So müßte man z. B. jedenfalls mehr als 200 Glieder der Leibnizschen Reihe in

Rechnung ziehen, um auch nur $\frac{\pi}{4}$ bis zur fünften Decimalstelle genau zu erhalten. Um eine rascher konvergierende Reihe zu erhalten, setzt man

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta)=\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}=1, \text{ also:}$$

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}{1-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}=1.$$

Diese Gleichung ist befriedigt durch $\operatorname{tang}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tang}\beta=\frac{1}{3}$ und man erhält daraus:

$$\frac{\pi}{4}=\alpha+\beta=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right)-\cdots$$

§ 87. Weitere Formeln für π.[1]

1. Setzen wir

$$i=\left(\frac{1+qi}{1-qi}\right)^2=\frac{1+2qi-q^2}{1-2qi-q^2},$$

so erhalten wir zur Bestimmung von q die Gleichung

$$1+2qi-q^2=i+2q-q^2 i \text{ oder}$$
$$(1-i)(1-2q-q^2)=0, \text{ oder } q=\sqrt{2}-1.$$

Es ist also:

$$l\,i=l\left(\frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{1-(\sqrt{2}-1)i}\right)^2 \text{ oder } =2\,l\,.\,\frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{1-(\sqrt{2}-1)i}.$$

Wie wir aber sahen, ist $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2i}\,l\,i$, § 82; also ist auch

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{i}\,l\,\frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{1-(\sqrt{2}-1)i} \text{ oder}$$

$$\frac{\pi}{4}=(\sqrt{2}-1)-\frac{(\sqrt{2}-1)^3}{3}+\frac{(\sqrt{2}-1)^5}{5}-\cdots$$

[1] Vergl. hierzu: Stern, Alg. Analysis.

2. Ist ebenso $i=\left(\frac{1+qi}{1-qi}\right)^{\frac{3}{2}}$, so erhalten wir $-1 =\left(\frac{1+qi}{1-qi}\right)^{3}$ und hieraus wie oben $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$ und hieraus wieder, da

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2i}l\left(\frac{1+qi}{1-qi}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{4i}l\frac{1+qi}{1-qi} \text{ ist:}$$

$$\frac{\pi}{2}=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3(\sqrt{3})^3}+\frac{1}{5(\sqrt{3})^5}-\frac{1}{7(\sqrt{3})^7}+\ldots \text{ oder:}\right.$$

$$\frac{\pi}{2}=\sqrt{3}\,(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}$$
$$+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^4}-\ldots)$$

3. Weiter haben wir

$$i=\frac{1+i}{1-i}=\left(\frac{1+\frac{1}{2}i}{1-\frac{1}{2}i}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{3}i}{1-\frac{1}{3}i}\right), \text{ also nach § 82}$$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2i}li=\frac{1}{2i}l.\frac{1+\frac{1}{2}i}{1-\frac{1}{2}i}+\frac{1}{2i}l\frac{1+\frac{1}{3}i}{1-\frac{1}{3}i}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right)+\ldots$$

(vergl. § 86)

4. Ebenso ist

$$i=\frac{1+i}{1-i}=\frac{\left(1+\frac{1}{5}i\right)^4}{\left(1-\frac{1}{5}i\right)^4}\cdot\frac{1+qi}{1-qi}$$

und wir erhalten $q=-\frac{1}{239}$ und hieraus

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2i}l\frac{1+i}{1-i}=\frac{4}{2i}l\frac{1+\frac{1}{5}i}{1-\frac{1}{5}i}+\frac{1}{2i}l.\frac{1-\frac{1}{239}i}{1+\frac{1}{239}i}$$

oder

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\cdots\right)$$
$$-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{239^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{239^7}+\cdots\right)$$

Die letzteren Reihen lassen sich auch direkt aus der Reihe für arc tang ableiten.

5. Wie wir weiter sahen (§ 84), ist

$$\text{arc tang } v=\frac{1}{2i}l.\frac{1+iv}{1-iv}, \text{ ebenso}$$

$$\text{arc tang } u=\frac{1}{2i}l.\frac{1+iu}{1-iu}, \text{ also:}$$

$$\text{arc tang } u+\text{arc tang } v=\frac{1}{2i}l\frac{1+vi}{1-vi}+\frac{1}{2i}l\frac{1+ui}{1-ui}$$
$$=\frac{1}{2i}l\left(\frac{1+vi}{1-vi}\right)\left(\frac{1+ui}{1-ui}\right)$$
$$=\frac{1}{2i}l\frac{1+\frac{v+u}{1-vu}.i}{1-\frac{v+u}{1-uv}.i}.$$

Hieraus erhalten wir aber umgekehrt

$$\text{arc tang } u+\text{arc tang } v=\text{arc tang}\frac{u+v}{1-uv}.$$

Setzen wir hier z. B. $u=\frac{1}{5}$, $v=\frac{1}{8}$, so ist:

$$\text{arc tang}\frac{1}{5}+\text{arc tang}\frac{1}{8}=\text{arc tang}\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}}=\text{arc tang}\frac{1}{3}.$$

Ebenso wird für $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{3}$

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tang} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}$$

$$= \operatorname{arc\,tang} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Hieraus folgt durch Addition

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}, \text{ oder}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \ldots \\ + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} + \ldots \\ + \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8^7} + \ldots \end{aligned}$$

Anmerkung. Es ist

$$\pi = 3{,}141592\ 653589\ 793238\ 462643\ \ldots$$

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318309\ 886183\ \ldots$$

$$\log \pi = 0{,}497149\ 872694\ \ldots$$

Näherungsweise ist π:

$$\frac{3}{1},\quad \frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113},\quad \frac{103993}{33102}.$$

Hiervon fand Archimedes den Wert $\frac{22}{7}$ und der holl. Landmesser Metius den Wert $\frac{355}{113}$. Ludolf van Ceulen († 1610) berechnete die ersten 35 Stellen von π; später wurde π auf mehrere hundert Stellen genau bestimmt, so von Vega auf 140, Dahse 200 und Richter in Elbing auf 500 Stellen.

Eine wichtige Errungenschaft der neuern Mathematik ist jedoch der strenge Nachweis davon, daß π durch keine geometrische Konstruktion mittels Lineal und Zirkel dargestellt werden kann, eine Quadratur des Kreises mit diesen Mitteln also unmöglich ist. Dass π kein rationaler Bruch ist, geht z. B. aus dem Kettenbruch hervor, den Lord Brounker gefunden hat, nämlich aus

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \dots}}}}}$$

Ebenso kann π keine Quadratwurzel sein, denn es kann z. B. gezeigt werden, daß

$$2 = \cfrac{\pi^2}{6 - \cfrac{\pi^2}{10 - \cfrac{\pi^2}{14 - \dots}}}$$

ist. Wäre hier π^2 rational, so müßte der Bruch irrational sein, könnte also nicht den Wert 2 haben. Weiter können wir uns jedoch hier mit diesem nicht beschäftigen.

XV. Kapitel.

Unendliche Produkte.

§ 88. Konvergenz und Divergenz derselben.

1. Wie eine Reihe aus unendlich vielen Summanden besteht und dennoch einen endlichen Wert haben kann, so kann auch der Wert eines Produktes von unendlich vielen Faktoren endlich sein. Der Wert dieses Produktes selbst ist wesentlich abhängig von der Beschaffenheit dieser Faktoren.

2. Sind die Faktoren von einem bestimmten ab alle um einen angebbaren Wert α größer als Eins, so ist das Produkt notwendig divergent, in dem wir dann für den Rest der Faktoren $(1 + \alpha)^n$ setzen können, der

für $n = \infty$ ebenfalls unendlich wird; also ist der Wert des Produkts um so mehr unendlich.

3. Ist umgekehrt von einem bestimmten ab jeder Faktor $< 1 - \alpha$, wo α eine angebbare von Null verschiedene Größe ist, so ist $(1 - \alpha)^n = 0$, also auch der Wert des Produktes gleich Null.

4. Soll demnach ein Produkt von unendlich vielen Faktoren oder ein unendliches Produkt einen endlichen Wert haben, so müssen die Faktoren des Produkts sich notwendig der Einheit unbegrenzt nähern. Wir können also jeden Faktor des Bruches durch $1 + k$ ausdrücken und erhalten also für das unendliche Produkt selbst die Form:

$$P = (1 + k_1)(1 + k_2)(1 + k_3)(1 + k_4) \ldots,$$

wobei notwendig $\lim k = 0$ ist.

5. Entwickeln wir, so erhalten wir, wenn alle k positiv sind:

$$(1 + k_1)(1 + k_2) = 1 + k_1 + k_2 + k_1 k_2, \text{ oder}$$

$$(1 + k_1)(1 + k_2) > 1 + k_1 + k_2.$$

Ebenso

$$(1 + k_1)(1 + k_2)(1 + k_3) > (1 + k_1 + k_2)(1 + k_3)$$
$$> 1 + k_1 + k_2 + k_3,$$

$$(1 + k_1)(1 + k_2)(1 + k_3)(1 + k_4) > (1 + k_1 + k_2 + k_3)(1 + k_4)$$
$$> 1 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4$$

und allgemein

$$P > 1 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + \ldots$$

Divergiert also die Reihe der k, $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$, so divergiert also auch notwendig das Produkt selbst.

Ein solches divergentes Produkt ist z. B.

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right) + \ldots$$

6. Weiter haben wir für eine bestimmte Anzahl von Gliedern

$C^1(k_r, k_{r+1} \ldots k_s) = k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + \ldots k_s,$
$C^2(k_r, k_{r+1}, k_{r+2} \ldots k_s) < (k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + \ldots k_s)^2,$
$C^3(k_r, k_{r+1} \ldots k_s) < (k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + \ldots k_s)^3$ u. s. w.

Konvergiert aber die obige Reihe der k, so können wir für r einen endlichen Wert immer so wählen, daß $\lim (k_r + k_{r+1} + \ldots .) < 1$ ist. Dann haben wir aber für den Rest der Faktoren des Produktes

$$P_r = (1+k_r)(1+k_{r+1})(1+k_{r+2}) \ldots < 1 + (k_r + k_{r+1} + k_{r+2} \ldots)^1 + (k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + \ldots)^2 + (k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + \ldots)^3 + \ldots$$

Letzere Reihe ist aber eine geometrische Reihe, deren Quotient kleiner als Eins ist, d. h. dieselbe hat stets einen endlichen Wert. Dann hat auch P_r einen endlichen Wert und somit das Produkt selbst.

Sind also alle k positiv, so konvergiert das Produkt, wenn die Reihe der k, $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$, konvergiert. Das gleiche gilt, wenn die k erst von einem bestimmten endlichen ab alle positiv sind.

7. Sind alle k negativ, so kann das Produkt nur einen Wert haben, der zwischen Eins und Null liegt. Es ist aber dann wie oben

$$\lim (k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + \ldots) = w, \quad w < 1.$$

Weiter finden wir wie oben

$$(1-k_1)(1-k_2) = 1 - (k_1 + k_2) + k_1 k_2 > 1 - (k_1 + k_2)$$

und allgemein

$$(1-k_1)(1-k_2)(1-k_3) \ldots > 1 - (k_1 + k_2 + k_3 + \ldots),$$

also auch

$$(1-k_r)(1-k_{r+1})(1-k_{r+2}) \ldots > 1 - (k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + \ldots)$$
$$\text{oder} > 1 - w.$$

Der Rest der Faktoren gibt also ein Produkt, das größer als 1 — w ist, und das Produkt hat also einen endlichen Wert.

Konvergiert also die Reihe der k, so konvergiert auch das Produkt; divergiert dagegen die Reihe der k, so hat das Produkt notwendig den Wert Null.

Sind die k erst von einem bestimmten ab alle negativ, so scheiden wir die Faktoren bis zu diesem bestimmten aus dem Produkt aus.

Eine konvergentes Produkt ist z. B.

$$\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdots=\frac{8}{9}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{80}{81}\cdots$$

8. Sind die Faktoren teils positiv, teils negativ, so ist eine besondere Untersuchung in jedem einzelnen Falle nötig.[1]

§ 89. Unendliches Produkt für cos x.

$$\cos x=\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

1. In § 79 fanden wir für ganze n für $\cos n x$ die Reihe:

$$\cos n x=\cos^n x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x.\sin^2 x+\binom{n}{4}\cos^{n-4}x.\sin^4 x-..$$

Sei zunächst n gerade, so können wir in dieser Reihe für $\cos^2 x$ den Wert $1-\sin^2 x$ setzen und erhalten dadurch eine Reihe

$$\cos n x=A_0+A_1\sin^2 x+A_2\sin^4 x+\ldots+A_{\frac{n}{2}}.\sin^n x$$

---

[1] Notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz eines Produktes ist, daß

$$(1+k_n)(1+k_{n+1})\cdots(1+k_{n+r})$$

bei passender Wahl von n für jedes beliebige r dem Werte Eins beliebig nahe kommen muß, also den Wert des Produkts der vorangehenden Faktoren nicht mehr wesentlich ändern kann. Vergl. Encykl. der math. Wissensch., B. 1, S. 113.

$$= A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots + A_{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}},$$

wo $\sin^2 x = y$ ist. Nun wird aber die linke Seite dieses Ausdrucks für x gleich einem der Werte

$$\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \ldots \frac{2n-1}{2n}\pi$$

zu Null, es sind also die Werte

$$\sin^2\frac{\pi}{2n}, \sin^2\frac{3\pi}{2n}, \sin^2\frac{5\pi}{2n}, \ldots \sin^2\frac{2n-1}{2n}$$

Wurzeln der Gleichung

$$A_0 + A_1 y + \ldots A_{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}} = 0.$$

Wie wir aber unten (§ 94) sehen werden, können wir dann die letztere Gleichung in das folgende Produkt

$$A\left(y - \sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\left(y - \sin^2\frac{3\pi}{2n}\right)\ldots\left(y - \sin^2\frac{2n-1}{2n}\pi\right)$$

oder auch in das Produkt

$$B\left(1 - \frac{y}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1 - \frac{y}{\sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right)\left(1 - \frac{y}{\sin^2\frac{5\pi}{2n}}\right)\cdots$$
$$\cdot\left(1 - \frac{y}{\sin^2\frac{2n-1}{n}\pi}\right)$$

zerlegen. Da $\cos nx$ für $x=0$ den Wert 1 annimmt, erhalten wir hieraus aber, wenn wir $y = \sin^2 x$ setzen:

$$\cos nx = \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{5\pi}{2n}}\right)\cdots$$
$$\cdot\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2n-1}{2n}\pi}\right).$$

2. Setzen wir in der letzteren Gleichung für x den Wert $\frac{x}{n}$, so geht dieser Wert über in:

$$\cos x = \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{2n-1}{2n}\pi}\right).$$

Lassen wir jetzt n unendlich groß werden, so dürfen wir für $\sin\frac{x}{n}$ den Wert $\frac{x}{n}$ und ebenso für $\sin\frac{a\pi}{2n}$ den Wert $\frac{a\pi}{2n}$ setzen und erhalten:

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

d. h. ein Produkt, das für jeden Wert von x konvergent ist.

3. Ist n nicht gerade, so erhalten wir dasselbe Produkt, wenn wir ausgehen von der Gleichung

$$\cos n x = \cos x\,(A_0 + A_1 \sin_2 x + A_2 \sin^4 + \ldots).$$

In dieser wird, wenn anstatt x der Wert $\frac{x}{n}$ gesetzt wird, $\cos x = \cos 0 = 1$. Im übrigen bleibt der Gang der Ableitung derselbe.

§ 90. Unendliches Produkt für sin x.

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots$$

Wir fanden in § 79 ebenso für sin n x den Wert:

$$\sin n x = \binom{n}{1}.\cos^{n-1} x.\sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3} x \sin^3 x + \ldots$$

Ist hier n ungerade, so erhalten wir für sin x, dadurch daß wir für $\cos^2 x$ wieder $1-\sin^2 x$ setzen:

$$\sin x n = A_1 \sin x + A_2 \sin^3 x + A_3 \sin^5 x + \ldots + A_{\frac{n+1}{2}} \sin^n x,$$

oder: $$= \sin x (A_1 + A_2 \sin^2 x + A_3 \sin^4 x + \ldots A_{\frac{n+1}{2}} \sin^{n-1} x).$$

Hier wird die linke Seite der Gleichung wieder Null für die Werte $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n} \ldots \frac{(n-1)\pi}{n}$, und wir erhalten wie oben

$$\sin n x = A \sin x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{n}}\right) \ldots$$
$$\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{n-1}{n}\pi}\right).$$

Für $x = 0$ wird $\frac{\sin n x}{\sin x} = A = n.$

Setzen wir auch hier für x den Wert $\frac{x}{n}$, so erhalten wir das obige Produkt für sin x.

§ 91. **Unendliche Produkte für π, $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.**

1. Setzen wir in dem Produkt für sin x für x den Wert $\frac{\pi}{2}$, so erhalten wir

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right) \ldots$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \ldots$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \ldots, \text{ oder:}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \ldots}$$ (**Wallissches Produkt**).

2. Setzen wir ebenso $x=\frac{\pi}{4}$, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{2^2\,.\,4}\right)\left(1-\frac{1}{4^2\,.\,4}\right)\left(1-\frac{1}{6^2\,.\,4}\right)\cdots$$

und hieraus:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4\,.\,4\,.\,8\,.\,8\,.\,12\,.\,12\ldots}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13\ldots}$$

3. Gleicherweise finden wir für $x=\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, oder:

$$\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{2^2\,.\,3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2\,.\,3^2}\right)1-\frac{1}{6^2\,.\,3^2}\right)\ldots,\text{ oder:}$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{6\,.\,6\,.\,12\,.\,12\,.\,18\,.\,18\ldots}{5\,.\,7\,.\,11\,.\,13\,.\,17\,.\,19\ldots}$$

4. Aus den Formeln in 1 und 2 erhalten wir noch

$$\sqrt{2}=\frac{2\,.\,2\,.\,6\,.\,6\,.\,10\,.\,10\ldots}{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\ldots}$$

5. Ebenso können wir auch aus dem Produkt für $\cos x$ solche unendliche Produkte aufstellen; so erhalten wir z. B. für $x=\frac{\pi}{6}$:

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sqrt{3}=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2\,.\,3^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2\,.\,5^2}\right)\cdots$$

oder

$$\sqrt{3}=\frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,8\,.\,10\,.\,14\,.\,16\ldots}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,9\,.\,9\,.\,15\,.\,15\ldots}$$

§ 92. Verwandlung einer unendlichen Reihe in ein unendliches Produkt.

1. Es ist:

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots$$
$$=\frac{u_0}{1}\cdot\frac{u_0+u_1}{u_0}\cdot\frac{u_0+u_1+u_2}{u_0+u_1}\cdot\frac{u_0+u_1+u_2+u_3}{u_0+u_1+u_2}\cdots$$

$$=\frac{u_0}{1}\left(1+\frac{u_1}{u_0}\right)\left(1+\frac{u_2}{u_0+u_1}\right)\left(1+\frac{u_3}{u_0+u_1+u_2}\right)\cdots$$

2. Beispiel. Es ist (vergl. § 59)

$$1=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1.3}\right)\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{3.5}\right)\left(1+\frac{1}{4.6}\right)\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{25}{24}\cdots;\text{ oder}$$

$$\frac{1}{2}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdots$$

§ 93. Verwandlung eines unendlichen Produkts in eine unendliche Reihe.

1. Wir haben ebenso:

$$v_0 . v_1 . v_2 . v_3 . v_4 \ldots$$
$$= v_0 + v_0(v_1-1) + v_0 v_1 (v_2-1) + v_0 v_1 v_2 (v_3-1) + \ldots$$

2. Beispiel. Aus § 91, 2 finden wir

$$\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\left(1-\frac{1}{81}\right)\cdots$$

Hieraus folgt so z. B.

$$\frac{\pi}{4}=\frac{8}{9}-\frac{8}{9.25}-\frac{8.24}{9.25}\cdot\frac{1}{49}-\frac{8.24.48}{9.25.49}\cdot\frac{1}{81}-\cdots$$

3. Notwendig ist jedoch auch hier wie in § 92, daß die Operationen innerhalb des Konvergenzbereichs sich vollziehen.

V. Abschnitt.

Gleichungen.

XVI. Kapitel

Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten.

§ 94. Die ganze algebraische Funktion als Gleichung.

1. Ist irgend eine ganze algebraische Funktion

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

gegeben und setzen wir dieselbe gleich Null, so stellt dieselbe eine Gleichung des n ten Grades dar:

$$a^0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

2. In einer solchen Gleichung dürfen wir a_0 stets gleich Eins setzen; denn wäre a_0 nicht gleich Eins, so hätten wir nur die Gleichungen mit a_0 dnrchzudividieren, um dies zu erhalten.

3. Jede Größe x, die, für x in die Gleichung eingesetzt, dieselbe befriedigt, heißt eine Wurzel der Gleichung.

4. Multiplizieren wir die Binome $(x - x_1)$, $(x - x_2)$.. $(x - x_n)$ miteinander und bezeichnen wir die Summe der p ten Kombinationen der Werte x_1, x_2 .. x_n durch a_p, so erhalten wir als Wert des Produktes

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \ldots + a_n.$$

Setzen wir in dieser Gleichung irgend einen Wert x_1, x_2 . . . oder x_n für x, so verschwindet die linke Seite der Gleichung und also auch die rechte Seite derselben. Die Werte $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ sind also die Wurzeln der Gleichung

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \ldots \pm a_n = 0.$$

5. Ist umgekehrt x_1 eine Wurzel einer beliebigen Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots = 0$, so ist $x - x_1$ stets ein Faktor der linken Seite dieser Gleichung.

Ziehen wir nämlich von der ursprünglichen Gleichung den Wert

$$x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} + \ldots = 0$$

ab, so erhalten wir die neue Gleichung

$$(x^n - x_1^n) + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - x_1^{n-2}) + \ldots = 0.$$

In dieser Gleichung ist aber $x - x_1$ in jedem einzelnen Gliede enthalten.

6. Ist irgend eine Wurzel x_1 bekannt, so kann die Gleichung des $n$ten Grades durch Division mit $x - x_1$ auf eine des $(n-1)$ten Grades reduziert werden.

7. Die Aufgabe, eine algebraische Gleichung zu lösen, ist also die, solche Faktoren $x - x_1$, $x - x_2$ ... zu finden, welche ohne Rest in der linken Seite derselben enthalten sind.

§ 95. Die Gleichung durch Potenzen von $(x - \alpha)$ ausgedrückt.

1. Soll irgend eine ganze Funktion des $n$ten Grades, etwa die Funktion $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ durch einen Faktor $(x - \alpha)$, hier etwa $(x - 3)$ dividiert werden, so erhält man durch Ausführung der Division das folgende Resultat (vergl. hierzu Sammlung Göschen, Algebra, § 10).

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-2x^3+3x^2-4x+5 & \quad x-3 \\
\underline{x^4-3x^3} & x^3+x^2+6x+14 \\
\quad +x^3+3x^2 & \\
\quad \underline{+x^3-3x^2} & \\
\qquad +6x^2-\ \ 4x & \\
\qquad \underline{+6x^2-18x} & \\
\qquad\qquad +14x+\ \ 5 & \\
\qquad\qquad \underline{+14x-42} & \\
\qquad\qquad\qquad +47. &
\end{array}
$$

Dieses Verfahren kann bedeutend vereinfacht werden wie folgt:

$$
\begin{array}{ccccc}
x^4 & -2x^3 & +3x^2 & -4x & +5 : x-3, \\
\underline{1} & \underline{+3} & \underline{+3} & \underline{+18} & \underline{+42} \\
1 & +1 & +6 & +14 & +47.
\end{array}
$$

Wir schreiben zuerst $\frac{1}{1}$, alsdann multiplizieren wir den Nenner 1 mit $+3$ und erhalten den Zähler 3 des zweiten Bruchs. Dieser zu dem darüber geschriebenen Koeffizienten addiert gibt den Nenner des zweiten Bruchs, der wieder 1 ist. Dieser wieder mit 3 multipliziert liefert den Zähler des dritten Bruches, der um den über ihm stehenden Koeffizienten $+3$ vergrößert den Nenner des Bruches gibt u. s. w.

Die Nenner der Brüche sind dann die Koeffizienten des Quotienten, der letzte der Rest, den die Division ergibt. Es ist hierbei nichts anderes geschehen, als in obiger Ableitung alles Entbehrliche weggelassen worden.

Wir haben daraus erhalten:

$$y = x^4-2x^3+3x^2-4x+5 = (x-3)(x^3+x^2+6x+14)+47.$$

2. Den Ausdruck $x^3+x^2+6x+14$ können wir wieder durch $x-3$ dividieren und erhalten dann für die Funktion y einen Ausdruck

$$y=(x^2+ax+b)(x-3)^2+R_2(x-3)+47.$$

Hierauf folgt ebenso wieder:

$$y=(x+a_1)(x-3)^3+R_3(x-3)^2+R_2(x-3)+R_1\ (R_1=47)$$

und endlich:

$$y=(x-3)^4+R_4(x-3)^3+R_3(x-3)^2+R_2(x-3)+R_1.$$

3. Wenden wir das obige Verfahren auf diese Divisionen an, so erhalten wir das Schema:

$$y=x^4-2x^3+3x^2-4x+5, \quad x-3,$$

$$\begin{array}{llllll}
\frac{1}{1} & \frac{3}{1} & \frac{3}{6} & \frac{18}{14} & \frac{42}{47} & R_1=47, \\[1ex]
\frac{1}{1} & \frac{3}{4} & \frac{12}{18} & \frac{54}{68} & R_2=68, & \\[1ex]
\frac{1}{1} & \frac{3}{7} & \frac{21}{39} & R_3=39, & & \\[1ex]
\frac{1}{1} & \frac{3}{10} & R_4=10, & & & \\[1ex]
\frac{1}{1} & R_5=1. & & & &
\end{array}$$

Es ist also:

$$y=(x-3)^4+10(x-3)^3+39(x-3)^2+68(x-3)+47.$$

§ 96. **Die Gleichung als stetige Funktion.**

Setzen wir in der Gleichung $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ anstatt x einen Wert $x+d$, wobei d sehr klein ist, so wird auch der Wert von y sich nur um eine kleine Größe Δy verändern. Lassen wir namentlich x stetig wachsen bis zum Werte $x+d$, so wird auch y stetig wachsen bis zum Werte $y+\Delta y$. Dieses Wachstum wird also nie sprungweise stattfinden, sondern es wird ein allmähliches sein. Stellen wir die Funktion aber auf die in § 46 angegebene Art durch eine Kurve dar, so wird zu jedem Wert von x *nur ein Wert* von y *gehören* und die Funktion selbst wird durch einen fortlaufenden Kurvenzug zum Ausdruck kommen. Nimmt nun die Funktion für die Argumente x_1 und x_2 verschiedene Vorzeichen an, so kann dies nur dadurch möglich werden, daß der Kurvenzug zwischen den Strecken x_1 und x_2 die xAxe schneidet. Diesem Schnittpunkt entspricht aber ein Argument x_0, das die Funktion zu Null macht, also eine Wurzel der Gleichung $y=0$ ist. Nimmt also für zwei Werte x_1 und x_2 die Funktion verschiedene Vorzeichen an, so hat die gleich Null gesetzte Funktion eine Wurzel x_0, die zwischen x_1 und x_2 liegt.

So wird z. B. die Funktion x^3+2x^2+5x-8 für $x_1=0$ gleich -8 und für $x_2=2$ gleich 18, also liegt eine Wurzel der Gleichung $x^3+2x^2+5x-8=0$ zwischen 0 und 2. Es ist dies die Wurzel $x=1$.

§ 97. Funktionswerte mit positivem Vorzeichen.

1. Ist unter allen Koeffizienten der größte absolut genommen gleich p, so ist:

$$(p+1)^n > p\left((p+1)^{n-1}+(p+1)^{n-2}+\ldots+1\right), \text{ d. h.:}$$
$$>(p+1)^n-1.$$

Hieraus folgt aber, daß, selbst wenn alle übrigen Koeffizienten negativ und gleich p wären, für $x=(p+1)$ der Wert der Funktion

$$(p+1)^n+a_1(p+1)^{n-1}+a_2(p+1)^{n-2}+\ldots$$

positiv wird. x kann also in jeder Gleichung so groß gewählt werden, daß die Gleichung als Funktion angesehen einen positiven Wert der letzteren ergibt.

Wird x noch größer als $(p+1)$ gewählt, so ist der Wert der Funktion um so mehr positiv. *Es kann also keine positive Wurzel einer algebraischen Gleichung größer als der größte um Eins vermehrte Koeffizient derselben, dieser absolut genommen, sein.*

2. Hat man ferner auf irgend welche Art die Gleichung auf die Form

$$(x-\alpha)^n + R_n (x-\alpha)^{n-1} + R_{n-1} (x-\alpha)^{n-2} + \ldots$$
$$+ R_2 (x-\alpha) + R_1 = 0$$

gebracht und sind sämtliche Werte R positive Größen, so wird für $x=\alpha$ oder $x>\alpha$ der Wert der Funktion ebenfalls positiv, und wir finden, daß α *gleichfalls eine obere Grenze für die positiven Wurzeln der Gleichung ist.*

3. Ist insbesondere die Funktion von geradem Grade, so wird auch für ein negatives $x=(p+1)$ oder $x>p+1$ der Funktionswert positiv, und es ist also für *Gleichungen von geradem Grade der größte, absolut genommene, um Eins vermehrte Koeffizient derselben auch eine untere Grenze für die Wurzeln der Gleichung.*

§ 98. Funktionswerte mit negativem Vorzeichen.

1. Ist eine Gleichung von ungerader Ordnung, so können wir das eine Mal $x=+(p+1)$, das andere Mal $x=-(p+1)$ setzen und erhalten das erste Mal einen positiven, das zweite Mal einen negativen Wert der Funktion. *Jede Gleichung von ungerader Ordnung hat also mindestens eine reelle Wurzel zwischen $-(p+1)$ und $+(p+1)$.*

2. Ist ebenso eine Gleichung von gerader Ordnung mit negativem Absolutglied gegeben, so erhalten wir für $x=0$ einen negativen und für $x=\pm(p+1)$ positive Werte der Funktion. Jede Gleichung von geradem Grade mit negativem Absolutglied hat also wenigstens zwei reelle Wurzeln, von denen die eine zwischen $-(p+1)$ und 0, die andere zwischen 0 und $+(p+1)$ liegt.

§ 99. Komplexe Wurzeln einer Gleichung.

1. Ist irgend eine Gleichung in x von ungerader Ordnung gegeben und dividieren wir diese Gleichung durch $x-\alpha$, wo α die in § 97, 1 erwähnte Wurzel ist, so ergibt sich (§ 94) eine Gleichung vom Grade (n—1), also von gerader Ordnung. Hat eine Gleichung von gerader Ordnung ferner ein negatives Absolutglied, so folgt aus § 98, 2 ebenso, daß durch Division aus derselben eine Gleichung vom Grade $n-2$ gebildet werden kann. In beiden Fällen werden wir also den Grad der Gleichung verkleinern können, bis wir auf eine Gleichung gerader Ordnung mit positivem Absolutglied kommen.

2. Ist eine solche Gleichung gegeben, so muß keine Wurzel dieser Gleichung reell sein, es können vielmehr einzelne oder alle Wurzeln dieser Gleichung imaginär sein. Durch Einführung von $x=\alpha+\beta i$ geht dann die Gleichung in die Form $A+Bi=0$ über. Setzen wir hier $A=0$ und $B=0$, so kann gezeigt werden, daß diese Gleichungen immer durch reelle Werte α und β befriedigt werden können. Es gibt aber keinen ein-

fachen Beweis hierfür, und wir müssen deshalb uns begnügen, darauf hinzuweisen.[1]

3. Die Richtigkeit dieses Satzes vorausgesetzt, können wir aber behaupten, daß **jede Gleichung des nten Grades auch n Wurzeln haben muß.** Ist α nämlich eine Wurzel der Gleichung, und eine solche muß, wie wir sahen, jede Gleichung haben, so können wir durch Division mit $x - \alpha$ die Gleichung auf eine vom Grade $(n - 1)$ zurückführen. Aus dieser folgt eine vom Grade $n - 2$, hieraus eine solche vom Grade $n - 3$ u. s. f.; d. h. wir finden, daß die Anzahl der Wurzeln gleich n ist. Die Anzahl dieser Wurzeln kann aber auch nicht grösser als n sein. Ist sie grösser als n, so müssen alle Koeffizienten gleich Null sein.

4. Entwickeln wir nach dem binomischen Satz $(a \pm \beta i)$, so erhalten wir die Gleichungen

$$(\alpha + \beta i)^p = A + Bi \text{ und}$$
$$(\alpha - \beta i)^p = A - Bi.$$

Wenden wir dies auf alle Glieder einer Gleichung an, so haben wir für das Einsetzen von $x = \alpha + \beta i$ und $x = \alpha - \beta i$ die Funktionswerte

$$P + Qi \text{ und } P - Qi.$$

Ist aber $\alpha + \beta i$ eine Wurzel der Gleichung, so muß sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil von $P + Qi$ gleich Null sein, d. h., es ist $P = 0$ und $Q = 0$. Dann ist aber auch $P - Qi = 0$, und es ist somit auch $\alpha - \beta i$ eine Wurzel.

---

[1] Vgl. hierüber z. B. Lipschitz, Grundlagen der Analysis, S. 248—283.

Alle komplexen Wurzeln einer Gleichung **treten also paarweise unter der Form $\alpha + \beta i$ und $\alpha - \beta i$ auf. Ein solches Wurzelpaar heisst konjugiert.**

XVII. Kapitel.

Eigenschaften der Koeffizienten einer Gleichung.

§ 100. Die Koeffizienten als Kombinationen der Wurzeln.

1. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ die Wurzeln einer Gleichung, so erhalten wir die Gleichung als Produkt der Binome $(x - \alpha_1)$, $(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$ oder:

$$x^n - C^1(\alpha) x^{n-1} + C^2(\alpha) . x^{n-2} - C^3(\alpha) x^{n-3} + \ldots = 0,$$

wo $C^1(\alpha)$, $C^2(\alpha)$, $C^3(\alpha) \ldots$ die Kombinationen der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Klasse der Wurzeln sind.

2. Ist also

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a^n = 0$$

die gegebene Gleichung, so gelten die folgenden Beziehungen:

$$C^1(\alpha) = - a_1, \quad C^2(\alpha) = + a_2,$$
$$C^3(\alpha) = - a_3, \quad C^4(\alpha) = + a_4,$$
$$C^5(\alpha) = - a_5, \quad C^6(\alpha) = + a_6 \text{ u. s. w.}$$

3. So ist z. B. für die Gleichung des zweiten Grades

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = - a_1, \quad \alpha_1 \alpha_2 = a_2.$$

Ebenso ist für die Gleichung dritten Grades

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = - a_1,$$
$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = a_2,$$
$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = - a_3.$$

4. Insbesondere haben wir: Das Absolutglied ist gleich dem positiven Produkt der Wurzeln für Gleichungen von gerader Ordnung und gleich diesem negativen Produkt für Gleichungen ungerader Ordnung. Weiter ist der Koeffizient des zweiten Gliedes der Gleichung gleich der negativen Summe der Wurzeln.

§ 101. Summen von Potenzen der Wurzeln.

1. Bezeichnen wir die gleichen Potenzen der Wurzeln mit S_1, S_2 ..., also ist z. B.

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots \alpha_n,$$
$$S_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots \alpha_n^2,$$
$$S_3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \dots \alpha_n^3 \text{ u. s. w., so ist}$$
$$S_1 = -a_1 \text{ oder } S_1 + a_1 = 0.$$

Weiter finden wir unmittelbar:

$$a_1^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots \alpha_n)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots \alpha_n^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots)$$

oder

$$a_1^2 = S_2 + 2a_2 \text{ oder}$$
$$S_2 - a_1^2 + 2a_2 = 0, \text{ d. h.}$$
$$S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0.$$

Ganz ebenso finden wir weiter:

$$S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 0,$$
$$S_4 + a_1 S_3 + a_2 S_2 + a_3 S_1 + 4a_4 = 0,$$
$$S_5 + a_1 S_4 + a_2 S_3 + a_3 S_2 + a_5 S_1 + 5a_5 = 0 \text{ u. s. w.}$$

2. Umgekehrt erhalten wir aus diesen Gleichungen wieder, wenn wir für S_1, S_2, S_3 die Werte, die wir nacheinander in den Koeffizienten finden, einsetzen:

$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = -a_1,$
$S_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots + \alpha_n^2 = a_1^2 - 2a_2,$
$S_3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \ldots \alpha_n^3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 + 3a_3,$
$S_4 = \alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 + \ldots \alpha_n^4 = a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 4a_1a_3 + 2a_2^2$
$- 4a_4$ u. s. w.

3. Umgekehrt erhalten wir aus den letzteren Gleichungen wieder:

$$a_1 = -S_1,$$
$$a_2 = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2),$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}(S_1^3 + 2S_3 - 3S_1S_2) \text{ u. s. w.}$$

4. Diese, die Newtonschen Formeln genannten Beziehungen lassen sich mit Benützung von Determinanten auch wie folgt schreiben:

$$S_2 = +\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 2a_2 & a_1 \end{vmatrix} \text{ und } a_2 = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & S_1 \end{vmatrix}$$

$$S_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad a_3 = -\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$$

$$S_4 = +\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 4a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad a_4 = +\frac{1}{4!}\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$$

u. s. w.

§ 102. Weitere symmetrische Formeln zwischen den Wurzeln.

1. Aus $S_m = \alpha_1^m + \alpha_2^m + \ldots + \alpha_n^m$ und
$$S_p = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \ldots + \alpha_n^p$$

folgt durch Multiplikation unmittelbar:

$$S_m \,.\, S_p - S_{m+p} = \Sigma \alpha_1^m \alpha_2^p.$$

Ganz ebenso findet man

$$S_m \,.\, S_p \,.\, S_q - S_q \,.\, S_{m+p} - S_p \,.\, S_{m+q} - S_m \,.\, S_{p+q}$$
$$+ 2 S_{m+p+q} = \Sigma \alpha_1^m \alpha_2^p \alpha_3^q \text{ u. s. f.}$$

2. Es ist weiter, wie wir sahen:

$$-a_1 = \Sigma \alpha_1,$$
$$+a_2 = \Sigma \alpha_1 \alpha_2, \text{ somit}$$
$$a_1^2 = \Sigma \alpha_1^2 + 2 \Sigma \alpha_1 \alpha_2,$$
$$-a_3 = \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3,$$
$$-a_1 a_2 = \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 + 3 \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3,$$
$$-a_1^3 = \Sigma \alpha_1^3 + 3 \Sigma \alpha_1^2 \,.\, \alpha_2 + 6 \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \text{ u. s. w.}$$

Aus diesen Beziehungen erhalten wir jedoch durch Auflösung nach den symmetrischen Summen der Wurzeln außer den Formeln S_1, S_2, S_3 ... noch:

$$\Sigma \alpha_1^2 \;{}_2 = -a_1 a_2 + 3 a_3,$$
$$\Sigma \alpha_1^3 \alpha_2 = a_1^2 a_2 - 2 a_2^2 - a_1 a_3 + 4 a_4,$$
$$\Sigma \alpha_1^2 \alpha_2^2 = a_2^2 - 2 a_1 a_3 + 2 a_4,$$
$$\Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 = a_1 a_3 - 4 a_4,$$
$$\Sigma \alpha_1^4 \alpha_2 = -a_1^3 a_2 + 3 a_1 a_2^2 + a_1^2 a_3 - 5 a_2 a_3 - a_1 a_4 + 5 a_5,$$
$$\Sigma \alpha_1^3 \alpha_2^2 = -a_1 a_2^2 + 2 a_1^2 a_3 + a_2 a_3 - 5 a_1 a_4 + 5 a_5,$$
$$\Sigma \alpha_1^3 \alpha_2 \alpha_3 = -a_1^2 a_3 + 2 a_2 a_3 + a_1 a_4 - 5 a_5,$$
$$\Sigma \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3 = -a_2 a_3 + 3 a_1 a_4 - 5 a_5,$$
$$\Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = -a_1 a_4 + 5 a_5 \text{ u. s. w.}^{1}$$

§ 103. Symmetrische Funktionen der Wurzeldifferenzen.

1. Es ist

$$(x - \alpha)^m = x^m - \binom{m}{1} x^{m-1} \,.\, \alpha + \binom{m}{2} x^{m-2} \alpha^2 - \ldots$$

[1] Eine Tabelle solcher Relationen findet sich z. B. im Meyer-Hirsch, Aufgabensammlung I. Teil, und in Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transformation, S. 445.

Setzen wir hierin für α nacheinander die Werte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ und addieren, so folgt daraus aber:

$$\Sigma(x-\alpha_1)^m = S_0 x^m - \binom{m}{1} \cdot S_1 x^{m-1} + \binom{m}{2} S_2 x^{m-2} - \ldots$$

Und wenn in diesen Formeln wieder für x die Werte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gesetzt werden, durch Addition für gerade m, da $(\alpha_p - \alpha_q)^m = (\alpha_q - \alpha_p)^m$ ist:

$$2\,\Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)^m = S_0 S_m - \binom{m}{1} S_1 S_{m-1} + \binom{m}{2} S_2 S_{m-2} - \ldots,$$

oder da die Binomialkoeffizienten paarweise gleich und damit die Glieder dieser Summe rechts ebenfalls paarweise gleich werden:

$$\Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)^m = S_0 S_m - \binom{m}{1} S_1 S_{m-1} + \binom{m}{2} S_2 S_{m-2} - \ldots$$
$$\pm \frac{1}{2} \binom{m}{\frac{m}{2}} \cdot S^2_{\frac{m}{2}}.$$

So ist z. B.:

$$\Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)^4 = S_0 S_4 - 4 S_1 S_3 + 3 S_2^2,$$
$$\Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)^6 = S_0 S_6 - 6 S_1 S_5 + 15 S_2 S_4 - 10 S_3^2 \text{ etc.}$$

2. Ist m dagegen ungerade, so erhalten wir auf beiden Seiten den Wert Null, da die Glieder sich paarweise aufheben.

XVIII. Kapitel.

Auflösung der Gleichungen höhern Grades.

§ 104. Umformungen von Gleichungen.

1. Wird anstatt x in einer Gleichung $y+h$ gesetzt, so geht dieselbe in die folgende über:

$$(y+h)^n + a_1 (y+h)^{n-1} + a_2 (y+h)^{n-2} + \ldots = 0, \text{ oder:}$$

$$y^n + (nh + a_1)\, y^{n-1} + \left(\binom{n}{2} h^2 + \binom{n-1}{1} . h a_1 + a_2\right) . \, y^{n-2} + \ldots = 0.$$

Setzen wir in dieser letzteren Gleichung $h = -\frac{a_1}{n}$, so wird der Koeffizient der zweithöchsten Potenz von y gleich Null, und unsere Gleichung nimmt also die Form

$$y^n + b_2 y^{n-2} + b_3 y^{n-3} + \ldots + b_n = 0$$

an. Gleicherweise kann durch passende Wahl eines Wertes für h irgend ein anderer Koeffizient zum Verschwinden gebracht werden. Die so erhaltene Gleichung ist deshalb wichtig, weil von dieser Form ausgehend die Lösungen für die Gleichungen des dritten und vierten Grades sich am einfachsten ergeben.

2. Ersetzen wir ebenso x durch py, so erhalten wir eine Gleichung, deren Wurzeln pmal kleiner sind als die der ursprünglichen; nämlich

$$p^n y^n + a_1 p^{n-1} y^{n-1} + a_2 p^{n-2} y^{n-2} + \ldots = 0 \text{ oder}$$

$$y^n + a_1 \frac{y^{n-1}}{p} + a_2 . \frac{y^{n-2}}{p^2} + \ldots = 0.$$

3. Ganz ebenso finden wir für $x = \frac{y}{p}$ eine Gleichung, deren Wurzeln p mal größer sind als die der gegebenen:

$$y^n + a_1 p \cdot y^{n-1} + a_2 \cdot p^2 \cdot y^{n-2} + a_3 p^3 \cdot y^{n-3} + \ldots = 0.$$

4. Beispiel. Soll etwa in der Gleichung

$$x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 12 = 0$$

der Koeffizient des zweiten Gliedes zu Null gemacht werden, so haben wir für x den Wert $y - 2$ zu setzen und erhalten die neue Gleichung

$$y^4 - 21y^2 + 60y - 40 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind um 2 größer als die der alten.

§ 105. Auflösung der Gleichung vierten Grades.[1] Die Methode von Euler.

1. Die Auflösung der Gleichungen des vierten Grades kann auf die verschiedenste Weise dadurch erhalten werden, daß wir eine bestimmte Gleichung des dritten Grades ableiten, die von der ersteren abhängig ist, und deren Wurzeln mit denen der gegebenen Gleichung in gewissen Beziehungen stehen. Auf

[1] Die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades ist bereits in Sammlung Göschen Nr. 47, Algebra, behandelt und wir müssen auf dieses Bändchen verweisen. Desgleichen findet sich dort auch die Auflösung der reinen Gleichungen hohern Grades $x^n = 1$ durch die Moivresche Formel. Wir haben es deshalb auch unterlassen, auf die letztere Formel weiter, als wir mußten, bei der Theorie der Reihen einzugehen, und müssen also auch betreffs dieser auf das Bändchen Algebra der Sammlung verweisen.

diesem Verfahren beruhen auch die Auflösungen von Ampère und Euler. Beide gehen von der Gleichung $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ aus, in der also das Glied mit x^3 fehlt.

2. **Methode von Euler.** Es seien x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln der Gleichung.

Wir haben dann allemal die Relation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Setzen wir jetzt

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \alpha = -2\sqrt{y_1} \\ x_1 + x_3 &= \beta = -2\sqrt{y_2} \\ x_1 + x_4 &= \gamma = -2\sqrt{y_3} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.)}$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ &= (3x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1 + x_2)(x_1 + x_3) \\ &\quad - 2(x_1 + x_2)(x_1 + x_4) - 2(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) \\ &= (2x_1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4) \\ &\quad - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) - 4x_1^2. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach § 100

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = a,$$

und da

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$(2x_1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = 4x_1^2$$

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 = x_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0, \text{ also:}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2a.$$

Weiter ist:

$$\alpha\beta\gamma = (x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)$$
$$= x_1^2(x_1+x_2+x_3+x_4) + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4$$
$$+ x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$$

oder da

$$x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 = -b$$
$$\alpha\beta\gamma = -b.$$

Ebenso ist

$$\alpha\beta = x_1^2 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3$$
$$= x_1(x_1+x_2+x_3+x_4) + x_2x_3 - x_1x_4$$
$$= x_2x_3 - x_1x_4, \text{ und}$$

$$\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = (x_2x_3 - x_1x_4)^2 + (x_2x_4 - x_1x_3)^2$$
$+ (x_3x_4 - x_1x_2)^2$ oder nach einigen Umformungen
$$= (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)^2 - 4x_1x_2x_3x_4,$$
oder da

$$x_1x_2x_3x_4 = c \text{ ist},$$
$$\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = a^2 - 4c,$$

α^2, β^2 und γ^2 sind aber die Wurzeln der Gleichung
$$z^3 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)z^2 + (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)z - \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0,$$
oder der Gleichung
$$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0,$$
oder α, β, γ selbst sind die Wurzeln der Gleichung
$$u^6 + 2au^4 + (a^2 - 4c)u^2 - b^2 = 0.$$

Um an Stelle der Werte α, β, γ die Werte $2\sqrt{y_1}$, $2\sqrt{y_2}$, $2\sqrt{y_3}$ zu erhalten, haben wir nur noch $z = 4y$ zu setzen und erhalten nach Division mit 64 die Resolvente:

$$y^3 + \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{16}(a^2 - 4c)y - \frac{1}{64}b^2 = 0.$$

3. Die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind dann gegeben durch die obigen Gleichungen (I.), und es wird

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3} \\ x_2 &= -\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} \\ x_3 &= +\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} \\ x_4 &= +\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3} \end{aligned}\right\} \text{ für positive } b$$

und

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = +\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} \\ x_2 = +\sqrt{y_1} - \sqrt{x_2} - \sqrt{y_3} \\ x_3 = -\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3} \\ x_4 = -\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} \end{array}\right\} \text{für negative b.}$$

Die Vorzeichen von $\sqrt{y_1}$, $\sqrt{y_2}$, $\sqrt{y_3}$ sind dadurch bestimmt, daß $\sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2} \cdot \sqrt{y_3} = \frac{1}{8}\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{8}b$ sein muß.

4. Beispiel. $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$.

Die Resolvente wird $y^3 - \frac{25}{2}y^2 + \frac{769}{16}y - \frac{225}{4} = 0$.

Die Wurzeln dieser letztern Gleichung sind aber $\frac{9}{4}$, 4, $\frac{25}{4}$, also ist $\sqrt{y_1} = \frac{3}{2}$, $\sqrt{y_2} = 2$, $\sqrt{y_3} = \frac{5}{2}$ und die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung sind demnach 1, 2, 3 und — 6.

§ 106. Fortsetzung. Methode von Ampère.

1. Die Auflösung von Ampère ist der von Euler nahe verwandt.

Es sei

$$x_1 = \frac{z}{2} + \alpha, \quad x_2 = \frac{z}{2} - \alpha.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{z}{2} + \alpha\right)^4 + a\left(\frac{z}{2} + \alpha\right)^2 + b\left(\frac{z}{2} + \alpha\right) + c = 0 \text{ oder:}$$

$$\frac{z^4}{16} + \frac{z^3 \cdot \alpha}{2} + \frac{3\alpha^2}{2}z^2 + 2\alpha^3 z + \alpha^4 + a \cdot \frac{z^2}{4} + a\alpha z + a\alpha^2$$
$$+ b\frac{z}{2} + b\alpha + c = 0.$$

Ebenso ist für $x_2 = \frac{z}{2} - \alpha$

$$\frac{z^4}{16} - \frac{z^3 . \alpha}{2} + \frac{3\alpha^2 z^2}{2} - 2\alpha^3 z + \alpha^4 + \alpha\frac{z^2}{4} - a\alpha z + a\alpha^2$$
$$+ b\frac{z}{2} - b\alpha + c = 0.$$

Durch Subtraktion der letzten Gleichung von der vorletzten und Division mit 2α folgt aber:

$$\frac{z^3}{2} + 2\alpha^2 z + az + b = 0, \text{ also:}$$
$$\alpha^2 = -\frac{z^2}{4} - \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{z}\right), \text{ oder}$$
$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}\sqrt{-z^2 - 2\left(a + \frac{b}{z}\right)}.$$

2. Hierbei ist weiter $x_1 + x_2 = z$, also wenn $z = 2\sqrt{y_1}$, so ist $y_1 = \frac{z^2}{4}$. Setzen wir diesen Wert in die Eulersche Resolvente ein, so erhalten wir zur Bestimmung von z die Gleichung

$$z^6 + 2az^4 + (a^2 - 4c)z^2 - b^2 = 0.$$

3. Die übrigen Wurzeln der Gleichung sind dann:

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}\sqrt{-z^2 - 2\left(a + \frac{b}{z}\right)}.$$

4. Beispiel. $x^4 - 9 = 0$ gibt

$$z^6 + 36z^2 = 0,$$

somit $z^2 = 0$ oder $z^4 = -36$, $z = \sqrt[4]{-36}$,

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = +\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}z\sqrt{-1} = +\frac{1}{2}\sqrt[4]{36}\left(\sqrt[4]{-1} \mp \sqrt[4]{-1}\,.\,\sqrt{-1}\right)$$
$$= +\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sqrt[4]{-1} \mp \sqrt[4]{-1}\,.\,\sqrt{-1}\right).$$

Der Ausdruck in der Klammer ist aber, wie durch

Quadrieren sich sofort ergibt, $\sqrt{\mp 2}$, und wir erhalten also:

$$x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = -i\sqrt{3},\ x_3 = +\sqrt{3},\ x_4 = -i\sqrt{3}.$$

§ 107. Fortsetzung. Methode des Cartesius.

1. Auch diese Methode ist den obigen nahestehend. Gehen wir wieder von den Gleichungen $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ aus und setzen

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + xy + t)(x^2 - xy + z),$$

so erhalten wir durch Gleichsetzung der Koeffizienten

$$a = t + z - y^2, \quad \text{oder} \quad t + z = a + y^2,$$

$$b = y(z - t), \qquad z - t = \frac{b}{y},$$

$$c = tz, \qquad tz = c \text{ und hieraus:}$$

$$2z = a + y^2 + \frac{b}{y},$$

$$2t = a + y^2 - \frac{b}{y}, \text{ also:}$$

$$\left(a + y^2 + \frac{b}{y}\right)\left(a + y^2 - \frac{b}{y}\right) = 4c$$

oder wieder wie oben:

$$y^6 + 2ay^4 + (a^2 - 4c)y^2 - b^2 = 0.$$

Aus dem Werte für y finden wir weiter die Werte für t und z, und wir haben dann nur noch x aus den beiden quadratischen Gleichungen

$$x^2 + xy + t = 0$$
$$x^2 - xy + z = 0$$

zu bestimmen.

2. Beispiel. $x^4 - 7x^2 - 12x + 18 = 0.$

$$y^6 - 14y^4 - 23y^2 - 144 = 0,\ y = 4.$$

$$2z = -7 + 16 - \frac{12}{4},\ z = 3,$$

$$2t = -7 + 16 + \frac{12}{4}, \quad t = 6,$$

$$x^2 + 4x + 6 = 0, \quad x_1 \text{ und } x_2 = 2 \pm \sqrt{-2},$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x_3 \text{ und } x_4 = 2 \pm 1, \text{ also } = 3 \text{ und } = 1.$$

Anmerkung. Außer den angeführten drei Methoden, die reduzierte Gleichung des vierten Grades aufzulösen, gibt es noch eine ziemlich große Zahl anderer solcher Methoden. Wir müssen aber uns begnügen, dies erwähnt zu haben.

§ 108. Auflösung zweier quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten.[1]

1. Seien

$$a x^2 + (b y + c) x + (d y^2 + y + f_1) = 0,$$

$$a_1 x^2 + (b_1 y + c_1) x + (d_1 y^2 + e_1 y + f_1) = 0$$

zwei Gleichungen des zweiten Grades und denken wir uns dieselben abgekürzt geschrieben

$$A x^2 + B x + C = 0 \quad A_1 x^2 + B_1 x + C_1 = 0,$$

so erhalten wir daraus die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} A x^3 + B x^2 + C x \phantom{{}+C} &= 0, \\ A x^2 + B x + C &= 0, \\ A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x \phantom{{}+C_1} &= 0, \\ A_1 x^2 + B_1 x + C_1 &= 0. \end{aligned}$$

Sehen wir in diesen x^3, x^2 und x als Unbekannte an, so ist die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen dieser Gleichungen (vergl. § 31)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ 0 & A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 \\ 0 & A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0,$$

[1] Vergl. hierzu z. B Salmon-Fiedler, Algebra d. lin Transform

womit zugleich die Elimination von x aus obigen Gleichungen vollzogen ist.

2. Beispiel.

$$x^2 - 2xy + 3x + 2 = 0,$$
$$2xy - y^2 + x - y - 2 = 0$$

gibt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2y+3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2y+3 & 2 \\ 0 & 2y+1 & -(y^2+y+2) & 0 \\ 0 & 0 & 2y+1 & -(y^2+y+2) \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$3y^4 - 2y^3 - 12y^2 - 23y - 12 = 0.$$

§ 109. Aufsuchen von ganzzahligen Wurzeln algebraischer Gleichungen.

1. Sind die Koeffizienten einer Gleichung lauter ganze Zahlen, so kann die Gleichung keine Wurzel haben, die ein rationaler Bruch ist. Hierbei ist aber der Koeffizient von x^n gleich Eins vorausgesetzt.

Hätte nämlich eine Wurzel die Form $\frac{r}{s}$, so wäre

$$\frac{r^n}{s^n} + a_1\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{r}{s}\right)^{n-2} + \ldots = 0.$$

Durch Multiplikation mit s^{n-1} würde sich hieraus aber die Summe

$$\frac{r^n}{s} + a_1 . s . r^{n-1} + a_2 . s^2 . r^{n-2} + \ldots = 0$$

ergeben, und es wäre also ein Bruch und eine ganze Zahl zusammen gleich Null, was unmöglich ist.

2. Hieraus ergibt sich aber: Hat eine algebraische Gleichung eine ganzzahlige Wur-

zel, so muß dieselbe notwendig ein Faktor des Absolutgliedes sein.

3. Wie wir sahen, können wir für irgend einen Wert α jede Gleichung in die Form

$$(x-\alpha)^n + R_n (x-\alpha)^{n-1} + R_{n-1} (x-\alpha)^{n-2} + \ldots + R_1 = 0$$

bringen (§ 95). Um den Wert von R_1 zu erhalten, haben wir also nur in der Gleichung für x den Wert α zu setzen und werden alsdann als Funktionswert der Gleichung

$$R_1 = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n$$

erhalten.

Ziehen wir diesen Wert von einem zweiten solchen Wert R_1' ab, für den wir erhalten

$$R_1' = \beta^n + a_1 \beta^{n-1} + a_2 \beta^{n-2} + \ldots + a^n,$$

so folgt aber, daß $R_1 - R_1'$ stets durch $\alpha - \beta$ teilbar ist, indem jedes Glied der Funktion

$$(\alpha^n - \beta^n) + a_1 (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + a_2 (\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) \ldots$$

durch diese Differenz teilbar ist. Für irgend zwei ganzzahlige Werte α und β ist also stets auch $\frac{R_1 - R_1'}{\alpha - \beta}$ eine ganze Zahl.

Ist insbesondere β eine Wurzel der Gleichung und ist also $R_1' = 0$, so ist notwendig auch R_1 durch $\alpha - \beta$ oder auch $\beta - \alpha$ ohne Rest teilbar.

4. Nachdem wir dies vorausgeschickt haben, wollen wir zur Bestimmung der ganzzahligen Wurzeln einer Gleichung gehen und hierfür das Beispiel

$$x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$$

wählen. Nach Absatz 2 kann nur eine der Zahlen

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 10,\ \pm 12,\ \pm 15,$$
$$\pm 20,\ \pm 30,\ \pm 40,\ \pm 60,\ \pm 120$$

eine Wurzel der Gleichung sein. Setzen wir in der Gleichung für $x=1$, so ergibt sich uns der Wert $R_1=+24$.

Soll eine der obigen Zahlen also Wurzel der Gleichung sein, so muß nach Absatz 3 die um Eins verminderte Zahl ohne Rest in 24 enthalten sein. Hieraus folgt aber, daß unter den obigen Zahlen

$$-4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 10,\ \pm 12,\ \pm 15,\ \pm 20,\ \pm 30,\ \pm 40,$$
$$\pm 60,\ \pm 120$$

keine Wurzeln der gegebenen Gleichung sein können. Ganzzahlige Wurzeln können als höchsten einzelne der Zahlen -1, ± 2, ± 3, $+4$ oder ± 5 sein; wobei aber die eine oder andere (± 4) noch als Doppelwurzel in Frage kommen könnte. Zur weitern Aufsuchung dient das in § 95 gegebene Verfahren. Wir haben:

$$x^4-14x^3+71x^2-154x+120=0$$

$$\begin{array}{r|l}
x=-1 & \dfrac{1-\ 1+15-\ 86+240}{1-15+86-240+360}\ R=360 \\
x=+2 & \dfrac{1+\ 2-24+\ 94-120}{1-12+47-\ 60+\ \ 0}\ R=0,\ x_1=2 \\
x=+2 & \dfrac{1+\ 2-20+\ 54}{1-10+27-\ \ 6}\ R=-6 \\
x=-2 & \dfrac{1-\ 2+28-150}{1-14+75-210}\ R=-210 \\
x=\ \ 3 & \dfrac{1+\ 3-27+\ 60}{1-\ 9+20+\ \ 0}\ R=0,\ x_2=3 \\
x=\ \ 4 & \dfrac{1+\ 4+20}{1-\ 5+\ 0}\ R=0,\ x_3=4 \\
x=\ \ 5 & \dfrac{1+\ 5}{1+\ 0}\ R=0,\ x_4=4.
\end{array}$$

Haben wir hierbei einmal die Wurzel $x_1 = 2$ gefunden, so benützen wir zur weitern Entwicklung nicht mehr die ursprüngliche Gleichung, sondern die Gleichung $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$, deren Koeffizienten die vierte Reihe des Schemas bilden. Hierauf untersuchen wir zuerst, ob nicht die Wurzel $+2$ nochmals eine solche ist.

Haben wir die 2te Wurzel $x_2 = 3$ gefunden, so brauchen wir -3 nicht mehr in Betracht zu ziehen, da das Absolutglied den Faktor 9 nicht enthält.

Nachdem die 2te Wurzel $x_2 = 3$ gefunden, hätten wir, anstatt zur weitern Rechnung $x^2 - 9x + 20 = 0$ zu benützen, auch letztere Gleichung direkt auflösen können.

Die Gleichung hat also die Wurzeln 2, 3, 4, 5.

5. Manchmal ist es von Vorteil, wenn wir auch für $x = -1$ den zugehörigen Wert von R zur Ausscheidung ganzzahliger Faktoren des Absolutgliedes hinzunehmen. In obigem Beispiel hätte dies keinen Nutzen gebracht, da der Rest 360 uns nicht gestattet, weitere Faktoren von der Untersuchung auszuscheiden.

Ist der erste Koeffizient nicht gleich Eins, so kann die Gleichung in eine andere transformiert werden, in der dies der Fall ist. Will man das nicht, dann erleidet das Schema entsprechende Änderungen.

§ 110. Mehrfache Wurzeln einer Gleichung.

1. Es sei irgend welche ganze Funktion

$$y = f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

gegeben. Wie wir in § 94 sahen, ist dann immer $f(x) - f(z)$ durch $x - z$ teilbar. Setzen wir in dem so erhaltenen Quotienten $\frac{f(x)-f(z)}{x-z}$ nach der ausgeführten Division $z=x$, so werden wir einen Quotienten erhalten, der im allgemeinen nicht gleich Null ist. Diesen Wert heißen wir die **erste Abteilung** von f(x) nach (x) und **bezeichnen dieselbe durch** y′, f′(x) **oder** D f(x). So ist z. B.

$$Dx^n = \frac{x^n - z^n}{x-z} = x^{n-1} + x^{n-1}z + \ldots + z^n$$

und für

$$z=x,\ Dx^n = n\,.\,x^{n-1},\ Dax^n = n\,.\,a\,.\,x^{n-1},$$

$$D(x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots) = n\,.\,x^{n-1} + (n-1)\,a_1x^{n-2} + (n-2)\,.\,a_2x^{n-3} + \ldots + a_{n-1},$$

$$D\,(x-\alpha)^n = D\left(x^n - \binom{n}{1}.\,x^{n-1}.\,\alpha + \binom{n}{2}.\,x^{n-2}\alpha - \ldots\right)$$

$$= n\,.\,x^n - \frac{n\,.\,n-1}{1}x^{n-2}.\,\alpha + \frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2}x^{n-3}\alpha^2 - .$$

$$= n\,.\,(x-\alpha)^{n-1}.$$

2. Die Ableitung der Ableitung bezeichnen wir ebenso als die zweite Ableitung und bezeichnen dieselbe mit y″, f″(x) oder $D^2 f(x)$. Desgleichen erhalten wir die dritte Ableitung y‴, f‴(x) oder $D^3 f(x)$.

3. Ist insbesondere α eine Doppelwurzel der Gleichung, so werden wir die Gleichung stets auf die Form bringen können

$$(x-\alpha)^n + R_n\,(x-\alpha)^{n-1} + \ldots + R_3\,(x-\alpha)^2 = 0,$$

da ja $(x-\alpha)^2$ ein Faktor der Gleichung ist. Für die Ableitung dieser Gleichung, die linke Seite als Funktion angesehen, nach x müssen wir, wie aus der Definition unmittelbar folgt, denselben Ausdruck erhalten, ob wir die letztere Form der Gleichung benützen oder die ursprüngliche, d. h. wir finden, daß die beiden Ausdrücke

$$n.(x-\alpha)^{n-1}+(n-1)R_n(x-\alpha)^{n-2}+R_{n-1}(x-\alpha)^{n-3}+\ldots$$
$$+2R_3(x-\alpha) \text{ und}$$
$$n.x^n+(n-1).a_1x^{n-1}+(n-2)a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$$

identisch sind. Der erstere Ausdruck verschwindet aber, wenn wir für x den Wert α setzen, und wir finden: Hat eine Gleichung eine Doppelwurzel α, so ist α auch eine Wurzel der gleich Null gesetzten ersten Ableitung der Gleichung.

Ist α von der ursprünglichen Gleichung eine dreifache Wurzel, so ist α von der ersten Ableitung eine zweifache und von der zweiten Ableitung eine einfache Wurzel. Wie der Satz allgemein lautet, ist leicht ersichtlich.

4. Wissen wir so z. B., daß die Gleichung

$$x^3-4x^2+5x-2=0$$

eine zweifache Wurzel hat, so muß diese auch eine Wurzel der Abteilung $3x^2-8x+5=0$ sein. Um diese Wurzel zu bestimmen, haben wir nur noch den gemeinsamen Teiler dieser beiden algebraischen Gleichungen aufzusuchen (vergl. Sammlung Göschen Nr. 47, Algebra, § 11). Dieser Faktor ist $x-1$. In der Tat sind 1, 1, 2 die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

XIX. Kapitel.

Näherungsweise Auflösung der Gleichungen.

§ 111. Allgemeine Bemerkung.

Wie wir im vorigen Kapitel sahen, können wir die Gleichungen des vierten Grades noch auflösen. Dasselbe ist für besonders gestaltete Gleichungen des höhern Grades möglich, so z. B. für die Gleichungen $x^n \pm 1 = 0$. Im allgemeinen aber ist es unmöglich, für Gleichungen höher als vom vierten Grade eine algebraische Lösung zu finden.[1] Man ist dann genötigt, wenn die in § 109 und 110 angegebene Arten zur Auffindung einzelner Wurzeln versagen, die Wurzeln näherungsweise zu bestimmen zu suchen. Auch bei Gleichungen des dritten und vierten Grades wird diese näherungsweise Bestimmung manchmal vorzuziehen sein, da die andern Methoden oft auf sehr verwickelte Rechnungen führen. Die näherungsweise Bestimmung eignet sich zudem auch zur Auflösung anderer als algebraischer Gleichungen.

§ 112. Die Methode von Lagrange.

1. Es sei die Gleichung $x^3 - 4x - 5 = 0$ aufzulösen. Bezeichnen wir die linke Seite dieser Gleichung durch $f(x)$, so haben wir für x zwei solche Werte zu suchen, für die $f(x)$ entgegengesetzte Vorzeichen hat. Zwischen diesen Werten x muß dann nach § 100 eine Wurzel der Gleichung liegen. So finden wir z. B. $f(0) = -5$

[1] Diese Unmöglichkeit wurde zuerst von Abel (Crelles Journal Bd. 1) bewiesen.

und $f(3) = +10$, d. h. eine Wurzel der Gleichung liegt zwischen 0 und 3. Diese Wurzel suchen wir durch Probieren in noch engere Grenzen einzuschließen, und zwar liegt dieselbe zwischen 2 und 3, da $f(2) = -5$ ist.

2. Die zu suchende Wurzel setzen wir nun $= 2 + \frac{1}{y}$ und setzen diesen Wert in die gegebene Gleichung ein und erhalten

$$\left(2+\frac{1}{y}\right)^3 - 4\left(2+\frac{1}{y}\right) - 5 = 0 \text{ und hieraus:}$$

$$5y^3 - 8y^2 - 6y - 1 = 0.$$

In dieser Gleichung finden wir wie oben, daß für y ein Wert zwischen 2 und 3 liegt, und setzen hier wieder $y = 2 + \frac{1}{z}$ und erhalten so die neue Gleichung

$$5z^3 - 22z^2 - 22z - 1 = 0, \quad z = 5 + \frac{1}{u}.$$

3. Setzen wir dieses Verfahren fort, so erhalten wir:

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}}}.$$

Hieraus ergeben sich uns aber für x die Näherungswerte (§ 3):

$$2,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{5}{11},\ 2\frac{16}{35},\ 2\frac{21}{46},\ 2\frac{58}{127},\ 2\frac{253}{554}.$$

Letzter Wert ist $= 2{,}4566786$. Würde als letzter Teilnenner die Zahl drei gewählt worden sein, so würde sich als letzter Näherungswert $\frac{195}{427} = 2{,}456675$ ergeben. Die Wurzel der letzten Gleichung liegt zwischen 3 und 4.

§ 113. Die Newtonsche Methode.

1. Auch diese Methode wollen wir an einem Beispiel zunächst klarzumachen suchen. Es sei etwa die Gleichung $x^3 + 2x^2 + 3x - 7 = 0$ aufzulösen. Haben wir auch hier gefunden $f(1) = -1$ und $f(2) = 11$, so setzen wir hier $x = 1 + h$ und erhalten durch Einsetzen in die gegebene Gleichung

$$(1 + h)^3 + 2(1 + h)^2 + 3(1 + h) - 7 = 0 \text{ oder:}$$
$$(1 + 2 + 3 - 7) + h(3 + 4 + 3) + \varrho h^2 + \sigma h^3 = 0, \text{ d. h.}$$
$$-1 + 10h + \varrho h^2 + \sigma h^3 = 0$$

Um aus dieser Gleichung näherungsweise h zu erhalten, können wir h^2 und h^3 vernachlässigen und erhalten zur Bestimmung von h die Gleichung

$$-1 + 10h = 0 \text{ oder } h = 0{,}1.$$

2. Hierauf setzen wir ebenso $x = 1{,}1 + h_1$ und erhalten ganz gleicher weise für h_1 wieder eine Gleichung

$$(1{,}1 + h_1)^3 + 2(1{,}1 + h_1)^2 + 3(1{,}1 + h) - 7 = 0,$$

oder wenn die Glieder mit h_1^2 und h_1^3 weggelassen werden,

$$0{,}051 + 11{,}03\,h_1 = 0, \quad h_1 = -0{,}0046\ldots,$$

also $x = 1{,}0954\ldots$

Fahren wir so weiter, so erhalten wir mit jeder beliebigen Genauigkeit den Wert von x.

3. Sei allgemein z. B. eine Gleichung des vierten Grades gegeben, etwa

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

und sei α ein näherungsweise richtiger Wurzelwert der Gleichung; so setzen wir $x = \alpha + h$ und erhalten durch Einsetzen von $\alpha + h$ in die Gleichung

$$\alpha^4 + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d + h(4\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c) + \varrho h^2$$
$$+ \sigma h^3 + c h^4 = 0$$

und hieraus wie oben:

$$h = -\frac{\alpha^4 + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d}{4\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c} = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Ganz ebenso ist die Korrektion, die wir bei einer beliebigen Gleichung des n ten Grades dem Werte α anzufügen haben:

$$h = -\frac{\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \ldots + a^n}{n\,.\,\alpha^{n-1} + (n-1)a_1\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}} = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

§ 114. Die Regula falsi.

1. Die Methode der Regula falsi ist die bequemste und die gebräuchlichste. Sie läßt sich aus der Newtonschen herleiten und ist überhaupt mit dieser nahe verwandt. Sind α und β zwei Werte, die der gesuchten Wurzel nahezu gleich sind, so haben wir wie oben

$$x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \text{ und}$$

$$x = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta} = \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \cdot \frac{f'(\beta)}{f'(\alpha)}.$$

In dieser letzteren Gleichung sind die Werte $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ nahezu gleich Null, während $f'(\alpha)$ und $f'(\beta)$ im allgemeinen von Null sehr verschieden sind. Sind aber α und β nahezu gleich, so werden wir die Ableitungen $f'(\alpha)$ und $f'(\beta)$ ebenfalls als nahezu gleich ansehen dürfen, d. h. wir werden

$$\frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)} = 1$$

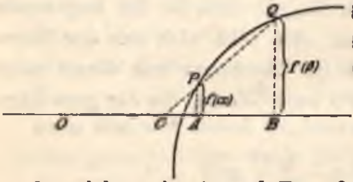
setzen können.

Dann erhalten wir aber:

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta}=\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \text{ und hieraus}$$

$$x=\frac{\beta . f(\alpha)-\alpha . f(\beta)}{f(\alpha)-f(\beta)}.$$

2. Diese letztere Formel ist namentlich auch geeignet zur Auflösung transcendenter Gleichungen, d. h. solcher Gleichungen, die durch transcendente Funktionen, die gleich Null gesetzt werden, gebildet sind. Um dies zu zeigen, wollen wir von obiger Formel noch eine geometrische Ableitung geben. Wir tragen auf einer Geraden von einem beliebigen Punkt O aus zwei Strecken OA und OB gleich α und β ab



und errichten in A und B auf OA Lote AP und BQ gleich $f(\alpha)$ und $f(\beta)$. Die Funktion selbst können wir uns dann durch eine Kurve dargestellt denken, die durch P und Q geht. Sind nun $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ nahezu gleich Null und liegen A und B nahe beieinander, so werden wir den Verlauf der Kurve von A nach B als nahezu gerade ansehen und annehmen dürfen, daß der PQ benachbarte Schnitt X der Kurve mit OA nahezu mit dem Schnittpunkt C von PQ mit OA zusammenfallen wird. Dann können wir aber ohne großen Fehler setzen:

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\frac{CA}{CB}=\frac{OA-OC}{OB-OC}=\frac{\alpha-x}{\beta-x}=\frac{x-\alpha}{x-\beta} \text{ u. s. w.}$$

Es ist natürlich hierbei womöglich α und β so zu wählen, daß $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Anwendung der Regula falsi ist dann, daß die Funktion f(x) zwischen den Werten α und β stetig ist, also sich nicht etwa sprungweise ändert; die Kurve, welche die Funktion darstellt, also zwischen den Werten P und CA eine fortlaufende Linie darstellt. Sind $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ beide positiv oder beide negativ, so ist nicht immer notwendig, daß die Methode zum Ziele führt, namentlich dann nicht, wenn $f'(\alpha)$ und $f'(\beta)$ nahezu Null sind; oder gar entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, wodurch die Annahme der Annäherung $\frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)} = 1$ hinfällig werden kann. Sind jedoch die nötigen Voraussetzungen für die Anwendbarkeit vorhanden, so gilt die Methode für algebraische wie für transcendente Funktionen.

3. Beispiel. $x^x - 100x = 0$

$\alpha = 4$, $\beta = 5$ giebt $f(\alpha) = -144$, $f(\beta) = 2625$

$$x_1 = \frac{5.144 + 4.2625}{144 + 2625} = 4{,}4\ldots$$

$\alpha_1 = 4$, $\beta_1 = 4{,}4$, $f(\alpha_1) = -144$, $f(\beta_1) = +237{,}9$

$x_2 = 4{,}2\ldots$

$\alpha_2 = 4$, $\beta_2 = 4{,}2$, $f(\alpha_2) = -144$, $f(\beta_2) = -5{,}4$

$x_3 = 4{,}207$ u. s. w.

Der genaue Wert ist 4,2058696.

Sociologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Spitzenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

Sprachdenkmäler, Gotische, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Herm. Jantzen in Breslau. Nr. 79.

Sprachwissenschaft, Indogermanische, von Dr. R. Meringer, Prof. a. d. Universität Graz. Mit einer Tafel. Nr 59.

— **Romanische,** von Dr. Adolf Zauner, k. k. Realschulprofessor in Wien. Nr. 128.

Stammeskunde, Deutsche, von Dr. Rudolf Much, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.

Statik, I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper von W. Hauber, diplom. Ingenieur. Mit 82 Fig. Nr. 178.

— — II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.

Stenographie. Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einigungssystem Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken und einem Anhang von Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses in Oranienstein. Nr. 86.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Privatdozent an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbild. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 44 Figuren. Nr. 97.

Stilkunde von Karl Otto Hartmann, Gewerbeschulvorstand i. Lahr. Mit 7 Vollbildern und 195 Textillustrationen. Nr. 80.

Technologie, Allgem. chemische, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Teerfarbstoffe, Die, mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Privatdozent an der Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.

Telegraphie, Die elektrische, von Dr. Ludwig Rellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.

Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Dir. der Königlichen Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

— **III:** Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Tierbiologie I: Entstehung u. Weiterbildung der Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Prof. a. d. Universität Leipzig. Mit 33 Abbild. Nr. 131.

— **II:** Beziehungen d. Tiere zur organischen Natur v. Dr. Heinrich Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.

Tiergeographie, von Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Tierkunde v. Dr. Franz v. Wagner, Professor an der Universität Gießen. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Tierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle, von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.

Trigonometrie, Ebene und sphärische von Dr. Gerh. Hessenberg, Privatdoz. an der Techn. Hochschule in Berlin. Mit 70 Fig. Nr 99.

Unterrichtswesen, Das öffentliche, Deutschlands in d. Gegenwart von Dr. Paul Stötzner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moritz Hoernes, Prof. an der Univ. Wien. Mit 48 Abb. Nr. 42.

Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Univ. Freiburg i. B. Nr. 180.

Völkerkunde von Dr. Mich. Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.

Volkslied, Das deutsche, ausgew. und erläutert von Professor Dr. Jul. Sahr. Nr. 25.

Volkswirtschaftslehre v. Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Freiburg i. B. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik von Geh. Regierungsrat Dr. R. van der Borght, vortr. Rat im Reichsamt des Innern in Berlin. Nr. 177.

Waltharilied, Das, im Versmaße der Urschrift übersetzt und erläutert von Professor Dr. H. Althof, Oberlehrer am Realgymnasium in Weimar. Nr. 46.

Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule und a. d. Techn. Hochsch. in Stuttgart. Nr. 23.

Warenkunde, von Dr. Karl Hassack, Professor an der Wiener Handelsakademie. 1. Teil: Unorganische Waren. Mit 40 Abbildungen. Nr. 222.

Wärme. Theoret. Physik. II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Universität Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

Wäscherei. Textil-Industrie III.: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Weberei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

Wechselkunde von Dr. G. Funk in Mannheim. Mit vielen Formularen. Nr. 103.

Wirkerei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Wolfram von Eschenbach. Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Professor am Königl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. P. Nr. 22.

Wörterbuch, nach der neuen deutsch. Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— **Deutsches,** von Dr. Ferdinand Detter, Professor a. der Universität Prag. Nr. 64.

Zeichenschule von Prof. K. Kimmich in Ulm. Mit 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck und 135 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

Zeichnen, Geometrisches, von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeit. von Prof. J. Vonderlinn, dipl. u. staatl. gepr. Ingenieur in Breslau. Mit 290 Fig. und 23 Tafeln im Text Nr. 58.

Sammlung Schubert

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

35 Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume von Professor Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.

39 Thermodynamik I. Teil v. Prof. Dr. W. Voigt i. Göttingen. M. 10.—.

40 Mathematische Optik von Dr. J. Classen in Hamburg. M. 6.—.

41 Theorie der Elektrizität u. des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik u. Elektrokinetik v. Prof. Dr. J. Classen i. Hamburg. M. 5.—.

42 Theorie der Elektrizität u. d. Magnetismus II. Teil: Magnetismus und Elektromagnetismus von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 7.—.

44 Allgemeine Theorie d. Raumkurven u. Flächen II. Teil von Prof. Dr. Viktor Kommerell i. Reutlingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 5.80.

45 Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen v. Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.80.

46 Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen v. Oberlehrer E. Landfried in Straßburg. M. 4.50.

48 Thermodynamik II. Teil v. Prof. Dr. W. Voigt, Göttingen. M. 10.—.

49 Nicht-Euklidische Geometrie v. Dr. Heinr. Liebmann in Leipzig. M. 6.50.

In Vorbereitung bezw. projektiert sind:

Integralrechnung von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.

Elemente der Astronomie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.

Mathematische Geographie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.

Darstellende Geometrie II. Teil: Anwendungen d. darstellenden Geometrie von Professor Erich Geyger in Kassel.

Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. v. Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.

Dynamik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.

Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.

Geodäsie von Prof. Dr. A. Galle in Potsdam.

Allgemeine Funktionentheorie v. Dr. Paul Epstein in Straßburg.

Räumliche projektive Geometrie.

Geometrische Transformationen II. Teil v. Prof. Dr. Karl Doehlemann in München.

Theorie d. höheren algebraischen Kurven.

Elliptische Funktionen.

Allgemeine Formen- u. Invariantentheorie von Professor Dr. Jos. Wellstein in Gießen.

Mehrdimensionale Geometrie II. Teil von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen.

Liniengeometrie II. Teil v. Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck.

Kinematik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.

Angewandte Potentialtheorie von Oberlehrer Grimsehl in Hamburg.

Elektromagnet. Lichttheorie von Prof. Dr. J. Classen i. Hamburg.

Gruppen- und Substitutionentheorie von Prof. Dr. E. Netto in Gießen.

Theorie d. Flächen dritt. Ordnung.

Mathematische Potentialtheorie.

Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Bauwesen von Dr. ing. H. Reißner in Berlin.

Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Maschinenbau von Dr. Rudolf Wagner in Stettin.

Graphisches Rechnen von Prof. Aug. Adler in Prag.

Höhere Differentialgleichungen v. Prof. J. Horn in Clausthal.