PODRĘCZNIKI
Z DZIEDZINY NAUK HANDLOWYCH I EKONOMICZNYCH

ZARYS
ARYTMETYKI POLITYCZNEJ

NAPISALI

A. B. DANIELEWICZ i S. DICKSTEIN.

WARSZAWA
Nakładem b. Wychowańców Szkoły Handlowej im. Leopolda Kronenberga
SKŁAD GŁÓWNY
ęgarni E. Wende i S-ka (T. Hiż i A. Turkuł)

1910

ZARYS
ARYTMETYKI POLITYCZNEJ

713

PODRĘCZNIKI
Z DZIEDZINY NAUK HANDLOWYCH I EKONOMICZNYCH

ZARYS
ARYTMETYKI POLITYCZNEJ

NAPISALI

A. B. DANIELEWICZ i S. DICKSTEIN.

INDUSTRIA AC LABORE
SHLK
1875 1900

WARSZAWA
Nakładem b. Wychowańców Szkoły Handlowej im. Leopolda Kronenberga
SKŁAD GŁÓWNY
w księgarni E. Wende i S-ka (T. Hiż i A. Turkuł)

1910

Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

SŁOWO WSTĘPNE.

Nazwę „Arytmetyka polityczna" zawdzięczamy pisarzowi angielskiemu Sir Williamowi Petty'emu (1623—1687), autorowi dzieła „Several essays in political Arithmetic" (1683), wprowadził on tę nazwę w piątem opracowanem przez siebie wydaniu dzieła swego przyjaciela Johna Graunta (1620—1674), p. t. „Natural and political observations mentioned in a following index and made upon the bills of mortality of the city of London" (1676). Dzieło Graunta uważać należy za pierwsze traktujące o śmiertelności, po którem dopiero nastąpiły prace de Witta i Halley'a. Widzimy z tego, że Arytmetyka polityczna obejmowała w owym czasie zagadnienia, które weszły następnie do nowej nauki, zwanej Statystyką. Później rozszerzono dziedzinę zagadnień do Arytmetyki politycznej należących, zaliczając do niej te zjawiska życia państwowego i społecznego, które można było ująć w rachunek, a więc nietylko ludność, śmiertelność, ale i dochody państwowe, podatki, stan rolnictwa i różnych gałęzi przemysłu, i t. d.

Hoene Wroński na początku wieku XIX [1]) określił Arytmetykę polityczną jako naukę, mającą za przedmiot prawidła, według których oceniać można siły państwa. Dotąd, mówi on, zajmowano się jedynie tylko jedną częścią Arytmetyki politycznej, mianowicie tą, która ma za przedmiot ocenę liczbową sił fizycznych państwa, przez które rozu-

[1]) Patrz „Sept manuscrits inédits, écrits de 1803 a 1806 par „Hoëne Wronski" (Paris 1879) str. 160—168.

mieć należy siły przyrody, pozbawionej wolności, przez rozum kierowanej; co się zaś tyczy sił pragmatycznych, t. j. sił, którym towarzyszy wola ludzka, to stosowano Arytmetykę polityczną do jednego tylko zagadnienia, t. j. do sprawy wyborów czyli skrutynium. Pozostając w zakresie pierwszym, t. j. sił fizycznych, Wroński rozważa je z dwóch punktów widzenia, które nazywa kameralistycznym i finansowym. Tak pojmowana Arytmetyka polityczna zajmuje się kwestyami ludności, liczby małżeństw, urodzeń, zgonów, narzędzi pracy, podatków, pożyczek państwowych i t. p.

W rozprawie, ogłoszonej w t. X Roczników Warszawskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk w r. 1817[1]), Dominik Krysiński wypowiada pogląd następujący. Arytmetyka polityczna — powiada on — jak dziś na nią patrzymy, nie formuje osobnej zupełnie skończonej, zamkniętej i wyczerpującej umiejętności; jest to tylko zbiór sposobów obrachowywania przez przybliżenie tych politycznych przedmiotów, które za pomocą rachunku mogą nam dać najprzód jakoweś do postępowania skazówki i ochronić tem samem od błędów, które zawsze drogo przypłacają narody. Trzy, mówi dalej, główne źródła są istotną pomocą, raczej fundamentem gospodarstwa krajowego rachub: Statystyka, Nauki techniczne i Ekonomia polityczna. Należą tu zatem kwestye ludności, podatków, konsumcyi i t. d. Słowem, Arytmetyka polityczna przebiega i wskazuje środki, jak obrachowywać przez przybliżenie lub przynajmniej w najważniejszych punktach konsumcyę narodów i t. d.

Wroński i Krysiński podali tylko wiadomości ogólne o zadaniu Arytmetyki politycznej, ale nie pozostawili nam wykładu tej nauki. Często też nie czyniono wyraźnej różnicy pomiędzy Ekonomią polityczną lub innemi gałęziami nauk społecznych a Arytmetyką polityczną właściwą, której zadaniem jest dostarczenie narzędzi rachunkowych, sposobów obliczań i metod wnioskowania matematycznego w rozmaitych kwestyach, nasuwanych przez nauki społeczne. I dlatego to,

---

[1]) Rozprawa o Arytmetyce politycznej, czytana na publicznem posiedzeniu Towarzystwa Królewskiego Warszawskiego Przyjaciół Nauk dnia 30 kwietnia 1814 roku przez Dominika Krysińskiego, Członka tego Towarzystwa (Roczniki t. X, str. 194—225).

aby dowiedzieć się dokładniej, co w Arytmetyce politycznej w biegu czasu wykładano, najlepiej zajrzeć do niektórych, ogłoszonych drukiem podręczników z tej dziedziny. Jednym z takich podręczników jest książka L. Oettingera, nosząca tytuł: „Anleitung zu finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen“ (Brunświk, 1458). Autor nie użył w tytule wyraźnie nazwy „Arytmetyka polityczna“, ponieważ nie uważa jej za ogólnie przyjętą, ale treścią swą dzieło to odpowiada w zupełności tej nazwie. Otóż książka Oettingera obejmuje następujące rozdziały: Rachunek procentów prostych, Rachunek procentów składanych, Wzajemny stosunek tych dwu Rachunków, Interusurium (w prawie rzymskiem). Rachunek prawdopodobieństwa, Pożyczki, Loterye, Śmiertelność, Obliczanie rent, ubezpieczeń życiowych i pensyj emerytalnych. Jeszcze obszerniejszej treści jest „Arytmetyka polityczna“ Bleibtreua (wyd. 2-e Heidelberg, 1853), w której znajdujemy prócz tego rozdziały, poświęcone miarom i wagom, pieniądzom papierowym, wekslom, papierom państwowym, arbitrażom, sposobom oceny wartości lasów, robotom publicznym, instytucyom kredytowym i kasom oszczędności [1]).

M. Cantor nazywa „Arytmetykę polityczną“ Arytmetyką życia codziennego i w ogłoszonej przez siebie niewielkiej, przedmiotowi temu poświęconej, książeczce [2]), wykłada Rachunek procentów prostych i składanych, Rachunek prawdopodobieństwa, Rachunek pożyczek i ubezpieczeń [3]).

Z powyższego widzimy, że Arytmetyka polityczna nie jest co do treści swej nauką jednolitą; jest to, właściwie mówiąc, zbiór zastosowań Matematyki do rozmaitych zagadnień, z których każde samo przez się stanowić może osobny dział stosowany, a niektóre z nich, jak

---

[1]) Do dziedziny Arytmetyki politycznej należą u nas z nowszych dwie prace A. Czajewicza: „Tablice służące do przeprowadzania rachunków amortyzacyjnych“, w tych wypadkach, gdy kapitał jest oprocentowany z góry“, (Warszawa 1902) i „Umarzanie pożyczek długoterminowych i niektóre operacye finansowe“ (Warszawa, 1905).

[2]) Moritz Cantor, Politische Arithmetik oder Arithmetik der täglichen Lebens, (wyd. 1-sze Lipsk, 1898).

[3]) Takiejże treści są „Zasady Arytmetyki politycznej“ A. Pawłowskiego (Lwów 1905), złożone z dwu głównie części: Rachunku procentu składanego i Rachunku ubezpieczeń na życie.

Statystyka matematyczna lub Matematyka ubezpieczeniowa, są już dzisiaj osobnemi naukami, posługującemi się własnemi metodami. Połączenie tych wszystkich przedmiotów w całość pod jedną nazwą wynika raczej z potrzeby praktycznej, lub też potrzeb szkoły, która obowiązana jest dać swym wychowańcom podstawy do zrozumienia metod rachunkowych, stosowanych w ważnych zagadnieniach życia społecznego i państwowego. Niektóre zresztą z zagadnień tych mogą być zaliczone i do innych działów Arytmetyki, np. do Arytmetyki handlowej lub do Arytmetyki (Algebry) finansowej [1]) i stanowią też nieraz część składową kursu szkoły średniej ogólnej (np. Rachunek procentów składanych, Annuity i t. p.).

Dwie są główne podstawy teoretyczne, na których opierają się metody rachunkowe Arytmetyki politycznej w dzisiejszej jej postaci; są niemi: Teorya rachunku procentów i Zasady Rachunku prawdopodobieństwa. W wykładzie tych teoryj i ich zastosowań posługiwać się można albo jedynie Matematyką elementarną (Arytmetyką i Algebrą szkolną), albo też i Rachunkiem wyższym. W niniejszym wykładzie, przeznaczonym dla osób z wykształceniem średniem ogólnem, stosujemy jedynie Matematykę elementarną, wystarczającą zresztą najzupełniej do należytego zrozumienia wszystkich wywodów w książce tej zawartych.

Rozdział I zawiera wykład zasadniczy teoryi Rachunku procentowego, stanowiącej, jak powiedziano wyżej, jednę z dwóch głównych podstaw, na której budują się wszystkie rachunki, dotyczące tak operacyj finansowych jak i ubezpieczeniowych. Rozdział II, zawierający niektóre wiadomości z Algebry i Analizy, jest właściwie przygotowaniem do wykładu Teoryi prawdopodobieństwa. Główną treść tego rozdziału stanowi teorya połączeń (Kombinatoryka), wyłożona nieco szczegółowiej niż w podręcznikach Algebry szkolnej, oraz wykład własności wyrazów rozwinięcia potęgi dwumianu, niezbędnych do uzasadnienia ważnych twierdzeń Rachunku prawdopodobieństwa.

---

[1]) Patrz np. dzieło Floryana Aleksandra Zubelewicza p. t.: „Rachunkowość handlowa w ważniejszych jej zastosowaniach“, Warszawa 1846, zawierająca różne działy Arytmetyki politycznej i dodatek p. t. „Rachunki odnoszące się do zabezpieczeń na życie“, napisany przez Józefa Słomińskiego.

Rozdział III zawiera zasady tego Rachunku, wyłożone zupełnie elementarnie, ale z należytą ścisłością i w takiem rozwinięciu, aby czytelnik mógł sobie zdać sprawę z istoty tego Rachunku i jego zastosowań do zjawisk i urządzeń społecznych.

Pierwsze bezpośrednie zastosowanie tych teoryj znajdzie czytelnik w Rozdziale IV-ym o grach losowych, w którym na szeregu odpowiednio dobranych przykładów i zagadnień, natura i rola tych gier została wyjaśniona przy pomocy wywodów matematycznych. Wywody te zastosowano, między innemi, do loteryi klasycznej w Królestwie Polskiem.

Statystyka, wypełniająca Rozdział V-ty, przedstawiona została w wykładzie zwięzłym, zgodnie z nowszemi metodami i w stopniu wystarczającym do zrozumienia jej doniosłości wśród nauk, badających stosunki społeczne.

Rozdział VI-ty zawiera zarys Matematyki ubezpieczeniowej, wyjaśniający teoretyczne jej podstawy i metody rachunkowe, stosowane w różnorodnych zagadnieniach z tej dziedziny. Czytelnik, pragnący przedmiot ten poznać szczegółowiej, będzie mógł zwrócić się do dzieł specyalnych o Matematyce ubezpieczeniowej, a między innemi do ogłoszonej w r. 1896 książki A. B. Danielewicza p. t. „Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych".

Bardziej szczegółowy wykaz treści podany jest na str. VII—XI.

Znajdujące się na końcu książki tablice ułatwią czytelnikowi rozwiązywanie liczbowe wielu zagadnień, napotykanych w życiu praktycznem, których wzory i metody podane zostały w tekście.

Dodajemy wreszcie że rozdziały I, IV, V, VI, stanowiące właściwą Arytmetykę polityczną, zostały opracowane i napisane przez kolegę Danielewicza, dwa pozostałe, t. j. II i III przez niżej podpisanego.

S. Dickstein.

Warszawa, w grudniu 1910 r.

TREŚĆ.

Str.

ERRATA.

Str.	*wiersz*	*zamiast*	*być powinno:*
39	12 od dołu	9999,90, t. j. prawie 10000	9995,03, a uwzględniając więcej cyfr dziesiętnych, ścisłość można posunąć dalej.
94	1 „ „	$\beta = n$	$\beta = n - m$
95	1 i 7 „ góry	$p_{n, m-n}$	$p_{n, n-m}$
„	8 „ „	(14)	(13)
„	10 „ dołu	$1.2.3\ldots n$	$1.2.3\ldots m$
„	8 „ „	za liczby	liczby
„	5 „ „	(15)	(14)
116	12 „ dołu	x^{α_2+2}	x^{α_2+1}
120	6 i 8 „ „	$\binom{m-1}{1}, \binom{m-1}{2}$	$\binom{m-1}{0}, \binom{m-1}{1}$
128	1 „ „	$(n-m)$	$(n-m)!$
„	15 „ dołu	W rzeczy,	W rzeczy samej,
136	11 „ „	$u_m = 0{,}2380$	$u_m = 0{,}2384$
141	5 „ góry	(61)	(62)
„	11 „ „	u_{kb+1}	u_{kb+k}
„	12 „ „	układu	układów
142	1 „ „	32	33
147	6 „ dołu	Kollektiosmasslehre	Kollektivmasslehre
153	1 „ „	m	m_1
169	2 „ „	n	θ

Str.	*wiersz*	*zamiast*	*być powinno:*
170	6 od dołu	0,2468	0,2384
174	1 „ góry	100	100!
193	15 „ dołu	698	648
194	5 „ góry	$p\ (A_i C_i)$	$p\ (A C_i)$
„	12 „ dołu	$(A_1 C_1)$	$(A C_1)$
196	9 „ „	ν	n
198	6 „ „	$\beta = n$	$\beta = m$
199	11 „ góry	$p_\beta q_\beta$	$y_\beta q_\beta$
200	1 „ dołu	wartościami dwu wielkości a ich wartośclą średnią	sumą wartości dwu wielkości a wartością średnią ich sumy
201	3 „ „	szukane prawdopodobieństwo	szukana średnia
202	10 „ góry	(44)	(45)
207	9 „ „	$p - \frac{1}{t}\sqrt{p(1-p)}$	$p + \frac{1}{t}\sqrt{p(1-p)}$
„	11 „ dołu	$P = 1 - \frac{k^2}{n}$	$P > 1 - \frac{t^2}{n}$
210	9 „ góry	odcienia	odcienie
240	6 „ dołu	12,60, więc do	12,60, czyli do
253	8 i 9 „ góry	$t_2\ \omega_2$ przedstawiają	$t_2\ \omega_2$, przedstawiają
„	17 „ dołu	istniejących lub przybyć	istniejących i przybyć
255	2 i 6 „ góry	$\Omega\ \Omega_2 T_2 T$	$\omega_7\ \Omega_2\ T_2\ \omega_7$
„	9 „ „	względnie zbiór	względnie odpowiedni jej zbiór *)
266	13 i 14 od góry	prawdopodobieństwa	prawdopodobieństw
283	16 od dołu	przez *e*;	przez *e* (od nazwy „expectation of life“ — oczekiwanie życia)
285	6 „ góry	otrzymujemy np.:	otrzymujemy np. (Tabl. IX, kol. 6):
306	3 „ dołu	$_{n+1}a_x$	$_{n+1\|}a_x$
312	4 „ „	wypłaconych	wypłacanych
333	4 „ góry	7645,167	7645,176

*) Może jaśniej będzie, gdy ten ustęp zastąpimy następującym: „Następnie, ponieważ zbiór punktów śmierci w polu $T_3\ \Omega_3\ X O$ wyraża liczbę osób zmarłych przed momentem T_3, zbiór punktów śmierci w polu $T_2\ \Omega_2\ X O$ wyraża liczbę osób zmarłych przed momentem T_2, przeto zbiór punktów śmierci w polu $\Omega_2\ T_2\ T_3\ \Omega_3$ jest zbiorem osób zmarłych w czasie od T_2 do T_3“.

ROZDZIAŁ I.

Rachunek procentowy.

---

1. Kapitał, procent i stopa procentowa. Z Ekonomii politycznej wiemy, czem jest kapitał i jakiego rodzaju bywają kapitały; ponieważ jednak nietylko dla ułatwienia, lecz wogóle dla możności przeprowadzenia przeróżnych tranzakcyj, wszelkiego rodzaju kapitały wyrażają się przez odpowiednio uprzywilejowane w społeczeństwie znaki, zwane monetą, albo pieniędzmi, przeto my, jako wychodzący nie z ekonomicznego, lecz z finansowego punktu widzenia, przez kapitał zawsze rozumieć będziemy pewną ilość pieniędzy.

Jeżeli pewna osoba, posiadająca jakiś kapitał, udziela, lub, jak się zwykle mówi, wypożycza go innej osobie do czasowego użytku, to ta druga osoba odnosi z tego jakąś korzyść, za co pierwszej zapłacić powinna, niezależnie od obowiązku zwrócenia pożyczonego kapitału w umówionym czasie.

Wynagrodzenie za wypożyczenie pieniędzy nazywa się, w praktyce życiowej, procentem; osoba oddająca kapitał na procent zowie się wierzycielem, biorąca kapitał do czasowego użytkowania nosi miano dłużnika; momenty zaś, w których dłużnik obowiązany jest wypłacać procenty i zwrócić wypożyczony kapitał, nazywają się terminami płacenia procentów, względnie zwrotu kapitału. Kapitał wypożyczony dłużnikowi nazywa się długiem tego ostatniego.

Wysokość procentów oraz terminy ich płacenia i zwrotu kapitału stanowią przedmiot dobrowolnej umowy stron obu; aby jednak ułatwić sobie rachunki i porównanie warunków tranzakcyi, zgodzono się wysokość procentu określać przez wysokość wynagrodzenia za wypożyczenie 100 jednostek monetarnych na dany przeciąg czasu i to wynagrodzenie nazwano stopą procentową — roczną, jeżeli za dany przeciąg czasu przyjmuje się rok; kwartalną, jeżeli kwartał i t. d. Symbolem stopy procentowej jest %₀ — tak, że np. 5% znaczy, iż za wypożyczenie 100 jednostek monetarnych na dany przeciąg czasu ustanawia się wynagrodzenie w wysokości 5-ciu takich jednostek.

Z tego właśnie powodu ustanowienia normy od stu przyjęto nazwę procentu dla wynagrodzenia od całego kapitału, które po polsku bywa czasami nazywane odsetkiem (od sta).

Tak samo jak przyjęto za normę sto, możnaby, oczywiście przyjąć każdą inną liczbę, np. 1000, dla której nawet istnieje specyalny symbol ‰. Np. 15‰ znaczy 15 od tysiąca. Tego drugiego wszakże sposobu oznaczania skali wynagrodzenia nie używa się w praktyce, bo 1000 w tranzakcyach pieniężnych jest skalą za wysoką. Natomiast norma od 1000 znajduje zastosowanie w wielu innych przypadkach, jak np. w Statystyce, dla premij ubezpieczeniowych i t. p.

Dla teoryi jednak najwygodniejszą jest stopa od jednostki, która bardzo łatwo wyprowadzić się daje ze stopy od 100, i naodwrót ze stopy od jednostki zawsze, z największą łatwością, można obrachować stopę od stu.

Gdy mianowicie oznaczymy przez s stopę od 100, przez i stopę od jednostki, to skoro za 100 jednostek otrzymujemy s, za jednę otrzymamy $\frac{s}{100}$, czyli

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad i = \frac{s}{100}, \text{ i naodwrót } s = 100\,i \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1').$$

Np. 5% stanowi $\frac{5}{100} = 0{,}05$ od jednostki i naodwrót 0,045 od jednostki stanowi $0{,}045 \times 100 = 4{,}5 = 4\frac{1}{2}\%$.

2. Procent zwyczajny i składany. Procent może być liczony dwojako: albo narosły procent może być co czas pewien odbierany, lub za odebrany uważa się — tak, że pierwotny kapitał nie ulega zmianie i procent liczy się znowu od tego samego kapitału; albo też procent nie bywa częściowo odbierany, lecz co czas pewien włącza się do kapitału i następnie liczy się dalej procent od kapitału pierwotnego, zwiększonego o narosły odeń do danej chwili procent — wtedy kapitał pierwotny z biegiem czasu rośnie.

Pierwszego rodzaju procent nazywa się zwyczajnym, prostym lub pojedynczym; procent drugiego rodzaju zowie się procentem składanym; ciągłe zaś włączanie narastającego procentu do kapitału pierwotnego nosi miano kapitalizowania procentów.

3. Okresy procentowania. Czas, po upływie którego procent zwyczajny się odbiera, lub za odebrany uważa, a składany dołącza do kapitału, zowie się okresem procentowania. Okresy procentowania mogą być, stosownie do umowy, rozmaite — mogą być dłuższe lub krótsze od roku, lecz rachunek prowadzi się zawsze jednakowo, niezależnie od długości okresu, o ile znamy stopę odpowiednią długości danego okresu. Za jednostkę okresu jednak uważa się rok.

Z tego powodu, jak również ze względu, że okres roczny bywa najczęściej używany, i że stopa najczęściej wyraża się na okres roczny, zamiast wyrazu „okres procentowania" używać będziemy wyrazu „rok" — chyba, że przedmiot omawiany wymagać będzie wyróżnienia długości okresu. Okresy dłuższe od roku rzadko bywają w praktyce używane.

4. Procenty liczone z dołu i z góry. Oprócz tego procenty mogą być wypłacane, względnie uważane za wypłacone, przy końcu okresu procentowania, albo na początku; pierwsze zowią się procentami liczonemi z dołu (postnumerando), drugie liczonemi z góry (praenumerando); zależy to od umowy. Jeżeli umowa taka istnieje, rachunek prowadzi się jednakowo bez względu na terminy płacenia procentu i na długość okresu procentowania.

Jeżeli jednak, po zawarciu już umowy, zmienimy warunki płacenia procentu na inne, z zastosowaniem dawnych praw dłużnika i wierzyciela, zmienić się musi także i stopa; zachodzi więc potrzeba obliczenia nowej stopy.

To samo uczynić trzeba, gdy chodzi o ocenienie i wybór czynionych nam propozycyj przy różnych warunkach. W takim razie czynione propozycye należy sprowadzić do jednakich warunków wypłacania procentu, np. do płacenia procentu rocznie z dołu, i wybrać najkorzystniejszą.

Najprzód zajmiemy się sposobami prowadzenia rachunków wogóle, t. j. przy założeniu, że wszystkie warunki są określone; później (art. 12 i następne) obliczaniem stopy przy zmienionych warunkach. Nim to jednak nastąpi, ustalmy znakowanie.

Stopę od jednostki procentu rocznego, liczonego z dołu, oznaczać będziemy przez i, liczonego z góry—przez j, bez względu na to, czy procent jest zwyczajny, czy składany. Stopę procentu, liczonego okresami krótszemi od rocznych, oznaczać będziemy temi samemi głoskami, z dodaniem do nich odpowiednich znaczków.

Jeżeli okresów procentowania jest m w roku, wtedy, na dole po stronie prawej nieco niżej, przy głosce i lub j dodamy: przy procentach zwyczajnych m, przy składanych $\frac{1}{m}$. Tak więc i_m oznaczać będzie stopę od jednostki procentu zwyczajnego, liczonego z dołu co m-a część roku, j_m taką samą stopę, ale procentu liczonego z góry; $i_{\frac{1}{m}}$ stopę od jednostki procentu składanego, liczonego z dołu co m-a część roku, $j_{\frac{1}{m}}$ taką samą stopę procentu liczonego z góry.

Np. $i_2 = 0{,}03$ oznacza 3% półrocznie z dołu procentu zwyczajnego; $j_{\frac{1}{4}} = 0{,}01$, t. j. 1% kwartalnie z góry procentu składanego.

Jeżeli procent ma być płacony, względnie liczony w m ratach, jakich w roku jest ν, odnośnemi symbolami będą $i_{m,\nu}$, względnie $j_{m,\nu}$.

A. Procent zwyczajny.

5. **Wzory zasadnicze.** Skoro jednostka kapitału przynosi po roku procentu i, to K jednostek przyniesie $K.i$ po roku, a $K.i.n$ po n latach, bez względu na to, czy n jest liczbą całkowitą, czy ułamkową. Gdy więc przez P_n oznaczymy procent od kapitału przy stopie i od jednostki za lat n, mamy związek:

$$P_n = K.i.n \qquad \qquad (2),$$

stanowiący wzór ogólny na obliczanie procentów zwyczajnych, t. j. wzór, stosujący się zawsze bez względu na długość okresów procentowania (o ile stosujemy odpowiednią tym okresom stopę) i bez względu na to, czy procent ma być płacony z dołu czy z góry (o ile ten lub inny sposób liczenia procentu został umową określony).

Jeżeli do obu stron w (2) dodamy po K, otrzymamy

$$P_n + K = Kin + K = K(1 + in),$$

albo, po oznaczeniu sumy kapitału z należnym odeń procentem za lat n przez S_n, czyli po podstawieniu

$$P_n + K = S_n \qquad \qquad (3),$$

przychodzimy do drugiego wzoru zasadniczego:

$$S_n = K(1 + in) \qquad \qquad (4),$$

zapomocą którego możemy obliczyć, na co zamienia się kapitał K po n latach, przy stopie i od jednostki procentu zwyczajnego—o ile procent nie był odbierany częściowo.

Np. kapitał 1000 rub., przy stopie rocznej 6% ($i = 0{,}06$), przez trzy kwartały ($n = \frac{3}{4} = 0{,}75$) przynosi procentu (płaconego z góry lub z dołu stosownie do umowy)

$$P_{\frac{3}{4}} = 1000 \times 0{,}06 \times 0{,}75 = 45,$$

a temsamem, o ile procent nie został odebrany przed upływem trzech kwartałów, kapitał 1000 rub., przy 6% rocznie procentu zwyczajnego, po trzech kwartałach zamienia się na

$$S_{\frac{3}{4}} = 1000 \times (1 + 0{,}06 \times \tfrac{3}{4}) = 1000 \times 1{,}045 = 1045.$$

6. **Zagadnienia.** Wyprowadzone w poprzednim artykule wzory (2) i (4) mieszczą w sobie całą teoryę procentów zwyczajnych, więc z ich pomocą mogą być rozwiązane wszelkie zagadnienia, odnoszące się do danego przedmiotu

Z wzoru (2) wypływają mianowicie cztery następujące zagadnienia:

1) Z danego kapitału, stopy i czasu obrachować procent

$$P_n = K \,.\, i \,.\, n \quad \dots\dots\dots \quad (5).$$

2) Z danego procentu, stopy i czasu obrachować kapitał

$$K = \frac{P_n}{i \,.\, n} \quad \dots\dots\dots \quad (5').$$

3) Z danego kapitału, procentu i czasu obrachować stopę

$$i = \frac{P_n}{K \,.\, n}, \quad \text{stąd} \quad s = 100\, i = \frac{100\, P_n}{K \,.\, n} \quad \dots \quad (5'').$$

4) Z danego kapitału, procentu i stopy obrachować czas procentowania

$$n = \frac{P_n}{K \,.\, i} \quad \dots\dots\dots \quad (5''').$$

Np. gdyby kapitał 18000 rub., przy stopie 6% dał procentu 1620 rubli, to znaczy, że był na procencie przez lat

$$n = \frac{1620}{18000 \times 0{,}06} = 1{,}5.$$

Gdyby ten sam kapitał przyniósł 4050 rub. procentu przez 3 lata i 9 miesięcy, znaczy, że był oddany na procent przy stopie

$$i = \frac{4050}{18000 \times 3{,}75} = 0{,}06,$$

stąd na stopę roczną od stu wypada

$$s = 0{,}06 \times 100 = 6\%.$$

Wzór (4) daje znów możność rozdzielenia kapitału połączonego z procentem na kapitał i na procent przy danej stopie i czasie procentowania. Z wzoru

$$S_n = K \,.\, (1 + i n) \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

otrzymujemy bowiem

$$K = \frac{S_n}{1 + i n} \quad \dots\dots\dots \quad (6),$$

a stąd znów:

$$P_n = S_n - K = S_n - \frac{S_n}{1+in} = \frac{S_n + S_n in - S_n}{1+in},$$

czyli

$$P_n = \frac{S_n \,.\, i \,.\, n}{1+in} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Suma wyrażeń (6) i (7) daje naturalnie

$$K + P_n = \frac{S_n + S_n in}{1+in} = S_n,$$

jaki być powinno.

Jeżeli np. 16875 rub. stanowi sumę kapitału z procentem, narosłym odeń przez $2\frac{1}{2}$ lat przy stopie $5^0/_0$, to

$$\text{kapitał} \quad K = \frac{16875}{1+0{,}05 \times 2{,}5} = \frac{16875}{1{,}125} = \quad 15000 \text{ rub.}$$

$$\text{procent} \quad P_{2,5} = \frac{16875 \times 0{,}05 \times 2{,}5}{1+0{,}05 \times 2{,}5} = \frac{2109{,}375}{1{,}125} = 1875 \text{ rub.}$$

razem, jak wyżej, 16875 rub.

Znając S_n i K lub P_n przy danem n lub danem i, można oczywiście obliczyć i lub n, mianowicie:

$$\text{z (6)} \; . \; . \; . \; i = \frac{S_n - K}{nK}, \qquad \text{z (7)} \; . \; . \; . \; i = \frac{P_n}{n(S_n - P_n)},$$

$$\text{z (6)} \; . \; . \; . \; n = \frac{S_n - K}{iK}, \qquad \text{z (7)} \; . \; . \; . \; n = \frac{P_n}{i(S_n - P_n)}.$$

7. Dyskontowanie przy oprocentowaniu zwyczajnem. Jeżeli suma S, płatna po upływie pewnego czasu n, ma być obecnie zrealizowaną, to naturalnie obecnie należy za nią zapłacić taką kwotę, któraby, przy umówionej stopie procentowej (i od jednostki), po upływie tego samego czasu zamieniła się na tę samą sumę S. Taka kwota nazywa się sumą zdyskontowaną na czas n przy danej stopie procentowej i. Oznaczać ją będziemy przez S_{mat}.

Skoro zatem, według powyższego orzeczenia, suma płatna po czasie n otrzymuje się z sumy zdyskontowanej przez dodanie do niej procentu za czas n, przeto składa się ona z sumy zdyskontowanej, odgrywającej rolę kapitału, oddanego obecnie na procent, i z procentu za czas n przy danej stopie. Skutkiem tego sumę zdyskontowaną można obliczyć z wzoru (6); procent zaś, który się w tego rodzaju operacyach nazywa dyskontem, z wzoru (7). Dyskonto oznaczać będziemy przez D_{mat}.

Po podstawieniu w (6) S za S_n, S_{mat} za K, wypada wzór na sumę zdyskontowaną przy oprocentowaniu zwyczajnem:

$$S_{mat} = \frac{S}{1 + in} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8);$$

po podstawieniu w (7) D_{mat} za P_n, S za S_n, otrzymujemy wzór na dyskonto:

$$D_{mat} = \frac{S\,i\,n}{1 + in} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8').$$

Np. 1200 rub., płatne po 9-ciu miesiącach, obecnie, przy stopie 9% (w stosunku rocznym), są warte

$$S_{mat} = \frac{1200}{1 + 0{,}09 \times \frac{9}{12}} = \frac{1200}{1 + 0{,}0675} = \frac{1200}{1{,}0675} = \text{prawie } 1124{,}12;$$

dyskonto

$$D_{mat} = \frac{1200 \times 0{,}09 \times 0{,}75}{1{,}0675} = \text{prawie } 75{,}88.$$

Tak obliczona suma 1124,12 jest prawidłowa, gdyż, przy umówionej stopie 9%, po 9-ciu miesiącach zamienia się na

$$S = 1124{,}12 \times 1{,}0675 = 1200\;,$$

t. j. daje sumę istotnie płatną w terminie.

8. **Dyskonto matematyczne i handlowe.** W powyższy sposób obliczone dyskonto nazywa się matematycznem (dlatego właśnie oznaczyliśmy je przez D_{mat}), ponieważ odpowiednia mu suma S_{mat} w terminie płatności daje matematycznie ściśle sumę wówczas należną. Tymczasem w operacyach handlowych (np. przy dyskontowaniu weksli) dyskonto obliczane bywa inaczej, mianowicie, nie według wzoru (7), lecz według (5), t. j. sumę płatną po czasie n traktuje się tak, jakby nie była kapitałem z procentem, lecz samym kapitałem. Tak obliczone dyskonto zowie się handlowem, skutkiem czego oznaczać je będziemy przez D_{han}, a sumę tak zdyskontowaną przez S_{han}.

Po podstawieniu w (5) D_{han} za P_n i S za K, otrzymujemy na dyskonto handlowe wzór

$$D_{han} = S \,.\, i \,.\, n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9'),$$

na sumę zdyskontowaną (handlowo) wzór:

$$S_{han} = S - S\,i\,n = S(1 - in) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Np. te same co wyżej 1200 rub., zdyskontowane w takich samych jak poprzednio warunkach handlowo, dają:

$$D_{han} = 1200 \times 0{,}09 \times 0{,}75 = 81$$

$$S_{han} = 1200 \times (1 - 0{,}0675) = 1119,$$

t. j. dyskonter za tę samę sumą płaci, przy dyskoncie handlowem, mniej o $1124{,}12 - 1119 = 5{,}12$.

I dlatego otrzymujący sumę zdyskontowaną, po 9-ciu miesiącach, przy tej samej stopie, nie posiądzie sumy, jakąby otrzymał, nie dyskontując waloru, lecz otrzyma tylko:

$1119 \times (1 + 0{,}09 \times 0{,}75) = 1119 \times 1{,}0675 = 1194{,}53$, czyli mniej o 5,47.

Nieścisły sposób dyskontowania handlowego daje się w części usprawiedliwić większą łatwością obliczania dyskonta, a przedewszystkiem „dobrowolną“ umową. Skoro tak jest, przeto oponować przeciwko temu zwyczajowi trudno, można jednak zadać sobie pytanie, jaka jest właściwa, czyli matematyczna stopa procentowa przy handlowym sposobie dyskontowania, t. j. przy jakiej stopie należy dyskontować matematycznie, jeżeli mamy otrzymać takie samo dyskonto, jakie otrzymujemy sposobem handlowym, przy danej stopie.

Gdy przez I oznaczymy stopę matematyczną, odpowiednią stopie handlowej i, to, według wzoru (9′) dyskontem handlowem jest

$$D_{\text{han}} = S \,.\, i \,.\, n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha),$$

a według wzoru (8′) dyskontem matematycznem

$$D_{\text{mat}} = \frac{S \,.\, I \,.\, n}{1 + I \,.\, n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta).$$

Jeżeli oba dyskonta mają być sobie równe, t. j. gdy D_{mat} ma być równe D_{han}, musi być

$$\frac{S.I.n}{1 + I.n} = S \,.\, i \,.\, n \,,$$

czyli

$$\frac{I}{1 + I \,.\, n} = i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma),$$

stąd zaś

$$I = \frac{i}{1 - i \,.\, n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

W naszym przykładzie

$$I = \frac{0{,}09}{1 - 0{,}09 \times 0{,}75} = \frac{900}{9325} = \text{prawie } 0{,}0965 \,,$$

t. j. przy terminie 9-cio miesięcznym handlowa stopa 9% odpowiada matematycznej $9{,}65\%$.

Gdy tę stopę zastosujemy do wzoru (8′), wypadnie matematycznie

$$D_{\text{mat}} = \frac{1200 \times 0{,}0965 \times 0{,}75}{1 + 0{,}0965 \times 0{,}75} = \frac{86{,}85}{1{,}072375} = \text{prawie } 81 \,,$$

t. j. tyleż, co i ze sposobu handlowego przy stopie 9%.

Oczywiście można i naodwrót postąpić, mianowicie z danej stopy matematycznej przejść do odpowiedniej handlowej; co się dokonywa za pomocą wzoru (γ), który po odwróceniu stron daje wzór

$$i = \frac{I}{1 + I.n} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (10').$$

U w a g a. We wzorze (10) do mianownika wchodzi różnica $1 - i.n$, skutkiem czego możnaby dobrać takie i, przy danem n, lub takie n, przy danem i, żeby mianownik stał się zerem, a nawet liczbą ujemną, z czego wypadnie I nieskończenie wielkie lub ujemne, t. j. niedorzeczność. I niedorzeczność w takich razach rzeczywiście istnieje.

Jeżeli np., jak wyżej, przy 9-o miesięcznym terminie, założymy $1 - i \,.\, n = 0$, skąd $i = \frac{1}{n} = 1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, to znaczy, że dyskontujemy handlowo przy stopie 133,333 . . . %. Wtedy

$$D_{\text{han}} = 1200 \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1200, \qquad S_{\text{han}} = 0,$$

czyli za prawo otrzymania 1200 rub. po 9-ciu miesiącach nic nie płacimy.

Na taką tranzakcyę nikt się, oczywiście, nie zgodzi, bo jest niedorzeczną, i tę niedorzeczność właśnie uwydatnia rezultat $I = \infty$, jaki otrzymamy z (10) po wstawieniu weń $n = \frac{3}{4}$, $i = \frac{4}{3}$.

Jeżeli w (10) podstawimy, przy $n = \frac{3}{4}$, $i = 2$, I wypadnie ujemne, mianowicie $I = \dfrac{2}{1 - 2 \times \frac{3}{4}} = -4$; nowa niedorzeczność, w tem się objawiająca, że w takim razie:

$$D_{\text{han}} = 1200 \times 2 \times \frac{3}{4} = 1800, \qquad S_{\text{han}} = -600,$$

t. j. za prawo podniesienia 1200 rub. po 9-ciu miesiącach nie zapłacić, lecz otrzymać powinniśmy 600 rub.

Wynika stąd, że stopa dyskonta handlowego nie może przekraczać granicy, wyznaczającej się z nierówności $1 - i\,n > 0$, czyli musi być $i < \frac{1}{n}$, co zresztą widać bezpośrednio z wzorów (9') i (9); przeciwnie, stopa matematyczna I może teoretycznie przybierać wartości od 0 do ∞ (byle nie ujemne, gdyż wtedy wpadlibyśmy w niedorzeczność), a odpowiednie i zawsze pozostanie w granicach możliwości, co jest rzeczą zrozumiałą z wzoru (β), z którego widać, że przy wszelkich I (dodatnich) D_{mat} jest mniejsze od S.

9. **Spłacanie długu ratami równemi** (przy oprocentowaniu zwyczajnem). Jeżeli dłużnik, mający zapłacić wierzycielowi należność K, pragnie to uczynić nie z góry w całości, lecz w ciągu pewnego czasu ratami równemi, obejmującemi zarazem procenty zwyczajne przy stopie rocznej i procentu liczonego z dołu, to taka operacya finansowa zowie się spłacaniem długu ratami równemi, przy oprocentowaniu zwyczajnem. Chodzi o wyznaczenie wysokości raty, którą oznaczmy przez x.

Aby nadać zagadnieniu jak najogólniejszą formę, załóżmy, że rat ma być m, że się płacą w równych, lecz jakichkolwiek odstępach czasu (okresach), i że takich okresów płatności jest w roku ν, skutkiem czego skoro wszystkich rat jest m, a w ciągu roku ma być spłaconych ν, dług zostanie spłacony przez $m:\nu = \frac{m}{\nu}$ lat. Stosownie do tego, czy m jest mniejsze, równe lub większe od ν, dług spłaca się w czasie krótszym od roku, w ciągu roku, lub w ciągu czasu dłuższego od roku.

Gdyby np. dług miał być spłacony w czterech ratach trzykwartalnych, $m = 4$, $\nu = 1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, a czas przez jaki dług będzie spłacany wynosi $m:\nu = 4 : \frac{4}{3} = 3$ lata.

Raty mogą być płacone z dołu lub z góry.

Weźmy najprzód przypadek, gdy raty są płacone z dołu i zobaczmy, ile wniesie dłużnik w ciągu lat $\frac{m}{\nu}$, jeżeli, zamiast rat równych, wnosić będzie we właściwym terminie po $\frac{K}{m}$ z należnym od tej sumy procentem w chwili płacenia m-ej części długu.

Od pierwszej spłaty, w wysokości $\frac{K}{m}$, jako wniesionej po upływie pierwszego okresu czasu $= \frac{1}{\nu}$, zapłacić powinien, tytułem procentu, $\frac{K}{m} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot i$, razem więc z $\frac{K}{m}$ zapłaci wierzycielowi $\frac{K}{m} + \frac{K}{m} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot i$ $= \frac{K}{m}\left(1 + \frac{1}{\nu} i\right)$; za drugim razem $\frac{K}{m} \cdot \left(1 + \frac{2}{\nu} i\right)$, i t. d., za m-ym razem $\frac{K}{m}\left(1 + \frac{m}{\nu} i\right)$, czyli razem zapłaci $\frac{K}{m}\left(1 + \frac{1}{\nu} \cdot i\right) + \frac{K}{m}\left(1 + \frac{2}{\nu} i\right) +$

$$\ldots + \frac{K}{m}\left(1 + \frac{m}{\nu} i\right) = m\frac{K}{m} + \frac{K\,i}{m\,.\,\nu}(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + m).$$

W nawiasie mamy sumę wyrazów postępu arytmetycznego o wykładniku $= 1$, która, jak wiadomo, równa się $\frac{m+1}{2} \cdot m$.

Ostatnie wyrażenie sprowadza się zatem do kształtu

$$K\left(1+\frac{\overline{m+1}\,.\,i}{2\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

przedstawiającego to wszystko, co dłużnik zapłaci wierzycielowi, gdy będzie w odpowiednich terminach wnosił m-tą część długu łącznie z należnym od niej procentem.

Jeżeli zaś, zamiast tego, wnosić będzie w tychże terminach zawsze jednakową ratę x, wniesie kwotę mx, która powinna być równa kwocie (α), t. j.

$$m\,x = K\left(1+\frac{\overline{m+1}\,.\,i}{2\nu}\right),$$

stąd

$$x = \frac{K}{m}\left(1+\frac{\overline{m+1}\,.\,i}{2\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \, (11).$$

Ale rata x mieści w sobie, oczywiście, m-ą część długu K i jakąś jeszcze jej część, którą możemy przedstawić w formie procentu od $\frac{K}{m}$. Gdy nieznaną stopę od jednostki tego procentu oznaczymy przez I, część ta wyrazi się przez $\frac{K}{m}\,.\,I$, skutkiem czego

$$x = \frac{K}{m} + \frac{K}{m}\,.\,I = \frac{K}{m}(1+I) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta).$$

Po podstawieniu (β) w (11) otrzymujemy:

$$\frac{K}{m}(1+I) = \frac{K}{m}\left(1+\frac{\overline{m+1}\,.\,i}{2\nu}\right),$$

skąd

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I = \frac{\overline{m+1}\,.\,i}{2\nu}, \text{ i naodwrót } i = \frac{2\nu I}{m+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \, (12').$$

Znając I, wystarczy m-ą część długu oprocentować przy stopie I, aby otrzymać szukaną ratę x.

Gdyby np. chodziło o ratę na spłacenie 3000 rub. w czterech ratach co trzy kwartały, przy stopie rocznej $8^0/_0$, wystarczy w (12) założyć $m = 4$, $\nu = \frac{4}{3}$, $i = 0{,}08$. Wtedy:

$$I = \frac{(4+1)\times 0{,}08}{2\times\frac{4}{3}} = \frac{5\times 0{,}08\times 3}{8} = 0{,}15.$$

Temsamem rata

$$x = \frac{3000}{4} \times 1{,}15 = 750 \times 1{,}15 = 862{,}50\,.$$

Naodwrót, gdyby wierzyciel na spłacenie pomienionego długu (3000 rub.) żądał od nas w czterech ratach trzykwartalnych po 862,50; to ponieważ $862{,}50 - \frac{3000}{4} = 862{,}50 - 750 = 112{,}50$, co przedstawia od 750 rub. procent przy stopie (trzykwartalnej) od jednostki

$$I = \frac{112{,}50}{750} = 0{,}15,$$

to znaczy, że żąda procentu przy stopie

$$i = \frac{2 \times \frac{4}{3} \times 0{,}15}{5} = 0{,}08$$

od jednostki rocznie postnumerando.

Gdy dług ma być spłacony w ciągu roku, jest $\nu = m$ i wtedy:

$$(13) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad I = \frac{\overline{m+1}\,.\,i}{2\,m}\,; \quad i = \frac{2\,m\,I}{m+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13').$$

10. Spłacanie długu ratami równemi (dokończenie). Zobaczmy teraz, jak się rzecz przedstawi, gdy raty będą płacone z góry.

Rozumując w ten sam sposób, jak w artykule poprzednim, otrzymujemy: z jednej strony

$$\frac{K}{m} + \frac{K}{m}\left(1 + \frac{1}{\nu}\,.\,i\right) + \frac{K}{m}\left(1 + \frac{2}{\nu}\,i\right) + \ldots + \frac{K}{m}\left(1 + \frac{m-1}{\nu}\,i\right)$$

$$= K + \frac{K\,.\,i}{m\,.\,\nu}\,(1 + 2 + 3 + \ldots + \overline{m-1}) = K\,.\,\left(1 + \frac{\overline{m-1}\,.\,i}{2\,\nu}\right);$$

z drugiej strony, podobnie jak poprzednio, $m\,x'$; powinno być zatem

$$m\,x' = K\left(1 + \frac{\overline{m-1}\,.\,i}{2\,\nu}\right),$$

a stąd:

$$x' = \frac{K}{m}\left(1 + \frac{\overline{m-1}\,.\,i}{2\,\nu}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14).$$

Po podstawieniu $x' = \frac{K}{m}\,(1 + I')$, mamy:

$$(15) \quad . \; . \quad I' = \frac{\overline{m-1}\,.\,i}{2\,\nu}, \text{ i naodwrót} \; . \; . \; . \; . \; . \quad i = \frac{2\,\nu\,I'}{m-1} \quad . \; . \quad (15').$$

Gdyby więc w poprzednim przykładzie raty miały być płacone z góry, byłoby:

$$I' = \frac{(4-1) \times 0{,}08}{2 \times \frac{4}{3}} = \frac{3 \times 3 \times 0{,}08}{8} = 0{,}09,$$

a rata

$$x' = \frac{3000}{4} \times 1{,}09 = 750 \times 1{,}09 = 817{,}50.$$

Jeżeli dług ma być spłacony w ciągu roku, musi $\nu = m$, wtedy

$$(16) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I' = \frac{\overline{m-1} \, . \, i}{2m}, \text{ i naodwrót } i = \frac{2mI'}{m-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16').$$

Takiego właśnie sposobu używają towarzystwa ubezpieczeń do rozkładania premij rocznych na półroczne, kwartalne i miesięczne. Jeżeli np. towarzystwo liczy sobie, za rozłożenie premij rocznych na raty, 6% rocznie z dołu, to przy ratach półrocznych (wzór 16):

$$I' = \frac{(2-1) \times 0{,}06}{2 \times 2} = \frac{0{,}06}{4} = 0{,}015;$$

przy kwartalnych:

$$I' = \frac{(4-1) \times 0{,}06}{2 \times 4} = 0{,}0225, \quad \text{i t. d.}$$

Gdyby np. premia roczna wynosiła 100 rub., rata półroczna wynosić będzie $\frac{100}{2} \times 1{,}015 = 50{,}75$; rata kwartalna $\frac{100}{4} \times 1{,}0225$ $= 25{,}5625$.

Naodwrót, jeżeli towarzystwo dolicza do raty miesięcznej 3%, znaczy, że ratę obciąża procentem w stosunku (wzór 16'):

$$i = \frac{2 \times 12 \times 0{,}03}{12-1} = 0{,}06545 \ldots,$$

t. j. 6,545% rocznie z dołu.

11. Spłacanie długu ratami równemi, z pobraniem całego procentu z góry. Bywają instytucye kredytowe, udzielające klientom pożyczkę na spłaty peryodyczne w ratach równych, pod warunkiem, aby procent był zapłacony z góry w całości za cały czas spłacania długu. Powstaje stąd następujące zadanie:

Pożyczka K ma być spłacona w m ratach z dołu płatnych po $\frac{K}{m}$ przy stopie rocznej i liczonej z dołu, lecz procent ma być całkowicie zapłacony z góry. Gdy stopę tego procentu, z góry w całości zapłacić się mającego, oznaczymy przez $j_{c,\,m}$ (od wyrazów „całkowicie za m rat"), zachodzi pytanie, w jaki sposób można obliczyć $j_{c,\,m}$.

Aby i tu nadać dostatecznie ogólną formę zadaniu, załóżmy, że owe m okresów mogą stanowić rok jeden, albo może ich być mniej lub więcej. Dajmy na to, że takich okresów w roku jest ν, skutkiem czego nasz symbol uogólnia się do kształtu $j_{c,\,m,\,\nu}$,

Owóż dłużnik wnosi, oprócz $K.j_{c,\,m,\,\nu}$ z góry, po upływie 1-go okresu, $\frac{K}{m}$, które przy ukończeniu spłaty, czyli po $\frac{m}{\nu}$ latach zamienia się na $\frac{K}{m}\left(1+\frac{m-1}{\nu}i\right)$; rata druga, wniesiona po upływie dwóch okresów, procentuje u wierzyciela już tylko przez lat $\frac{m-2}{\nu}$, więc się zamienia na $\frac{K}{m}\left(1+\frac{m-2}{\nu}i\right)$; i t. d. — ostatnia zaś rata, jako wniesiona przy końcu m-go okresu, nie przynosi wierzycielowi żadnego procentu.

Wierzyciel zatem, po ukończeniu spłaty, posiadać będzie

$$K j_{c,\,m,\,\nu}+\frac{K}{m}\left(1+\frac{m-1}{\nu}i\right)+\frac{K}{m}\left(1+\frac{m-2}{\nu}i\right)+\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{K}{m}=K j_{c,\,m,\,\nu}+K+\frac{Ki}{m\,.\,\nu}(\overline{m-1}+\overline{m-2}+\ldots+1+0)$$

$$=K j_{c,\,m,\,\nu}+K+\frac{\overline{m-1}\,.\,K\,.\,i}{2\nu},$$

a posiadać winien $K\left(1+\frac{m}{\nu}i\right)$, bo tyleby posiadał, gdyby dłużnik, zamiast płacić ratami, spłacił dług z dołu w całości z należnym odeń za czas $\frac{m}{\nu}$ procentem przy stopie i od jednostki procentu liczonego z dołu.

Powinno więc być:

$$K j_{c,\,m,\,\nu}+K+\frac{\overline{m-1}\,.\,K\,.\,i}{2\nu}=K+\frac{mKi}{\nu},$$

stąd

$$j_{c,\,m,\,\nu}=\frac{2mi-\overline{m-1}\,.\,i}{2\nu}.$$

Otrzymujemy więc podobne do (12) i (12'), wzory

$$(17)\quad\ldots\; j_{c,\,m,\,\nu}=\frac{\overline{m+1}\,.\,i}{2\nu},\ \text{i naodwrót}\ i=\frac{2\nu j_{c,\,m,\,\nu}}{m+1}\quad\ldots\ (17').$$

Gdyby dług miał być spłacony w ciągu roku, należy w (17) podstawić $\nu = m$ i wtedy

$$(18) \quad \ldots \quad j_{c,m} = \frac{\overline{m+1}\,.\,i}{2m}, \qquad i = \frac{2m j_{c,m}}{m+1} \quad \ldots \quad (18').$$

Np. pożyczka 600 rub. ma być spłacona w ciągu 8-iu miesięcy, ratami miesięcznemi po $\frac{600}{8} = 75$ rub. przy stopie 6% liczonej rocznie z dołu. Jaki procent z góry ma dłużnik zapłacić?

Zakładamy w (17): $m = 8$, $\nu = 12$, $i = 0{,}06$; stopa mającego się zapłacić procentu będzie:

$$j_{c,\,8,\,12} = \frac{(8+1) \times 0{,}06}{2 \times 12} = 0{,}0225\,,$$

czyli dłużnik, tytułem jednorazowego procentu, winien z góry zapłacić $600 \times 0{,}0225 = 13$ rub. 50 kop.

12. Równoważne stopy procentu płaconego rocznie z dołu i z góry. Dotąd zajmowaliśmy się rachunkiem procentowym (zwyczajnym) przy założeniu, że wszystkie warunki: stopa procentowa, terminy i sposób płacenia procentu (z góry, czy z dołu), są ściśle określone i niezmienne przez cały czas trwania pożyczki. Chodzi teraz o to, jak radzić sobie należy, gdy warunki wypłacania procentów ulegną zmianie; wcale bowiem nie jest to samo, czy płacimy procent rocznie z góry, czy z dołu, albo ratami mniejszemi od rocznych. Zmianę przyjąć można, ale stopa musi się także zmienić, jeżeli żadna ze stron interesowanych nie ma być pokrzywdzona.

Inaczej się wyrażając, chodzi nam o umiejętność wzajemnej zamiany stóp procentowych przy odmiennych sposobach wypłacania procentu, bez pokrzywdzenia stron interesowanych, co ma znaczenie nietylko przy zmianie warunków pierwotnych, lecz jeszcze pozwala nam oryentować się w czynionych nam propozycyach. Gdy proponowane nam stopy, przy różnych warunkach płacenia procentów, potrafimy zamienić na równoważne im stopy przy jednakowych warunkach, np. przy płaceniu procentu rocznie z dołu, to najkorzystniejsza oferta sama się rzuci w oczy.

Zaczynamy od zamiany stopy procentu płaconego rocznie z dołu na równomierną jej stopę procentu płaconego z góry, i naodwrót.

Procent, płacony przez dłużnika rocznie z dołu, jest sumą należną wierzycielowi za rok; jeżeli więc wierzyciel chce go zrealizować na rok przed jego płatnością, czyli gdy chce odebrać procent z góry, może dostać tylko sumę zdyskontowaną na rok (matematycznie) i to przy takiej samej stopie, na jaką wypożyczył kapitał dłużnikowi, jeżeli żadna strona nie ma być skrzywdzona.

Gdy więc wierzyciel pożycza dłużnikowi jednostkę kapitału na procent przy stopie i od jednostki płatnej z dołu rocznie, to stopa od jednostki, procentu płaconego rocznie z góry (j) — jako suma zdyskontowana na rok — otrzyma się z wzoru (8), po założeniu w nim $S_{mat} = j$, $S = i$, $n = 1$, t. j.

$$j = \frac{i}{1+i},$$

czyli, po zniesieniu mianownika, przychodzimy do związku

$$j(1+i) = i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

jaki zachodzi pomiędzy stopą procentu płatnego rocznie z dołu (i) i równoważną jej stopą procentu płatnego rocznie z góry (j).

Do tego samego rezultatu przyjść możemy drogą odwrotną.

Skoro wierzyciel pobiera na początku roku j, to — po oddaniu tej kwoty na procent, przy stopie i procentu płatnego z dołu, po roku mieć będzie $j(1+i)$, a że, według umowy z dłużnikiem, mieć powinien i, zatem być powinno, jak wyżej,

$$j \,.\, (1+i) = i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Z (19) wypada

$$(20) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad j = \frac{i}{1+i}, \text{ i naodwrót } i = \frac{j}{1-j} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20'),$$

wzory, zapomocą których możemy zamienić stopę procentu płatnego rocznie z dołu na równoważną jej stopę procentu płatnego rocznie z góry i naodwrót.

Okazuje się stąd np., że stopie 6% postnumerando, odpowiada stopa $j = \frac{0{,}06}{1{,}06} = 0{,}0566\ldots$, czyli 5,66% praenumerando; stopie 6% praenumerando odpowiada stopa $i = \frac{j}{1-j} = 0{,}0638$ — czyli 6,38% postnumerando i t. d.

Jeżeli zaofiarowano nam z jednej strony 5% z dołu rocznie, z drugiej $4\frac{7}{8}$% rocznie z góry, druga oferta jest dla nas korzystniejsza, bo $4\frac{7}{8}$%, zamienione na stopę procentu liczonego z dołu rocznie, przedstawia

$$i = \frac{0{,}04875}{1-0{,}04875} = 0{,}0512\ldots$$

czyli 5,12% — większe od 5%.

13. Zamiana stóp procentowych okresów mniejszych od rocznych na roczne, i naodwrót. Zobaczmy teraz, w jaki sposób można przejść od stóp procentowych, podanych w mniejszych niż roczne okresach, do stóp procentowych w okresie rocznym. Przytem przejście to wystarczy przeprowadzić tylko dla stopy rocznej procentu liczonego z dołu, od tej ostatniej bowiem do stopy procentu liczonego z góry zawsze przejść możemy zapomocą wzoru (20).

Tu rozróżnić należy dwa przypadki: gdy procent okresami mniejszemi od rocznych liczy się z dołu— lub z góry.

Weźmy najprzód przypadek pierwszy.

Jeżeli stopa procentu liczonego co m-ta część roku z dołu równa się i_m, zachodzi pytanie, jaką to stanowi stopę roczną i procentu liczonego również z dołu?

Gdy za kapitał przyjmiemy jednostkę, pierwsza rata procentowa, zapłacona po $\frac{1}{m}$ roku, wynosi i_m i zamienia się po $\frac{m-1}{m}$ roku na $i_m\left(1+\frac{m-1}{m}i\right)$, druga na $i_m\left(1+\frac{m-2}{m}i\right)$, i t. d. aż do ostatniej raty, która, jako wniesiona z dołu, nie procentuje wcale. Suma tych wszystkich wartości powinna być równa i, t. j.

$$i = i_m\left(1+\frac{m-1}{m}i\right)+i_m\left(1+\frac{m-2}{m}i\right)+\ldots+i_m\left(1+\frac{1}{m}i\right)$$

$$+i_m\left(1+\frac{0}{m}i\right)^{*)} = m\,i_m+\frac{i\,.\,i_m}{m}\,(\overline{m-1}+\overline{m-2}+\ldots+2+1+0)$$

$$= m\,i_m+\frac{i\,.\,i_m}{m}\,.\,\frac{\overline{m-1}+0}{2}\,.\,m = m\,i_m+\frac{\overline{m-1}\,.\,i\,.\,i_m}{2}\,.$$

*) Do tej samej równości, podobnie jak w artykule poprzednim, przyjść możemy drogą odwrotną, t. j. nie przez oprocentowywanie płaconych równemi ratami procentów, lecz przez zdyskontowanie [sposobem matematycznym — art. 7 wzór (8)] odpowiednich części, mającego się przy końcu roku wypłacić procentu i od jednostki.

Procent i (od jednostki), mający się odebrać przez wierzyciela przy końcu roku, podzielmy na m części: x_{m-1}, x_{m-2}, ..., x_1, x_0 — tak, że $x_{m-1}+x_{m-2}+\ldots+x_1+x_0=i$. Otóż dla wierzyciela jest matematycznie wszystko jedno, czy przy końcu roku odbierze x_{m-1}, czy też na $\frac{m-1}{m}$ roku wprzód otrzyma odpowiednio zdyskontowane x_{m-1} (przy stopie i od jednostki w stosunku rocznym), t. j., według wzoru (8), kwotę $\dfrac{x_{m-1}}{1+\frac{m-1}{m}i}$; czy przy końcu roku otrzyma x_{m-2}, czy też na $\frac{m-2}{m}$ roku wprzód odpowiednio zdyskontowaną kwotę: $\dfrac{x_{m-2}}{1+\frac{m-2}{m}i}$, i t. d. do końca.

Wypada stąd związek

$$i\left(1-\frac{\overline{m-1}\,.\,i_m}{2}\right)=m\,i_m\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21),$$

a z niego:

$$(22)\quad .\ i=\frac{2\,m\,i_m}{2-\overline{m-1}\,.\,i_m},\ \text{i naodwrót}\ \ i_m=\frac{2\,i}{2\,m+\overline{m-1}\,.\,i}\quad (22').$$

Np. stopie kwartalnej 1,5% ($i_4 = 0{,}015$) odpowiada

$$i=\frac{2\times 4\times 0{,}015}{2-3\times 0{,}015}=\frac{0{,}120}{1{,}955}=0{,}06138\ldots,$$

czyli 6,138%, a więc nie 6%, jak się to zwykle przyjmuje.

Naodwrót 6%, postnumerando rocznie, odpowiada w ratach półrocznych z dołu

$$i_2=\frac{2\times 0{,}06}{4+1\times 0{,}06}=\frac{0{,}12}{4{,}06}=0{,}029556\ldots,$$

czyli 2,956%, zatem nie 3%, jak się pospolicie przyjmuje.

Gdyby chodziło o przejście od stopy mniejszej od rocznych postnumerando do rocznej procentu płaconego z góry, można najprzód

---

Jeżeli ten podział procentu i tak przeprowadzimy, aby zawsze na zdyskontowaną część wypadła ta sama kwota, którą oznaczmy przez i_m, to wierzycielowi jest wszystko jedno, czy otrzyma po roku i, czy też co m-ta część roku z dołu po i_m. Że zaś, według powiedzianego, musi być $\dfrac{x_{m-1}}{1+\dfrac{m-1}{m}i}=i_m,\ \dfrac{x_{m-2}}{1+\dfrac{m-2}{m}i}=$ $=i_m,\ldots,\ \dfrac{x_1}{1+\dfrac{1}{m}i}=i_m,\ \dfrac{x_0}{1+\dfrac{0}{m}i}=i_m$, skąd

$$x_{m-1}=i_m\left(1+\frac{m-1}{m}i\right)$$

$$x_{m-2}=i_m\left(1+\frac{m-2}{m}i\right)$$

$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$

$$x_1=i_m\left(1+\frac{1}{m}i\right)$$

$$x_0=i_m\left(1+\frac{0}{m}i\right),$$

zatem, po zsumowaniu odpowiedniemi stronami, wypada $x_{m-1}+x_{m-2}+\ldots$ $\ldots+x_1+x_0=i=i_m\left(1+\frac{m-1}{m}i\right)+i_m\left(1+\frac{m-2}{m}i\right)+\ldots+i_m\left(1+\frac{1}{m}i\right)$ $+\,i_m\left(1+\frac{0}{m}i\right)$, czyli to samo, co mamy w tekście.

przejść do stopy procentu, płaconego rocznie z dołu (wzór 22), i od tej ostatniej do rocznej procentu, płaconego z góry, zapomocą wzoru (20); albo też wyprowadzić specyalny dla tego przejścia wzór, przez podstawienie w związek (21) $i = \frac{j}{1-j}$, stąd otrzymuje się:

$$(\alpha) \quad . \quad . \quad j = \frac{2\, m\, i_m}{2 + \overline{m+1} \,.\, i_m}, \qquad i_m = \frac{2j}{2m - \overline{m+1} \,.\, j} \quad . \quad . \quad (\alpha').$$

14. Ciąg dalszy art. 13-go. W drugim przypadku zakładamy, że procent co m-ta część roku wypłaca się z góry przy stopie j_m.

Obecnie pierwsza rata j_m procentuje przez cały rok, więc zamienia się przy końcu roku na $j_m\left(1+\frac{m}{m}i\right)$, druga na $j_m\left(1+\frac{m-1}{m}i\right)$, it. d.— ostatnia na $j_m\left(1+\frac{1}{m}i\right)$. Suma tych wartości powinna być równa i, czyli mamy:

$$i = j_m\left(1+\frac{m}{m}i\right) + j_m\left(1+\frac{m-1}{m}i\right) + \ldots\ldots + j_m\left(1+\frac{1}{m}i\right)$$

$$= m\, j_m + \frac{i \,.\, j_m}{m}(m + \overline{m-1} + \ldots . + 2 + 1) = m j_m + \frac{i \,.\, j_m}{m} \cdot \frac{m+1}{2} m$$

$$= m\, j_m + \frac{\overline{m+1} \,.\, i j_m}{2}.$$

Otrzymujemy tedy związek

$$i\left(1 - \frac{\overline{m+1} \,.\, j_m}{2}\right) = m j_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23),$$

z którego:

$$(24) \quad . \; i = \frac{2\, m\, j_m}{2 - \overline{m+1} \,.\, j_m}, \text{ i naodwrót } j_m = \frac{2\, i}{2m + \overline{m+1} \,.\, i} \quad (24').$$

Zakładając w tych wzorach $m = 1$, przychodzimy do wzorów (20′) i (20).

Przykładów liczebnych na ten przypadek podawać nie będziemy, działania bowiem wykonywają się bardzo łatwo; nadmienimy tylko, że przejście do stopy rocznej procentu płaconego z góry odbywa się tak samo, jak w przypadku poprzednim; można najprzód obliczyć i i następnie, za pomocą wzoru (20), obrachować j, albo wyprowadzić wzór na j, przez podstawienie w (23) $i = \frac{j}{1-j}$ (wzór 20′).

Czyniąc to ostatnie, otrzymujemy:

$$(\beta) \; . \; . \; . \quad j = \frac{2\,m\,j_m}{2 + \overline{m-1}\,.\,j_m}, \quad j_m = \frac{2\,j}{2\,m - \overline{m-1}\,.\,j} \quad . \; . \; (\beta').$$

Gdyby nam przedstawiono dwie oferty: jednę na $3^0/_0$ półrocznie z dołu, drugą na $1{,}45^0/_0$ kwartalnie z góry, t. j. $i_2 = 0{,}03$ i $j_4 = 0{,}0145$, to pierwsza oferta, według wzoru (22) sprowadza się do $i = \frac{2 \times 2 \times 0{,}03}{2 - 1 \times 0{,}03}$ $= 0{,}060913\ldots$, druga, według wzoru (24), do $i = \frac{2 \times 4 \times 0{,}0145}{2 - 5 \times 0{,}0145}$ $= 0{,}06018\ldots$, czyli pierwsza jest dla nas korzystniejsza od drugiej.

Podane w art. 12-m, 13-ym i niniejszym wzory wcale nie wyczerpują wszelkich możliwych przejść od jednego do innego rodzaju stóp procentowych — są one tylko zasadniczemi, z których wszelkie inne bardzo łatwo wyprowadzić się dają.

Gdybyśmy np. chcieli przejść bezpośrednio od stopy i_m do j_μ, zamieńmy najprzód jednę i drugą na równoważne z niemi stopy i, zapomocą wzorów (22) i (24).

Pierwszy wzór daje $i = \frac{2\,m\,i_m}{2 - \overline{m-1}\,.\,i_m}$, drugi $i = \frac{2\mu\,j_\mu}{2 - \overline{\mu+1}\,.\,j_\mu}$; jeżeli stopa i_m ma być równoważna stopie j_μ, obie dać powinny to samo i, czyli musi być

$$\frac{2\,\mu\,j_\mu}{2 - \overline{\mu+1}\,.\,j_\mu} = \frac{2\,m\,i_m}{2 - \overline{m-1}\,.\,i_m},$$

stąd:

$$(\gamma) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad j_\mu = \frac{2\,m\,i_m}{2\,\mu + (\mu + m)\,i_m}$$

Np. stopę półroczną procentu płaconego z góry równoważącą stopę kwartalną $2^0/_0$ procentu płaconego z dołu otrzymamy z (γ), zakładając

$$m = 4, \; i_m = i_4 = 0{,}02, \; \mu = 2,$$

stąd wypada:

$$j_2 = \frac{2 \times 4 \times 0{,}02}{2 \times 2 + (2+4) \times 0{,}02} = \frac{4}{103} = 0{,}03883\ldots.$$

Wyprowadzanie jednak specyalnych wzorów dla każdej kombinacyj stóp jest zbyteczne, każdy bowiem rachunek można przeprowadzić zapomocą wzorów zasadniczych.

Np. w danym przykładzie, zapomocą wzoru (22) możemy przejść od i_4 do odpowiedniego i, a od obrachowanego i do j_2 zapomocą wzoru (24').

Pierwszy daje:

$$i = \frac{2 \times 4 \times 0{,}02}{2 - 3 \times 0{,}02} = \frac{8}{97},$$

drugi:

$$j_2 = \frac{2 \times \frac{8}{97}}{2 \times 2 + 3 \times \frac{8}{97}} = \frac{4}{103} = 0{,}03883\ldots,$$

to samo, cośmy otrzymali poprzednio zapomocą wzoru (γ).

15. Uwagi. Powyżej (w art. 12-ym, 13-m i 14-m) wyprowadzone wzory wymagają pewnych objaśnień, podobnych jak przy dyskontowaniu sum.

We wzorach na i: (20′), (22) i (24) znajdują się w mianownikach różnice, co dowodzi, że gdy j, i_m lub j_m przybiorą odpowiednie wartości, i przyjmie wartość nieskończenie wielką, albo ujemną.

Takie wartości na i, wobec jego realnego znaczenia, dowodzą jakiejś niedorzeczności i rzeczywiście niedorzeczność w razach takich zachodzi, co dziwić nas nie powinno, gdy sobie przypomnimy, że j, i_m i j_m są sumami zdyskontowanemi (matematycznie), a przy dyskontowaniu matematycznem trafiliśmy na takie same przypadki.

Najłatwiej można to zrozumieć na wzorze (20′). Gdy w nim założymy $j = 1$, wypada $i = \infty$; lecz $j = 1$ oznacza, iż dłużnik płaci wierzycielowi z góry $100^0/_0$ od pożyczonego kapitału, czyli zwraca mu ten sam kapitał, który odeń pożyczył; pożyczka więc nie istnieje, cała tranzakcya jest fikcyą — niedorzecznością i to właśnie wskazuje nam rezultat $i = \infty$.

Gdy w (20′) założymy np. $j = 2$, wypada $i < 0$; lecz $j = 2$ oznacza, że dłużnik płaci wierzycielowi z góry $200^0/_0$ od pożyczonego kapitału, t. j. nietylko oddaje mu natychmiast wzięty kapitał, lecz jeszcze dodaje od siebie taki sam kapitał; t. j. nie wierzyciel pożycza dłużnikowi, lecz naodwrót dłużnik darowuje wierzycielowi umówiony kapitał. Mamy więc znowu niedorzeczność, którą nam przepowiedziało $i < 0$.

To samo, acz w bardziej skomplikowanej formie, zachodzi we wzorach (22), (24) i im podobnych. Jeżeli np. we wzorze (24) założymy $j_m = \frac{2}{m+1}$, $i = \infty$. Otóż gdy od j_m przejdziemy do j za pomocą wzoru (β), t. j. gdy w tym wzorze założymy $j_m = \frac{2}{m+1}$, otrzymamy:

$$j = \frac{2m \times \frac{2}{m+1}}{2 + m - 1 \times \frac{2}{m+1}} = 1,$$

czyli znajdziemy się w takiem samem położeniu, jak we wzorze (20') przy założeniu $j = 1$.

Gdy $j_m > \frac{2}{m+1}$, wówczas w taki sam sposób można okazać, że w podobnych warunkach przeprowadzona pożyczka wychodzi nietylko na natychmiastowe odebranie dłużnikowi pożyczonego mu kapitału, ale nadto jeszcze, na otrzymanie odeń jakiejś dodatkowej kwoty pieniędzy, co, oczywiście, nie ma żadnego sensu.

Pokazuje się stąd, że jeżeli chcemy się utrzymać w granicach dorzeczności, j we wzorze (20') nie może przekroczyć jedności ($j < 1$); we w zorze (22) musi być $i_m < \frac{2}{m-1}$, we wzorze (24) $j_m < \frac{2}{m+1}$.

Przeciwnie i może zawsze, teoretycznie, przybierać wszelkie wartości dodatnie, a j, względnie i_m lub j_m nie tracą znaczenia dorzecznego, jak to widać z wzorów (20), (22') i (24').

16. Uogólnienia. W artykułach poprzednich za najwyższy okres procentowania przyjmowaliśmy rok, ale nic, oczywiście, rzeczy nie zmieni, jeżeli za okres najwyższy przyjmiemy jakikolwiek przeciąg czasu, mniejszy lub większy od roku, byleśmy znali stopę okresu większego lub mniejszego oraz sposób płacenia procentów (z dołu lub z góry).

Tak np. gdybyśmy się umówili uważać za okres wyższy 8 lub 15 miesięcy i ustanowili od nich stopę I, to do rozłożenia jej na raty miesięczne można użyć tych samych co poprzednio wzorów, zakładając w pierwszym przypadku $m = 8$, w drugim $m = 15$, a $i = I$.

Np. przy okresie wyższym 8-o miesięcznym i stopie za te 8 miesięcy $I = 4\%$ procentu płaconego z dołu, stopą miesięczną procentu płaconego z góry będzie, według wzoru

$$j_m = \frac{2i}{2m + m + 1 \,.\, i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24'),$$

po podstawieniu w nim $i = 0{,}04$, $m = 8$,

$$j_8 = \frac{2 \times 0{,}04}{2 \times 8 + (8+1) \times 0{,}04} = 0{,}004889\ldots;$$

procentu płaconego miesięcznie z dołu, według wzoru (22'),

$$i_8 = \frac{2 \times 0{,}04}{2 \times 8 + (8-1) \times 0{,}04} = 0{,}004914\ldots.$$

Inaczej rzecz się ma, gdy, mając ustanowioną stopę od takiego czy innego okresu, np. od rocznego, chcemy ją rozłożyć na raty mniejsze, dajmy na to — na miesięczne, lecz w liczbie mniejszej od liczby miesięcy w roku, np. na 8 miesięcy: początkowych, końcowych, albo w innym ułożonych porządku. Wtedy wzory poprzednie już nie wystarczą i trzeba wyprowadzić inne, zastosowane do danych warunków.

Jeżeli mianowicie założymy ogólnie w roku (przy stopie i od jednostki procentu płaconego z dołu) ν okresów mniejszych i chcemy spłacić procent roczny w ciągu pierwszych m okresów ($m < \nu$) w ratach równych co ν-a część roku z dołu; wtedy, oznaczając stopę ratową przez $i_{m,\nu}$, mamy:

$$i_{m,\nu}\left(1+\frac{\nu-1}{\nu}i\right)+i_{m,\nu}\left(1+\frac{\nu-2}{\nu}i\right)+\ldots+i_{m,\nu}\left(1+\frac{\nu-m}{\nu}i\right)=i,$$

$$m\, i_{m,\nu}+\frac{i\,.\,i_{m,\nu}}{\nu}\left(\overline{\nu-1}+\overline{\nu-2}+\ldots+\overline{\nu-m}\right)=i,$$

$$m\, i_{m,\nu}+\frac{i\,.\,i_{m,\nu}}{\nu}\,.\left(\frac{\overline{\nu-1}+\overline{\nu-m}}{2}\,.\,m\right)=i,$$

$$\{2\,m\,.\,\nu+m\,(2\,\nu-\overline{m+1})\,i\}\,.\,i_{m,\nu}=2\,\nu\,.\,i,$$

$$(\delta)\quad\ldots\ldots\quad i_{m,\nu}=\frac{2\,\nu\,i}{2\,m\nu+m\,(2\nu-\overline{m+1})i}.$$

Gdyby np. chodziło o spłacenie procentu, przy stopie 6% rocznie, płatnego z dołu, w 8-miu ratach miesięcznych procentu płaconego również z dołu przez pierwsze 8 miesięcy, to należy w (δ) podstawić $\nu=12$, $m=8$, $i=0{,}06$ i wtedy znajdziemy:

$$i_{8,12}=\frac{2\times 12\times 0{,}06}{2\times 8\times 12+8\,(2\times 12-\overline{8+1})\times 0{,}06}=0{,}007228\ldots$$

Gdyby chodziło o taką samą spłatę, lecz w ciągu ośmiu miesięcy końcowych, i wzór i stopa wypadłyby inne.

Słowem, jak w każdej teoryi, tak samo i w zajmującej nas obecnie, przy jej stosowaniu do zagadnień praktycznych, należy, po dokładnem rozpoznaniu warunków zadania, umiejętnie zastosować posiadane wiadomości teoretyczne; niepodobna bowiem, nawet nie licząc się z miejscem, wyczerpać wszystkich, zdarzyć się mogących w życiu kombinacyj i podać wzory na każdy przypadek, choćby dlatego, że wszystkich kombinacyj z góry przewidzieć nie można.

17. Uzupełnienie art. 9-go i 10-go. Podane wyżej sposoby rozkładania procentów na rozmaitej długości okresy czasu dają rezultaty różne od proporcyonalnego podziału stóp*). Wynikło to stąd, że procenty płacone ratami mniejszemi oprocentowywaliśmy na koniec okresu większego.

Na pierwszy rzut oka może się wydawać, iż postępowanie takie wkracza w zakres procentów składanych (procentowanie procentów), lecz z art. 12-go i z przypisku do art. 13-go okazuje się jasno, że tak nie jest, cała bowiem manipulacya sprowadza się do zwykłego dyskontowania (matematycznego), a to mieści się w granicach oprocentowania zwyczajnego.

Kto się na takie postępowanie nie zgadza, może z niniejszego rozdziału wykreślić artykuły od 12-go do 18-go; lecz kto się zgadza, musi zrobić zarzut nieścisłości rachunkom przeprowadzonym w art. 9-ym, 10-ym i 11-ym, pomimo, że podane tam wzory są najczęściej w praktyce używane. Nieścisłość polega właśnie na nieoprocentowaniu spłat, względnie z góry wniesionego procentu do chwili zupełnego umorzenia długu.

Gdy oprocentowanie to uwzględnimy, rachunek art. 9-go, gdy raty wnoszą się z dołu, przedstawi się jak następuje:

$$x\left(1+\frac{m-1}{\nu}i\right)+x\left(1+\frac{m-2}{\nu}i\right)+\ldots+x\left(1+\frac{0}{\nu}i\right)=K\left(1+\frac{m}{\nu}i\right),$$

$$m\,x+\frac{m-1}{2}\,.\,m\,.\,\frac{i\,x}{\nu}=K\left(1+\frac{m}{\nu}i\right),$$

$$x=\frac{2K}{m}.\frac{\nu+mi}{2\nu+\overline{m-1}\,.\,i}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(25),$$

a gdy podstawimy $x = \frac{K}{m}(1+I)$,

$$(26)\;.\;.\quad I=\frac{\overline{m+1}\,.\,i}{2\nu+\overline{m-1}\,.\,i};\qquad i=\frac{2\nu I}{\overline{m+1}-\overline{m-1}\,.\,I}\;.\quad(26').$$

Przy $\nu = m$ jest:

$$(27)\;.\;.\quad I=\frac{\overline{m+1}\,.\,i}{2\,m+\overline{m-1}\,.\,i};\qquad i=\frac{2mI}{\overline{m+1}-\overline{m-1}\,.\,I}\;.\quad(27').$$

Rachunek art. 10-go, gdy raty wnoszą się z góry, jest następujący:

$$x\left(1+\frac{m}{\nu}i\right)+x\left(1+\frac{m-1}{\nu}i\right)+\ldots+x\left(1+\frac{1}{\nu}i\right)=K\left(1+\frac{m}{\nu}i\right)$$

*) Np. stopie rocznej 6% nie odpowiada półroczna 3%, kwartalna 1,5%, i t. d. — jak się to często przyjmuje w praktyce finansowej.

$$mx + \frac{m+1}{2} \, . \, m \, . \, \frac{ix}{\nu} = K\left(1 + \frac{m}{\nu} i\right),$$

$$x = \frac{2K}{m} \, . \, \frac{\nu + mi}{2\nu + \overline{m+1} \, . \, i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28).$$

Po podstawieniu $x = \frac{K}{m}(1 + I')$ będzie:

$$(29) \quad . \quad I' = \frac{\overline{m-1} \, . \, i}{2\nu + \overline{m+1} \, . \, i}\,; \qquad i = \frac{2\nu I'}{\overline{m-1} - \overline{m+1} \, . \, I'} \, . \quad (29').$$

Przy $\nu = m$ jest:

$$(30) \quad I' = \frac{\overline{m-1} \, . \, i}{2m + \overline{m+1} \, . \, i}\,; \qquad i = \frac{2mI'}{\overline{m-1} - \overline{m+1} \, . \, I'} \, . \quad (30').$$

18. Uzupełnienie art. 11-go. W art. 11-ym cały rachunek zmienia się o tyle tylko, że za $K \, . \, j_{c,\,m,\,\nu}$ należy podstawić $K \, . \, j_{c,\,m,\,\nu}\left(1 + \frac{m}{\nu} i\right)$.

Wtedy:

$$K . j_{c,\,m,\,\nu}\left(1 + \frac{m}{\nu} i\right) + \frac{K}{m}\left(1 + \frac{m-1}{\nu} i\right) + \frac{K}{m}\left(1 + \frac{m-2}{\nu} i\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{K}{m}\left(1 + \frac{0}{\nu} i\right) = K\left(1 + \frac{m}{\nu} i\right),$$

$$K . j_{c,\,m,\,\nu}\left(1 + \frac{m}{\nu} i\right) + K + \frac{K}{m} \, . \, \frac{i}{\nu} \, . \, \frac{m-1}{2} \, . \, m = K + K \, . \, \frac{mi}{\nu},$$

$$(31) \quad . \quad j_{c,\,m,\,\nu} = \frac{\overline{m+1} \, . \, i}{2(\nu + mi)}\,; \qquad i = \frac{2\nu j_{c,\,m,\,\nu}}{\overline{m+1} - 2m j_{c,\,m,\,\nu}} \, . \quad (31').$$

Stosując np. wzór (31) do przykładu, podanego w art. 11-m, znajdziemy dla $m = 8$, $\nu = 12$, $i = 0{,}06$

$$j_{c,\,8,\,12} = \frac{(8+1) \times 0{,}06}{2(12 + 8 \times 0{,}06)} = 0{,}0216 \ldots .$$

podczas gdy w art. 11-ym otrzymaliśmy 0,0225 . . .

Od 600 rub. spłacanych miesięcznie po 75 rub., należy zapłacić jednorazowo z góry procentu $600 \times 0{,}0216 = 12{,}96$, gdy według art. 11-go musielibyśmy zapłacić 13,50.

Przy $\nu = m$ jest:

$$(32) \quad . \; . \; . \quad j_{c,\,m} = \frac{\overline{m+1} \, . \, i}{2m(1+i)}\,; \qquad i = \frac{2m j_{c,\,m}}{\overline{m+1} - 2m j_{c,\,m}} \quad . \; . \quad (32').$$

B. Procent składany.

19. Wiadomości wstępne. Według definicyi podanej w art. 2-im, gdy procent co każdy okres zostaje do kapitału włączony i nadal liczy się procent od tak zwiększonego kapitału, taki sposób procentowania zowie się składanym, a powstające stąd zwiększenie kapitału pierwotnego — procentem skapitalizowanym.

Procent składany, tak samo jak zwyczajny, może być liczony przy oprocentowaniu z dołu (postnumerando), jak i z góry (praenumerando). Najprzód zajmiemy się pierwszym, a później dopiero sposobem drugim.

Kapitalizowanie procentów, podobnie jak przy oprocentowaniu zwyczajnem, może się dokonywać dowolnemi, według umowy, okresami i postępowanie zawsze jest jednakie, o ile znamy stopę dla danego okresu. Najczęściej wszakże stosowanym okresem procentowania składanego jest rok i dlatego, jak oraz gwoli ułatwienia sobie wyrażeń, używać będziemy, tak samo jak przy procentach zwyczajnych, zamiast terminu „okres" — wyrazu „rok", chociaż przez ten okres można również, w razie potrzeby, rozumieć „półrocze", „kwartał" i t. d., o ile znamy odpowiednią stopę i o ile kapitalizowanie procentów istotnie w tych krótszych okresach czasu zachodzi.

20. Kapitalizowanie procentów. Jeżeli stopę roczną procentu, liczonego z dołu od jednostki, oznaczymy przez i, kapitał oddany na procent przez K, a sumę, powstałą z dołączenia skapitalizowanego procentu do kapitału pierwotnego, przez S, to kapitał pierwotny K po roku zamienia się, według wzoru (4), przy $n = 1$, na

$$S_1 = K(1 + i),$$

która to suma na następny rok podlega w całości oprocentowaniu, czyli po upływie następnego roku, t. j. po dwóch latach, licząc od początku, K zamienia się na

$$S_2 = K(1 + i) \cdot (1 + i) = K(1 + i)^2.$$

Drogą takiego samego rozumowania przekonamy się, iż po 3-ch latach K zamienia się na $S_3 = K \cdot (1 + i)^3$, po 4-ch latach — na $S_4 = K(1+i)^4$ i t. d., wogóle po n latach na

$$S_n = K \cdot (1 + i)^n. \quad \dots\dots\dots \quad (33).$$

Jeżeli od (33) odejmiemy pierwotny kapitał K, otrzymamy na skapitalizowany przez n lat, od kapitału K, procent wyrażenie:

$$S_n - K = K \cdot (1 + i)^n - K = K \cdot \{(1 + i)^n - 1\},$$

albo, oznaczając ten skapitalizowany procent przez P, mamy:

$$P = K\{(1 + i)^n - 1\}. \quad \dots\dots\dots \quad (34).$$

Czynnik $(1+i)$ nazywa się czynnikiem oprocentowującym i oznacza się zwykle przez r, t. j.

$$r = 1 + i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Skutkiem tego, wzór (33) można napisać w postaci

$$S_n = K \, . \, r^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33'),$$

t. j. aby otrzymać sumę, na jaką kapitał, oddany na procent składany przy stopie i od jednostki, zamienia się po n latach, należy ten kapitał pomnożyć przez czynnik oprocentowujący, podniesiony do potęgi n.

Np. 10000 rub., oddane na procent składany przy stopie 4% postnumerando, po 3-ch latach zamienia się na

$$S_3 = 10000 \times (1{,}04)^3 = 10000 \times 1{,}124864 = 11248{,}64.$$

Przy zastosowaniu zwyczajnego sposobu oprocentowania, mielibyśmy tylko

$$10000 \, . \, (1 + 0{,}04 \times 3) = 10000 \times 1{,}12 = 11200,$$

t. j. mniej o 48,64.

Jeżeli w (33′) założymy $K = 1$, wyrażenie przejdzie na

$$S_n = r^n = (1+i)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33'')$$

i oznacza sumę, na jaką zamienia się jednostka kapitału po n latach przy stopie i procentu składanego.

Znając taką sumę, łatwo obliczyć można, na co zamienia się, w tych samych warunkach, jakikolwiek kapitał, wystarczy bowiem (33″) pomnożyć przez dany kapitał.

Z tego powodu, dla ułatwienia rachunków, obliczone zostały wartości r^n przy różnych stopach procentowych i na rozmaitą liczbę lat — najczęściej od 1 do 100. Tablicę taką podajemy przy końcu książki jako Tabl. I. Jeżeli z pomocą tej tablicy chcemy np. obrachować, na co zamienia się 6000 rub. po 43 latach, przy stopie $3\frac{1}{2}\%$ procentu składanego, wystarczy liczbę, podaną w kolumnie 5-ej ($3\frac{1}{2}\%$) i wierszu 43-im, pomnożyć przez 6000. Uczyniwszy to, otrzymamy

$$4{,}38970202 \times 6000 = 26338{,}21$$

t. j. 6000 rub. w powyższych warunkach zamienia się na 26338 rub. 21 kop.

21. Wzajemna zamiana stóp procentowych różnookresowych. W poprzednim artykule przyjęliśmy rok za okres procentowania, lecz w art. 19-ym zrobiliśmy uwagę, że przy okresach krótszych od roku, np. półrocznych, kwartalnych lub miesięcznych, postępuje się tak samo, o ile znamy stopę procentową, odpowiednią okresowi krótszemu, co w zupełności stwierdza przebieg naszego rozumowania.

Jeżeli jednak stopy procentowej, odpowiedniej okresowi krótszemu od roku, nie znamy, tylko gdy znamy roczną, a oprocentowanie ma się liczyć okresami krótszemi od rocznych, to przedewszystkiem odszukać należy stopę, odpowiadającą okresowi krótszemu, którąby jednak dawała ten sam rezultat co i dana stopa roczna przy kapitalizacyi rocznej.

Owóż jeżeli, zgodnie z art. 4-ym, przez i oznaczymy stopę roczną, a przez $i_{\frac{1}{m}}$ stopę odpowiednią okresowi, stanowiącemu m-tą część roku, w takim razie np. w n latach mieści się takich (mniejszych) okresów $m \,.\, n$, które, przy stopie $i_{\frac{1}{m}}$, dać powinny to samo, co n okresów rocznych przy stopie i, t. j. powinno być:

$$(1 + i_{\frac{1}{m}})^{m \cdot n} = (1 + i)^n, \quad \text{albo} \quad (1 + i_{\frac{1}{m}})^m = 1 + i.$$

Stąd

$$1 + i_{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{1 + i} = (1 + i)^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}}, \quad i_{\frac{1}{m}} = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1 = r^{\frac{1}{m}} - 1 \ (\alpha),$$

czyli stopą $\frac{1}{m}$ okresową, obliczoną z rocznej i, jest $r^{\frac{1}{m}} - 1$, a czynnikiem oprocentowującym $r^{\frac{1}{m}} = 1 + i_{\frac{1}{m}} = (1 + i)^{\frac{1}{m}}$.

Naodwrót:

$$1 + i = (1 + i_{\frac{1}{m}})^m, \quad i = (1 + i_{\frac{1}{m}})^m - 1 \quad . \; . \; . \; . \; (\alpha'),$$

stąd z danej stopy $\frac{1}{m}$ okresowej możemy obrachować równoważną jej stopę i czynnik oprocentowujący roczny, albo, ogólniej się wyrażając, za okres m razy dłuższy od m-tej części roku.

Np. stopie rocznej 5% ($i = 0{,}05$) odpowiada stopa kwartalna $i_{\frac{1}{4}} = (1{,}05)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}012272$, czyli $s\% = 1{,}2272\%$.

Naodwrót stopa półroczna 2% odpowiada stopie rocznej

$$i = (1{,}02)^2 - 1 = 0{,}0404, \text{ czyli } s\% = 4{,}04\%.$$

To znaczy, że ten sam osiągniemy rezultat z kapitalizowania procentów kwartalnie przy stopie $1{,}2272\%$ co i z kapitalizowania procentów rocznie przy stopie 5%; to samo z kapitalizowania procentów półrocznie przy stopie 2% co i z kapitalizowania procentów rocznie przy stopie $4{,}04\%$.

Gdyby nam teraz chodziło o stopę i o czynnik oprocentowujący dla okresu $\frac{l}{m}$ rocznego, należy, według (α'), podnieść (α) do potęgi l, co czyniąc, otrzymujemy:

$$1 + i_{\frac{l}{m}} = (1+i)^{\frac{l}{m}} = r^{\frac{l}{m}}, \quad \text{stąd} \quad i_{\frac{l}{m}} = (1+i)^{\frac{l}{m}} - 1 = r^{\frac{l}{m}} - 1 \quad (36),$$

i naodwrót:

$$r = 1 + i = (1 + i_{\frac{l}{m}})^{\frac{m}{l}}, \quad i = (1 + i_{\frac{l}{m}})^{\frac{m}{l}} - 1. \quad . \quad . \quad (36').$$

Np. przy $i = 0{,}05$, stopą procentową dla okresu trzykwartalnego jest $i_{\frac{3}{4}} = (1{,}05)^{\frac{3}{4}} - 1 = 0{,}03727$; stąd $s^0/_0 = 3{,}727^0/_0$. Z oprocentowania więc trzykwartalnego 1000 rub., systemem składanym, przy stopie rocznej $5^0/_0$, otrzymujemy $1{,}03727 \times 1000 = 1037{,}27$.

22. Kapitalizowanie procentów przez niecałkowitą liczbę lat. Z rozumowania, które nas doprowadziło do wzoru (33), względnie (33'), wypada, że przez n rozumieć należy całkowitą liczbę lat (w ogóle okresów). Może się jednak trafić, że kapitał zostaje oddany na procent składany na niecałkowitą liczbę lat.

W praktyce oblicza się najczęściej rezultat w ten sposób, że się obrachowuje najprzód sumę, na jaką zamienia się kapitał po upływie pełnej liczby lat, następnie otrzymany rezultat oprocentowuje się sposobem zwykłym za pozostałą część roku.

Gdybyśmy np. oddali kapitał K na lat $n + \frac{l}{m}$, gdzie n całkowite, $\frac{l}{m} < 1$, to byłoby:

$$S_{n+\frac{l}{m}} = K \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + \frac{l}{m} i\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37').$$

Np. jeżeli K, jak przy końcu art. 20-go, równa się 6000 rub., $i = 0{,}035$, $n = 43\frac{1}{4}$, w takim razie:

$$S_{43\frac{1}{4}} = 6000 \times (1{,}05)^{43} \cdot (1 + 0{,}035 \times 0{,}25) = 26568{,}67.$$

Sposób ten stanowi zatem połączenie systemu złożonego ze zwyczajnym (prostym), czego za właściwe uznać nie można. Żeby dojść do rezultatu właściwego, uwzględniającego jeden tylko system składany, trzeba, oczywiście, $K \cdot (1+i)^n$ pomnożyć przez czynnik oprocentowujący systemem składanym, t. j. według (36), przez $(1+i)^{\frac{l}{m}}$; stąd otrzymamy:

$$S_{n+\frac{l}{m}} = K \cdot (1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{l}{m}} = K \cdot (1+i)^{n+\frac{l}{m}} = Kr^{n+\frac{l}{m}},$$

czyli wzór (33), względnie (33'), w art. 20-ym, stosuje się tak dobrze do n całkowitego, jak i do niecałkowitego.

Różnica pomiędzy rezultatami, otrzymanemi obu sposobami, jest niewielka, zwłaszcza przy zazwyczaj małem i. Dowieść tego można analitycznie, dla nas jednak wystarczy przykład liczebny.

W ostatnim przykładzie

$$S_{43\frac{1}{4}} = 6000 \times (1{,}035)^{43\frac{1}{4}} = 6000 \times (1{,}035)^{\frac{173}{4}}.$$

Otóż

$$\log S_{43\frac{1}{4}} = \log 6000 + \frac{173}{4} \log 1{,}035 = 4{,}4243193,$$

czyli $S_{43\frac{1}{4}} = 26565{,}60$—różne od poprzedniej sumy prawie o 3 ruble, co, przy 26565 rub., ma małe znaczenie; ale sposób drugi jest prawidłowszy i, co ważniejsza, dla wywodów teoretycznych — niezbędny.

23. Cztery zasadnicze zagadnienia na procenty składane. Ponieważ wzór (33), względnie (33') zawiera w sobie cztery wielkości: kapitał pierwotny K, sumę powstałą z kapitału pierwotnego, zwiększonego o procent skapitalizowany — S_n, stopę i oraz czas n, przeto daje on materyał do czterech następujących zagadnień: 1-o mając K, i, n — znaleść S_n; 2-o mając S_n, i, n — znaleść K; 3-o mając K, S_n, n — znaleść i; wreszcie 4-o mając K, S_n, i — znaleść n.

Wzorami rozwiązującemi te zagadnienia są:

$$S_n = K \cdot r^n \quad \ldots\ldots \quad (38),$$

$$K = \frac{S_n}{r^n} \quad \ldots\ldots \quad (38'),$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{S_n}{K}}, \text{ albo } \log r = \frac{\log S_n - \log K}{n}, \text{ stąd } i = r - 1 \quad (38''),$$

$$n = \frac{\log S_n - \log K}{\log r} \quad \ldots\ldots \quad (38''').$$

Wyrażenia powyższe można obrachować zapomocą logarytmów.

Jeżeli np. $K = 20000$, $S_{20} = 50000$, $n = 20$, otrzymujemy:

$$\log r = \frac{4{,}6989700 - 4{,}3010300}{20} = 0{,}0198970;$$

stąd $r = 1{,}04688$, czyli $i = 0{,}04688$, $s\,{}^0\!/_0 = 4{,}688\,{}^0\!/_0$.

Dla $K = 12000$, $S_n = 25000$, $s = 5\%$ będzie:

$$n = \frac{4,3979400 - 4,0791812}{0,0211893} = 15,043.$$

Jeżeli jednak mamy pod ręką Tabl. I, zwłaszcza podaną dla blizkich sobie stóp procentowych i z dostateczną liczbą cyfr dziesiętnych, to wszystkie cztery zadania można rozwiązać bez użycia logarytmów.

Jak się oblicza S_n z danego kapitału, stopy i czasu, to wiemy już z art. 20-go.

Dla zadania drugiego weźmy przykład następujący: jaki kapitał należy oddać na procent składany przy stopie 4%, aby po 16-latach mieć 12500 rub. Otóż, skoro, według Tabl. I, jednostka kapitału po 16-latach, przy stopie 4%, zamienia się na 1,87298125, to, oczywiście, na 12500 rub., przy tych samych warunkach, zamieni się jednostek

$$12500 : 1,87298125 = 6673,85.$$

Dla zadania 3-go i 4-go weźmiemy te same przykłady, które rozwiązaliśmy zapomocą logarytmów — mianowicie:

Zadanie 3-e. Przy jakiej stopie procentowej oddać należy kapitał 20000, aby po latach 20 mieć 50000.

Skoro 20000 ma się zamienić na 50000, to jednostka powinna się zamienić na $\frac{50000}{20000} = 2,5$.

Poszukajmy w wierszu, odpowiednim 20-tu latom, dwóch liczb, mieszczących pomiędzy sobą 2,5; są niemi:

2,41171402, która odpowiada stopie $4,5\%$

oraz 2,65329771, odpowiadająca stopie 5%,

t. j. gdy stopa zwiększa się o $0,5\%$, suma, na jaką zamienia się jednostka po 20-tu latach, zwiększa się

$$\text{o}\quad \begin{array}{r} 2,65329771 \\ -\,2,41171402 \\ \hline 0,24158369; \end{array}$$

żeby więc ta suma zwiększyła się tylko

$$\text{o}\quad \begin{array}{r} 2,50000000 \\ -\,2,41171402 \\ \hline 0,08828598, \end{array}$$

stopa procentowa zwiększyć się powinna

$$\text{o}\ \frac{1}{2} \times \frac{0,08828598}{0,24158369} = 0,1827,$$

czyli wynosi $4{,}5 + 0{,}1827 = 4{,}6827\%$, t. j. różni się od obliczonej zapomocą logarytmów dopiero w trzeciej cyfrze dziesiętnej.

Zadanie 4-te. Przez ile lat musi procentować kapitał 12000, aby, przy stopie 5%, zamienił się na 25000? Tu jednostka kapitału zamienia się na

$$\frac{25000}{12000} = 2{,}08333333.$$

Otóż w kol. z 5% odszukajmy dwóch bezpośrednio po sobie idących liczb, pomiędzy któremi znajduje się powyżej obliczona liczba 2,08333333. Znajdujemy

liczbę 2,07892818, której odpowiada 15 lat
„ 2,18287459, „ „ 16 „ ,

t. j. gdy liczba wzrosła

$$\begin{array}{r} \text{o } 2{,}18287459 \\ -2{,}07892818 \\ \hline 0{,}10394641\,, \end{array}$$

liczba lat wzrosła o rok; zatem, gdy liczba wzrasta

$$\begin{array}{r} \text{o } 2{,}08333333 \\ -2{,}07892818 \\ \hline 0{,}00440515, \end{array}$$

liczba lat wzrość powinna

$$\text{o } \frac{0{,}00440515}{0{,}10394641} = 0{,}042,$$

czyli kapitał 12000, przy stopie 5%, zmienia się na 25000 po 15,042 latach. Ta liczba lat od otrzymanej zapomocą logarytmów różni się tylko o 0,001.

Rozumie się, że ani logarytmy, ani Tabl. I nie dają rezultatów bezwzględnie ścisłych, gdyż i logarytmy i Tabl. I posiadają ograniczoną ilość cyfr dziesiętnych i dlatego, że przyjmujemy tu proporcyonalność, która w istocie nie zachodzi. W każdym razie rezultaty nie są zbyt oddalone od prawdziwych.

Uwaga. Gdyby w zadaniu 1-em, 2-em lub 3-em była dana niecałkowita liczba lat, Tabl. I bezpośrednio rozwiązania nie daje. Należy wtedy przez interpolacyę proporcyonalną obliczyć z Tabl. I wiersz odpowiedni danej liczbie lat (niecałkowitej) i następnie postąpić jak wyżej.

Dajmy np. że 1000 rub. po $10\frac{1}{2}$ latach zamieniają się na 1500 rub.;

zachodzi pytanie, przy jakiej stopie procentowej? Jednostka zamienia się tym razem na $\frac{1500}{1000} = 1{,}5$.

Z Tabl. I, z wierszy, odpowiadających czasowi lat 10 i 11, obliczamy proporcyonalnie, na co zamienia się jednostka po $10\frac{1}{2}$ latach przy różnych stopach procentowych. I znajdujemy:

przy stopie	$3\frac{1}{2}\%$	4%	$4\frac{1}{2}\%$
jednostka po $10\frac{1}{2}$ latach zamienia się na . .	1,43528424	1,50984917	1,58791124

Widzimy stąd, że 1,5 mieści się

pomiędzy	1,50984917,	czemu odpowiada stopa 4%
a	1,43528424,	„ „ „ $3\frac{1}{2}\%$
przyrost	0,07456493	odpowiada przyrostowi $\frac{1}{2}\%$, więc
przyrost liczby	1,50000000 − 1,43528424	
o	0,06471576	odpowiada przyrostowi stopy procen-

towej o $\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}06471576}{0{,}07456493} = 0{,}434$, czyli stopa szukana $= 3{,}5 + 0{,}434 = 3{,}934\%$.

24. Dyskontowanie kapitałów (systemem składanym). W artykule 23-im otrzymaliśmy, pomiędzy innemi, wzór

$$K = \frac{S_n}{r^n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38'),$$

z którego, zapomocą logarytmów lub Tabl. I, byliśmy w możności obrachować kapitał, jaki oddać należy na procent składany, przy danej stopie, aby po n latach otrzymać sumę S_n. Inaczej mówiąc, jest to teraźniejsza wartość kapitału S_n, płatnego po n latach przy danej stopie procentowej.

Gdy więc wogóle kapitał (S_n) oznaczymy przez K, a jego wartość teraźniejszą przez T_n, to wzór (38') można napisać w kształcie

$$T_n = \frac{K}{r^n} = \frac{K}{(1+i)^n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39).$$

Zowie się to zdyskontowaną albo odprocentowaną (systemem składanym) wartością*) kapitału płatnego po n latach przy danej stopie i od jednostki, którą to wartość rozróżnić należy od wartości zdyskontowanej systemem zwyczajnym, jaką się otrzymuje z wzoru (8)

*) T. j. kapitałem, po wyłączeniu z danej sumy skapitalizowanego procentu.

w artykule 7-ym. Różnica znika w jednym tylko przypadku—gdy $n = 1$, wtedy bowiem z obu wzorów (39) i (8), przy $S = K$, otrzymujemy ten sam rezultat $\frac{K}{1+i}$.

Gdy w ostatniem wyrażeniu podstawimy $K = i$, wypadnie znany nam, z art. 12-go wzór (20), przedstawiający stopę j procentu, liczonego z góry, równoważną stopie i procentu, liczonego z dołu — tak, że wzór ten równie dobrze stosuje się do oprocentowania zwyczajnego jak i do składanego.

Gdy we wzorze (39) założymy $K = 1$, otrzymamy:

$$T_n = \frac{1}{r^n} = \frac{1}{(1+i)^n} \quad \text{. . . . .} \quad (40)$$

jako wartość zdyskontowaną jednostki kapitału, i gdybyśmy posiadali tablicę tych zdyskontowanych jednostek przy różnych stopach procentowych i na rozmaitą liczbę lat, to moglibyśmy z łatwością dyskontować każdy kapitał na dowolną liczbę lat przy różnych stopach procentowych. Wystarczyłoby wtedy dany kapitał pomnożyć przez odpowiednią liczbę, znajdującą się w tablicy.

Tablica taka została istotnie obrachowana; podajemy ją na końcu książki jako Tabl. II. Liczby w niej zamieszczone są poprostu odwrotnościami odpowiednich liczb Tabl. I-ej, albowiem wartością ich jest

$$v^n = \frac{1}{r^n} = \frac{1}{(1+i)^n},$$

tak, że $v^n \cdot r^n = 1$, jak to łatwo sprawdzić można z obu naszych tablic.

Np. z Tabl. I . . $r^{25} = (1+0,05)^{25} = 3,38635494$

„ „ II . . $v^{25} = \frac{1}{(1+0,05)^{25}} = 0.2953028$,

iloczyn $3,38635494 \times 0,2953028 = 1$.

Czynnik

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i} \quad \text{. . . . .} \quad (41)$$

zowie się czynnikiem odprocentowującym lub dyskontującym i odgrywa bardzo ważną rolę w praktyce, zwłaszcza w obliczeniach, odnoszących się do ubezpieczeń życiowych*). Gdy go wprowadzimy do wzoru (39), otrzymamy:

---

*) Często czynnik dyskontujący oznacza się przez ρ; ponieważ jednak w książce niniejszej jeden rozdział będzie poświęcony ubezpieczeniom, dla których użyjemy międzynarodowego systemu znakowania, a w nim czynnik dyskontujący przyjęto oznaczać przez v, zatem, już tutaj, dla jednostajności, takie wprowadzamy oznaczenie

$$T_n = K \cdot v^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39').$$

Wzór (39′) daje materyał do czterech zagadnień, zupełnie takich samych jak wzór (33) dla kapitalizacyi procentów, mianowicie: 1-o znając K, v, n — obliczyć T_n; 2-o znając T_n, v, n — obrachować K; 3-o znając T_n, K, n — znaleść v, względnie i; 4-o mając K, T_n, v—obrachować n.

Odnośnemi rozwiązaniami są:

$$T_n = K \cdot v^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39'),$$

$$K = \frac{T_n}{v^n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39''),$$

$$v = \sqrt[n]{\frac{T_n}{K}}, \text{ albo} \log v = \frac{\log T_n - \log K}{n}; \text{ stąd obliczamy: } \frac{1}{v} = r,$$

$$i = r - 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39'''),$$

$$n = \frac{\log T_n - \log K}{\log v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39'''').$$

Wszystkie te zadania, podobnie jak w art. 23-im, mogą być rozwiązane albo zapomocą logarytmów, lub też zapomocą Tabl. II.

Chciejmy np. znaleść, przy jakiej stopie procentowej dyskontuje się 10000 rub. na 5000 przy 15 latach.

Zdyskontowana wartość jednostki wynosi $\frac{5000}{10000} = 0{,}5$.

W Tabl. II, w wierszu 15-ym znajdujemy:

$$\begin{array}{rl} 0{,}5167204 & \text{przy } 4\tfrac{1}{2}\% \\ -\,0{,}4810171 & \;\text{„}\;\; 5\%, \end{array}$$ czyli suma zdyskontowana zmniejsza się o $0{,}0357033$ skoro stopa zwiększa się o 0,5%;

gdy więc suma zdyskontowana zmniejszy się

$$\begin{array}{r} \text{o } 0{,}5167204 \\ -\,0{,}5000000 \\ \hline 0{,}0167204\,, \end{array}$$

stopa musi się zwiększyć o $\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}0167204}{0{,}0357033} = 0{,}234$, t. j. równa się $4{,}5 + 0{,}234 = 4{,}734\%$.

Gdyby liczba lat była niecałkowita, postąpić należy podobnie, jak przy końcu art. 23-go.

C. Kapitalizowanie i dyskontowanie wkładów*).

25. Objaśnienia. Jeżeli do jakiej specyalnej instytucyi finansowej, np. do kasy oszczędnościowej, wnosić będziemy co czas pewien jakąś sumę pieniędzy, od których liczyć się ma procent składany, to po upływie pewnego czasu uzbiera się na naszym rachunku jakiś kapitał, zależny od wysokości wnoszonych wkładów, od czasu, przez jaki każdy wkład procentuje, i od stopy procentowej.

Otóż bardzo duże znaczenie praktyczne posiada umiejętność obliczania w ten sposób powstającego kapitału, i naodwrót, umiejętność obrachowania, co dziś warte są w kapitale przyszłe wkłady, wnoszone co czas pewien przy danej stopie procentu składanego.

Pierwsza część tego zadania stanowi t. zw. kapitalizowanie wkładów, druga — dyskontowanie wkładów. Przytem rozróżnić należy kilka przypadków.

Wkłady mogą być wnoszone w jednakowych lub w zmiennych odstępach czasu i mogą być zawsze jednakiej wysokości, czyli stałe, albo różnej wysokości, czyli zmienne. Wkłady zmienne mogą być jednostajnie albo niejednostajnie zmienne. Wkłady jednostajnie zmienne mogą być rosnące, albo malejące; wreszcie wkłady mogą być wnoszone z góry, t. j. na początku każdego okresu, albo z dołu, czyli przy końcu każdego okresu czasu.

Wzory ogólne mogą być, oczywiście, wyprowadzone tylko dla wkładów stałych lub jednostajnie zmiennych, wnoszonych w jednakowych odstępach czasu, które zarazem są okresami procentowania.

Każdy z tych przypadków rozpatrywać będziemy oddzielnie; przytem za okres wnoszenia i procentowania wkładów przyjmiemy rok, chociaż okresy mogą być także inne. W ostatnim razie wyprowadzone przez nas wzory nie ulegną zmianie, jeżeli tylko znamy stopę procentową, odpowiednią danemu okresowi.

Gdybyśmy tej stopy nie znali, tylko roczną, wtedy tę ostatnią łatwo zamienić potrafimy na stopę właściwego okresu, zapomocą wzorów wyprowadzonych w art. 21-ym.

26. Kapitalizowanie wkładów stałych. Weźmy najprzód pod uwagę wkłady stałe; mogą one wpływać z góry lub z dołu.

Jeżeli wnosimy np. do kasy oszczędnościowej co rok sumę a (od wyrazu l'annuité = spłata roczna) z góry na procent składany przy stopie i od jednostki (procentu liczonego z dołu), zachodzi pytanie, ile mieć będziemy pieniędzy po n latach?

---

*) Możnaby także powiedzieć: „składek", „rat", „dochodów" i t. p.

Ilość tych pieniędzy oznaczmy przez $\overset{a,n}{W}_{p,g}$, gdzie W oznacza „wartość“, a „wkład roczny“, g wnoszony „z góry“, p „przyszła“, n po „n latach“. Oprócz tego niech, jak zwykle, $r = 1 + i$.

Otóż pierwszy wkład a po n latach zamieni się na $a\,r^n$; drugi, wniesiony po roku, jako procentujący przez $n - 1$ lat, zamieni się na $a\,r^{n-1}$; trzeci na $a\,r^{n-2}$, i t. d., ostatni, procentujący już tylko przez rok jeden, zamienia się na $a\,r$.

Razem mieć będziemy:

$$\overset{a,n}{W}_{p,g} = a\,r^n + a\,r^{n-1} + a\,r^{n-2} + \ldots + a\,r^2 + a\,r$$
$$= a\,r\,(r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \ldots + r + 1) \quad . \; . \; . \; . \; (\alpha).$$

Wyrażenie w nawiasie przedstawia sumę wyrazów postępu geometrycznego od 1 do r^{n-1} o wykładniku r, skutkiem tego

$$\overset{a,n}{W}_{p,g} = ar . \frac{r^n - 1}{r - 1} = a\,r . \frac{r^n - 1}{i} = \frac{a\,r}{i}(r^n - 1) \quad . \; . \; (42).$$

Gdyby wkłady były wnoszone z dołu, wyrażenie po stronie prawej w (α) uległoby tej tylko zmianie, że pierwszym wyrazem byłby $a\,r^{n-1}$, bo pierwsza rata wpływa dopiero po roku, zatem procentuje tylko przez $n - 1$ lat, i t. d. we wszystkich dalszych wyrazach r wchodzi w stopniu o jedność niższym, aż ostatnim wyrazem jest a, albowiem ostatnia rata wcale procentu nie przynosi.

Mamy więc, gdy znaczek g zastąpimy przez d — jako symbol, wskazujący, że raty wpływają „z dołu“,

$$\overset{a,n}{W}_{p,d} = a\,r^{n-1} + a\,r^{n-2} + \ldots + a\,r + a = a\,(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1),$$

czyli, po zsumowaniu wyrazów w nawiasie,

$$\overset{a,n}{W}_{p,d} = a . \frac{r^n - 1}{r - 1} = a . \frac{r^n - 1}{i} = \frac{a}{i}(r^n - 1) \quad . \; . \; (43).$$

Z porównania obu powyższych wzorów okazuje się, że wzór (42) od (43) różni się tylko czynnikiem r; i tak być powinno, pierwszy bowiem sposób kapitalizowania różni się od drugiego jedynie jednorocznem oprocentowaniem wszystkich wkładów (należy więc (42) zdyskontować na jeden rok, t. j. pomnożyć przez v, względnie podzielić przez r).

Jeżeli w (42) i (43) podstawimy $a = 1$, to otrzymamy skapitalizowaną wartość jednostki, wnoszonej corocznie przez n lat, i będzie:

$$(42') \quad . \; . \; \overset{1,n}{W}_{p,g} = r . \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{jak oraz} \quad \overset{1,n}{W}_{p,d} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad . \; . \; (43').$$

Z porównania (42′) z (42) i (43′) z (43) wypada, że mając skapitalizowane wartości jednostek, łatwo otrzymać można skapitalizowane wartości jakichkolwiek wkładów stałych a, wystarczy bowiem pierwsze pomnożyć przez a.

To też z wzoru (42′) i (43′) zostały obliczone tablice dla różnych stóp procentowych i dla różnej liczby lat, i taką właśnie tablicą dla (42′) jest nasza Tabl. III, zapomocą której z wielką łatwością obliczenia wykonywać możemy.

Np. 500 rub., wnoszone corocznie z góry przez 10 lat na procent składany przy stopie 4%, dają kapitał

$$\overset{500,10}{W_{p,\,g}} = 12{,}486351 \times 500 = 6243{,}18.$$

Tablicy odpowiedniej wzorowi (43′) nie podajemy, najprzód dlatego, że w praktyce rzadko znajduje zastosowanie i następnie, ponieważ gdyby nawet zaszła potrzeba użycia takiej tablicy, możnaby odpowiednią liczbę zastąpić przez liczbę z Tabl. III-ej, podzieloną przez r.

27. Cztery zagadnienia. Zarówno wzór (42) jak i (43) dostarczają materyału do czterech zadań, w których, dla prostoty, zastąpimy W ze znaczkami przez W bez znaczków. Zadaniami temi są: 1-o mając a, r, n — znaleść W; 2-o mając W, r, n — znaleść a; 3-o mając W, a, r — obrachować n; 4-o mając W, a, n — obliczyć r, względnie i.

Ich rozwiązania, dla wzoru (42), są następujące:

$$W = a\,r \,.\, \frac{r^n - 1}{r - 1} = a\,r \,.\, \frac{r^n - 1}{i} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (42),$$

$$a = \frac{W}{r \,.\, \dfrac{r^n - 1}{r - 1}} = \frac{W \,.\, i}{r\,(r^n - 1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (42'),$$

$$n = \frac{\log\,(W i + a\,r) - \log a\,r}{\log r} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (42'').$$

Co się tyczy ostatniego zadania, to dla niego otrzymujemy równanie stopnia $n + 1$ względem r:

$$a\,r^{n+1} - (W + a)\,r + W = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (42'''),$$

z którego, o ile jest stopnia wyższego nad 4-ty, wielkość r, jak wiadomo z Algebry, nie daje się wyrazić ogólnie przez funkcyę algebraiczną spółczynników a i W.

Powyższe wyrażenia dają się obliczyć zapomocą logarytmów — oprócz ostatniego (42‴), z którego jednak można otrzymać r przez stopniowe zbliżanie się do jego prawdziwej wartości.

Z (42‴) otrzymujemy mianowicie:

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{a\,r + W i}{a}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha),$$

gdzie po obu stronach mamy niewiadomą r.

Gdy po stronie prawej w (α) podstawimy za r dowolną wielkość (mniej więcej zbliżoną do prawdziwej), otrzymamy jakąś inną wartość na r; tę nową wartość na r podstawmy znów po stronie prawej w (α), otrzymamy jeszcze inną wartość na r; tę podstawmy również po stronie prawej w (α) i postępujmy tak ustawicznie dotąd, póki otrzymana z (α) wartość na r nie stanie się równą podstawionej po stronie prawej. Ta ostatnia wartość na r będzie szukaną.

Jeżeli np. $a = 500$, $W = 10000$, $n = 9$, to przy podstawieniu po stronie prawej w (α):

1) $i = 0{,}05$, $r = 1{,}05$, otrzymujemy:

$$r_1 = \sqrt[10]{\frac{525 + 500}{500}} = 1{,}0744,$$

2) przy $i = 0{,}0744$, $r = 1{,}0744$ po stronie prawej, wypada:

$$r_2 = \sqrt[10]{\frac{537{,}2 + 744}{500}} = 1{,}0987;$$

i t. d. — aż za czternastym razem otrzymamy:

$$r_{14} = 1{,}1568,$$

które już dalej w czwartej cyfrze dziesiętnej się nie zmienia. Otrzymujemy więc:

$$i = 0{,}1568, \text{ czyli } s\% = 15{,}68\%.$$

Po wprowadzeniu tej stopy procentowej do wzoru (42), wypada istotnie

$$W = 500 \times 1{,}1568 \times \frac{(1{,}1568)^9 - 1}{0{,}1568} = 9999{,}90, \text{ t. j. prawie } 10000.$$

Lepiej jednak jest użyć do tego celu Tabl. III, która zresztą może służyć również do rozwiązywania wszystkich czterech zagadnień.

Pierwsze zadanie (42) rozwiązaliśmy już liczebnie w przykładzie podanym przy końcu artykułu poprzedniego. Weźmy więc teraz przykład na zadanie drugie.

Ile wnosić należy rocznie z góry, aby po 12 latach, przy stopie $4\frac{1}{2}\%$ procentu składanego, posiąść 12500 rub.?

Gdy wnosimy jednostkę rocznie na powyższych warunkach, posiądziemy (według Tabl. III) 16,159913, żeby więc mieć 12500, trzeba wnosić rocznie przez 12 lat po

$$\frac{12500}{16{,}159913} \text{ razy więcej niż po jednostce, czyli po } 773{,}52.$$

Zobaczmy jeszcze, przy jakiej stopie procentowej 1200 rub., wnoszone z góry przez 7 lat, zamieniają się na 10500?

Jednostka zamienia się tu na $\frac{10500}{1200} = 8,75$.

Z Tabl. III okazuje się, że po 7-iu latach jednostka:

przy stopie 5% zamienia się na 8,549109

" " 6% " " " 8,897468, t. j. skoro stopa zwiększa się o 1%, suma zwiększa się o 0,348359; gdy więc suma zwiększa się o

$$\begin{array}{r} 8,750000 \\ -\ 8,549109 \\ \hline 0,200891, \end{array}$$

stopa zwiększy się o $\frac{0,200891}{0,348359} = 0,58$ i, temsamem, wynosi 5,58%.

Wszystkie te rezultaty są, naturalnie, z wiadomych nam już przyczyn, tylko przybliżone, w każdym jednak razie dość zbliżone do prawdziwych.

28. **Niecałkowita liczba lat.** W poprzednim artykule pominęliśmy z umysłu przykład na zagadnienie 3-ie, w którem poszukujemy niewiadomej liczby lat, przy danych: W, a i i.

Weźmy teraz na to zadanie następujący przykład.

Przez ile lat wnosić należy z góry po 650 rub., aby te wkłady dały, przy stopie 4%, rub. 6000?

Zapomocą logarytmów otrzymujemy:

$$n = \frac{\log (W i + a r) - \log a r}{\log r} = \frac{\log 916 - \log 676}{\log 1,04} = 7,7465.$$

Otrzymaliśmy zatem liczbę lat niecałkowitą, co wydaje się w pierwszej chwili rzeczą niezrozumiałą wobec warunku, że wnosimy r o c z n i e po rub. 650. Otóż zważmy, że n we wzorze (42), względnie (43) oznacza nietylko liczbę lat, lecz także liczbę wkładów; jeżeli więc rezultat w naszem zadaniu wypadł niecałkowity, znaczy to, iż należy wnieść 7 wkładów całkowitych po 650 rub. i jeszcze jakąś część 650 rubli, jako wkład ósmy. Zachodzi tylko pytanie, jak wielki ma być ten wkład częściowy.

Możnaby sądzić, że wkład ostatni powinien być proporcyonalny do ułamku rocznego 0,7465, czyli że wynosić powinien:

$$650 \times 0,7465 = 485,225,$$

ale tak nie jest, ponieważ oprocentowanie zmienia położenie rzeczy.

Na właściwy wkład częściowy należy wyprowadzić odpowiedni wzór.

Jeżeli wzór (42) rozciągniemy na niecałkowitą liczbę lat, np. na $n + \frac{l}{m}$, i, dla łatwiejszej techniki, oznaczymy na chwilę $\frac{l}{m} = \alpha < 1$, to wzór (42) przybierze kształt:

$$\overset{a,\, n+\alpha}{W_{p,\,g}} = a\,r \,.\, \frac{r^{n+\alpha} - 1}{r - 1} = \frac{a\,r}{i}\,(r^{n+\alpha} - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta).$$

Gdy następnie ostatni (częściowy) wkład oznaczymy przez x, będzie:

$$\overset{a,\, n+\alpha}{W_{p,\,g}} = a\,r^{n+\alpha} + a\,r^{n-1+\alpha} + \ldots + a\,r^{1+\alpha} + x\,.\,r^{\alpha}$$

$$= r^{\alpha}[x + a\,r\,(r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \ldots + 1)] = r^{\alpha}\left(x + a\,r\,.\,\frac{r^{n} - 1}{r - 1}\right) \,.\quad (\gamma).$$

Po zrównaniu (γ) z (β) jest:

$$r^{\alpha}\left[x + \frac{a\,r}{i}\,(r^{n} - 1)\right] = \frac{a\,r}{i}\,(r^{n+\alpha} - 1),$$

skąd

$$x = \frac{a\,r}{i}\left(r^{n} - \frac{1}{r^{\alpha}}\right) - \frac{a\,r}{i}\,(r^{n} - 1) = \frac{a\,r}{i}\,.\,\frac{r^{\alpha} - 1}{r^{\alpha}}\,,$$

albo, po przywróceniu $\alpha = \frac{l}{m}$,

$$x = \frac{a\,r}{i}\,.\,\frac{r^{\frac{l}{m}} - 1}{r^{\frac{l}{m}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Stosując ten wzór do naszego przykładu, znajdujemy:

$$x = \frac{650 \times 1{,}04}{0{,}04}\,.\,\frac{(1{,}04)^{0{,}7465} - 1}{(1{,}04)^{0{,}7465}} = 487{,}63, \text{ a nie } 485{,}225.$$

Że otrzymany rezultat jest prawidłowy, łatwo sprawdzić można.

Według Tabl. III, 650 rub., wnoszone corocznie przez 7 lat przy stopie 4%, dają:

$$8{,}21422626 \times 650 = 5339{,}25$$

+ wniesione na początku 8-go roku	487,63
przedstawia sumę	5826,88 ,

która po 0,7465 roku zamienia się na 5826,88 × $(1{,}04)^{0{,}7465}$ = 6000 rub., co jest zgodne z danemi zadania.

Podobnie jak dla (42), można wyprowadzić wzór i dla (43) — gdy wkłady wnoszą się z dołu.

Kładąc we wzorze (43) zamiast n liczbę niecałkowitą $n + \frac{l}{m}$ i podstawiając na chwilę $\frac{l}{m} = \alpha < 1$, otrzymujemy:

$$\overset{a,\, n+\alpha}{W_{p,\,d}} = a \cdot \frac{r^{n+\alpha} - 1}{r - 1} = \frac{a}{i}(r^{n+\alpha} - 1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\delta).$$

Z drugiej strony:

$$\overset{a,\, n+\alpha}{W_{p,\,d}} = a\, r^{n-1+\alpha} + a\, r^{n-2+\alpha} + \ldots + a\, r^{1+\alpha} + a r^{\alpha} + x,$$

albowiem ostatnia rata x, jako wniesiona z dołu, wcale nie przynosi procentu. Mamy tedy:

$$\overset{a,\, n+\alpha}{W_{p,\,d}} = a r^{\alpha}(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1) + x = \frac{a\, r^{\alpha}}{i}(r^{n} - 1) + x \; . \; (\varepsilon).$$

Z porównania (ε) z (δ) wypada:

$$x = \frac{a}{i}(r^{n+\alpha} - 1) - \frac{a r^{\alpha}}{i}(r^{n} - 1) = \frac{a r^{\alpha}}{i}\left(r^{n} - \frac{1}{r^{\alpha}}\right) - \frac{a r^{\alpha}}{i}(r^{n} - 1)$$

$$= \frac{a r^{\alpha}}{i}\left(1 - \frac{1}{r^{\alpha}}\right) = \frac{a}{i}(r^{\alpha} - 1),$$

albo, po przywróceniu $\alpha = \frac{l}{m}$,

$$x = \frac{a}{i}\left(r^{\frac{l}{m}} - 1\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (45).$$

Dodać należy, że dla rozwiązania zagadnienia 1-go, 2-go i 4-go w art. 27-ym, przy niecałkowitej liczbie lat, użyć można również Tabl. III w taki sam sposób, jak to uczyniliśmy w uwadze do art. 23-go.

29. Dyskontowanie wkładów stałych. Jeżeli wkłady są wnoszone z góry, to pierwszy wkład a, posiada, w chwili gdy rozpoczynamy działanie, tę samą wartość a; wkład drugi, mający się wnieść za rok, obecnie posiada wartość $a \cdot v$; wkład trzeci ma wartości $a\, v^2$ i t. d. — ostatni wkład, mający się wnieść po $n - 1$ latach, przedstawia teraz wartość $a\, v^{n-1}$. A więc, gdy dawny znaczek p zastąpimy przez t — od wyrazu „teraźniejsza" wartość, mamy:

$$\overset{a,\, n}{W_{t,\,g}} = a + a\, v + a\, v^2 + \ldots + a\, v^{n-1} = a\,(1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}).$$

Lecz $1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v}$, skutkiem czego

$$\overset{a,n}{W}_{t,g} = a\cdot\frac{1-v^n}{1-v}$$, albo, po podstawieniu $v = \frac{1}{r}$,

$$\overset{a,n}{W}_{t,g} = a\cdot\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}} = a\cdot\frac{1}{r^{n-1}}\cdot\frac{r^n-1}{r-1} = \frac{a}{i\,r^{n-1}}(r^n-1).$$

Łącząc oba wyrażenia w jedno, otrzymujemy ostatecznie:

$$\overset{a,n}{W}_{t,g} = a\cdot\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{a}{i\,.\,r^{n-1}}(r^n-1) = \frac{a}{r^{n-1}}\cdot\frac{r^n-1}{r-1} \quad (46).$$

Jeżeli wkłady są wnoszone z dołu, wtedy oczywiście

$$\overset{a,n}{W}_{t,d} = av + av^2 + av^3 + \ldots + av^n = av(1 + v + v^2 + \ldots$$

$$\ldots + v^{n-1}) = av\cdot\frac{1-v^n}{1-v},$$

albo, po podstawieniu $v = \frac{1}{r}$,

$$\overset{a,n}{W}_{t,d} = av\cdot\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{a}{i\,r^n}(r^n-1) = \frac{a}{r^n}\cdot\frac{r^n-1}{r-1} \quad . \quad . \quad (47).$$

Z porównania wzorów (47) z (46) okazuje się, że (47) powstaje z (46) przez pomnożenie (46) przez v, t. j. przez zdyskontowanie wartości wkładów wnoszonych z góry na rok, i naodwrót (46) z (47) przez oprocentowanie wartości wkładów wnoszonych z dołu na rok jeden — jak, oczywiście, być powinno.

Następnie wzór (46) powstaje z (42) przez podzielenie tego ostatniego przez r^n, czyli przez pomnożenie go przez v^n; wzór (47) powstaje z (43) w taki sam sposób. To znaczy, że wartości wkładów zdyskontowanych otrzymujemy z wartości wkładów skapitalizowanych przez zdyskontowanie tych ostatnich na n lat i naodwrót, t. j.

$$\overset{a,n}{W}_{t,g} = \overset{a,n}{W}_{p,g}\cdot v^n \quad \text{i naodwrót} \quad \overset{a,n}{W}_{p,g} = \overset{a,n}{W}_{t,g}\cdot r^n,$$

$$\overset{a,n}{W}_{t,d} = \overset{a,n}{W}_{p,d}\cdot v^n \quad ,, \quad ,, \quad \overset{a,n}{W}_{p,d} = \overset{a,n}{W}_{t,d}\cdot r^n.$$

Gdy w (46) i (47) założymy $a = 1$, otrzymamy zdyskontowane wartości jednostek, wpływających corocznie z góry lub z dołu, mianowicie:

$$\overset{1,n}{W}_{t,g} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1}{r^{n-1}}\cdot\frac{r^n-1}{r-1} = \frac{1}{i\,r^{n-1}}(r^n-1) \quad . \quad (46').$$

$$\overset{1,\, n}{W}_{t,\, d} = v\,\frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{1}{i\,r^n}\,(r^n - 1)' . \quad (47'),$$

i gdy z powyższych wzorów obliczymy odnośne wartości przy różnych stopach procentowych i na rozmaitą liczbę lat, mieć będziemy Tabl. IV i V zdyskontowanych wartości corocznie wnoszonych jednostek, z których przez proste mnożenie możemy otrzymywać zdyskontowane wartości wszelkich wkładów.

Np. 200 rub. wnoszone corocznie z góry przez lat 20 przedstawiają, w chwili wnoszenia pierwszej raty, przy stopie 5%, wartość:

$$13{,}0853209 \times 200 = 2617{,}06;$$

wnoszone z dołu — wartość:

$$12{,}4622103 \times 200 = 2492{,}44.$$

Ta ostatnia suma, oprocentowana na rok, daje:

$$2492{,}44 \times 1{,}05 = 2617{,}06, \text{ t. j. sumę poprzednią.}$$

Następnie, gdy sumę 2617,06 oprocentujemy na 20 lat, otrzymamy, według Tabl. I,

$$2617{,}06 \times 2{,}65329771 = 6943{,}84.$$

I tyleż otrzymamy ze skapitalizowania 200 rub. wnoszonych z góry przez lat 20 przy 5%, albowiem z Tabl. III wypada

$$34{,}71925181 \times 200 = 6943{,}84.$$

Naodwrót, 6943,84 zdyskontowane na lat 20 przy 5%, według Tabl. II, przedstawiają dziś wartość

$$6943{,}84 \times 0{,}3768895 = 2617{,}06,$$

t. j. tyle, ile czynią zdyskontowane, przy stopie 5%, wkłady po rub. 200, wnoszoze z góry przez lat 20.

Wzory (46) i (47) dają materyał do czterech zagadnień, podobnych do zagadnień podanych w art. 27-ym, których tutaj jednak, z powodu zachodzącej analogii, powtarzać nie potrzebujemy. Dodamy tylko, że jak tam tak samo tu zagadnienia mogą być rozwiązane albo bezpośrednio (zapomocą logarytmów), albo też zapomocą Tabl. IV, względnie V, i w taki sam jak tam sposób.

Wreszcie i o niecałkowitej liczbie lat, względnie wkładów można tu, t. j. przy dyskontowaniu wkładów, powiedzieć to samo, cośmy w art. 28-ym powiedzieli przy ich kapitalizowaniu.

Ten sam wzór

$$x = \frac{a\,r}{i} \cdot \frac{r^{\frac{t}{m}} - 1}{r^{\frac{t}{m}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

służy do obliczenia częściowego, czyli ostatniego wkładu, gdy wkłady wnoszą się z góry; wzór:

$$x = \frac{a}{i}\left(r^{\frac{l}{m}} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45),$$

gdy wkłady są wnoszone z dołu.

Dla stwierdzenia powiedzianego, wyprowadzimy bezpośrednio wzór (45) dla przypadku dyskontowania wkładów wnoszonych z dołu.

Wzór (47), w przypadku gdy liczba lat jest niecałkowita, np. gdy mamy lat $n + \frac{l}{m}\left(\frac{l}{m} < 1\right)$, przybiera kształt (po chwilowem podstawieniu α za $\frac{l}{m}$):

$$\overset{a,\, n+\alpha}{W_{t,\, d}} = \frac{a}{r^{n+\alpha}} \cdot \frac{r^{n+\alpha} - 1}{i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\zeta),$$

i z drugiej strony:

$$\overset{a,\, n+\alpha}{W_{t,\, d}} = a\,v + a\,v^2 + \ldots + a\,v^n + x\,v^{n+\alpha} = a\,v \,.\, \frac{1 - v^n}{1 - v} + x\,v^{n+\alpha}$$

$$= \frac{a}{r} \cdot \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}} + \frac{x}{r^{n+\alpha}} = \frac{a}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{i} + \frac{x}{r^{n+\alpha}} \quad \ldots \quad (\eta).$$

Po zrównaniu (η) z (ζ) wypada:

$$\frac{x}{r^{n+\alpha}} = \frac{a}{r^{n+\alpha}} \cdot \frac{r^{n+\alpha} - 1}{i} - \frac{a}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{i};$$

$$x = \frac{a}{i}\left(r^{n+\alpha} - 1\right) - \frac{a\,r^\alpha}{i}\left(r^n - 1\right)$$

$$= \frac{a\,r^\alpha}{i}\left(r^n - \frac{1}{r^\alpha}\right) - \frac{a\,r^\alpha}{i}\left(r^n - 1\right) = \frac{a\,r^\alpha}{i}\left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right) = \frac{a}{i}\left(r^\alpha - 1\right),$$

albo, po przywróceniu $\alpha = \frac{l}{m}$,

$$x = \frac{a}{i}\left(r^{\frac{l}{m}} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45).$$

30. Kapitalizowanie i dyskontowanie wkładów stale rosnących.
Jeżeli wkłady wnosimy z góry i pierwszy wkład wynosi a, a każdy następny jest od poprzedniego większy o δ, to, rozumując w ten sam sposób jak poprzednio, otrzymujemy:

$$\overset{a,+\delta,n}{W_{p,g}} = a r^n + (a+\delta) r^{n-1} + (a + 2\delta) r^{n-2} + \ldots + (a + \overline{n-1}.\delta) r$$
$$= r \{a (r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1) + \delta (r^{n-2} + 2 r^{n-3} + 3 r^{n-4} + \ldots$$
$$\ldots + \overline{n-2}.r + \overline{n-1})\}.$$

Lecz:

$$r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1 = \frac{r^n - 1}{r - 1}, \text{ zaś } r^{n-2} + 2 r^{n-3} + 3 r^{n-4} + \ldots$$
$$\ldots + \overline{n-2}.r + \overline{n-1}$$
$$\begin{aligned} = r^{n-2} + r^{n-3} + r^{n-4} + \ldots + r + 1 \\ + r^{n-3} + r^{n-4} + \ldots + r + 1 \\ + r^{n-4} + \ldots + r + 1 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + r + 1 \\ + 1 \end{aligned}$$
$$= \frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} + \frac{r^{n-2} - 1}{r - 1} + \frac{r^{n-3} - 1}{r - 1} + \ldots + \frac{r^2 - 1}{r - 1} + \frac{r - 1}{r - 1}$$
$$= \frac{1}{r-1} (r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \ldots + r^2 + r - \overline{n-1})$$
$$= \frac{1}{r-1} \left(r \frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} - \overline{n-1}\right).$$

Czyli

$$\overset{a,+\delta,n}{W_{p,g}} = r \left\{a . \frac{r^n - 1}{r - 1} + \frac{\delta}{r-1} \left(r \frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} - \overline{n-1}\right)\right\},$$

albo jeszcze:

$$\overset{a,+\delta,n}{W_{p,g}} = a r . \frac{r^n - 1}{r - 1} + \frac{\delta r}{(r-1)^2} (r^n - n r + \overline{n-1}) \quad . \quad (48).$$

Aby otrzymać wyrażenie, gdy wkłady są wnoszone z dołu, wystarczy (48) zdyskontować na rok jeden, czyli podzielić przez r, t. j.:

$$\overset{a,+\delta,n}{W_{p,d}} = a . \frac{r^n - 1}{r - 1} + \frac{\delta}{(r-1)^2} (r^n - n r + \overline{n-1}) \quad . \quad . \quad (49).$$

Najprostszym jest przypadek, gdy wkład ustawicznie wzrasta o swą pierwotną wielkość, t. j. gdy $\delta = a$. Wtedy:

$$\overset{a,+a,n}{W}_{\mathrm{p,g}} = \frac{a\,r}{(r-1)^2}\,(r^{n+1} - \overline{n+1}\,.\,r + n)\;.\;\;.\;\;.\;\;.\quad(48').$$

jak oraz

$$\overset{a,+a,n}{W}_{\mathrm{p,d}} = \frac{a}{(r-1)^2}\,(r^{n+1} - \overline{n+1}\,.\,r + n)\;.\;\;.\;\;.\;\;.\quad(49').$$

Gdy np. $a = 100$, $n = 15$, $r = 1{,}04$

$$\overset{100,+100,15}{W}_{\mathrm{p,g}} = \frac{100 \times 1{,}04}{(0{,}04)^2}\,.\,\{(1{,}04)^{16} - 16 \times 1{,}04 + 15\} = 15143{,}78.$$

W podobny sposób wyprowadzićby można wzory na zdyskontowane wartości wkładów. Wszakże prędzej dojdziemy do celu, gdy zastosujemy do obecnego przypadku uwagę, uczynioną w art. 29-ym o przechodzeniu od wartości skapitalizowanych do zdyskontowanych, t. j. gdy wyrażenia (48) i (49), względnie (48') i (49') zdyskontujemy na n lat. Czyniąc to, otrzymujemy:

$$\overset{a,+\delta,n}{W}_{\mathrm{t,g}} = \frac{a}{r^{n-1}}\,.\,\frac{r^n-1}{r-1} + \frac{\delta}{r^{n-1}(r-)^2}\,(r^n - n\,r + \overline{n-1})\;\;.\quad(50),$$

$$\overset{a,+\delta,n}{W}_{\mathrm{t,d}} = \frac{a}{r^n}\,.\,\frac{r^n-1}{r-1} + \frac{\delta}{r^n(r-1)^2}\,(r^n - n\,r + \overline{n-1})\;\;.\;\;.\quad(51).$$

$$\overset{a,+a,n}{W}_{\mathrm{t,g}} = \frac{a}{r^{n-1}(r-1)^2}\,(r^{n+1} - \overline{n+1}\,.\,r + n)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(50'),$$

$$\overset{a,+a,n}{W}_{\mathrm{t,d}} = \frac{a}{r^n(r-1)^2}\,(r^{n+1} - \overline{n+1}\,.\,r + n)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(51').$$

Np. $\overset{100,+100,15}{W}_{\mathrm{t,g}} = 15143{,}78 \times 0{,}5552645 = 8408{,}80.$

Rozumie się, że i tu może być też mowa o n niecałkowitem i o wzorach na odpowiednią część wkładu ostatniego, ale rzecz tę pomijamy gdyż przypadki takie nie trafiają się w praktyce; zresztą gdyby nawet zaszła tego potrzeba, czytelnicy nasi z pewnością, po tem cośmy dotąd powiedzieli, sami dadzą sobie radę.

31. Kapitalizowanie i dyskontowanie wkładów stale malejących. Jeżeli wkłady stale maleją o tę samą kwotę δ, wystarczy w poprzednich wzorach założyć, że δ jest ujemne, t. j. we wzorach od (48) do (51) za δ podstawić $-\delta$. Wtedy otrzymamy:

$$\overset{a,-\delta,n}{W}_{\mathrm{p,g}} = a\,r\,.\,\frac{r^n-1}{r-1} - \frac{\delta\,r}{(r-1)^2}\,(r^n - n\,r + \overline{n-1})\;\;.\;\;.\quad(52),$$

$$\overset{a,-\delta,n}{W}_{\mathrm{p,d}} = a\,.\,\frac{r^n-1}{r-1} - \frac{\delta}{(r-1)^2}\,(r^n - n\,r + \overline{n-1})\;.\;\;.\;\;.\quad(53),$$

$$\overset{a,\,-\delta,\,n}{W}_{t,\,g} = \frac{a}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} - \frac{\delta}{r^{n-1}(r-1)^2}(r^n - nr + n - 1) \quad . \quad (54).$$

$$\overset{a,\,-\delta,\,n}{W}_{t,\,d} = \frac{a}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} - \frac{\delta}{r^n(r-1)^2}(r^n - nr + n - 1) \quad . \quad (55).$$

Lecz tu δ nie może być dowolne, gdyż przy zbyt wielkiem δ wkłady mogłyby stać się ujemne, co w praktyce wyszłoby (z czasem) nie na wnoszenie wkładów, lecz na czerpanie z już złożonych*).

Aby wyznaczyć, jakiemu warunkowi δ zadość czynić powinno, wróćmy do pierwotnego wyrażenia na $\overset{a,\,\delta,\,n}{W}_{p.\,g}$, podanego na początku art. 30-go. Obecnie, przy δ ujemnem, wyrażenie to przechodzi na:

$$a r^n + (a - \delta) r^{n-1} + (a - 2\delta) r^{n-2} + \ldots + (a - \overline{n-1}.\delta) r.$$

Żeby wszystkie wyrazy tego wyrażenia oznaczały wkłady, muszą być wszystkie dodatnie, czemu się stanie zadość, gdy ostatni (najmniejszy) wyraz będzie dodatni, czyli musi być:

$$a - \overline{n-1}.\delta > 0.$$

Stąd

$$\delta < \frac{a}{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56),$$

tak, iż

$$\text{Max}\ \delta = \frac{a}{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56').$$

Np. dla $a = 600$ i $n = 15$, Max $\delta = \frac{600}{14} = 42\frac{6}{7}$. W razie gdyby $\delta = 42\frac{6}{7}$, ostatni wkład $= 600 - 14 \times 42\frac{6}{7} = 0$; gdyby zaś δ było większe od $42\frac{6}{7}$, raty końcowe wypadłyby ujemne. Np. przy $\delta = 43$, ostatni wkład $= 600 - 14 \times 43 = -2$.

Rozumie się, że w razie takim wzory (52), (53), (54) i (55) nie znajdują praktycznego zastosowania.

32. Zadanie. Wyprowadzone wzory nastręczają sposobność do rozwiązywania różnego rodzaju zagadnień. Jako przykład weźmy następujące (najprzód w formie ogólnej):

Chodzi o zebranie kapitału K przez skapitalizowanie, przy stopie i od jednostki procentu składanego, wkładów rocznych stale malejących

*) Ostatecznie i taki warunek w zadaniu jest do pomyślenia, i w takim razie wzory (52), (53), (54), (55) można stosować bez ograniczenia, o jakiem w tekście mowa.

i wnoszonych przez n lat z góry, pod tym atoli warunkiem, aby ostatni wkład był równy $s^0/_0$ pierwszego. Jaki jest wkład pierwszy?

Ten wkład pierwszy oznaczmy przez x.

Skoro wkład ostatni ma stanowić $s^0/_0$ pierwszego, czyli skoro ma wynosić $\frac{x.s}{100}$, to musi być:

$$x - \overline{n-1}.\delta = \frac{x.s}{100};$$

stąd:

$$\overline{n-1}.\delta = \left(1 - \frac{s}{100}\right)x = \frac{100-s}{100}x; \qquad \delta = \frac{100-s}{100.\overline{n-1}}x.$$

Gdy to wyrażenie podstawimy za δ w (52) oraz x za a, będzie:

$$xr.\frac{r^n-1}{r-1} - \frac{r(100-s)x}{100.(n-1).(r-1)^2}(r^n - nr + \overline{n-1}) = K,$$

$$\frac{r}{r-1}x.\left[r^n - 1 - \frac{100-s}{100(n-1)(r-1)}(r^n - nr + \overline{n-1})\right] = K,$$

skąd:

$$x = \frac{Ki}{r\left[r^n - 1 - \frac{100-s}{100(n-1)(r-1)}(r^n - nr + \overline{n-1})\right]} \qquad (\alpha).$$

Jeżeli np. $K = 5000$, $n = 10$, $s = 5^0/_0$, $i = 0{,}04$, $r = 1{,}04$, to pierwszym wkładem jest:

$$x = \frac{5000 \times 0{,}04}{1{,}04\left[(1{,}04)^{10} - 1 - \frac{95}{100 \times 9 \times 0{,}04}(1{,}04^{10} - 10 \times 1{,}04 + 9)\right]} = 716{,}26,$$

$$\delta = \frac{100-s}{100.(n-1)}x = \frac{95}{900} \times 716{,}26 = 75{,}60.$$

Ostatnia rata:

$$x - \overline{n-1}.\delta = 716{,}26 - 9 \times 75{,}60 = 35{,}86$$

stanowi prawie $5^0/_0$ od 716,26.

W podobny sposób rozwiązywać można najrozmaitsze zagadnienia finansowe.

33. Renty pewne. Dochód, zapewniony komuś przez pewną ściśle określoną liczbę lat, bez względu na to, czy osoba ta przez cały ten czas żyć będzie lub nie, nazywa się r e n t ą p e w n ą. Za prawo do pobierania renty pewnej należy zapłacić jej wartość w chwili zawierania umowy, która jest, oczywiście, zdyskontowaną, na chwilę zawierania umowy, wartością mających się wypłacić rat.

Renty wypłacają się tylko z dołu, albowiem gdyby ktoś chciał nabyć rentę płatną z góry, wyjdzie na to samo, gdy z wartości renty zatrzyma pierwszą ratę, a za resztę nabędzie rentę płatną z dołu.

Skutkiem tego, wartość renty a, czyli suma, jaką rentyer winien zapłacić jednorazowo za prawo pobierania renty przez n lat (liczonej przy stopie i), wyznacza się z wzoru (47), w którym W dobrze jest zastąpić przez R (od wyrazu „renta“), t. j. z wzoru:

$$R_{a,n} = \frac{a}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \ldots \ldots \quad (47),$$

albo z Tabl. V-ej.

Np. za 1000 rub. renty rocznej, płaconej z dołu przez lat 25, przy stopie 4%, zapłacić trzeba jednorazowo:

$$15{,}6220799 \times 1000 = 15622{,}08.$$

I naodwrót, np. za kapitał, dajmy na to, 10000 rub. można nabyć, przy stopie 4%, 15-o letnią rentę, płatną z dołu, w wysokości:

$$\frac{10000}{11{,}1183874} = 899{,}41.$$

Taki rodzaj tranzakcyi bywa czasami, z cudzoziemska, nazywany „à fonds perdu“ (na kapitał przepadły).

Jeżeli renta pewna ma być płacona przez czas nieograniczony, czyli, jak się czasem mówi, przez nieskończenie wielką liczbę lat, wówczas przybiera nazwę renty wiecznej.

Zachodzi pytanie, jaką rentę wieczną można nabyć za kapitał K?

Według wzoru (47) powinno być:

$$\frac{a}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = K;$$

stąd otrzymujemy:

$$a = K \cdot \frac{r^n (r-1)}{r^n - 1} = K \cdot \frac{r - 1}{1 - \frac{1}{r^n}} = \frac{K i}{1 - \frac{1}{r^n}}.$$

Ponieważ $r > 1$, zaś $n = \infty$, przeto $r^n = \infty$, a $\frac{1}{r^n} = 0$, czyli:

$$a = K i,$$

t. j. renta wieczna stanowi procent zwyczajny od zapłaconego za nią kapitału.

Oczywiście renty mogą być nietylko stałe, ale także rosnące lub malejące; postępowanie jednak pozostaje takie samo, tylko zamiast wzoru (47) należy użyć wzoru (51), względnie (55) — tego ostatniego z wiadomem ograniczeniem co do δ.

34. Kasy oszczędnościowe. Jeżeli wkłady roczne uskuteczniają się w sposób całkiem nieprawidłowy, to przy ich kapitalizowaniu lub dyskontowaniu trzeba wartość każdego wkładu obliczyć oddzielnie.

Gdyby np. chodziło o skapitalizowanie, przy 4%, pięciu wkładów: 500 rub., 200 rub., 360 rub., 250 rub. i 600 rub., wnoszonych na początku każdego z pięciu kolejno po sobie idących lat, w takim razie powstały stąd, po pięciu latach, kapitał wyniesie:

$$(1,04)^5 \times 500 + (1,04)^4 \times 200 + (1,04)^3 \times 360 + (1,04)^2 \times 250 + (1,04)^1 \times 600$$
$$= 1,2166529 \times 500 + 1,16985856 \times 200 + 1,124864 \times 360$$
$$+ 1,0816 \times 250 + 1,04 \times 600 = 608,33 + 233,97 + 404,95$$
$$+ 270,40 + 624,00 = 2141,65.$$

Albo inaczej, bardziej elementarnie:

Rub. 500 po roku zamieniają się na $500 \times 1,04 = 520$; do tego przybywa 200 rub., razem $520 + 200 = 720$ rub., które po roku zamieniają się na $720 \times 1,04 = 748,80$; do tego przybywa 360 rub., mamy razem $748,80 + 360 = 1108,80$, które znów po roku zamieniają się na $1108,80 \times 1,04 = 1153,15$; do tego przybywa jeszcze 250 rub., jest razem $1153,15 + 250 = 1403,15$, zamieniające się po roku na $1403,15 \times 1,04 = 1459,28$; do tego wreszcie przybywa 600 rub., razem $1459,28 + 600 = 2059,28$ i te po roku zamieniają się, jak wyżej, na $2059,28 \times 1,04 = 2141,65$.

W podobny właśnie sposób obliczają się sumy, powstające ze składania oszczędności w kasach oszczędnościowych, do których uczestnicy wnoszą, w dowolnych odstępach czasu, dowolne kwoty pieniędzy. Procenty włączają się do kapitału (kapitalizują się) każdego Nowego Roku; wkłady i odbiory, dokonywane w ciągu roku kalendarzowego, oprocentowują się pojedynczo na odpowiednie części roku.

Kasy oszczędnościowe są to instytucye, mające na celu dostarczyć natychmiastowej i pewnej lokacyi dla najdrobniejszych choćby oszczędności, z zapewnieniem możliwie korzystnego oprocentowania i szybkiego zwrotu wkładów w razie zażądania.

Warunek pewności powoduje, że kasy oszczędnościowe są zakładane przez państwa. Kasy oszczędnościowe prywatne, dla szerokiego ogółu, są niedopuszczalne, zawsze bowiem byłyby narażone na ewentualne nadużycia, więc i na bankructwo, mogące sprowadzić klęskę na oszczędzających, tem dotkliwszą, że dotykającą przeważnie ludzi najuboższych.

Natychmiastowość lokacyi wymaga możliwie jak najgęstszego rozrzucenia po kraju takich instytucyj filialnych, do których przystęp dla ogółu byłby bardzo ułatwiony i zawsze możliwy; leży to bowiem w naturze, zwłaszcza uboższej ludności, że gdy zamiar odłożenia oszczędności nie może być zaraz spełniony, najczęściej nie przychodzi do skutku; albowiem przez czas, dzielący zamiar od możności spełnienia go, trafia się zwykle tak wiele przeróżnych potrzeb i pokus, iż człowiek nie zdobywa się na tyle silnej woli, aby jednej z takich pokus nie uledz i piękny zamiar zostaje w dziedzinie niespełnionych projektów.

Dlategoto, oprócz zwykłych filij kas oszczędnościowych, tego rodzaju urządzenia znajdują się zwykle i przy biurach pocztowych, a nawet w wielu sklepach prywatnych można złożyć dowolną oszczędność przez zakupienie t. zw. marek oszczędniościowych.

Marki oszczędnościowe stanowią pomysł nadzwyczaj szczęśliwy, umożliwiają bowiem nietylko szybkie odłożenie oszczędności, ale przedewszystkiem umożliwiają odłożenie oszczędności najdrobniejszych, choćby groszowych, któremi zwykłych instytucyj obciążać niepodobna.

Mam do odłożenia 5 kop., albo przy zakupach zbywa mi 5 kop., więc proszę, zamiast o resztę, o markę oszczędniościową odpowiedniej wartości, którą przyklejam na „karcie oszczędnościowej“, jaką bezpłatnie w tem samem miejscu co i markę otrzymać mogę. Gdy tą drogą zbiorę rubla, zanoszę kartę do urzędu kasy oszczędnościowej lub na pocztę; tam kasują marki, a rubla wpisują do „książeczki oszczędnościowej“ i od tej pory mój rubel zaczyna procentować.

Takim sposobem wiele rubli, prawie niepostrzeżenie, można odłożyć i oprocentować.

Natomiast państwo, mimo, że ponosi koszt druku i papieru na marki i karty, nietylko nic na tem nie traci, lecz zyskuje: najprzód wyższy od płaconego oszczędzającym procent, następnie zyskuje procent za czas dzielący kupno marki od jej skasowania, wreszcie wiele marek zakupionych ginie lub nie zostaje odniesionych do skasowania, co wszystko razem wzięte nietylko pokrywa koszt papieru i druku, ale daje jeszcze pewną przewyżkę.

Co się tyczy możliwie korzystnego oprocentowania oszczędności, to sama stopa nie może być zbyt wysoka i musi być zawsze stale niższa od procentu handlowego: najprzód dlatego, że państwo musi coś mieć z tych oszczędności, aby módz opłacić obsługę; następnie zaś, zbyt wysoka stopa procentowa mogłaby do kas oszczędnościowych ściągnąć i kapitały większe, potrzebne gospodarstwu społecznemu: rolnictwu, przemysłowi, handlowi i t. p. Zato kasy oszczędnościowe oprocentowują wkłady systemem składanym i tą drogą wynagradzają niejako niższą stopę.

Rezultaty, osiągane drogą drobnych oszczędności, składanych do kas oszczędnościowych, są wprost zdumiewające. We Francyi wielu pracujących zbiera sobie tą drogą pokaźne sumki, za które na starość zakupuje maleńkie fermy, i na nich gospodarując, żyje w charakterze emerytów. U nas, niestety, zwyczaj składania drobnych oszczędności w odpowiednich kasach jest mało rozpowszechniony, bo rzadko kto rozumie znaczenie kas oszczędnościowych w taki sposób, jak pewien mój młody, gdyż ledwie 24-o letni przyjaciel, który, po śmierci swego 75-o letniego ojca, tak mi rzecz wyłożył:

„Mój ojciec, którego — jak Pan wie — straciłem niedawno, był bardzo pracowitym, systematycznym i bardzo — bardzo poczciwym człowiekiem; przytem kochał mnie nad wszystko i zawsze pragnął, aby mi mógł zostawić jakiś kapitalik na t. zw. wejście w świat. Ale poczciwina, właśnie dlatego, że był poczciwy, pracowity i cichy — ach! jaki cichy, w dawniejszych i dzisiejszych czasach do niczego dojść nie mógł. Musiał poprzestać na względnie małej pensyjce, nie pozwalającej robić oszczędności. Więc chcąc, mimo to, dopiąć zamierzonego celu, grał przez 25 lat bez przerwy, słowo daję, bez przerwy na loteryi, trzymając po ćwiartce na każdej i oto rachunek, jaki mi przedstawił: Z dopłatami spekulantom loteryjnym zapłaciłem za 50 ćwiartek 877 rub. 50 kop., „wygrałem“ 25 razy stawkę w klasie V-ej, co przyniosło $\frac{80}{4} \times 25 = 500$ rubli, a po strąceniu 15% na skarb i kolektorów, czyli $15 \times 5 = 75$ rub., oraz po pół rubelka gratyfikacyi dla pośredników, t. j. 12,50, razem 87,50, otrzymałem w końcu 412,50, czyli ostatecznie, zamiast ci zostawić jakiś fundusik, straciłem $877{,}50 - 412{,}50 = 465$ rubli. Przebacz mi drogie dziecko!

Otóż, proszę Pana, ja postanowiłem sobie co innego zrobić. Mam 50 rub. pensyi miesięcznej i mógłbym grać na loteryi, jak to czynił mój poczciwy ojciec. Ponieważ teraz za ćwiartkę doliczają spekulanci w każdej loteryi nadetatowo po 3,15 — mogę więc liczyć, że loterya kosztowałaby mnie średnio po 3,15 miesięcznie. Te pieniądze, zamiast oddawać loteryi i spekulantom, składać będę do kasy oszczędnościowej na 4% procentu składanego, i oto, proszę Pana, co mi wypadło z rachunku, według Pańskiego wykładu na kursach, które niedawno ukończyłem:

W ciągu każdego roku wnoszone co miesiąc 3,15 rub., przy 4% procentu zwyczajnego, zamieniać się będą w końcu roku na:

$$3{,}15\,(1+0{,}04)+3{,}15\,(1+0{,}04\times\frac{11}{12})+3{,}25\,(1+0{,}04\times\frac{10}{12})+\ldots$$

$$\ldots+3{,}15\,(1+0{,}04\times\frac{1}{12})=3{,}15\times12+3{,}15\times\frac{0{,}04}{12}(12+11+10+$$

$$\ldots+2+1)=3{,}15\times12+3{,}15\times\frac{0{,}04}{12}\times78=37{,}80+3{,}15\times0{,}26$$

$$=37{,}80+0{,}82=38{,}62.$$

A ponieważ mam zamiar żyć długo (należę do rodziny długo żyjących) i pracować do 70-iu lat życia, więc mogę to czynić przez lat 46, skutkiem czego, na zasadzie wskazanej nam przez Pana Tabl. III-ej, po zaprzestaniu pracy mieć będę:

$$\frac{131{,}94539045}{1{,}04}\times38{,}62=4899 \text{ rub. } 74 \text{ kop.}$$

zamiast stracić około 1000 rub. jakby to, w podobnych warunkach, stało się z moim poczciwym ojcem.

Jest to, co prawda, niewiele na starość, lecz przecież z czasem może będę mógł więcej odkładać, a nie — to sobie kupię, à fonds perdu, rentę dożywotnią i posiądę około 650 rub. rocznego dochodu, za który, jakoś, przeżyję do śmierci".

D. Umarzanie pożyczek długoterminowych.

35. Wzór zasadniczy. Kasy oszczędnościowe, o których mówiliśmy w poprzednim artykule, są przeznaczone do gromadzenia oszczędności drobnych. Ludzkość wszakże obmyśliła również środki oszczędzania i dla zamożniejszych.

Jeżeli kto posiada kapitalik nie duży na tyle, aby mógł zań nabyć jakąś nieruchomość miejską lub ziemską, a pragnie taką lub inną posiadać; albo gdy już posiada jakąś nieruchomość i chce w niej wprowadzić udoskonalenia, lecz na to nie ma środków, to, naturalnie, musi zaciągnąć pożyczkę. Zwykła pożyczka jest najczęściej kosztowna, z powodu wygórowanej stopy procentowej, i oprócz tego musi być w terminie zwrócona od razu w całości, co zwykle załatwia się przez zaciągnięcie nowej pożyczki na spłacenie dawnej, a to znów pociąga za sobą nowe koszta, nie licząc kłopotów wyszukania sobie nowego wierzyciela.

Wygodniej byłoby zaciągnąć pożyczkę z obowiązkiem powolnego spłacania długu obok uiszczania należnych procentów, wtedy bowiem spłata zapożyczonego kapitału jest łatwiejsza, mniej kosztowna i zmusza dłużnika do oszczędności w formie odkładania funduszów na płacenie rat odeń należnych.

Takie instytucye rzeczywiście istnieją pod nazwą towarzystw kredytowych: miejskich dla nieruchomości miejskich, ziemskich dla nieruchomości wiejskich (rolnych). Stanowią one również rodzaj kas oszczędnościowych i to o tyle dogodniejszych od zwykłych, że gdy ostatnie pobierają wprzód wkłady, kapitał zaś wypłacają później, pierwsze natomiast z góry dają mający się zaoszczędzić kapitał, wkłady zaś pobierają później, często przez długi szereg lat*). Zato kasy oszczędnościowe doliczają do wkładów procenty, podczas gdy towarzystwa kredytowe pobierają je.

Zastanawiając się nad charakterem tego rodzaju tranzakcyj, nietrudno spostrzedz, że kapitał wypożyczony przez towarzystwo jest poprostu teraźniejszą, czyli zdyskontowaną wartością tych rat, jakie dłużnik przez dany szereg lat ma płacić, i że powstaje stąd zadanie obliczenia raty a, jaką dłużnik winien towarzystwu płacić w n terminach, przy umówionej stopie procentowej, aby umorzyć zapożyczony kapitał i opłacić procenty od zaciągniętego długu.

Skoro tak, tedy ową szukaną ratę a obliczyć można z wzoru (46) lub (47), stosownie do tego, czy raty są wnoszone z góry czy z dołu.

Owóż raty obliczają się najczęściej z dołu, acz wnoszone bywają z góry, żeby zapobiedz skutkom nieregularnego wpłacania rat przez dłużników. Z tego powodu znajduje tu zastosowanie nie wzór (46), lecz (47).

Raty bywają zwykle płacone półrocznie, co w niczem nie zmienia wzoru (47), gdyż stopa procentowa również jest ustanawiana półrocznie; tylko w razie takim n będzie oznaczało nie liczbę lat, lecz półroczy.

Jeżeli zatem w (47) za $\overset{a,\,n}{W_{t,\,d}}$ podstawimy wypożyczony kapitał K, to szukana rata a daje się obliczyć z wzoru:

$$K = a \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{i} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (57),$$

skąd:

$$a = \frac{K i r^n}{r^n - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (57').$$

I wogóle wzór (57) pozwala rozwiązać cztery znane nam zadania, t. j. daje możność obliczenia: kapitału, raty, liczby rat i stopy procentowej z trzech danych, jakto widzieliśmy w art. 27-ym.

Wzór (57) jest więc zasadniczym dla tranzakcyj umarzania poży-

---

*) Jest to możliwe dlatego, że wypożyczony kapitał posiada zabezpieczenie na nieruchomości, która, w razie niewypłacalności dłużnika, może być sprzedana na pokrycie nieumorzonej części zapożyczonego kapitału.

czek długoterminowych i na jego podstawie możemy rozwiązywać wszelkie zagadnienia, odnoszące się do tego rodzaju interesów.

36. Rachunek kontrolujący. Z uwagi na zasadniczość, a więc i na ważność wzoru (57), jak również ze względu na cel, który się później okaże, oraz dla dokładnego wyjaśnienia przeobrażeń, jakie się przy umarzaniu pożyczek i płaceniu procentów od nieumorzonych części wypożyczonego kapitału odbywają przy płaceniu rat, wzór ten wyprowadzimy innym jeszcze sposobem.

Każda rata a składa się z dwóch części: z części przeznaczonej na umorzenie kapitału i z części przeznaczonej na zapłacenie procentu od nieumorzonej jeszcze części kapitału.

Jeżeli przez u_λ oznaczymy część λ-ej raty a, jaka ma być użyta na umorzenie części kapitału, to:

$$a = u_\lambda + \{K - (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{\lambda-1})\} i \quad . \quad (58),$$

czyli pierwsza rata $a = u_1 + Ki$; stąd:

$$u_1 = a - Ki \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58').$$

Druga rata $a = u_2 + (K - u_1) i$, albo, po podstawieniu za u_1 wyrażenia z (58'),

$$a = u_2 + (K - a + Ki) i = u_2 + Ki - (a - Ki) i.$$

Wypada stąd:

$$u_2 = a - Ki + (a - Ki) i = (a - Ki) . (1 + i),$$

czyli:

$$u_2 = (a - Ki) . r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58'').$$

Podobnie znajdziemy:

$$u_3 = (a - Ki)\, r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58'''),$$

$$u_4 = (a - Ki)\, r^3, \text{ i t. d.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58^{IV}).$$

W ostatniej racie mieści się umorzenie:

$$u_n = (a - Ki)\, r^{n-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58^{V}).$$

Suma wszystkich u_λ od 1 do n powinna dać cały kapitał, t. j. powinno być:

$$K = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = (a - Ki) . (1 + r + r^2 + \ldots$$

$$\ldots + r^{n-1}) = (a - Ki) . \frac{r^n - 1}{i} = a . \frac{r^n - 1}{i} - K (r^n - 1),$$

albo inaczej:

$$K\,r^n = a\,\frac{r^n - 1}{i},$$

stąd zaś wypada znany nam już wzór:

$$K = a.\frac{1}{r^n}.\frac{r^n-1}{i} = \frac{a}{i}.\frac{r^n-1}{r^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57).$$

Z wzorów (58) okazuje się, że wogóle

$$u_\lambda = (a - K\,i)\,.\,r^{\lambda-1},$$

albo, gdy za K podstawimy wyrażenie (57):

$$u_\lambda = \frac{a}{r^{n-\lambda+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59).$$

Podobnie jest:

$$u_{\lambda-1} = \frac{a}{r^{n-\lambda+2}} = \frac{a}{r^{n-\lambda+1}}.\frac{1}{r} = \frac{u_\lambda}{r},$$

czyli:

$$u_\lambda = u_{\lambda-1}\,.\,r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59'),$$

t. j. umorzenie, mieszczące się w pewnej racie, równa się umorzeniu, mieszczącemu się w racie bezpośrednio poprzedzającej, oprocentowanemu na jeden okres.

Tym sposobem zapomocą wzoru (59) możemy z góry obliczyć, jakie umorzenie mieści się w którejkolwiek racie, co, jak niebawem zobaczymy, pozwala skontrolować bieg rachunku; zaś (59') pozwala znów bardzo łatwo obliczyć umorzenie następne z bezpośrednio poprzedzającego.

W podobny sposób możemy wyprowadzić wzór na część nieumorzoną kapitału, jaka pozostanie po zapłaceniu jakiejkolwiek raty λ-ej. Albowiem z wzoru (59) suma λ pierwszych umorzeń

$$\sum_1^\lambda u_\lambda = a\left(\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{r^{n-\lambda+1}}\right)$$

$$= \frac{a}{r^{n-\lambda+1}}\left(\frac{1}{r^{\lambda-1}} + \frac{1}{r^{\lambda-2}} + \ldots + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^0}\right)$$

$$= \frac{a}{r^{n-\lambda+1}}\,(v^{\lambda-1} + v^{\lambda-2} + \ldots + v + 1)$$

$$= \frac{a}{r^{n-\lambda+1}}.\frac{1-v^\lambda}{1-v} = \frac{a}{r^{n-\lambda+1}}.\frac{r(r^\lambda-1)}{i\,r^\lambda},$$

czyli: $$\sum_{1}^{\lambda} u_\lambda = \frac{a}{i} \cdot \frac{r^\lambda - 1}{r^n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha).$$

Gdy tę sumę odejmiemy od kapitału K, różnica przedstawi część nieumorzoną kapitału; jeżeli więc tę część nieumorzoną oznaczymy przez R_λ i za K podstawimy wyrażenie z (57), to otrzymamy:

$$R_\lambda = K - \frac{a}{i} \cdot \frac{r^\lambda - 1}{r^n} = \frac{a}{i} \cdot \frac{r^n - 1}{r^n} - \frac{a}{i} \cdot \frac{r^\lambda - 1}{r^n} = \frac{a}{i} \cdot \frac{r^n - r^\lambda}{r^n},$$

t. j. $$R_\lambda = \frac{a}{i} \cdot \frac{r^{n-\lambda} - 1}{r^{n-\lambda}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (60),$$

który to wzór, zupełnie podobny do (57), może również służyć do kontrolowania rachunku bieżącego.

37. Tabele amortyzacyjne. Gdy potrzebujący pożyczki zgłasza się o nią i towarzystwo godzi się na jej udzielenie, wtedy dla własnej i dla dłużnika dogodności wydaje mu t. zw. tablicę amortyzacyjną, w której mieści się rachunek bieżący, wykazujący, ile z każdej raty, wnoszonej przez dłużnika, zalicza się na procent od nieumorzonej jeszcze części kapitału, a ile na samą amortyzacyę oraz, ile jeszcze pozostaje nieumorzonego kapitału po zapłaceniu każdej raty.

Sposób układania tablicy amortyzacyjnej jest bardzo prosty. Oblicza się ratę i następnie okres za okresem obrachowuje się procent od nieumorzonej części długu, a resztę obraca się na umorzenie dotąd, póki dług w całości nie zostanie spłacony. W trakcie roboty należy rezultaty sprawdzać jednym ze sposobów, podanych w artykule poprzedzającym.

Jako przykład dajmy, że chodzi o ułożenie tablicy amortyzacyjnej dla kapitału 25000 rubli, mającego się umorzyć w ciągu 10-iu lat przy stopie $4^0/_0$ ratami rocznemi, płaconemi z dołu.

Według wzoru (57′), rata roczna wynosi:

$$a = \frac{25000 \times (1{,}04)^{10} \times 0{,}04}{(1{,}04)^{10} - 1};$$

ponieważ zaś z Tabl. I: $(1{,}04)^{10} = 1{,}48024428$, zatem:

$$a = \frac{25000 \times 1{,}48024428 \times 0{,}04}{0{,}48024428} = \frac{1480{,}24428}{0{,}48024428} = 3082{,}27.$$

Do tego samego rezultatu możemy przyjść prędzej zapomocą Tabl. V; skoro bowiem wartość 1-ki, wnoszonej przez lat 10 przy stopie $4^0/_0$, wynosi 8,1108958, to aby mieć 25000 jednostek, należy corocznie wnosić:

$$\frac{25000}{8{,}1108958} = \text{, jak wyżej, } 3082{,}27.$$

Wiedząc to, łatwo, w sposób wyżej wskazany, układamy następującą tabelkę, której nagłówki dostatecznie tłómaczą bieg rachunku.

I. Tabela umorzenia pożyczki 25000 rubli w przeciągu 10 lat przy stopie 4% i racie rocznej 3082,27, płaconej z dołu.

Rata	Kapitał nieumorzony przed zapłaceniem raty		Z raty 3082,27 przypada na: Procent od kapitału nieumorzonego		Z raty 3082,27 przypada na: Umorzenie		Kapitał nieumorzony po zapłaceniu raty	
1	2		3		4		5	
1	25000	—	1000	—	2082	27	22917	73
2	22917	73	916	71	2165	56	20752	17
3	20752	17	830	09	2252	18	18499	99
4	18499	99	740	00	2342	27	16157	72
5	16157	72	646	31	2435	96	13721	76
6	13721	76	548	87	2533	40	11188	36
7	11188	36	447	53	2634	74	8553	62
8	8553	62	342	14	2740	13	5813	49
9	5813	49	232	54	2849	73	2963	76
10	2963	76	118	55	2963	72		04
			5822	74	24999	96		
					+	04		
					25000	—		

Tabelka ta nie wymaga bliższych objaśnień i dowodzi, że istotnie rata 3082,27 wystarcza na opłacenie procentów, wynoszących ogółem 5822,74, i na spłacenie kapitału 25000, gdyż brak 4 kop. nie odgrywa tu żadnej roli i pochodzi z konieczności zaokrąglania sum do kopiejek.

Przy większej liczbie terminów płatności rat rachunek jest dłuższy, a ponieważ jest zmudny, należy co parę terminów rezultaty kontrolować. Można do tego użyć wzoru (59) lub (60), z tych pierwszy daje możność obrachowania, niezależnie od rachunku bieżącego, jaka część każdej raty obróconą być powinna na umorzenie; drugi pozwala obrachować, jaka część kapitału powinna zostać nieumorzoną po zapłaceniu każdej raty.

Np. według wzoru (59) w trzeciej racie mieścić się powinno umorzenie:

$$u_3 = \frac{3082,27}{(1,04)^8} = \frac{3082,27}{1,36856905} = 2252,18,$$

tak jest istotnie (kol. 4-ta, wiersz 3-ci).

Z wzoru (60) wypada, że np. po zapłaceniu 7-ej raty, winno pozostać nieumorzonego kapitału:

$$R_7 = \frac{3082,27}{0,04} \cdot \frac{(1,04)^3 - 1}{(1,04)^3} = \frac{384,86456128}{0,04499456} = 8553,58.$$

Rezultat różni się od podanego w kol. 5-ej, wierszu 7-ym tylko o wiadome nam 4 kop.

Z wzoru (59') można kolejno otrzymywać umorzenia, mieszczące się w każdej racie za pomocą umorzeń bezpośrednio poprzedzających, np.:

$$u_2 = 2082,27 \times 1,04 = 2165,56$$

$$u_3 = 2165,56 \times 1,04 = 2252,18 \text{ i t. d.}$$

U w a g a. W podobny sposób postępować można, gdy raty nie są stałe, lecz jednostajnie rosnące lub malejące, tylko w razach takich do obliczenia raty użyć trzeba wzorów (50) do (53) stosownie do tego, w jaki sposób raty mają być płacone.

38. **Tabele umarzania obligacyj.** Bardzo często państwa, miasta lub różne przedsiębiorstwa (drogi żelażne, fabryki lub t. p.) zaciągają od społeczeństwa pożyczki, wydając swym bezimiennym wierzycielom dokumenty, zwane: listami zastawnemi, akcyami, obligacyami i t. p. i obowiązują się w ciągu pewnego, z góry ściśle określonego czasu spłacić dług zaciągnięty ratami, wykupując, drogą losowania, wydane kwity pieniężne według ich wartości nominalnej. Dokumenty takie są zawsze wydawane na sumy okrągłe: 100, 250, 500, 1000 lub 3000 jednostek monetarnych.

Rata okresowa, przeznaczona na spłatę owych dokumentów, oblicza się zupełnie tak samo, jak opisaliśmy wyżej, tylko tabela amortyzacyjna musi być ułożona w ten sposób, aby umorzenia wyrażały się w sumach zaokrąglonych (do setek, do 250-cio rublówek i t. d.), odpowiadających sumom, na jakie wydano dokumenty.

Aby ułożyć taką tabelę, należy postępować podobnie, jak w artykule poprzednim przy układaniu tabelki I, lecz z umorzeń, ściśle obliczonych, użyć trzeba za każdym razem tylko sumy wystarczającej do spłacenia maksymalnej liczby dokumentów, pozostałą zaś cząstkę ściśle obliczonego umorzenia oprocentować i dodać do następnej raty.

Gdyby np. na kapitał 25000, o jakim była mowa w poprzednim artykule, wydano 250 obligacyj storublowych, tabela przybrałaby następującą formę (o k r e s w tabelce, jak zwykle, nazywamy r o k i e m):

II. Tabela umorzenia 250 obligacyj 100-rublowych na sumę 25000 rub. w ciągu lat 10 przy stopie 4% i racie rocznej 3082,27 płaconej z dołu.

Rata	Pozostaje do umorzenia przed zapłaceniem raty		Pozostało z roku zeszłego łącznie z 4%		Rata 3082,27 zwiększona o pozostałość z roku zeszłego, oprocentowaną na 4%		Z raty 3082,27 zwiększonej o oprocentowaną pozostałość z roku zeszłego							Pozostało do umorzenia po zapłaceniu raty		Pozostałość oprocentowana na 4%	
	obligacyj	na sumę					Procent od kapitału nieumorzonego	Pozostało na umorzenie		Umorzono obligacyj	Umorzono na sumę	Pozostało na rok następny		obligacyj	na sumę		
1	250	25000	—	—	3082	27	1000	2082	27	20	2000	82	27	230	23000	85	56
2	230	23000	85	56	3167	83	920	2247	83	22	2200	47	83	208	20800	49	74
3	208	20800	49	74	3132	01	832	2300	01	23	2300	—	01	185	18500	—	01
4	185	18500	—	01	3082	28	740	2342	28	23	2300	42	28	162	16200	43	97
5	162	16200	43	97	3126	24	648	2478	24	24	2400	78	24	138	13800	81	37
6	138	13800	81	37	3163	64	552	2611	64	26	2600	11	64	112	11200	12	11
7	112	11200	12	11	3094	38	448	2646	38	26	2600	46	38	86	8600	48	24
8	86	8600	48	24	3130	51	344	2786	51	27	2700	86	51	59	5900	89	97
9	59	5900	89	97	3172	24	236	2936	24	29	2900	36	24	30	3000	37	69
10	30	3000	37	69	3119	96	120	2999	96	30	3000	—	04	—	—	—	—
			448	66			5840			250	25000	431	40				

Widzimy, że rachunek się zgodził, pomijając drobną różnicę 4 kop., powstałą z powodu zaokrągleń do kopiejek. Procentu obecnie zapłaciliśmy o 5840 — 5822,74 = 17,26 więcej niż poprzednio, ale na pokrycie tego zwiększenia posiadamy procent od zbywających resztek, który wynosi również 448,66 — 431,40 = 17,26.

39. Przypadek niepełnej raty ostatniej. Towarzystwa kredytowe, określając swoje warunki, podają zwykle stopę procentu pobieranego od kapitału i stopę przeznaczoną na amortyzacyę — mówią np. dajemy pożyczkę na procent $4^1/_2\%$ i $1^0/_0$ na amortyzacyę. Takie orzeczenie jest dokładne tylko dla pierwszej raty, gdyż we wszystkich następnych ratach mieści się umorzenie wyższe od $1^0/_0$ i rośnie z biegiem czasu. Określają więc po prostu tylko wysokość raty, skutkiem czego liczbę lat, t. j. wogóle liczbę okresów czasu amortyzowania pożyczki należy obrachować. Ta liczba lat wypada najczęściej niecałkowita, co znów zniewala do obliczenia wysokości raty ostatniej (niepełnej).

Przykład liczebny najlepiej rzecz wyjaśni.

Aby uniknąć zbyt wielkiej liczby rat, weźmy następujący przykład: Chodzi o umorzenie 10000 rub. przy stopie $4^0/_0$ procentu i $8^0/_0$ na amortyzacyę; razem $12^0/_0$ od 10000, czyli 1200 rub. stanowi ratę stałą.

Kapitał zostanie umorzony, wzór (57), w ciągu:

$$n = \frac{\log a - \log (a - Ki)}{\log r} = \frac{\log 1200 - \log 800}{\log 1{,}04} = 10{,}338 \text{ lat.}$$

Ostatnia zatem rata (11-a) będzie mniejsza od 1200 rub. i wynosi, według wzoru (45) w art. 29-ym:

$$x = \frac{a}{i}\left(r^{\frac{1}{m}} - 1\right) = \frac{1200}{0{,}04}\left[(1{,}04)^{0{,}338} - 1\right] = 400{,}35.$$

Tabela amortyzacyjna jest następująca:

Tabela III.

Rata	Nieumorzony kapitał przed wniesieniem raty		Z raty 1200 rub. (ostatnia rata = 400,35) przypada na: Procent od nieumorzonego kapit.		Umorzenie		Nieumorzony kapitał po wniesieniu raty	
1	10000	--	400	—	800	—	9200	—
2	9200	—	368	—	832	—	8368	—
3	8368	—	334	72	865	28	7502	72
4	7502	72	300	11	899	89	6602	83
5	6602	83	264	11	935	89	5666	94
6	5666	94	226	68	973	32	4693	62
7	4693	62	187	74	1012	26	3681	36
8	3681	36	147	25	1052	75	2628	61
9	2628	61	105	14	1094	86	1533	75
10	1533	75	61	35	1138	65	395	10
11	395	10	5	34	395	01	.	09

Widzimy z niej, że po wniesieniu dziesięciu rat, pozostaje jeszcze do umorzenia 395 rub. 10 kop., na pokrycie czego, według naszego rachunku, po upływie 0,338 roku wnieść należy 400 rub. 35 kop. Z tego na procent od 395,10 za 0,338 roku przypada 395,10 $\times$ 0,04 $\times$ 0,338 $=$ 5,34 i na umorzenie 400,35 — 5,34 $=$ 395,01, t. j. brakuje nam tylko 9 kop.

Gdybyśmy ostatnią (niecałkowitą) ratę mieli zapłacić nie po 0,338 roku, lecz przy końcu 11-go roku, wtedy, oczywiście, ta rata niecałkowita musi być większa od poprzedniej, gdyż musi zawierać całoroczny procent od 395,10, a nie za 0,338 roku. Wynosić więc powinna 395,10 $+$ 395,10 $\times$ 0,04 $=$ 395,10 $+$ 15,80 $=$ 410,90.

Można ją również obliczyć z góry, według odpowiednio wyprowadzonego wzoru. W takim bowiem razie powinno być:

$$K = a\,v + a\,v^2 + a\,v^3 + \ldots + a\,v^n + x\,v^{n+1}$$

$$= a\,v\,(1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}) + x\,v^{n+1}$$

$$= a\,v\,.\,\frac{1 - v^n}{1 - v} + x v^{n+1} = \frac{a}{r}\,.\,\frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}} + \frac{x}{r^{n+1}},$$

czyli:

$$K = \frac{a}{i}\,.\,\frac{r^n - 1}{r^n} + \frac{x}{r^{n+1}},$$

skąd:

$$x = K\,.\,r^{n+1} - \frac{a\,r}{i}\,(r^n - 1).$$

Zakładając $K = 10000$, $r = 1{,}04$, $a = 1200$, $i = 0{,}04$, $n = 10$, jest $r^{n+1} = r^{11} = 1{,}539454$, $r^{10} = 1{,}480244$; więc otrzymujemy:

$$x = 15394{,}54 - \frac{1200 \times 1{,}04}{0{,}04} \times 0{,}480244 = 410{,}93,$$

t. j. prawie tyle, co nam wypadło poprzednio.

40. Pożyczki premiowane z wygranemi. Dotąd zajmowaliśmy się przypadkiem, gdy obligacye umarzają się według ich wartości nominalnej stałej i bez wygranych. Tymczasem są rodzaje pożyczek, jak np. u nas pożyczki premiowe wszystkich trzech emisyj, których wartość nominalna zwiększa się z biegiem losowań o pewną dopłatę i oprócz tego niektóre numery, stosownie do przeprowadzonego losowania, mogą wygrać pewne z góry ściśle określone sumy.

Nadwyżka spłaty takich pożyczek ponad ich pierwotną wartość nominalną nazywa się „premium" (stąd nazwa „premiówki"), a sumy rozlosowywane jako wygrane, zowią się „wygranemi".

Chodzi o sposób obliczenia zawsze stałej raty, jaką wypuszczający pożyczkę premiowaną z wygranemi powinien co pewien okres czasu (najczęściej co pół roku) poświęcać, aby zapłacić: procenty od nieumorzonej części zaciągniętej pożyczki, umorzenia z odpowiedniemi premiami oraz wygrane.

Niech K oznacza wysokość zaciągniętej na n okresów pożyczki, i stopę od jednostki (okresową); $r = 1 + i$ czynnik oprocentowujący; $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ sumy przeznaczone na wygrane; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ stosunki wartości nominalnej pierwotnej zwiększonej o premię każdego okresu do wartości nominalnej pierwotnej. Gdyby np. wartością nominalną pierwotną pożyczki było 100, a premią w okresie trzecim 15, to $p_3 = \frac{115}{100} = 1{,}15$.

Poszukujemy wzoru, z którego możnaby obliczyć ratę a, jaką poświęcić należy w każdym okresie z dołu, gwoli umorzenia pożyczki K w ciągu n okresów przy spełnieniu wszystkich powyżej opisanych warunków.

Gdy przez $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ oznaczymy umorzenia, mieszczące się w pierwszej, drugiej i t. d., n-ej racie a, to ratę pierwszą możemy rozłożyć na sumę:

$$Ki + u_1 p_1 + w_1,$$

ratę drugą na $\quad (K - u_1)\, i + u_2 p_2 + w_2,$

„ trzecią „ $\quad (K - u_1 - u_2)\, i + u_3 p_3 + w_3,$ i t. d.

A ponieważ raty te mają być sobie równe, zatem powinno być:

$$Ki + u_1 p_1 + w_1 = Ki - u_1 i + u_2 p_2 + w_2 = Ki - u_1 i - u_2 i + u_3 p_3 + w_3 = \quad \text{i t. d. aż do końca.}$$

Po zniesieniu wyrazów identycznych Ki, wypada:

$$u_1 p_1 + w_1 = -u_1 i + u_2 p_2 + w_2 = -u_1 i - u_2 i + u_3 p_3 + w_3 \text{ i t. d.}$$

Stąd:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= u_1 \cdot \frac{i + p_1}{p_2} + \frac{w_1 - w_2}{p_2} \\ u_3 &= u_2 \cdot \frac{i + p_2}{p_3} + \frac{w_2 - w_3}{p_3} \\ u_4 &= u_3 \cdot \frac{i + p_3}{p_4} + \frac{w_3 - w_4}{p_4} \\ &\text{i t. d.} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots (\alpha).$$

Gdy w (α) w wyrażeniu na u_3 podstawimy za u_2 odpowiednie mu wyrażenie, w wyrażeniu na u_4 za u_3 poprzednio otrzymane wyrażenie, i t. d., wtedy otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= u_1 \cdot \frac{i+p_1}{p_2} + \frac{w_1-w_2}{p_2}, \\ u_3 &= u_1 \cdot \frac{(i+p_1)(i+p_2)}{p_2 p_3} + \frac{w_1-w_2}{p_2} \cdot \frac{i+p_2}{p_3} + \frac{w_2-w_3}{p_3}, \\ u_4 &= u_1 \cdot \frac{(i+p_1)(i+p_2)(1+p_3)}{p_2 p_3 p_4} + \frac{w_1-w_2}{p_2} \cdot \frac{(i+p_2)(i+p_3)}{p_3 p_4} \\ &\quad + \frac{w_2-w_3}{p_3} \cdot \frac{i+p_3}{p_4} + \frac{w_3-w_4}{p_4}, \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

i t. d. — wogóle:

$$u_m = u_1 \frac{(i+p_1)(i+p_2)\dots(i+p_{m-1})}{p_2 p_3 \dots p_m} + \frac{w_1-w_2}{p_2} \cdot \frac{(i+p_2)(i+p_3)\dots(i+p_{m-1})}{p_3 p_4 \dots p_m}$$
$$+ \frac{w_2-w_3}{p_3} \cdot \frac{(i+p_3)(i+p_4)\dots(i+p_{m-1})}{p_4 p_5 \dots p_m} + \dots + \frac{w_{m-1}-w_m}{p_m} \quad (\gamma).$$

Jeżeli teraz, w celu uproszczenia postaci wzoru, oznaczymy dla $\alpha < m$ i $m \leqslant n$:

$$S_{\alpha, m} = \frac{(i+p_\alpha)(i+p_{\alpha+1}) + \dots + (i+p_{m-1})}{p_{\alpha+1} p_{\alpha+2} \dots p_m} \text{*)} \quad (61),$$

to z (γ) wypadnie:

$$u_m = u_1 S_{1,m} + \frac{w_1-w_2}{p_2} S_{2,m} + \frac{w_2-w_3}{p_3} S_{3,m} + \dots + \frac{w_{m-1}-w_m}{p_m} \quad (62),$$

albo, w rozwinięciu szczegółowem dla $m = 1, 2, 3, \dots, n$:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_1, \\ u_2 &= u_1 S_{1,2} + \frac{w_1-w_2}{p_2}, \\ u_3 &= u_1 S_{1,3} + \frac{w_1-w_2}{p_2} S_{2,3} + \frac{w_2-w_3}{p_3}, \\ &\text{i t. d.} \\ u_n &= u_1 S_{1,n} + \frac{w_1-w_2}{p_2} S_{2,n} + \frac{w_2-w_3}{p_3} S_{3,n} + \dots + \frac{w_{n-1}-w_n}{p_n} \end{aligned}\right\} \quad (63).$$

Gdy, dla dalszego uproszczenia wzoru, oznaczymy jeszcze:

$$C_\lambda = 1 + S_{\lambda,\lambda+1} + S_{\lambda,\lambda+2} + S_{\lambda,\lambda+3} + \dots + S_{\lambda,n} \quad (64)$$

---

*) Czyli przy założeniu, że dla $\alpha = m$, $S_{\alpha,m} = S_{m,m} = 1$; zaś dla $\alpha > m$ i $m > n$, $S_{\alpha,m} = 0$.

i (63) dodamy do siebie odpowiedniemi stronami, to, ponieważ na stronie pierwszej $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = K$, będzie:

$$K = u_1 C_1 + \frac{w_1 - w_2}{p_2} C_2 + \frac{w_2 - w_3}{p_3} C_3 + \ldots + \frac{w_{n-1} - w_n}{p_n} C_n \quad (65),$$

albo, gdy oznaczymy raz jeszcze:

$$D = \frac{w_1 - w_2}{p_2} C_2 + \frac{w_2 - w_3}{p_3} C_3 + \ldots + \frac{w_{n-1} - w_n}{p_n} C_n \quad . \quad (66),$$

wypadnie:
$$K = u_1 C_1 + D,$$

skąd:
$$u_1 = \frac{K - D}{C_1}.$$

Że zaś:

$$a = Ki + u_1 p_1 + w_1,$$

przeto:
$$a = Ki + \frac{K - D}{C_1} p_1 + w_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67),$$

t. j. wzór na szukaną ratę.

Jeżeli, naodwrót, znamy ratę, a chcemy się dowiedzieć, jaki kapitał można za nią wypożyczyć, z (67) otrzymujemy:

$$K = \frac{a C_1 + D p_1 - w_1 C_1}{i C_1 + p_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68).$$

41. Przykład. Wzór (67), względnie (68) jest ogólny, obejmuje więc w sobie różne przypadki szczególne: pożyczki z premiami i z wygranemi, z premiami bez wygranych, z wygranemi bez premij, przy najrozmaitszych wysokościach premij i wygranych, zmieniających się w dowolnie rozłożonych okresach. Wreszcie, gdy założymy, że pożyczka jest puszczona bez premij i bez wygranych, otrzymamy znany nam wzór (57) z art. 35-go. Albowiem w tym ostatnim przypadku należy założyć $p = 1$, $w = 0$, wtedy zaś $D = 0$, $p_1 = 1$, $w_1 = 0$, $S_{\alpha, m} = (1 + i)^{m-\alpha} = r^{m-\alpha}$; skutkiem tego:

$$C_1 = 1 + S_{1,2} + S_{1,3} + \ldots + S_{1,n} = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{i}.$$

Gdy te założenia podstawimy w (67), mieć będziemy:

$$a = Ki + \left(K : \frac{r^n - 1}{i}\right) = \frac{K r^n i - Ki + Ki}{r^n - 1} = \frac{K i r^n}{r^n - 1},$$

czyli wzór (57').

Dla stwierdzenia powyższych wywodów teoretycznych przykładem liczebnym, weźmy następujące zadanie.

Wyznaczyć stałą ratę, jaką przeznaczyć należy przez lat 10, na umorzenie, przy stopie 4%, 10000 pożyczek premiowych po 100 rubli każda — z tem, że w 5-ciu ostatnich latach do nominalnej wartości każdej wylosowanej premiówki dopłacamy premię w stosunku 10% wartości nominalnej pierwotnej, przez pierwsze zaś cztery lata i w czasie losowania w dalszych latach parzystych, t. j. w roku 6-ym, 8-ym i 10-ym przeznaczamy po 20000 rubli na wygrane dla posiadaczów premiówek, stosownie do zrządzenia losu.

Oczywiście mamy tu: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{100}{100} = 1$, $p_6 = p_7 = p_8 = p_9 = p_{10} = \frac{110}{100} = 1{,}1$; $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_6 = w_8 = w_{10} = 20000$, $w_5 = w_7 = w_9 = 0$; $K = 1\,000\,000$; $i = 0{,}04$. Owóż dla obrachowania raty a według wzoru (67), oprócz znanych nam już K, i, p_1 i w_1, potrzebujemy jeszcze znać C_1 i D, dla poznania których musimy obliczyć: C_5, C_6, C_7, C_8, C_9 i C_{10}. Ilości: C_2, C_3 i C_4 są zbyteczne, gdyż $w_1 - w_2 = w_2 - w_3 = w_3 - w_4 = 0$. Według wzoru (61):

$$
\begin{aligned}
S_{1,2} &= 1{,}04 : 1 &&= 1{,}040000\\
S_{1,3} &= (1{,}04)^2 : 1 &&= 1{,}081600\\
S_{1,4} &= (1{,}04)^3 : 1 &&= 1{,}124864\\
S_{1,5} &= (1{,}04)^4 : 1 &&= 1{,}169859\\
S_{1,6} &= (1{,}04)^5 : 1{,}1 &&= 1{,}106048\\
S_{1,7} &= (1{,}04)^5 \times 1{,}14 : (1{,}1)^2 &&= 1{,}146268\\
S_{1,8} &= (1{,}04)^5 \times (1{,}14)^2 : (1{,}1)^3 &&= 1{,}187950\\
S_{1,9} &= (1{,}04)^5 \times (1{,}14)^3 : (1{,}1)^4 &&= 1{,}231149\\
S_{1,10} &= (1{,}04)^5 \times (1{,}14)^4 : (1{,}1)^5 &&= 1{,}275918
\end{aligned}
$$

$$C_1 = 1 + 10{,}363656 = 11{,}363656.$$

W podobny sposób znajdziemy:

$$C_5 = 6{,}083798;\ C_6 = 5{,}377100;\ C_7 = 4{,}223518;\ C_8 = 3{,}110413;$$
$$C_9 = 2{,}036363 \text{ i } C_{10} = 1{,}000\,000.$$

Na podstawie tych liczb, z wzoru (66) otrzymuje się:

$$D = \frac{20000 \times 6{,}083798}{1} - \frac{20000 \times 5{,}377100}{1{,}1} + \frac{20000 \times 4{,}223518}{1{,}1}$$
$$- \frac{20000 \times 3{,}110413}{1{,}1} + \frac{20000 \times 2{,}036363}{1{,}1} - \frac{20000 \times 1}{1{,}1} = 62991{,}75$$

i następnie:

$$K - D = 1000000 - 62991{,}75 = 937008{,}25.$$

Mając to, łatwo już obliczymy, według wzoru (67), ratę:

$$a = 40000 + \frac{937008{,}25}{11{,}363656} \times 1 + 20000 = 142456{,}58.$$

Odnośna tablica rachunku bieżącego przedstawia się jak następuje:

IV. Tabela umorzenia 10000 premiówek, po 100 rubli każda, w ciągu 10 lat przy stopie 4% z tem, że w ciągu 5-ciu ostatnich lat ma się dopłacać do wylosowanych listów premie po 10% od nominalnej wartości każdej premiówki, w ciągu zaś czterech pierwszych lat i trzech następnych parzystych: 6-go, 8-go i 10-go rozlosowuje się po 20000 rubli. Rata wynosi 142456,58.

Rata	Pozostało do umorzenia przed zapłaceniem raty:		Rata łącznie z oprocentowaną pozostałością		Z obocznego idzie na:							Pozostałość oprocentowana		Pozostało do umorzenia po zapłaceniu raty:	
	Listów	na sumę			Procent od kapitału nieumorzonego	Premie	Wygrane	Umorzenie Listów	Umorzenie na sumę	Pozostałość				Listów	na sumę
1	10000	1000000	142456	58	40000	—	20000	824	82400	56	58	58	84	9176	917600
2	9176	917600	142515	42	36704	—	20000	858	85800	11	42	11	88	8318	831800
3	8318	831800	142468	46	33272	—	20000	891	89100	96	46	100	32	7427	742700
4	7427	742700	142556	90	29708	—	20000	928	92800	48	90	50	86	6499	649900
5	6499	649900	142507	44	25996	—	—	1165	116500	11	44	11	90	5334	533400
6	5334	533400	142468	48	21336	9190	20000	919	91900	42	48	44	18	4415	441500
7	4415	441500	142500	76	17660	11340	—	1134	113400	100	76	104	79	3281	328100
8	3281	328100	142561	37	13124	9940	20000	994	99400	97	37	101	26	2287	228700
9	2287	228700	142557	84	9148	12120	—	1212	121200	89	84	93	43	1075	107500
10	1075	107500	142550	01	4300	10750	20000	1075	107500	+	01	—	—	—	—

Jedna kopiejka różnicy nie ma, naturalnie, żadnego znaczenia i pochodzi z wiadomych przyczyn; otrzymany rezultat uważać zatem można za ściśle odpowiadający warunkom zadania.

W dalsze szczegóły tych ciekawych operacyj finansowych wchodzić nie będziemy, odsyłając po nie czytelników do pracy p. Al. Czajewicza p. t. „Umarzanie pożyczek długoterminowych" (Warszawa, 1905), acz to, cośmy tu powiedzieli, winno zupełnie wystarczyć do przeprowadzenia wszelkiego rodzaju obliczeń.

E. Procenty składane przy oprocentowaniu z góry.

Wszystko, cośmy wyżej powiedzieli o procentach składanych, odnosiło się do przypadku, nawiasem mówiąc—najczęstszego, gdy kapitały, wkłady, dochody, raty amortyzacyjne i t. d. procentują z dołu (postnumerando). Ze względu wszakże, iż, w drugiej połowie ubiegłego wieku, niektóre instytucye, jak austryacka „Boden-Credit Anstalt", Towarzystwo kredytowe m. Petersburga i Moskwy, wprowadziły do swych operacyj finansowych zasadę oprocentowania z góry (praenumerando), uważamy za niezbędne i o tym przypadku podać czytelnikom naszym niektóre szczegóły.

42. Kapitalizowanie procentów i dyskontowanie kapitałów. Do wyprowadzenia wzoru, odpowiedniego wzorowi (33) w art. 20-ym, przy oprocentowaniu z góry, zazwyczaj autorowie używają następującego rozumowania.

Gdy, jak zwykle, przez j oznaczymy, stopę okresową od jednostki procentu liczonego z góry, to procent za jeden okres (mówić dalej będziemy, jak dawniej, „za rok") od kapitału K wynosi Kj. Jeżeli wierzyciel odbiera ten procent, przy dłużniku pozostaje $K - Kj = K(1-j)$ pod warunkiem, że za rok dłużnik będzie winien wierzycielowi K; jeśli więc, jak to bywa przy procentach składanych, wierzyciel procentu Kj nie odbiera, lecz pozostawia go u dłużnika, to zachodzi pytanie, ile w takim razie, dłużnik będzie winien wierzycielowi przy końcu pierwszego roku? Oczywiście tyle razy więcej, ile razy K jest większe od $K(1-j)$, t. j. gdy ów dług przy końcu roku oznaczymy przez S_1, mamy proporcyę:

$$S_1 : K = K : K(1-j),$$

z której:

$$S_1 = K\frac{1}{1-j} = \frac{K}{1-j} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Skoro zaś wierzyciel po roku posiada u dłużnika S_1, to po dwóch latach posiadać będzie:

$$S_2 = S_1 \cdot \frac{1}{1-j} = \frac{K}{1-j} \cdot \frac{1}{1-j} = \frac{K}{(1-j)^2},$$

po trzech latach:

$$S_3 = \frac{K}{(1-j)^3},$$

i t. d., wogóle po n latach:

$$S_n = \frac{K}{(1-j)^n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (69).$$

To jest właśnie wzór, dający możność obliczenia, na co zamienia się, po n latach, kapitał K, oddany na procent składany przy stopie j od jednostki przy oprocentowaniu z góry.

Rozumowanie powyższe, acz bardzo zręczne, nie tłómaczy jednak jasno tych wewnętrznych przeobrażeń finansowych, jakie się odbywają przy oprocentowaniu kapitału z góry. Dlatego może lepiej będzie rozumować w sposób następujący.

Skoro kapitał jest oprocentowany, przy stopie j od jednostki, z góry, w takim razie wierzyciel zaraz przy oddaniu kapitału K dłużnikowi posiada u niego nietylko, płatny przy końcu roku, kapitał K, ale i procent od tego kapitału Kj, i procent od tego procentu $Kj.j = Kj^2$, i procent od tego drugiego procentu $Kj^2.j = K.j^3$, i t. d. aż do nieskończoności, t. j. dłużnik przy końcu pierwszego roku będzie winien wierzycielowi:

$$S_1 = K + Kj + Kj^2 + Kj^3 + \ldots = K(1 + j + j^2 + j^3 + \ldots$$
$$\ldots \text{do nieskończoności}).$$

Wyrażenie w nawiasie przedstawia sumę wyrazów postępu geometrycznego, malejącego do nieskończoności, o wykładniku $j < 1$, więc $= \frac{1}{1-j}$, zatem:

$$S_1 = K \cdot \frac{1}{1-j} = \frac{K}{1-j} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta),$$

czyli to samo, co się znajduje we wzorze (α), z którego, tak samo jak wyżej, można przejść do wzoru (69).

Rozumowania powyższe przytoczyliśmy tylko dlatego, aby dać pojęcie o technice przemiany kapitału K na sumę S_n, ale do wyprowadzenia wzoru (69) nie są one konieczne, ponieważ wzór (69) otrzymuje się bezpośrednio z wzoru:

$$S_n = K(1+i)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33),$$

gdy za stopę i podstawimy w nim:

$$i = \frac{j}{1-j} \text{ (art. 12-ty i 24-ty) } . \quad . \quad (20'),$$

zapomocą którego przechodzimy od stopy procentu płaconego z dołu do stopy procentu płaconego z góry.

Istotnie, czyniąc to otrzymujemy:

$$S_n = K\left(1+\frac{j}{1-j}\right)^n = K.\left(\frac{1}{1-j}\right)^n = \frac{K}{(1-j)^n},$$

czyli wzór (69).

Jeżeli założymy $K = 1$, wypadnie:

$$S_n = \frac{1}{(1-j)^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69'),$$

skąd można obrachować tablicę, podobną do naszej Tabl. I, i ułatwić sobie rachunki.

Podobnie, gdy we wzór z art. 24-go:

$$T_n = \frac{K}{r^n} = \frac{K}{(1+i)^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39).$$

podstawimy $i = \frac{j}{1-j}$, otrzymamy:

$$T_n = \frac{K}{\left(1+\frac{j}{1-j}\right)^n} = K.(1-j)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70),$$

zapomocą którego możemy znowu dyskontować kapitały przy oprocentowaniu z góry; wzór ten możemy zresztą otrzymać bezpośrednio z (69), gdy w nim zastąpimy K przez T_n, S_n przez K.

Przy $K = 1$, wypada:

$$T_n = (1-j)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70'),$$

i z niego można również ułożyć tablicę, podobną do naszej Tabl. II.

Jeżeli we wzorze (69) założymy $K = 1000$, $j = 0{,}04$, $n = 15$, otrzymamy:

$$S_{15} = \frac{1000}{(0{,}96)^{15}} = 1844{,}73,$$

podczas gdy przy oprocentowaniu z dołu wypada 1800,94, t. j. mniej.

Te same liczby podstawione w (70) dają:

$$T_{15} = 1000 \times (0{,}96)^{15} = 542{,}09,$$

gdy przy oprocentowaniu z dołu mamy 555,26, czyli więcej.

43. Przekształcenie innych wzorów. W taki sam sposób przekształcić można inne także wzory, wyprowadzone dla oprocentowania z dołu.

Np. po podstawieniu $i = \frac{j}{1-j}$, wzory (42), (43), (46) i (47) przechodzą na:

$$\overset{a,n}{W}_{p,g} = \frac{a \cdot \frac{1}{1-j}}{\frac{j}{1-j}} \left\{ \frac{1}{(1-j)^n} - 1 \right\} = \frac{a}{j} \cdot \frac{1-(1-j)^n}{(1-j)^n} \quad . \ . \ . \quad (71),$$

$$\overset{a,n}{W}_{p,d} = \frac{a}{\frac{j}{1-j}} \left\{ \frac{1}{(1-j)^n} - 1 \right\} = \frac{a(1-j)}{j} \cdot \frac{1-(1-j)^n}{(1-j)^n} \quad . \quad (71'),$$

$$\overset{a,n}{W}_{t,g} = \frac{a}{\frac{j}{1-j} \cdot \frac{1}{(1-j)^{n-1}}} \cdot \left[\frac{1}{(1-j)^n} - 1 \right] = \frac{a}{j} \cdot \{1-(1-j)^n\} \quad (72),$$

$$\overset{a,n}{W}_{t,d} = \frac{a}{\frac{j}{1-j} \cdot \frac{1}{(1-j)^n}} \left\{ \frac{1}{(1-j)^n} - 1 \right\} = \frac{a(1-j)}{j} \{1-(1-j)^n\} \quad (72').$$

Podstawiając w każdy z tych wzorów $a = 100$, $j = 0{,}04$, $n = 15$, znajdziemy:

$$\overset{100,15}{W}_{p,g} = \frac{100}{0{,}04} \cdot \frac{1-(0{,}96)^{15}}{(0{,}96)^{15}} = 2111{,}81;$$ przy oprocentowaniu z dołu 2082,45.

$$\overset{100,15}{W}_{p,d} = \frac{100 \times 0{,}96}{0{,}04} \cdot \frac{1-(1{,}96)^{15}}{(0{,}96)^{15}} = 2027{,}34;$$ przy oprocentowaniu z dołu 2002,36.

$$\overset{100,15}{W}_{t,g} = \frac{100}{0{,}04} \cdot \{1 - (0{,}96)^{15}\} = 1144{,}79;$$ przy oprocentowaniu z dołu 1156,31.

$$\overset{100,15}{W}_{t,d} = \frac{100 \times 0{,}96}{0{,}04} \{1 - (0{,}96)^{15}\} = 1099{,}00;$$ przy oprocentowaniu z dołu 1111,84.

Zobaczmy teraz, jakie jest przejście od stopy rocznej do stopy za ułamek roku. W tym celu we wzór z art. 21-go:

$$1 + i_{\frac{l}{m}} = (1+i)^{\frac{l}{m}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (36)$$

podstawmy $i = \frac{j}{1-j}$ oraz $i_{\frac{l}{m}} = \frac{j_{\frac{l}{m}}}{1-j_{\frac{l}{m}}}$, wtedy otrzymamy:

$$1 + \frac{j_{\frac{l}{m}}}{1-j_{\frac{l}{m}}} = \left(1+\frac{j}{1-j}\right)^{\frac{l}{m}},$$

czyli czynnik oprocentowujący:

$$\frac{1}{1-j_{\frac{l}{m}}} = \left(\frac{1}{1-j}\right)^{\frac{l}{m}} = \frac{1}{(1-j)^{\frac{l}{m}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (73),$$

i naodwrót:

$$\frac{1}{1-j} = \frac{1}{(1-j_{\frac{l}{m}})^{\frac{m}{l}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (73').$$

Stopa:

$$(74) \quad j_{\frac{l}{m}} = 1 - (1-j)^{\frac{l}{m}}, \quad \text{i naodwrót:} \quad j = 1 - (1-j_{\frac{l}{m}})^{\frac{m}{l}} \quad (74').$$

Gdy $l = 1$,

$$(75) \quad \frac{1}{1-j_{\frac{1}{m}}} = \sqrt[m]{\frac{1}{1-j}}, \quad \text{i naodwrót:} \quad \frac{1}{1-j} = \left(\frac{1}{1-j_{\frac{1}{m}}}\right)^m \quad (75');$$

$$(76) \quad j_{\frac{1}{m}} = 1 - \sqrt[m]{1-j}, \quad \text{i naodwrót:} \quad j = 1 - (1-j_{\frac{1}{m}})^m \quad (76').$$

Te wzory, podobnie jak w artykule 22-im, pozwalają nam rozciągnąć wzór (69), a następnie także (70) i (71) do (72') na niecałkowitą liczbę lat oraz wyprowadzić wzory na raty niepełne, które otrzymamy, podstawiając w (44) i (45) $i = \frac{j}{1-j}$. Mianowicie:

dla przypadku (71) i (72) z wzoru $x = \frac{ar}{i} \cdot \frac{r^{\frac{l}{m}}-1}{r^{\frac{l}{m}}}$, otrzymujemy:

$$x = \frac{a \cdot \frac{1}{1-j}}{\frac{j}{1-j}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1-j}\right)^{\frac{l}{m}} - 1}{\left(\frac{1}{1-j}\right)^{\frac{l}{m}}} = \frac{a}{j}\left\{1 - (1-j)^{\frac{l}{m}}\right\} \quad (77);$$

dla przypadku (71') i (72') z wzoru $x = \frac{a}{i}(r^{\frac{1}{m}} - 1)$:

$$x = \frac{a}{\frac{j}{1-j}} \left\{ \left(\frac{1}{1-j} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right\} = \frac{a(1-j)}{j} \cdot \frac{1-(1-j)^{\frac{1}{m}}}{(1-j)^{\frac{1}{m}}} \quad . \quad (78).$$

Wzory te dadzą się, naturalnie, wyprowadzić i bezpośrednio — tak samo jak w art. 28-ym i 29-ym.

44. Umarzanie pożyczek długoterminowych przy oprocentowaniu z góry i wnoszeniu rat z dołu. Ten właśnie sposób umarzania pożyczek został wprowadzony przez wzmiankowe wyżej towarzystwa. Zadanie jest następujące: towarzystwo wypożycza kapitał K przy stopie j, od jednostki, procentu płaconego z góry, z obowiązkiem umorzenia go w n ratach stałych a, płaconych z dołu. Obliczyć ratę a. Według brzmienia zagadnienia, towarzystwo wypożycza dłużnikowi kapitał K, w zamian zaś otrzymać ma z góry pierwszy procent Kj oraz n rat po a, płatnych z dołu. Zatem kapitał K powinien być równy procentowi Kj + wartość teraźniejsza n rat po a, płatnych co okres (np. co rok) z dołu.

Ponieważ, według wzoru (72'), wartość teraźniejsza pomienionych rat wynosi:

$$\frac{a(1-j)}{j} \{1 - (1-j)^n\},$$

zatem ma być:

$$K = Kj + \frac{a(1-j)}{j} \{1 - (1-j)^n\},$$

albo:

$$K(1-j) = \frac{a(1-j)}{j} \{1 - (1-j)^n\};$$

stąd:

$$a = \frac{Kj}{1-(1-j)^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79).$$

Jeżeli np. na powyższych warunkach dano 60000 rub. pożyczki na 5 lat przy stopie $5^0/_0$ procentu liczonego z góry, to

$$a = \frac{60000 \times 0,05}{1 - (0,95)^5} = \frac{3000}{0,226219} = 13261,49 \, .$$

Dłużnik zatem powinien zapłacić, zaraz przy otrzymaniu pożyczki. rub. 3000 tytułem procentu i następnie przez 5 lat płacić rocznie z dołu po 13261,49.

Gdyby chodziło o ułożenie tablicy amortyzacyjnej, należałoby przedewszystkiem każdą ratę rozdzielić na mieszczące się w niej umorzenie i na procent, płatny z góry, od nieumorzonej części kapitału. W tym celu należy postąpić podobnie jak w art. 36-ym.

Gdy wogóle oznaczymy przez $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ umorzenia, mieszczące się w racie pierwszej, drugiej, trzeciej, i t. d., w n-ej, to widocznie:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pierwsza rata} & a = u_1 + (K - u_1)j \quad \text{(gdyż od } K \text{ został procent z góry zapłacony),} \\ \text{druga rata} & a = u_2 + (K - u_1 - u_2)j, \\ \text{trzecia rata} & a = u_3 + (K - u_1 - u_2 - u_3)j, \\ \text{i t. d.} & \end{array}\right| \; . \; (\alpha).$$

Odejmując od drugiej równości pierwszą, od trzeciej drugą, i t. d., mieć będziemy:

$$u_2 - u_1 - u_2 j = 0, \text{ skąd } u_2 = \frac{u_1}{1-j},$$

$$u_3 - u_2 - u_3 j = 0, \quad \text{"} \quad u_3 = \frac{u_2}{1-j} = \frac{u_1}{(1-j)^2}$$

$$\text{i t. d. — w końcu} \; \ldots\ldots \; u_n = \frac{u_{n-1}}{1-j} = \frac{u_1}{(1-j)^{n-1}}.$$

Stąd wyprowadzamy związek ogólny:

$$u_m = \frac{u_{m-1}}{1-j} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (80),$$

zapomocą którego możemy z umorzenia, mieszczącego się w racie poprzedniej, obliczyć umorzenie, mieszczące się w racie następnej; czyli znając umorzenie, zawarte w racie pierwszej, łatwo znajdziemy umorzenie mieszczące się w racie drugiej, z tego znów umorzenie zawarte w racie trzeciej, i t. d. do końca.

Umorzenie zaś, mieszczące się w racie pierwszej, możemy obrachować z pierwszej równości (α), mianowicie:

$$u_1 = \frac{a - Kj}{1-j} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (81).$$

Np. dla danego przykładu:

$$u_1 = \frac{13261{,}49 - 60000 \times 0{,}05}{1 - 0{,}05} = \frac{10261{,}49}{0{,}95} = 10801{,}57,$$

$$u_2 = \frac{10801{,}57}{0{,}95} = 11370{,}07,$$

$$u_3 = \frac{11370{,}07}{0{,}95} = 11968{,}49,$$

$$u_4 = \frac{11968{,}49}{0{,}95} = 12598{,}41,$$

$$u_5 = \frac{12598{,}41}{0{,}95} = 13261{,}48.$$

Ostatnie umorzenie różni się od raty tylko o 1 kop., czyli jest jej równe, bo różnica 1 kop., powstająca z wiadomych przyczyn, nie ma tu znaczenia. I tak być powinno, skoro bowiem procent za ostatni rok zostaje z góry zapłacony, ostatnia rata powinna tylko pokryć część kapitału jeszcze nieumorzoną.

Teraz już możemy z łatwością ułożyć tabelkę amortyzacyjną.

V. Tabelka amortyzacyjna.

Rata	Kapitał nieumorzony przed wniesieniem raty		Z raty 13261,49 przypada na:				Kapitał nieumorzony po wniesieniu raty	
			Procent z góry od kapitału nieumorzonego		Umorzenie			
0	60000	—	3000	—	—	—	60000	—
1	60000	—	2459	92	10801	57	49198	43
2	49198	43	1891	42	11370	07	37828	36
3	37828	36	1293	—	11968	49	25859	87
4	25859	87	663	08	12598	41	13261	46
5	13261	46	—	—	13261	49	zbywa	03

Rachunek powyższy zrozumieć nietrudno. W wierszu 0 płacimy tylko $5^0/_0$ procentu z góry za rok pierwszy od kapitału 60000; sam kapitał nie ulega zatem zmianie. Po roku z raty 13261,49 przypada na umorzenie, według poprzedniego obliczenia (u_1), 10801,57 i pozostaje reszta $13261{,}49 - 10801{,}57 = 2459{,}92$, która stanowi $5^0/_0$ mającego się zapłacić procentu z góry za rok drugi od nieumorzonego kapitału $60000 - 10801{,}57 = 49198{,}43$, który istotnie wynosi $\frac{49198{,}43}{100} \times 5 = 2459{,}92$. Po dwóch latach, znów wnosimy ratę 13261,49; z niej na umorzenie idzie 11370,07, reszta, czyli $13261{,}49 - 11370{,}07 = 1891{,}42$ stanowi procent należny z góry za rok trzeci od nieumorzonego kapitału $49198{,}43 - 11370{,}07 = 37828{,}36$ i tak dalej do końca tablicy.

45. Przypadek, w którym ostatnia rata jest niepełna. Jeżeliby ostatnia rata była niepełna, można zapomocą wzoru (78) obliczyć jej wysokość. Weżmy np. takie zadanie.

Umorzyć kapitał 10000 rub. przez wniesienie odpowiedniej liczby rat po 1200 rub., z oprocentowaniem z góry w stosunku $4^0/_0$.

Umorzenie dokonywa się w ciągu n lat, które obrachować można z wzoru (79):

$$a\{1-(1-j)^n\}=Kj; \quad a-a(1-j)^n=Kj; \quad a(1-j)^n=a-Kj.$$

Stąd:

$$(1-j)^n=\frac{a-Kj}{a},$$

oraz:

$$n=\frac{\log(a-Kj)-\log a}{\log(1-j)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82).$$

Gdy w ostatni wzór podstawimy: $K=10000$, $a=1200$, $j=0{,}04$, otrzymamy:

$$n=\frac{\log 800-\log 1200}{\log 0{,}96}=\frac{-0{,}1760912}{-0{,}0177288}=9{,}932494,$$

t. j. pożyczka będzie umorzona przez 9 rat pełnych, po 1200 rub., i przez dziesiątą — niepełną, która, o ile ma być wniesiona nie przy końcu 10-go roku, lecz po 9,932494 latach, oblicza się z wzoru (78):

$$x=\frac{a(1-j)}{j}\cdot\frac{1-(1-j)^{\frac{l}{m}}}{(1-j)^{\frac{l}{m}}}=\frac{1200\times 0{,}96}{0{,}04}\times\frac{1-(0{,}96)^{0{,}932494}}{(0{,}96)^{0{,}932494}}=1117{,}45.$$

Dla ułożenia tablicy amortyzacyjnej, obrachować przedewszystkiem należy umorzenia, zawarte w każdej racie.

Z wzoru (81) wypada:

$$u_1=\frac{a-Kj}{1-j}=\frac{1200-400}{0{,}96}=833{,}33;$$

z wzoru (80):

$$u_2=\frac{833{,}33}{0{,}96}=868{,}05 \text{ i podobnie:}$$

$$u_3=904{,}22;\ u_4=941{,}90;\ u_5=981{,}15;\ u_6=1022{,}03;\ u_7=1064{,}61;$$
$$u_8=1108{,}97;\ u_9=1155{,}18.$$

Otrzymujemy stąd następującą tabelkę amortyzacyjną:

VI. Tabela amortyzacyjna.

Rata	Kapitał nieumorzony przed wniesieniem raty		Z raty 1200 rub. (względnie 1117,45)				Kapitał nieumorzony po wniesieniu raty	
			Procent z góry od kapitału nieumorzonego		Umorzenie			
0	10000	—	400	—	—	—	10000	—
1	10000	—	366	67	833	33	9166	67
2	9166	67	331	95	868	05	8298	62
3	8298	62	295	78	904	22	7394	40
4	7394	40	258	10	941	90	6452	50
5	6452	50	218	85	981	15	5471	35
6	5471	35	177	97	1022	03	4449	32
7	4449	32	135	39	1064	61	3384	71
8	3384	71	91	03	1108	97	2275	74
9	2275	74	41	71	1158	29	1117	45
10	1117	45	—	—	1117	45	—	—

Przez pierwsze lat 8 rachunek prowadzi się tak samo jak w Tabelce V-ej, dopiero po 9-iu latach (okresach) zachodzi mała modyfikacya. Ponieważ mianowicie ostatnia, po 9,932494 latach płatna rata ma wynosić, według obliczenia, 1117,45—zatem z raty 9-ej równej 1200 rubli na umorzenie obrócić trzeba 2275,74 — 1117,45 = 1158,29, czyli na procent zostaje 1200 — 1158,29 = 41,71 i tyle też (prawie) potrzeba, bo procent od 1117,45 przy stopie 4% za 0,932494 roku $= \frac{1117,45}{100} \times 4 \times 0,932494 = 41,68$ — bardzo mało różne (z wiadomych przyczyn) od 41,71.

Gdyby ostatnia rata miała być zapłacona przy końcu okresu dziesiątego, z raty 9-ej należałoby obrócić na umorzenie 1155,18, resztę 1200 — 1155,18 = 44,82 na procent od nieumorzonej jeszcze części kapitału za cały okres 10-y, co istotnie stanowi 4% od pomienionej sumy, wynoszącej 2275,74 — 1155,18 = 1120,56. Ta różnica stanowi zarazem wysokość ostatniej raty (niepełnej), płatnej przy końcu okresu dziesiątego. Tę ratę ostatnią (niepełną) można obliczyć naprzód; należy jednak do tego wyprowadzić wzór specyalny — podobnie jak to uczyniliśmy w art. 39-ym. Mianowicie:

$$K = Kj + a(1-j) + a(1-j)^2 + \ldots + a(1-j)^n + x(1-j)^{n+1},$$

$$K(1-j) = a(1-j).\{1 + (1-j) + (1-j)^2 + \ldots$$

$$\ldots + (1-j)^{n-1}\} + x(1-j)^{n+1};$$

$$K = a\frac{1-(1-j)^n}{1-(1-j)} + x(1-j)^n = \frac{a}{j}.\{1-(1-j)^n\} + x(1-j)^n.$$

Stąd:

$$x = \frac{K}{(1-j)^n} - \frac{a}{j}\left\{\frac{1}{(1-j)^n} - 1\right\},$$

albo ostatecznie:

$$x = \frac{K}{(1-j)^n} - \frac{a}{j}.\frac{1-(1-j)^n}{(1-j)^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83).$$

Po podstawieniu w (83): $K = 10000$, $a = 1200$, $j = 0{,}04$, $n = 9$, otrzymujemy:

$$x = \frac{10000}{(0{,}96)^9} - \frac{1200}{0{,}04}.\frac{1-(0{,}96)^9}{(0{,}96)^9} = \frac{10000}{0{,}692534}$$

$$- 30000 \times \frac{0{,}307466}{0{,}692534} = 1120{,}55,$$

czyli prawie ściśle to samo, co nam wypadło z poprzedniego rachunku.

46. Uwaga. Wzory, wyprowadzone w części E, podaliśmy w postaci zupełnie rozwiniętej, chociaż możnaby je uprościć przez wprowadzenie oznaczeń skróconych — podobnie jak to uczyniliśmy przy oprocentowaniu z dołu. Wtedy nawet zachodzić będzie zupełne podobieństwo pomiędzy wzorami zasadniczemi przy oprocentowaniu z dołu i z góry.

Gdybyśmy np. czynnik oprocentowujący $\frac{1}{1-j}$ oznaczyli przez ρ, czynnik dyskontujący $1-j$ przez φ, wzór (69) przybrałby postać $S_n = K\rho^n$, wzór (70) postać $T_n = K\varphi^n$, wzór (71) postać $W_{p,\,g} = a\rho.\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}$, i t d. Z porównania tych wzorów z odpowiadającemi im wzorami (33′), (39′), (42) okazuje się, że, przy takich oznaczeniach, od wzorów przy oprocentowaniu z dołu do wzorów przy oprocentowaniu z góry przechodzi się przez proste podstawienie ρ za r, względnie φ za v.

ROZDZIAŁ II.

Niektóre wiadomości z Algebry i Analizy.

A. Przemiany, Odmiany i Połączenia.

1. Teorya połączeń czyli Kombinatoryka. W wielu zagadnieniach teoretycznych oraz zastosowaniach Matematyki wypada nieraz badać rozmaite ugrupowania (zestawienia, kompleksy) przedmiotów czyli elementów, należących do danych zbiorów czyli mnogości. Część Matematyki, zajmująca się badaniem takich ugrupowań, nazywa się Kombinatoryką od wyrazu „kombinacya“ (połączenie), będącego nazwą ugrupowań pewnej kategoryi, o których niżej mówić będziemy.

2. Oznaczanie elementów i ugrupowań w Kombinatoryce. Przedmioty rzeczywiste lub pomyślane mnogości, których ugrupowania badamy, oznaczać można w sposób rozmaity: zapomocą liter alfabetu, a więc np. przez a, b, c, d . . . , albo zapomocą liter ze skaźnikami, np. $a_1, a_2, a_3 \ldots$; $b_1, b_2 \ldots$, albo też zapomocą znaków liczbowych 1, 2, 3... Pamiętać o tem należy, że w Kombinatoryce oznaczenia te nie wyrażają ani wielkości, ani wartości liczbowych: są one tylko symbolami lub nazwami umówionemi elementów, służącemi do odróżniania ich od siebie przy porządkowaniu, t. j. przy wyznaczaniu im odpowiednich miejsc w ugrupowaniach.

Ugrupowania elementów wyrażamy piśmiennie, pisząc obok siebie symbole literowe lub liczbowe elementów; tego sposobu pisania nie należy wiązać z żadnem działaniem arytmetycznem pomiędzy elementami.

Tak np. znakowania:

$$a\,b\,c\,d, \qquad a\,a\,b\,c\,c, \qquad a_1\,a_2\,a_3\,b_1\,b_2\,c_1,$$

rozumieć należy w sposób następujący: pierwsze z nich wyraża ugrupowanie (kompleks) czterech różnych elementów, należących do mnogości z czterech lub większej liczby elementów złożonej, w którem na miejscu pierwszem stoi element a, na drugiem element tejże mnogości b, na trzeciem element c, na czwartem element d; drugie wyraża kompleks złożony z pięciu elementów, z których na miejscu pierwszem i drugiem powtarza się element a, na miejscu trzeciem stoi element b różny od poprzedniego, na miejscu czwartem i piątem powtarza się element c, różny od każdego z dwu poprzednich; trzecie wyraża ugrupowanie, złożone z sześciu elementów, z których na miejscu pierwszem stoi element a_1, na drugiem element a_2, na trzeciem element a_3, na czwartem element b_1, na piątem element b_2, na szóstem element c_1.

W razie, gdy elementy wyrażamy zapomocą znaków liczbowych, stosujemy ten sam sposób oznaczania i piszemy np.:

1 2 3 4, 1 1 2 3 3,

gdzie pierwsze zestawienie wyraża kompleks czterech elementów różnych, drugie kompleks pięciu elementów, z których dwa stojące na pierwszem i drugiem miejscu są jednakowe, stojące na miejscu czwartem i piątem także jednakowe, różne od poprzednich.

Pożyteczną bywa w badaniu ugrupowań umowa następująca. Z dwóch elementów, oznaczonych literami alfabetu, nazywać będziemy elementem rzędu wyższego lub wprost wyższym ten, którego litera zajmuje w porządku alfabetycznym miejsce dalsze; tak np. z dwóch elementów a, c, drugi jest wyższy od pierwszego, lub pierwszy niższy od drugiego. Podobnież z dwóch elementów, oznaczonych znakami liczbowemi 4, 2, pierwszy jest wyższy od drugiego, bo jest większy — czytany jako liczba. Tym sposobem naprzykład w ugrupowaniach

a c k m p, a a c c c d,

elementy są tak uporządkowane, że po żadnym z nich nie następuje element niższy. Podobnie są uporządkowane kompleksy

1 2 3 5 1 1 1 3 3 4.

Takie ugrupowania elementów nazywać będziemy dobrze uporządkowanemi.

Przeciwnie, ugrupowania

2 1 3 4 6 5, 1 2 1 3 2 1,

jak łatwo widzieć, nie są dobrze uporządkowane.

Przy znakowaniu elementów zapomocą liter, opatrzonych skaźnikami, umówić się można, że elementy a_1, a_2, a_3 . . . postępują od niższych do wyższych, że elementy b_1, b_2, b_3 . . . są wyższe od elementów a i t. d.

3. Działania kombinatoryjne. Działaniem kombinatoryjnem nazywamy tworzenie podług pewnego prawidła zestawień czyli ugrupowań z elementów danej mnogości. Tych sposobów tworzenia, czyli działań kombinatoryjnych, można pomyśleć bardzo wiele; my tu mówić będziemy o trzech działaniach zasadniczych, które nazwano przemianami (permutacyami), odmianami (waryacyami) i połączeniami (kombinacyami), a teoryę ich rozpoczniemy od działania najprostszego, które nazywamy przestawieniem (transpozycya).

4. Przestawienie dwu elementów. Dajmy, że mamy ugrupowanie

$$b\,c\,d\,a\,e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

pięciu elementów należących do mnogości, złożonej z tych pięciu lub większej liczby elementów. Wybierzmy którekolwiek dwa elementy np. b, a, z których pierwszy znajduje się na miejscu pierwszem, drugi na czwartem, i umieśćmy jeden na miejscu drugiego, t. j. element a na miejscu pierwszem, element b na czwartem; otrzymamy tym sposobem inne ugrupowanie lub zestawienie

$$a\,c\,d\,b\,e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Działanie, wykonane w sposób tu opisany, nazywamy przestawieniem, i możemy powiedzieć, że ugrupowanie (2) powstało z ugrupowania (1) przez przestawienie elementów a, b. Naodwrót, ugrupowanie (1) powstaje z ugrupowania (2) przez to samo przestawienie elementów a, b.

Podobnież ugrupowania

$$1\,2\,3\,4\,5, \qquad 3\,2\,1\,4\,5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

powstają jedno z drugiego przez przestawienie elementów 1 i 3.

Przestawiając w ugrupowaniach (3) elementy 3 i 5, otrzymamy nowe ugrupowania:

$$1\,2\,5\,4\,3, \qquad 5\,2\,1\,4\,3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

i łatwo widzieć, że od pierwszego z ugrupowań (4) można przejść do drugiego, i odwrotnie od drugiego do pierwszego, przestawiając elementy 1 i 5.

Niechaj będzie ugrupowanie

$$a_1\,a_2\,a_3 \ldots a_k\,a_{k+1} \ldots a_{k+l}\,a_{k+l+1} \ldots a_n, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

i dajmy, że przestawiamy w niem dwa elementy a_k i a_{k+l}, t. j. tworzymy ugrupowanie:

$$a_1\,a_2\,a_3 \ldots a_{k+l}\,a_{k+1} \ldots a_k\,a_{k+l+1} \ldots a_n \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Od ugrupowania (5) do ugrupowania (6) możemy przejść także zapomocą kolejnych przestawień następujących. Przestawiamy najprzód elementy a_k i a_{k+1} i otrzymujemy ugrupowanie

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{k+1}\, a_k\, a_{k+2} \ldots a_{k+l}\, a_{k+l+1} \ldots a_n;$$

w tem nowem ugrupowaniu przestawiamy elementy a_k i a_{k+2} i otrzymujemy:

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{k+1}\, a_{k+2}\, a_k \ldots a_{k+l} \ldots a_n.$$

Postępując w ten sposób dalej, t. j. przestawiając kolejno dwa bezpośrednio po sobie następujące elementy, doprowadzimy element a_k na miejsce zajmowane przez element a_{k+l}, a przed nim bezpośrednio stać teraz będzie element a_{k+l}. Wykonaliśmy, jak łatwo widzieć, l przestawień.

Aby teraz element a_{k+l} doprowadzić do miejsca, które zajmował poprzednio element a_k, musimy w dalszym ciągu wykonać l — 1 przestawień dwóch elementów sąsiednich. Wykonaliśmy tym sposobem razem z poprzedniemi 2 l — 1 przestawień. Np. od ugrupowania.

1 2 3 *4* 5 6 *7* 8

do ugrupowania

1 2 3 *7* 5 6 *4* 8

w którem, elementy 4 i 7 zostały przestawione, przejść można zapomocą następujących kolejnych 5, t. j. 2 . 3 — 1 przestawień elementów przyległych:

1 2 3 5 4 6 7 8, 1 2 3 5 6 4 7 8, 1 2 3 5 6 7 4 8,
1 2 3 5 7 6 4 8, 1 2 3 7 5 6 4 8.

Możemy więc powiedzieć, że przestawienie dwu elementów a_k i a_{k+l} jest równoważne szeregowi kolejnych 2 l — 1 przestawień dwu sąsiednich elementów.

5. Odwrócenia. Niechaj będzie ugrupowanie, złożone z 5 elementów, np.

3 5 1 4 2.

Nie jest ono, jak widzimy, dobrze uporządkowane; istotnie po elemencie 3 następuje element niższy 1, dalej element niższy 2; po elemencie 5 następują elementy niższe 1, 4, 2; po elemencie 4 następuje element 2. Ile razy w danem ugrupowaniu elementów następuje element niższy po wyższym, mówić będziemy o odwróceniu porządku lub wprost o odwróceniu (inwersyi). Tym sposobem w danym przypadku mamy dwa odwrócenia względem elementu 3, trzy odwrócenia względem elementu 5, jedno odwrócenie względem elementu 4. Element 1 i element ostatni 2 (co jest oczywiste) nie dają żadnych odwróceń. W danem więc ugrupowaniu liczba wszystkich odwróceń jest równa $2+3+1=6$.

Przestawmy dwa elementy sąsiednie, np. 5 i 1, t. j. napiszmy ugrupowanie

3 1 5 4 2

z odwróceniami 3 1, 3 2; 5 4, 5 2; 4 2. Liczba odwróceń wynosi 5, zmniejszyła się zatem o 1.

Przestawmy dwa elementy 1 i 4, otrzymamy ugrupowanie:

3 5 4 1 2

z odwróceniami 3 1, 3 2; 5 4, 5 1, 5 2; 4 1, 4 2. Liczba odwróceń wynosi 7, zwiększyła się zatem o 1.

W ogólności, jeżeli przestawimy w ugrupowaniu dwa bezpośrednio następujące po sobie elementy, to liczba odwróceń zmieni się o ± 1. Albowiem po przestawieniu dwóch przyległych elementów nie zachodzi oczywiście żadna zmiana w liczbie odwróceń względem elementów pozostałych, ale zachodzi zmiana w zachowaniu się wzajemnem tych dwu elementów; jeżeli w pierwszem ugrupowaniu dawały one odwrócenie, to w nowem odwrócenie to znika, i naodwrót, jeżeli poprzednio nie było odwrócenia, to teraz ono wystąpi.

Zobaczmy, jak zmienia się liczba odwróceń ugrupowania po przestawieniu dwóch *którychkolwiek*, a więc nie tylko bezpośrednio następujących po sobie elementów. Niechaj temi elementami będą a_k i a_{k+l}. Widzieliśmy wyżej, że przestawienie tych dwu elementów zastąpić można kolejnemi $2l-1$ przestawieniami dwu elementów, bezpośrednio po sobie następujących. Ponieważ każde z takich przestawień zmienia, jak to okazaliśmy, liczbę odwróceń o ± 1, więc wszystkie razem zmienią liczbę odwróceń o liczbę nieparzystą $\pm(2l-1)$, czyli innemi słowy: *przy przestawieniu którychkolwiek dwu elementów liczba odwróceń ugrupowania zmienia się o liczbę nieparzystą*. Wynika stąd, że jeżeli liczba odwróceń była parzysta, to po przestawieniu stanie się nieparzystą; jeżeli była nieparzystą, po przestawieniu stanie się parzystą.

Liczba odwróceń ugrupowania dobrze uporządkowanego jest oczywiście równa zeru (t. j. parzysta).

Ugrupowanie zaś:

$$n, n-1, \ldots 3, 2, 1,$$

którego elementy są liczbami naturalnemi od 1 do n, napisanemi w porządku odwrotnym, ma największą możliwie liczbę odwróceń. Liczba ta, jak łatwo widzieć, równa się $\frac{n(n-1)}{2}$.

6. **Przemiany**. Niechaj będzie mnogość, złożona z n elementów, które oznaczamy zapomocą liter:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

lub zapomocą liczb szeregu naturalnego:

$$1, 2, 3, \ldots, n.$$

Stawiamy zagadnienie następujące:

1-o. Utworzyć wszystkie możliwe różne ugrupowania danych n elementów, t. j. wypisać ugrupowania złożone, z tych elementów a różniące się jedno od drugiego porządkiem ustawienia elementów.

2-o. Wyznaczyć liczbę (skończoną) tych ugrupowań.

Łatwo widzieć, że obierając jako pierwsze ugrupowanie

$$1\,2\,3 \ldots n,$$

otrzymywać będziemy z niego inne, przestawiając elementy. Ale jak wyczerpać wszystkie uporządkowania, nie pomijając żadnego i nie powtarzając żadnego?

Zacznijmy od przypadków szczególnych.

Jeżeli $n = 1$, t. j. gdy mamy jeden element a_1, jedynem ugrupowaniem (przemianą) będzie a_1.

Jeżeli $n = 2$, t. j. gdy mamy d w a elementy a_1, a_2, to możemy utworzyć z nich d w i e następujące przemiany:

$$a_1\,a_2, \qquad a_2\,a_1$$

i więcej ich być nie może.

Jeżeli $n = 3$, t. j. gdy mamy trzy elementy a_1, a_2, a_3, to możemy utworzyć przemiany z tych elementów z przemian poprzednich dwuelementowych w ten sposób, że do każdej przemiany dwuelementowej dopisujemy element a_3, pisząc go przed elementem, stojącym na miejscu pierwszem, pomiędzy elementem pierwszym a drugim, i wreszcie poza elementem drugim. Utworzymy w ten sposób przemiany:

$$a_3\,a_1\,a_2, \quad a_1\,a_3\,a_2, \quad a_1\,a_2\,a_3; \qquad a_3\,a_2\,a_1, \quad a_2\,a_3\,a_1, \quad a_2\,a_1\,a_3,$$

lub:

$$3\ 1\ 2, \quad 1\ 3\ 2, \quad 1\ 2\ 3; \qquad 3\ 2\ 1, \quad 2\ 3\ 1, \quad 2\ 1\ 3;$$

jest ich s z e ś ć i więcej ich być nie może. Przemiany te napiszmy w p o r z ą d k u a r y t m o g r a f i c z n y m, to znaczy tak, aby przemiany te, czytane jako liczby, zaczynały się od liczby najmniejszej, a kończyły na największej:

1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1.

Widzimy, że dwie z tych przemian zaczynają się od 1, dwie od 2, dwie od 3.

Od przemian trójelementowych możemy przejść do czteroelementowych w podobny sposób, w jaki od dwuelementowych przeszliśmy do trójelementowych; mianowicie do każdej przemiany trójelementowej dopisujemy element 4, stawiając go na początku, pomiędzy elementem pierwszym i drugim, pomiędzy elementem drugim i trzecim, i na końcu poza elementem trzecim. Tym sposobem z każdej przemiany trójelementowej otrzymamy cztery przemiany czteroelementowe. Przemiany te wypisujemy w porządku arytmograficznym:

1 2 3 4,	1 2 4 3,	1 3 2 4,	1 3 4 2,	1 4 2 3,	1 4 3 2,
2 1 3 4,	2 1 4 3,	2 3 1 4,	2 3 4 1,	2 4 1 3,	2 4 3 1,
3 1 2 4,	3 1 4 2,	3 2 1 4,	3 2 4 1,	3 4 1 2,	3 4 2 1,
4 1 2 3,	4 1 3 2,	4 2 1 3,	4 2 3 1,	4 3 1 2,	4 3 2 1.

Liczba wszystkich wynosi 24.

Wypiszmy jeszcze wszystkie przemiany z czterech elementów a, b, c, d w porządku leksykograficznym, to znaczy w takim porządku, w jakim stałyby te przemiany w słowniku, gdyby czytane były jako wyrazy:

a b c d,	a b d c,	a c b d,	a c d b,	a d b c,	a d c b,
b a c d,	b a d c,	b c a d,	b c d a,	b d a c,	b d c a,
c a b d,	c a d b,	c b a d,	c b d a,	c d a b,	c d b a,
d a b c,	d a c b,	d b a c,	d b c a,	d c a b,	d c b a.

Sposobem wyżej podanym przejść łatwo od przemian z czterech elementów do przemian z pięciu, od przemian z pięciu elementów do przemian z sześciu i t. d.

Możemy też odrazu wypisać wszystkie przemiany z danej liczby elementów, zaczynając od pierwszej z nich, nazwanej główną $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$ lub $1\ 2\ 3 \ldots n$, zachowując w pisaniu kolejnych przemian ściśle porządek leksykograficzny lub arytmograficzny aż do ostatniej przemiany $a_n \ldots a_2\, a_1$ lub $n \ldots 3\ 2\ 1$, których elementy są wypisane w porządku wprost odwrotnym niż w przemianie głównej.

Możemy teraz wyprowadzić łatwo wzór ogólny na liczbę przemian z n elementów, zakładając, że te elementy są różne. Dajmy, że utworzyliśmy wszystkie przemiany z $n - 1$ elementów; oznaczmy ich liczbę przez p_{n-1}. Od tych przemian przejdziemy do przemian z n elementów, dopisując do każdej przemiany $(n - 1)$-elementowej element n-ty i stawiając go na n różnych miejscach, t. j. przed elementem pierwszym, pomiędzy pierwszym i drugim i t. d. wreszcie na miejscu ostatniem. Tym sposobem z każdej przemiany $(n - 1)$-elementowej otrzymamy n przemian n-elementowych. A więc liczba p_n przemian z n elementów równa się n razy wziętej liczbie p_{n-1} przemian z $n - 1$ elementów; czyli:

$$p_n = n\, p_{n-1}.$$

Podobnie $p_{n-1} = (n-1)\, p_{n-2}$, $p_{n-2} = (n-2)\, p_{n-3}, \ldots, p_2 = 2p_1$. Mnożąc te równości przez siebie, otrzymujemy ostatecznie:

$$p_n = 1.2.3 \ldots (n-1)\, n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

T. j. liczba przemian z n różnych elementów równa się iloczynowi liczb naturalnych od 1 do n.

Iloczyn $1.2.3 \ldots n$ oznacza się w skróceniu symbolem $n!$, możemy więc napisać:

$$p_n = n! \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7').$$

7. **Obliczanie liczby przemian. Wzór Stirlinga.** Otrzymaliśmy wyżej: $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 6$, $p_4 = 24$; otrzymujemy w dalszym ciągu:

$$p_5 = 5! = 120, \quad p_6 = 6! = 720, \quad p_7 = 7! = 5040, \quad p_8 = 8! = 40320,$$
$$p_9 = 9! = 362880, \quad p_{10} = 10! = 3628800.$$

Widzimy, że liczby p_n szybko rosną przy wzrastaniu liczby n. Liczba przemian z 20 elementów wyraża się liczbą 19 cyfrową:

$$2\,432\,902\,008\,176\,640\,000.$$

Dla uzmysłowienia tej liczby Wallis podaje przykład następujący. Niechaj napisanie każdej nowej przemiany z 24 elementów zwiastuje uderzenie dzwonka i niechaj pięć takich uderzeń przypada na minutę. Jeżeli przypuścić, że wypisywanie tych przemian rozpoczęło się wraz z stworzeniem świata (Wallis przyjmuje, że świat został stworzony przed 6000 laty), to czynność ta nie byłaby ukończona aż do chwili obecnej, gdyby nawet zamiast każdej minuty przyjąć 10 milionów lat.

Liczba przemian z 30 elementów wyraża się liczbą 33-cyfrową:

$$30! = 265\,252\,859\,810\,729\,458\,636\,308\,480\,000\,000.$$

Bardzo często, zwłaszcza w Rachunku prawdopodobieństwa, zamiast bezpośredniego obliczania liczby $n!$ stosujemy rachunek przybliżony, posiłkując się wzorem nazwanym wzorem Stirlinga (podanym przez tego autora w r. 1730 w dziele „Methodus differentialis"). Wzór ten, którego dowód podaje Analiza wyższa, jest postaci:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \ldots\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (8),$$

gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych, równą 2,71828, . . . , π jest stosunkiem długości okręgu koła do średnicy, równym 3,14159..., i gdzie w nawiasie po wyrazie $\frac{1}{12n}$ następują wyrazy, zawierające w mianowniku wyższe potęgi liczby n, a więc znacznie malejące przy wzrastaniu liczby n. Dla celów naszych wystarcza wzór skrócony:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8').$$

który otrzymujemy z poprzedniego, pomijając czynnik $1 + \frac{1}{12n} + \ldots$

Wzór (8') daje wartości liczby $n!$ z niedomiarem, t. j. mniejsze od prawdziwej.

I tak dla $n = 10$ otrzymujemy z niego:

$$10! = 10^{10} (2{,}718\ldots)^{-10} . \sqrt{20 . 3{,}14159 \ldots}$$

Obliczając to wyrażenie przy pomocy logarytmów, znajdziemy na 10! wartość równą 3598699, mniejszą o 30101 od podanej wyżej wartości prawdziwej 3628800. Różnica ta, t. j. błąd 30101 stanowi zaledwie 0,008 . . . wartości prawdziwej.

Obliczenia wykazały, że dla $n = 20$, wzór Stirlinga daje błąd stanowiący już tylko 0,004 . . . wartości prawdziwej; dla $n = 30$, błąd względny (t. j. stosunek błędu bezwzględnego do wartości prawdziwej) wynosi 0,0028 . . . W ogólności w miarę wzrastania liczby n błąd bezwzględny, t. j. różnica pomiędzy wartością prawdziwą liczby $n!$ a wartością obliczoną z wzoru Stirlinga rośnie wprawdzie bez przerwy w miarę wzrastania liczby n, ale błąd względny, t. j. stosunek różnicy do wartości prawdziwej wciąż maleje. I na tem właśnie polega ważne znaczenie wzoru Stirlinga w zastosowaniach.

Podajemy tu jeszcze do ewentualnego użytku tablicę zwyczajnych siedmiocyfrowych logarytmów iloczynów $n! = 1 . 2 . 3 \ldots n$, począwszy od $n = 1$ do $n = 50$*).

*) Logarytmy w tej tablicy obliczają się łatwo na podstawie wzoru $\log (n!) = \log (1 . 2 . 3 \ldots n) = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots + \log n$.

n	log (n!)	n	log (n!)	n	log (n!)	n	log (n!)
1	0	14	10,9404084	27	28,0369828	39	46,3095851
2	0,3010300	15	12,1164996	28	29,4841408	40	47,9116451
3	0,7781513	16	13,3206196	29	30,9465388	41	49,5244289
4	1,3802112	17	14,5510685	30	32,4236601	42	51,1476782
5	2,0791812	18	15,8063410	31	33,9150218	43	52,7811467
6	2,8573325	19	17,0850946	32	35,4201717	44	54,4245993
7	3,7024305	20	18,3861246	33	36,9386857	45	56,0778119
8	4,6055205	21	19,7083439	34	38,4701646	46	57,7405697
9	5,5597630	22	21,0507666	35	40,0142326	47	59,4126676
10	6,5597630	23	22,4124944	36	41,5705351	48	61,0939088
11	7,6011557	24	23,7927057	37	43,1387369	49	62,7841049
12	8,6803370	25	25,1906457	38	44,7185205	50	64,4830749
13	9,7942803	26	26,6056190				

8. **Przemiany parzyste i nieparzyste.** Wyżej podaliśmy sposób tworzenia wszystkich $n!$ przemian z n różnych elementów, wypisując je jednę po drugiej, zaczynając od przemiany głównej 1 2 3 . . . n w porządku arytmograficznym (lub też poczynając od przemiany głównej a b c. . . k w porządku leksykograficznym). Można też, jak to zaraz pokażemy, otrzymać wszystkie przemiany zapomocą kolejnych przestawień dwu elementów. Niechaj będzie np. przemiana główna 1 2 3 4 5 z pięciu elementów (to, co mówimy tu w szczególnym przypadku pięciu elementów, daje się łatwo uogólnić dla jakiejkolwiek liczby elementów) i dajmy, że mamy inną przemianę 5 3 1 2 4. Jak od pierwszej przejść do drugiej? W przemianie głównej przestawiamy przedewszystkiem elementy 1 i 5, otrzymamy tym sposobem przemianę 5 2 3 4 1, w której element 5 zajmuje już żądane miejsce pierwsze. Aby element 3 sprowadzić na miejsce drugie, przestawiamy w przemianie 5 2 3 4 1 elementy 2 i 3 i otrzymujemy przemianę 5 3 2 4 1, w której elementy 5 i 3 zajmują już żądane miejsca pierwsze i drugie. Następnie w przemianie 5 3 2 4 1 przestawiamy elementy 1 i 2, aby element 1 sprowadzić na miejsce trzecie; otrzymamy przemianę 5 3 1 4 2, wreszcie w tej ostatniej przemianie przestawiamy elementy 4 i 2 i dojdziemy do przemiany 5 3 1 2 4, którą chcieliśmy otrzymać. Tym sposobem od przemiany 1 2 3 4 5 przeszliśmy do przemiany 5 3 1 2 4 zapomocą czterech kolejnych przestawień dwóch elementów. I z każdej innej danej przemiany niegłównej można, jak to łatwo widzieć, przejść do innej danej zapomocą pewnej liczby przestawień.

Dajmy, że przy pomocy tego sposobu tworzenia przemian otrzymaliśmy z przemiany głównej $1\ 2\ 3 \ldots n$ wszystkie pozostałe przemiany. Otóż jedne z nich powstaną przez parzystą, drugie przez nieparzystą liczbę przestawień. Te, które powstają z przemiany głównej przez parzystą liczbę przestawień, nazwijmy dla krótkości przemianami parzystemi, włączając w nie i samą przemianę $1\ 2\ 3 \ldots n$, o której powiedzieć można, że powstaje z $1\ 2\ 3 \ldots n$ przez liczbę przestawień równą zeru. Te zaś przemiany, które powstają z przemiany głównej przez nieparzystą liczbę przestawień, nazwijmy przemianami nieparzystemi.

Tak np. pomiędzy przemianami trzech elementów

$$1\,2\,3,\quad 2\,3\,1,\quad 3\,1\,2,\quad 1\,3\,2,\quad 2\,1\,3,\quad 3\,2\,1$$

pierwsze trzy są parzyste, drugie trzy nieparzyste.

Z powyższego wynika, że jeżeli w przemianie parzystej przestawimy którekolwiek dwa elementy, przemiana ta przejdzie na nieparzystą; jeżeli zaś w przemianie nieparzystej przestawimy którekolwiek dwa elementy, przemiana ta przejdzie na parzystą.

Wiemy z art. 5-go, że liczba odwróceń przemiany głównej jest równa zeru, oraz, że każde przestawienie dwóch którychkolwiek elementów zmienia liczbę odwróceń o liczbę nieparzystą. Stąd wynika, że w przemianie parzystej, jako powstałej z przemiany głównej przez parzystą liczbę przestawień, liczba odwróceń musi być parzysta (jako równa sumie parzystej liczby liczb nieparzystych), w każdej zaś przemianie nieparzystej liczba odwróceń musi być nieparzysta (jako równa sumie nieparzystej liczby liczb nieparzystych).

Ile wśród $n!$ przemian n różnych elementów jest przemian parzystych, ile nieparzystych? Na pytanie to łatwo odpowiedzieć, zważywszy, że jeżeli we wszystkich $n!$ przemianach przestawimy dwa którekolwiek elementy, np. elementy 1 i 2, to według powyższego, każda przemiana parzysta przejdzie na nieparzystą, każda nieparzysta na parzystą, nigdy zaś dwie przemiany różne nie mogą przejść na jednę i tę samą przemianę. Wnosimy stąd, że liczba przemian parzystych jest równa liczbie przemian nieparzystych, czyli, że liczba tak jednych i drugich wynosi $\frac{1}{2}n!$

Tak np. w przypadku $n = 3$ tak jednych jak i drugich będzie $\frac{1}{2}.3! = 3$, w przypadku $n = 4$ tak jednych jak i drugich będzie $\frac{1}{2}.4! = 12$, w przypadku $n = 5$ tak jednych i drugich $\frac{1}{2}.5! = 60$ i t. d.

9. Zadanie. Przemiany elementów 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 wypisano w porządku arytmograficznym, poczynając od przemiany głównej 1 2 3 4 5 6 7, stojącej na miejscu pierwszem, i kończąc na przemianie

7 6 5 4 3 2 1 stojącej, na miejscu 5040-em (5040 = 7!). Wyznaczyć, na którem miejscu z kolei stoi przemiana 3 7 1 4 2 6 5.

Aby zadanie to rozwiązać, zauważmy, że przemiana ta zaczyna się od 3. Element 3 znajduje się w przemianie głównej na miejscu trzeciem i ma przed sobą elementy 1 i 2. Przemian, zaczynających się od 1, jest oczywiście 6!, tyleż jest przemian zaczynających się od 2, a zatem przemian, poprzedzających przemiany, zaczynające się od 3, będzie 2.6!; t. j. pierwsza przemiana zaczynająca się od 3 stoi na miejscu 2 . 6! + 1, t. j. na miejscu 721-em. Po wyłączeniu tego elementu mamy przemiane 7 1 4 2 6 5 złożoną z 6 elementów. Element 7 w przemianie 1 2 4 5 6 7, powstałej z przemiany głównej po wyłączeniu elementu 3, zajmuje miejsce szóste, przed nim są elementy 1, 2, 4, 5, 6. Przemian szecioelementowych, zaczynających się od 1, będzie oczywiście 5!, tyleż będzie poczynających się od 2, tyleż poczynających się od 4, tyleż od 5 i wreszcie tyleż od 6, tym sposobem przemian, mających na pierwszem miejscu już to 1, już to 2, 3, 4, 5, 6, będzie razem 5.5! = 600, a po nich dopiero pójdą przemiany, zaczynające się od 7. Tym sposobem pierwsza przemiana siedmioelementowa zaczynająca się od 3 7 stać będzie na miejscu 2 . 6! + 5 . 5! + 1, t. j. na miejscu 1321-em. Po wyłączeniu 3 7 mamy przemianę 1 4 2 6 5, pięcioelementową, powstałą z przemiany głównej 1 2 4 5 6. Element 1 stoi tu jak i w przemianie 1 4 2 6 5 na miejscu pierwszem, pozostaje więc wyznaczyć, na którem miejscu stoi przemiana czteroelementowa 4 2 6 5, jeżeli przemianą, z której wychodzimy jest przemiana 2 4 5 6, w której 4 jest na miejscu drugiem; poprzedza ją 2, przemian rozpoczynających się od 2, będzie oczywiście 3! i t. d. Prowadząc rozumowanie to do końca, przekonamy się, że przemiana 3 7 1 4 2 6 5 zajmuje w porządku arytmograficznym miejsce wyrażające się liczbą (numerem)

$$2 . 6! + 5 . 5! + 0 . 4! + 1 . 3! + 0 . 2! + 1 . 1! + 1 = 1328,$$

t. j., że przemiana 3 7 1 4 2 6 5 zajmuje miejsce 1328-e w rzędzie wszystkich 5040 przemian, uporządkowanych arytmograficznie.

Wyniki te można jeszcze wysłowić w ten sposób: liczba 3 7 1 4 2 6 5 zajmuje co do wielkości 1328-e miejsce wśród 5040 liczb siedmiocyfrowych, wyrażonych siedmioma cyframi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Zadanie to, rozwiązane dla przykładu szczególnego, możemy ująć ogólnie w postać następującą: „Znaleść liczbę porządkową miejsca, które zajmuje pewna przemiana P z n elementów wśród przemian uporządkowanych arytmograficznie, jeżeli pierwszy element przemiany P stoi w przemianie głównej na miejscu k_1, jeżeli element drugi przemiany P, po wyłączeniu z przemiany głównej piewszego elementu przemiany P, zajmuje w przemianie głównej miejsce k_2, jeżeli element trzeci przemiany P, po wyłączeniu z przemiany głównej dwu pierwszych elementów przemiany P, zajmuje w przemianie głównej miejsce k_3 i t. d. Miejsce przemiany P wyrazi się liczbą porządkową:

$$N = (k_1 - 1)(n - 1)! + (k_2 - 1)(n - 2)! + \dots$$
$$\dots + (k_{n-1} - 1) 1! + 1 \quad \dots\dots \quad (9).$$

Tu, jak łatwo widzieć, jest.

$$k_1 \leqslant n, \quad k_2 \leqslant n - 1, \dots k_{n-1} \leqslant 2.$$

Stosując wzór ogólny (9) do naszego zadania szczególnego, widzimy, że jest w niem:

$$n = 7, \quad k_1 = 3, \quad k_2 = 6, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = 2, \quad k_5 = 1, \quad k_6 = 2.$$

Jeżeli zastosujemy wzór ogólny (9) do ostatniej przemiany stojącej na miejscu, wyrażającem się liczbą porządkową $N = n!$, t. j. do przemiany, której elementy są ustawione w porządku:

$$n, \; n - 1, \; n - 2, \dots 3, 2, 1,$$

będziemy mieli:

$$k_1 = n, \quad k_2 = n - 1, \quad k_3 = n - 2, \dots k_{n-1} = 2.$$

Wstawiając te wartości do wzoru (12), otrzymamy tożsamość:

$$n! = (n - 1)(n - 1)! + (n - 2)(n - 2)! + \dots 1.1! + 1 \quad (10).$$

Tożsamość tę sprawdźmy na przykładach. Istotnie jest:

$$1 + 1.1! = 1 + 1 = 2 = 2!$$
$$1 + 1.1! + 2.2! = 1 + 1 + 4 = 6 = 3!$$
$$1 + 1.1! + 2.2! + 3.3! = 1 + 1 + 4 + 18 = 24 = 4! \quad \text{i t. d.}$$

Tożsamość (10) możemy sprawdzić ogólnie w sposób następujący: Wyraz jej pierwszy po stronie drugiej możemy tak przekształcić:

$$(n - 1)(n - 1)! = n(n - 1)! - (n - 1)! = n! - (n - 1)!$$

Wyraz drugi jest:

$$(n - 2)(n - 2)! = (n - 1 - 1)(n - 2)! = (n - 1)(n - 2)! - (n - 2)!$$
$$= (n - 1)! - (n - 2)!$$

Suma wyrazu pierwszego i drugiego wynosi zatem:

$$n! - (n - 1)! + (n - 1)! - (n - 2)! = n! - (n - 2)!$$

W podobny sposób łatwo wykazać, że suma trzech pierwszych wyrazów równa się $n! - (n - 3)!$, suma czterech pierwszych $n! - (n - 4)!$

i t. d., suma $n-1$ pierwszych wyrazów $n! - (n - n + 1) = n! - 1!$ $= n! - 1$, a więc suma wszystkich wyrazów strony drugiej we wzorze (10) równa się $n! - 1 + 1 = n!$, jak być powinno.

10. Przemiany w przypadku, gdy niektóre elementy są jednakowe. Dotąd rozważaliśmy przypadek, w którym wszystkie elementy mnogości uważane są za różne. Rozpatrzymy obecnie przypadek, w których wśród n elementów jest α elementów a, β elementów b, γ elementów c i t. d. Mamy utworzyć wszystkie przemiany z n elementów i wyznaczyć ich liczbę.

Pomyślmy sobie wypisane wszystkie $n!$ przemian, utworzonych z n elementów

$$a_1, a_2, \ldots a_\alpha, b_1, b_2, \ldots b_\beta, c_1, c_2, \ldots c_\gamma, \ldots$$

w których elementy równe a zastąpiliśmy α elementami różnemi $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots a_\alpha$; elementy równe β — elementami różnemi $b_1, b_2, \ldots b_\beta$; elementy równe c — elementami różnemi $c_1, c_2, \ldots c_\gamma$. Jeżeli teraz we wszystkich tych przemianach usuniemy skaźniki przy elementach a, to oczywiście przemiany, które różniły się od siebie tem, że na tych samych miejscach miały elementy a z różnemi skaźnikami, staną się teraz jednakowemi, liczba przemian różnych stanie się teraz mniejszą od $n!$ tyle razy, ile można utworzyć przemian z α elementów $a_1, a_2, \ldots a_\alpha$, t. j. stanie się $\alpha!$ razy mniejszą. A zatem liczba przemian z n elementów, pomiędzy któremi jest α elementów równych a, wynosi:

$$\frac{n!}{\alpha!}$$

Usuńmy teraz w tych przemianach skaźniki przy elementach b. Tak jak poprzednio wyrozumujemy łatwo, że liczba przemian różnych zmniejszy się tyle razy, ile można utworzyć przemian z β elementów $b_1, b_2, \ldots b_\beta$, t. j. zmniejszy się $\beta!$ razy. Otrzymamy tym sposobem przemian:

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!}$$

Rozumując w ten sposób dalej, i oznaczając przez $p_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}$ liczbę przemian z n elementów pomiędzy któremi jest α elementów równych a, β elementów równych b, γ elementów równych c,... otrzymamy wzór ogólny:

$$p_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

$$(\alpha + \beta + \gamma \ldots = n).$$

Z wzoru tego wypada w przypadku szczególnym $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = 1$, wzór dawniejszy

$$p_n = n!$$

Wzór (13) można jeszcze napisać w postaci:

$$p_{\alpha, \beta, \gamma, \ldots} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \ldots)!}{\alpha! \, \beta! \, \gamma! \ldots} \quad \ldots \ldots \quad (12')$$

$$(\alpha + \beta + \gamma \ldots = n).$$

Przykład. Wyznaczyć liczbę przemian mnogości a a a b b c. Mamy tu $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, będzie zatem:

$$p_{3,2,1} = \frac{6}{3! \, 2! \, 1!} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.1} = 60.$$

Oto są te przemiany w porządku leksykograficznym:

a a a b b c,	a a a b c b,	a a a c b b,	a a b a b c,	a a b a c b,
a a b b a c,	a a b b c a,	a a b c a b,	a a b c b a,	a a c a b b,
a a c b a b,	a a c b b a,	a b a a b c,	a b a a c b,	a b a b a c,
a b a b c a,	a b a c a b,	a b a c b a,	a b b a a c,	a b b a c a,
a b b c a a,	a b c a a b,	a b c a b a,	a b c b a a,	a c a a b b,
a c a b a b,	a c a b b a,	a c b a a b,	a c b a b a,	a c b b a a,
b a a a b c,	b a a a c b,	b a a b a c,	b a a b c a,	b a a c a b,
b a a c b a,	b a b a a c,	b a b a c a,	b a b c a a,	b a c a a b,
b a c a b a,	b a c b a a,	b b a a a c,	b b a a c a,	b b a c a a,
b b c a a a,	b c a a a b,	b c a a b a,	b c a b a a,	b c b a a a,
c a a a b b,	c a a b a b,	c a a b b a,	c a b a a b,	c a b a b a,
c a b b a a,	c b a a a b,	c b a a b a,	c b a b a a,	c b b a a a.

Gdybyśmy zamiast liter użyli znaków liczbowych, to 1, 1, 2, 2, 3 to tymże sposobem moglibyśmy wypisać w porządku arytmograficznym wszystkie liczby sześciocyfrowe, w których cyfra 1 powtarza się trzy razy, cyfra 2 dwa razy; cyfra 3 zachodzi tylko raz jeden, poczynając od liczby najmniejszej 1 1 1 2 2 3, a kończąc na największej z nich 3 2 2 1 1 1. Liczba tych przemian jest, jak widzimy, 60.

11. Spółczynniki dwumianowe. Zastosujmy wzór (11) do przypadku, w którym $\alpha = m$, $\beta = n$, otrzymamy:

$$p_{n,\,m-n} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12).$$

Ponieważ:

$$n! = 1.2.3 \ldots (n-m).(n-m+1)(n-m+2) \ldots n$$

$$= (n-m)!\, n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-m+1),$$

przeto dzieląc licznik i mianownik po stronie drugiej przez $(n - m)!$, znajdziemy:

$$p_{n,\,m-n} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots .\, m} \; . \; . \quad (13).$$

Wyrażenie po stronie drugiej wzoru (14) nazywamy (ponieważ występuje w rozwinięciu potęgi dwumianu, o czem niżej) spółczynnikiem dwumianowym i oznaczamy zapomocą symbolu

$$\binom{n}{m}$$

Wzór zatem:

$$\binom{n}{m} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots .\, n} \; . \; . \; . \quad (14),$$

przyjmujemy za definicyę spółczynnika dwumianowego, gdzie n i m oznaczają za liczby całkowite. Do tej definicyi włączamy nadto:

$$\binom{n}{1} = n; \qquad \binom{n}{0} = 1, \qquad n \geqq 0 \; . \; . \; . \; . \quad (15).$$

$$\binom{n}{m} = 0, \text{ jeżeli } m > n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15').$$

Z definicyi (15) wynika bezpośrednio:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} . \frac{n}{m} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16).$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}; \qquad m \leqq n \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17).$$

Przy pomocy tych wzorów łatwo ułożyć następującą tablicę spółczynników dwumianowych:

n	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$	$\binom{n}{11}$	$\binom{n}{12}$
1	1											
2	2	1										
3	3	3	1									
4	4	6	4	1								
5	5	10	10	5	1							
6	6	15	20	15	6	1						
7	7	21	35	35	21	7	1					
8	8	28	56	70	56	28	8	1				
9	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1
13	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13
14	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91
15	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455
16	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820
17	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188
18	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564
19	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388
20	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970

12. Niektóre własności spółczynników dwumianowych. Opierając się na definicyi spółczynników dwumianowych w artykule poprzedzającym, podamy tu niektóre z wielu ich własności.

1-o) Z równości:

$$\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$$

wynikają równości następujące:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n},\quad \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1},\quad \binom{n}{2}=\binom{n}{n-2},\ \ldots\ldots$$

skąd łatwo wywnioskować, że:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}-\binom{n}{4}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \quad (18),$$

co można napisać w skróceniu tak:

$$\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\binom{n}{s}=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(18').$$

gdzie symbol $\sum\limits_{s=0}^{s=n}$ oznacza sumę $n+1$ wyrazów postaci $(-1)^s\binom{n}{s}$, gdzie s zmienia się od $s=0$ do $s=n$.

Wzór ten sprawdzić można dla przypadków szczególnych przy pomocy wyżej podanej tablicy.

2-o)
$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}\,.\;.\;.\;.\;.\quad(19),$$

Tożsamość tę sprawdzić łatwo, wstawiając po obu stronach zamiast $\binom{n}{m}, \binom{n-1}{m}, \binom{n-1}{m-1}$ wartości tych spółczynników dwumianowych, według wzoru (14).

3-o) Przy pomocy wzoru (19) można wyprowadzić wzór ogólniejszy:

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-2}{m-1}+\binom{n-3}{m-2}+\ldots+\binom{n-m-1}{0}\quad(20).$$

W samej rzeczy, z wzoru (19) wypływają następujące równości:

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1},$$

$$\binom{n-1}{m-1}=\binom{n-2}{m-1}+\binom{n-2}{m-2},$$

$$\binom{n-2}{m-2}=\binom{n-3}{m-2}+\binom{n-3}{m-3},$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\binom{n-m}{0}=\binom{n-m-1}{0}.$$

Dodając te równości odpowiedniemi stronami i znosząc po obu stronach sumy wyrazy równe, otrzymamy wzór (20).

P r z y k ł a d:

$$\binom{7}{5}=\binom{6}{5}+\binom{5}{4}+\binom{4}{3}+\binom{3}{2}+\binom{2}{1}+\binom{1}{0},$$

$$\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}=\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}+\frac{4.3.2}{1.2.3}+\frac{3.2}{1.2}+\frac{2.1}{1}+1,$$

$$21=6+5+4+3+2+1.$$

4-o) Jeszcze ogólniejszy jest wzór następujący, zachodzący dla dowolnych wartości całkowitych dodatnich liczb n, m, r:

$$\binom{n+r}{m}=\binom{n}{m}\binom{r}{0}+\binom{n}{m-1}\binom{r}{1}+\binom{n}{m-2}\binom{r}{2}+\cdots$$
$$\cdots+\binom{n}{0}\binom{r}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Istotnie, gdy $r=0$, otrzymujemy z niego tożsamość:

$$\binom{n}{m}=\binom{n}{m}.$$

Gdy $r=1$, będzie:

$$\binom{n+1}{m}=\binom{n}{m}\binom{1}{0}+\binom{n}{m-1}\binom{1}{1} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha),$$

gdyż pozostałe wyrazy, na mocy definicyi, są równe zeru. Równość (α) z uwagi, że $\binom{1}{0}=\binom{1}{1}=1$, przechodzi na następującą:

$$\binom{n+1}{m}=\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1},$$

zupełnie zgodną z wzorem (19).

Prawdziwość wzoru (21), sprawdzoną już w przypadkach $r=0$ i $r=1$, stwierdzimy ogólnie zapomocą tak nazwanej indukcyi zupełnej. Założywszy mianowicie, że wzór ten zachodzi dla pewnej wartości na r, równej r_0, wykażemy, że zachodzić będzie i dla wartości na r o jedność większej, mianowicie dla r_0+1. Jest tedy na zasadzie uczynionego założenia:

$$\binom{n+r_0}{m}=\binom{n}{m}\binom{r_0}{0}+\binom{n}{m-1}\binom{r_0}{1}+\binom{n}{m-2}\binom{r_0}{2}+\cdots$$
$$\cdots+\binom{n}{1}\binom{r_0}{m-1}+\binom{n}{0}\binom{r_0}{m},$$

oraz

$$\binom{n+r_0}{m-1}=\binom{n}{m-1}\binom{r_0}{0}+\binom{n}{m-2}\binom{r_0}{1}+\cdots$$
$$\cdots+\binom{n}{1}\binom{r_0}{m-2}+\binom{n}{0}\binom{r_0}{m-1}.$$

Dodajmy do siebie te dwie równości, uwzględniając, że na zasadzie definicyi oraz wzoru (19) jest:

$$\binom{n}{m}\binom{r_0}{0}=\binom{n}{m}\binom{r_0+1}{0},$$

$$\binom{n}{m-1}\left[\binom{r_0}{1}+\binom{r_0}{0}\right]=\binom{n}{m-1}\binom{r_0+1}{1},$$

$$\binom{n}{m-2}\left[\binom{r_0}{2}+\binom{r_0}{1}\right]=\binom{n}{m-2}\binom{r_0+1}{2},$$

. . . .

$$\binom{n}{0}\left[\binom{r_0}{m}+\binom{r_0}{m-1}\right]=\binom{n}{0}\binom{r_0+1}{m};$$

otrzymamy więc:

$$\binom{n+r_0+1}{m}=\binom{n}{m}\binom{r_0+1}{0}+\binom{n}{m-1}\binom{r_0+1}{1}$$

$$+\binom{n}{m-2}\binom{r_0+1}{2}+\cdots+\binom{n}{0}\binom{r_0+1}{m},$$

t. j. wzór zupełnie zgodny z wzorem (21). A ponieważ, jak wyżej stwierdzono, wzór (21) jest prawdziwy dla przypadku $r=1$, będzie więc także prawdziwy dla $r=2, 3\ldots$, czyli jest ogólnie prawdziwy.

Wzór (21) możemy sposobem skróconym wyrazić w ten sposób:

$$\sum_{s=0}^{s=m}\binom{n}{m-s}\binom{r}{s}=\binom{n+r}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21').$$

5-o) Suma spółczynników dwumianowych

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

równa się 2^n, co możemy wyrazić zapomocą wzoru

$$\sum_{s=0}^{s=n}\binom{n}{s}=2^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Wzór (22) łatwo sprawdzić dla szczególnych przypadków $n=2, 3, \ldots$ przy pomocy tablicy na str. 96-ej.

Istotnie, dla $n=2$ jest:

$$\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=1+2+1=4=2^2;$$

dla $n = 3$ jest:

$$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=1+3+3+1=8=2^3;$$

dla $m = 4$ mamy:

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=1+4+6+4+1=16=2^4;$$

i t. d.

Udowodnimy ogólnie prawdziwość wzoru (22) zapomocą indukcyi zupełnej. Założywszy, że wzór ten zachodzi dla $n = n_0$, t. j., że

$$\binom{n_0}{0}+\binom{n_0}{1}+\binom{n_0}{2}+\ldots+\binom{n_0}{n_0-1}+\binom{n_0}{n_0}=2^{n_0} \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

okażemy, że będzie także prawdziwy dla $n = n_0 + 1$, t. j., że

$$\binom{n_0+1}{0}+\binom{n_0+1}{1}+\binom{n_0+1}{2}+\ldots+\binom{n_0+1}{n_0}$$

$$+\binom{n_0+1}{n_0+1}=2^{n_0+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta).$$

W samej rzeczy, na podstawie własności, wyrażonej wzorem (19), mamy:

$$\binom{n_0+1}{1}=\binom{n_0}{0}+\binom{n_0}{1},$$

$$\binom{n_0+1}{2}=\binom{n_0}{1}+\binom{n_0}{2},$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$\binom{n_0+1}{n_0}=\binom{n_0}{n_0-1}+\binom{n_0}{n_0}.$$

Dodając te równości odpowiedniemi stronami, otrzymamy:

$$\binom{n_0+1}{1}+\binom{n_0+1}{2}+\ldots+\binom{n_0+1}{n_0}=2\left[\binom{n_0}{0}+\binom{n_0}{1}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\binom{n_0}{n_0}\right]-\left[\binom{n_0}{0}+\binom{n_0}{n_0}\right],$$

lub
$$\binom{n_0+1}{0}+\binom{n_0+1}{1}+\ldots+\binom{n_0+1}{n_0}+\binom{n_0+1}{n_0+1}$$

$$=2\left[\binom{n_0}{0}+\binom{n_0}{1}+\ldots+\binom{n_0}{n_0}\right];$$

Strona druga na podstawie równości (α) równa się $2 . 2^{n_0} = 2^{n_0+1}$, a zatem i strona pierwsza równa się 2^{n_0+1}, jak to wyraża równość (β), co było do okazania. A ponieważ wzór (22) sprawdza się, jak pokazują powyższe przykłady dla $n = 2, 3 \ldots$, jest on zatem ogólnie prawdziwy.

Wzór (22), jak to zobaczymy niżej, wynika wprost z prawidła na rozwinięcie potęgi dwumianu.

13. Zadania. 1. Dowieść, że iloczyn spółczynników dwumianowych

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}\ldots\binom{\lambda+\mu}{\lambda},$$

gdzie $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda+\mu = n$, wyrazić można w sposób następujący:

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}\ldots\binom{\lambda+\mu}{\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!\,\mu!}. \quad (23).$$

Wzór ten udowodnić można bardzo łatwo, pisząc, zamiast zachodzących w nim po stronie pierwszej czynników, wartości ich podług wzoru (14).

2. Udowodnić, że suma kwadratów spółczynników dwumianowych:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2$$

równa się spółczynnikowi dwumianowemu $\binom{2n}{n}$.

Dla udowodnienia tej własności skorzystamy z wzoru (21). Kładąc w tym wzorze $r = n$ i $m = n$, otrzymamy po drugiej jego stronie:

$$\binom{n}{n}\binom{n}{0}+\binom{n}{n-1}\binom{n}{1}+\binom{n}{n-2}\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{0}\binom{n}{n};$$

na podstawie własności 1), w art. poprzedzającym podanej, jest:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n},\ \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1},\ldots;$$

wyrażenie to zatem równa się:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2.$$

Strona pierwsza wzoru (21), przy założeniu $r = n$, $m = n$, równa się $\binom{2n}{n}$; tym sposobem własność, wyrażona równością:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

którą można wyrazić krótko:

$$\sum_{s=0}^{s=n}\binom{n}{s}^2=\binom{2n}{n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24')$$

została udowodniona.

Według wzoru (14) jest:

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{2n\,(2n-1)\ldots(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}$$

możemy więc napisać:

$$\sum_{s=0}^{s=n}\binom{n}{s}^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.\,n}. \quad . \quad . \quad . \quad (24''),$$

3. Dowieść, że, jeżeli n jest liczbą pierwszą, to wszystkie spółczynniki dwumianowe $\binom{n}{m}$, z wyjątkiem spółczynników $\binom{n}{0}$ i $\binom{n}{n}$, równych, jak wiadomo, 1, są podzielne przez n.

Mamy w samej rzeczy:

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!},$$

skąd

$$\binom{n}{m}m!\,(n-m)!=n!\,.$$

Otóż strona druga jest podzielna przez n; na stronie pierwszej, jeżeli $1 \leqslant m < n$, czynniki $m! = 1\,.\,2\,.\,3\ldots m$ i $(n-m)! = 1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-m)$ nie są podzielne przez liczbę pierwszą n; aby więc strona pierwsza była przez n podzielna, musi być $\binom{n}{m}$ podzielne przez n, c. b. d. o.

14. Uogólnienie definicyi spółczynników dwumianowych. W art. 11 podaliśmy definicyę spółczynnika dwumianowego $\binom{n}{m}$ zapomocą wzoru

$$\binom{n}{m}=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m},$$

przyjmując, że obie zachodzące w nim liczby n i m są całkowite. Liczba $\binom{n}{m}$, jak to wynika z jej znaczenia kombinatoryjnego, jest wtedy zawsze całkowita. Możemy to wyrazić i w inny sposób: iloczyn m kolejnych liczb całkowitych jest zawsze podzielny przez liczbę $1\,.\,2\,.\,3\ldots m$.

W wielu jednak zagadnieniach Analizy okazuje się potrzeba rozciągnięcia powyższej definicyi na jakiekolwiek wartości liczby n.

Co się tyczy liczby m, to z postaci strony drugiej, w której liczba ta występuje jako jeden z czynników kolejnych iloczynu liczb całkowitych, pozostać ona musi na razie całkowitą. Wprawdzie Analiza wyższa znalazła drogę uogólnienia definicyi i dla przypadku liczb m niecałkowitych, lecz przedmiot ten przekracza granice naszych rozważań. Pozostaje więc tylko uogólnienie definicyi spółczynnika $\binom{n}{m}$, polegające na tem, że liczba n może przybierać w nim wartości dowolne wymierne i niewymierne, dodatnie i ujemne. Wartości spółczynnika dwumianowego $\binom{n}{m}$ dla tych wszystkich przypadków daje strona druga powyższego wzoru; a więc np. dla $n = \frac{1}{2}$, $m = 3$ będzie:

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{1}{16},$$

dla $n = -5$, $m = 4$, będzie:

$$\binom{-5}{4} = -\frac{-5\,.\,(-5-1)\,(-5-2)\,(-5-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = \frac{5\,.\,6\,.\,7\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 70.$$

Można łatwo wykazać, że do tak uogólnionych spółczynników dwumianowych stosuje się podana w artykule poprzedzającym własność:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m},$$

oraz własności (19) i (20); wynikają one bowiem wprost z postaci wyrażenia $\binom{n}{m}$ i utrzymują się tożsamościowo bez względu na to, czy n jest całkowite dodatnie, czy też nie.

Zaznaczyć tu wszakże należy, że takie uogólnienie czysto formalne w Matematyce nie wystarcza. Usprawiedliwić je winna nietylko potrzeba ale i zachowanie ścisłości matematycznej we wszystkich działaniach, do których stosowanie uogólnionej definicyi prowadzi. Zobaczymy niżej, że potrzebę wprowadzenia uogólnionych spółczynników dwumianowych nasunęło zagadnienie o rozwinięciu potęgi dwumianu z jakimkolwiek wykładnikiem, należące też właściwie do zakresu badań Analizy wyższej.

15. Odmiany (Waryacye). Niechaj będzie mnogość, złożona z n elementów różnych. Utwórzmy z nich ugrupowania w sposób następujący: 1-o niechaj do każdego ugrupowania wchodzi m elementów z pomiędzy n danych; 2-o niechaj w żadnem z ugrupowań żaden z elementów nie występuje więcej niż raz jeden. Ugrupowania tej kategoryi nazywać będziemy odmianami prostemi (lub bez powtórzeń) z n elementów po m, lub też odmianami prostemi klasy m-tej z n elementów.

Jak utworzyć wszystkie odmiany różne klasy m-tej z n elementów i wyznaczyć ich liczbę skończoną, którą oznaczać będziemy przez $v_{n,m}$?

Z określenia odmian wynika oczywiście, że dwie odmiany różne klasy m-tej albo składają się z tych samych m elementów, uporządkowanych w sposób odmienny, t. j. są dwiema przemianami różnemi tych samych m elementów, albo też wśród m elementów jednej z nich jest przynajmniej jeden element, którego niema w drugiej odmianie.

Jeżeli elementy dane oznaczymy przez a, b, c, ... i, j, k, to odmianami prostemi klasy pierwszej będą oczywiście:

a, b, c, ... i, j, k

a liczba ich równa się liczbie elementów, czyli $v_{n,1} = n$.

Odmiany proste klasy drugiej otrzymamy z odmian klasy pierwszej, dopisując do każdej z nich po jednym z pozostałych n—1 elementów. Tym sposobem z odmiany a otrzymamy n—1 odmian klasy drugiej:

a b, a c, a d ..., a i, a j, a k;

z odmiany b otrzymamy n—1 odmian klasy drugiej:

b a, b c, b d ... b i, b j, b k

i t. d., wreszcie z odmiany ostatniej k otrzymamy n—1 odmian klasy drugiej:

k a, k b, k c, ..., k i, k j.

Liczba odmian klasy drugiej będzie tedy $n - 1$ razy większa od liczby odmian klasy pierwszej, t. j. $v_{n,2} = n\,(n - 1)$.

Od odmian prostych klasy drugiej przechodzimy do odmian prostych klasy trzeciej, dopisując do każdej odmiany klasy drugiej po jednym z pozostałych $n - 2$ elementów; tak np. z odmiany a b otrzymamy odmiany klasy trzeciej:

a b c, a b d, ..., a b j, a b k,

t. j. $n - 2$ odmian różnych; z odmiany k j otrzymamy odmiany klasy trzeciej:

k j a, k j b, ..., k j i.

Widzimy tedy, że liczba odmian prostych klasy trzeciej jest:

$$v_{n,3} = n\,(n - 1)\,(n - 2).$$

Ogólnie, jeżeli wyobrazimy sobie wypisane wszystkie odmiany proste klasy $(m - 1)$-ej z n elementów, to otrzymamy z nich odmiany proste klasy m-tej z n elementów, jeżeli do każdej odmiany klasy

$(m-1)$-ej dopisywać będziemy kolejno po jednym z $n-(m-1)$ pozostałych elementów. Tym sposobem liczba $v_{n,m}$ odmian prostych klasy m-tej z n elementów równać się będzie $n-(m-1)$ razy wziętej liczbie $v_{n,m-1}$ odmian prostych klasy $(m-1)$-ej z n elementów, czyli

$$v_{n,m} = v_{n,m-1}(n-m+1).$$

Podobnież będzie:

$$v_{n,m-1} = v_{n,m-2}(n-m+2),$$

$$v_{n,m-2} = v_{n,m-3}(n-m+3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_{n,2} = v_{n,1}(n-1).$$

Mnożąc przez siebie te równości odpowiedniemi stronami i wiedząc, że $v_{n,1} = n$, dochodzimy do wzoru:

$$v_{n,m} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) \quad . \; . \; . \; (25)$$

wyrażającego liczbę odmian prostych klasy m-tej z n elementów.

Tak np. jest:

$$v_{5,4} = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 = 120; \quad v_{7,3} = 7 \,.\, 6 \,.\, 5 = 210.$$

Wzór (25), przez pomnożenie i podzielenie przez iloczyn $(n-m)(n-m-1)\ldots 2 \,.\, 1$, możemy przedstawić w postaci

$$v_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25')$$

Porównywając liczbę $v_{n,m}$ ze spółczynnikiem dwumianowym

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!},$$

otrzymujemy:

$$v_{n,m} = m!\binom{n}{m}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

stąd:

$$\binom{n}{m} = \frac{v_{n,m}}{m!} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26')$$

Jeżeli w którymkolwiek z wzorów (25), (26) przyjmiemy $m = n$, otrzymamy $v_{n,n} = n!$. Ponieważ odmiany proste klasy n-tej z n elementów są niczem innem jak przemianami z n elementów, otrzymaliśmy więc na tej drodze wzór (7) (art. 6) na liczbę przemian z n elementów.

Dla przykładu wypiszemy tu w porządku arytmograficznym wszystkie odmiany proste klasy 4-ej z 5-ciu elementów 1, 2, 3, 4, 5. Odmian tych jest 120.

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3	5 1 2 3
1 2 3 5	2 1 3 5	3 1 2 5	4 1 2 5	5 1 2 4
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2	5 1 3 2
1 2 4 5	2 1 4 5	3 1 4 5	4 1 3 5	5 1 3 4
1 2 5 3	2 1 5 3	3 1 5 2	4 1 5 2	5 1 4 2
1 2 5 4	2 1 5 4	3 1 5 4	4 1 5 3	5 1 4 3
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3	5 2 1 3
1 3 2 5	2 3 1 5	3 2 1 5	4 2 1 5	5 2 1 4
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1	5 2 3 1
1 3 4 5	***2 3 4 5***	3 2 4 5	4 2 3 5	5 2 3 4
1 3 5 2	2 3 5 1	3 2 5 1	4 2 5 1	5 2 4 1
1 3 5 4	2 3 5 4	3 2 5 4	4 2 5 3	5 2 4 3
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2	5 3 1 2
1 4 2 5	2 4 1 5	3 4 1 5	4 3 1 5	5 3 1 4
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1	5 3 2 1
1 4 3 5	2 4 3 5	3 4 2 5	4 3 2 5	5 3 2 4
1 4 5 2	2 4 5 1	3 4 5 1	4 3 5 1	5 3 4 1
1 4 5 3	2 4 5 3	3 4 5 2	4 3 5 2	5 3 4 2
1 5 2 3	2 5 1 3	3 5 1 2	4 5 1 2	5 4 1 2
1 5 2 4	2 5 1 4	3 5 1 4	4 5 1 3	5 4 1 3
1 5 3 2	2 5 3 1	3 5 2 1	4 5 2 1	5 4 2 1
1 5 3 4	2 5 3 4	3 5 2 4	4 5 2 3	5 4 2 3
1 5 4 2	2 5 4 1	3 5 4 1	4 5 3 1	5 4 3 1
1 5 4 3	2 5 4 3	3 5 4 2	4 5 3 2	5 4 3 2

Widzimy zarazem, że są to wszystkie liczby różne, czterocyfrowe, jakie utworzyć można z pięciu cyfr 1, 2, 3, 4, 5, takie, że w żadnej z tych liczb niema dwóch cyfr jednakowych.

Jeżeli pomiędzy temi 120 odmianami wybierzemy dobrze uporządkowane (ob. art. 2), t. j. te, w których elementy następują po sobie od niższych do wyższych, to pozostaną tylko następujące odmiany:

1 2 3 4, 1 2 3 5, 1 2 4 5, 1 3 4 5, 2 3 4 5 . . . (α),

t. j. te, które w tablicy odmian wypisane są cyframi pochyłemi. Dobrze uporządkowanych odmian klasy 4-ej z 5 elementów jest tylko 5. Wszystkie pozostałe odmiany są przemianami tych pięciu. Istotnie, ponieważ każda z odmian dobrze uporządkowanych (α), jako złożona z 4 elementów, daje 4! t. j. 24 przemiany, otrzymamy więc razem 4!. 5, t. j. 120 odmian.

Z tego przykładu wnieść by już można ogólnie, że dla otrzymania wszystkich odmian prostych m-tej klasy z n elementów dość wypisać wszystkie dobrze uporządkowane odmiany proste tej klasy i następnie wypisać wszystkie $m!$ przemian każdej z odmian dobrze uporządkowanych. Czyli: liczba wszystkich odmian prostych m-tej klasy z n elementów jest $m!$ razy większa od liczby odmian tej klasy dobrze uporządkowanych.

Te własności wyrażają właśnie podane wyżej wzory (26) i (26'), i widzimy z nich bezpośrednio, że spółczynnik dwumianowy $\binom{n}{m}$ wyraża liczbę odmian prostych dobrze uporządkowanych m-tej klasy z n elementów. O tych dobrze uporządkowanych odmianach, którym nadajemy nazwę połączeń (kombinacyj), mówimy niżej, obecnie zaś zajmiemy się odmianami, które nazywają się zupełnemi.

16. Odmiany zupełne czyli **odmiany z powtórzeniami.** Niechaj będzie mnogość, złożona z n elementów. Utwórzmy z nich ugrupowania w sposób następujący: niechaj do każdego ugrupowania wchodzi m elementów z pomiędzy n danych, przyczem elementy mogą się powtarzać ilekolwiek razy (oczywiście najwyżej m razy). Ugrupowania takie nazywać będziemy odmianami zupełnemi z n elementów po m, lub odmianami zupełnemi klasy m-tej z n elementów (inaczej odmianami klasy m-tej z powtórzeniami).

Chcemy utworzyć wszystkie możliwe odmiany zupełne m-tej klasy i wyznaczyć ich liczbę (skończoną). Liczbę tę oznaczać będziemy przez $\bar{v}_{n,m}$.

Jeżeli elementy dane oznaczymy przez a, b, c,... i, j, k, to odmiany zupełne klasy pierwszej nie będą się różniły od odmian prostych tej klasy; będą niemi dane elementy:

$$a, b, c \ldots, i, j, k.$$

Jest zatem $\bar{v}_{n,1} = v_{n,1} = n$.

Odmiany zupełne klasy drugiej otrzymamy z odmian klasy pierwszej, dopisując do każdej z nich po jednym z n elementów danych. Tym sposobem z odmiany a otrzymamy n odmian zupełnych:

$$aa, \quad ab, \quad ac, \ldots, ai, \quad aj, \quad ak.$$

Z odmiany b otrzymamy n odmian zupełnych:

b a, b b, b c, . . . , b i, b j, b k.

i t. d., wreszcie z odmiany ostatniej k otrzymany n odmian zupełnych:

k a, k b, k c, . . . , k i, k j, k k.

Odmian zupełnych klasy drugiej z n elementów będzie tedy:

$$n \,.\, n = n^2, \quad \text{t. j.} \quad \bar{v}_{n,2} = n^2.$$

Od odmian zupełnych klasy drugiej przechodzimy do odmian zupełnych klasy trzeciej, dopisując do każdej odmiany klasy drugiej po jednym z n elementów danych. I tak np. z odmiany a b otrzymamy n odmian klasy trzeciej:

a b a, a b b, a b c, . . . , a b i, a b j, a b k,

z odmiany k k otrzymamy n odmian:

k k a, k k b, k k c, . . . , k k i, k k j, k k k.

Widzimy tedy, że odmian zupełnych klasy trzeciej będzie $n^2 \,.\, n = n^3$, t. j. że $\bar{v}_{n,3} = n^3$.

Ogólnie, jeżeli wyobrazimy sobie wypisane wszystkie odmiany zupełne klasy $(m-1)$-tej z n elementów, to otrzymamy z nich odmiany zupełne klasy m-tej, jeżeli do każdej odmiany klasy $(m-1)$-ej dopisywać będziemy po jednym z n elementów danych, nie pomijając żadnego. Tym sposobem z każdej odmiany zupełnej klasy $(m-1)$-ej otrzymamy n odmian zupełnych klasy m-tej, a wszystkich tych odmian będzie:

$$\bar{v}_{n,m} = n \,.\, \bar{v}_{n,m-1}\,.$$

Ponieważ, według tego samego rozumowania, jest $\bar{v}_{n,m-1} = n \,.\, \bar{v}_{n,m-2}$, $\bar{v}_{n,m-2} = n \,.\, \bar{v}_{n,m-3}$ i t. d. wreszcie $\bar{v}_{n,2} = n \,.\, \bar{v}_{n,1}$, $\bar{v}_{n,1} = n$, otrzymujemy więc ostatecznie:

$$\bar{v}_{n,m} = n^m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27),$$

jako wzór na liczbę odmian zupełnych klasy m-tej z n elementów.

W tym wzorze może być $m < n$, $m = n$, albo $m > n$, gdy tymczasem dla odmian prostych jest $m \leqq n$.

Dla przykładu wypiszemy w porządku arytmograficznym wszystkie odmiany zupełne klasy trzeciej z czterech elementów 1, 2, 3, 4. Liczba tych odmian wynosi $4^3 = 64$.

111	211	311	411
112	212	312	412
113	213	313	413
114	214	314	414
121	221	321	421
122	*222*	322	422
123	*223*	323	423
124	*224*	324	424
131	231	331	431
132	232	332	432
133	*233*	*333*	433
134	*234*	*334*	434
141	241	341	441
142	242	342	442
143	243	343	443
144	*244*	*344*	*444*

Są to zarazem wszystkie liczby trzycyfrowe różne, jakie utworzyć można z czterech cyfr 1, 2, 3, 4, w których jedna cyfra powtarzać się może aż do trzech razy.

Pomiędzy 64 odmianami zupełnemi klasy 3-ej z 4 elementów następujące w liczbie 20, wypisane wyżej kursywą, są dobrze uporządkowane:

111, 112, 113, 114, 122, 123, 124, 133, 134, 144,
222, 223, 224, 233, 234, 244, 333, 334, 344, 444.

Są to tak zwane połączenia (kombinacye) zupełne klasy m-tej z n elementów, o których niżej mówić będziemy.

17. Zadanie. W urnie znajduje się a kul białych, b kul czarnych, c kul czerwonych. Ciągniemy z urny $\alpha+\beta+\gamma$ razy po jednej kuli, wkładając po każdem ciągnieniu wyciągniętą kulę napowrót do urny i mieszając kule w urnie przed każdem następnem ciągnieniem.

Wyznaczyć: 1) liczbę wszystkich możliwych ugrupowań, jakie tworzyć będą wylosowane kule; 2) liczbę ugrupowań, dla których w pierwszych α ciągnieniach wylosowujemy same kule białe, w drugich β ciągnieniach same kule czarne, w trzecich γ ciągnieniach same kule czerwone; 3) stosunek drugiej liczby do pierwszej.

Liczba wszystkich możliwych ugrupowań równa się oczywiście liczbie odmian zupełnych, t. j. odmian z powtórzeniem z $a+b+c$ elementów po $\alpha+\beta+\gamma$, t. j. liczbie odmian klasy $(\alpha+\beta+\gamma)$-ej z $a+b+c$ elementów. Według wzoru (27) liczba ta równa się:

$$(a+b+c)^{\alpha+\beta+\gamma},$$

i to jest odpowiedź na pytanie pierwsze.

Odpowiedź na pytanie drugie znajdziemy, zważywszy, że ugrupowań, dla których w α ciągnieniach wyciągamy same kule białe, będzie tyle, ile jest odmian zupełnych z a przedmiotów po α, t. j. według tegoż wzoru (27) będzie ich a^α. Podobnież liczba ugrupowań, dla których w β ciągnieniach wylosowujemy same kule czarne, będzie b^β; liczba ugrupowań, dla których w γ ciągnieniach wylosowujemy kule czerwone, będzie c^γ. A zatem wszystkich możliwych ugrupowań, dla których w $\alpha+\beta+\gamma$ ciągnieniach wylosowujemy α kul białych, β kul czarnych, γ kul czerwonych, równać się będzie iloczynowi liczb a^α, b^β, γ^γ. Liczba zatem

$$a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma$$

stanowi odpowiedź na pytanie drugie.

Wreszcie odpowiedź na pytanie trzecie daje nam iloraz dwu liczb otrzymanych, t. j.

$$\frac{a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma}{(a+b+c)^{\alpha+\beta+\gamma}}$$

Jeżeli naprzykład $a=2$, $b=3$, $c=4$; $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, znajdziemy, że szukany stosunek równa się

$$\frac{2\,.\,3^2\,.\,4^3}{(2+3+4)^6}=\frac{2^7}{3^{10}}=0{,}00217.$$

18. Połączenia (Kombinacye). Poznaliśmy wyżej sposób tworzenia odmian prostych m-tej klasy z n elementów i wyznaczyliśmy ich liczbę. Umawiamy się obecnie, aby odmiany, różniące się tylko porządkiem ugrupowania elementów, lub inaczej mówiąc, aby wszystkie przemiany jednej odmiany m elementów uważać jako stanowiące jedno i to samo połączenie. Tym sposobem połączenia istotnie różne klasy m-tej z n elementów otrzymamy, wypisując tylko te odmiany klasy m-tej, które są dobrze uporządkowane. Jeżeli tedy liczbę połączeń prostych z n elementów po m oznaczymy znakiem $c_{n,m}$, wywnioskujemy z powyższego, że liczba $c_{n,m}$ jest mniejsza $m!$ razy od liczby $v_{n,m}$, gdyż każda odmiana złożona z m elementów występuje w $m!$ przemianach. Będzie zatem (porówn. art. 15).

$$c_{n,m}=\frac{v_{n,m}}{m!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

lub według (25):

$$c_{n,m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m} \quad . \quad . \quad . \quad (28')$$

Widzimy tedy, że liczba połączeń prostych m-tej klasy z n elementów równa się spółczynnikowi dwumianowemu $\binom{n}{m}$, t. j.

$$c_{n,m} = \binom{n}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Własności liczb $c_{n,m}$ są zatem identyczne z własnościami spółczynników dwumianowych. Stąd wprost wnieść można (porówn. art. 12).

$$c_{n,n-m} = c_{n,m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30),$$

t. j. że liczby połączeń prostych klasy m-tej i $(n-m)$-ej z n elementów są równe. Do tego wniosku dojść możemy bezpośrednio zapomocą następującego rozumowania. Wyobraźmy sobie wypisane wszystkie połączenia proste m-tej klasy z n elementów, t. j. dobrze uporządkowane odmiany m-tej klasy z n elementów. Obok każdego z tych połączeń wypiszmy $n-m$ elementów, które w niem nie zachodzą. Otrzymamy tym sposobem tyleż ugrupowań z $n-m$ elementów. To ugrupowania będą wszystkie różne, t. j. żadne z nich powtarzać się nie będzie i wyczerpać one muszą wszystkie połączenia proste tej klasy $(n-m)$-ej; bo gdyby brakło pomiędzy niemi jakiegoś połączenia z $n-m$ elementów, to z pozostałych m elementów możnaby utworzyć nowe połączenie klasy m-tej, co być nie może, bo wszystkie połączenia klasy m-tej zostały wypisane.

Możemy też dowieść za pomocą następującego rozumowania, wynikającego ze sposobu tworzenia połączeń, wzoru

$$c_{n,m} = c_{n-1,m} + c_{n-1,m-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31),$$

który wyraża to samo, co podany w art. 12 wzór (19) dla spółczynników dwumianowych:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1},$$

W samej rzeczy, wyobraźmy sobie wypisane wszystkie połączenia proste, t. j. wszystkie odmiany dobrze uporządkowane m-tej klasy z n elementów a, b . . . i, j, k. Jedne z nich nie będą wcale zawierały ostatniego elementu k; tych będzie oczywiście tyle, ile utworzyć można połączeń prostych z $n-1$ elementów po m, t. j. będzie ich $c_{n-1,m}$. Inne będą zawierały element ostatni k, oczywiście na miejscu ostatniem m-tem, jako najwyższem; jeżelibyśmy ten element w nich przekreślili, to będziemy mieli połączenia proste z $n-1$ elementów po $m-1$, a zatem połączeń tej drugiej kategoryi będzie $c_{n-1, m-1}$. Jest zatem razem wszystkich połączeń $c_{n-1, m} + c_{n-1, m-1}$, jak opiewa wzór (31).

Podzielmy teraz wszystkie przemiany klasy m-tej z n elementów a, b ... i, j, k na następujące kategorye. Do pierwszej niechaj należą wszystkie połączenia proste, nie zawierające elementu k; liczba ich wynosi, jak wiemy, $c_{n-1, m}$. Do drugiej kategoryi zaliczmy te, które mają na ostatniem swem miejscu element k, a nie zawierają elementu przedostatniego j; liczba ich będzie oczywiście $c_{n-2, m-1}$. Do trzeciej kategoryi zaliczmy te, które mają na ostatnich dwóch miejscach j k, a nie zawierają elementu i, liczba ich wynosi $c_{n-3, m-2}$ i t. d. Do ostatniej wreszcie kategoryi należeć będzie jedno tylko połączenie, które na miejscu m-tem zawiera element m-ty mnogości a b... Tym sposobem całkowita liczba $c_{n, m}$ wszystkich połączeń prostych z n elementów po m da się przedstawić w sposób następujący:

$$c_{n, m} = c_{n-1, m} + c_{n-2, m-1} + c_{n-3, m-2} + \ldots + c_{n-m-1, 0} \quad (32).$$

Tożsamość ta wyraża zupełnie to samo, co wzór (20):

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m-1} + \binom{n-3}{m-2} + \ldots + \binom{n-m-1}{0},$$

wyprowadzony dla spółczynników dwumianowych.

19. **Zadanie**. W urnie znajduje się a kul białych i b kul czarnych. Wyjmujemy z urny odrazu lub po kolei r ($\leqslant a$) kul, nie wkładając ich napowrót do urny. W ilu z pomiędzy wszystkich możliwych ugrupowań będzie ugrupowań takich, w których wszystkie wyciągnięte kule będą białe?

Kul w urnie mamy $a+b$; wyciągamy r kul, zatem wszystkich możliwych ugrupowań będzie tyle, ile utworzyć można połączeń prostych klasy r-tej z $a+b$ elementów t. j. liczba wszystkich możliwych ugrupowań będzie według wzoru (28'):

$$c_{a+b, r} = \binom{a+b}{r} = \frac{(a+b)!}{r!\,(a+b-r)!}.$$

Pomiędzy temi ugrupowaniami będzie ugrupowań, w których wszystkie wyciągnięte kule są białe, tyle, ile można utworzyć połączeń prostych z a elementów po r, a zatem liczba ich będzie:

$$c_{a, r} = \binom{a}{r} = \frac{a!}{r!\,(a-r)!}.$$

Stosunek drugiej liczby do pierwszej wyrazi się w ten sposób:

$$\frac{c_{a, r}}{c_{a+b, r}} = \frac{a!\,(a+b-r)!}{(a-r)!\,(a+b)!} = \frac{a\,(a-1)\,(a-2)\ldots(a-r+1)}{(a+b)\,(a+b-1)\,(a+b-2)\ldots(a+b-r+1)}.$$

Np. jeżeli $a=9$, $b=81$, $r=5$, znajdziemy, że stosunek ten wynosi:

$$\frac{9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5}{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86} = 0{,}0000029 \,.$$

Otrzymany tu wynik daje nam zarazem rozwiązanie następującego zadania. W loteryjce zwykłej jest 9 liczb jednocyfrowych, 81 liczb dwucyfrowych. Wyciągamy 5 numerów. Jaki będzie stosunek liczby wsystkich możliwych ugrupowań, w których wyciągnięte numery będą liczbami jednocyfrowemi do wszystkich możliwych ugrupowań w pięciu kolejnych ciągnieniach?

20. Połączenia zupełne. Połączenia zupełne, czyli połączenia z powtórzeniami z n elementów po m, są to takie ugrupowania m elementów z pomiędzy n danych, z których żadne nie jest przemianą innego i w których elementy powtarzać się mogą. Mówiąc inaczej, połączeniami zupełnemi z n elementów po m, lub połączeniami klasy m-tej z n elementów są to odmiany zupełne klasy m-tej dobrze uporządkowane. Widzieliśmy już w art. 14, że takiemi połączeniami zupełnemi klasy 3-ej z czterech elementów, 1, 2, 3, 4 są w porządku arytmograficznym następujące:

1 1 1, 1 1 2, 1 1 3, 1 1 4, 1 2 2, 1 2 3, 1 2 4, 1 3 3, 1 3 4, 1 4 4,

2 2 2, 2 2 3, 2 2 4, 2 3 3, 2 3 4, 2 4 4, 3 3 3, 3 3 4, 3 4 4, 4 4 4.

Liczbę połączeń zupełnych z n elementów po m oznaczać będziemy symbolem $\bar{c}_{n,m}$.

Połączenia zupełne klasy pierwszej są oczywiście te same, co połączenia proste tej klasy; są niemi mianowicie

a, b, c, . . . , j, k.

Połączenia zupełne klasy drugiej otrzymamy z połączeń klasy pierwszej, jeżeli do każdego połączenia klasy pierwszej dopisywać będziemy po jednym elemencie, nie niższym od stojącego w połączeniu. Tym sposobem z połączenia pierwszej klasy a otrzymamy połączenia zupełne klasy drugiej:

a a, a b, a c, . . . , a j, a k.

Z połączenia b otrzymamy połączenia zupełne:

b b, b c, . . . , b j, b k.

Z połączenia c będziemy mieli połączenia zupełne:

c c, . . . , c j, c k,

i t. d.; wreszcie z połączenia k otrzymamy jedno tylko połączenie k k.

Z połączeń zupełnych klasy drugiej przejdziemy do połączeń zupełnych klasy 3-ej, dopisując do połączeń klasy drugiej po jednym elemencie z pomiędzy n elementów, nie niższym od żadnego z dwóch elementów stojących w połączeniu. Tym sposobem z połączenia a a otrzymamy następujące połączenia zupełne klasy 3-ej:

a a a, a a b, a a c, . . ., a a j, a a k.

Z połączenia a b otrzymamy:

a b b, a b c, . . . , a b j, a b k.

Z połączenia a c otrzymamy:

a c c, . . . , a c j, a c k

i t. d. z połączenia a k otrzymamy jedno tylko połączenie klasy 3-ej a k k.

W sposób dopiero co opisany tworzyć można kolejno połączenia zupełne klasy 4-ej i następnych.

Gdy elementy oznaczone są za pomocą znaków liczbowych, np. gdy mamy 6 elementów 1, 2, 3, 4, 5, 6, to dla otrzymania wszystkich połączeń zupełnych, dajmy na to klasy 4-ej, z 6 elementów, należy wypisać po kolei wszystkie, utworzone z jednakowych lub różnych cyfr z pomiędzy sześciu danych, liczby czterocyfrowe, których cyfry są dobrze uporządkowane, poczynając od najmniejszej liczby 1 1 1 1, a kończąc na liczbie największej 6 6 6 6. Liczba przemian zupełnych z 6 elementów po 4, t. j. $\bar{c}_{6,4}$, będzie właśnie równa liczbie wszystkich takich liczb czterocyfrowych. Jest ona, jak to wynika z wzoru, który zaraz wyprowadzimy, równa 1 2 6.

Aby otrzymać wzór na liczbę $\bar{c}_{n,m}$, wyobraźmy sobie wypisane w porządku arytmograficznym wszystkie połączenia zupełne klasy m-tej z n elementów; niechaj jednem któremkolwiek z tych połączeń będzie:

$$\alpha\ \beta\ \gamma \ldots \varepsilon\ \zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(A)},$$

gdzie skaźniki $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon, \zeta$, których jest m, wzięte są z pomiędzy liczb $1, 2, 3, \ldots, n$ i są tak ułożone, że żaden z następnych nie jest niższy od poprzedzającego, t. j.

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma \ldots \leqq \varepsilon \leqq \zeta.$$

Dodajmy 0 do α, 1 do β, 2 do $\gamma, \ldots, m-1$ do ζ; otrzymamy tym sposobem ugrupowanie, złożone z m elementów r ó ż n y c h:

$$\alpha \quad \beta+1 \quad \gamma+2, \ldots \quad \varepsilon+m-2 \quad \zeta+m-1 \ . \quad \text{(B)},$$

gdzie $\alpha < \beta+1 < \gamma+2 \ldots < \varepsilon+m-2 < \zeta+m-1$,

przyczem największą wartością ostatniego skaźnika ,wtedy gdy $\zeta = n$, jest $n+m-1$.

Naodwrót od ugrupowania (B) możemy przejść do ugrupowania (A), odejmując kolejno 0, 1, 2 ... $m-1$ od skaźników, wyobrażających elementy tego ugrupowania. Wszystkie ugrupowania (B), otrzymane tym sposobem, będą różne: każde z nich będzie odpowiadało jednemu i tylko jednemu ugrupowaniu (A), i naodwrót, każdemu ugrupowaniu (A) odpowiadać będzie jedno i tylko jedno ugrupowanie (B). A zatem liczba wszystkich różnych ugrupowań (A) równa się liczbie wszystkich różnych ugrupowań (B), co możemy wyrazić, mówiąc, że liczba połączeń zupełnych z n elementów po m równa się liczbie połączeń prostych z $n+m-1$ elementów po m. t. j.

$$\bar{c}_{n,m} = c_{n+m-1,m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33).$$

Wyraziwszy $c_{n+m-1,m}$ według wzoru (28'), otrzymamy:

$$\bar{c}_{n,m} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m} \quad \ldots \quad (33'),$$

lub też, używając znakowania spółczynników dwumianowych, możemy napisać:

$$\bar{c}_{n,m} = \binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m-1}{n-1} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!} \quad . \ (33'').$$

Wzór (33'') wyraża zarazem, że liczba połączeń zupełnych klasy m-tej z n elementów równa się liczbie przemian z $n+m-1$ elementów, pomiędzy któremi są tylko dwa rodzaje elementów: $n-1$ elementów jednakowych jednego rodzaju i m elementów równych drugiego rodzaju.

Zauważmy jeszcze, że w połączeniach zupełnych liczba m może mieć wartość dowolnie wielką, gdy w połączeniach prostych jest zawsze $m \leqslant n$.

Jeżeli we wzorze (33') podstawimy $n=6$, $m=4$, znajdziemy:

$$\bar{c}_{6,4} = \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} = 126,$$

t. j. liczba połączeń zupełnych z 6 elementów po 4, o których wyżej była mowa.

21. Połączenia z ograniczoną liczbą powtórzeń. Ogólniejszemi od połączeń zupełnych klasy m-tej wyżej rozważonych, t. j. połączeń, w których każdy z elementów może powtarzać się dowolną liczbę razy (oczywiście nie większą od m), są t. zw. połączenia z ograniczonemi powtarzaniami, t. j. takie, w których każdy element powtarzać się może albo pewną liczbę razy z góry daną, albo nie więcej niż oznaczoną liczbę razy. Tak np. jeżeli z elementów 1, 2, 3 tworzymy połączenia klasy 4-ej, w których element 1 ma powtarzać się najwyżej razy jeden, element 2 najwyżej razy dwa, element 3 najwyżej razy trzy, to otrzymamy następujące połączenia:

1 2 2 3, 1 2 3 3, 1 3 3 3, 2 2 3 3, 2 3 3 3.

Teoryi tych połączeń podawać tu nie będziemy; powiemy tylko, że matematycy, którzy zajmowali się niemi, doszli między innemi do następującego twierdzenia: Jeżeli w połączeniach klasy m-tej z n elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$, element a_1 powtarzać się ma najwyżej α_1 razy, element a_2 najwyżej α_2 razy i t. d. element a_n najwyżej α_n razy, wtedy liczba połączeń m-tej klasy z temi ograniczonemi powtórzeniami równać się będzie spółczynnikowi przy x^n w rozwinięciu iloczynu

$$\frac{1-x^{\alpha_1+1}}{1-x} \cdot \frac{1-x^{\alpha_2+2}}{1-x} \cdots \frac{1-x^{\alpha_n+1}}{1-x}$$

według potęg zmiennej x. W powyższym przykładzie jest $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=3$; iloczyn ten będzie:

$$\frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^3}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x} = (1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)$$
$$= 1+3x+5x^2+6x^3+5x^4+3x^5+x^6.$$

Spółczynnik 5 przy potędze x^4 daje liczbę szukanych połączeń. Widzimy stąd zarazem, że połączeń klasy np. trzeciej będzie 6; są niemi:

1 2 2, 1 2 3, 1 3 3, 2 2 3, 2 3 3, 3 3 3.

Połączenia z ograniczonemi powtórzeniami klasy m-tej, w których każdy element powtarza się jednakową liczbę razy, t. j. w którym wszystkie liczby α_i są równe jednej i tej samej liczbie, dajmy na to, p, nazywają się (według D. André'go) połączeniami regularnemi rzędu p-tego klasy m-tej z n elementów. Takiemi np. połączeniami regularnemi rzędu 2-go klasy 4-ej z czterech elementów 1, 2, 3, 4 są następujące:

1 1 2 2, 1 1 2 3, 1 1 2 4, 1 1 3 3, 1 1 3 4, 1 1 4 4,
1 2 2 3, 1 2 2 4, 1 2 3 3, 1 2 3 4, 1 2 4 4, 1 3 3 4,
1 3 4 4, 2 2 3 3, 2 2 3 4, 2 2 4 4, 2 3 3 4, 2 3 4 4, 3 3 4 4.

Liczba ich wynosi 19. André (1876) wykazał, że liczba połączeń regularnych rzędu p-tego klasy m-tej z n elementów, którą oznaczmy przez ${}_p\bar{C}_{n,m}$, wyraża się wzorem:

$${}_p\bar{C}_{n,m} = \Sigma\,(-1)^s\, C_{n,s}\, \bar{C}_{n,m-s\,(p+1)}\,,$$

gdzie s w sumie Σ zmienia się od wartości $s=0$ do wartości równej największej liczbie całkowitej, zawartej w ilorazie z podzielenia m przez $p+1$, a $c_{n,s}$, $\bar{c}_{n,m-s(p+1)}$ oznaczają, jak wyżej, liczbę połączeń prostych z n elementów po s i liczbę połączeń zupełnych z n elementów po $m-s\,(p+1)$. W naszym przykładzie jest $n=4$, $m=4$, $p=2$; największa liczba całkowita, zawarta w ilorazie z podzielenia liczby m przez $p+1$, t. j. 4 przez 3, jest 1, a zatem s przyjmuje dwie wartości 0, 1 i wzór powyższy staje się w naszym przypadku:

$$_2\bar{c}_{4,4} = (-1)^0\, c_{4,0}\, \bar{c}_{4,4} + (-1)^1\, c_{4,1}\, \bar{c}_{4,1}$$

Ponieważ $c_{4,0}=1$, $\bar{c}_{4,4}=\dfrac{4.5.6.7}{1.2.3.4}=35$, $c_{4,1}=4$, $\bar{c}_{4,1}=4$, otrzymamy więc:

$$_2\bar{c}_{4,4} = 35 - 16 = 19,$$

jak być powinno.

22. Odmiany i połączenia o danej sumie elementów. W Rachunku prawdopodobieństwa spotykamy się z zadaniami, w których zachodzi potrzeba wyznaczania liczby odmian lub połączeń takich, że suma ich elementów—jeżeli elementy wyrażone są np. liczbami 1, 2, 3,...— jest stała, t. j. równa liczbie całkowitej z góry danej. Takie odmiany i połączenia nazywać będziemy odmianami i połączeniami o danej sumie elementów.

Tak np., jeżeli suma elementów ma być równa 7, to odmian klasy pierwszej będzie oczywiście tylko jedna, mianowicie:

7.

Odmian prostych (t. j. bez powtórzeń) klasy 2-giej będzie 6; są niemi:

16, 61, 25, 52, 34, 43.

Odmian prostych klasy 3-ej jest 6; są niemi:

124, 142, 214, 241, 412, 241.

Odmiany złożone, t. j. z powtórzeniami, klasy np. trzeciej będą:

115, 124, 133, 142, 151, 214, 223, 232,
241, 313, 322, 331, 412, 421, 511.

Połączeniami klasy drugiej prostemi (t. j. bez powtórzeń) będą następujące:

16, 25, 34;

a połączeniami klasy trzeciej złożonemi, t. j. z powtórzeniami, będą następujące:

115, 124, 133, 223.

Ze sposobu tworzenia odmian z połączeń prostych (porówn. art. 15) wynika bezpośrednio, że liczba odmian prostych klasy k-tej o danej sumie elementów równa się $k!$ razy wziętej liczbie połączeń prostych tejże klasy o takiejże sumie elementów.

Nie możemy tu zająć się szczegółowo teoryą odmian i połączeń o danej sumie elementów; powiemy tylko, że teorya ta jest jednym z rozdziałów Teoryi liczb, traktującym o rozkładzie liczb całkowitych na daną liczbę składników, i ograniczymy się na podaniu kilku prostych twierdzeń, które znajdą zastosowanie w następującym rozdziale książki niniejszej.

Pierwsze z tych twierdzeń dotyczy wyznaczenia liczby odmian złożonych klasy k-tej o sumie elementów równej m. Liczbę tę oznaczać będziemy zapomocą symbolu $\overline{w}_k(m)$.

Przedewszystkiem widzimy odrazu, że liczba odmian złożonych klasy pierwszej (t. j. jednoelementowych) o jakiejkolwiek sumie elementów równa się 1, co możemy tak napisać:

$$\overline{w}_1(n) = 1, \quad (n = 1, 2, 3 \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Ogólnie liczba $\overline{w}_k(m)$ wyznacza się z wzoru:

$$\overline{w}_k(m) = \overline{w}_{k-1}(m-1) + \overline{w}_{k-1}(m-2) + \overline{w}_{k-1}(m-3) + \ldots \quad (35).$$

O prawdziwości tego wzoru możemy przekonać się zapomocą następującego rozumowania. Wyobraźmy sobie wypisane wszystkie odmiany złożone k-tej klasy o sumie elementów równej m, i podzielmy je na grupy następujące. Do grupy pierwszej zaliczmy wszystkie odmiany, mające na miejscu pierwszem element 1; do drugiej wszystkie odmiany, mające na miejscu pierwszem element 2; do trzeciej wszystkie odmiany, mające na miejscu pierwszem element 3 i t. d. Jeżeli w odmianach grupy pierwszej usuniemy ich element pierwszy 1, otrzymamy oczywiście odmiany klasy $(k-1)$-ej o sumie elementów równej $m-1$. Jeżeli w odmianach grupy drugiej usuniemy ich element pierwszy 2, otrzymamy odmiany klasy $(k-1)$-ej o sumie elementów równej $m-2$ i t. d. To właśnie wyraża wzór (35).

Kładąc w nim $k = 2$, otrzymamy:

$$\overline{w}_2(m) = \overline{w}_1(m-1) + \overline{w}_1(m-2) + \overline{w}_1(m-3) + \ldots,$$

czyli na podstawie wzoru (34):

$$\overline{w}_2(m) = 1 + 1 + \ldots + 1 = \binom{m-1}{1} \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Kładąc we wzorze (35) $k = 3$, otrzymamy:

$$\overline{w}_3(m) = \overline{w}_2(m-1) + \overline{w}_2(m-2) + \overline{w}_2(m-3) + \ldots$$

a więc z uwagi na wzór (36):

$$\overline{w}_3(m) = \binom{m-2}{1} + \binom{m-3}{1} + \ldots + \binom{1}{1}.$$

Stosując do strony drugiej tej równości wzór (20) art. 12-go (gdzie zamiast n należy napisać $m - 2$, a zamiast m napisać 1), znajdziemy:

$$\overline{w}_3(m) = \binom{m-1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37).$$

Tym samym sposobem znajdziemy:

$$\overline{w}_4(m) = \binom{m-1}{3}, \quad \overline{w}_5(m) = \binom{m-1}{4}, \ldots \quad (38)$$

i ogólnie:

$$\overline{w}_k(m) = \binom{m-1}{k-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39),$$

co można wyrazić tak: liczba odmian złożonych klasy k-tej o sumie elementów równej m równa się liczbie połączeń prostych klasy $(k-1)$-ej z $m - 1$ elementów.

Tak np. liczba odmian złożonych klasy 6-ej o sumie elementów równej 8 będzie:

$$\overline{w}_6(8) = \binom{7}{5} = \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5} = 21.$$

Oto są te odmiany w porządku arytmograficznym:

1 1 1 1 1 3, 1 1 1 1 2 2, 1 1 1 1 3 1, 1 1 1 2 1 2, 1 1 1 2 2 1,
1 1 1 3 1 1, 1 1 2 1 1 2, 1 1 2 1 2 1, 1 1 2 2 1 1, 1 1 3 1 1 1,
1 2 1 1 1 2, 1 2 1 1 2 1, 1 2 1 2 1 1, 1 2 2 1 1 1, 1 3 1 1 1 1,
2 1 1 1 1 2, 2 1 1 1 2 1, 2 1 1 2 1 1, 2 1 2 1 1 1, 2 2 1 1 1 1,
3 1 1 1 1 1.

Pomiędzy niemi dobrze uporządkowanemi są tylko dwie następujące:

1 1 1 1 1 3, 1 1 1 1 2 2;

wszystkie pozostałe są przemianami tych dwu połączeń złożonych klasy 6-ej o sumie elementów równej 8. Łatwo to stwierdzić, zważywszy, że połączenie 1 1 1 1 1 3, jako złożone z 6-ciu elementów, z których pięć jest jednakowych, może być przedstawione (patrz art. 10) w $\frac{6!}{5!\,1!}$, t. j.

w 6 przemianach, połączenie zaś 1 1 1 1 2 2, jako złożone z 6 elementów, z których cztery są jednakowe i równe 1, oraz dwa jednakowe i równe 2, może być przedstawione w $\frac{6!}{4!\,2!}$, t. j w 15 przemianach; $6+15=21$, jak być powinno.

23. Ciąg dalszy. Otrzymaliśmy wyżej:

$$\overline{w}_1(m)=\binom{m-1}{1},\quad w_2(m)=\binom{m-1}{2},\ldots,\overline{w}_m(m)=\binom{m-1}{m-1},$$

Dodając te liczby, znajdziemy:

$$\sum_{s=1}^{s=m}\overline{w}_s(m)=\binom{m-1}{1}+\binom{m-1}{2}+\ldots+\binom{m-1}{m-1},$$

Według wzoru (22) w art. 12-ym (w którym należy napisać $m-1$ zamiast n) strona druga równa się 2^{m-1}; otrzymujemy zatem:

$$\sum_{s=1}^{s=m}\overline{w}_1(m)=2^{m-1}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(40),$$

co można wyrazić tak: liczba odmian złożonych wszystkich klas od 1-ej do m-ej o sumie elementów równej m jest równa 2^{m-1}.

Wyznaczaniem liczby $\overline{c}_k(m)$ połączeń złożonych klasy k-tej o sumie elementów równej m nie będziemy się zajmowali; podamy tylko część tablicy, ułożonej przez Eulera, przy pomocy której liczby $\overline{c}_k(m)$ obliczać można.

$k=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$m-k=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5
5	1	3	5	6	7	7	7	7	7	7	7
6	1	4	7	9	10	11	11	11	11	11	11
7	1	4	8	11	13	14	15	15	15	15	15
8	1	5	10	15	18	20	21	22	22	22	22
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	30	30
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42	42

Chcąc np. według tej tablicy obliczyć $\overline{c}_6(8)$, gdzie $k=6$, $m=8$, a więc $m-k=2$, szukamy liczby stojącej na przecięciu kolumny z nagłówkiem 6 z wierszem, dla którego $m - k = 2$, i znajdziemy $\bar{c}_6(8) = 2$, jak być powinno.

Na liczbę odmian złożonych klasy 4-ej o sumie elementów równej 10 znajdziemy:

$$\bar{c}_4(10) = 9.$$

24. Zadania. 1. W kubku niechaj będą cztery zupełnie równe kostki sześcienne, mające na ściankach numery, t. j. oczka 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wyrzucamy te kostki z kubka na stół i notujemy numery, jakie się ukażą na ściankach wierzchnich. Zapytujemy, ile może być rozmaitych możliwych ugrupowań, w których suma oczek na tych ściankach jest równa 10.

Otóż tych możliwych ugrupowań będzie tyle, ile wynosi liczba odmian zupełnych klasy 4-ej o sumie elementów równej 10, zmniejszona o liczbę odmian zupełnych tejże klasy, w których występuje element wyższy od 6, których tu uwzględniać nie należy, gdyż najwyższy numer na kostkach jest 6. Tych ostatnich odmian jest 4; są niemi mianowicie:

1 1 1 7, 1 1 7 1, 1 7 1 1, 7 1 1 1.

Szukana zatem liczba możliwych ugrupowań w których suma wyrazów ukazujących się na ściankach wierzchnich jest 10, będzie:

$$\bar{w}_4(10) - 4 = \frac{9.8.7}{1.2.3} - 4 = 84 - 4 = 80.$$

Ponieważ, jak wiemy, wszystkich możliwych ugrupowań numerów przy wyrzucaniu czterech kostek jest tyle, ile utworzyć można odmian złożonych z 6 elementów, t. j.

$$6^4 = 1296,$$

a zatem liczba ugrupowań, w których ukaże się suma 10, stanowi $\frac{80}{1296} = \frac{5}{81}$ liczby wszystkich możliwych ugrupowań.

Z pomiędzy 80 ugrupowań, w których ukazuje się suma 10, następujące w liczbie 8, stanowią *różne* połączenia o sumie elementów równej 10:

1 1 2 6, 1 1 3 5, 1 1 4 4, 1 2 2 5, 1 2 3 4, 1 3 3 3, 2 2 2 4, 2 2 3 3.

Liczba ich równa się liczbie $\bar{c}_4(10)$ połączeń klasy 4-tej, o sumie równej 10, zmniejszonej o liczbę połączeń klasy 4-ej, w których występują elementy wyższe od 6. Tych ostatnich połączeń jest tylko jedno, mianowicie 1 1 1 7. Liczba zatem połączeń o sumie równej 10 w naszem zadaniu z czterema kostkami będzie:

$$\bar{c}_4(10) - 1 = 9 - 1 = 8,$$

zgodnie z powyższem.

2. Niechaj w kubku będą 4 kostki sześcienne, takie jak w zadaniu poprzedniem. Wyznaczyć liczbę wszystkich ugrupowań, w których przy wyrzuceniu kostek z kubka, na ich ściankach wierzchnich ukażą się numery, których suma jest nie większa od 10.

Najmniejsza suma, jaką dają numery na czterech kostkach, wynosi oczywiście 4. Aby więc rozwiązać to zadanie, należy wyznaczyć liczby odmian zupełnych klasy 4-tej: o sumie równej 4, równej 5, równej 6, równej 7, równej 8, równej 9, równej 10, i dodawszy te liczby, odjąć od otrzymanej sumy liczbę tych odmian zupełnych klasy 4-tej, w których występuje element wyższy od 6. Tych odmian będzie, jak w poprzedniem zadaniu, tylko 4; otrzymujemy zatem jako odpowiedź liczbę:

$$\bar{w}_4(4) + \bar{w}_4(5) + \bar{w}_4(6) + \bar{w}_4(7) + \bar{w}_4(8) + \bar{w}_4(9) + \bar{w}_4(10) - 4$$

$$= \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \binom{8}{3} + \binom{9}{3} - 4$$

$$= 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 - 4 = 206.$$

Ponieważ liczba wszystkich możliwych ugrupowań przy wyrzucaniu czterech kostek wynosi $6^4 = 1296$, a zatem liczba ugrupowań, w których suma numerów, ukazujących się na wierzchnich ściankach kostek, jest nie większa od 10, stanowi $\frac{206}{1296} = \frac{103}{648}$ liczby wszystkich możliwych ugrupowań

B. Rozwinięcie potęgi dwumianu i wielomianu.

25. **Rozwinięcie potęgi** $(1 + x)^n$. Zapomocą zwykłego mnożenia stwierdzamy łatwo, że funkcya całkowita $F(x)$ n zmiennych x_1, $x_2, \ldots, x_n$,

$$F(x) = (1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n),$$

daje się przedstawić jako suma następujących funkcyj całkowitych:

$$f_0 = 1,$$
$$f_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$
$$f_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n,$$
$$f_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_5 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Funkcya f_m ($m = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$) składa się z tylu wyrazów, ile utworzyć można połączeń prostych klasy m-tej z n elementów; liczba wyrazów funkcyi f_m równa się przeto $c_{n,m}$.

Załóżmy teraz, że $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = x_n = x$; wtedy funkcya $F(x)$ przechodzi na potęgę $(1 + x)^n$, funkcye zaś $f_0, f_1, \ldots, f_n$ na następujące:

$$f_0 = 1 = c_{n,0} = \binom{n}{0},$$

$$f_1 = nx = c_{n,1}\, x = \binom{n}{1} x,$$

$$f_2 = c_{n,2}\, x^2 = \binom{n}{2} x^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_m = c_{n,m}\, x^m = \binom{n}{m} x^m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n = x^n = c_{n,n}\, x^n = \binom{n}{n} x^n.$$

Otrzymujemy zatem następujące rozwinięcie potęgi dwumianu:

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 \ldots + \binom{n}{m} x^m \ldots + \binom{n}{n} x^n \quad (41).$$

Oto dlaczego spółczynniki $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ nazwano spółczynnikami dwumianowemi (patrz art. 11).

Ogólność wzoru (41) stwierdzić można zapomocą indukcyi zupełnej. Dajmy bowiem, że wzór (41) jest prawdziwy dla pewnej wartości na n. Pomnóżmy obie jego strony przez $1 + x$; otrzymamy:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\left[1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{m} x^m + \ldots + \binom{n}{n} x^n\right]$$

$$=1+\left[1+\binom{n}{1}\right]x+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]x^2+\ldots+\left[\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}\right]x^m+\ldots$$

Podług wzoru (19) w art. 12 jest:

$$1+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{1},\ \binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2},\ldots,\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m},\ldots;$$

będzie zatem:

$$(1+x)^{n+1}=1+\binom{n+1}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2+\ldots+\binom{n+1}{m}x^m+\ldots+\binom{n+1}{n+1}x^n.$$

Jest to rozwinięcie zupełnie tej samej natury co (41); wynika stąd, że jeżeli założymy, iż wzór (41) jest prawdziwy dla danego wykładnika n, to musi być także prawdziwy i dla wykładnika o 1 większego. A ponieważ bezpośrednio stwierdzamy, że jest prawdziwy

dla $n=1$, gdyż $(1+x)^1=1+\binom{1}{1}x=\binom{1}{0}+\binom{1}{1}x$;

dla $n=2$, gdyż $(1+x)^2=1+2x+x^2=\binom{2}{0}+\binom{2}{1}x+\binom{2}{2}x^2$;

i t. d., a zatem jest ogólnie prawdziwy.

Wzór (41) nazywany bywa krótko d w u m i a n e m N e w t o n a.

Liczba wyrazów po stronie drugiej wzoru (41) wynosi $n+1$. Spółczynniki wyrazów pierwszego i ostatniego są równe 1, spółczynniki wyrazów równooddalonych od początku i końca są sobie równe. Udowodnione przez nas w art. 12 i następnych własności spółczynników dwumianowych możnaby otrzymać przy pomocy wzoru (41).

Jeżeli zamiast spółczynników wyrażonych symbolicznie podstawimy ich wartości według wzoru (14) w art. 11, można będzie napisać:

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}x^m+\ldots+x^n \quad (41').$$

Kładąc we wzorze (41) lub (41') $x=\frac{b}{a}$, otrzymamy po pomnożeniu obu stron przez a^n:

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots$$
$$\ldots+\binom{n}{m}a^{n-m}b^m+\ldots+b^n \quad .\ .\ .\ .\ . \quad (42),$$

lub

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}\,b + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}\,b^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}\,a^{n-m}\,b^m + \ldots + b^n \quad (42').$$

Kładąc $-b$ zamiast b, otrzymamy:

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}\,b + \binom{n}{2} a^{n-2}\,b^2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^m \binom{n}{m} a^{n-m}\,b^m + \ldots + (-1)^n\,b^n \;.\;\;.\;\;. \quad (43).$$

Z wzorów (42') i (43) wynika, że:

$$(a+b)^n + (a-b)^n = 2\left\{a^n + \binom{n}{2} a^{n-2}\,b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4}\,b^4 + \ldots\right\}$$

$$(a+b)^n - (a-b)^n = 2\left\{\binom{n}{1} a^{n-1}\,b + \binom{n}{3} a^{n-3}\,b^3 + \ldots\right\}.$$

Przykłady. 1. Obliczyć przy pomocy wzoru (42) rozwinięcie potęgi $\left(3+\frac{1}{3}\right)^5$.

Będzie:

$$\left(3+\frac{1}{3}\right)^5 = 3^5 + \binom{5}{1}.3^4.\frac{1}{3} + \binom{5}{2}.3^3.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{3}.3^2.\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$+ \binom{5}{4}.3.\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5.$$

Obliczając spółczynniki bezpośrednio lub korzystając z tablicy na str. 96, otrzymamy:

$$\left(3+\frac{1}{3}\right)^5 = 243 + 5\,.\,27 + 10\,.\,3 + 10\,.\,\frac{1}{3} + 5\,.\,\frac{1}{27} + \frac{1}{243}$$

$$= 243 + 135 + 30 + 3\,\frac{1}{3} + \frac{5}{27} + \frac{1}{243} = 411\,\frac{127}{243}\,.$$

2. Obliczyć $(\sqrt{2}-1)^8$ przy pomocy wzoru na rozwinięcie potęgi dwumianu.

Będzie według (43):

$$(\sqrt{2}-1)^8 = (\sqrt{2})^8 - 8\,.\,(\sqrt{2})^7 + 28\,(\sqrt{2})^6 - 56\,(\sqrt{2})^5 + 70\,(\sqrt{2})^4$$

$$- 56\,(\sqrt{2})^3 + 28\,(\sqrt{2})^2 - 8\,(\sqrt{2}) + 1$$

$$= 2^4 - 8 \,.\, 2^3 \sqrt{2} + 28 \,.\, 2^3 - 56 \,.\, 2^2 \,.\, \sqrt{2} + 70 \,.\, 2^2$$
$$- 56 \,.\, 2 \sqrt{2} + 28 \,.\, 2 - 8\sqrt{2} + 1$$
$$= 2^4 + 28 \,.\, 2^3 + 70 \,.\, 2^2 + 28 \,.\, 2 + 1$$
$$- \sqrt{2}\, (8 \,.\, 2^3 + 56 \,.\, 2^2 + 56 \,.\, 2 + 8)$$
$$= 577 - 408\sqrt{2}.$$

3. Wyznaczyć wyraz szósty w rozwinięciu potęgi $\left(2 + \frac{1}{3} x^2\right)^{12}$.

Wyraz $(m + 1)$-y rozwinięcia we wzorze (42′) jest:

$$\binom{n}{m} a^{n-m}\, b^m.$$

Kładąc więc $n = 12$, $m = 5$, $a = 2$, $b = \frac{1}{3} x^2$, otrzymamy wyraz szukany:

$$\frac{12 \,.\, 11 \,.\, 10 \,.\, 9 \,.\, 8}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}\, 2^7 \,.\, \left(\frac{1}{3} x^2\right)^5 = \frac{11264}{27}\, x^{10}.$$

4. Wyznaczyć kolejne wyrazy rozwinięć:

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^{12}, \qquad \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right)^{9}.$$

Zapomocą wzoru (42) i korzystając z tablicy na str. 96, znajdziemy:

$$1 = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^{12} = \frac{4096}{531441} + \frac{24576}{531441} + \frac{67584}{531441} + \frac{112640}{531441}$$
$$+ \frac{126720}{531441} + \frac{101376}{531441} + \frac{59136}{531441} + \frac{25344}{531441}$$
$$+ \frac{7920}{531441} + \frac{1760}{531441} + \frac{264}{531441} + \frac{24}{531441}$$
$$+ \frac{1}{531441};$$

$$1 = \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right)^{9} = \frac{262144}{1953125} + \frac{589824}{1953125} + \frac{589824}{1953125} + \frac{344064}{1953125}$$
$$+ \frac{129024}{1953125} + \frac{32256}{1953125} + \frac{5376}{1953125} + \frac{576}{1953125}$$
$$+ \frac{36}{1953125} + \frac{1}{1953125}.$$

Zauważmy, że w rozwinięciach tych, co jest oczywiste, wszystkie wyrazy są od 1 mniejsze; że począwszy od wyrazu pierwszego rosną one aż do wyrazu największego, po którym znów maleją; że w pierwszem z tych dwóch rozwinięć największym jest wyraz 5-y, w drugiem dwa są wyrazy największe równe, 2-gi i 3-i.

26. Zadania. 1. Dowieść przy pomocy wzoru (41) własności spółczynników dwumianowych udowodnionych w art. 12:

$$0 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + \binom{n}{n}.$$

$$2^{n-1} - 1 = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots$$

Dla udowodnienia pierwszej z tych własności dość założyć we wzorze (41) $x = -1$, dla udowodnienia drugiej $x = 1$, trzeci wynika z dwóch pierwszych.

2. Dowieść, że jeżeli n jest liczbą pierwszą, to dla wszelkiej liczby całkowitej x jest $x^n - x$ podzielne bez reszty przez n.

Dowiedliśmy w art. 12 (str. 102), że jeżeli n jest liczbą pierwszą, to wszystkie spółczynniki rozwinięcia potęgi $(1 + x)^n$, prócz pierwszego i ostatniego, są podzielne przez n. Stąd wynika, że jeżeli x jest liczbą całkowitą, to suma wszystkich wyrazów rozwinięcia potęgi $(1 + x)^n$, po odjęciu od niego pierwszego i ostatniego wyrazu, jest podzielna przez n, czyli, że liczba całkowita

$$(1 + x)^n - (1 + x^n)$$

jest podzielna przez n. Liczbę tę możemy napisać w postaci:

$$[(x + 1)^n - (x + 1)] - (x^n - x),$$

skąd czytamy: jeżeli dla danej liczby całkowitej x jest $x^n - x$ podzielne bez reszty przez n, to i $(x + 1)^n - (x + 1)$ będzie bez reszty przez n podzielne. A ponieważ dla $x = 1$ jest $1^n - 1 = 0$ podzielne przez n, będzie zatem różnica $2^n - 2$, a za nią różnice $3^n - 3$, $4^n - 4$ i t. d. będą przez n podzielne.

Własność tu dowiedziona nosi w Teoryi liczb nazwę twierdzenia Fermata.

27. Rozwinięcie potęgi wielomianu. Wzór (42′) możemy przedstawić w postaci skróconej w ten sposób:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{n!}{(n-m)!\,m!}\, a^{n-m}\, b^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Kładąc w tym wzorze $n - m = \alpha$, $m = \beta$, możemy go napisać tak:

$$(a+b)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!}\, a^\alpha\, b^\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45),$$

gdzie suma Σ rozciąga się na wszystkie wartości całkowite dodatnie, niewyłączając zera, liczb α i β, których suma równa się n.

Przy pomocy wzoru (45) łatwo wyprowadzić wzór na rozwinięcie potęgi $(a_1 + a_2 + \ldots + a_s)^n$; mianowicie wzór:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_s)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!}\, a_1^{\alpha_1}\, a_2^{\alpha_2} \ldots a_s^{\alpha_s}. \quad (46),$$

w którym suma po stronie drugiej rozciąga się na wszystkie wartości całkowite dodatnie, nie wyłączając zera, liczb $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, dla których

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s = n.$$

Wzór (46) możemy uzasadnić przy pomocy indukcyi zupełnej Przyjąwszy mianowicie, że wzór ten jest prawdziwy, gdy liczba składników wielomianu jest $s - 1$, udowodnimy, że pozostaje prawdziwym i dla wielomianu złożonego z s wyrazów. W rzeczy, kładąc $a_2 + \ldots + a_s = b$, możemy do potęgi $(a_1 + b)^n$ zastosować rozwinięcie (45) i otrzymamy:

$$(a_1 + b)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\,\beta!}\, a_1^{\alpha_1}\, b^\beta,$$

gdzie suma Σ rozciąga się na wszystkie wartości całkowite dodatnie, nie wyłączając zera, liczb α_1 i β, dla których $\alpha_1 + \beta = n$.

Wyrażenie $a_2 + \ldots + a_s = b$ składa się z $s - 1$ wyrazów, więc na zasadzie założenia możemy do potęgi $b^\beta = (a_2 + \ldots + a_s)^\beta$ zastosować wzór (46); będzie tedy:

$$b^\beta = (a_2 + \ldots + a_s)^\beta = \sum \frac{\beta!}{\alpha_2!\ldots\alpha_s!}\, a_2^{\alpha_2} \ldots a_s^{\alpha_s},$$

gdzie suma Σ rozciąga się na wszystkie wartości całkowite dodatnie, nie wyłączając zera, liczb $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$, dla których $\alpha_2 + \ldots + \alpha_s = \beta$. Jeżeli tę wartość na b^β wstawimy do powyższego rozwinięcia na $(a_1 + b)^n$, otrzymamy:

$$(a_1 + b)^n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_s)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\,\beta!}\, a_1^{\alpha_1} \sum \frac{\beta!}{\alpha_2!\ldots\alpha_s!}\, a_2^{\alpha_2} \ldots a_s^{\alpha_s}$$

$$=\sum \frac{n!}{\alpha_1!\beta!}\cdot\frac{\beta!}{\alpha_2!\ldots\alpha_s!}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_s^{\alpha_s}$$

$$=\sum \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_s!}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_s^{\alpha_s}.$$

Otrzymaliśmy zatem wyrażenie postaci strony drugiej we wzorze (46). A ponieważ wiemy, że wzór (46) stosuje się w przypadku dwumianu, t. j. kiedy $s=2$, więc stosuje się do trójmianu, do czteromianu i t. d., czyli jest ogólnie prawdziwy.

Przykłady. 1. Według wzoru (46) jest:

$$(a_1+a_2+a_3)^3=a_1^3+a_2^3+a_3^3+3\,a_1^2a_2+3\,a_1a_2^2$$
$$+3\,a_1^2a_3+3\,a_1a_3^2+3\,a_2^2a_3+3\,a_2a_3^2+6\,a_1a_2a_3.$$

2. Według tegoż wzoru będzie:

$$(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots)^4=a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4+\ldots$$
$$+\frac{4!}{3!}(a_1^3a_2+a_1^3a_3+\ldots+a_2^3a_3+\ldots)$$
$$+\frac{4!}{2!2!}(a_1^2a_2^2+a_1^2a_3^2+\ldots+a_2^2a_3^2+\ldots)$$
$$+\frac{4!}{2!\,1!\,1!}(a_1^2a_2a_3+a_1^2a_2a_4+a_1^2a_3a_4+\ldots)$$
$$+4!\,(a_1a_2a_3a_4+\ldots).$$

28. Inny sposób dowodzenia wzoru (46). Wzór na potęgę wielomianu można wyprowadzić przy pomocy rozważań kombinatoryjnych następującym sposobem.

Potęga $(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_s)^n$ jest iloczynem n czynników równych $a_1+a_2+\ldots+a_s$. Widać stąd bezpośrednio, że rozwinięcie składać się będzie z wyrazów postaci

$$c_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_s}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3}\ldots a_s^{\alpha_s}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(A),$$

gdzie suma wykładników $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s$ równa się n i gdzie $c_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_s}$ jest spółczynnikiem, odpowiadającym danemu układowi wykładników. Spółczynnik ten wyznaczymy zapomocą następującego rozumowania.

Niechaj $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_s$ mają wartości określone. Pomnóżmy przez siebie najprzód α_1 z pomiędzy n czynników $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_s$, otrzymany iloczyn pomnóżmy przez α_2 czynników z pomiędzy pozostałych $n-\alpha_1$ czynników $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_s$, otrzymany znów iloczyn przez α_3 czynników z pomiędzy pozostałych $n-\alpha_1-\alpha_2$ czynników $a_1+a_2+\ldots+a_s$ i t. d. W ostatecznym iloczynie znajdzie się z pewnością wyraz (A) z danemi wykładnikami określonemi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_s$, lecz powtórzony pewną liczbę razy, t. j. ze spółczynnikiem, który będzie iloczynem następujących liczb: pierwsza równać się będzie liczbie połączeń prostych, jakie można utworzyć z n elementów po α_1 (elementami są tu wielomiany $a_1+a_2+\ldots+a_s$); drugi liczbie połączeń prostych z $n-\alpha_1$ elementów po α_2; trzeci liczbie połączeń prostych, jakie utworzyć można z $n-\alpha_1-\alpha_2$ elementów po α_3 i t. d.; ostatni wreszcie liczbie połączeń prostych, jakie utworzyć można z $n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{s-1}$ elementów po α_s. Będzie zatem:

$$c_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}=\binom{n}{\alpha_1}\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\binom{n-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}\ldots\binom{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{s-1}}{\alpha_s}.$$

Według wzoru (23) w artykule 13 (str. 101) jest:

$$\binom{n}{\alpha_1}\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\binom{n-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}\ldots\binom{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{s-1}}{\alpha_s}=\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_s!};$$

będzie tedy:

$$c_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}=\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_s!}.$$

Wzór (A) przybierze postać:

$$\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!}\,a_1^{\alpha_1}\,a_2^{\alpha_2}\ldots a_s^{\alpha_s},$$

a suma wyrazów tej postaci, t j. wyrażenie

$$\sum\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!}\,a_1^{\alpha_1}\,a_2^{\alpha_2}\ldots a_s^{\alpha_s},$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ przybierają wszelkie możliwe wartości całkowite dodatnie, nie wyłączając zera, których suma równa się n, przedstawia szukane rozwinięcie potęgi $(a_1+a_2+\ldots+a_s)^n$. c. b. d. o.

29. Zadanie. Wyznaczyć największy liczebnie wyraz w rozwinięciu potęgi $(p+q)^n$, w założeniu, że p i q są liczby dodatnie, których suma równa się 1.

Według wzoru (42) mamy:

$$(p+q)^n=p^n+\binom{n}{1}p^{n-1}q+\binom{n}{2}p^{n-2}q^2+\ldots+\binom{n}{m-1}p^{n-m+1}q^{m-1}$$
$$+\binom{n}{m}p^{n-m}q^m+\binom{n}{m+1}p^{n-m-1}q^{m+1}+\ldots+q^n.$$

Rozpatrzmy trzy wyrazy po sobie następujące:

$$\binom{n}{m-1} p^{n-m+1} q^{m-1}, \quad \binom{n}{m} p^{n-m} q^{m}, \quad \binom{n}{m+1} p^{n-m-1} q^{m+1}$$

i oznaczmy je dla krótkości przez

$$u_{m-1}, \quad u_m, \quad u_{m+1}.$$

Będzie:

$$u_{m-1} = \binom{n}{m-1} p^{n-m+1} q^{m-1} = \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} p^{n-m+1} q^{m-1},$$

$$u_m = \binom{n}{m} p^{n-m} q^{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^{n-m} q^{m},$$

$$u_{m+1} = \binom{n}{m+1} p^{n-m-1} q^{m+1} = \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!} p^{n-m-1} q^{m+1}$$

Obliczmy stosunki

$$\frac{u_m}{u_{m-1}}, \quad \frac{u_m}{u_{m+1}};$$

będzie:

$$\frac{u_m}{u_{m-1}} = \frac{(m-1)!\,(n-m+1)!}{m!\,(n-m)!} \frac{q}{p} = \frac{n-m+1}{m} \frac{q}{p},$$

$$\frac{u_m}{u_{m+1}} = \frac{(m+1)!\,(n-m-1)!}{m!\,(n-m)!} \frac{p}{q} = \frac{m+1}{n-m} \frac{p}{q}.$$

Wyraz u_m rozwinięcia będzie wyrazem największym liczebnie, jeżeli będzie większy od wyrazu poprzedzającego u_{m-1} i wyrazu następującego u_{m+1}. A zatem, aby u_m było największe liczebnie, musi być:

$$\frac{u_m}{u_{m-1}} > 1, \quad \frac{u_m}{u_{m+1}} > 1,$$

t. j.

$$\frac{n-m+1}{m} \frac{q}{p} > 1, \quad \frac{m+1}{n-m} \frac{p}{q} > 1.$$

Z tych nierówności, po zniesieniu mianowników, otrzymamy:

$$(n-m+1)\,q > m\,p, \qquad (m+1)\,p > (n-m)\,q$$

lub

$$n\,q + q > m\,(p+q) \qquad m\,(p+q) > n\,q - p.$$

Ponieważ według założenia $p + q = 1$, będzie więc:

$$n\,q + q > m, \qquad m > n\,q - p,$$

t. j.

$$n\,q + q > m > n\,q - p \quad \ldots\ldots \quad (47),$$

a zatem liczba m, dla której u_m ma wartość liczebnie największą, zawiera się między dwiema liczbami $nq+q$ i $nq-p$. Te dwie liczby różnią się o 1, gdyż $nq+q-(nq-p)=q+p=1$, a więc liczba m zawiera się między dwiema liczbami różniącemi się o 1. Jeżeli tedy te dwie liczby nie są całkowite, to nierówność powyższa określa je jednoznacznie. Jeżeli są całkowite, to liczba m może być równa jednej lub drugiej, co znaczy, że w tym przypadku będziemy mieli dwa wyrazy największe, równe sobie. W samej rzeczy, kładąc raz $m=nq-p$, drugi raz $m=nq+q=nq-p+1$, otrzymujemy:

$$u_{nq-p}=\binom{n}{nq-p}p^{n-nq+p}q^{nq-p},$$

$$u_{nq-p+1}=\binom{n}{nq-p+1}p^{n-nq+p-1}q^{nq-p+1}.$$

Stosunek tych dwóch wyrazów, po wykonaniu łatwych obliczeń, będzie równy:

$$\frac{nq-p+1}{n-nq+p}\cdot\frac{p}{q}=\frac{nq+q}{np+p}\cdot\frac{p}{q}=\frac{(n+1)q}{(n+1)p}\cdot\frac{p}{q}=1.$$

Ten wynik stwierdzić możemy na przykładach w art. 25, w którym obliczyliśmy wyrazy rozwinięć potęg $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{12}$, $\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)^{9}$. Mamy tu w przykładzie pierwszym $p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{1}{3}$, $n=12$; nierówność (47) staje się w tym przypadku:

$$12.\frac{1}{3}+\frac{1}{3}>m>12.\frac{1}{3}-\frac{2}{3},$$

t. j.

$$4\frac{1}{3}>m>3\frac{1}{3}.$$

Tej nierówności czyni zadość jedyna liczba $m=4$. Wyraz największy będzie:

$$\frac{12!}{4!\,8!}\left(\frac{2}{3}\right)^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}=\frac{126720}{531441},$$

tak jak otrzymaliśmy go poprzednio.

W przykładzie drugim jest $p=\frac{4}{5}$, $q=\frac{1}{5}$, $n=9$; nierówność (47) staje się w tym przypadku:

$$9.\frac{1}{5}+\frac{1}{5}>m>9.\frac{1}{5}-\frac{4}{5}.$$

Liczby $9 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, $9 \cdot \frac{1}{5} - \frac{4}{5}$ są w tym przypadku równe odpowiednio 2 i 1, będziemy więc mieli dwa wyrazy największe równe:

$$\frac{9!}{2!\,7!}\left(\frac{4}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9!}{1!\,8!}\left(\frac{4}{5}\right)^8 \cdot \frac{1}{5} = \frac{589824}{1953125},$$

jak otrzymaliśmy poprzednio.

Z nierówności (47) możemy wyprowadzić wniosek następujący. Liczba m, dla której wyraz rozwinięcia u_m jest największy, jest mniejsza od liczby $n\,q + q$, a większa od liczby mniejszej od poprzedniej o 1. Jeżeli więc $n\,q + q$ nie jest liczbą całkowitą, to oczywiście m, jako całkowite, równać się musi największej liczbie całkowitej, zawartej w $nq+q$. Możemy więc napisać:

$$m = n\,q + q - \theta \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (48),$$

gdzie θ jest liczbą dodatnią mniejszą od 1. Dzieląc obie strony równości (48) przez n, otrzymamy:

$$\frac{m}{n} = q + \frac{q-\theta}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (49),$$

oraz $$1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n} = 1 - q - \frac{q-\theta}{n},$$

czyli: $$\frac{n-m}{n} = p - \frac{q-\theta}{n} \qquad \ldots\ldots \quad (49').$$

Pomyślmy teraz, że wykładnik n rośnie; wtedy oczywiście i m rośnie, po drugiej zaś stronie wyraz $\frac{q-\theta}{n}$ — którego licznik jest od jedności mniejszy, mianownik zaś rośnie — maleje. Możemy więc powiedzieć: że w miarę wzrastania wykładnika n stosunek $\frac{m}{n}$ zbliżać się będzie coraz bardziej do q, stosunek zaś $\frac{n-m}{n}$ zbliżać się będzie coraz bardziej do p.

30. Własności wyrazów rozwinięcia potęgi $(p+q)^n$, rozważanego w artykule poprzedzającym. Z powodu ważności zadania poprzedzającego dla Rachunku prawdopodobieństwa rozważymy tu niektóre własności wyrazów rozwinięcia potęgi $(p+q)^n$, gdzie p i q są liczby dodatnie, których suma równa się 1.

Wyrazy rozwinięcia potęgi $(p+q)^n$ rosną od początku aż do wyrazu największego, którym zajmowaliśmy się wyżej, poczem znów maleją. Przekonać się atoli można na przykładach i dowieść ogólnie, że stosunek wyrazu następującego do poprzedzającego maleje wciąż od początku do końca rozwinięcia. Istotnie, na przykładzie rozwinięcia $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{12}$, podanym w art. 25, przekonywamy się, że stosunek wyrazu 2-go do 1-go, równy 24576 : 4096, jest większy od stosunku wyrazu 3-go do 2-go, t. j. od 67584 : 24576, ten znów stosunek jest większy od 112640 : 67584, t. j. od stosunku wyrazu czwartego do trzeciego i t. d. Podobnież na przykładzie rozwinięcia potęgi $\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)^{9}$ w tymże artykule 25-ym, widzimy, że

$$589824 : 262144 > 344064 : 589824 > 32256 : 129024 > \ldots$$

Ogólnie dowieść można wyrażonej tu własności rozwinięcia potęgi $(p+q)^n$ w sposób następujący.

Napiszmy trzy kolejne wyrazy:

$$u_{k-1}=\binom{n}{k-1}p^{n-k+1}q^{k-1}, \qquad u_k=\binom{n}{k}p^{n-k}q^k,$$

$$u_{k+1}=\binom{n}{k+1}p^{n-k-1}q^{k+1}.$$

Otrzymujemy:

$$\frac{u_k}{u_{k-1}}=\frac{n-k+1}{k}\,\frac{q}{p}, \quad \frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{n-k}{k+1}\,\frac{q}{p}.$$

Różnica stosunków $\frac{u_{k+1}}{u_k}, \frac{u_k}{u_{k-1}}$ będzie:

$$\frac{u_k}{u_{k-1}}-\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{q}{p}\left(\frac{n-k+1}{k}-\frac{n-k}{k+1}\right)=\frac{q}{p}\cdot\frac{n+1}{k(k+1)}.$$

Ponieważ strona druga tej równości jest dodatnia dla wszelkiego k całkowitego dodatniego, będzie zatem:

$$\frac{u_k}{u_{k-1}}>\frac{u_{k+1}}{u_k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50),$$

co było do okazania.

Będzie na tej samej zasadzie:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}>\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}, \qquad \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}>\frac{u_{k+3}}{u_{k+2}} \text{ i t. d.},$$

skąd w ogólności:

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} > \frac{u_{k+\nu}}{u_{k+\nu-1}},$$

gdzie $\nu = 1, 2, \ldots$

Kładąc tu $k + \nu - 1 = \sigma$, $k - 1 = \rho$, otrzymujemy:

$$\frac{u_{\rho+1}}{u_\rho} > \frac{u_{\sigma+1}}{u_\sigma},$$

lub też:

$$\frac{u_\sigma}{u_\rho} > \frac{u_{\sigma+1}}{u_{\rho+1}} \qquad (\sigma > \rho).$$

Powtarzając rozumowanie wyżej stosowane, znajdziemy:

$$\frac{u_\sigma}{u_\rho} > \frac{u_{\sigma+\nu}}{u_{\rho+\nu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

$(\sigma > \rho, \quad \nu = 1, 2 \ldots)$.

Nierówność (51) możemy napisać także w postaci:

$$\frac{u_{\rho+\nu}}{u_{\sigma+\nu}} > \frac{u_\rho}{u_\sigma}.$$

Zastępując tu po stronie pierwszej $\rho + \nu$ przez ρ, $\sigma + \nu$ przez σ, a więc po stronie drugiej ρ przez $\rho - \nu$, σ przez $\sigma - \nu$, otrzymamy:

$$\frac{u_\rho}{u_\sigma} > \frac{u_{\rho-\nu}}{u_{\sigma-\nu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51')$$

$(\sigma > \rho, \quad \nu = 1, 2 \ldots)$.

31. Obliczenie przybliżone wyrazu największego w zadaniu art. 29. Jeżeli wykładnik n rozwinięcia potęgi $(p + q)^n$ jest liczbą znaczną, możemy obliczać przybliżenie wyraz największy przy pomocy wzoru Stirlinga, o którym była mowa w art. 7.

Wiemy, że skaźnik m największego wyrazu równa się największej liczbie całkowitej, zawartej w $nq + q$. Przy obliczaniu przybliżonem, możemy przyjąć, że $m = nq$, jeżeli nq jest liczbą całkowitą; jeżeli zaś nq nie jest całkowite, wtedy można zamiast nq wziąć najbliższą liczbę całkowitą.

Będzie zatem:

$$u_m = \frac{n!}{(n - nq)!\,(nq)!}\, p^{n-nq}\, q^{nq} = \frac{n!}{(np)!\,(nq)!}\, p^{np}\, q^{nq},$$

gdyż $n - nq = n(1 - q) = np$.

Według wzoru Stirlinga mamy:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

i podobnież:

$$(np)! = (np)^{np+\frac{1}{2}} e^{-np} \sqrt{2\pi},$$

$$(nq)! = (nq)^{nq+\frac{1}{2}} e^{-nq} \sqrt{2\pi}.$$

Wstawiając te wartości, po wykonaniu skróceń i z uwagi, że $p+q=1$, otrzymamy:

$$u_m = \frac{p^{np} q^{nq}}{p^{np+\frac{1}{2}} q^{nq+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi n}},$$

lub inaczej:

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}} \quad \text{. . . . .} \quad (52)$$

Sprawdźmy ten wzór na zadaniu art. 29, w którem $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 12$. Wstawiając te wartości do wzoru (38), otrzymujemy:

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{2.12.\frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{3}\pi}} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi}}.$$

Obliczenie przy pomocy logarytmów daje wynik:

$$u_m = 0{,}2443,$$

gdy bezpośrednie rozwinięcie dało nam wartość:

$$u_m = 0{,}2380.$$

Dla $n = 1200$, przy tych samych wartościach na p i q, otrzymujemy z rozwinięcia potęgi $(p+q)^{1200}$ na wyraz największy wartość:

$$u_m = \frac{1200!}{800!\,400!} \left(\frac{2}{3}\right)^{800} \left(\frac{1}{3}\right)^{400};$$

rachunek przy pomocy logarytmów daje:

$$u_m = 0{,}024424;$$

przy pomocy zaś powyższego wzoru przybliżonego otrzymalibyśmy:

$$u_m = \frac{3}{\sqrt{4800\pi}} = 0{,}024430.$$

Widzimy więc, że dla wartości coraz większych na n stosowanie wzoru Stirlinga prowadzi do wartości przybliżonych na u_m coraz bliższych prawdziwej.

Z wzoru (52) wynika, że dawszy sobie z góry liczbę α dowolnie małą, można znaleść taką wartość na n, aby wyraz największy u_m był mniejszy od α. Dość bowiem przyjąć, że

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}} < \alpha,$$

a otrzymamy stąd:

$$n > \frac{1}{2\pi\alpha^2 p q}.$$

Gdybyśmy naprzykład chcieli, aby przy $p = \frac{3}{5}$, $q = \frac{2}{5}$ wyraz największy u_m był mniejszy od $\alpha = \frac{1}{100}$, otrzymalibyśmy:

$$n > \frac{10000}{2.\pi.\frac{3}{5}.\frac{2}{5}},$$

skąd $n > 6632$. Przy wartościach na n większych od 6632, wyraz największy będzie z pewnością mniejszy od 0,01.

To, co powiedzieliśmy o wyrazie największym, stosuje się do każdego innego wyrazu rozwinięcia potęgi $(p+q)^n$, gdzie p i q są liczby dodatnie, których suma równa się 1. Łatwo bowiem rozumieć, że dla rosnących wartości wykładnika n liczba wyrazów rozwinięcia, równa jak wiadomo $n+1$, rośnie, a ponieważ suma ich pozostaje stale równa 1, przeto każdy z nich zmniejsza się, i można, podobnie jak dla wyrazu największego, obrać n tak wielkie, aby wartość któregokolwiek z wyrazów rozwinięcia była tak mała, jak chcemy.

32. Zadanie. Obliczyć stosunki $\frac{u_{m+k}}{u_m}$, $\frac{u_{m-k}}{u_m}$. Obliczymy stosunki powyższe wyrazów rozwinięcia potęgi $(p+q)^n$ (p i q są liczby dodatnie takie, że $p+q=1$), w których u_m oznacza wyraz o największej wartości liczebnej, u_{m+k} i u_{m-k} wyrazy odległe o k miejsc na prawo i na lewo od wyrazu największego.

Mamy, jak wiadomo:

$$u_m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} p^{n-m} q^m,$$

$$u_{m+k} = \frac{n!}{(n-m-k)!\,(m+k)!} p^{n-m-k} q^{m+k},$$

$$u_{m-k} = \frac{n!}{(n-m+k)!\,(m-k)!} p^{n-m+k} q^{m-k}.$$

Stąd:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_{m+k}}{u_m} &= \frac{(n-m-k+1)(n-m-k+2)\ldots(n-m)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}\left(\frac{q}{p}\right)^k \\ \frac{u_{m-k}}{u_m} &= \frac{(m-k+1)(m-k+2)\ldots m}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-m+k)}\left(\frac{p}{q}\right)^k \end{aligned}\right\} \quad (53).$$

Dla wyrazu o największej wartości liczebnej, jak wykazano w art. 29 (str. 132), m równa się największej liczbie całkowitej, zawartej w liczbie $nq+q$. Połóżmy:

$$p = \frac{a}{a+b}, \quad q = \frac{b}{a+b}, \quad a+b=c$$

i niechaj wykładnik n równa się kc. W tym przypadku będzie:

$$nq+q = kc \, . \, \frac{b}{c} + \frac{b}{c} = kb + \frac{b}{c},$$

Ponieważ $\frac{b}{c} < 1$, przeto największa liczba całkowita, zawarta w $nq+q$, równa się kb; będzie przeto $m = kb$; stąd:

$$n - m = kc - kb = k(c-b) = ka.$$

Kładąc te wartości na $p, q, n, n-m$ po stronach drugich wzorów (53) otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_{m+k}}{u_m} &= \frac{(ka-k+1)(ka-k+2)\ldots ka}{(kb+1)(kb+2)\ldots(kb+k)}\left(\frac{b}{a}\right)^k \\ \frac{u_{m-k}}{u_m} &= \frac{(kb-k+1)(kb-k+2)\ldots kb}{(ka+1)(ka+2)\ldots(ka+k)}\left(\frac{a}{b}\right)^k \end{aligned}\right\} \quad (54).$$

Zważmy, że strona druga pierwszego z wzorów (54) jest iloczynem k czynników postaci:

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{ka-k+s}{kb+s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55),$$

gdzie s zmienia się od $s=1$ do $s=k$; druga zaś strona drugiego z wzorów (54) jest iloczynem k czynników postaci:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{kb-k+s}{ka+s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56),$$

gdzie s zmienia się również od $s=1$ do $s=k$.

Każdy z czynników (55) zawiera się pomiędzy dwiema liczbami:

$$\frac{a-1}{a} \quad \text{i} \quad \frac{b}{b+1}$$

o czem przekonać się można, obliczając różnice:

$$\frac{b}{a}\frac{ka-k+s}{kb+s}-\frac{a-1}{a}=\frac{s(b-a+1)}{a(kb+s)},$$

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{ka-k+s}{kb+s}-\frac{b}{b+1}=-\frac{b}{a}\frac{(k-s)(b-a+1)}{(kb+s)(b+1)},$$

które, jak widzimy, są znaków przeciwnych.

Podobnież każdy z czynników (56) zawiera się pomiędzy dwiema liczbami:

$$\frac{b-1}{b} \text{ i } \frac{a}{a+1},$$

o czem przekonać się można, obliczając różnice:

$$\frac{a}{b}\frac{kb-k+s}{ka+s}-\frac{b-1}{b}=\frac{s(a-b+1)}{b(ka+s)},$$

$$\frac{a}{b}\frac{kb-k+s}{ka+s}-\frac{a}{a+1}=-\frac{a}{b}\frac{(k-s)(a-b+1)}{(a+1)(ka+s)},$$

które są znaków przeciwnych.

33. Ciąg dalszy artykułu poprzedzającego. Wszystkie cztery liczby dodatnie

$$\frac{a-1}{b},\ \frac{b}{b+1},\ \frac{b-1}{b},\ \frac{a}{a+1}$$

są oczywiście mniejsze od jedności, bo w każdej z nich licznik jest mniejszy od mianownika. Niechaj α będzie największa z tych czterech liczb. Na zasadzie własności, dowiedzionej w art. poprzedzającym, każdy z czynników (55) i (56) będzie mniejszy od α.

Wynika stąd, że stosunek $\frac{u_{m+k}}{u_m}$, jako równy iloczynowi k czynników postaci (55), jest mniejszy od α^k; podobnież stosunek $\frac{u_{m-k}}{u_m}$, jako równy iloczynowi k czynników postaci (56), jest również mniejszy od α^k. Będzie zatem, gdy zamiast m położymy $k\,b$:

$$\frac{u_{kb+k}}{u_{kb}} < \alpha^k,\quad \frac{u_{kb-k}}{u_{kb}} < \alpha^k. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57).$$

34. Rozkład rozwinięcia potęgi $(p+q)^n$ na trzy składniki. Rozwinięcie potęgi $(p+q)^n$ złożymy z następujących trzech składników. Pierwszym będzie suma pierwszych $m-k$ wyrazów rozwinięcia od pierwszego wyrazu u_0 aż do wyrazu u_{m-k-1}, znajdującego się na $(k+1)$-em miejscu na lewo od wyrazu u_m o największej wartości liczebnej. Sumę tych $m-k$ wyrazów oznaczmy przez L; będzie więc:

$$L = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{m-k-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58).$$

Drugim składnikiem będzie suma $2k+1$ wyrazów od wyrazu u_{m-k} do wyrazu u_{m+k} włącznie. Sumę tę oznaczmy przez P; będzie więc:

$$P = u_{m-k} + u_{m-k+1} + \ldots + u_m + u_{m+1} + \ldots u_{m+k} \quad . \quad . \quad (59).$$

Jest to zatem suma wyrazu największego i wyrazów równooddalonych o 1, 2, 3,... k miejsc na lewo i na prawo od wyrazu największego.

Trzecim składnikiem wreszcie będzie suma pozostałych wyrazów rozwinięcia, od wyrazu u_{m+k+1} do wyrazu ostatniego u_m włącznie. Oznaczmy tę sumę przez N; będzie zatem:

$$N = u_{m+k+1} + u_{m+k+2} + \ldots + u_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60).$$

Możemy więc napisać:

$$(p+q)^n = L + P + N.$$

Ponieważ $(p+q)^n = 1$, wynika więc stąd:

$$P = 1 - (L + N),$$

gdzie suma $L + N$ jest oczywiście mniejsza od 1. Oznaczając tę sumę przez R, otrzymamy:

$$P = 1 - R; \qquad R < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61).$$

35. Twierdzenie o wielkości R. Wielkość R przy wszelkiej wartości wykładnika n pozostaje, jak okazano wyżej, mniejszą od jedności; teraz dowiedziemy, że pozostaje mniejszą od liczby T, tak dobranej, by była większa od każdego z dwóch stosunków

$$\frac{u_{m+k}}{u_m}, \quad \frac{u_{m-k}}{u_m}.$$

Dowiedziemy tego twierdzenia przy założeniu, jakie uczyniliśmy w zadaniu art. 32, mianowicie, że $n = k\,c$.

Zastosujmy nierówności (51) i (51') art. 30. Jeżeli w pierwszej z nich podstawimy:

$$\sigma = k\,b + k, \qquad \rho = k\,b,$$

w drugiej zaś:

$$\sigma = k\,b, \qquad \rho = k\,b - k,$$

otrzymamy:

$$\frac{u_{kb+k}}{u_{kb}} > \frac{u_{kb+k+\nu}}{u_{kb+\nu}}; \quad \frac{u_{kb-k}}{u_{kb}} > \frac{u_{kb-k-\nu}}{u_{kb-\nu}}.$$

Będzie zatem:

$$u_{kb+k+\nu} < \frac{u_{kb+k}}{u_{kb}} \cdot u_{kb+\nu}; \quad u_{kb-k-\nu} < \frac{u_{kb-k}}{u_{kb}} \cdot u_{kb-\nu} \quad . \quad . \quad . \quad (62).$$

Zmieniajmy w pierwszej nierówności (61) ν od 1 do $ka - k$, w drugiej ν od 1 do $kb - k$; otrzymamy tym sposobem dwa układy nierówności:

$$u_{kb+k+1} < \frac{u_{kb+k}}{u_{kb}} u_{kb+1}; \quad u_{kb-k-1} < \frac{u_{kb-k}}{u_{kb}} u_{kb-1},$$

$$u_{kb+k+2} < \frac{u_{kb+k}}{u_{kb}} u_{kb+2}; \quad u_{kb-k-2} < \frac{u_{kb-k}}{u_{kb}} u_{kb-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$u_n < \frac{u_{kb+1}}{u_{kb}} u_{n-k}; \quad u_0 < \frac{u_{kb-k}}{u_{kb}} u_k.$$

Dodając nierówności każdego z dwu układu stronami odpowiedniemi, znajdziemy:

$$u_{kb+k+1} + \ldots + u_n < \frac{u_{kb+k}}{u_{kb}} (u_{kb+1} + \ldots + u_{n-k}),$$

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{kb-k-1} < \frac{u_{kb-k}}{u_{kb}} (u_k + \ldots + u_{kb-1}).$$

Według wzorów (60) i (58) strona pierwsza pierwszej z tych dwu nierówności jest równa N, strona pierwsza drugiej z tych nierówności jest równa L. Jeżeli jeszcze czynnik przed nawiasem po stronie drugiej w jednej i drugiej nierówności zastąpimy liczbą T, większą od każdego z nich, będzie:

$$N < T(u_{kb+1} + \ldots + u_{n-k}),$$
$$L < T(u_k + \ldots + u_{kb-1}),$$

a po dodaniu:

$$L + N < T(u_k + \ldots + u_{kb-1} + u_{kb+1} + \ldots + u_{n-k}),$$

czyli $$R < T(u_k + \ldots + u_{kb-1} + u_{kb+1} + \ldots + u_{n-k}),$$

Suma w nawiasie po stronie drugiej, jako złożona z pewnej tylko części rozwinięcia potęgi $(p + q)^n$, jest z pewnością mniejsza od 1; będzie zatem ostatecznie:

$$R < T,$$

co było do okazania.

Według nierówności (57) w art. 32 każdy ze stosunków:

$$\frac{u_{kb+k}}{u_{kb}}, \quad \frac{u_{kb-k}}{u_{kb}}$$

jest mniejszy od α^k, gdzie α jest największym z czterech ułamków właściwych:

$$\frac{a-1}{a}=\frac{pn-k}{pn}, \quad \frac{b}{b+1}=\frac{qn}{qn+k}, \quad \frac{b-1}{b}=\frac{qn-k}{qn},$$

$$\frac{a}{a+1}=\frac{pn}{pn+k} \ldots$$

możemy więc za liczbę T przyjąć α^k, i otrzymamy:

$$R < \alpha^k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63).$$

36. Wnioski z ostatniej nierówności. Liczba α jest mniejsza od jedności, stąd α^k przy rosnących wartościach na k maleje i można dobrać k tak wielkie, aby α^k, a więc i R było tak małe, jak chcemy. Ponieważ według uczynionego założenia wykładnik n równa się $k\,c$, więc liczby n i k rosną równocześnie. Możemy zatem też powiedzieć, że dla rosnących wartości wykładnika n wielkość R może być uczyniona tak mała, jak chcemy.

Jeżeli teraz przypomnimy sobie równość (61) w artykule 34, mianowicie:

$$P = 1 - R,$$

w której P oznacza sumę $2\,k+1$ wyrazów rozwinięcia, złożoną z wyrazu u_m o największej wartości liczebnej i $2\,k$ wyrazów odległych o $1, 2, 3, \ldots k$ miejsc na lewo i na prawo od wyrazu u_m, to będziemy mogli wypowiedzieć wniosek następujący:

Dla rosnących wartości wykładnika n równego $k\,c$, gdzie $c=a+b$, $p=\frac{a}{c}$, $q=\frac{b}{c}$, liczba k rośnie, wyrazy zaś rozwinięcia, jak wiemy, maleją, można dobrać takie n, aby suma $2\,k+1$ wyrazów

$$u_{kb-k} + u_{kb-k+1} + \ldots + u_{kb} + u_{kb+1} + \ldots + u_{kb+k} \quad . \quad (64)$$

była tak blizka jedności, jak chcemy.

Dajmy, że z pomiędzy czterech wielkości (61) największą jest $\frac{a}{a+1}$. Kładąc $\frac{a}{a+1}=\alpha$, otrzymamy $R < \left(\frac{a}{a+1}\right)^k$. Jeżeli R ma być mniejsze np. od 0,0001, dość znaleść takie k, aby było:

$$\left(\frac{a}{a+1}\right)^k < \frac{1}{1000},$$

czyli

$$\left(\frac{a+1}{a}\right)^k > 1000.$$

Biorąc logarytmy obu stron, otrzymamy:

$$k\,[\log(a+1) - \log a] > 3,$$

stąd

$$k > \frac{3}{\log(a+1) - \log a}.$$

Jeżeli naprzykład $a = 100$, $b = 100$, $c = 200$, znajdziemy:

$$k > \frac{3}{\log 101 - \log 100} > 690.$$

Stąd $n = kc$ można przyjąć jako równe $690 \,.\, 200 = 138000$.

37. **Rozwinięcie potęgi $(1+x)^n$ w przypadkach, w których n nie jest liczbą całkowitą dodatnią.** Wiadomo z Algebry, że pierwotne pojęcie potęgi n-tej, jako iloczynu n czynników równych, zostało rozszerzone. Potęgę z wykładnikiem ujemnym całkowitym określamy jako odwrotność potęgi z takimże wykładnikiem dodatnim; potęgę z wykładnikiem niecałkowitym wymiernym $\frac{p}{q}$ — jako potęgę p-tą z pierwiastku bezwzględnego stopnia q-tego, potęgę z wykładnikiem niewymiernym — jako granicę potęg o wykładnikach wymiernych, zdążających do danego wykładnika niewymiernego. Powstaje tedy naturalne pytanie, czy do tak uogólnionego pojęcia potęgi $(1+x)^n$ stosować można rozwinięcie, podane we wzorze (41) w art. 25, mianowicie we wzorze

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots\ldots \quad (65),$$

w którym pierwotnie n było liczbą całkowitą dodatnią.

Powiedzieliśmy w art. 11, że opierając się na definicyi spółczynników dwumianowych

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots.m}, \qquad (m \text{ całkowite})$$

można wyznaczać wartości tych spółczynników dla jakiejkolwiek liczby n całkowitej czy ułamkowej, wymiernej czy niewymiernej, dodatniej czy ujemnej, i że zasadnicze własności tych spółczynników, podane w art. 12, utrzymują się bez zmiany. Lecz, gdy w przypadku n całkowitego dodatniego wszystkie spółczynniki $\binom{n}{m}$, dla których $m > n$, są równe zeru, to w przypadkach, w których n nie jest całkowite dodatnie, żaden ze spółczynników dwumianowych nie jest zerem, liczba ich zaś jest nieskończona. Wynika stąd, że rozwinięcie po drugiej stronie we wzorze (65) składać się będzie z nieskończonej liczby wyrazów dla każdego wykładnika n, który nie jest liczbą całkowitą dodatnią, albo, innemi słowy, rozwinięcie po drugiej stronie wzoru (65) staje się, jak się mówi w Analizie, *szeregiem nieskończonym*.

Czy i pod jakiemi zastrzeżeniami szereg nieskończony

$$1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\ldots,$$

zwany *szeregiem dwumianowym*, wyraża, w przypadku n niecałkowitego i dodatniego, potęgę $(1+x)^n$, innemi słowy, pod jakiemi zastrzeżeniami stosować wolno wzór (65)?

Odpowiedź na to pytanie wymaga osobnego badania, które należy do Teoryi szeregów nieskończonych i do Analizy wyższej. Znajdzie je czytelnik w podręcznikach i dziełach, tym przedmiotom poświęconych. My tu, jedynie dla uzupełnienia tego, co w art. 11 powiedziano o spółczynnikach dwumianowych, oraz dla zaokrąglenia podanych wyżej wiadomości z teoryi rozwinięcia potęgi dwumianu, przytaczamy bez dowodu niektóre twierdzenia o szeregu dwumianowym.

Twierdzenia te w zakresie wartości rzeczywistych, nadawanych liczbie x, dają się streścić w sposób następujący:

1. Szereg (65) jest szeregiem zbieżnym w przedziale od -1 do $+1$.

To znaczy, że dla wartości na x, zawartych pomiędzy -1 i $+1$, suma k wyrazów szeregu, od 1-go do k-tego, dąży do granicy oznaczonej i skończonej, gdy k rośnie nieograniczenie.

2. Dla $x=-1$ szereg (65) jest zbieżny tylko wtedy, gdy liczba n jest dodatnia.

3. Dla $x=+1$ szereg (65) jest zbieżny tylko wtedy, gdy $n>-1$, przyczem jest bezwzględnie zbieżny, gdy n jest dodatnie.

Szeregiem bezwzględnie zbieżnym, nazywamy szereg, który nie przestaje być zbieżnym, jeżeli znaki wszystkich zachodzących w nim wyrazów ujemnych zmienimy na dodatnie.

4. Dla wartości dodatnich lub ujemnych większych od 1 szereg (65) jest rozbieżny, t. j. nie posiada sumy skończonej i oznaczonej.

5. *We wszystkich przypadkach, w których szereg (65) jest zbieżny, wyraża on rozwinięcie potęgi* $(1+x)^n$.

Pod zastrzeżeniami zawartemi w powyższych twierdzeniach, możemy tedy przyjąć, że wzór (65) jest ogólny, t. j., że stosuje się do jakichkolwiek wartości wykładnika n.

Jako przykłady stosowania tego wzoru, podamy następujące rozwinięcia, które czytelnik łatwo sam według wzoru ogólnego obliczyć może

Dla wartości x mniejszych od 1 jest:

$$(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\dots$$

$$(1+x)^{-2}=\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\dots$$

$$(1+x)^{-3}=\frac{1}{(1+x)^3}=1-\frac{2.3}{2}x+\frac{3.4}{2}x^2-\frac{4.5}{2}x^3+\dots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^3}{6}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^4}{8}+\dots$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4-\dots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3.6}x^2+\frac{2.5}{3.6.9}x^3-\frac{2.5.8}{3.6.9.12}x^4+\dots$$

$$(1-x)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{1-x}=1-\frac{1}{5}x-\frac{4}{5.10}x^2-\frac{4.9}{5.10.15}x^3-\dots$$

Rozwinięcia te stosowane bywają do przybliżonego obliczania pierwiastków wyższych stopni z liczb.

ROZDZIAŁ III.

Zasady Rachunku prawdopodobieństwa.

A. Uwagi wstępne.

1. Zdarzenia przypadkowe. W życiu codziennem myślimy i mówimy nieraz o prawdopodobieństwie zdarzeń i kierujemy się tem prawdopodobieństwem, oceniając je na podstawie posiadanej wiedzy i doświadczenia życiowego. Ale z prawdopodobieństwem takiem nie wiążemy żadnej określonej wielkości liczbowej. Aby do zdarzeń lub zjawisk módz przywiązać ocenę liczbową i wysnuwać z niej wnioski, musimy, jak to dzieje się w badaniach naukowych, określić ściśle, co rożumieć należy przez prawdopodobieństwo matematyczne i wskazać naturę tych zdarzeń lub układów zdarzeń, do których ono stosowane być może.

Rachunek prawdopodobieństwa — powiedzmy to odrazu — stosuje się do zdarzeń, zwanych przypadkowemi lub losowemi, albo ogólniej trafem lub losem.

Ustalenie definicyi zdarzeń przypadkowych jest rzeczą trudną, dlatego zadowolimy się tu kilkoma przykładami, wyjaśniającemi ich naturę, a raczej znaczenie, w jakiem pojmowane są one w Rachunku prawdopodobieństwa.

Według powszechnie przyjętego poglądu, wszelkie zdarzenia czy zjawiska, zachodzące w przyrodzie i w życiu ludzkiem, uważać należy za wynik współdziałania kompleksu innych zdarzeń lub zjawisk; są one, jak to się zwykło mówić, skutkiem pewnych „przyczyn"; żadne zatem zdarzenie nie jest, ściśle mówiąc, dziełem prostego trafu, t. j. zdarzeniem, nie związanem z innemi zdarzeniami. Ale najczęściej nie jesteśmy w możności wskazania wszystkich czynników, wywołujących dane zdarzenia, nawet przy ograniczeniu się do pewnego obszaru czasu i miejsca. Gdybyśmy te czynniki wskazać umieli jakościowo, to niezawsze znów podołaćbyśmy mogli wyznaczeniu ich ilościowemu, niezbędnemu do otrzymania wyników rachunkowych. Powodzenie takiego wyznaczania ilościowego zależy od doskonałości narzędzi myślowych i stanu naszych wiadomości. W pewnych dziedzinach badań, np. w Fizyce lub Astronomii, badania takie doprowadzone zostały do znacznego udoskonalenia, a metody teoretyczne, obserwacyjne i doświadczalne, w naukach tych stosowane, pozwalają przewidywać zjawiska z wielką dokładnością. Tak np. ostatnie przejście komety Halleya przez jej punkt przysłoneczny mogło być przewidziane dokładnie przez astronomów na podstawie rachunków, opartych na prawie powszechnego ciążenia. Zjawiska astronomiczne w ogólności należą do tej kategoryi, i astronomowie przewidywania swoje co do nich układają w tablice lub efemerydy, których dane stwierdzają obserwacye w czasie późniejszym. Przeciwnie, zjawiska trzęsień Ziemi lub zjawiska meteorologiczne, ze względu na większą ich komplikacyę i niezupełną znajomość wszystkich wywołujących je czynników, nie poddały się dotąd rachunkowi, pozwalającemu na dokładne przewidywania. Np. wielkie trzęsienie Ziemi, które w grudniu 1908 roku dotknęło pobrzeża Sycylijskie i pochłonęło dziesiątki tysięcy ofiar w ludziach, było katastrofą nieprzewidzianą, poczytywaną przez wielu za dzieło przypadku.

Wybitny charakter przypadkowości mają t. zw. gry losowe, mimo pozornej prostoty zachodzących tu zdarzeń. Wyciągnięcie danej karty, np. asa kierowego z talii kart doskonale przetasowanej, uważamy za dzieło przypadku, gdyż nie wiemy, jak ułożyły się karty w talii i jakim wpływom podlega ręka, kierując się ku tej lub owej karcie. Gdy moneta rzucona w górę, padnie na stronę np. „orła“, uważamy również zdarzenie to za przypadkowe, ponieważ nie znamy i wyznaczyć nie możemy działania tych rozmaitych czynników, jak natężenie ruchu ręki, opór i ruch powietrza i t. p., które na zdarzenie to wpływ wywierają. Przypadkowem również jest zdarzenie wyciągnięcia kuli białej z urny, w której pomieszane są kule białe z czarnemi i t. d.

Zobaczymy później, że wielkie grupy zjawisk społecznych, jak urodzenia, zgony, zawierane małżeństwa i t. d., upodobniono do zjawisk przypadkowych, poddano metodom Rachunku prawdopodobieństwa i na tem właśnie polega Statystyka, o której mowa będzie w Rozdziale V-tym. Na tejże podstawie poddano w najnowszych czasach badaniu zbiory przedmiotów przyrodzonych i sztucznych o pewnych cechach wspólnych i utworzono nową gałąź Rachunku mnogości zbiorowych (Kollektiosmasslehre).

Ściśle mówiąc, zdarzenia czysto przypadkowe, zdarzenia trafu lub losu są pewnego rodzaju fikcyą, lub — jeżeli chcemy — abstrakcyą, którą sami wytwarzamy, aby przy jej pomocy módz stosować do zdarzeń przypadkowych rachunek w sposób, który niżej opiszemy. Ta abstrakcya, to idealizowanie zdarzeń przypadkowych jest dla tych celów konieczne, jak konieczną jest idealizacya zjawisk nieprzypadkowych, zjawisk badanych przy pomocy metod fizycznych i astronomicznych. W tych ostatnich odwracamy uwagę od wielu komplikacyj i szczegółów, utrudniających badanie teoretyczne, np. w badaniu zjawisk spadku ciał odwracamy w pierwszem przybliżeniu uwagę od oporu powietrza, od obrotu Ziemi, i wprowadzamy te czynniki dopiero w badaniu późniejszem, szczegółowem. Podobnie w badaniu ilościowem zdarzeń przypadkowych odwracamy uwagę od warunków, zbyt skomplikowanych lub nieznanych, a badamy tylko względną częstość powtarzania się zdarzeń.

Przedmiotem Rachunku prawdopodobieństwa są tedy zdarzenia przypadkowe, uważane abstrakcyjnie z punktu widzenia względnej częstości ich zachodzenia. O tym charakterze Rachunku prawdopodobieństwa pamiętać należy przy stosowaniu jego wyników do zdarzeń konkretnych lub do rzeczywistości, podobnie jak zawsze pamiętać musimy o charakterze idealnym praw fizykalnych przy stosowaniu ich do zjawisk zachodzących w przyrodzie.

2. **Klasy zdarzeń przypadkowych.** Zdarzenia przypadkowe lub losowe, z któremi mamy do czynienia w zagadnieniach Rachunku prawdopodobieństwa, uważamy za należące do pewnej mnogości lub klasy zdarzeń. Zasada, według której zdarzenie na podstawie warunków zadania zaliczamy do danej mnogości, jest w pewnej mierze dowolna, z tem atoli zastrzeżeniem, aby klasa była ściśle określona, t. j. abyśmy o każdem pojedyńczem zdarzeniu mogli powiedzieć stanowczo, czy ono do tej klasy należy, czy nie. Tak np. wyciągnięcie kuli białej z urny, w której znajdują się kule białe i czarne, można uważać za zdarzenie należące do klasy zdarzeń, której elementami są: wyciągnięcie pierwszej kuli białej, wyciągnięcie drugiej kuli białej, wyciągnięcie trzeciej kuli białej i t. d., wyciągnięcie pierwszej kuli czarnej, wyciągnięcie drugiej kuli czarnej i t. d. Możemy też uważać, że klasa składa się z dwu zdarzeń, z których jednem jest wyciągnięcie kuli białej, drugiem wyciągnięcie kuli czarnej. Ale łatwo rozumieć, że zdarzenia drugiej klasy nie są równowarte zdarzeniom pierwszej, albowiem na każdy element klasy drugiej przypada pewna liczba elementów klasy pierwszej, mianowicie wyciągnięcie kuli białej w klasie drugiej równowarte jest tylu elementom klasy pierwszej, ile jest kul białych w urnie, wyciągnięcie zaś kuli czarnej w klasie drugiej równowarte jest tylu elementom klasy pierwszej, ile jest kul czarnych. Przyjmujemy, że wyciągnięcie pojedyńczej kuli białej jest równowarte wyciągnięciu pojedyńczej kuli czarnej, w założeniu, że gdy kule są równej wielkości, doskonale utoczone, dobrze w urnie pomieszane, numer lub kolor kuli nie ma żadnego wpływu na czynność wyciągnięcia. Innemi słowy, w rozważaniu

tem odwracamy uwagę od wszelkich okoliczności, mogących wpłynąć na to, aby ręka wkładana do urny trafiała raczej na jeden numer niż na drugi, na kulę białą raczej niż na czarną lub odwrotnie.

Tworzenie klas i założenia, dotyczące równowartości elementów, stanowią podstawę, na której opiera się stosowanie rachunku. Gdy doświadczenie doprowadza do wyników stale niezgodnych z przewidywaniami rachunku, należy poddać rewizyi założenie co do przyjętej równowartości elementów.

3. Równowartość zdarzeń i prawdopodobieństwo. Definicyi ogólnej równowartości zdarzeń dać nie można; ustanawiamy ją w każdem zagadnieniu wedle jego danych, zgodnie z naszem doświadczeniem i stanem wiedzy. Niechaj np.

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

będzie klasa zdarzeń przypadkowych równowartych. Tę równowartość wyrażamy w Rachunku prawdopodobieństwa, mówiąc, że *prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń wyraża się liczbą* $\frac{1}{n}$.

Z n zdarzeń elementarnych równowartych, należących do klasy (1), pojawić się może albo A_1, albo A_2, albo $A_3, \ldots$, albo wreszcie A_n. To właśnie wyrażamy zapomocą prawdopodobieństwa $\frac{1}{n}$. Tak naprzykład z n kul jednakowych, opatrzonych numerami $1, 2, 3, \ldots, n$, wyciągnąć możemy, sięgnąwszy ręką, albo kulę z numerem 1, albo kulę z numerem 2, albo kulę z numerem $3, \ldots$, albo wreszcie kulę z numerem n. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia jednej kuli, np. kuli opatrzonej numerem 5, jest równe $\frac{1}{n}$.

Prawdopodobieństwo wyrzucenia numeru np. 4 przy rzuceniu kostki sześciennej, której ściany opatrzone są numerami 1, 2, 3, 4, 5, 6, jest równe $\frac{1}{6}$, albowiem wyrzucenia numerów przyjmujemy za klasę zdarzeń równowartych, złożoną z 6 elementów.

Niechaj w urnie będzie 5 kul białych i 3 kule czarne. Niechaj kule białe będą opatrzone numerami 1, 2, 3, 4, 5; kule czarne numerami 6, 7, 8. Uważajmy klasę złożoną z *dwóch* zdarzeń, z których jednem jest wyciągnięcie kuli białej, drugiem wyciągnięcie kuli czarnej. Jeżeli do wyciągnięcia każdej pojedyńczej kuli przywiązujemy, według powyższego, prawdopodobieństwo $\frac{1}{8}$, to do *wyciągnięcia kuli białej* winniśmy przywiązać prawdopodobienstwo $\frac{5}{8}$, ponieważ wyciągnięcie kuli białej jest równowarte wyciągnięciu kuli albo z numerem 1, albo z numerem 2, . . . , albo z numerem 5. Do wyciągnięcia kuli czarnej przywiązujemy prawdopodobieństwo $\frac{3}{8}$, ponieważ wyciągnięcie kuli czarnej jest równowarte wyciągnięciu kuli opatrzonej albo numerem 6, albo numerem 7, albo numerem 8.

Rzucamy monetę dwa razy kolejno do góry. Moneta spada na stronę „orła" lub na stronę „reszki". Pytamy, jakie prawdopodobieństwo przywiązać należy do zdarzenia takiego, że moneta padnie przynajmniej raz jeden na stronę „orła".

Oznaczmy jednę stronę monety przez O, drugą stronę przez R. Zdarzenie, o którem mowa, należy do klasy następujących czterech zdarzeń, które tak przedstawić możemy:

$$O\,O, \quad O\,R, \quad R\,O, \quad R\,R.$$

Przy dwóch jakichkolwiek kolejnych rzutach ukazać się musi jedno z tych ugrupowań, innych zaś być nie może; wszystkie te ugrupowania uważać należy za równowarte i do każdego z nich możemy przywiązać prawdopodobieństwo $\frac{1}{4}$. Ponieważ O występuje w trzech pierwszych z tych ugrupowań, więc do zdarzenia, w którem w dwu rzutach moneta przynajmniej raz jeden pada na O, przywiązujemy prawdopodobieństwo $\frac{3}{4}$.

Z wyjaśnień powyższych wnieść już można ogólnie, że dla wyznaczenia prawdopodobieństwa przynależnego zdarzeniu, należy: 1-o) utworzyć odpowiednią klasę zdarzeń, złożoną z n ugrupowań równowartych i wyczerpujących wszelkie możliwe ugrupowania, wynikające z warunków zagadnienia; 2-o) wyznaczyć w ilu m z tych n ugrupowań występuje zdarzenie dane; 3-o) wyznaczyć stosunek liczby m do liczby n.

W kilku zadaniach kombinatoryjnych, podanych w Rozdziale poprzedzającym, mianowicie w art. 17, 19, 24 przeprowadzaliśmy już rachunek według tej metody, jakkolwiek nie stosowaliśmy jeszcze wyraźnie samego pojęcia i terminu prawdopodobieństwa. Po wprowadzeniu tego terminu, zadanie rozważone w art. 17 (str. 107) brzmieć będzie jak następuje: „W urnie znajduje się a kul białych, b kul czarnych, c kul czerwonych. Ciągniemy z urny $\alpha + \beta + \gamma$ razy po jednej kuli, wkładając po każdem ciągnieniu wyciągniętą kulę napowrót do urny i mieszając kule w urnie przed każdem następnem ciągnieniem. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, w którem w pierwszych α ciągnieniach wylosowujemy same kule białe, w następnych β ciągnieniach same kule czarne, wreszcie w ostanich γ ciągnieniach same kule czerwone". Jako odpowiedź otrzymujemy (str. 109), że szukane prawdopodobieństwo równa się stosunkowi

$$\frac{a^\alpha a^\beta c^\gamma}{(a+b+c)^{\alpha+\beta+\gamma}},$$

gdzie mianownik wyraża liczbę ugrupowań równowartych i wyczerpujących wszelkie możliwe ugrupowania zgodne z warunkami zadania, licznik zaś liczbę tych ugrupowań, w których występuje zdarzenie, złożone z kolejnego wyciągnięcia α kul białych, β kul czarnych, γ kul czerwonych.

Zadanie w art. 19 (str. 112) możemy wysłowić w ten sposób: „W urnie znajduje się a kul białych i b kul czarnych. Wyjmujemy z urny odrazu lub po kolei r ($\leqslant a$) kul, nie wkładając ich napowrót do urny. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wszystkie wyciągnięte kule będą białe".

Jako odpowiedź otrzymujemy, że szukane prawdopodobieństwo równa się:

$$\frac{c_{a,\,r}}{c_{a+b,\,r}} = \frac{a(a-1)\ldots(a-r+1)}{(a+b)\ldots(a+b-r+1)},$$

gdzie mianownik $c_{a+b,\,r}$ po stronie lewej wyraża liczbę ugrupowań równowartych i wyczerpujących wszelkie możliwe ugrupowania zgodne z warunkami zadania, licznik zaś $c_{a,\,r}$ liczbę tych ugrupowań, w których występuje zdarzenie wyciągnięcia r kul białych.

Zadanie w art. 24 (str. 121) możemy wyrazić w ten sposób: „W kubku niechaj będą cztery zupełnie równe kostki sześcienne, mające na ściankach numery czyli oczka 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wyrzucamy te kostki z kubka na stół. Zapytujemy, jakie będzie prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma oczek na ściankach wierzchnich tych kostek będzie równa 10".

Jako odpowiedź otrzymujemy liczbę $\frac{80}{1296}\left(=\frac{5}{81}\right)$, gdzie mianownik 1296 wyraża liczbę wszystkich równowartych ugrupowań, jakie mogą ujawnić się przy wyrzucaniu kostek, licznik zaś liczbę tych ugrupowań, w których suma oczek na ściankach wierzchnich jest równa 10.

Drugie zadanie w tymże art. 24 (str. 122) daje nam prawdopodobieństwo zdarzenia, by suma oczek na ściankach wierzchnich była niewiększa od 10.

Po tych uwagach przedwstępnych możemy już przystąpić do ustalenia definicyi prawdopodobieństwa matematycznego i wysnucia wypływających z definicyi tej twierdzeń i wniosków.

B. Określenie prawdopodobieństwa matematycznego. Prawdopodobieństwo bezwzględne i względne. Dodawanie i mnożenie prawdopodobieństw.

1. Definicya prawdopodobieństwa matematycznego. Zwykle dawana bywa następująca definicya prawdopodobieństwa:

Prawdopodobieństwem matematycznem zdarzenia nazywamy stosunek liczby przypadków sprzyjających temu zdarzeniu do liczby wszystkich przypadków możliwych, w założeniu, że przypadki te są równoprawdopodobne.

W tem wysłowieniu przez wszystkie przypadki możliwe rozumieć należy wszystkie możliwe ugrupowania, stanowiące klasę zdarzeń, które na podstawie danych zagadnienia tworzymy dla rozważanego zdarzenia; przez przypadki sprzyjające rozumieć należy te ugrupowania utworzonej klasy, w których występuje rozważane zdarzenie; wreszcie termin równoprawdopodobny lub inaczej równomożliwy oznacza to samo, co stosowany poprzednio termin równowarty.

Widzimy stąd, że definicya powyższa jest tylko odmiennem co do słów, lecz identycznem co do treści, wyrażeniem pojęcia, które wyjaśniliśmy w Uwagach wstępnych.

Jeżeli liczbę wszystkich możliwych przypadków oznaczymy przez n, liczbę przypadków sprzyjających zdarzeniu przez m, prawdopodobieństwo matematyczne zdarzenia danego A wyrazi się w ten sposób:

$$p\,(\mathrm{A}) = \frac{m}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Jeżeli liczba przypadków sprzyjających zdarzeniu jest m, to liczba pozostałych przypadków, nie sprzyjających zdarzeniu, a które nazywać można „sprzyjającemi zdarzeniu przeciwnemu", t. j. zdarzeniu nie pojawienia się A, lub pojawieniu się zdarzenia nie-A, będzie $n - m$. Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego będzie tedy:

$$p\,(\text{nie-A}) = \frac{n-m}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Dodając do siebie te równości (1) i (2), otrzymamy:

$$p\,(\mathrm{A}) + p\,(\text{nie-A}) = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

t. j. suma prawdopodobieństw dwu zdarzeń przeciwnych jest równa 1.

Jeżeli np. w urnie znajdują się kule białe i kule czarne i jeżeli przez A oznaczymy wyciągnięcie z urny kuli białej, to zdarzeniem nie-A będzie wyciągnięcie z urny kuli czarnej. Suma tych dwóch prawdopodobieństw jest równa 1.

Z definicyi prawdopodobieństwa matematycznego wynika, że liczba wyrażająca to prawdopodobieństwo jest ułamkiem właściwym, t. j. liczbą zawartą pomiędzy 0 i 1. Wartość krańcową 1 moglibyśmy otrzymać wtedy, gdy $m = n$, t. j. gdy wszystkie przypadki sprzyjają zdarzeniu; np. gdy wiemy, że wszystkie kule w urnie są białe, wyciągnięciu kuli białej sprzyjają wszystkie przypadki. W tym razie zdarzenie jest pewne, nie zaś prawdopodobne; można 1 uważać za symbol pewności. Podobnie przypadek, w którym $m = 0$, t. j. gdy niema przypadków sprzyjających zdarzeniu, prowadzi do wartości stosunku $\frac{m}{n}$, równej zeru. Zdarzenie jest niemożliwe. I tak wyciągnięcie kuli białej z urny, w której wszystkie kule są czarne, jest zdarzeniem niemożliwem; 0 uważać można za symbol niemożliwości.

Z równania (3) otrzymujemy:

$$p\,(\text{nie-A}) = 1 - p\,(\text{A}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3').$$

Przy pomocy tego wzoru obliczyć można prawdopodobieństwo zdarzenia A, odejmując od 1 prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego. Bywają zadania, w których, jak to niżej zobaczymy, obliczanie prawdopodobieństwa na tej drodze jest łatwiejsze niż obliczanie bezpośrednie.

Równanie (3) uważać należy jako zawarte w równaniu ogólniejszem:

$$p\,(\text{A}_1) + p\,(\text{A}_2) + \ldots + p\,(\text{A}_k) = 1 \quad . \; . \; . \; . \; (4),$$

gdzie $\text{A}_1, \text{A}_2, \ldots, \text{A}_k$ są zdarzenia wyłączające się wzajemnie (t. j., że nastąpienie jednego z nich czyni niemożliwem równoczesne nastąpienie innych) i wyczerpujące wszystkie możliwości, odpowiadające warunkom danego zadania. Jeżeli bowiem m_1 jest liczba przypadków sprzyjających zdarzeniu A_1, m_2 liczba przypadków sprzyjających zdarzeniu A_2 i t. d. m_k liczba przypadków sprzyjających zdarzeniu A_k, będzie:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n,$$

gdzie n jest liczba wszystkich przypadków możliwych. Według definicyi jest:

$$p(\text{A}_1) = \frac{m}{n},\; p(\text{A}_2) = \frac{m_2}{n}, \ldots p(\text{A}_k) = \frac{m_k}{n};$$

stąd:

$$p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_k)=\frac{m_1+m_2+\ldots+m_k}{n}=\frac{n}{n}=1,$$

jak wyżej.

Tak np. jeżeli w urnie mamy 5 kul białych, 3 kule czarne, 2 kule czerwone, wyciągnięciu kuli białej odpowiada prawdopodobieństwo $\frac{5}{10}$, wyciągnięciu kuli czarnej prawdopodobieństwo $\frac{3}{10}$, wyciągnięciu kuli czerwonej prawdopodobieństwo $\frac{2}{10}$, i będzie:

$$\frac{5}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{10}=\frac{10}{10}=1.$$

5. Dodawanie prawdopodobieństw. Prawdopodobieństwo całkowite. W powyższych równościach (3) i (4) mieliśmy już do czynienia z dodawaniem prawdopodobieństw, których suma równa się 1. Jest to przypadek szczególny ogólniejszego twierdzenia o dodawaniu prawdopodobieństw, które teraz podamy. Zacznijmy od przykładu.

Niechaj w urnie będzie a kul białych, b kul czarnych, c kul czerwonych. Wiemy, że prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej jest:

$$\frac{a}{a+b+c},$$

wyciągnięcia kuli czarnej jest:

$$\frac{b}{a+b+c},$$

wyciągnięcia kuli czerwonej:

$$\frac{c}{a+b+c}.$$

Zapytajmy, jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na wyciągnięciu kuli białej albo czarnej. Ponieważ kul białych i czarnych jest razem $a+b$, więc prawdopodobieństwo to będzie:

$$\frac{a+b}{a+b+c}=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}.$$

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej albo czerwonej będzie:

$$\frac{a+c}{a+b+c}=\frac{a}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}.$$

Prawdopodobieństwo wreszcie wyciągnięcia kuli czarnej albo czerwonej będzie:

$$\frac{b+c}{a+b+c} = \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c}.$$

Widzimy tedy, że prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej albo czarnej jest sumą prawdopodobieństw wyciągnięcia kuli białej i kuli czarnej, prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej albo czerwonej jest sumą prawdopodobieństw wyciągnięcia kuli białej i czerwonej i t. d.

Rozpatrzmy teraz rzecz ogólniej. Jeżeli dane zdarzenie A ujawnić się może k rozmaitemi i wzajemnie wyłączającemi się się sposobami, np. jako zdarzenie A_1, albo jako zdarzenie $A_2, \ldots$, albo jako zdarzenie A_k, wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia A jest sumą prawdopodobieństw zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_k$, co możemy napisać tak:

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_k) \quad \ldots \quad (5).$$

W samej rzeczy, niechaj liczba wszystkich przypadków możliwych klasy zdarzeń, do której należy A, będzie równa n. Niechaj z pomiędzy tych n przypadków będzie m sprzyjających zdarzeniu A, m_1 sprzyjających zdarzeniu A_1, m_2 sprzyjających zdarzeniu A_2 i t. d., m_k sprzyjających zdarzeniu A_k. Będzie tedy:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m,$$

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

$$p(A_1) = \frac{m_1}{n}, \qquad p(A_2) = \frac{m_2}{n}, \ldots, p(A_k) = \frac{m_k}{n}.$$

Otrzymujemy stąd:

$$p(A) = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \ldots + \frac{m_k}{n},$$

czyli:

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_k),$$

jak wyżej.

Twierdzenie to, zwane twierdzeniem o dodawaniu prawdopodobieństw lub twierdzeniem o prawdopodobieństwie całkowitem, możemy wysłowić w sposób następujący:

Jeżeli zdarzenie może ujawnić się rozmaitemi wzajemnie wyłączającemi się sposobami, to jego prawdopodobieństwo równa się sumie prawdopodobieństw odpowiadających każdemu z tych sposobów.

Wzór (4) w art. poprzedzającym jest tego twierdzenia szczególnym przypadkiem, w którym zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ wyczerpują całą klasę zdarzeń i dają sumę prawdopodobieństw równą 1. We wzorze (5) suma wyrazów po stronie drugiej jest oczywiście mniejsza od 1.

6. Prawdopodobieństwo względne. Niechaj będzie urna, zawierająca 5 kul białych, opatrzonych numerami 1, 2, 3, 4, 5; 3 kule czarne, opatrzone numerami 1, 2, 3; 2 kule czerwone, opatrzone numerami 1, 2. Wiemy, że prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej jest:

$$\frac{5}{5+3+2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},$$

wyciągnięcia kuli czarnej:

$$\frac{3}{5+3+2} = \frac{3}{10},$$

wyciągnięcia kuli czerwonej:

$$\frac{2}{5+3+2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},$$

i że suma tych trzech prawdopodobieństw równa się 1.

Postawmy teraz pytanie następujące: Z urny wyciągnięto kulę białą; jakie jest prawdopodobieństwo, że ta kula jest opatrzona Nr. 1.

Ponieważ kul białych jest 5, a pomiędzy niemi opatrzonych Nr. 1 tylko jedna, więc prawdopodobieństwo szukane równa się $\frac{1}{5}$.

Zapytajmy teraz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięta z urny kula opatrzona Nr. 1 jest kulą białą. Ponieważ kul opatrzonych Nr. 1 jest trzy, a pomiędzy niemi jedna tylko biała, więc prawdopodobieństwo szukane równa się $\frac{1}{3}$.

Przy wyznaczaniu ostatnich dwóch prawdopodobieństw nie liczyliśmy już wszystkich przypadków możliwych i wszystkich sprzyjających zdarzeniom, jak przy wyznaczaniu prawdopodobieństw poprzednich, lecz tylko te przypadki, które z tamtych pozostają, jeżeli przyjmiemy, że kula jest biała, albo, że jest opatrzona Nr. 1.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A, wyznaczone w założeniu, że inne zdarzenie B zostało urzeczywistnione, nazywamy *prawdopodobieństwem względnem* i oznaczamy symbolem $p_B(A)$.

Tak więc w przykładzie powyższym prawdopodobieństwa $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{3}$ są prawdopodobieństwami względnemi, pierwsze z warunkiem, że kula wyciągnięta jest biała, drugie z warunkiem, że kula wyciągnięta jest opatrzona Nr. 1.

Aby wyznaczyć prawdopodobieństwo względne $p_B(A)$, należy z pomiędzy wszystkich przypadków możliwych i sprzyjających zdarzeniu A zatrzymać te tylko, przy których urzeczywistnia się zdarzenie B.

Prawdopodobieństwo $p(A)$, otrzymane na mocy definicyi w art. 4, w przeciwstawieniu do prawdopodobieństwa względnego, nazywamy pradopodobieństwem bezwględnem.

Jeżeli przez nie-B oznaczymy zdarzenie przeciwne zdarzeniu B, to zgodnie z powyższem znakowaniem $p_{\text{nie-B}}(A)$ oznaczać będzie prawdopodobieństwo względne zdarzenia A w założeniu, że urzeczywistniło się zdarzenie nie-B, lub inaczej, że nie zaszło zdarzenie B.

Te dwa prawdopodobieństwa względne $p_B(A)$ i $p_{\text{nie-B}}(A)$ mogą być równe lub nierówne.

Jeżeli są równe, t. j. jeżeli

$$p_B(A) = p_{\text{nie-B}}(A) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

znaczy to, że prawdopodobieństwo zdarzenia A jest, właściwie mówiąc, niezależne od tego, czy urzeczywistnia się lub nie urzeczywistnia zdarzenie *B*. Takie dwa zdarzenia, których prawdopodobieństwa czynią zadość związkowi (6), Rachunek prawdopodobieństwa nazywa zdarzeniami niezależnemi. Takie zaś dwa zdarzenia, dla których powyższe dwa prawdopodobieństwa nie są równe, t. j. dla których

$$p_B(A) \neq p_{\text{nie-B}}(A),$$

nazywają się zdarzeniami zależnemi. Przypadkiem szczególnym zdarzeń zależnych są zdarzenia wyłączające się, t. j. zależne od siebie w ten sposób, że gdy zachodzi jedno, drugie równocześnie zachodzić nie może.

7. Prawdopodobieństwo złożone. Mnożenie prawdopodobieństw. Jeżeli zdarzenie polega na równoczesnem lub kolejnem zachodzeniu innych zdarzeń, wtedy nazywamy je zdarzeniem złożonem, a prawdopodobieństwo mu przynależne—prawdopodobieństwem złożonem.

Jak wyznaczyć prawdopodobieństwo złożone, mając prawdopodobieństwa składających je zdarzeń pojedyńczych?

Niechaj będą zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ o prawdopodobieństwach $p(A_1), p(A_2), \ldots, p(A_k)$. Zdarzenie, złożone z tych pojedyńczych zdarzeń, oznaczmy przez $A_1 A_2 \ldots A_k$. Mamy wyznaczyć prawdopodobieństwo $p(A_1 A_2 \ldots A_k)$.

Dajmy najprzód, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są niezależne, (t. j. którekolwiek dwa z pomiędzy nich są niezależne i każde i-te niezależne od zejścia się jakiejkolwiek grupy $i-1$ zdarzeń z pomiędzy pozostałych). Niechaj liczba przypadków możliwych, stanowiących klasę odpowiadającą zdarzeniu A_1, będzie n_1 a liczba przypadków sprzyjających temu zdarzeniu niechaj będzie m_1; podobnież niechaj, n_2, m_2 będą odpowiednie liczby przypadków dla zdarzenia A_2 i t. d., wreszcie niechaj n_k, m_k będą odpowiednie liczby dla zdarzenia A_k. Liczbę wszystkich przypadków możliwych, odnoszących się do zdarzenia $A_1 A_2 \ldots A_k$, otrzymamy, łącząc każdy z przypadków możliwych, odnoszących się do zdarzenia pierwszego, z każdym z przypadków możliwych, odnoszących się do zdarzenia drugiego i t. d.; liczba ta będzie równa, oczywiście, iloczynowi $n_1 n_2 \ldots n_k$. Podobnież liczba przypadków, sprzyjających zdarzeniu $A_1 A_2 \ldots A_k$, będzie równa $m_1 m_2 \ldots m_k$. Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia $A_1 A_2 \ldots A_k$ będzie, według definicyi:

$$p(A_1 A_2 \ldots A_k) = \frac{m_1 m_2 \ldots m_k}{n_1 n_2 \ldots n_k} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} \cdots \frac{m_k}{n_k}.$$

Otrzymujemy tedy:

$$p(A_1 A_2 \ldots A_k) = p(A_1) \cdot p(A_2) \ldots\ldots p(A_k) \quad \ldots \quad (12).$$

Wzór ten możemy wyrazić następującem twierdzeniem:

Prawdopodobieństwo zejścia się k zdarzeń niezależnych równa się iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń.

W przypadku, gdy zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nie są niezależne, mianowicie, gdy zdarzenie A_2 zajść może w założeniu urzeczywistnienia się zdarzenia A_1, zdarzenie A_3 zajść może w założeniu urzeczywistnienia się zdarzeń A_1 i A_2 i t. d., wreszcie zdarzenie A_k zajść może w założeniu urzeczywistnienia się zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$, należy po stronie drugiej wzoru (12), począwszy od drugiego czynnika, prawdopodobieństwa bezwględne zastąpić względnemi. Będzie mianowicie:

$$p(A_1 A_2 \ldots A_k) = p(A_1) \cdot p_{A_1}(A_2) \cdot p_{A_1 A_2}(A_3) \ldots\ldots p_{A_1 A_2 \ldots A_{k-1}}(A_k) \quad (12').$$

Wzór ten udowodnimy dla przypadku dwu zdarzeń A_1, A_2; dowód w przypadku ilukolwiek jest zupełnie analogiczny i nie przedstawia trudności. Niechaj będą tedy dwa zdarzenia A_1, A_2, z których drugie zajść może w założeniu urzeczywistnienia się pierwszego. Niechaj n_1, m_1 będą liczby przypadków możliwych i przypadków sprzyjających, odnoszących się do zdarzenia A_1; $n_2^{(1)}$, $m_2^{(1)}$ liczby przypadków możliwych i przypadków sprzyjających, odnoszących się do drugiego zdarzenia, w założeniu, że urzeczywistniło się zdarzenie A_1. Wtedy liczba przypadków możliwych, odnoszących się do zdarzenia $A_1 A_2$, będzie oczywiście $n_1 n_2^{(1)}$, liczba przypadków sprzyjających temu zdarzeniu będzie $m_1 m_2^{(1)}$; otrzymamy więc:

$$p(A_1 A_2) = \frac{m_1 m_2^{(1)}}{n_1 n_2^{(1)}} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2^{(1)}}{n_2^{(1)}}.$$

Lecz: $$\frac{m_1}{n_1} = p(A_1), \quad \frac{m_2^{(1)}}{n_2^{(1)}} = p_{A_1}(A_2);$$

będzie tedy:

$$p(A_1 A_2) = p(A_1) \cdot p_{A_1}(A_2).$$

Można więc powiedzieć:

P r a w d o p o d o b i e ń s t w o z e j ś c i a s i ę k z d a r z e ń z a l e ż n y c h, z k t ó r y c h k a ż d e n a s t ę p n e z a c h o d z i w z a ł o ż e n i u u r z e c z y w i s t n i e n i a s i ę z d a r z e ń p o p r z e d z a j ą c y c h, r ó w n a s i ę i l o c z y n o w i p r a w d o p o d o b i e ń s t w a z d a r z e n i a p i e r w s z e g o p r z e z o d p o w i e d n i e p r a w d o p o d o b i e ń s t w a w z g l ę d n e z d a r z e ń n a s t ę p n y c h.

Powyższe dwa twierdzenia, z których drugie, jako ogólniejsze, obejmuje w sobie pierwsze, oraz odpowiadające im wzory (12) i (12') stanowią t. zw. t w i e r d z e n i e o p r a w d o p o d o b i e ń s t w i e z ł o ż o n e m lub o m n o ż e n i u p r a w d o p o d o b i e ń s t w.

Z twierdzenia tego wynika, że prawdopodobieństwo k-krotnego powtórzenia się jednego i tego samego zdarzenia równa się k-tej potędze prawdopodobieństwa zdarzenia pojedyńczego. Dość bowiem założyć we wzorze (12) $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$, a otrzymamy:

$$p(A^k) = [p(A)]^k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12'');$$

A^k oznacza tu symbolicznie k-krotne powtórzenie zdarzenia A.

8. **Zadania.** Podamy tu rozwiązanie pewnej liczby zadań, aby pokazać, w jaki sposób stosować należy teoryę, podaną w artykułach poprzedzających.

1. Wyznaczyć prawdopodobieństwo trzykrotnego wyrzucenia „orła" przy rzucaniu monety.

Prawdopodobieństwo wyrzucenia raz jeden „orła" równa się $\frac{1}{2}$; trzy kolejne po sobie wyrzucenia są zdarzeniami niezależnemi; stosując przeto twierdzenie podane na końcu poprzedniego artykułu, znajdziemy, że szukane prawdopodobieństwo równa się:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, polegającego na tem, że w trzech rzutach nie wyrzucimy ani razu „orła", wynosi:

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875 .$$

To drugie prawdopodobieństwo jest 7 razy większe od pierwszego, co możnaby wyrazić w ten sposób (patrz Rozdział następny o grach losowych): można postawić 7 złotych przeciwko 1 złotemu, że „orzeł" nie będzie wyrzucony w trzech kolejnych rzutach monety.

2. W urnie znajduje się 8 kul białych i 5 kul czarnych. Wyciągamy z urny jednę kulę i nie wkładamy jej napowrót do urny, poczem wyciągamy znów jednę kulę. Jak wielkie jest przed obu losowaniami prawdopodobieństwo, że w drugiem ciągnieniu wylosowana będzie kula biała?

Aby rozwiązać to zadanie, zauważmy, że kula wyciągnięta w pierwszem ciągnieniu może być albo biała albo czarna. Wyciągnięciu kuli białej odpowiada prawdopodobieństwo $\frac{8}{8+5} = \frac{8}{13}$, wyciągnięciu kuli czarnej prawdopodobieństwo $\frac{5}{8+5} = \frac{5}{13}$. W drugiem ciągnieniu mamy już kul 12, a mianowicie 7 białych i 5 czarnych, jeżeli wyciągnięta poprzednio kula była biała, lub też 8 białych i 4 czarne, jeżeli wyciągnięta poprzednio kula była czarna. Prawdopodobieństwo zatem wyciągnięcia kuli białej byłoby w drugiem ciągnieniu $\frac{7}{12}$ albo $\frac{8}{12}$. Aby otrzymać odpowiedź na postawione pytanie, należy prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej uważać jako sumę dwu prawdopodobieństw (prawdopodobieństwo zupełne), z których jednem jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej, w założeniu, że pierwsza wyciągnięta kula była biała, drugiem zaś jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej, w założeniu, że pierwsza wyciągnięta kula była czarna. Pierwsze z tych dwu prawdopodobieństw jest prawdopodobieństwem złożonem, równem iloczynowi $\frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12}$, drugie jest prawdopodobieństwem złożonem, równem iloczynowi $\frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12}$. Otrzymamy więc jako odpowiedź:

$$\frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} + \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} = \frac{8 . (7+5)}{13 . 12} = \frac{8}{13},$$

t. j. liczbę równą prawdopodobieństwu wyciągnięcia kuli białej w pierwszem ciągnieniu.

Ogólnie: jeżeli w urnie było a kul białych i b kul czarnych, to prawdopodobieństwo przed rozpoczęciem ciągnień, że wyciągnięta w drugiem ciągnieniu kula jest biała, równa się

$$\frac{a}{a+b}.$$

3. W jednej urnie znajduje się a kul białych i b kul czarnych; w drugiej znajduje się c kul białych i d kul czarnych. Wyciągamy z jednej z urn kulę. Jak wielkie jest prawdopodobieństwo, że ta kula jest biała?

Prawdopodobieństwo sięgnięcia ręką do pierwszej urny wynosi $\frac{1}{2}$, prawdopodobieństwo wyciągnięcia z niej kuli białej wynosi $\frac{a}{a+b}$, prawdopodobieństwo zejścia się tych zdarzeń będzie zatem, według twierdzenia o prawdopodobieństwie złożonem, równe

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a+b}.$$

Podobnież prawdopodobieństwo sięgnięcia ręką do drugiej urny i wyciągnięcia z niej kuli białej będzie

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{c+d}.$$

Szukane prawdopodobieństwo będzie sumą tych dwu prawdopodobieństw, t. j. będzie równe

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}\right).$$

4. W loteryjce, złożonej z 90 numerów, losujemy po kolei 5 razy po jednym numerze. Jak wielkie jest prawdopodobieństwo, że w tych pięciu ciągnieniach wylosowany zostanie numer, naprzód oznaczony?

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia oznaczonego numeru w pierwszem ciągnieniu wynosi oczywiście $\frac{1}{90}$. Prawdopodobieństwo przeciwne, t. j. prawdopodobieństwo niewylosowania tego numeru wynosi $1 - \frac{1}{90} = \frac{89}{90}$.

W drugiem ciągnieniu, po wylosowaniu jednego numeru, pozostaje numerów 89. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia oznaczonego numeru w tem drugiem ciągnieniu wynosiłoby $\frac{1}{89}$, prawdopodobieństwo przeciwne $\frac{88}{89}$. Ale, przed rozpoczęciem gry, prawdopodobieństwo, że w drugiem ciągnieniu wylosowany będzie numer oznaczony, jest prawdopodobieństwem złożonem zejścia się dwu zdarzeń, mianowicie niewylosowania tego numeru w pierwszem ciągnieniu i wylosowania go w drugiem; prawdopodobieństwo to równa się zatem $\frac{89}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{90}$.

Przejdźmy teraz do trzeciego ciągnienia, w którem mamy już tylko 88 numerów, prawdopodobieństwo zaś wyciągnięcia któregokolwiek z nich wynosi $\frac{1}{88}$. Ale, przed rozpoczęciem gry, prawdopodobieństwo, że numer oznaczony wylosowany będzie w trzeciem ciągnieniu, jest prawdopodobieństwem złożonem zejścia się trzech zdarzeń: niewylosowania tego numeru w pierwszem ciągnieniu, niewylosowania go w drugiem, wreszcie wylosowania go w trzeciem. Na zasadzie przeto twierdzenia o prawdopodobieństwie złożonem, należy utworzyć iloczyn trzech prawdopodobieństw powyższych zdarzeń pojedyńczych i otrzymamy:

$$\frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{1}{88} = \frac{1}{90}.$$

Rozumując w ten sposób dalej, znajdziemy, że szukane prawdopodobieństwo wyciągnięcia oznaczonego numeru w pięciu ciągnieniach równa się

$$\frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} + \frac{1}{90} = \frac{1}{18}.$$

9. Zadania. 5. Wyznaczyć, jak wielkie jest prawdopodobieństwo P, że zdarzenie, którego prawdopodobieństwo równa się p, zajdzie przynajmniej raz jeden w k próbach.

Do rozwiązania tego zadania zastosujemy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego. Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego będzie, jak wiemy, równe $1 - p$. Prawdopodobieństwo, że to zdarzenie przeciwne powtórzy się k razy w k próbach, będzie równe $(1 - p)^k$. Zdarzeniem przeciwnem temu k-krotnemu powtórzeniu się w k próbach będzie oczywiście powtórzenie się przynajmniej raz jeden zdarzenia o prawdopodobieństwie p. Będzie zatem:

$$P = 1 - (1 - p)^k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Liczba ta stanowi szukaną odpowiedź. Widzimy, że ponieważ $1 - p < 1$, przeto dla rosnących wartości na k prawdopodobieństwo P coraz bardziej zbliża się do jedności.

Tak np. prawdopodobieństwo, że w 10 rzutach monety „orzeł" będzie wyrzucony przynajmniej raz jeden, wyniesie według tego wzoru:

$$1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}.$$

W rozwiązaniu (13) mieści się jako szczególny przypadek rozwiązanie zadania w art. 4 o prawdopodobieństwie wyrzucenia raz jeden „orła“ w dwu rzutach monety. W tamtym bowiem przykładzie jest $p=\frac{1}{2}$; wstawiając tę wartość do powyższego wzoru, otrzymamy:

$$P=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

jak być powinno.

Gdyby wartość prawdopodobieństwa P była naprzód dana, a szukaną byłaby liczba k prób, przy której zdarzenie o prawdopobieństwie p zajdzie przynajmniej raz jeden, to mając P i p, możemy z powyższego wzoru wyznaczyć k, biorąc logarytmy stron obu. Będzie mianowicie:

$$\log(1-P)=k\log(1-p),$$

skąd:

$$k=\frac{\log(1-P)}{\log(1-p)}.$$

Z natury zadania wypływa, że k winno być całkowite. Gdyby więc po drugiej stronie iloraz wypadł niecałkowity, to za k przyjąć należy liczbę całkowitą bezpośrednio wyższą od ilorazu.

Tak np. gdybyśmy zapytali, ilu potrzeba prób, aby można było oczekiwać z prawdopodobieństwem $P=0{,}54$, że zdarzenie, którego prawdopodobieństwo równa się $\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}$, powtórzy się przynajmniej raz jeden, otrzymalibyśmy:

$$k=\frac{\log(1-0{,}54)}{\log\left(1-\frac{1}{1024}\right)}=\frac{\log 0{,}46}{\log 1023-\log 1024}.$$

Po wykonaniu działań przy pomocy logarytmów otrzymamy liczbę 795.

6. W urnie znajduje się k kul. Wyciągamy z niej od razu pewną liczbę kul. Jak wielkie jest prawdopodobieństwo, że liczba wyciągniętych kul jest parzysta?

Aby rozwiązać to zadanie, zauważmy, że jednę kulę możemy wyciągnąć, wyciągając pierwszą, drugą, trzecią, . . . , k-tą kulę, a więc k różnemi sposobami; po 2 kule możemy wyciągnąć tyloma sposobami, ile można utworzyć połączeń prostych z k elementów po 2; 3 kule możemy wyciągnąć tyloma sposobami, ile utworzyć można połączeń prostych z k elementów po 3 i t. d. Wynika stąd, że liczba wszystkich przypadków możliwych w tem zadaniu wynosi:

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\ldots+\binom{k}{k},$$

liczba zaś przypadków sprzyjających zdarzeniu, t. j. wyciągnięciu parzystej liczby kul, wynosi:

$$\binom{k}{2}+\binom{k}{4}+\binom{k}{6}+\ldots$$

Według wzoru (22) w art. 12 Rozdziału II-go (str. 99) pierwsza z powyższych dwu sum równa się:

$$2^k-1;$$

według wzoru podanego w art. 25 (str. 127) druga z powyższych sum równa się:

$$2^{k-1}-1;$$

a więc szukane prawdopodobieństwo będzie:

$$\frac{2^{k-1}-1}{2^k-1}.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, t. j. prawdopodobieństwo wyciągnięcia nieparzystej liczby kul, będzie:

$$1-\frac{2^{k-1}-1}{2^k-1}=\frac{2^{k-1}}{2^k-1}.$$

7. W urnie znajduje się k kul białych i k kul czarnych. Wyciągamy z urny parzystą liczbę kul. Jak wielkie jest prawdopodobieństwo, że pomiędzy wyciągniętemi kulami jest tyle białych co czarnych?

Ponieważ liczba wyciągniętych kul ma być parzysta, t. j. równa albo 2, albo 4, albo 6 i t. d., przeto liczbę wszystkich przypadków możliwych otrzymamy, jeżeli do liczby połączeń z $2\,k$ elementów po 2 dodamy liczbę połączeń z $2\,k$ elementów po 4, liczbę połączeń z $2\,k$ elementów po 6 i t. d. A więc liczba przypadków możliwych wyniesie:

$$\binom{2\,k}{2}+\binom{2\,k}{4}+\binom{2\,k}{6}+\ldots+\binom{2\,k}{2\,k}.$$

Liczbę przypadków sprzyjających zdarzeniu znajdziemy, zważywszy, że przypadek sprzyjający zajdzie tyle razy, ile razy jedna kula biała połączy się z jedną czarną — takich przypadków będzie oczywiście $k\,.\,k = k^2 = \binom{k}{1}^2$; ile razy dwie kule białe połączą się z dwiema czarnemi — takich przypadków będzie $\binom{k}{2}\cdot\binom{k}{2} = \binom{k}{2}^2$; ile razy trzy kule białe połączą się z trzema czarnemi — takich przypadków będzie $\binom{k}{3}\cdot\binom{k}{3} = \binom{k}{3}^2$ i t. d. A zatem liczba wszystkich przypadków sprzyjających zdarzeniu wyrazi się sumą:

$$\binom{k}{1}^2 + \binom{k}{2}^2 + \binom{k}{3}^2 + \ldots + \binom{k}{k}^2.$$

Według wzoru (22) na str. 99 (w którym należy położyć $n = 2k$) pierwsza z dwu powyższych sum równa się:

$$2^{2k-1} - 1;$$

według zaś wzoru (24″) na str. 102 (gdzie należy zamiast n napisać k) druga z powyższych dwu sum równa się:

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} - 1\,.$$

Wynika stąd, że szukane prawdopodobieństwo równa się:

$$\frac{\dfrac{(2k)!}{(k!)^2} - 1}{2^{2k-1} - 1}\,.$$

Dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ otrzymamy stąd następujące liczby:

$$1,\ \frac{5}{7},\ \frac{19}{31}, \ldots$$

8. W urnie znajduje się a kul białych, b kul czarnych. Ciągniemy n-krotnie po jednej kuli, wkładając po każdem ciągnieniu kulę wylosowaną napowrót do urny i mieszając następnie zawartość. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że w n ciągnieniach wylosujemy μ razy kulę białą, $\nu = n - \mu$ razy kulę czarną, bez względu na porządek, w jakim te kule następować będą po sobie.

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej z urny jest $\frac{a}{a+b}$, czarnej $\frac{b}{a+b}$. Oznaczmy:

$$\frac{a}{a+b} = p, \quad \frac{b}{a+b} = q = 1 - p.$$

Ponieważ kule po każdem ciągnięniu wkładamy napowrót do urny i mieszamy zawartość, przeto przyjąć można, że prawdopodobieństwa p i q nie ulegają zmianie w następnych ciągnieniach. Wyciągnięciu μ-krotnemu kuli białej odpowiada według wzoru (12″) prawdopodobieństwo p^μ, wyciągnięciu ν-krotnemu kuli czarnej prawdopodobieństwo q^ν. Zejście się tych dwu zdarzeń jest zdarzeniem złożonem, któremu, według twierdzenia o prawdopodobieństwie złożonem, przypada prawdopodobieństwo, równe $p^\mu q^\nu$.

Ten wynik odnosi się atoli do przypadku szczególnego, w którym po μ-krotnem z rzędu powtórzeniu się zdarzenia pierwszego następuje ν-krotne powtórzenie się zdarzenia drugiego. Ponieważ wszakże w zadaniu pytamy o prawdopodobieństwo tych powtórzeń bez względu na porządek, w jakim następują, należy przeto $p^\mu q^\nu$ powtórzyć tyle razy, ile utworzyć można przemian z n elementów, pomiędzy któremi jest μ elementów jednakowych jednego rodzaju i $\nu = n - \mu$ elementów jednakowych drugiego rodzaju. Ta liczba przemian równa się, jak wiemy (wzór (12), str. 95)):

$$\frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!} = \frac{n!}{\mu!\,\nu!},$$

stąd szukane pradopodobieństwo będzie:

$$\frac{n!}{\mu!\,\nu!}\,p^\mu q^\nu = \frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!}\,p^\mu q^{n-\mu} = \frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!}\;\frac{a^\mu b^{n-\mu}}{(a+b)^n}. \quad (14).$$

Spostrzegamy, że wyrażenie (14) jest jednym z wyrazów rozwinięcia potęgi $(p+q)^n$, którem zajmowaliśmy się w art. 29 — 36 Rozdziału poprzedzającego. Jeżeli w podanym tam wzorze (str. 131) na wyraz rozwinięcia:

$$u_m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}\,p^{n-m} q^m$$

położymy $n - m = \mu$, $m = \nu$, otrzymamy wyrażenie prawdopodobieństwa (14). Możemy przeto powiedzieć, że kolejne wyrazy rozwinięcia potęgi $(p+q)^n = 1$, gdzie p i $q = 1 - p$ oznaczają prawdopodobieństwa dwu zdarzeń przeciwnych, dają nam: pierwszy, prawdopodobieństwo, że w n ciągnieniach kula biała wyciągnięta zostanie n razy; drugi, wyraża prawdopodobieństwo, że w n ciągnieniach kula biała zostanie wyciągnięta n—1 razy, kula czarna 1 raz; wyraz trzeci wyraża prawdopodobieństwo, że w n ciągnieniach kula biała zostanie wyciągnięta $n - 2$ razy, kula czarna 2 razy i t. d., wreszcie wyraz ostatni wyraża prawdopodobieństwo, że w n ciągnieniach wyciągnięta zostanie n razy kula czarna. Suma prawdopodobieństw tych wszystkich zdarzań, jako równa $(p+q)^n = 1$, jest jednością, jak być powinno, gdyż powyższe przypadki wyczerpują tu wszystkie wzajemnie wyłączające się możliwości w n ciągnieniach.

10. Niechaj będą zdarzenia wzajemnie się wyłączające o prawdopodobieństwach $p, q, r, \ldots$, które czynią zadość warunkowi $p+q+r+\ldots = 1$. Wykonywamy n prób i zapytujemy, jak wielkie jest prawdopodobieństwo, że w tych n próbach zdarzenie pierwsze powtórzy się razy μ, zdarzenie drugie razy ν, zdarzenie trzecie razy ρ i t. d.; bez względu na porządek, w jakim te zdarzenia po sobie następują.

Zachodzi tu oczywiście równość:

$$\mu+\nu+\rho+\ldots = n.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, złożonego z μ-krotnego powtórzenia zdarzenia pierwszego, ν-krotnego powtórzenia zdarzenia drugiego, ρ-krotnego powtórzenia zdarzenia trzeciego i t. d., będzie oczywiście równe $p^\mu q^\nu r^\rho \ldots$; ale gdy porządek, w jakim te zdarzenia mogą się powtarzać, ma być dowolny, prawdopodobieństwo szukane będzie równe prawdopodobieństwu $p^\mu q^\nu r^\rho \ldots$, pomnożonemu przez liczbę przemian z n elementów, pomiędzy któremi jest μ elementów jednakowych jednego rodzaju, ν elementów jednakowych drugiego rodzaju, ρ elementów jednakowych trzeciego rodzaju i t. d. Ta liczba przemian równa się, jak wiadomo (str. 110, wzór (93)):

$$\frac{n!}{\mu!\,\nu!\,\rho!\ldots}.$$

Stąd szukane prawdopodobieństwo będzie:

$$\frac{n!}{\mu!\,\nu!\,\rho!\ldots}\, p^\mu q^\nu v^\rho \ldots$$

Porównywając to wyrażenie z wyrazem rozwinięcia potęgi n-tej wielomanu (str. 130), widzimy, że równa się ono jednemu z wyrazów rozwinięcia potęgi:

$$(p+q+r+\ldots)^n = 1.$$

Suma wyrazów tej postaci, t. j.

$$\sum \frac{n!}{\mu!\,\nu!\,\rho!\ldots}\, p^\mu q^\nu r^\rho \ldots$$

gdzie $\mu+\nu+\rho+\ldots = n$, równa się zatem 1, jak być powinno, gdyż zdarzenia złożone z μ-krotnego powtórzenia pierwszego zdarzenia, ν-krotnego powtórzenia zdarzenia trzeciego, ρ-krotnego powtórzenia zdarzenia trzeciego i t. d., gdy $\mu, \nu, \rho, \ldots$ dla każdego z układów wartości czynią zadość powyższej równości, wzajemnie się wyłączają i suma ich prawdopodobieństw jest równa jedności.

Jeżeli np. w urnie mamy 9 kul białych, 6 czarnych, 5 czerwonych i zapytujemy, jak wielkie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia w 8 ciągnieniach 4 kul białych, 3 czarnych, 1 czerwonej, będzie w tym przypadku:

$$p = \frac{9}{9+6+5} = \frac{9}{20};$$

$$q = \frac{6}{9+6+5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10};$$

$$r = \frac{5}{9+6+5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4};$$

$$\mu = 4, \quad \nu = 3, \quad \rho = 1.$$

Szukane prawdopodobieństwo równa się:

$$\frac{8!}{4!\,3!\,1!}\left(\frac{9}{20}\right)^4\left(\frac{3}{10}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right) = 0{,}077\ldots$$

C. Prawo zdarzeń powtarzających się. Twierdzenia Bernoulli'ego i Poissona. Prawo wielkich liczb.

10. Zdarzenie najprawdopodobniejsze. Dajmy, że mamy dwa zdarzenia przeciwne, które oznaczmy przez A i B, o prawdopodobieństwach p i $q = 1 - p$. Prawdopodobieństwo, że w n próbach zdarzenie A powtórzy się razy μ, zdarzenie B razy $\nu = n - \mu$, równa się jak wiadomo (ob. str. 166):

$$\frac{n!}{\mu!\,\nu!}\,p^\mu q^\nu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Zapytujemy, dla jakiej wartości na μ prawdopodobieństwo μ-krotnego powtórzenia się zdarzenia A i — co za tem idzie — powtórzenia się $(n - \mu)$-krotnego zdarzenia B jest większe od prawdopodobieństwa innych powtórzeń? To zdarzenie złożone, które posiada największe prawdopodobieństwo, nazywać będziemy najprawdopodobniejszem, a odpowiadające mu wartości liczb μ i ν oznaczać będziemy przez $\bar{\mu}$ i $\bar{\nu}$.

Z łatwością możemy te liczby wyznaczyć, gdyż wyznaczenie to sprowadza się do wyznaczenia największego liczebnie wyrazu rozwinięcia potęgi $(p+q)^n$, gdzie p i q mają wartości dodatnie, których suma równa się 1. Zadanie to rozwiązaliśmy już w art. 29 poprzedzającego Rozdziału i znaleźliśmy tam dwie liczby $nq+q$ i $nq-p$, pomiędzy któremi zawierać się musi skaźnik m największego wyrazu rozwinięcia. Jeżeli w nierówności (47) tam otrzymanej napiszemy $\bar{\nu}=n-\bar{\mu}$ zamiast m, znajdziemy:

$$np-q<\bar{\mu}<np+p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Wynika stąd, że zdarzenie złożone najprawdopodobniejszem jest wtedy, gdy w niem zdarzenie A powtarza się mniej niż $np+p$ razy, więcej zaś niż $np-q$ razy. Ponieważ liczby $np-q$ i $np+p$ różnią się o 1, przeto, gdy te dwie liczby nie są całkowite, znajdziemy j e d n ę oznaczoną wartość na liczbę $\bar{\mu}$ oraz j e d n ę oznaczoną wartość na liczbę $\bar{\nu}=n-\bar{\mu}$. Jeżeli zaś liczby $np-q$ i $np+p$ są całkowite, znajdziemy, jak wiadomo, dwie wartości na $\bar{\mu}$, dające wszakże j e d n ę tylko wartość prawdopodobieństwa zdarzenia najprawdopodobniejszego.

Z wzorów (49′) i (49) na str. 133-ej, jeżeli w nich napiszemy $\bar{\mu}$ zamiast $n-m$, $\bar{\nu}$ zamiast m, dostaniemy:

$$\frac{\bar{\mu}}{n}=p-\frac{q-\theta}{n}, \qquad \frac{\bar{\nu}}{n}=q+\frac{q-\theta}{n} \quad \ldots\ldots \quad (17),$$

gdzie θ jest liczbą dodatnią, mniejszą od 1; stąd zaś:

$$\frac{\bar{\mu}}{\bar{\nu}}=\frac{p-\dfrac{q-\theta}{n}}{q+\dfrac{q-\theta}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Jeżeliby liczba θ równała się q, otrzymalibyśmy z tych wzorów:

$$np=\bar{\mu}, \quad nq=\bar{\nu}, \quad \frac{\bar{\mu}}{\bar{\nu}}=\frac{p}{q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

a wyniki te możemy wysłowić w ten sposób: jeżeli iloczyn liczby prób przez prawdopodobieństwo zdarzenia A i — co za tem idzie — przez prawdopodobieństwo zdarzenia B jest liczbą całkowitą, wtedy te dwa iloczyny dają nam wartości $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, odpowiadające zdarzeniu najprawdopodobniejszemu, albo jeszcze inaczej: dla zdarzenia najprawdopodobniejszego stosunek liczby powtórzeń się zdarzenia A do liczby powtórzeń zdarzenia B jest równy stosunkowi prawdopodobieństw zdarzeń A i B.

Gdy liczba n nie czyni zadość powyższemu warunkowi, wzory (17) pokazują, że różnice

$$\frac{\bar{\mu}}{\bar{\nu}} - p, \quad \frac{\bar{\nu}}{n} - q$$

są tem mniejsze, im liczba n jest większa, wzór zaś (18), że dla rosnących wartości liczby n, stosunek $\frac{\bar{\mu}}{\bar{\nu}}$ zbliża się nieograniczenie do stosunku prawdopodobieństw $\frac{p}{q}$. Albo jeszcze inaczej: liczba powtórzeń $\bar{\mu}$ tem bliższą jest liczby np, liczba powtórzeń $\bar{\nu}$ tem bliższą jest liczby nq, im liczba n jest większa.

W ogólności zatem powiedzieć można, że: dla zdarzenia najprawdopodobniejszego stosunek liczby powtórzeń zdarzenia A do liczby powtórzeń zdarzenia przeciwnego B albo równa się stosunkowi prawdopodobieństw tych dwu zdarzeń, albo zbliża się do tego stosunku tem bardziej, im liczba prób jest większa.

Wyjaśnimy to na przykładzie. Niechaj w urnie będą 2 kule białe i 1 kula czarna. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej jest $\frac{2}{3}$, prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli czarnej jest $\frac{1}{3}$. Jeżeli liczba prób n jest wielokrotnością liczby 3, wtedy iloczyn jej przez $\frac{2}{3}$ i przez $\frac{1}{3}$ jest całkowity i otrzymujemy wtedy wprost, że dla zdarzenia najprawdopodobniejszego jest $\bar{\mu} = \frac{2}{3} n$, $\bar{\nu} = \frac{1}{3} n$. Tak np. dla $n = 12$ jest $\bar{\mu} = 8$, $\bar{\nu} = 4$, dla $n = 1200$ jest $\bar{\mu} = 800$, $\bar{\nu} = 400$. Tym wartościom na $\bar{\mu}$ i $\bar{\nu}$ odpowiadają prawdopodobieństwa zdarzenia najprawdopodobniejszego:

$$\frac{12!}{8!\,4!}\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 0{,}2468;$$

$$\frac{1200!}{800!\,400!}\left(\frac{2}{3}\right)^{800}\left(\frac{1}{3}\right)^{400} = 0{,}0244,$$

obliczone już wyżej na str. 132 i 136-ej.

Jeżeli liczba prób n wynosi np. 19, tak, że $19 \cdot \frac{2}{3}$ i $19 \cdot \frac{1}{3}$ nie są liczbami całkowitemi, wtedy według nierówności (16) otrzymujemy:

$$19 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} < \bar{\mu} < 19 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3},$$

$$12\frac{1}{3} < \bar{\mu} < 13\frac{1}{3},$$

skąd $\bar{\mu} = 13$, $\bar{\nu} = 6$. Stosunek 13 : 6 jest większy od stosunku prawdopodobieństw $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$, różnica $\frac{13}{6} - \frac{2}{1}$ równa się $\frac{1}{6}$.

Wziąwszy $n = 1900$, otrzymamy:

$$1900 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} < \bar{\mu} < 1900 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3},$$

$$1266\frac{1}{3} < \bar{\mu} < 1267\frac{1}{3},$$

skąd $\bar{\mu} = 1267$, $\bar{\nu} = 633$. Stosunek 1267 : 633 jest większy od stosunku $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$, ale bliższy niż stosunek poprzedni 13:6, gdyż różnica $\frac{1267}{633} - \frac{2}{1} = \frac{1}{633}$.

W art. 31 Rozdziału poprzedzającego podaliśmy sposób przybliżonego obliczania największego wyrazu rozwinięcia potęgi $(p + q)^n$ dla znacznych wartości wykładnika n i w założeniu, że p i q są liczby dodatnie, których suma równa się 1. Jeżeli we wzorze (52) tam podanym

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}},$$

podstawimy zamiast p i q wartości prawdopodobieństw zdarzeń A i B, otrzymamy prawdopodobieństwo zdarzenia najprawdopodobniejszego, odpowiadającego wartościom $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, t. j. będzie przybliżenie:

$$\frac{n!}{\bar{\mu}!\,\bar{\nu}!}\, p^{\bar{\mu}} q^{\bar{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20).$$

Tak np. gdy $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$ a liczba prób $n = 1900$, otrzymamy z wzoru (20), że prawdopodobieństwo zdarzenia najprawdopodobniejszego wynosi:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 1900 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}} = 0{,}019\ldots$$

Z wzoru (20) widzimy też, że prawdopodobieństwo zdarzenia najprawdopodobniejszego maleje, gdy liczba n rośnie i, że można wyznaczyć takie n, aby prawdopodobieństwo to było mniejsze od jakiejkolwiek liczby dowolnie małej. To samo stosuje się tem bardziej do każdego zdarzenia, którego prawdopodobieństwo jest mniejsze od największego, t. j. do wszelkiego zdarzenia, odpowiadającego liczbom μ i ν, odmiennym od $\bar{\mu}$ i $\bar{\nu}$.

11. Zadanie. Niechaj, jak wyżej, będą dwa zdarzenia przeciwne A i B o prawdopodobieństwach p i $q = 1 - p$. Wykonywamy n prób i pytamy, jak wielkie jest prawdopodobieństwo, że w tych n próbach liczba powtórzeń zdarzenia A będzie mniejsza lub większa od liczby $\bar{\mu}$ powtórzeń w zdarzeniu najprawdopodobniejszem nie więcej niż o k, czyli innemi słowy, z jakiem prawdopodobieństwem spełnia się w n próbach nierówność:

$$\bar{\mu} - k < \mu \leqslant \bar{\mu} + k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21),$$

lub — co na jedno wychodzi — nierówność:

$$\frac{\bar{\mu}}{n} - \frac{k}{n} < \frac{\mu}{n} \leqslant \frac{\bar{\mu}}{n} + \frac{k}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21').$$

Wiemy, że $\bar{\mu}$ albo równa się np, albo też zbliża się nieograniczenie do np, gdy liczba prób n rośnie. Możemy przeto w każdym razie dla znacznych wartości na n, nierówności (21) zastąpić następującemi:

$$np - k \leqslant \mu < np + k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22),$$

$$p - \frac{k}{n} \leqslant \frac{\mu}{n} < p + \frac{k}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22')$$

i pytanie nasze wyrazić w ten sposób: jak wielkiem jest prawdopodobieństwo P, że w n próbach stosunek liczby powtórzeń μ zdarzenia A do liczby n będzie większy lub mniejszy od prawdopodobieństwa p nie więcej niż o $\frac{k}{n}$?

Nierówność (22) orzeka, że μ może być jedną z $2k + 1$ liczb następujących:

$$np - k,\ np - k + 1, \ldots .\ np - k,\ np,\ np + 1, \ldots .$$

$$\ldots .\ np + k - 1,\ np + k \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (23),$$

którym odpowiada prawdopodobieństwo, obliczone z wzoru (15), t. j. z wzoru:

$$\frac{n!}{\mu!\,(n - \mu)!}\, p^{\mu}\, q^{n-\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24),$$

gdzie za μ należy brać kolejno liczby ciągu (23). Prawdopodobieństwo szukane P będzie sumą tych prawdopodobieństw, t. j. będzie

$$P = \sum_{\mu = np - k}^{np + k} \frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!} p^{\mu} q^{n-\mu} \quad \ldots \ldots \quad (25),$$

gdzie suma Σ składa się z $2k + 1$ wyrazów od μ równego najmniejszej aż do μ równego największej z liczb ciągu (23). Wynika to bezpośrednio z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitem.

Zamiast nierówności (22) i (22′), można rozważać równoważne im nierówności:

$$nq - k < \nu < nq + k \quad \ldots \ldots \quad (26),$$

$$q - \frac{k}{n} < \frac{\nu}{n} < q + \frac{k}{n} \quad \ldots \ldots \quad (26')$$

i sposobem analogicznym dojść do następującego wyrażenia prawdopodobieństwa P:

$$P = \sum_{\nu = nq - k}^{\nu = nq + k} \frac{n!}{(n-\nu)!\,\nu!} p^{n-\nu} q^{\nu} \quad \ldots \ldots \quad (25').$$

12. Przykład. Zastosujmy to rozwiązanie do następującego przykładu. Zapytujemy, jak wielkie jest prawdopodobieństwo, że rzucając 100 razy monetą, wyrzucimy „orła“ nie mniej niż 40 razy i nie więcej niż 60 razy.

Prawdopodobieństwo wyrzucenia „orła“ w pojedyńczym rzucie jest $\frac{1}{2}$; prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, t. j. wyrzucenia „reszki“ jest również $\frac{1}{2}$. Jest zatem $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Ponieważ iloczyn $100 \cdot \frac{1}{2} = 50$ jest liczbą całkowitą, przeto zdarzeniem najprawdopodobniejszem jest wyrzucenie 50 razy „orła“ i 50 razy „reszki“, t. j. $\bar{\mu} = 50$, $\bar{\nu} = 50$. Według warunków zadania liczba μ ma być niemniejsza od 40, a niewiększa od 60, czyli inaczej, liczba μ ma być mniejsza lub większa od $\bar{\mu}$ nie więcej niż o 10. Nierówność (22) staje się w tym przypadku:

$$\bar{\mu} - 10 \leqslant \mu < \bar{\mu} + 10,$$

$$40 \leqslant \mu \leqslant 60,$$

a wzór (25) daje:

$$P = \sum_{\mu=40}^{\mu=60} \frac{100}{\mu!\,(100-\mu)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu} \left(\frac{1}{2}\right)^{100-\mu} = \frac{100!}{2^{100}} \sum_{\mu=40}^{\mu=60} \frac{1}{\mu!\,(n-\mu)!}.$$

Będzie zatem:

$$P = \frac{100!}{2^{100}} \left(\frac{1}{40!\,60!} + \frac{1}{41!\,59!} + \frac{1}{42!\,58!} + \ldots + \frac{1}{59!\,41!} + \frac{1}{60!\,40!}\right)$$

$$= \frac{100!}{2^{99}} \left(\frac{1}{40!\,60!} + \frac{1}{41!\,59!} + \ldots + \frac{1}{50!\,50!}\right) = 0{,}9538\ldots$$

Obliczenie bezpośrednie liczby P byłoby niezmiernie uciążliwe; do obliczenia stosować należy rachunek przybliżony przy pomocy wzoru Stirlinga i logarytmów, lub też tablicę, o której mówimy w art. 14, jak to niżej pokażemy.

13. Ciąg dalszy rozważań art. 11. Wzór (26′) orzeka, że $\frac{\nu}{n}$ zawiera się pomiędzy dwiema granicami $q - \frac{k}{n}$ i $q + \frac{k}{n}$. Te dwie granice przy wzrastaniu liczby prób mogą stać się tak blizkiemi, jak chcemy, jeżeli nawet liczba k rośnie nieograniczenie wraz z n, ale tak, że stosunek $\frac{k}{n}$ pozostaje mniejszym od jakiejkolwiek liczby dowolnie małej. W samej rzeczy, jeżeli położymy, podobnie jak w art. 32 Rozdziału II (str. 138):

$$p = \frac{a}{a+b}, \qquad q = \frac{b}{a+b} \qquad a + b = c,$$

gdzie c może być dowolnie wielkie, i przyjmiemy, że $n = k\,c$, otrzymamamy stąd $\frac{k}{n} = \frac{1}{c}$, a więc przy odpowiednim wyborze liczby c stosunek $\frac{k}{n}$ może być tak mały, jak chcemy. Przy tych założeniach będzie; jak na str. 138-ej:

$$nq - k = kb - k, \qquad nq + k = kb + k$$

wyrażenie zaś (25′) przejdzie na następujące:

$$P = \sum_{\nu = kb - k}^{\nu = kb + k} \frac{n!}{(n-\nu)!\,\nu!}\, p^{n-\nu} q^{\nu}$$

i staje się zupełnie identycznem z wyrażeniem P (59) lub (64), którem zajmowaliśmy się w art. 32-ym, Rozdziału II-go. Dowiedliśmy tam, że

$$P = 1 - R; \quad R < \alpha^k,$$

gdzie α jest mniejsze od jedności. Przy dostatecznie wielkiem k może być α^k tak małe, jak chcemy. Będzie więc:

$$P = 1 - R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

gdzie R przy wzrastaniu liczby n może się stać dowolnie małem, czyli prawdopodobieństwo P tak blizkiem jedności, jak chcemy. Wynik ten można wypowiedzieć w następującem twierdzeniu:

Prawdopodobieństwo P, że w n próbach liczba powtórzeń zdarzenia A i odpowiednia liczba powtórzeń zdarzenia B zawierać się będą między granicami $np - k$ i $np + k$ i odpowiednio $nq - k$ i $nq + k$, gdzie k jest liczbą wzrastającą wraz z n, ale tak, że stosunek $\frac{k}{n}$ maleje nieograniczenie przy wzrastaniu liczby n, jest, przy dostatecznie wielkiem n, tak blizkie jedności, jak chcemy.

Lub też:

Prawdopodobieństwo P, że w n próbach różnica pomiędzy $\frac{\mu}{n}$ a liczbą p, oraz różnica pomiędzy liczbą $\frac{\nu}{n}$ a liczbą q pozostawać będzie mniejsza od liczby dowolnie małej, jest, przy dostatecznie wielkiej wartości na n, tak blizkie jedności, jak chcemy.

Jeżeli wartość bezwzględną k różnicy $\bar{\mu} - \mu = n\,p - \mu$, równą bewzględnej wartości różnicy $\bar{\nu} - \nu = n\,q - \nu$, nazwiemy odchyleniem bezwzględnem, wartość zaś bezwzględną różnicy $\frac{\mu}{n} - p$, równą bezwględnej wartości różnicy $\frac{\nu}{n} - q$, nazwiemy odchyleniem względnem, będziemy mogli powyższe twierdzenie wypowiedzieć krócej w ten sposób:

Prawdopodobieństwo P, że w n próbach odchylenie względne $\left| p - \frac{\mu}{n} \right| = \left| q - \frac{\nu}{n} \right|$ nie przekracza liczby $\frac{k}{n}$, malejącej nieograniczenie wraz z n, jest, przy dostatecznie wielkiej wartości na n, tak blizkie jedności, jak chcemy.

W traktatach Rachunku prawdopodobieństwa przyjmuje się, co okazało się najdogodniejszem, że liczba k rosnąca wraz z n, jest proporcyonalna do pierwiastka kwadratowego z liczby n, t. j. przyjmuje się:

$$k = t\sqrt{2pq}.\sqrt{n} = t\sqrt{2pqn} \quad \ldots\ldots \quad (28),$$

skąd stosunek

$$\frac{k}{n} = t\sqrt{\frac{2pq}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

maleje, jak widzimy, przy wzrastaniu liczby n. Jeżeli wprowadzimy to oznaczenie, będziemy mogli powyższe twierdzenie wypowiedzieć jeszcze w sposób następujący:

Prawdopodobieństwo P, że w n próbach odchylenie bezwzględne $|np - \mu| = |nq - \nu|$ jest niewiększe od $t\sqrt{2pqn}$, lub że odchylenie względne $\left|p - \frac{\mu}{n}\right| = \left|q - \frac{\nu}{n}\right|$ jest niewiększe od $t\sqrt{\frac{2pq}{n}}$, staje się, przy dostatecznie wielkiej liczbie n, tak blizkiem jedności, jak chcemy.

14. Twierdzenie Bernoulli'ego. Wyniki wyżej otrzymane stanowią treść istotną ważnego twierdzenia, które w Rachunku prawdopodobieństwa nosi nazwę twierdzenia Jakóba Bernoulli'ego od imienia jego twórcy („Ars conjectandi" 1713) i ostatecznie sformułowane zostało przez Laplace'a („Théorie analytique des probabilités" 1812), któremu zawdzięczamy dogodne i powszechnie przyjęte dziś a najważniejsze w tem twierdzeniu wyrażenie prawdopodobieństwa P, jako funkcyi zależnej od zmiennej t, wyżej określonej. Brzmienie twierdzenia Bernoulli'ego w traktatach Rachunku prawdopodobieństwa tem tylko różni się od powyższego, że zawiera właśnie to Laplace'owskie wyrażenie na P, dające się wyprowadzić jedynie przy pomocy Rachunku wyższego, wyłączonego z naszych rozważań. Wyrażenie to składa się z dwóch wyrazów, z których pierwszy oznaczmy przez $\Phi(t)$ (patrz przysek *)), drugi zaś równa się $\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi pqn}}$. Wartość pierwszego z nich ujęto

---

*) Dla znających Rachunek całkowy przytaczamy to wyrażenie.

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^t e^{-x^2}\,dx + \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi pqn}},$$

gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych, t wielkością, określoną zapomocą wzoru (28). Wyraz drugi po stronie drugiej często bywa pomijany, bo obliczenia wykazują, że już dla niewielkiej wartości t jest on bardzo nieznaczny w stosunku do pierwszego.

w tablicę, umieszczaną zwykle w kursach Rachunku prawdopodobieństwa *). Oto wyjątek z niej:

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,0000000	0,80	0,7421010	1,85	0,9911110	3,00	0,9999779
0,01	0,0112833	0,81	0,7480033	1,86	0,9914725	3,01	0,9999793
0,02	0,0225644	0,82	0,7538108	1,87	0,9918207	3,02	0,9999805
0,03	0,0338410	0,83	0,7595238	1,88	0,9921562	3,03	0,9999817
0,04	0,0451109	0,84	0,7651427	1,89	0,9924793	3,04	0,9999829
0,10	0,1124630	1,00	0,8427008	2,00	0,9952223	3,55	0,99999948452
0,11	0,1236230	1,01	0,8468105	2,01	0,9955248	3,56	0,99999952115
0,12	0,1347584	1,02	0,8508380	2,02	0,9957195	3,57	0,99999955527
0,13	0,1458671	1,03	0,8547842	2,03	9,9959063	3,58	0,99999958703
0,14	0,1569470	1,04	0,8586499	2,04	0,9960858	3,59	0,99999961661
0,45	0,4754818	1,40	0,9522851	2,55	0,9996893	4,0	0,99999998458
0,46	0,4846555	1,41	0,9538524	2,56	0,9997058	4,1	0,99999999330
0.47	0,4937452	1,42	0,9553762	2,57	0,9997215	4,2	0,99969999714
0,48	0,5027498	1,43	0,9568573	2,58	0,9997364	4,3	0,99999999881
0,49	0,5116683	1,44	0,9582966	2,59	0,9997505	4,4	0,99999999951

Widzimy z tej tablicy, że funkcya $\Phi(t)$ już dla niewielkich wartości na t jest blizka jedności, a dla $t = 4$ różni się od jedności niezmiernie mało.

Zastosujemy tablicę do obliczenia prawdopodobieństw w przykładzie art. 12, że, przy 100-krotnem rzuceniu monety, wyrzucenie „orła" nastąpi nie mniej niż 40 i nie więcej niż 60 razy. W przykładzie tym jest:

$$n = 100, \quad p = \frac{1}{2}, \quad k = 10,$$

będzie zatem według wzoru (28):

$$t = \frac{k}{\sqrt{2pqn}} = \frac{10}{\sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 100}} = \frac{10}{\sqrt{50}} = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$$

*) Tablicę tę czytelnik znajdzie w „Zasadach Rachunku prawdopodobieństwa" Wł. Gosiewskiego (Warszawa, 1906), oraz w „Podstawach matematycznych ubezpieczeń życiowych" A. B. Danielelewicza (Warszawa, 1896).

Wartości $t = 1{,}41$ odpowiada $\Phi(t) = 0{,}9538\ldots$ (pomijamy wyraz $\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi pqn}}$), a zatem szukane prawdopodobieństwo równa się $0{,}9538\ldots$

Rozwiążmy jeszcze jedno zadanie. W urnie niechaj znajduje się 5 kul białych i 3 kule czarne. Wyciągamy 3200 razy po jednej kuli, wkładając po każdem ciągnieniu kulę napowrót do urny. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że kula biała zostanie wyciągnięta nie mniej niż 1900 i nie więcej niż 2100 razy.

Mamy tu $p = \frac{5}{8}$, $q = \frac{3}{8}$, $n = 3200$; dla zdarzenia najprawdopodobniejszego jest $np = 3200 \cdot \frac{5}{8} = 2000$, będzie zatem:

$$2000 - 100 \leqslant \mu \leqslant 2000 + 100,$$

t. j. $k = 100$. Tej wartości na k odpowiada

$$t = \frac{k}{\sqrt{2pqn}} = \frac{100}{\sqrt{2 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot 3200}} = \frac{100}{\sqrt{1500}} = \frac{2}{3}\sqrt{15} = 2{,}58.$$

Według tablicy (pomijamy wyraz $\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi pqn}}$) będzie:

$$\Phi(2{,}58) = 0{,}9997364$$

i takie jest prawdopodobieństwo bardzo blizkie jedności, że kula biała w 3200 ciągnieniach pojawi się nie mniej niż 1900 razy i nie więcej niż 2100 razy.

Streszczając powyższe rozważania, możemy już teraz twierdzenie Bernoulli'ego wyrazić w formie, pospolicie w kursach Rachunku prawdopodobobieństwa stosowanej:

„Niechaj p i $q = 1 - p$ będą prawdopodobieństwa dwóch zdarzeń przeciwnych A i B, stałe we wszystkich n dokonywanych próbach. Zdarzeniem najprawdopodobniejszem będzie to, w którem stosunek liczb μ i ν powtórzeń zdarzenia A i zdarzenia B jest równy stosunkowi prawdopodobieństw p i q tych zdarzeń, lub jest tego stosunku najbliższy. Nadto prawdopodobieństwo P, że odchylenia $\frac{\mu}{n} - p$ i $\frac{\nu}{n} - q$ nie przekroczą liczby $t\sqrt{\frac{2pq}{n}}$, ma wartość przybliżoną:

$$\Phi(t)+\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi pqn}},$$

gdzie $\Phi(t)$ jest funkcyą, której wartości podane są w powyższej tablicy".

15. Odchylenie prawdopodobne. Oprócz odchyleń, które nazwaliśmy bezwzględnem i względnem, matematycy wprowadzają jeszcze inne odchylenia, pożyteczne przy stosowaniu twierdzenia Bernoulli'ego w rozmaitych zagadnieniach (por. art. 18). Zajmiemy się najprzód odchyleniem t. zw. prawdopodobnem.

Odchylenie prawdopodne. Taką nazwę nadajemy występującym w twierdzeniu Bernoulli'ego odchyleniom, jeżeli ich prawdopodobieństwo równa się $\frac{1}{2}$. Dla odchylenia takiego winno być zatem:

$$\Phi(t)+\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi pqn}}=\frac{1}{2}.$$

Gdybyśmy pominęli wyraz drugi i napisali równanie

$$\Phi(t)=\frac{1}{2}=0{,}5,$$

to wartość t, czyniącą mu zadość, moglibyśmy otrzymać przy pomocy powyższej tablicy, w której:

dla	$t=0{,}47$	jest	$\Phi(t)=0{,}4937452,$
"	$t=0{,}48$	"	$\Phi(t)=0{,}5027498.$

Wartość $\Phi(t)=0{,}5$ zawiera się pomiędzy dwiema wypisanemi, i łatwa interpolacya, podobna do tej, jaką wykonywa się w rachunku logarytmowym, daje:

$$t=0{,}4769.$$

Rachunek ściślejszy doprowadza do wartości:

$$t=0{,}4769362762.$$

W zastosowaniach ograniczamy się zwykle na czterech lub pięciu cyfrach dziesiętnych.

Tym sposobem, zgodnie z twierdzeniem Bernoulliego, odchylenie prawdopodobne bezwzględne—oznaczmy je przez Δ—będzie:

$$\Delta=0{,}476936\sqrt{2pqn}\quad\ldots\ldots\quad(29),$$

odchylenie zaś prawdopodobne względne — oznaczmy je przez δ — będzie:

$$\delta = 0{,}476936 \sqrt{\frac{2pq}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29').$$

Przy tych odchyleniach liczba μ zawierać się będzie z prawdopodobieństwem 0,5 pomiędzy granicami:

$$np - 0{,}476936 \sqrt{2pqn}, \qquad p + 0{,}476936 \sqrt{2pqn},$$

częstość zaś względna $\frac{\mu}{n}$ z prawdopodobieństwem 0,5 pomiędzy granicami:

$$p - 0{,}476936 \sqrt{\frac{2pq}{n}}, \qquad p + 0{,}476936 \sqrt{\frac{2pq}{n}}$$

i z równem prawdopodobieństwem granice te będą mogły być przekroczone. Są to tak nazwane granice prawdopodobne.

16. Odchylenia średnie liniowe. Odchylenia te są dwóch rodzajów.

1. Odchylenie liniowe średnie pierwszego rodzaju otrzymujemy, biorąc wartość średnią wszystkich odchyleń $\Delta = \mu - \bar{\mu} = \mu - np$, lub też wszystkich odchyleń $\delta = \frac{\mu}{\nu} - p$ w n próbach, przyczem każde odchylenie bierzemy z właściwym mu znakiem.

Dla otrzymania średniej wartości odchyleń Δ musimy każde z nich pomnożyć przez stosunek prawdopodobny liczby jego powtórzeń do liczby n i następnie wziąć sumę otrzymanych iloczynów. Ponieważ stosunek, o którym mowa, równa się oczywiście prawdopodobieństwu pojawieniu się danej liczby μ powtórzeń zdarzenia A w n próbach, t. j. równa się:

$$\frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!}\, p^{\mu} p^{n-\mu},$$

przeto szukana średnia — oznaczmy ją przez Δ_1 — będzie:

$$\Delta_1 = \sum_{\mu=0}^{n} (\mu - np) \frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!}\, p^{\mu} q^{n-\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

Odpowiednia średnia odchyleń względnych—oznaczmy ją przez δ_1— będzie:

$$\delta_1 = \sum_{\mu=0}^{n} \left(\frac{\mu}{n} - p\right) \frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!}\, p^{\mu} q^{n-\mu} = \frac{1}{n} \cdot \Delta_1.$$

Sumę po stronie drugiej równania (A) możemy przedstawić w ten sposób:

$$\sum_{\mu=0}^{n} \mu \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} - np \sum_{\mu=0}^{n} \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} \quad . \quad (B).$$

Suma druga w tem wyrażeniu stanowi, jak to wprost widać, rozwinięcie potęgi $(p+q)^n$, równa się przeto 1; pierwszą zaś sumę możemy łatwo przekształcić w ten sposób:

$$\sum \mu \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} = np \sum \frac{(n-1)!}{(\mu-1)!\,(n-\mu)!} p^{\mu-1} q^{n-\mu}$$

$$= np\,(p+q)^{n-1} = np.$$

Jeżeli otrzymane wartości wstawimy do równania (A), otrzymamy:

$$\Delta_1 = np - np = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30),$$

a stąd także:

$$\delta_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30').$$

To znaczy, że odchylenie liniowe średnie pierwszego rodzaju, t. j. wartość średnia wszystkich odchyleń Δ lub δ, wziętych z właściwemi znakami, jest równa zeru.

Innemi słowy: w zdarzeniach czysto przypadkowych, przy znacznej liczbie prób, prawdopodobna suma odchyleń od liczby $\bar{\mu}$ w jednę stronę równa się prawdopodobnej sumie odchyleń w drugą stronę; lub też: suma prawdopodobna odchyleń stosunku $\frac{\mu}{n}$ od p w jednę stronę równa się sumie prawdopodobnej odchyleń w drugą stronę. Albo jeszcze krócej powiedzieć można, że w warunkach twierdzenia Bernoulli'ego, suma algebraiczna prawdopodobna odchyleń Δ lub odchyleń δ jest równa zeru.

2. Odchylenie liniowe średnie drugiego rodzaju. Jest to odchylenie średnie, utworzone podobnie jak poprzednie, z tą różnicą, że odwracamy uwagę od znaku odchyleń i bierzemy średnią ich wartości bezwzględnych. Jeżeli wartość bezwzględną odchylenia Δ oznaczymy przez $|\Delta|$, wartość bezwzględną odchylenia δ przez $|\delta|$, a odchylenia liniowe średnie drugiego rodzaju przez ${}_1\Delta$, ${}_1\delta$, otrzymamy:

$${}_1\Delta = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} |\Delta| \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} |\mu - np| \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu},$$

$$_1\delta = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} |\delta| \frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \left|\frac{\mu}{n} - p\right| \frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} = \frac{1}{n} \cdot {}_1\Delta.$$

Obliczmy $_1\Delta$. W tym celu rozłóżmy sumę

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n} |\mu - np| \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu}$$

na dwie części: pierwszą, zawierającą wyrazy od $\mu = 0$ do $\mu = np$; drugą, zawierającą wyrazy od $\mu = np + 1$ lub od $\mu = np$ (gdyż dla $\mu = np$ jest $\Delta = 0$) aż do $\mu = n$. W pierwszej części jest $|\mu - np| = np - \mu$, w drugiej $|\mu - np| = \mu - np$. Łatwo też spostrzedz, że wartość bezwzględna drugiej części równa się wartości bezwzględnej pierwszej, bo gdybyśmy znaki wszystkich wyrazów drugiej zmienili na przeciwne, te dwie części razem wzięte stanowiłyby odchylenie liniowe średnie pierwszego rodzaju Δ_1, według powyższego równe zeru. Możemy więc napisać:

$$_1\Delta = 2 \sum_{\mu=0}^{\mu=np} (np - \mu) \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu},$$

lub też odwracając porządek wyrazów:

$$_1\Delta = 2 \sum_{\mu=np}^{\mu=0} (np - \mu) \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu}.$$

Ponieważ:

$$np - \mu = np - \mu(p+q) = (n-\mu)p - \mu q,$$

będzie zatem:

$$_1\Delta = 2 \sum_{\mu=np}^{\mu=0} [(n-\mu)p - \mu q] \frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu}$$

$$= 2 \sum_{\mu=np}^{\mu=0} \left\{ (n-\mu)\,p \frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} - \mu q \frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} \right\}$$

$$= 2 \sum_{\mu=np}^{\mu=0} \left\{ \frac{n!}{\mu!(n-\mu-1)!} p^{\mu+1} q^{n-\mu} - \frac{n!}{(\mu-1)!\,(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu+1} \right\}.$$

Rozwińmy ostatnią sumę koleją wyrazów od $\mu = np$ do $\mu = 0$; otrzymamy:

$$
{}_1\Delta = \frac{n!}{(np)!\,(n-np-1)!}p^{np+1}\,q^{n-np} - \frac{n!}{(np-1)!\,(n-np)!}p^{np}\,q^{n-np+1}
$$

$$
+\frac{n!}{(np-1)!\,(n-np)!}p^{np}\,q^{n-np+1} - \frac{n!}{(np-2)!\,(n-np+1)!}p^{np-1}\,q^{n-np+2}
$$

$$
+\frac{n!}{(np-2)!\,(n-np+1)!}p^{np-1}q^{n-np+2} - \frac{n!}{(np-3)!\,(n-np+2)!}p^{np-2}q^{n-np+3}
$$

$$
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
$$

$$
+\frac{n!}{0!\,(n-1)!}\,p\,q^{n}.
$$

Po redukcyi, w której znoszą się wszystkie wyrazy prócz pierwszego, będzie.

$$
{}_1\Delta = 2\,\frac{n!}{(np)!\,(n-np-1)!}\,p^{np+1}q^{n-np} = 2\,npq\,.\frac{n!}{(np)!\,(nq)!}\,p^{np}\,q^{nq}.
$$

Przypomnijmy sobie, że:

$$
\frac{n!}{(np)!\,(nq)!}\,p^{np}\,q^{nq}
$$

jest wyrażeniem największego wyrazu rozwinięcia potęgi $(p+q)^n$ gdzie $p+q=1$, oraz, że wartość przybliżona tego wyrazu według art. 31 Rozdziału poprzedzającego (str. 136) równa się:

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}};
$$

otrzymujemy zatem:

$$
{}_1\Delta = 2npq\,.\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} = \sqrt{\frac{2pqn}{\pi}} \quad \ldots\ldots \quad (31).
$$

Mając ${}_1\Delta$, znajdziemy:

$$
{}_1\delta = \sqrt{\frac{2pq}{n\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31').
$$

17. Odchylenie średnie kwadratowe. Tak nazywamy pierwiastek kwadratowy wartości średniej kwadratów odchyleń Δ lub δ. Jeżeli odchylenia średnie kwadratowe oznaczymy przez Δ_2 i odpowiednio przez δ_2, będzie na podstawie określenia, jak łatwo widzieć:

$$
\Delta_2{}^2 = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \Delta^2\,\frac{n!}{\mu!\,(n-\mu)!}\,p^{\mu}\,q^{n-\mu},
$$

$$\delta_2^2 = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \delta^2 . \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} = \frac{1}{n^2} \Delta_2^2.$$

Kładąc tu:

$$\Delta^2 = (\mu - n p)^2 = \mu^2 - 2\mu n p + n^2 p^2,$$

otrzymamy:

$$\Delta_2^2 = \sum \mu^2 \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} - 2 n p \sum \mu \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu}$$

$$+ n^2 p^2 \sum \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C).$$

Po stronie drugiej dokonajmy następujących przekształceń:

$$\sum \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} = (p+q)^n = 1;$$

$$\sum \mu \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} = n p . \sum \frac{(n-1)!}{(\mu-1)!(n-\mu)!} p^{\mu-1} q^{n-\mu}$$

$$= n p (p+q)^{n-1} = n p;$$

$$\sum \mu^2 \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} = \sum (\mu^2 - \mu) \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu}$$

$$+ \sum \mu \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} = \sum \mu (\mu - 1) \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} p^\mu q^{n-\mu} + n p$$

$$= n(n-1) p^2 \sum \frac{(n-2)!}{(\mu-2)!\,(n-\mu)!} p^{\mu-2} q^{n-\mu} + n p$$

$$= n(n-1) p^2 (p+q)^{n-2} + n p = n(n-1) p^2 + n p.$$

Wstawiając otrzymane wartości do powyższego wzoru (C) na Δ_2^2, znajdziemy:

$$\Delta_2^2 = n(n-1) p^2 + n p - 2 n^2 p^2 + n^2 p^2 = n p - n p^2$$

$$= n p (1-p) = n p q,$$

stąd ostatecznie:

$$\Delta_2 = \sqrt{p q n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32),$$

a więc:

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{p q}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32').$$

18. Twierdzenie Bernoulli'ego i próby z kostkami. Astronom Zurychski R. Wolf dokonał kilkakrotnie prób doświadczalnych z kostkami dla przekonania się, czy i o ile wyniki ich zgadzają się z obliczeniami teoretycznemi. Pierwsza serya prób, dokonana w r. 1851, dotyczyła pierwszej części twierdzenia Bernoulli'ego, mianowicie porównania liczby powtórzeń μ w n-krotnem powtórzeniu zdarzenia z liczbą $\bar{\mu}=np$, odpowiadającą zdarzeniu najprawdopodobniejszemu. Do prób użyte były dwie kostki sześcienne z oczkami 1, 2, 3, 4, 5, 6 na ściankach. Kostki te rzucano i następnie notowano sumę oczek, ukazujących się na ich ściankach wierzchnich. Suma ta może mieć jednę z następujących 11 wartości:

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,$$

którym, jak to łatwo obliczyć, odpowiadają prawdopodobieństwa:

$$\frac{1}{36},\ \frac{2}{36},\ \frac{3}{36},\ \frac{4}{36},\ \frac{5}{36},\ \frac{6}{36},\ \frac{5}{36},\ \frac{4}{36},\ \frac{3}{36},\ \frac{2}{36},\ \frac{1}{36}\ .$$

Przy 100000 rzutach sumy te, według teoretycznego obliczenia, powinnyby powtórzyć się odpowiednio następującą liczbę razy:

$$2778,\quad 5556,\quad 8334,\quad 11112,\quad 13889,\quad 16667,$$
$$13889,\quad 11112,\quad 8334,\quad 5556,\quad 2778,$$

z których pierwsza równa się $100000 . \frac{1}{36}$, druga $100000 . \frac{2}{36}$ i t. d.

Faktycznie zaś w 100000 rzutach sumy te pojawiły się razy:

$$2455,\quad 5656,\quad 7884,\quad 10842,\quad 14113,\quad 16673,$$
$$14176,\quad 11187,\quad 8418,\quad 5928,\quad 2668.$$

Odchylenia bezwzględne $\bar{\mu} - \mu$ od zdarzenia najprawdopodobniejszego były przeto:

$$+323,\quad -100,\quad +450,\quad +270,\quad -224,\quad -6,$$
$$-287,\quad -75,\quad -84,\quad -372,\quad +110,$$

Inna późniejsza (z lat 1881—1883) serya prób Wolfa dokonana była z dwiema kostkami, białą i czerwoną. Notowano tu, ile razy ukazuje się każda z 36 odmian

$$1\,1,\quad 1\,2,\quad 1\,3, \ldots\ldots, 6\,6$$

na ściankach wierzchnich w 20 tysiącach rzutów. Wynik tych notowań przedstawia następująca tabliczka:

		Kostka biała					
		1	2	3	4	5	6
Kostka czerwona	1	547	587	500	462	621	690
	2	609	655	497	535	651	684
	3	514	540	468	438	587	629
	4	462	507	414	413	509	611
	5	551	562	499	506	658	672
	6	563	598	519	487	609	646

Aby wiedzieć np., ile razy powtórzyła się odmiana 4 3 (4 na kostce białej, 3 na czerwonej), trzeba poszukać liczby na przecięciu kolumny 4-tej z wierszem 3-im; będzie nią liczba 438. Odmiana 3 4 (3 na kostce białej, 4 na czerwonej) powtórzyła się razy 414.

Teoretycznie każdej z tych odmian odpowiada w 20 tysiącach rzutów najprawdopodobniejsza liczba powtórzeń $20000 \cdot \frac{1}{36}$, t. j. 556. Liczby istotne powtórzeń były to większe, to mniejsze, jak widać z tablicy. Łatwo też obliczyć odchylenia $\mu - np$ oraz ich kwadraty. Wykonanie tego łatwego rachunku pozostawiamy czytelnikowi; podajemy tylko wynik.

Suma odchyleń bezwzględnych wynosi 2376, suma zaś kwadratów odchyleń wynosi 212720.

Odpowiadające im odchylenia: średnie liniowe i kwadratowe wynoszą:

$$\frac{2376}{36} = 66, \qquad \sqrt{\frac{212720}{36}} = 76{,}9.$$

Interesujące jest porównanie tego wyniku z obliczeniem teoretycznem według wzorów (31) i (32). Odchylenie średnie liniowe drugiego rodzaju wynosi w tym razie:

$$_1\Delta = \sqrt{\frac{2pqn}{\pi}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot 20000}{3{,}1415\ldots}} = 18{,}5,$$

odchylenie zaś średnie kwadratowe wynosi:

$$\Delta_2 = \sqrt{\frac{1}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot 20000} = 23{,}2.$$

Tę znaczną niezgodność wyników dostrzeżeń z teoryą wyjaśnić można tylko nieprawidłowością użytych kostek, z powodu której nie spełniały się w tych doświadczeniach założenia, niezbędne na to, by można było stosować prawdopodobieństwo matematyczne, t. j., że w doświadczeniach tych wyrzucenia numerów 1, 2, 3, 4, 5, 6 nie stanowiły klasy zdarzeń równowartych.

19. Twierdzenie Poissona. Dotąd przyjmowaliśmy, że prawdopodobieństwa zdarzeń A i B pozostają stałemi w ciągu kolejnych prób lub dostrzeżeń. Poisson podjął zadanie ogólniejsze, zakładając, że prawdopodobieństwa p i q tych zdarzeń zmieniają się od próby do próby. Niechaj

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

będą prawdopodobieństwa zdarzenia A, zaś

$$q_1, q_2, \ldots, q_n,$$

odpowiadające im prawdopodobieństwa zdarzenia B w kolejnych n próbach. Jest więc:

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = \ldots = p_n + q_n = 1.$$

Zapytujemy, jak wielkie będzie prawdopodobieństwo, że w n próbach zdarzenie A powtórzy się μ razy, zdarzenie B powtórzy się $n - \mu$ razy?

Niechaj:

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}, \qquad q = \frac{q_1 + q_2 + \cdots + q_n}{n}$$

będą średnie arytmetyczne prawdopodobieństw zdarzeń A i B w n próbach.

Twierdzenie Poissona brzmi jak następuje:

Prawdopodobieństwo, że odchylenie

$$\pm\left(\frac{\mu}{n} - p\right) = \mp\left(\frac{\nu}{n} - q\right)$$

nie przekroczy liczby:

$$\frac{tl}{\sqrt{n}},$$

gdzie:

$$l^2 = \frac{2(p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n)}{n},$$

równa się

$$\Phi(t) + \frac{e^{-t^2}}{l\sqrt{n\pi}};$$

$\Phi(t)$ jest funkcyą, którą określimy w art. 16 (str. 176).

Jeżeli założymy, że:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p,$$

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q,$$

będzie $l^2 = 2pq$, $l = \sqrt{2pq}$, $\frac{tl}{\sqrt{n}} = t\sqrt{\frac{2pq}{n}}$ i otrzymamy twierdzenie Bernoulli'ego (por. art. 14). Twierdzenie to jest zatem szczególnym przypadkiem twierdzenia Poissona.

Dowód twierdzenia Poissona, oparty na pojęciu wartości średniej, podamy w art. 31.

20. Prawo wielkich liczb. Z twierdzenia powyższego wypływa, iż, przy zwiększającej się liczbie n, prawdopodobieństwo, że odchylenie $\left|\frac{\mu}{n} - p\right|$ nie przekroczy liczby dodatniej dowolnie małej, jest tak blizkie jedności, jak chcemy.

Wniosek ten ze swego twierdzenia nazwał Poisson prawem wielkich liczb. Nazwa ta utrzymała się w nauce i obejmuje w sobie oczywiście i twierdzenie Bernoulli'ego. Prawo wielkich liczb, jak widzimy, jest wynikiem rozważań czysto teoretycznych, opartych na pojęciu prawdopodobieństwa matematycznego i zastosowanych do powtarzających się zdarzeń przypadkowych; samo w sobie nie orzeka ono nic o zachowywaniu się zdarzeń w świecie rzeczywistym. Stosowanie zaś tego prawa do zdarzeń konkretnych, np. w Statystyce, opiera się na założeniu, że w dziedzinie tych zdarzeń tworzyć można wielkości, mające cechy zasadnicze pojęcia prawdopodobieństwa matematycznego. Przy takiem założeniu, którego zasadność winna być zawsze sprawdzana na drodze indukcyjnej, prawo wielkich liczb wyraża, że blizkiem jest pewności prawdopodobieństwo, iż częstość względna np. pewnego zdarzenia A przy znacznej liczbie dostrzeżeń różni się od prawdopodobieństwa tego zdarzenia tem mniej, im liczba dostrzeżeń jest większa. W tem brzmieniu prawo wielkich liczb zdaje się przybierać cechę rzeczową, wyrażającą, że w zdarzeniach konkretnych odchylenia od teoretycznie obliczonego zdarzenia najprawdopodobniejszego wahają się w granicach przewidzianych przez rachunek; czyli innemi słowy, że w rzeczywistości następuje niejako wyrównywanie lub kompensata znaczniejszych odchyleń od stanu teoretycznie określonego. Ale skoro w badanej dziedzinie dostrzeżenia i próby wykażą, że odchylenia średnie odbiegają znacznie od teoretycznie obliczonych (porówn. art. 18), stanowi to wskazówkę, że założenia, na których oparliśmy badanie, nie są uzasadnione w rzeczywistości, t. j., że klasy zdarzeń badanych nie dają się upodobnić ściśle do klas zdarzeń przypadkowych, lub, inaczej mówiąc, że w badanej dziedzinie zdarzeń rzeczywistych zachodzą warunki lub przyczyny, zakłócające przyjętą przypadkowość. I nawet taki wynik ujemny porównania dostrzeżeń ma doniosłe znaczenie, albowiem zwraca uwagę naszą na prawdopodobne istnienie i działanie czynników, powodujących ujawnione odstępstwa.

Prawo wielkich liczb, twierdzenie Bayesa (o którem niżej), jak i wszelkie metody Rachunku prawdopodobieństwa wogólności, są tylko narzędziem teoretycznem, które, w obec nadzwyczajnej złożoności zdarzeń i zjawisk w świecie rzeczywistym oraz wielkich trudności wyodrębniania działających w nim czynnników, toruje drogę badaniom. Stwierdzają to nietylko Statystyka i oparta na niej Teorya matematyczna ubezpieczeń na życie, Teorya miary mnogości zbiorowych i Teorya błędów dostrzeżeń, ale i Mechanika teoretyczna, teorye Fizyki nowoczesnej i nauk biologicznych, w których z powodzeniem stosowana bywa t. zw. metoda statystyczna.

D. Prawdopodobieństwo a posteriori. Twierdzenie Bayesa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Bernoulli'ego.

21. Prawdopodobieństwo a posteriori. Dotychczas mieliśmy do czynienia z zadaniami, w których liczbę przypadków możliwych i sprzyjających, potrzebną do wyznaczenia prawdopodobieństwa, można było otrzymać z warunków zadania albo wprost, albo też przy pomocy rozważań kombinatoryjnych. Bywają wszakże zadania, w których warunki zadania same przez się nie wystarczają do tego celu i dlatego trzeba wprowadzać pewne założenia lub hypotezy i rozważać prawdopodobne tych założeń wyniki. Prawdopodobieństwo, na tej drodze wyznaczone, nazywa się p r a w d o p o d o b i e ń s t w e m a p o s t e r i o r i, w przeciwstawieniu do prawdopodobieństwa, otrzymywanego wprost a nazwanego prawdopodobieństwem a priori. Rzecz tę wyjaśnią następujące zadania.

Zadanie 1. Niechaj będzie urna zawierająca 5 kul, pomiędzy któremi mogą być białe i czarne, lecz niewiadomo w jakiej liczbie. Wyciągamy jednę kulę; jak wielkie jest prawdopodobieństwo, że ta kula jest biała?

Ponieważ liczba kul białych i czarnych jest niewiadoma, można więc uczynić następujące założenia:

1) W	urnie	jest	kul białych	0,	czarnych	5;
2) „	„	„	„	1,	„	4;
3) „	„	„	„	2,	„	3;
4) „	„	„	„	3,	„	2;
5) „	„	„	„	4,	„	1;
6) „	„	„	„	5,	„	0.

Założeń tych jest sześć; jeżeli uważać je będziemy za równowarte lub równoprawdopodobne, to prawdopodobieństwo każdego z nich będzie równe $\frac{1}{6}$. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej w założeniu pierwszem będzie 0, w założeniu drugiem będzie $\frac{1}{5}$, trzeciem $\frac{2}{5}$, w czwartem $\frac{3}{5}$, w piątem $\frac{4}{5}$, w szóstem $\frac{5}{5}$. Przed ciągnieniem zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej, na zasadzie twierdzeń o mnożeniu i dodawaniu prawdopodobieństw, będzie:

$$\frac{1}{6}.0+\frac{1}{6}.\frac{1}{5}+\frac{1}{6}.\frac{2}{5}+\frac{1}{6}.\frac{3}{5}+\frac{1}{6}.\frac{4}{5}+\frac{1}{6}.1=\frac{1}{2}.$$

Takiem samem będzie oczywiście prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli czarnej.

Zadanie 2. W urnie, jak poprzednio, jest 5 kul, pomiędzy któremi mogą być białe i czarne. Wyciągnięto jednę kulę i okazało się, że jest białą. Po wyciągnięciu włożono ją napowrót do urny. Jak wielkie jest prawdopodobieństwo, że przy drugiem ciągnięciu wyjdzie znów kula biała?

Ponieważ pierwsze ciągnienie wykazało, że pomiędzy 5 kulami jest napewno przynajmniej jedna biała, więc założenia, jakie poczynić możemy o zawartości urny, będą teraz następujące:

1) W urnie jest kul białych 1, czarnych 4;
2) „ „ „ „ 2, „ 3;
3) „ „ „ „ 3, „ 2;
4) „ „ „ „ 4, „ 1;
5) „ „ „ „ 5, „ 0;

Liczba założeń jest teraz pięć; jeżeli przyjmiemy, że wszystkie są równoprawdopodobne, to prawdopodobieństwo każdego z nich będzie $\frac{1}{5}$, a prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej będzie teraz:

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{5}=\frac{3}{5}.$$

Zadanie 3. W urnie, jak poprzednio, jest 5 kul, i wiadomo, że mogą być tylko kule dwóch kolorów, białego i czarnego. Ciągniemy kolejno 4 razy po jednej kuli, wkładając kulę wyciągniętą napowrót do urny. W tych czterech ciągnieniach ukazała się 3 razy kula biała i 1 raz kula czarna. 2) Jakie poczynić można założenia o zawartości urny i jakie przypisać im prawdopodobieństwo? b) Jak wielkie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej w 5-em ciągnieniu?

a) W danym przypadku możliwe są oczywiście tylko cztery wzajemnie wyłączające się założenia:

1) W urnie jest kul białych 4, czarnych 1;
2) „ „ „ „ 3, „ 2;
3) „ „ „ „ 2, „ 3;
4) „ „ „ „ 1, „ 4;

Przy założeniu pierwszem prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej wynosić będzie $\frac{4}{5}$, wyciągnięcia kuli czarnej $\frac{1}{5}$; przy założeniu drugiem prawdopodobieństwa te będą $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}$; przy założeniu trzeciem $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$; przy założeniu czwartem $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}$.

Według twierdzenia o prawdopodobieństwie zdarzeń powtarzających się, prawdopodobieństwo ukazania się 3 razy kuli białej i 1 raz kuli czarnej w 4 ciągnieniach wynosi:

$$\frac{4!}{3!\,1!}\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\frac{1}{5}=\frac{256}{625},$$ przy pierwszem założeniu;

$$\frac{4!}{3!\,1!}\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}=\frac{216}{625},\ \text{przy drugiem założeniu;}$$

$$\frac{4!}{3!\,1!}\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\frac{3}{5}=\frac{96}{625}\quad \text{" trzeciem "}$$

$$\frac{4!}{3!\,1!}\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{625}\quad \text{" czwartem "}\ .$$

Prawdopodobieństwo ukazania się 3 kul białych i 1 czarnej w 4-ch ciągnieniach jest, jak widzimy, największe przy założeniu pierwszem, mniejsze przy drugiem, jeszcze mniejsze przy trzeciem, najmniejsze przy czwartem. Przyjmijmy, że prawdopodobieństwo założenia jest proporcyonalne do prawdopodobieństwa zdarzenia, obliczonego na podstawie założenia, i oznaczmy dla krótkości prawdopodobieństwa czterech powyższych założeń przez q_1, q_2, q_3, q_4; wtedy, zgodnie z tem przyjęciem, będzie:

$$q_1 : q_2 : q_3 : q_4 = 256 : 216 : 96 : 16$$

i nadto:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1,$$

gdyż założenia są wzajemnie wyłączające się i wyczerpują wszystkie możliwości. Z tych równań zapomocą prostego rachunku znajdziemy:

$$q_1 = \frac{256}{584},\quad q_2 = \frac{216}{584},\quad q_3 = \frac{96}{584},\quad q_4 = \frac{16}{584},$$

co można jeszcze tak napisać:

$$q_1 = \frac{\frac{256}{625}}{\frac{256}{625}+\frac{216}{625}+\frac{96}{625}+\frac{16}{625}},\quad q_2 = \frac{\frac{216}{625}}{\frac{256}{625}+\frac{216}{625}+\frac{96}{625}+\frac{16}{625}},$$

$$q_3 = \frac{\frac{96}{625}}{\frac{256}{625}+\frac{216}{625}+\frac{96}{625}+\frac{16}{625}},\quad q_4 = \frac{\frac{16}{625}}{\frac{256}{625}+\frac{216}{625}+\frac{96}{625}+\frac{16}{625}}.$$

Czytamy stąd, że prawdopodobieństwo danego założenia równa się ułamkowi, którego licznikiem jest obliczone a priori prawdopodobieństwo zdarzenia przy tem założeniu, mianownikiem zaś jest suma obliczonych w tenże sposób prawdopodobieństw tegoż zdarzenia przy wszystkich możliwych założeniach.

b) Teraz, mając już prawdopodobieństwo założeń, możemy łatwo rozwiązać drugą część zadania przy pomocy twierdzeń o mnożeniu i dodawaniu prawdopodobieństw, albowiem prawdopodobieństwo przed ciągnieniem, że, przy założeniu pierwszem, wyciągnięta kula będzie biała wynosi:

$$\frac{256}{584} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1024}{2920};$$

przy założeniu drugiem:

$$\frac{216}{584} \cdot \frac{3}{5} = \frac{648}{2920};$$

przy założeniu trzeciem:

$$\frac{96}{584} \cdot \frac{2}{5} = \frac{192}{2920};$$

przy założeniu czwartem:

$$\frac{16}{584} \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{2920}.$$

Szukane prawdopodobieństwo, stanowiące odpowiedź na pytanie, będzie sumą tych czterech prawdopodobieństw i wyniesie:

$$\frac{1024}{2920} + \frac{698}{2920} + \frac{192}{2920} + \frac{16}{2920} = \frac{1880}{2920} = \frac{47}{73}.$$

22. Twierdzenie Bayesa. Rozwiązanie zadań poprzednich i analogicznych wypływa z następującego twierdzenia ogólnego, które nazywa się twierdzeniem Bayesa.

Niechaj zajście zdarzenia A będzie możliwe przy jednem z n wzajemnie wyłączających się założeń $C_1, C_2, \ldots, C_n$, których prawdopodobieństwa a priori niechaj będą $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Niechaj $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będą prawdopodobieństwa zdarzenia A, odpowiadające tym założeniom. Wtedy prawdopodobieństwo a posteriori P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, że zdarzenie A, skoro się stało, jest wynikiem załozenia C_i wyraża się wzorem:

$$P_i = \frac{q_i p_i}{q_1 p_1 + q_2 p_2 + \cdots + q_n p_n} = \frac{q_i p_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} q_i p_i} \quad . \; . \; . \quad (33).$$

Twierdzenie to wypływa z pojęcia prawdopodobieństwa względnego, które rozpatrzyliśmy w art. 6 (str. 156). W samej rzeczy, prawdopodobieństwo P_i, że zdarzenie A jest wynikiem założenia C_i, jest to prawdopodobieństwo względne $p_A(C_i)$, t. j. prawdopodobieństwo zdarzenia C_i w założeniu, że urzeczywistniło się zdarzenie A.

Według twierdzenia o mnożeniu prawdopodobieństw (str. 159), prawdopodobieństwo $p(A_i C_i)$, t. j. prawdopodobieństwo zejścia się dwu zdarzeń A i C_i równa się z jednej strony iloczynowi prawdopodobieństwa bezwzględnego $p(A)$ zdarzenia A przez prawdopodobieństwo względne $p_A(C_i)$ zdarzenia C_i w założeniu, że urzeczywistniło się zdarzenie A; z drugiej strony równa się iloczynowi prawdopodobieństwa bezwzględnego $p(C_i)$ zdarzenia C_i przez prawdopodobieństwo względne $p_{C_i}(A)$ zdarzenia A w założeniu, że urzeczywistniło się zdarzenie C_i. Będzie zatem:

$$p(A) . p_A(C_i) = p(C_i)\, p_{C_i}(A).$$

Lecz: $\quad p_A(C_i) = P_i, \qquad p(C_i) = q_i, \qquad p_{C_i}(A) = p_i,$

a więc:

$$p(A) . P_i = q_i p_i,$$

skąd:

$$P_i = \frac{q_i p_i}{p(A)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34).$$

Możemy wyrazić mianownik $p(A)$ przy pomocy wielkości danych w twierdzeniu. W samej rzeczy prawdopodobieństwo całkowite bezwzględne zdarzenia A jest sumą prawdopodobieństw zdarzeń $(A_1 C_1)$, $(A\, C_2), \ldots, (A\, C_n)$, będzie zatem:

$$p(A) = q_1 p_1 + q_2 p_2 + \ldots + q_n p_n.$$

Wstawiając tę wartość we wzór (34), znajdziemy:

$$P_i = \frac{q_i p_i}{q_1 p_1 + q_2 p_2 + \ldots + q_n p_n}$$

co było do okazania:

W przypadku, gdy prawdopodobieństwa a priori zdarzeń $C_1, C_2, \ldots, C_n$ są równe, gdy więc $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q$, można licznik i mianownik skrócić przez q i otrzymujemy:

$$P_i = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{i=n} p_i} \quad . \; . \; . \quad (35).$$

W zastosowaniach do zdarzeń konkretnych, w Statystyce i naukach fizycznych, zdarzenia $C_1, C_2, \ldots, C_n$, które tu nazwano założeniami lub hypotezami, nazywane bywają przyczynami, i o części Rachunku prawdopodobieństwa, opartej na twierdzeniu Bayesa, mówimy, że jest teoryą prawdopodobieństwa a posteriori przyczyn lub też teoryą prawdopodobieństwa przyczyn, wyprowadzonego z dostrzeżeń. W zastosowaniach tych ważną i często trudną jest należyta ocena prawdopodobieństw a priori (t. j. wielkości $q_1, q_2, \ldots, q_n$) przyczyn, od której zależy zasadność stosowania teoryi do zdarzeń konkretnych.

Wniosek. Dajmy, że mając zdarzenie A i odpowiadające mu możliwe założenia $C_1, C_2, \ldots, C_n$, otrzymaliśmy przy pomocy powyższego twierdzenia prawdopodobieństwa a posteriori $P_1, P_2, \ldots, P_n$ tych założeń. Zapytujmy, jak na tej podstawie obliczyć można prawdopodobieństwo całkowite p (B) innego zdarzenia B, któremu odpowiadają te same założenia $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Jeżeli prawdopodobieństwa względne zdarzenia B, odpowiadające założeniom $C_1, C_2, \ldots, C_n$ oznaczymy przez $r_1, r_2, \ldots, r_n$, będzie oczywiście prawdopodobieństwo całkowite p (B) równe:

$$p\,(B) = P_1 r_1 + P_2 r_2 + \ldots + P_n r_n.$$

Kładąc tu za $P_1, P_2, \ldots, P_n$ wartości według wzoru (33), otrzymamy:

$$p\,(B) = \frac{q_1 p_1 r_1}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} q_i p_i} + \frac{q_2 p_2 r_2}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} q_i p_i} + \ldots + \frac{q_n p_n r_n}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} q_i p_i},$$

lub krócej:

$$p\,(B) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} q_i p_i r_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} q_i p_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36).$$

Wzór ten stosuje się do wyznaczenia prawdopodobieństw zdarzeń oczekiwanych na podstawie dostrzeżeń, t. j. na podstawie prawdopodobieństwa a posteriori założeń lub „przyczyn“, wyprowadzonego z rozważania zdarzenia A.

23. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Bernoulli'ego. Z twierdzenia Bayesa wynika jeszcze inny ważny wniosek, przy pomocy którego liczba powtórzeń danego zdarzenia A w szeregu znacznej liczby dostrzeżeń pozwala wyznaczyć przybliżenie prawdopodobieństwo tego zdarzenia w założeniu niezmienności warunków, w których odbywały się dostrzeżenia. Wniosek ten wyraża się następującem twierdzeniem, które przytaczamy bez dowodu.

Niechaj będzie zdarzenie A o nieznanem prawdopodobieństwie p i zdarzenie przeciwne B o prawdopodobieństwie $q = 1 - p$. Jeżeli w n próbach lub dostrzeżeniach zdarzenie A zaszło lub zostało dostrzeżone μ razy, zdarzenie B razy $\nu = n - \mu$, wtedy prawdopodobieństwo, że nieznane prawdopodobieństwo p zawiera się pomiędzy granicami:

$$\frac{\mu}{n} - t\sqrt{\frac{2\mu\nu}{n^3}}, \quad \frac{\mu}{n} + t\sqrt{\frac{2\mu\nu}{n^3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37),$$

równa się $\Phi(t)$, gdzie $\Phi(t)$ ma znaczenie to samo, co w artykule 14-ym.

Przy rosnących wartościach na n, granice powyższe zbliżają się coraz bardziej ku sobie tak, że $\frac{\mu}{n}$, t. j. stosunek liczby powtórzeń zdarzenia A do liczby dostrzeżeń można z wielkiem przybliżeniem przyjąć za wartość szukanego prawdopodobieństwa p.

Jest to twierdzenie odwrotne do twierdzenia Bernoulli'ego i nazwać je można także odwróceniem prawa wielkich liczb.

Zadanie. W urnie znajduje się 100000 kul białych i czarnych, pomieszanych w niewiadomym stosunku. Dokonywamy 800 ciągnień, wkładając za każdym razem kulę do urny. Kula biała ukazała się razy 320, kula czarna razy 480. a) Jaka jest najprawdopododobniejsza liczba kul białych w urnie? b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że istotna liczba kul białych w urnie nie przekroczy liczby najprawdopodobniejszej o 2500 w jednę i drugą stronę.

W zadaniu tem jest $n = 800$, $\mu = 320$, $\nu = 480$. Stosunek $\frac{\mu}{\nu} = \frac{320}{800} = \frac{2}{5}$, a zatem najprawdopodobniejsza wartość prawdopodobieństwa p (t. j. wyciągnięcia kuli białej) wynosi $\frac{2}{5}$. Najprawdopodobniejsza zaś liczba kul białych w urnie będzie:

$$100000 . \frac{2}{5} = 40000 .$$

b) Według warunku zadania różnica pomiędzy stosunkiem liczby kul białych do liczby wszystkich kul a stosunkiem najprawdopodobniejszym $\frac{2}{5}$ nie powinna przekroczyć $\frac{2500}{100000}$, t. j. $\frac{1}{40}$; będzie zatem według wzoru (37):

$$t\sqrt{\frac{2\mu\nu}{n^3}} = \frac{1}{40},$$

skąd:
$$t = \frac{1}{40}\sqrt{\frac{n^3}{2\mu\nu}} = \frac{1}{40}\sqrt{\frac{800^3}{2.320.480}}.$$

Po wykonaniu działań otrzymamy:
$$t = \frac{5}{12}\sqrt{6} = 1{,}02\ldots$$

Według tablicy na str. 177-ej wartości $t = 1{,}02$ odpowiada:
$$\Phi(t) = 0{,}8508.$$

A zatem prawdopodobieństwo, że liczba kul białych w urnie zawierać się będzie pomiędzy 40000 — 2500 i 40000 + 2500, t. j. pomiędzy 37500 i 42500 wynosi 0,8508, t. j. jest większe od $\frac{4}{5}$.

E. Wartość średnia. Prawo wielkich liczb, jako wynik twierdzeń o wartościach średnich. Nadzieja matematyczna.

24. Wartość średnia wielkości zależnych od zdarzeń przypadkowych. Już w art. 16 i 17 mieliśmy do czynienia z wartością średnią w zagadnieniu o odchyleniach; tu rozpatrzymy rzecz tę ogólniej.

Dajmy, że pewna wielkość x może przybierać wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a mianowicie pierwszą z nich, jeżeli urzeczywistni się zdarzenie A_1, którego prawdopodobieństwo jest $p(A_1)$, drugą, jeżeli urzeczywistni się zdarzenie A_2, którego prawdopodobieństwo jest $p(A_2)$ i t. d., wreszcie ostatnią, jeżeli urzeczywistni się zdarzenie A_n, którego prawdopodobieństwo jest $p(A_n)$. Niechaj zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ stanowią klasę zdarzeń wzajemnie się wyłączających, tak że:
$$p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n) = 1.$$

Wyrażenie:
$$x_1 p(A_1) + x_2 p(A_2) + \ldots + x_n p(A_n),$$
które dla krótkości pisać będziemy:
$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n,$$
gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ można też — jeżeli chcemy — uważać za prawdopodobieństwa wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nazywać będziemy wartością średnią wielkości x i oznaczać przez $[x]$. Będzie zatem:
$$[x] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} x_\alpha p_\alpha \quad \ldots \quad (38).$$

Według tejże definicyi wartością średnią wielkości x^2, t. j. kwadratu wielkości x, będzie:

$$[x^2] = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} x_\alpha^2 p_\alpha \quad . \quad . \quad (39).$$

Przykład. Niechaj wielkość x przybiera wartości 3, 4, 5, w razie wylosowania odpowiednio kuli białej, czarnej i czerwonej z urny, w której znajduje się 8 kul białych, 5 czarnych i 3 czerwone. Jaka jest wartość średnia wielkości x i jej kwadratu?

W tym przykładzie mamy:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 5; \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{5}{16}, \quad p_3 = \frac{3}{16};$$

będzie zatem:

$$[x] = 3 . \frac{1}{2} + 4 . \frac{5}{16} + 5 . \frac{3}{16} = 3 \frac{11}{16},$$

$$[x^2] = 9 . \frac{1}{2} + 16 . \frac{5}{16} + 25 . \frac{3}{16} = 14 \frac{3}{16}.$$

Podamy kilka twierdzeń o wartości średniej

25. Twierdzenie I. Wartość średnia sumy wielkości niezależnych równa się sumie ich wartości średnich.

Niechaj będą najprzód dwie wielkości x i y, z których pierwsza może przyjmować n wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z prawdopodobieństwem odpowiednio równem $p_1, p_2, \ldots, p_n$, druga niezależnie od pierwszej może przyjmować m wartości $y_1, y_2, \ldots, y_m$ z prawdopodobieństwem odpowiednio równem $q_1, q_2, \ldots, q_m$, gdzie:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} p_\alpha = 1; \quad q_1 + q_2 + \cdots + q_m = \sum_{\beta=1}^{\beta=m} q_\beta = 1 \quad (40).$$

Według określenia (38) mamy:

$$\left.\begin{aligned} [x] &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} x_\alpha p_\alpha \\ [y] &= y_1 q_1 + y_2 q_2 + \ldots + y_m q_m = \sum_{\beta=1}^{\beta=m} y_\beta q_\beta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (41).$$

Suma $x + y$ wielkości x, y, zmieniających się niezależnie jedna od drugiej, będzie mogła tedy przyjmować wartości:

$$x_1 + y_1, x_1 + y_2, + \ldots, x_1 + y_m, x_2 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_m,$$

których jest oczywiście $n\,m$. Możemy którąkolwiek z nich oznaczyć przez $x_\alpha + y_\beta$, gdzie α zmienia się od 1 do n, β od 1 do m. Prawdopobieństwo wartości $x_\alpha + y_\beta$ będzie prawdopodobieństwem zejścia się dwu zdarzeń, t. j. dwu wartości x_α i y_β i jako takie będzie równe iloczynowi prawdopodobieństwa wartości x_α przez prawdopodobieństwo wartości y_β, t. j. będzie równe $p_\alpha\, q_\beta$. Będzie zatem według określenia (38):

$$[x + y] = \sum_{\alpha=1,\,\beta=1}^{\alpha=n,\,\beta=m} (x_\alpha + y_\beta)\, p_\alpha\, q_\beta.$$

Lecz:

$$\sum_{\alpha=1,\,\beta=1}^{\alpha=n,\,\beta=m} (x_\alpha + y_\beta)\, p_\alpha\, q_\beta = \sum_{\alpha=1,\,\beta=1}^{\alpha=n,\,\beta=m} x_\alpha\, p_\alpha\, q_\beta + \sum_{\alpha=1,\,\beta=1}^{\alpha=n,\,\beta=m} y_\beta\, p_\alpha\, q_\beta$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\beta=m} q_\beta \cdot \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} x_\alpha\, p_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} p_\alpha \sum_{\beta=1}^{\beta=m} p_\beta\, q_\beta.$$

Uwzględniając tu równości (40) i (41), otrzymujemy:

$$\sum_{\alpha=1,\,\beta=1}^{\alpha=n,\,\beta=m} (x_\alpha + y_\beta)\, p_\alpha\, q_\beta = [x] + [y],$$

będzie zatem:

$$[x + y] = [x] + [y] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42).$$

Twierdzenie zostało tym sposobem dowiedzione w przypadku dwu wielkości, ale bardzo łatwo rozciągnąć je na jakąkolwiek (skończoną) liczbę składników. Gdy bowiem dane są trzy wielkości x, y, z, wtedy sumę ich przedstawić można jako sumę dwu składników x i $y + z$, a wtedy według dowiedzionej już równości (42), będzie:

$$[x + (y + z)] = [x] + [y + z].$$

Lecz według tegoż wzoru (42) jest:

$$[y + z] = [y] + [z],$$

będzie zatem:

$$[x + y + z] = [x] + [y] + [z]$$

i t. d. Tym sposobem twierdzenie uważać można za całkowicie dowiedzione.

26. Twierdzenie II. Wartość średnia iloczynu wielkości niezależnych równa się iloczynowi ich wartości średnich.

Niechaj, jak wyżej, będą najprzód dwie wielkości x, y. Iloczyn ich $x\,y$ przyjmować może następujące wartości:

$$x_1\,y_1,\ x_1\,y_2,\ldots,\ x_1\,y_m,\ x_2\,y_1,\ x_2\,y_2,\ldots,\ x_n\,y_m,$$

których jest $n\,m$; którąkolwiek z nich oznaczyć możemy przez $x_\alpha\,y_\beta$, gdzie α zmienia się od 1 do n, β od 1 do m. Prawdopodobieństwo wartości $x_\alpha\,y_\beta$, podobnie jak wyżej, prawdopodobieństwo wartości $x_\alpha + y_\beta$, będzie równe $p_\alpha\,q_\beta$.

Będzie zatem według określenia (38):

$$[x\,y] = \sum_{\alpha=1,\ \beta=1}^{\alpha=n,\ \beta=m} x_\alpha\,y_\beta\,.\,p_\alpha\,q_\beta.$$

Lecz:

$$\sum_{\alpha=1,\ \beta=1}^{\alpha=n,\ \beta=m} x_\alpha\,y_\beta\,.\,p_\alpha\,q_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} x_\alpha\,p_\alpha\,.\sum_{\beta=1}^{\beta=m} y_\beta\,q_\beta\,.$$

Strona druga według wzorów (41) równa się $[x]\,.\,[y]$, otrzymujemy przeto:

$$[x\,y] = [x]\,.\,[y] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (43).$$

Twierdzenie zostało tym sposobem dowiedzione dla dwu czynników. Lecz podobnie jak dla sumy łatwo je rozciągnąć na większą liczbę (skończoną) czynników. Jeżeli mamy naprzykład trzy wielkości x, y, z, będzie:

$$x\,.\,y\,.\,z = x\,.\,y\,z,$$

a więc według wzoru (43):

$$[x\,y\,z] = [x]\,.\,[y\,z].$$

Według tegoż wzoru jest:

$$[y\,z] = [y]\,.\,[z],$$

a zatem:

$$[x\,y\,z] = [x]\,.\,[y]\,.\,[z].$$

W podobny sposób dowodzi się twierdzenia dla trzech i większej liczby czynnników i tym sposobem można je uważać za udowodnione.

27. Zadanie. Wyznaczyć średnią kwadratów różnic pomiędzy wartościami dwu wielkości a ich wartością średnią.

Niechaj będą dwie wielkości x i y; jednę którąkolwiek z wartości ich sumy $x+y$ oznaczmy przez $x_\alpha+y_\beta$, a wartość średnią ich sumy, jak wyżej przez $[x+y]$. Mamy wyznaczyć wartość średnią sumy wyrażeń:

$$\{x_\alpha + y_\beta - [x+y]\}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44),$$

którą otrzymamy, zmieniając α od 1 do n, β od 1 do m. Prawdopodobieństwo wyrażenia (44) jest oczywiście równe $p_\alpha\, q_\beta$, a więc szukana wartość średnia D wyrazi się tak:

$$D = \sum_{\alpha=1,\ \beta=1}^{\alpha=n,\ \beta=m} \{x_\alpha + y_\beta - [x+y]\}^2 p_\alpha\, q_\beta.$$

Kładąc dla skrócenia:

$$x_\alpha + y_\beta = t_{\alpha\beta}, \quad x+y=t,$$

będziemy mieli:

$$D = \sum_{\alpha=1,\ \beta=1}^{\alpha=n,\ \beta=m} \{t_{\alpha\beta} - [t]\}^2 p_\alpha\, q_\beta.$$

Lecz:

$$\{t_{\alpha\beta} - [t]\}^2 = t_{\alpha\beta}^2 - 2[t]\, t_{\alpha\beta} + [t]^2,$$

przeto:

$$D = \sum_{\alpha=1,\ \beta=1}^{\alpha=n,\ \beta=m} t_{\alpha\beta}^2\, p_\alpha\, q_\beta - 2[t] \sum_{\alpha=1,\ \beta=1}^{\alpha=n,\ \beta=m} t_{\alpha\beta}\, p_\alpha\, q_\beta + [t]^2 \sum_{\alpha=1,\ \beta=1}^{\alpha=n,\ \beta=m} p_\alpha\, q_\beta.$$

Według wzorów (41) i (40) jest:

$$\sum_{\alpha=1,\ \beta=1}^{\alpha=n,\ \beta=m} t_{\alpha\beta}^2\, p_\alpha\, q_\beta = [t^2],$$

$$\sum_{\alpha=1,\ \beta=1}^{\alpha=n,\ \beta=m} t_{\alpha\beta}\, p_\alpha\, q_\beta = [t],$$

$$\sum_{\alpha=1,\ \beta=1}^{\alpha=n,\ \beta=m} p_\alpha\, q_\beta = 1;$$

będzie przeto:

$$D = [t^2] - 2[t].[t] + [t]^2 = [t^2] - [t]^2,$$

t. j. szukane prawdopodobieństwo równa się średniej kwadratu sumy zmniejszonej o kwadrat wartości średniej tej sumy.

Jeżeli przywrócimy znów x i y i wykonamy łatwe przekształcenia po drugiej stronie, dojdziemy do wzoru:

$$D = \sum_{\alpha=1,\,\beta=1}^{\alpha=n,\,\beta=m} \{x_\alpha + y_\beta - [x] - [y]\}^2 p_\alpha q_\beta = [x^2] + [y^2] - [x]^2 - [y]^2 \quad (45).$$

28. Uogólnienie poprzedniego zadania. Zadanie poprzednie łatwo rozciągnąć na sumę ilukolwiek wielkości $x, y, z, \ldots$, z których pierwsza przyjmować może wartości x_α z prawdopodobieństwem p_α (gdzie α zmienia się od 1 do n), druga wartości y_β z prawdopodobieństwem q_β (gdzie β zmienia się od 1 do m), trzecia wartości z_γ z prawdopodobieństwem r_γ (gdzie γ zmienia się od 1 do l) i t. d. Opierając się na wzorze (44), dowiedzionym dla przypadku dwu wielkości, i na wzorach (41) i (40), określających wartości średnie, można dowieść ogólnie, że średnia D kwadratów różnic pomiędzy wartościami sumy $x + y + z + \ldots$ a sumą średnich ich watości wyraża się w sposób następujący:

$$D = \sum_{\alpha=1,\,\beta=1,\,\gamma=1,\ldots}^{\alpha=n,\,\beta=m,\,\gamma=l,\ldots} \{x_\alpha + y_\beta + z_\gamma + \ldots - [x] - [y] - [z] - \ldots\}^2 p_\alpha q_\beta r_\gamma \ldots$$

$$= [x^2] +]y^2] + [z^2] + \ldots - [x]^2 - [y]^2 - [z]^2 - \ldots \quad (46),$$

t. j. równa się sumie średnich wartości kwadratów $x^2, y^2, z^2, \ldots$ zmniejszonej o sumę kwadratów wartości średnich wielkości x, y, z.

Jeżeli dla skrócenia oznaczymy:

$$[x] = a, \quad [y] = b, \quad [z] = c, \ldots$$

$$[x^2] = a_1, \quad [y^2] = b_1, \quad [z^2] = c_1, \ldots$$

będzie:

$$\sum_{\alpha=1,\,\beta=1,\,\gamma=1,\ldots}^{\alpha=n,\,\beta=m,\,\gamma=l,\ldots} [x_\alpha + y_\beta + z_\gamma + \ldots - a - b - c \ldots]^2 p_\alpha q_\beta r_\gamma \ldots$$

$$= a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots \quad (46'),$$

lub wreszcie:

$$\sum_{\alpha=1,\,\beta=1,\,\gamma=1,\ldots}^{\alpha=n,\,\beta=m,\,\gamma=l,\ldots} \frac{[x_\alpha + y_\beta + z_\gamma + \ldots - a - b - c + \ldots]^2}{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots} p_\alpha q_\beta r_\gamma \ldots = 1 \quad (46'').$$

29. Twierdzenie III. Wzór (46″) możemy jeszcze, pomnożywszy obie jego strony przez jakąkolwiek liczbę k^2 większą od 1, napisać tak:

$$\sum_{\alpha=1,\,\beta=1,\,\gamma=1\ldots}^{\alpha=n,\,\beta=m,\,\gamma=l\ldots} \frac{(x_\alpha + y_\beta + z_\gamma \ldots - a - b - c - \ldots)^2}{k^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots)} p_\alpha q_\beta r_\gamma \ldots = \frac{1}{k^2}.$$

Spółczynniki postaci ułamkowej po stronie pierwszej przy $p_\alpha q_\beta r_\gamma \ldots$ mogą być albo mniejsze od 1, albo większe od 1, albo wreszcie równe 1. Te wyrazy, w których ten spółczynnik jest od 1 mniejszy, usuńmy w myśli, a te, w których jest od 1 większy, zastąpmy przez 1. Tym sposobem nowa pomyślana suma, z pewnością mniejsza od powyższej, składać się będzie jedynie z wyrazów postaci $p_\alpha q_\beta r_\gamma \ldots$, gdzie $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ nie będą już przyjmowały wszystkich wartości wyżej przy znaku Σ wskazanych, lecz tylko te, dla których zachodzi nierówność:

$$\frac{(x_\alpha + y_\beta + z_\gamma + \ldots - a - b - c - \ldots)^2}{k^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2)} \geqq 1 \quad . \quad . \quad (47),$$

bo tylko te wyrazy pozostały. Oznaczmy nową sumę przez:

$$\sum{}' p_\alpha q_\beta r_\gamma \ldots,$$

gdzie znak ′ ma zaznaczyć, że nowa suma rozciąga się na wyrazy, czyniące zadość nierówności (47). Będzie zatem:

$$\sum{}' p_\alpha q_\beta r_\gamma \ldots < \frac{1}{k^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48).$$

Lecz strona pierwsza nierówności (48) jest sumą prawdopodobieństw złożonych, wyrażającą oczywiście prawdopodobieństwo zachodzenia nierówności (47). Widzimy tedy, że dobierając odpowiednie k, można sprawić, że to prawdopodobieństwo będzie tak małe, jak chcemy.

Prawdopodobieństwo P zdarzenia przeciwnego, t. j. prawdopodobieństwo zachodzenia nierówności:

$$\frac{(x_\alpha + y_\beta + z_\lambda + \ldots - a - b - c - \ldots)^2}{k^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots)} < 1 \quad . \quad . \quad (49),$$

będzie równe $1 - \sum p_\alpha q_\beta r_\gamma \ldots$; na mocy nierówności (48) będzie ono większe od $1 - \frac{1}{k^2}$, czyli:

$$P > 1 - \frac{1}{k^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50).$$

Jeżeli nierówność (49) napiszemy w postaci:

$$(x_\alpha + y_\beta + z_\gamma + \ldots - a - b - c - \ldots)^2 < k^2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots$$
$$\ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots),$$

lub też:

$$x_\alpha + y_\beta + z_\gamma + \ldots - a - b - c - \ldots$$
$$< k\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots},$$

to z uwagi, że pierwiastek kwadratowy po stronie drugiej może być znaku dodatniego lub ujemnego, będzie można powiedzieć, że:

Prawdopodobieństwo P, że różnica:

$$x_\alpha + y_\beta + z_\gamma + \ldots - a - b - c - \ldots$$

zawiera się pomiędzy dwiema granicami:

$$-k\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots},$$
$$+k\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots},$$

albo, co na jedno wychodzi, że suma

$$x_\alpha + x_\beta + z_\gamma + \ldots$$

zawiera się pomiędzy granicami:

$$a + b + c + \ldots - k\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots}$$
i $$a + b + c + \ldots + k\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots}$$

jest większe od $1 - \frac{1}{k^2}$.

Twierdzenie to zawdzięczamy Czebyszowowi (1867)*).

30. Wartości średnie i średnie arytmetyczne. Niechaj liczba wielkości x, y, z, wynosi n. Połóżmy:

$$k = \frac{\sqrt{n}}{t},$$

wtedy z powyższego twierdzenia otrzymujemy bezpośrednio, że:

$$\frac{x_\alpha + x_\beta + z_\gamma + \ldots}{n}$$

zawiera się pomiędzy:

$$\frac{a + b + c + \ldots}{n} - \frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots}{n} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}{n}},$$

*) Dowód tego twierdzenia według kursu prof. Markowa podał B. Danielewicz w tomie V „Wiadomości Matematycznych" (1901 r., str. 211 — 223).

$$\frac{a+b+c+\ldots}{n}+\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{n}-\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{n}}$$

z prawdopodobieństwem P większem od $1-\frac{t^2}{n}$.

Wielkości:

$$\frac{x_\alpha+y_\beta+z_\gamma+\ldots}{n},\quad \frac{a+b+c+\ldots}{n},\quad \frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{n},$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{n},$$

są to średnie arytmetyczne: pierwsza wartości $x_\alpha, x_\beta, z_\gamma, \ldots$, druga wartości średnich, trzecia średnich wartości kwadratów, czwarta kwadratów wartości średnich. Jeżeli wymienione tu wartości średnie pozostają w pewnych stałych granicach, to i średnie ich arytmetyczne nie przekraczają granic oznaczonych, a wtedy wniosek ten wyraża, że prawdopodobieństwo P, iż różnica pomiędzy średnią arytmetyczną

$$\frac{x_\alpha+y_\beta+z_\gamma+\ldots}{n}$$

a średnią arytmetyczną wartości średnich

$$\frac{a+b+c+\ldots}{n}=\frac{[x]+[y]+[z]+\ldots}{n}$$

przy wzrastaniu liczby n maleje nieograniczenie, różni się od jedności tak mało, jak chcemy.

31. Prawo wielkich liczb—jako wniosek z Twierdzenia III. Zastosujmy powyższe twierdzenie do następującego przypadku szczególnego. Niechaj każda z n wielkości $x, y, z, \ldots$ przyjmuje tylko dwie wartości, związane z prawdopodobieństwem zdarzenia A w n próbach w ten sposób. Wielkość x równa się 1, gdy urzeczywistnia się zdarzenie A, którego prawdopodobieństwo w pierwszej próbie jest $p^{(1)}$, równa się zaś 0, gdy zdarzenie A nie urzeczywistnia się w tej próbie, lub co na jedno wychodzi, gdy urzeczywistnia się zdarzenie nie-A, którego prawdopodobieństwo jest $1-p^{(1)}$. Wielkość y przyjmuje wartość równą 1, gdy urzeczywistnia się w drugiej próbie zdarzenie A, którego prawdopodobieństwo w tej próbie jest $p^{(2)}$, wartość zaś równą 0, gdy w drugiej próbie nie urzeczywistnia się to zdarzenie lub, co na jedno wychodzi, gdy urzeczywistnia się w tej próbie zdarzenie nie-A, którego prawdopodobieństwo jest $1-p^{(2)}$. Analogicznie rzecz się ma z wielkościami $z, \ldots, w$, z których ostatnia w staje się równą 1, gdy urzeczywistnia się w n-tej próbie zdarzenia A, którego prawdopodobieństwo w tej próbie równa się $p^{(n)}$, równą zaś 0, gdy urzeczywistnia się zdarzenie nie-A, którego prawdopodobieństwo jest $1-p^{(n)}$.

Przy tych założeniach suma wartości $x+y+\ldots+w$ w n próbach będzie oczywiście równa liczbie μ pojawień się zdarzenia A w n próbach, a średnia arytmetyczna:

$$\frac{x+y+z+\ldots+w}{n}$$

będzie równa $\frac{\mu}{n}$, t. j. częstości względnej pojawienia się zdarzenia A w tych n próbach.

Wartości średnie będą miały następujące wartości:

$$a=p^{(1)}.1+(1-p^{(1)}).0=p^{(1)},\quad a_1=p^{(1)}.1^2+(1-p^{(1)}).0^2=p^{(1)};$$
$$b=p^{(2)}.1+(1-p^{(2)}).0=p^{(2)},\quad b_1=p^{(2)}.1^2+(1-p^{(2)}).0^2=p^{(2)};$$
$$c=p^{(3)}.1+(1-p^{(3)}).0=p^{(3)},\quad c_1=p^{(3)}.1^2+(1-p^{(3)}).0^2=p^{(3)};$$

. . . .

Jeżeli te wartości wprowadzimy do twierdzenia w art. 30, będzie można powiedzieć, 1-o) że prawdopodobieństwo P, iż wartość względna $\frac{\mu}{n}$ zawiera się pomiędzy granicami:

$$\frac{p^{(1)}+p^{(2)}+\ldots+p^{(n)}}{n}-\frac{1}{t}\sqrt{\frac{p^{(1)}+p^{(2)}+\ldots+p^{(n)}}{n}-\frac{p^{(1)2}+p^{(2)2}+\ldots+p^{(n)2}}{n}},$$

$$\frac{p^{(1)}+p^{(2)}+\ldots+p^{(n)}}{n}+\frac{1}{t}\sqrt{\frac{p^{(1)}+p^{(2)}+\ldots+p^{(n)}}{n}-\frac{p^{(1)2}+p^{(2)2}+\ldots+p^{(n)2}}{n}}.$$

jest większe od $1-\frac{t^2}{n}$, oraz, 2-o) że w miarę wzrastania liczby n częstość względna $\frac{\mu}{n}$ zbliża się do średniej arytmetmetycznej prawdopodobieństw

$$\frac{p^{(1)}+p^{(2)}+\ldots p^{(n)}}{n}$$

zdarzenia A w n próbach tem bardziej, im liczba n jest większa.

Jest to, jak widzimy, treść istotna twierdzenia Poissona, o którem była mowa w art. 19.

Załóżmy, że:

$$p^{(1)} = p^{(2)} = \ldots = p^{(n)} = p; \quad 1 - p = q,$$

t. j., że zdarzenie A ma prawdopodobieństwo stałe we wszystkich n próbach. W tym przypadku będzie:

$$\frac{p^{(1)} + p^{(2)} + \ldots + p^{(n)}}{n} = p.$$

$$\frac{p^{(1)2} + p^{(2)2} + \ldots + p^{(n)2}}{n} = p^2.$$

a częstość względna $\frac{\mu}{n}$ zawierać się będzie pomiędzy granicami:

$$p - \frac{1}{t}\sqrt{p - p^2} = p - \frac{1}{t}\sqrt{p(1-p)} = p - \frac{1}{t}\sqrt{pq},$$

$$p + \frac{1}{t}\sqrt{p - p^2} = p - \frac{1}{t}\sqrt{p(1-p)} = p + \frac{1}{t}\sqrt{pq},$$

Ponieważ $t = \frac{\sqrt{n}}{k}$, będzie:

$$\frac{1}{t}\sqrt{pq} = k\sqrt{\frac{pq}{n}},$$

otrzymamy więc:

$$p - k\sqrt{\frac{pq}{n}} < \frac{\mu}{n} < p + k\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Nierówność ta zachodzi z prawdopodobieństwem $P = 1 - \frac{k^2}{n}$, tem bliższem jedności, im n jest większe.

Jest to twierdzenie Bernoulli'ego (por. art. 14).

Widzimy więc, że prawo wielkich liczb, obejmujące w sobie twierdzenia Bernoulli'ego i Poissona, jest wynikiem czysto teoretycznym pojęcia prawdopodobieństwa i wartości średniej.

32. Nadzieja matematyczna. Jeżeli w określeniu wartości średniej wielkości x podanem w art. 24, mianowicie we wzorze:

$$[x] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

przyjmiemy, że mamy $n=2$, t. j., że mamy dwa zdarzenia A i nie-A przeciwne o prawdopodobieństwach p i $1-p$, oraz, że wielkość x przyjmuje tylko dwie wartości: jednę równą x w razie urzeczywistnienia się zdarzenia A, drugą 0 w razie urzeczywistnienia się zdarzenia nie-A, otrzymamy:

$$[x] = x \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = xp.$$

Widzimy więc, że w tym przypadku wartość średnia wielkości x równa się samej wielkości x, pomnożonej przez prawdopodobieństwo jej urzeczywistnienia. Ten iloczyn nazywany bywa nadzieją matematyczną wielkości x, a to ze względu na zastosowania, jakie znajduje w teoryi gier losowych, o której mowa będzie w Rozdziale następnym. Jeżeli np. ktoś oczekuje wygranej 120 rubli w razie wyjścia kuli białej z urny, w której znajduje się 7 kul białych i 5 kul czarnych, wtedy jego nadzieja matematyczna pozyskania tej wygranej jest:

$$120 \cdot \frac{7}{12} = 70.$$

Osoba, której wygrana związana jest z wyciągnięciem kuli czarnej, ma nadzieję matematyczną pozyskania wygranej równą:

$$120 \cdot \frac{5}{12} = 50.$$

Szanse wygranej obu tych osób są nierówne, gdyż pierwsza posiada większe prawdopodobieństwo wygranej niż druga. Aby gra była sprawiedliwą, stawki tych osób w grze muszą być proporcyonalne do prawdopodobieństw wygranej.

Jeżeli idzie o prawdopodobieństwo przegranej czyli straty, to zamiast nazwy nadziei matematycznej, można stosować nazwę obawy matematycznej, która zatem równa się iloczynowi oczekiwanej sumy przez prawdopodobieństwo przegrania jej. W poprzednim przykładzie obawa matematyczna dla pierwszego gracza jest:

$$120 \cdot \frac{5}{12} = 50,$$

dla drugiego zaś:

$$120 \cdot \frac{7}{12} = 70.$$

Czyli, że w tym przypadku nadzieja matematyczna pierwszego gracza jest równa co do wielkości obawie matematycznej drugiego, i odwrotnie.

W rachunkach iloczyny, wyrażające nadzieję i obawę matematyczną, wprowadzają się jako wielkości znaków przeciwnych.

Łatwo pojęcie nadziei matematycznej uogólnić na większą liczbę oczekiwanych zysków lub strat. Jeżeli np. w pewnem przedsięwzięciu lub grze losowej $x_1, x_2, \ldots x_n$ są zyski i straty albo wygrane i przegrane, oczekiwane z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, \ldots, p_n$, wtedy nadzieją matematyczną oczekiwanego zysku (lub straty) nazywamy sumę iloczynów wartości x przez ich prawdopodobieństwa, t. j. wyrażenie:

$$x_1 p + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Widzimy więc, że nadzieja matematyczna jest to zupełnie to samo, co wartość średnia określona w art. 24. I dla tego to do nadziei matematycznej stosują się wszystkie twierdzenia, udowodnione wyżej dla wartości średnich.

ROZDZIAŁ IV.

Gry losowe.

1. Wiadomości wstępne. Urządzenie tego rodzaju, że zysk lub strata osób, biorących w niem udział, zależy od zajścia lub niezajścia pewnego zdarzenia losowego, nazywa się grą losową.

Osoby biorące udział w grze zowią się graczami; sumy, płacone przez graczów za prawo wzięcia udziału w grze, nazywają się stawkami, a sumy ewentualnie otrzymywane przez nich — wygranemi. Jednorazowe wywołanie zdarzenia losowego, decydującego czy gracz wygrał lub przegrał, nazywać będziemy partyą.

Można rozróżnić dwa odcienia gier losowych: w pierwszym rodzaju gracze płacą stawki dopiero po rozegraniu partyi, w drugim stawki płacą się z góry i, bez względu na rezultat partyi, nie są graczom zwracane. Gry pierwszego rodzaju nazywać będziemy zakładowemi (zakładami), gry drugiego rodzaju bankowemi.

Jeżeli np. gracz A obowiązuje się zapłacić s_1 rubli graczowi B, gdy ten wyrzuci kością do gry asa lub szóstkę, zaś B zapłaci s_2 rubli graczowi A, jeżeli nie wyrzuci asa lub szóstki, wtedy gra jest zakładową, w której B trzyma za asem lub szóstką, A za pozostałą liczbą oczek — za dwójką, trójką, czwórką i piątką. Jeżeli zaś gracz A płaci z góry i bezpowrotnie graczowi B (bankierowi) s rubli za to, żeby otrzymał odeń w rubli w razie wyrzucenia kością dwójki, trójki, czwórki lub piątki, wówczas gra jest bankową.

Chodzi o zbadanie warunków, w jakich grę można uważać za równoważną czyli, jak się często mówi, za sprawiedliwą.

2. Gry zakładowe. Niech osoba A trzyma za zdarzeniem a, zachodzącem z prawdopodobieństwem p, osoba B za zdarzeniem b, zachodzącem z prawdopodobieństwem q, w tem znaczeniu, że jeżeli zajdzie zdarzenie a, osoba A otrzyma od osoby B kwotę s_2; jeżeli zaś zajdzie zdarzenie b, osoba B otrzyma od osoby A kwotę s_1, czyli s_1 jest stawką osoby A, s_2 stawką osoby B. Zachodzi pytanie, jak mają być ustosunkowane stawki s_1 i s_2, aby gra przedstawiała jednakowe dla obu graczów widoki, czyli aby była równoważną (sprawiedliwą).

Z Rozdziału III-go wiemy, że w n próbach, a jak obecnie — w n partyach największe prawdopodobieństwo posiada przypadek, w którym zdarzenie a zajdzie np razy, zdarzenie b razy nq. To największe prawdopodobieństwo jest wogóle bardzo małe i tem mniejsze, im więcej rozgrywamy partyj, skutkiem czego najczęściej zdarzenia a i b nie zachodzą np, względnie nq razy, lecz rezultat rzeczywisty odchyla się od tych liczb najprawdopodobniejszych i zawsze obliczyć można, z jakiem prawdopodobieństwem na ile się odchyli, oraz można obliczyć odchylenia średnie liniowe i kwadratowe (Rozdział III-ci, art. 16-y i 17-y). Nie można wszakże przewidzieć, na którą stronę odchylenie padnie, tak dobrze bowiem paść może na stronę gracza A jak na stronę gracza B i dlatego, bez wyrządzeniu obu graczom krzywdy, możemy poprzestać na przewidywaniu rezultatu najprawdopodobniejszego, t. j. na przyjęciu, że A wygra np razy, gracz B nq razy, a temsamem, że gracz A otrzyma $s_2 np$ od gracza B, zaś gracz B otrzyma $s_1 nq$ od gracza A

Jeżeli, przed rozpoczęciem gry, żaden z graczów nie ma mieć więcej widoków na odniesienie zysku, powinno być:

$$s_2 np = s_1 nq,$$

skąd:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{p}{q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

t. j. stawki graczów powinny być proporcyonalne do prawdopodobieństw zdarzeń, za jakiemi gracze trzymają.

I warunek taki jest zrozumiały, sprawiedliwą albowiem wydaje się być rzeczą, aby większe prawdopodobieństwo wygrania jednej strony było zrównoważone przez mniejszą stawkę strony drugiej.

Z (1) wypada:

$$s_2 . p = s_1 . q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1').$$

Ponieważ $s_2 p$ nazywa się nadzieją matematyczną gracza A, $s_1 q$ nadzieją matematyczną gracza B (Rozdział III, art. 32), przeto zasadę (1′) można wyrazić słowami: gra jest równoważna, gdy nadzieje matematyczne graczów są wzajem sobie równe. Albo jeszcze, z uwagi, że nadzieja matematyczna jednej strony jest obawą matematyczną strony drugiej, można powiedzieć: gra jest równoważna, gdy nadzieja matematyczna gracza jest równa jego obawie matematycznej.

Zasada powyższa daje możność obliczenia wzajemnych stawek graczów w każdej grze losowej równoważnej. I tak, jeżeli np. jeden gracz trzyma w grze kością za piątką i szóstką i płaci w razie przegranej 60 kop., to drugi gracz, trzymający za asem, dwójką, trójką i czwórką, przeciwstawić powinien 120 kop., gdyż:

$$\frac{x}{60} = \frac{4}{6} : \frac{2}{6}, \text{ t. j. } x = 60 \times 2 = 120.$$

Jeżeli gracz za wyjęcie króla z talii kart (52 karty w talii, w nich czterech króli) otrzymuje 120 kop., to za niewyjęcie króla, czyli za wyjęcie którejkolwiek innej karty zapłacić powinien 10 kop., gdyż:

$$x . \frac{48}{52} = 120 . \frac{4}{52}, \text{ t. j. } x = 10.$$

Przy tak obliczonych stawkach, najprawdopodobniejszym rezultatem rozegrania bardzo wielkiej liczby partyj będzie zrównoważenie się wygranych z przegranemi u obu graczów. Dla jednej partyi, albo dla niewielkiej ich liczby obliczenia powyższe nie mają żadnego znaczenia, nabierają pewnej aktualności (z uwzględnieniem możliwych odchyleń) wtedy dopiero, gdy je zastosujemy do takiej liczby partyj (zawsze bardzo wielkiej), na jakiej objawić się może t. zw. prawo wielkich liczb. O tym warunku nigdy zapominać nie należy.

Gdyby np. w pierwszej grze rzucono kość, dajmy na to, 600000 razy, to nie więcej jak cztery oczka, z największem prawdopodobieństwem, będą wyrzucone $600000 \times \frac{4}{6} = 400000$ razy, zaś więcej niż cztery oczka razy $600000 \times \frac{2}{6} = 200000$, i jeżeli tak się stanie, pierwszy gracz otrzyma $1{,}20 \times 200000 = 240000$ rubli, drugi $0{,}60 \times 400000 = 240000$ rubli, t. j. żaden z nich nic nie wygra ani nie przegra.

Od tego rezultatu najprawdopodobniejszego zachodzić mogą rozmaite odchylenia, których średnia liniowa (jednostronna) wynosi (Rozdział III-ci, art. 16):

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 . \frac{4}{6} . \frac{2}{6} . 600000}{\pi}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{600000}{3{,}14}} = 146 \text{ partyj}.$$

3. Gry bankowe. Gra bankowa różni się, jak wiemy, od zakładowej tem tylko, że bankier otrzymuje od gracza stawkę bezzwrotnie, podczas gdy gracz otrzymuje lub nie otrzymuje wygranej, stosownie do tego, czy zdarzenie, na jakie stawia, zajdzie lub nie zajdzie. Innemi słowy, bankier gra o stawkę na pewno, t. j. z prawdopodobieństwem $= 1$, zaś gracz o wygraną z prawdopodobieństwem $p < 1$.

Jeżeli więc stawkę sprawiedliwą gracza oznaczymy, raz na zawsze, przez s (małe), wygraną czyli stawkę bankiera przez w, to, według wzoru (1), powinno być:

$$\frac{s}{w}=\frac{p}{1};$$

stąd:

$$s=wp \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (2).$$

Że zaś wp jest nadzieją matematyczną gracza, zatem stawka sprawiedliwa gracza, w grze bankowej, równa się jego nadziei matematycznej.

Do tego samego rezultatu dojść jeszcze można drogą następującą. Warunek bezzwrotnego otrzymania stawki przez bankiera można zastąpić umową, że gracz nie płaci z góry bankierowi stawki s, lecz dopiero po przegraniu; natomiast, jeżeli wygra, nie otrzyma całkowitej wygranej w, tylko zmniejszoną o niezapłaconą stawkę, t. j. otrzyma $w-s$. Tym sposobem, nic nie zmieniając w zasadzie, przekształcamy grę bankową na zakładową, w której gracz trzyma za zdarzeniem o prawdopodobieństwie p przy stawce s, bankier za zdarzeniem o prawdopodobieństwie $1-p$ przy stawce $w-s$. Na podstawie wzoru (1) mamy wtedy:

$$\frac{s}{w-s}=\frac{p}{1-p},$$

skąd: $s-sp=wp-sp$, a stąd znów $s=wp$ — tak samo jak we wzorze (2).

Z wzoru (2) możemy tak dobrze obliczyć stawkę sprawiedliwą z danej wygranej jak wygraną z danej stawki; otrzymujemy mianowicie:

$$w=\frac{s}{p} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (2').$$

Np. jeżeli w urnie jest 12 kul: 4 białe, 2 czarne, 6 czerwonych i bankier za wyjęcie kuli białej płaci 75 kop., to stawką sprawiedliwą gracza jest 25 kop., gdyż:

$$s=75\,.\,\frac{4}{12}=25\,.$$

Jeżeli, naodwrót, gracz stawia na kulę białą 30 kop., bankier, w razie wyjęcia kuli białej, zapłacić powinien 90 kop., gdyż:

$$w=30:\frac{4}{12}=90\,.$$

I płacąc tak uczyni grę równoważną, gdyż np. za 120000 ciągnień gracz zapłaci bankierowi $30 \times 120000 = 36000$ rub., ponieważ zaś w tych 120000 ciągnieniach kula biała wyjdzie, z największem prawdopodobieństwem, $120000 \times \frac{4}{12} = 40000$ razy, zatem bankier najprawdopodobniej wypłaci graczowi $90 \times 40000 = 36000$ rub., t. j. tyleż, ile stawkami otrzymał od gracza. W tej grze odchylenie średnie liniowe wynosi 65 partyj wygranych lub przegranych.

4. **Gra złożona.** Gracz zresztą może trzymać nie za jednem tylko zdarzeniem, lecz za większą ich liczbą, nawet za wszystkiemi, jakie w danem urządzeniu trafić się mogą, a stawkę sprawiedliwą zawsze obliczyć można, gdy wiemy, ile bankier płaci za zajście każdego zdarzenia.

Dajmy np., że różnego rodzaju zdarzenia, wzajemnie się wyłączające, w liczbie m zachodzą z prawdopodobieństwami: $p_1, p_2, \ldots, p_m$, dopełniającemi się do jedności:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_m = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

t. j., że w danem urządzeniu jedno z tych m zdarzeń koniecznie zajść musi.

Dajmy następnie, iż bankier za zajście tych zdarzeń płaci odpowiednio: $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m$

Zachodzi pytanie, jaką stawkę sprawiedliwą gracz zapłacić powinien, jeżeli trzyma za k pierwszemi zdarzeniami ($k < m$).

Gdyby gracz trzymał tylko za pierwszem zdarzeniem, wtedy, na podstawie (2), zapłacić powinien, tytułem stawki, $w_1 . p_1$; gdyby trzymał tylko za drugiem, zapłaciłby $w_2 . p_2$ i t. d., gdyby trzymał za k-tem zdarzeniem, zapłaciłby $w_k . p_k$. Skoro więc trzyma za wszystkiemi k pierwszemi zdarzeniami, stawka jego wynieść powinna:

$$s = w_1 . p_1 + w_2 . p_2 + \ldots + w_k . p_k . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Gdyby trzymał za wszystkiemi m zdarzeniami, po założeniu w (4) $k = m$, otrzymujemy:

$$s = w_1 . p_1 + w_2 . p_2 + \ldots + w_m . p_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4').$$

Jeżeli np. bankier płaci tyle rubli ile oczek gracz wyrzuci kością do gry, to stawka sprawiedliwa gracza wynieść powinna:

$$s = 1 . \frac{1}{6} + 2 . \frac{1}{6} + 3 . \frac{1}{6} + 4 . \frac{1}{6} + 5 . \frac{1}{6} + 6 . \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 2 + \ldots + 6) = \frac{1}{6} . \frac{7}{2} . 6 = 3{,}50.$$

I wtedy gra będzie równoważna, gdyż np. za 60000 rzutów gracz zapłaci bankierowi 3,50 $\times$ 60000 $=$ 210000 rub. Tymczasem każda liczba oczek wyjdzie, z największem prawdopodobieństwem, 60000 $\times \frac{1}{6}$ $=$ 10000 razy, zatem gracz otrzyma:

za 10000	asów	1 $\times$ 10000	$=$	10000
„ „	dwójek . . .	2 $\times$ 10000	$=$	20000
„ „	trójek	3 $\times$ 10000	$=$	30000
„ „	czwórek . . .	4 $\times$ 10000	$=$	40000
„ „	piątek	5 $\times$ 10000	$=$	50000
„ „	szóstek . . .	6 $\times$ 10000	$=$	60000
		razem		210000

t. j. tyle ile zapłacił.

Zarówno z poprzedniego jak i z niniejszego artykułu wynika, że nadzieja matematyczna stanowi wartość aktualną ewentualnie (w zależności od zajścia zdarzenia przypadkowego) otrzymać się mającej sumy (wogóle jakiegokolwiek dobra), że więc może służyć za miarę w odpowiednich tranzakcyach i przy ocenianiu wartości naszych projektów życiowych.

5. Ryzyko matematyczne. Gdy wygraną w otrzymujemy z prawdopodobieństwem p i za to bezzwrotnie płacimy stawkę $s = w.p$, to, jeżeli zdarzenie oczekiwane nie zajdzie, ponosimy stratę w wysokości zapłaconej stawki s; inaczej, decydując się na grę, ryzykujemy stawkę z prawdopodobieńswem $1 - p = q$, z jakiem oczekujemy przegranej.

Gdybyśmy chcieli zabezpieczyć się od tej straty, musielibyśmy czy to temu samemu bankierowi, czy też innemu zapłacić wartość naszej obawy matematycznej $= s.q$.

Ten iloczyn nazywa się ryzykiem matematycznem i bywa oznaczany przez R. Otrzymujemy zatem wzór:

$$R = s.q = w.p.q \quad \dots\dots\dots \quad (5),$$

który poucza, że ryzyko rośnie z wzrostem stawki i prawdopodobieństwa przegrania. Ponieważ zaś $q = 1 - p$, przeto ryzyko jest tem większe, im p mniejsze.

Wynika stąd, iż zarówno w grze jak w życiu praktycznem należy unikać wysokich stawek (względnie nakładów) i nie podejmować interesów, posiadających małe widoki powodzenia.

Acz przez zapłacenie kwoty R zabezpieczamy się od stracenia stawki s, niemniej jednak, w razie przegrania, ponosimy stratę w wysokości R, które zapłaciliśmy za zapewnienie sobie zwrotu stawki s w przypadku przegrania partyi. Ewentualna strata jest teraz mniejsza ($R < s$), ale jest: chcąc jej uniknąć, trzeba w dalszym ciągu zabezpieczyć sobie zwrot kwoty R na przypadek przegrania partyi. To pociąga za sobą nową ofiarę w wysokości:

$$R_1 = R.q = sq^2 < R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5').$$

Dla zabezpieczenia znów straty R_1 trzeba zapłacić:

$$R_2 = R_1.q = sq^3 < R_1, \text{ i t. d.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5'').$$

Ewentualną stratę zatem możemy zmniejszać aż do nieskończoności, lecz za to musimy ponosić cały szereg wydatków. Gdybyśmy chcieli całkowicie uwolnić się od straty, musielibyśmy zapłacić:

$$s + sq + sq^2 + sq^3 + \ldots \text{ do nieskończoności}$$

$$= s(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = s.\frac{1}{1-q} = \frac{s}{p} = \frac{wp}{p} = w,$$

t. j. w grze o wygraną w, bez narażenia się na ewentualną stratę, trzeba zapłacić w. Wtedy, jeżeli wygramy, otrzymamy w, jeżeli przegramy, otrzymamy zwrot całego szeregu stawek: s, R, R_1, R_2, . . . , których suma daje także w. W takim jednak razie, widocznie, gra przestaje być grą i przeobraża się w bezcelowe przelewanie pieniędzy z kieszeni do kieszeni.

Gra, jeżeli ma być grą rzeczywistą, musi w sobie mieścić jakieś ryzyko.

6. Wpływ różnicy majątkowej i zręczności graczów na rezultat gier losowych. Z dzieła Wł. Gosiewskiego*) zapożyczamy zadanie, którego rozwiązanie nietylko odpowiada treści niniejszego Rozdziału, ale, co ważniejsza, rzuca bardzo wiele światła na stosunki społeczne wogóle. Wprawdzie do rozwiązania tego zadania potrzebna jest znajomość Rachunku wyższego, sądzimy jednak, że zdołamy rzecz tę przeprowadzić w sposób zrozumiały dla koła naszych czytelników.

Zadanie brzmi jak następuje: Dwaj gracze A i B, których majątki wynoszą po s_1 i s_2 jedności, a prawdopodobieństwa wygrania jednej partyi (względnie zręczność w grze) są odpowiednio równe p i $1-p$, grając w każdej partyi o jedność, przeciągają grę tak długo, aż jeden z nich przegra wszystko. Jakie jest prawdopodobieństwo tej przegranej.

---

*) „Zasady Rachunku prawdopodobieństwa". Warszawa, 1906.

Załóżmy, że suma majątków obu graczów $s_1 + s_2 = s$ jest stała, i dajmy na to, że, po rozegraniu pewnej liczby partyj, gracz A posiada majątku x jedności, gracz B pozostałą część $s - x$. Oznaczmy dalej przez P_x wyrażenie ogólne, zależne od x, które, w chwili posiadania przez gracza A majątku x jedności, przedstawia prawdopodobieństwo zrujnowania się gracza A, czyli stracenia przezeń wszystkiego w dalszej grze.

O tem wyrażeniu wiemy na teraz to tylko, że przy $x = 0$, $P_0 = 1$, bo gdy gracz A nie posiada nic, prawdopodobieństwo jego ruiny jest pewnością; oraz przy $x = s$, $P_s = 0$, gdy bowiem gracz A posiada cały swój i swego partnera majątek, to gracz B nic nie posiada, skąd płynie pewność, że gracz A nie będzie zrujnowany.

Otóż rozegranie następnej partyi może wydać dwa rezultaty: albo gracz A wygra i wtedy posiadać będzie $x + 1$ jedności, albo przegra i wtedy pozostanie mu tylko $x - 1$ jedności.

Jeżeli zajdzie pierwszy przypadek, prawdopodobieństwo jego zrujnowania się w dalszej grze będzie równe P_{x+1}; jeżeli przegra, będzie równe P_{x-1}; ponieważ zaś pierwszy przypadek zajść może z prawdopodobieństwem p, drugi z prawdopodobieństwem $1 - p$, zatem, gdy gracz A posiada x jedności, prawdopodobieństwo, że się zrujnuje w dalszej grze daje się jeszcze, z mocy reguły mnożenia i dodawania prawdopodobieństw, wyrazić przez $p \,.\, P_{x+1} + (1 - p)\, P_{x-1}$, czyli mamy:

$$P_x = p \cdot P_{x+1} + (1 - p)\, P_{x-1} \;\ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Z tego związku możemy wyznaczyć kształt wyrażenia P_x. Połóżmy:

$$P_x = z^x \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta),$$

gdzie z niewiadoma, niezależna od x.

Gdy (β) podstawimy w (α), otrzymamy:

$$z^x = p \,.\, z^{x+1} + (1 - p)\, z^{x-1}, \quad \text{albo} \quad z^{x-1} . (p\, z^2 - z + 1 - p) = 0.$$

Jeżeli pominiemy pierwiastki tego równania równe zeru, które, widocznie, nie mają tu znaczenia, dwa inne pierwiastki wyznaczają się z równania stopnia drugiego:

$$p\, z^2 - z + (1 - p) = 0$$

i są niemi:

$$z_1 = 1 \quad \text{i} \quad z_2 = \frac{1 - p}{p}.$$

Gdy i $z_1 = 1$ pominiemy, zostaje tylko jeden, mający dla nas znaczenie, pierwiastek $z = \frac{1 - p}{p}$, dający na P_x wyrażenie:

$$P_x = \left(\frac{1-p}{p}\right)^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha'),$$

lub, po oznaczeniu, dla prostoty:

$$\frac{1-p}{p} = \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma),$$

$$P_x = \alpha^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha'').$$

Lecz nietylko ten kształt sprawdza związek (α), czyni mu również zadość kształt ogólniejszy:

$$P_x = C_1 + C_2\,\alpha^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha'''),$$

(gdzie C_1 i C_2 są stałe), jak to z największą łatwością sprawdzić można przez podstawienie (α''') w (α).

W wyrażeniu (α''') mamy dwie niewiadome: C_1 i C_2, o których wiemy, że są stałe, t. j. niezależne od wartości, jakie przybiera x; przy każdej wartości x, C_1 i C_2 powinny zachowywać tę samą wielkość, zatem i przy $x = 0$ i przy $x = s$. Że zaś $P_0 = 1$, $P_s = 0$, przeto do wyznaczenia C_1 i C_2 mamy dwa równania stopnia pierwszego:

$$C_1 + C_2 = 1,$$

$$C_1 + C_2\,\alpha^s = 0;$$

stąd:

$$C_1 = \frac{-\alpha^s}{1-\alpha^s}; \quad C_2 = \frac{1}{1-\alpha^s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta).$$

Gdy (δ) podstawimy w (α'''), wypadnie ostatecznie:

$$P_x = \frac{\alpha^x - \alpha^s}{1-\alpha^s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Postępując w taki sam sposób, otrzymamy dla gracza B:

$$P_{s-x} = \frac{1-\alpha^x}{1-\alpha^s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B),$$

gdzie, również jak w (A), $\alpha = \dfrac{1-p}{p}$.

Z dodania (B) do (A) wypada:

$$P_x + P_{s-x} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon),$$

jak być powinno ze względu na to, że, według warunków zadania, jeden z graczów musi być zrujnowany.

Wartość α może przybierać rozmaite wielkości, zależnie od stosunku, jaki zachodzi pomiędzy p i $1-p$. Może mianowicie się trafić:

$$\alpha = 1, \text{ co zachodzi, według } (\gamma), \text{ gdy } p = 1 - p = \frac{1}{2} \quad . \quad \text{(I)};$$

$$\alpha < 1, \text{ gdy } p > \frac{1}{2}, \quad 1 - p < \frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)};$$

$$\alpha > 1, \text{ gdy } p < \frac{1}{2}, \quad 1 - p > \frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}.$$

Rozpatrzmy po kolei każdy z tych przypadków.

Przypadek pierwszy. Po podstawieniu $\alpha = 1$ w (A) i (B), oba wyrażenia przybierają postać nieoznaczoną, lecz tylko pozornie, jeżeli bowiem podstawimy $\alpha = 1 + \delta$ i $(1 + \delta)^x$ oraz $(1 + \delta)^s$ rozwiniemy według wzoru Newtona (patrz Rozdz. III art. 37), to otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^x &= (1+\delta)^x = 1 + \frac{x}{1}\delta + \frac{x(x-1)}{1.2}\delta^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\delta^3 + \dots \\ \alpha^s &= (1+\delta)^s = 1 + \frac{s}{1}\delta + \frac{s(s-1)}{1.2}\delta^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\delta^3 + \dots \end{aligned}\right\} (\zeta).$$

Gdy następnie rozwinięcia (ζ) podstawimy w (B), po zniesieniu jednostek i wyrzuceniu za nawias $\frac{x.\delta}{s.\delta}$ oraz skróceniu (przez δ):

$$P_{s-x} = \frac{x}{s} \cdot \frac{1 + \frac{x-1}{1.2}\delta + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2.3}\delta^2 + \dots}{1 + \frac{s-1}{1.2}\delta + \frac{(s-1)(s-2)}{1.2.3}\delta^2 + \dots},$$

a przy $\delta = 0$, czyli przy $\alpha = 1$:

$$P_{s-x} = \frac{x}{s}, \qquad P_x = 1 - P_{s-x} = 1 - \frac{x}{s} = \frac{s-x}{s}.$$

Gdy sprowadzimy te wyrażenia na P do początku gry, t. j. gdy założymy $x = s_1$, $s = s_1 + s_2$, wypadnie:

$$\text{(I)} \quad \text{przy } \alpha = 1, \ p = 1 - p = \frac{1}{2}, \quad \left\{\begin{aligned} P_{s_1} &= \frac{s_2}{s_1 + s_2}, \\ P_{s_2} &= \frac{s_1}{s_1 + s_2}. \end{aligned}\right.$$

W przypadku drugim i trzecim, po podstawieniu $x = s_1$, $s = s_1 + s_2$, mamy:

$$\text{(II)} \quad \text{przy } \alpha < 1, \ p > \frac{1}{2}, \ 1 - p < \frac{1}{2}, \quad \left\{\begin{aligned} P_{s_1} &= \frac{\alpha^{s_1} - \alpha^{s_1+s_2}}{1 - \alpha^{s_1+s_2}}, \\ P_{s_2} &= \frac{1 - \alpha^{s_1}}{1 - \alpha^{s_1+s_2}}; \end{aligned}\right.$$

$$\text{(III) przy } \alpha > 1,\ p < \frac{1}{2},\ 1 - p > \frac{1}{2},\quad \left| \begin{array}{l} P_{s_1} = \dfrac{\alpha^{s_1+s_2} - \alpha^{s_1}}{\alpha^{s_1+s_2} - 1}, \\ P_{s_2} = \dfrac{\alpha^{s_1} - 1}{\alpha^{s_1+s_2} - 1}. \end{array} \right.$$

Przyjmując wreszcie s_1 za nieskończenie wielkie (w porównaniu do s_2), znajdujemy:

$$\text{(I')} \text{ przy } \alpha = 1,\ p = 1 - p = \frac{1}{2},\quad P_{s_1} = 0,\ P_{s_2} = 1,$$

$$\text{(II')} \text{ przy } \alpha < 1,\ p > \frac{1}{2},\ 1 - p < \frac{1}{2},\ P_{s_1} = 0,\ P_{s_2} = 1$$

oraz, po uprzedniem podzieleniu w (III) liczników i mianowników przez $\alpha^{s_1+s_2}$ i założeniu następnie, że s_1 jest nieskończenie wielkie:

$$\text{(III')} \text{ przy } \alpha > 1,\ p < \frac{1}{2},\ 1 - p > \frac{1}{2},\ P_{s_1} = 1 - \frac{1}{\alpha^{s_2}},\ P_{s_2} = \frac{1}{\alpha^{s_2}}.$$

Z (I') i (II') widzimy, że gdy zręczność gracza A (prawdopodobieństwo wygrania jednej partyi) jest większa, albo nawet równa zręczności gracza B ($p \geqq 1 - p$) i majątek gracza A nieskończenie większy od majątku gracza B, wtedy wygrana A przeciw B jest pewna; z (III'), że jeżeli zręczność gracza A jest nieskończenie mała w stosunku do zręczności gracza B ($p = 0$, $1 - p = 1$, więc $\alpha = \infty$), która jest wtedy maximalna ($= 1$), to, choćby nawet A był nieskończenie bogatszy od B, oczekuje go niechybna ruina.

Powyższym dwom wynikom nadaje Autor dzieła, z którego korzystaliśmy, następujące znaczenie ogólniejsze:

„Pierwszy z tych wyników odpowiada widocznie znanym przysłowiom: „wielki pieniądz przyciąga mały pieniądz“, lub „wielka siła przyciąga małą siłę“, które w ten sposób znajdują swe uzasadnienie.

„Co do wyniku drugiego, zauważmy, że człowiek, albo nawet naród, o ile postępuje bezmyślnie w stosunku do warunków swego otoczenia, podobny jest do owego gracza, który, zamiast wyciągać korzyści wskazane w grze rozumem, zdaje się tylko na losy. Jeśli więc otoczenie człowieka lub narodu składa się z osobników zręcznych, to choćby nawet (człowiek lub naród) swemi nagromadzonemi przez przodków zasobami przewyższał zasoby swego otoczenia, oczekuje go tem bliższa pewność ruiny, im więcej bezmyślnie postępować będzie. Przeciwnie, nawet przy małych względnie odziedziczonych zasobach, a przy wielkiej za to zręczności w postępowaniu, możemy pokonać najpotężniejszego zasobami przeciwnika. Tylko się należy oraz uzbroić w cierpliwość, bo czasu na to pokonanie wychodzi tem więcej, im większy jest stosunek zasobów przeciwnika do zasobów naszych (A przegrywa do B tylko po jedności w każdej partyi, a majątek A w stosunku do majątku B jest nieskończenie wielki; więc potrzeba rozegrania nieskończenie wielu partyj, żeby B mógł ograć A)".

Do tych wniosków dodajemy od siebie, że gracz zawodowy (szuler) gra przeciwko całemu społeczeństwu, które jest nieskończenie bogatsze od pojedynczych osobników, więc i od każdego szulera; ten ostatni zatem musi być w końcu zrujnowany, o ile nie jest oszustem, albo się nie odznacza jakąś nadzwyczajną w grze zręcznością.

7. **Gry nierównoważne** (niesprawiedliwe). Dotąd rozważaliśmy przypadek, gdy stawka gracza równa się jego nadziei matematycznej i widzieliśmy, że w takim razie, pomijając odchylenie od rezultatu najprawdopodobniejszego, partnerzy nie ponoszą żadnych strat, ani nie osiągają zysków. Inaczej rzecz się ma, gdy stawka gracza jest różna od jego nadziei matematycznej; wtedy równowaga się zrywa i gracz najprawdopodobniej przegra (przy dostatecznie wielkiej liczbie partyj) jeżeli płaci więcej niż wynosi jego nadzieja matematyczna, najprawdopodobniej wygra w razie przeciwnym.

Gry, w których stawki partnerów są różne od ich nadziei matematycznych, zowią się nierównoważnemi, albo niesprawiedliwemi. My nazywać je będziemy hazardownemi *).

Gdyby np. w grze opisanej przy końcu art. 4-go, gracz płacił, tytułem stawki każdorazowej, nie 3,50 lecz 3 ruble, to za 60000 rzutów zapłaciłby 180000 rub., a ponieważ otrzyma, z największem prawdopodobieństwem, 210000, więc wygra 30000 rub. Gdyby, naodwrót, płacił za każdą partyę po 4 rub., zapłaci 240000, otrzyma 210000, t. j. najprawdopodobniejsza przegrana wyniesie 30000 rub.

Otóż domy gry są zawsze tak urządzone, iż gracz płaci bankierowi więcej niż wynosi jego nadzieja matematyczna; tak urządzona gra ma ten skutek, że, na ogół biorąc, bankier zawsze ogrywa swych partnerów.

Jeżeli, jak poprzednio, wygraną oznaczymy przez w, stawkę sprawiedliwą przez s, to:

$$s = w . p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

*) Określenie gier hazardownych nie jest ustalone: jedni rozumieją przez nie każdą grę losową, inni takie tylko, w których bywają stawiane bardzo wysokie (w stosunku do zamożności gracza) sumy na zdarzenia posiadające bardzo małe prawdopodobieństwo zajścia. Wobec tego sądzimy, że wolno nam użyć tej nazwy w takiem znaczeniu, jakie uważamy za najwłaściwsze i za najodpowiedniejsze do wykładu.

gdy zaś bankier pobiera od gracza nie s, lecz $s + \delta$, w takim razie za n partyj zapłaci gracz $(s + \delta) . n$, otrzyma (najprawdopodobniej) npw, czyli straci:

$$n(s + \delta) - npw = npw + n . \delta - npw = n . \delta \quad . \quad . \quad (6).$$

Stosunek nadpłaty ponad stawkę sprawiedliwą do tego co rzeczywiście gracz płaci nazywać będziemy h a z a r d e m i oznaczać go będziemy przez h. Jest tedy:

$$h = \frac{\delta}{s + \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

albo, jeżeli oznaczymy:

$$s + \delta = S, \quad \text{skąd} \quad \delta = S - s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

$$. \, h = \frac{S - s}{S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7'),$$

gdzie s oznacza, jak zwykle, stawkę sprawiedliwą, S rzeczywiście płaconą, którą stale przez S (duże) oznaczać będziemy.

Gdy np., przy rzucaniu kością do gry, bankier za wyrzucenie asa płaci 30 kop., stawka gracza wynieść powinna 5 kop., gdyż:

$$s = wp = 30 . \frac{1}{6} = 5;$$

jeżeli natomiast bankier pobiera nie 5 lecz 6 kop.:

$$h = \frac{6 - 5}{6} = \frac{1}{6} .$$

I naodwrót, gdy bankier pobiera za rzucenie kością 5 kop., gracz, stawiając na asa, powinien, za wyrzucenie go, otrzymać 30 kop., gdyż:

$$w = \frac{s}{p} = 5 : \frac{1}{6} = 30;$$

jeżeli bankier płaci tylko 24 kop., to, ponieważ w razie takim pobierać winien nie 5, lecz $24 . \frac{1}{6} = 4$:

$$h = \frac{5 - 4}{5} = \frac{1}{5} .$$

8. Hazard. Wprowadzony przez nas, w poprzednim artykule, stosunek, nazwany hazardem, daje możność porównywania liczebnie warunków, w jakich różne gry losowe się odbywają.

Gdy $S = s$, $h = 0$, wtedy gra hazardowna (niesprawiedliwa, nierównoważna) zamienia się na równoważną. Gdy $s = w . p = 0$, a więc gdy albo w albo p są zerem, $h = 1$; gra przestaje być grą, ponieważ wtedy gracz, płacąc S, w zamian nic nie może wygrać (możnaby to nazwać szczytem hazardu). W granicach od $h = 0$ do $h = 1$, gra jest w różnym stopniu hazardowna i zawsze stopień jej hazardowności obliczyć się daje. Weźmy za przykład grę w kości i t. zw. grę w orła i reszkę.

Dajmy, że w grze kością bankier za wyrzucenie asa lub szóstki płaci 45 kop. Stawka sprawiedliwa wynosić powinna 45 kop. $\times \frac{2}{6} = 15$ kop., tymczasem bankier pobiera 20 kop.; hazard:

$$h_1 = \frac{20 - 15}{20} = \frac{1}{4}.$$

W grze w orła i reszkę niech bankier za wyrzucenie orła płaci 60 kop. Stawka sprawiedliwa $=$ 60 kop. $\times \frac{1}{2} = 30$ kop., lecz bankier pobiera 36 kop.; hazard:

$$h_2 = \frac{36 - 30}{36} = \frac{1}{6}.$$

Ponieważ $h_1 > h_2$, zatem pierwsza gra jest hazardowniejsza od drugiej:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 1\tfrac{1}{2} \text{ razy.}$$

Gdyby bankier w pierwszej i drugiej grze pobierał po 30 kop., lecz w pierwszej za wyrzucenie asa lub szóstki płacił 75 kop., w drugiej za wyrzucenie orła 45 kop., to, ponieważ stawkami sprawiedliwemi za wygranie 75 kop., względnie 45 kop. są odpowiednio:

$$75 \text{ kop.} \times \frac{2}{6} = 25, \qquad 45 \text{ kop.} \times \frac{1}{2} = 22{,}5,$$

przeto:

$$h_1' = \frac{30 - 25}{30} = \frac{1}{6}, \quad h_2' = \frac{30 - 22{,}5}{30} = \frac{1}{4},$$

czyli obecnie, naodwrót, druga gra jest $\frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 1\frac{1}{2}$ razy hazardowniejsza od pierwszej.

Drugą korzyścią, płynącą z wprowadzenia pojęcia hazardu, jest łatwość obliczania najprawdopodobniejszego zysku bankiera.

Rzeczywisty zysk bankiera jest różnicą pomiędzy sumą pobranych stawek a sumą rzeczywiście wypłaconych wygranych. Tych ostatnich jednak z góry ściśle obrachować nie można, podobnie jak w każdem innnem przedsiębiorstwie wydatki z góry ściśle obliczyć się nie dają. Jeżeli na miejsce nie dających się ściśle przewidzieć wygranych podstawimy sumę wypłat najprawdopodobniejszych, to w n partyach suma stawek wyniesie $n(s+\delta)=nS$, suma wypłat npw, czyli najprawdopodobniejszy zysk bankiera równa się:

$$n(s+\delta)-npw=n(s+\delta)-np.\frac{s}{p}=n\delta=n\delta.\frac{s+\delta}{s+\delta}$$

$$=n(s+\delta).\frac{\delta}{s+\delta}=n(s+\delta)h,$$

albo ostatecznie, ponieważ:

$$s+\delta=S,$$

najprawdopodobniejszy zysk bankiera $=nSh$ . . . . (9),

t. j. równa się iloczynowi z sumy pobranych stawek przez hazard.

Gdy $h=0$, zysk najprawdopodobniejszy sprowadza się do zera i tak też być powinno, ponieważ wtedy, jak wiemy, gra jest równoważna.

Gdyby np. za wyjęcie króla z talii kart płacił bankier 26 kop., a pobierał za prawo wyjęcia karty 3 kop., to, skoro stawka sprawiedliwa wynosi 26 kop. $\times\frac{4}{52}=2$ kop., hazard $h=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$, bankier z 300000 partyj może oczekiwać najprawdopodobniejszego zysku w wysokości:

$$3 \text{ kop.} \times 300000 \times \frac{1}{3}=3000 \text{ rub.}$$

I rzeczywiście, gracz płaci 3 kop. $\times$ 300000 $=$ 9000 rub. tytułem stawek, bankier zapłaci (najprawdopodobniej) 26 kop. $\times 300000 \times \frac{4}{52}$ $=$ 6000 rub. tytułem wygranych; stąd wychodzi 9000 — 6000 $=$ 3000 rubli zysku najprawdopodobniejszego, z odchyleniem średniem liniowem (na jedną lub drugą stronę) w wysokości 26 kop. $\times$ 58 $=$ 15 rub. (kopiejki opuszczone).

9. Wnioski. Z dotychczasowych dociekań naszych wynika, że gry losowe równoważne, w dostatecznie wielkiej liczbie partyj rozegrane, wiodą (z największem prawdopodobieństwem) do zrównoważenia się poczynionych stawek z osiągniętemi wygranemi; w każdym jednak razie, z powodu ewentualnych odchyleń od rezultatu najprawdopodobniejszego, nie są wolne od ryzyka, które może narazić gracza na dotkliwe nieraz straty. Jeżeli zaś gra jest nierównoważna, gracz, w większej liczbie partyj, przegra prawie na pewno.

Wobec tego najlepiej jest wcale nie grać, lecz temu stoi na przeszkodzie namiętność, którą też wyzyskują jednostki i rozmaite urządzenia o charakterze publicznym. Te ostatnie usprawiedliwiają racyę swego istnienia koniecznością dania ujścia namiętności ogółu do gry, aby zapobiedz wyzyskiwaniu go przez obcych. Lecz twierdzenie takie jest hypokryzyą: nie chodzi tu bynajmniej o zapobieżenie wyzyskiwaniu ogółu przez obcych, lecz chodzi o zysk własny; gdyby bowiem chodziło o danie ujścia namiętności do gry, możnaby znaleść inne sposoby, które, nie rujnując ludzi, mogłyby wadę namiętności do gry przeobrazić w cnotę oszczędności.

Oto co w tym względzie mówi Autor*), znany u nas ze swych pomysłów finansowych.

„Wobec tego (namiętności do gry) państwo powinno ująć w swe ręce prawidłowe pokierowanie skłonnością do hazardu, która objawia się wszędzie, i utworzyć takie instytucye finansowe, które, korzystając z rzeczonych skłonności, ocaliłyby uboższe klasy od strat, a dały bodziec do oszczędności.

Instytucye takie wytworzyła u siebie przedewszystkiem Francya, ten klasyczny kraj dobrze obmyślanych środków finansowych. Są niemi obligacye premiowe miasta Paryża i Crédit Foncier.

Według tego wzoru obligacye takie (u nas) powinny:

1) Przynosić stały mały procent, nie wyższy jak $2^1/_2$% do 3%.

2) Co kwartał ulegać losowaniu premiowemu z wygranemi, wypłacanemi z nadwyżki procentowej do 4% (resp., tej wysokości procentowej, jakaby odpowiadała chwili finansowania obligacyj).

3) Być amortyzowane w ciągu 50 — 75 lat, przyczem, aby nie dopuścić zbytniego podnoszenia się ich nad poziom p a r i i wytworzenia cen hazardownych, zabijających użytek z kuponu, instytucya wypuszczająca powinna mieć prawo przedwczesnej spłaty obligacyj po cenie nominalnej.

4) Wygrane nie powinny być zbyt wysokie; jak u nas — największa winna nie przenosić 50000 rubli.

5) Cena obligacyj nie powinna być niższa od 25 rubli, ani wyższa od 50 rubli.

6) Dla ułatwienia nabycia obligacyj powinno być dopuszczane kupno przez z góry określane wpłaty ratami.

W tych warunkach wypuszczane obligacye byłyby jednocześnie doskonałem umieszczeniem dla ogółu społeczeństwa, a przedewszystkiem dla klas uboższych, i dawałyby szanse wygranej, bez zgubnych następstw hazardu.

*) St. Skarżyński.

Jak pisze Paul Leroy Beaulieu w sławnem swojem „Traité des finances“, obligacye miasta Paryża podniosły znakomicie zmysł oszczędności w klasach robotniczych francuskich, a zarazem przyczyniły się do uprzyjemnienia marzeń niejednej rodziny, która, posiadając choćby kilka sztuk takich obligacyj, snuje sny złote, wiążąc je z projektami lepszej przyszłości. Kto raz stanie się właścicielem takiej obligacyi, stara się posiąść następną, przyczem starania tego nie można nazwać namiętnością zgubną, skoro umieszczanie takie oszczędności nie pociąga za sobą żadnego ryzyka, żadnej utraty kapitału“.

Tymczasem dzieje się inaczej: w różnych państwach są urządzane lub dopuszczane różnego rodzaju gry losowe; z tych najwydatniejszemi są: Ruleta, Loterya liczbowa i klasyczna.

A. Ruleta.

10. Urządzenie rulety. Szatański „aparat“, zwany ruletą, składa się z tarczy poziomej, kolistej, zakończonej wzniesieniem (krawędzią), po którem toczyć się może kula odpowiednio rzucona. Tarcza może wirować wokoło osi, przechodzącej pionowo przez jej środek, i jest podzielona na 37 równych sobie zagłębień (przegród), zaopatrzonych w numery. Jedno zagłębienie jest oznaczone zerem, 36 pozostałych — numerami od 1 do 36 w sposób nieprawidłowy, jak wskazuje Fig. 1. Połowa numerów znaczących jest czarna, druga połowa czerwona; my jednak, z powodów technicznych, wszystkie oznaczyliśmy barwą czarną, tylko wycinki należące do numerów czerwonych pozostawiliśmy białemi.

Aparat jest tak urządzony, że po wprowadzeniu go w ruch, kula, po wielokrotnem okrążeniu krawędzi, musi wkońcu znaleść się w jednem z 37-iu zagłębień i temsamem wyznaczyć numer, na którym się zatrzyma.

Aparat znajduje się na stole ustawionym poziomo. Z obu stron rulety widzimy rysunek, podający sposób mieszczenia stawek (mises) przez graczów (pointeurs) z pośród osób otaczaczających stół (galerie). Przy aparacie znajduje się prowadzący grę (croupier) z towarzyszem, stojącym po stronie przeciwnej. W kilku miejscach przy stole znajduje się służba, czuwająca nad zachowaniem się „galeryi“ podczas gry.

Prowadzący grę wzywa „galeryę“ do poczynienia stawek (Messieurs, faites vos jeux); ruchem kolistym rzucza kulę na krawędź w kierunku przeciwnym ruchowi wirowemu tarczy i oznajmia, że dalej stawiać już nie można (Rien ne va plus!). Za chwilę (wydającą się

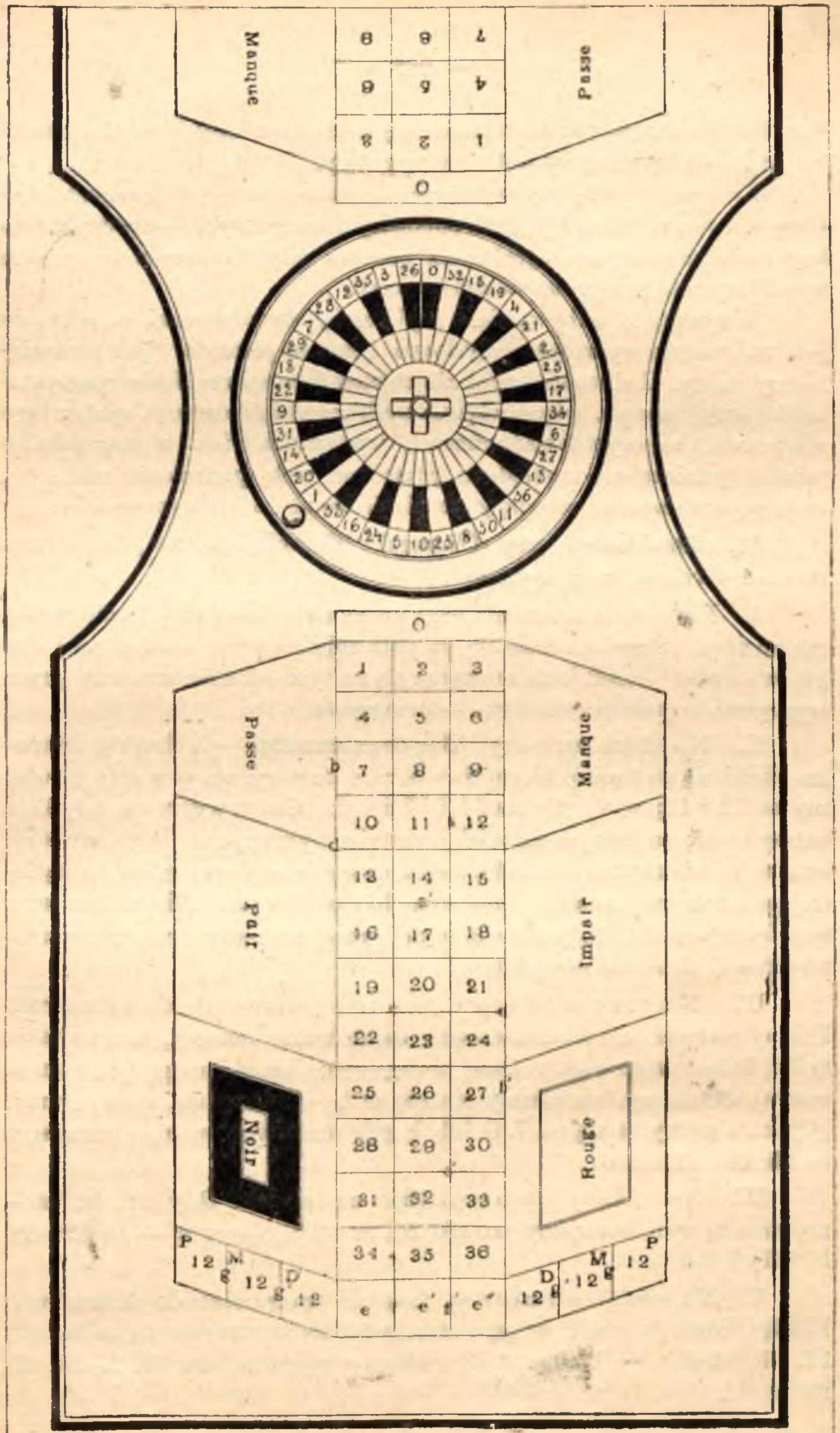

Fig. 1.

wiekiem dla grających) kula stacza się w jedno z zagłębień ponumerowanych — i los graczów jest rozstrzygnięty.

Krupyer, po głośnem wymienieniu numeru wygrywającego, z bajeczną wprawą rozrzuca wygrane pomiędzy „szczęśliwych“—specyalnie do tego celu urządzonemi grabkami, podczas gdy towarzysz w ten sam sposób zgarnia przegrane stawki do kasy.

Wszystko to odbywa się z szybkością błyskawiczną, bo nikt nie jest żarliwszym wyznawcą przysłowia „czas to pieniądz“, jak przedsiębiorcy rulety. I słusznie, szybkość bowiem przysparza liczbę rozgrywanych partyj (coups), więc zwiększa zysk przedsiębiorstwa i oprócz tego nie pozwala się oryentować graczom, wprowadza wielu w stan oszołomienia, graniczącego z obłędem; gracz traci wolę panowania nad sobą, staje się automatem, stawiającym pieniądze aż do ich wyczerpania.

11. Kombinacye gry (Chances). Kombinacye, na jakie można stawiać w rulecie, są następujące:

I. Na jeden numer. (Sur un numéro — en plein), nie wyłączając zera. Stawka mieści się na polu zajętem przez numer, na który gracz stawia. Jeżeli kula zatrzyma się na tym właśnie numerze, gracz wygrywa; w razie przeciwnym — przegrywa.

II. Na dwa numery. (Sur deux numéros — à cheval). Stawka mieści się na linii dzielącej dwa obrane numery, np. w a, gdy stawiamy na 11 i 12; w a', gdy na 14 i 17 i t. d. Gracz wygrywa, gdy kula zatrzyma się na jednym z dwóch numerów wybranych. Widzimy z rysunku, że nie można stawiać na dwa dowolne numery, tylko na sąsiadujące z sobą w kierunku pionowym lub poziomym. Nie można więc stawiać np. na 2 i 29, ponieważ takiej grupy numerów przez umieszczenie stawki oznaczyć niepodobna.

III. Na trzy numery. (Sur une transversale de 3 numéros). I tutaj również nie można stawiać na dowolne numery, lecz na takie tylko, które przez odpowiednie umieszczenie stawki mogą być wyznaczone. Jeżeli np. umieścimy monetę w b — znaczy się, że wygramy, gdy kula zatrzyma się na 7, 8 lub 9; gdy umieścimy w b' — stawiamy na 25, 26 i 27, i t. d.

IV. Na cztery numery. (Sur un carrée). Gdy np. umieścimy monetę w c, stawiamy na 19, 20, 22 i 23; gdy w c' — na 29, 30, 32 i 33, i t. d.

V. Na sześć numerów. (Sur une transversale de 6 numéros). Kładąc monetę np. w d wygrywamy, jeżeli kula zatrzyma się na 10, 11, 12, 13, 14 lub 15; kładąc w d', czekamy wygranej na 19, 20, 21, 22, 23 lub 24.

VI. Na kolumnę. (Sur une colonne). Mamy trzy kolumny e, e' i e'', zawierające po dwanaście numerów, wymienionych w każdej. Jeżeli stawkę umieścimy w e, e', e'', wygramy wówczas, gdy kula zatrzyma się na jednym z numerów pomieszczonych w odpowiedniej kolumnie.

VII. Na dwie kolumny. (Sur deux colonnes). Stawka umieszcza się na linii odgraniczającej dwie z powyżej wzmiankowanych kolumn — w f albo f'; wtedy stawiamy na dwadzieścia cztery numery, wyszczególnione w obu kolumnach.

VIII. Na pierwsze dwanaście numerów. (Sur première douzaine), t. j. od 1 do 12; stawka mieści się na polach oznaczonych przez $\frac{P}{12}$.

IX. Na środkowe dwanaście numerów. (Sur une douzaine du milieu) — od 13 do 24. Stawka mieści się na polach oznaczonych przez $\frac{M}{12}$.

X. Na ostatnie dwanaście numerów. (Sur dernière douzaine)—od 25 do 36. Stawka mieści się na polach oznaczonych przez $\frac{D}{12}$.

XI. Na dwadzieścia cztery pierwsze lub na dwadzieścia cztery ostatnie numery. (Sur deux douzaines — premieres ou dernieres). Stawkę mieścimy w g lub g'.

Wreszcie następują t. zw. kombinacye pojedyncze (chances simples), w których stawia się na połowę numerów, mianowicie:

XII. Na czerwone (Rouge). XIII. Na czarne (Noir). XIV. Na parzyste (Pair). XV. Na nieparzyste (Impair). XVI. Na numery górne (Manque), t. j. od 1 do 18. XVII. Na numery dolne (Passe) — od 19 do 36.

W ostatnich sześciu kombinacyach umieszcza się stawkę w miejscach zaopatrzonych w odpowiednie napisy albo barwy.

Można także stawiać na dwie kombinacye pojedyncze (Sur deux chances simples), np. na noir i pair, lub manque i impair, kładąc monetę na liniach odgraniczających kombinacye pojedyncze.

12. Hazard w rulecie. Wygrane są normowane przy fałszywem założeniu, że w grze zajść może 36 przypadków jednakowo możliwych, t. j. tyle ile jest numerów znaczących (od 1 do 36); ponieważ zaś, skutkiem wtrącenia zera, przypadków jest 37, przeto w tem właśnie tkwi krzywda graczów i stąd płyną niezawodne zyski przedsiębiorstwa. Tak np., jeżeli ktoś stawia na pojedynczy numer i wygrywa, krupyer wypłaca mu 36 razy wziętą stawkę (czyli do własnej stawki gracza dopłaca mu jeszcze 35 tej samej wysokości), powinien zaś zapłacić, gdyby gra była równoważną, 37 stawek. Albowiem prawdopodobieństwo wygrania równa się $\frac{1}{37}$, zatem w grze równoważnej powinno być:

$$s = w \cdot \frac{1}{37}, \quad \text{stąd } w = 37\,s \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

Jeżeli przeciwnie $w = 36\,S$, to stawka równoważna wynosić powinna:

$$s = 36\,S \cdot \frac{1}{37} = \frac{36}{37}\,S;$$

skoro zaś wynosi S, tedy gracz nadpłaca:

$$S - s = S - \frac{36}{37}\,S = \frac{S}{37},$$

a temsamem hazard:

$$h = \frac{S}{37} : S = \frac{1}{37} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

W podobny sposób można obliczyć hazard każdej innej kombinacyi. Wygrane mianowicie normują się według następującej tabelki:

<table>
<tr><th>Kombinacya</th><th>Prawdopodobieństwo wygrania</th><th>Wygrana</th><th>Kombinacya</th><th>Prawdopodobieństwo wygrania</th><th>Wygrana</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>I</td><td>$\frac{1}{37}$</td><td>36 S</td><td>XI</td><td>$\frac{24}{37}$</td><td>1,5 S</td></tr>
<tr><td>II</td><td>$\frac{2}{37}$</td><td>18 S</td><td>XII</td><td rowspan="6">$\frac{18}{37}$</td><td rowspan="6">2 S</td></tr>
<tr><td>III</td><td>$\frac{3}{37}$</td><td>12 S</td><td>XIII</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>$\frac{4}{37}$</td><td>9 S</td><td>XIV</td></tr>
<tr><td>V</td><td>$\frac{6}{37}$</td><td>6 S</td><td>XV</td></tr>
<tr><td>VI</td><td>$\frac{12}{37}$</td><td>3 S</td><td>XVI</td></tr>
<tr><td>VII</td><td>$\frac{24}{37}$</td><td>1,5 S</td><td>XVII</td></tr>
<tr><td>VIII</td><td rowspan="3">$\frac{12}{37}$</td><td rowspan="3">3 S</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>IX</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

W razie zatrzymania się kuli na zerze, wszyscy przegrywają oprócz tych, którzy postawili na zero.

Z pomnożenia liczb w kol. 2-ej przez odpowiednie liczby w kol. 3-ej otrzymujemy stawki sprawiedliwe, $s = \frac{36}{37} S$, jednakowe dla wszystkich kombinacyj, a że stawka płacona wynosi S, więc przewyżka stawki rzeczywistej ponad sprawiedliwą równa się $S - \frac{36}{37} S = \frac{S}{37}$, czyli hazard $h = \frac{S}{37} : S = \frac{1}{37}$ dla wszystkich, bez wyjątku, kombinacyj.

13. **Zyski z rulety.** Na podstawie powyższego zobaczmy teraz, jakie zyski prawdopodobne z rulety mogą ciągnąć przedsiębiorcy. Z art. 8-go wiemy, że przy bardzo wielkiej liczbie partyj, zysk najprawdopodobniejszy bankiera, utrzymującego dom gry hazardownej, równa się iloczynowi z sumy poczynionych stawek przez hazard.

Otóż, jeżeli przyjmiemy za prawdziwe bardzo prawdopodobne założenie, że w Monte Carlo „pracuje“ średnio dziennie po dziewięć stolików (bywa więcej i mniej — zależnie od sezonu) i każdy stolik rozgrywa średnio dziennie po 300 partyj przy 1200 frankach razem wziętych (średnio i w zaokrągleniu) stawek w każdej partyj, to rocznie rozgrywa się tam $300 \times 9 \times 365 = 985\,500$ partyj, czyli przepływa przez stoliki $1200 \times 985\,500 = 1\,182\,600\,000$ franków, z czego 37-ma część, t. j. $1\,182\,600\,000 : 37 = 31\,962\,162$ fr. przechodzi do kas przedsiębiorców.

Rachunek ten wcale nie jest przesadzony — raczej za nizki niż za wysoki, często bowiem spotkać się można po pismach z wiadomością o 40-o milionowym dochodzie rocznym przedsiębiorstwa ruletowego w Monte Carlo.

14. **Złudzenia graczów.** Taki jest mniej więcej podatek, płacony przez graczów przedsiębiorstwu jednej tylko rulety, gnieżdżącej się na przepięknej Rivierze. Do tego podatku materyalnego dodać trzeba stokroć zgubniejszy podatek moralny, płacony pod podstacią zdenerwowania, samobójstw i zrujnowanego szczęścia rodzinnego osób uniesionych namiętnością w tej grze straszliwej.

Gdy to wszystko weźmiemy pod uwagę, mimowoli narzuca się pytanie, co stanowi siłę, pchającą ludzi do tej strasznej jaskini ulegalizowanego bandytyzmu?

Nie podlega wątpliwości, że najsilniejszą pobudkę stanowi namiętność do gry. Wielu jednak udaje się tam przez prostą ciekawość, albo dla wrażeń; znalazłszy się zaś na miejscu, ulega odurzającemu wpływowi warunków, w jakich gra się odbywa, i pada ofiarą zbudzonej przez otoczenie namiętności. Są jednak i tacy, którym się zdaje, że w tej grze zawrotnej tkwi jakieś prawidło tajemnicze, jakaś niedocieczona jeszcze reguła, którą bystry i obdarzony zdolnością kombinatorską obserwator odkryć może. Wielu się nawet wydaje, że tę tajemnicę odkryli, albo że są bardzo blizcy jej odkrycia. I tworzą t. zw. systemy gry w ruletę*). Systemy te bywają bardzo rozmaite, ale zawsze złudne; najczęściej opierają się na fałszywie pojmowanem t. zw. prawie wielkich liczb.

Jak czytelnikom wiadomo z Rozdziału III-go, prawo to orzeka, iż przy dostatecznie wielkiej liczbie prób, dokonywanych ze zdarzeniami przypadkowemi, zdarzenie oczekiwane powtarza się w stosunku prawdopodobieństwa, z jakiem zachodzi, i że zboczenie od tej reguły jest tem mniejsze, w stosunku do liczby dokonanych prób, im więcej ich wykonamy, przyczem zawsze można obliczyć, z jakiem prawdopodobieństwem w danych granicach, dla danej liczby prób, zboczenie się mieści.

Nie rozumiejąc dokładnie istoty tego prawa, sądzą, że skoro tak jest, to zdarzenia muszą się koniecznie, że tak powiem, przeplatać i dlatego jeżeli np. barwa czerwona powtórzyła się parę razy, można na czarną postawić większą sumę i nietylko odbić przegrane stawki, ale jeszcze „zarobić". Jednem słowem, mniemają, iż zaszłe rezultaty oddziaływają na zajść mające, skutkiem czego na podstawie faktów spełnionych można przewidywać spełnić się mające.

Tymczasem jest to błąd zasadniczy, w każdej bowiem nowej partyi każda kombinacya posiada absolutnie te same widoki wyjścia co poprzednio, bez względu na już zaszłe rezultaty. To też nie należy do rzadkości wielokrotne powtórzenie się tej samej kombinacyi. I zjawisko takie wcale nie przeczy prawu wielkich liczb, które dopiero przy bardzo wielkiej liczbie partyj się sprawdza, podczas gdy dla stosunkowo niewielkiej liczby partyj żadnego nie posiada znaczenia.

---

*) Istnieją nawet publikacye, pouczające jak grać należy—w takim np. guście: „Der sichere Roulette-Spieler, welcher stets gewinnen muss. Nach einem System, welches sich in einigen und zwanzig Jahren mit einer nicht zu bewältigenden Ausdauer gegen die Bank gehalten hat Erfunden von J. F. C. Bathe, Königlicher Lieutenant der Artillerie. Lehrer der Mathematik etc. Preis: 1 Ducaten — Berlin".

Albo: „1000000 jährlich an der Spielbank zu gewinnen oder die Kunst, täglich einen sichern Gewinn zu erzielen. Preis: 1 Thaler. — Leipzig."

Ponieważ publikacye takie mają zwykle po kilkanaście lub kilkadziesiąt stronic, a cenę nakłada się wysoką, więc naturalnie chodzi tu tylko o zarobek na wydawnictwie. Pomimo to są naiwni, którzy takie szpargały kupują i nawet im na myśl nie przyjdzie pytanie, dlaczego ci panowie na tej drodze szukają zarobku, skoro potrafią zdobywać miliony na rulecie.

Jeżeli dalej zastanowimy się, jak szybko stawki rosną choćby przy ich podwajaniu tylko, to bez trudności zrozumiemy łatwość, z jaką gracz zrujnować się może.

Dajmy np., że gracz stawia na numery czerwone*) 5 fr. (najniższa stawka w Monte Carlo) i przegrywa, bo wyszedł czarny. Ponieważ wyszedł czarny, tedy w fałszywem mniemaniu gracza większe posiadają widoki numery czerwone, podwaja więc stawkę na czerwone, czyli stawia $5 . 2 = 10$ fr., gdyż tą drogą spodziewa się nietylko odegrać straconą poprzednio stawkę, ale i wygrać 5 fr. Tymczasem znów wychodzi numer czarny, co w mniemaniu gracza jeszcze bardziej powiększa widoki wyjścia numeru czerwonego. Znów podwaja ostatnią stawkę, czyli stawia na ten sam kolor $10 . 2 = 5 . 2^2$, a czarne wychodzą w dalszym ciągu.

Wynika stąd, że gracz dla odbicia straconych stawek i wygrania 5-ciu fr. stawia kolejno; $5, 5 . 2, 5 . 2^2, 5 . 2^3, \ldots$, i jeżeli to się powtórzy np. 10 razy (co nie bywa rzadkością), musi postawić 5120 fr. z widokiem wygrania 5-ciu fr. Zapewne, idąc tak dalej, w końcu ostatecznie doczeka się upragnionego numeru czerwonego, lecz nim to nastąpi, może mu zabraknąć pieniędzy, albo przekroczy dozwoloną wysokość stawek (w Monte Carlo 6000 fr.), czyli przy takiem postępowaniu ruina wisi ciągle nad graczem.

Tak się rzecz ma, gdy gracz rozpoczyna grę od stawki najmniejszej i gdy stawki podwaja; niebezpieczeństwo staje się większe, jeżeli zaczyna grę od stawki wyższej, albo jeżeli stawki potraja, zwiększa w czwórnasób i t. d., albo wreszcie, gdy operuje na kombinacyach rzadziej zachodzących. Zapewne, od czasu do czasu może się tej lub innej osobie trafić jakaś, nawet większa wygrana, zawsze jednak będzie to tylko przypadek, a nie żaden wynik z góry obmyślanego systemu.

Dobrą ilustracyę do powiedzianego przedstawia zakład, rozegrany niedawno w Londynie. Z dwóch zakładających się (znanych z nazwiska) lordów, jeden utrzymywał, że ma sposób zgrania „banku“ ruletowego; drugi temu przeczył. Rozdzielono pomiędzy obu 250 000 fr. w liczmanach i rozpoczęto grę pod warunkiem, że stawka nie będzie wyższa od 6000 fr. a liczba partyj nie przejdzie 5000. Po rozegraniu 3081 partyj, grający według swego systemu, stawiając zawsze tylko na czerwone lub czarne, uznał się za zwyciężonego, z posiadanych bowiem 250 000 fr. pozostało mu już tylko 17360 i według swego systemu na następną partyę powinien był postawić 6040 fr., podczas gdy, według umowy, wolno mu było postawić co najwyżej 6000 fr.

---

*) W dalszym ciągu często mówić będziemy „czerwone“, „czarne“ bez dodania „numery“.

Dodać należy, iż zero wyszło 85 razy, czerwone 1440, czarne 1556 razy. Według największego prawdopodobieństwa zero w 3081 partyach wyjść powinno (zachowujemy liczby niecałkowite) $3081 \cdot \frac{1}{37}$ $= 83{,}27$ razy, czyli odchylenie rezultatu rzeczywistego od najprawdopodobniejszego wyniosło 1,73, gdy (Rozdziału III, art. 16-ty) teoretycznie przewidywane odchylenie średnie liniowe (jednostronne) wynosi 3,59*), t. j. rzeczywiste nie przekroczyło średniego i dlatego można przyjąć, że zero wypadło zgodnie z przewidywaniem teoretycznem.

Jeżeli teraz z 3081 partyj strącimy 85, w których wyszło zero, na numery czerwone i czarne przypada 2996 partyj, skoro zaś obie barwy posiadają jednakowe prawdopodobieństwo wyjścia, na każdą przypadało po 1498. Tymczasem numery czerwone wyszły 1440, czarne 1556 razy, t. j. odchylenie rzeczywiste dla obu wyniosło po 58, zaś średnia liniowa wynosi 11**). Różnica jest dość znaczna, lecz, wobec stosunkowo niewielkiej liczby partyj, nie przedstawia nic nadzwyczajnego; przebieg gry uważać można za dosyć normalny, a mimo to grający według obmyślonego przez się systemu został zrujnowany.

B. Loterya liczbowa.

15. Urządzenie loteryi liczbowej. Drugim rodzajem gier hazardownych, mającym ogólniejsze znaczenie, gdyż prowadzonym zazwyczaj przez państwa, jest t. zw. loterya liczbowa.

Loterya liczbowa składa się z 90 numerów porządkowych od 1 do 90. Numery te znajdują się w t. zw. kole szczęścia i po dokładnem zmieszaniu przez kilkakrotne, za każdym razem, obrócenie koła, wyciąga się po jednym, pięć numerów, które decydują o wygranych.

Na rozmaite, dające się z pięciu numerów ułożyć połączenia, można stawiać dowolne, aż do pewnej wysokości, sumy; o ile wybrane przez gracza połączenie wyjdzie, przedsiębiorca, względnie rząd płaci, w charakterze wygranej, z góry za to połączenie naznaczoną wielokrotność wniesionej stawki.

16. Kombinacye i widoki wygrania. Połączenia mogą być bardzo rozmaite; główne z nich można podzielić na trzy zasadnicze typy:

I. Oznaczenie, z pośród 90 numerów, jednego, dwóch, trzech,

---

*) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot 3081}{3{,}14}} = 3{,}59$; **) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 \cdot \frac{18}{37} \cdot \frac{19}{37} \cdot 3081}{3{,}14}} = 11{,}07.$

czterech lub pięciu numerów, bez względu na porządek, w jakim wyjdą. O ile te numery zostaną wylosowane, gracz wygrywa.

II. Wskazanie, w którem ciągnieniu każdy z wybranych numerów wyjdzie.

III. Wskazanie porządku, w jakim wybrane numery wyjść mają, bez uwzględnienia ciągnień.

Typ pierwszy nazywać będziemy nieoznaczonym, trzeci — oznaczonym, drugi — ściśle określonym.

Gra na dwa numery nazywa się ambo, na trzy — terno, na cztery — kwaterno, na pięć — kwinterno.

Wyznaczmy prawdopodobieństwo, z jakiem każda z takich kombinacyj wyjść może.

I. Typ nieoznaczony:

1) Numer pojedynczy. Zważmy, iż przy ciągnieniu pięciu numerów, z pośród 90-u, zajść może tyle przypadków jednakowo możliwych, ile da się ułożyć połączeń prostych z 90 po 5, jest ich mianowicie:

$$c_{90,5} = \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha).$$

Zachodzi teraz pytanie, ile jest w (α) połączeń posiadających w swym składzie wybrany przez nas numer. Gdy z pośród 90-u numerów loteryi wyłączymy wybrany i z pozostałych 89 utworzymy wszystkie możliwe połączenia po cztery, to, dołączając do każdego z nich wybrany przez nas numer, otrzymamy widocznie te wszystkie połączenia po 5, które zawierają w sobie nasz numer; że zaś:

$$c_{89,4} = \frac{89.88.87.86}{1.2.3.4},$$

zatem szukane prawdopodobieństwo:

$$p(\mathrm{I}_1) = \frac{\dfrac{89.88.87.86}{1.2.3.4}}{\dfrac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18} \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

2) Ambo. Liczbę połączeń prostych po 5, mieszczących w sobie dwa wybrane przez nas numery, otrzymamy, gdy z pośród 90-u numerów loteryi wyłączymy dwa przez nas wybrane i z pozostałych 88 utworzymy wszystkie możliwe połączenia proste po trzy i do każdego dołączymy wybrane dwa numery. Jest więc:

$$p(\mathrm{I}_2) = \frac{\dfrac{88.87.86}{1.2.3}}{\dfrac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}} = \frac{2}{801} \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

W podobny sposób znajdziemy dla:

3) Terna:

$$p(\mathrm{I}_3) = \frac{\dfrac{87.86}{1.2}}{\dfrac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}} = \frac{1}{11748} \quad . \quad . \quad (15);$$

4) Kwaterna:

$$p(\mathrm{I}_4) = \frac{86}{\dfrac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}} = \frac{1}{511038} \quad . \quad . \quad (16);$$

wreszcie dla

5) Kwinterna:

$$p(\mathrm{I}_5) = \frac{1}{\dfrac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}} = \frac{1}{43949268} \quad . \quad . \quad (17).$$

II. Typ ściśle określony.

Gdy chodzi o kombinacye, w których wybrane przez nas numery mają wyjść w ściśle z góry przez nas wskazanych ciągnieniach, t. j. w 1-em, 2-iem, 3-iem, 4-em lub 5-em, to nietrudno zrozumieć, że połączenia, użyte do wyznaczenia prawdopodobieństw dla kombinacyj typu I-go należy zastąpić przez odmiany proste. Albowiem, jeżeli stawiamy np. na numer 65 z tem, że wyjdzie w 3-ciem ciągnieniu, w takim razie, obok liczby 65, wyjętej w 3-iem ciągnieniu, może być jakakolwiek odmiana po cztery z 89 pozostałych numerów, wyjęta podczas 1-go, 2-go, 4-go i 5-go ciągnienia. Tak samo rzecz się ma przy ściśle określonem ambie, ternie, kwaternie i kwinternie.

Otrzymujemy więc w typie II-im następujące prawdopodobieństwa:

$$p(\mathrm{II}_1) = \frac{89.88.87.86}{90.98.88.87.86} = \frac{1}{90} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

$$p(\mathrm{II}_2) = \frac{88.87.86}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{8010} \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

$$p(II_3) = \frac{87.86}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{704880} \quad . \quad . \quad . \quad (20),$$

$$p(II_4) = \frac{86}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{61324560} \quad . \quad . \quad (21),$$

$$p(II_5) = \frac{1}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{5273912160} \quad . \quad (22).$$

III. Typ oznaczony.

W tym rodzaju połączeń wskazuje się tylko porządek, w jakim wybrane przez nas numery wyjść powinny, bez względu na to, w którem ciągnieniu się pojawiają. Tutaj, widocznie, numer pojedynczy identyfikuje się z (13), kwinterno z (22). Różnica zachodzi tylko w ambie, ternie i kwaternie, których prawdopodobieństwa otrzymują się z prawdopodobieństw typu ściśle określonego, mnożąc odnośne prawdopodobieństwa przez liczbę przemian z 5-u przedmiotów, pomiędzy któremi: dla ambo są dwa i trzy przedmioty jednakowe, dla terna trzy i dwa, dla kwaterna cztery i jeden; dla otrzymania bowiem odmian sprzyjających typowi III można w odmianach typu II wykonać wszystkie takie przemiany, które zmieniają ściśle określone ciągnienia, ale nie zmieniają porządku.

Tak postępując, otrzymujemy:

$$p(III_2) = \frac{1}{8010} \cdot \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{1}{801} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23),$$

$$p(III_3) = \frac{1}{704880} \cdot \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{1}{70488} \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

$$p(III_4) = \frac{1}{61324560} \cdot \frac{5!}{4!\,1!} = \frac{1}{12264912} \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Oprócz tych zasadniczych kombinacyj można tworzyć rozmaite inne. Można np. pomyśleć taką kombinacyę, aby pomiędzy pięciu wybranemi numerami znajdował się co najmniej jeden z trzech wybranych. Odnośne prawdopodobieństwo jest dopełnieniem do jedności prawdopodobieństwa, z jakiem żaden z tych numerów nie wyjdzie, a to ostatnie jest znowu stosunkiem wszystkich połączeń z 87-u numerów (pozostałych z 90-u po wyłączeniu z nich trzech wybranych) po pięć do liczby wszystkich możliwych połączeń z 90-u po pięć, t. j. równa się:

$$\frac{\dfrac{87.86.85.84.83}{1.2.3.4.5}}{\dfrac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}} = \frac{9877}{11748},$$

więc szukane prawdopodobieństwo $= 1 - \dfrac{9877}{11748} = \dfrac{1871}{11748}$.

17. Hazard w loteryi liczbowej. Z art. 15-go wiemy, że w razie wyjścia wybranego przez gracza połączenia numerów, przedsiębiorca loteryi płaci pewną liczbę razy wziętą stawkę. Te normy zależą naturalnie od kombinacyi, lecz nie są wszędzie jednakowe: w jednych państwach płacą więcej, w innych mniej, ale nigdzie tyle, ile według warunków gry równoważnej płacić należy, czyli loterya liczbowa jest również grą hazardowną. Zobaczmy, na ile hazardowną.

Ponieważ nie wszędzie płacą jednakowo, zatem hazardowność jest różna w różnych miejscach. Najczęstszemi, lecz nie najniższemi wygranemi są następujące:

1) Za numer pojedynczy z koleją nieoznaczoną	15	razy wzięta stawka
2) Za numer pojedynczy z koleją oznaczoną	75	„ „ „
3) Za ambo nieoznaczone . . .	270	„ „ „
4) „ „ ściśle określone . .	5100	„ „ „
5) „ terno nieoznaczone . . .	5400	„ „ „
6) „ kwaterno „ . . .	60000	„ „ „

i t. d.

Tymczasem, według reguły gry równoważnej, na podstawie wzoru (2'), płacić się powinno:

w 1-ym przypadku $w = \frac{S}{p} = S : \frac{1}{18} =$ 18 razy wziętą stawkę

„ 2-im „ $w = S : \frac{1}{90} =$ 90 „ „ „

„ 3-im „ $w = S : \frac{2}{801} =$ $400\frac{1}{2}$ „ „ „

„ 4-ym „ $w = S : \frac{1}{8010} =$ 8010 „ „ „

„ 5-ym „ $w = S : \frac{1}{11748} =$ 11748 „ „ „

„ 6-ym „ $w = S : \frac{1}{511038} =$ 511038 „ „ „

Różnice więc są ogromne i to tem większe, im kombinacya posiada mniejsze prawdopodobieństwo wyjścia.

Gdyby stawki były unormowane według wygranych, to powinny być następujące:

czyli różnica wynosi:

w 1 przyp.	$15\,S.\ \frac{1}{18} = \frac{15}{18}\,S,$	$S - \frac{15}{18}\,S = \frac{3}{18}\,S;$	
„ 2 „	$75\,S.\ \frac{1}{90} = \frac{75}{90}\,S,$	$S - \frac{75}{90}\,S = \frac{15}{90}\,S;$	
„ 3 „	$270\,S.\ \frac{2}{801} = \frac{540}{801}\,S,$	$S - \frac{540}{801}\,S = \frac{261}{801}\,S;$	
„ 4 „	$5100\,S.\ \frac{1}{8010} = \frac{5100}{8010}\,S,$	$S - \frac{5100}{8010}\,S = \frac{291}{801}\,S;$	
„ 5 „	$5400\,S.\ \frac{1}{11748} = \frac{5400}{11748}\,S,$	$S - \frac{5400}{11748}\,S = \frac{6348}{11748}\,S;$	
„ 6 „	$60000\,S.\ \frac{1}{511038} = \frac{60000}{511038}\,S,$	$S - \frac{60000}{511038}\,S = \frac{451038}{511038}\,S,$	

t. j. odpowiednie tym przypadkom hazardy są równe: $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{29}{89}, \frac{97}{267}, \frac{529}{979}, \frac{75173}{85173}$.

18. Loterya liczbowa w stosunku do rulety. Widzimy z powyższego, że hazard w różnych kombinacyach loteryi liczbowej nie jest, jak w rulecie, jednakowy, lecz, z małym wyjątkiem (dla dwóch pierwszych przypadków) zmienia się z kombinacyą. I tak: ambo nieoznaczone jest $\frac{29}{89} : \frac{1}{6} = \frac{174}{89}$, czyli prawie dwa razy hazardowniejsze od gry na numer pojedynczy; ambo ściśle określone od nieoznaczonego jest $\frac{97}{267} : \frac{29}{89} = \frac{8633}{7743} = 1\frac{890}{7743}$ razy hazardowniejsze i t. d. Dlatego nie można tu z góry przewidywać najprawdopodobniejszego zysku przedsiębiorcy, ani też określić, ile razy loterya liczbowa jest wogóle hazardowniejsza od rulety. Dla przeprowadzenia tego ostatniego porównania trzeba oddzielnie brać pod uwagę każdą kombinacyę, co czyniąc np. dla przypadku 1-go, 2-go, 3-go i 6-go — widzimy, że 1-a i 2-ga kombinacya jest $\frac{1}{6} : \frac{1}{37} = \frac{37}{6}$, t. j. przeszło 6 razy hazardowniejsza od rulety; 3-ia kombinacya $\frac{29}{89} : \frac{1}{37} = \frac{29.37}{89}$ = prawie 12 razy, zaś kombinacya szósta $\frac{75173}{85173} : \frac{1}{37}$ = blizko 33 razy hazardowniejsza od rulety.

Jeżeli zaś doraźnie ruleta większe wśród graczów czyni spustoszenia, to tylko dlatego, iż na rezultat gry hazardownej wpływa nietylko wysokość hazardu, lecz i liczba, czyli szybkość rozgrywania partyj; podczas zaś kiedy loteryj liczbowych rozgrywa się kilka na rok, liczba partyj rulety w Monte Carlo dochodzi, jak widzieliśmy, do miliona.

Mimo to loterye liczbowe są o tyle szkodliwsze od rulety, że gdy ruleta rujnuje zamożniejszych, bo tylko zamożniejsi mogą jechać do Monte Carlo, a miejscowej ludności grać nie wolno, to loterya liczbowa, jako operująca na miejscu i przystępna dla najmniejszych nawet stawek, wyzyskuje i demoralizuje całą ludność, zwłaszcza uboższą, jak to wywnioskować możemy np. ze słów już raz w art. 9-ym wspomnianego Autora, który opowiada, że „we Włoszech w dwóch ostatnich dniach ciągnienia loteryi liczbowej wypiek chleba zmniejsza się o połowę, gdyż w tym stosunku maleje pokup chleba. Widocznie najuboższe klasy na tym artykule pierwszej potrzeby życia oszczędzają środki na hazard“ To jest właśnie racya, na podstawie której jeszcze Jan Śniadecki wyrzekł, iż „Loterye liczbowe są wynalazkiem rządowej nieprawości“.

C. Loterya klasyczna.

19. Urządzenie loteryi klasycznej. W celu niby obniżenia szkodliwości gry w loteryę liczbową, niektóre państwa wprowadziły u siebie innego rodzaju urządzenie, zwane loteryą klasyczną, rozgrywaną zazwyczaj dwa razy na rok, o losach stosunkowo dość drogich, więc mniej przystępnych dla osób uboższych.

Za przykład (posiadający jednak znaczenie ogólne) dla naszych rozumowań weźmiemy pod uwagę „Loteryę klasyczną Królestwa Polskiego“ jako najbardziej nas obchodzącą.

Nasza loterya klasyczna składa się z 23500 numerów (losów), każdy podzielony na cztery ćwiarki (A, B, C i D), mogące być oddzielnie nabywane. Jest podzielona na pięć klas.

Cały los do jednej klasy kosztuje 12 rub. + 24 kop. na kolektorów (pośredników w sprzedaży losów) + 36 kop. na „Czerwony krzyż“, razem więc do jednej klasy kosztuje 12,60, więc do wszystkich klas, o ile nie jest wylosowany w klasach niższych, kosztuje 63 rub. Stawki wnoszą się za każdą klasę oddzielnie.

Połowa losów, czyli 11750 wygrywa różne sumy: większość, gdyż 10800 losów— otrzymuje zwrot stawek (z drobną nadwyżką); z pozostałych 950 losów, 846 wygrywa mniej niż po 1000 rub.; 46 po 1000, trzy po 1500, jeden 1600 rub., 28 po 2000, jeden 3000; 11-ie po 4000, dwa po 5000, trzy po 8000, pięć po 10000, jeden 15000, jeden 20000, jeden 40000 i jeden (t. zw. wielki los) 75000 rubli.

W pierwszych czterech klasach losuje się po 1200 numerów, w piątej resztę, czyli 6950. W ciągu roku rozgrywają się dwie loterye.

Opłaty, wnoszone przez graczów, są zatem następujące:

		Loterya		Kolektorzy		Czerwony krzyż
do klasy I:	23500 . 12,60 =	282000	+	5640	+	8460
„ „ II:	22300 . 12,60 =	267600	+	5352	+	8028
„ „ III:	21100 . 12,60 =	253200	+	5064	+	7596
„ „ IV:	19900 . 12,60 =	238800	+	4776	+	7164
„ „ V:	18700 . 12,60 =	224400	+	4488	+	6732
	razem .	1266000	+	25320	+	37980

Z pierwszej sumy wypłaca się Warszawskiemu Towarzystwu Dobroczynności 3000, pozostałe 1263000 stanowią wygrane, z których jednak, przy wypłacaniu, strąca się 12% na Skarb i 3% dla kolektorów, t. j. 151560 + 37890 = 189450 rub. — tak, że z loteryi w ciągu jednego półrocza otrzymuje:

Skarb	151560
Kolektorzy	63210
Czerwony krzyż	37980
Dobroczynność	3000
razem	255750
reszta, t. j.	1073550

wraca do kieszeni graczów.

20. Hazard w naszej loteryi klasycznej. Ponieważ za numery wylosowane w klasach niższych stawki za klasy wyższe się nie wnoszą, przeto stawki graczów są różne; skutkiem tego dla obrachowania hazardu należy warunki tak zmodyfikować, aby, nie zmieniając istoty rzeczy, wszystkie stawki można było uważać za jednakowe.

Otóż można przyjąć, że wszyscy gracze, zarówno wygrywający w klasach niższych jak i wygrywający w klasie piątej, płacą po 63 rub., ale za to wygrane w klasach niższych są większe od rzeczywistych o niedopłacone stawki. Jeżeli tak, to do powyższych 1 073 550 rub., wracających do rąk graczów, dodać jeszcze należy:

do wygranych w kl.	I:	$(63 \quad -12{,}60) . 1200 = 50{,}40 . 1200 =$	60480
„ „ „ „	II:	$(50{,}40 - 12{,}60) . 1200 = 37{,}80 . 1200 =$	45360
„ „ „ „	III:	$(37{,}80 - 12{,}60) . 1200 = 25{,}20 . 1200 =$	30240
„ „ „ „	IV:	$(25{,}20 - 12{,}60) . 1200 = 12{,}60 . 1200 =$	15120
		razem	151200
		+ wiadome	1073550
		ogółem wraca do rąk graczów	1224750

przy założeniu, że za wszystkie 23500 losy płacą gracze po 63 ruble.

Wypada stąd na wartość każdego losu:

$$\frac{1224750}{23500} = 52{,}12;$$

że zaś gracz płaci 63 ruble, przeto nadpłaca $63 - 52{,}12 = 10{,}88$, czyli hazard:

$$h = \frac{10{,}88}{63} = 0{,}1727\ ^{*}).$$

Hazard rulety wynosi, jak wiemy, $\frac{1}{37}$; stąd się pokazuje, że nasza loterya klasyczna jest $0{,}1727 : \frac{1}{37} = 0{,}1727 . 37 = 6{,}3899$ razy hazardowniejsza od rulety oraz jest prawie tak samo hazardowna jak gra na pojedynczy numer w loteryi liczbowej $(0{,}1727 : \frac{1}{6} = 1{,}0362)$.

21. Przesądy graczów. I w loteryi liczbowej i w klasycznej istnieją, podobnie jak w rulecie, rozmaite przesądy, które żadnej wyrozumowanej podstawy nie posiadają.

W loteryi klasycznej np. jedni pragną nabyć ten numer, na który w poprzedniej loteryi padł wielki los, uważając go za „szczęśliwy". Inni, natomiast, niby na podstawie prawa wielkich liczb, unikają go. I jedno i drugie mniemanie, oczywiście, nie ma sensu, bo w każdej loteryi każdy numer ma absolutnie tę samą szansę do wielkiej wygranej i, spieszymy dodać, szansę tak drobną, że na nią żaden trzeźwy umysł liczyć nie może.

Wielki los jest jeden, a numerów 23500, prawdopodobieństwo za-

*) Hazard ten, naturalnie, zwiększa się, gdy stawki, przy tych samych wygranych, zostają powiększone, jak to, od dłuższego już czasu, czynią u nas pośrednicy w rozprzedaży losów.

tem wygrania wielkiego losu na wzięty przez nas numer $= \frac{1}{23500}$, czyli, gdyby ta wielka wygrana padała w każdej loteryi na inny numer, trzebaby 11750 lat na to, aby padła na każdy. Dla lepszego uzmysłowienia tej szansy, wyobraźmy sobie poduszkę z 23500 tkwiącemi w niej szpilkami, z tych jedna bez końca. Owóż takie same jest prawdopodobieństwo, że na wzięty przez nas numer padnie wielki los, jakie jest prawdopodobieństwo wyjęcia szpilki bez końca z pośród 23500 tkwiących w poduszce.

ROZDZIAŁ V.

Statystyka.

1. Podział Statystyki. Z powodu różnorodnych zadań, jakiemi zajmuje się Statystyka, definicya tej gałęzi wiedzy przedstawia pewne trudności, i dlatego, aby sobie rzecz ułatwić, podzielmy ją przedewszystkiem na dwie części: na Statystykę praktyczną i na Statystykę teoretyczną (matematyczną).

Zadaniem Statystyki praktycznej jest zbieranie i układanie w odpowiednie wykazy wszelkich wiadomości o liczbie i rodzaju różnych jestestw, przedmiotów i zjawisk, względnie zdarzeń, zachodzących wśród zbioru owych jestestw i przedmiotów. Tę część Statystyki możnaby inaczej nazwać Statystyką liczącą.

Część druga, nazwana Statystyką teoretyczną albo matematyczną, ma na celu wyprowadzanie wniosków z nagromadzonych przez Statystykę praktyczną materyałów i ujęcie ich w formę praw, zwanych prawami statystycznemi — dla odróżnienia od tych praw, któremi zajmują się nauki ścisłe. Ten dział Statystyki możnaby także nazwać Statystyką badającą albo analityczną.

Jakkolwiek Statystykę stosować można do każdego rodzaju zjawisk, skutkiem czego każdy dział wiedzy i wszystkie rodzaje czynności ludzkich posiadać mogą swoją specyalną Statystykę, to jednak za główny cel tej umiejętności uważa się życie społeczne w najszerszem znaczeniu tych wyrazów. Jako taka, Statystyka praktyczna dostarcza materyału nietylko dla badań czysto naukowych, lecz nadto oddaje duże usługi gospodarstwu społecznemu, dostarcza bowiem wszelkich szczegółów, odnoszących się do stanu i ruchu ludności (zaludnienie, urodzenia, małżeństwa, zgony i t. d.), do stanu i rozwoju rolnictwa, przemysłu, handlu i wogóle do wszelkiego rodzaju zjawisk ściśle z życiem ludzkiem związanych.

Liczby, określające ilość zachodzących zjawisk, bywają bezwzględne i względne czyli stosunkowe. Pierwsze wyrażają wprost liczby zaobserwowanych i zanotowanych zjawisk; drugie, wyrażane zwykle procentowo, na tysiąc, na dziesięć tysięcy lub t. p., stosownie do okoliczności, przedstawiają stosunki liczb bezwzględnych. Jeżeli np. w danem społeczeństwie, liczącem, dajmy na to, milion ludności, urodziło się w ciągu roku 30000 dzieci i zmarło 24000 osób, liczby 30000 i 24000 są bezwzględne, zaś 30 dzieci nowonarodzonych i 24 osób zmarłych średnio na każdy 1000 ludności są liczbami względnemi, t. j. obliczonemi w stosunku do 1000 ludności ($30^0/_{00}$, $24^0/_{00}$).

Liczby bezwzględne są potrzebne dla dalszych badań teoretycznych, względne znajdują zastosowanie przy badaniach porównawczych stanu różnych społeczeństw.

2. Statystyka matematyczna. Wszelkie zjawiska, względnie zdarzenia, w stosunku do zdolności poznawczych człowieka, można podzielić na dwie kategorye: na zdarzenia dające się, przy pewnym stanie wiedzy, z góry i na pewno przewidzieć i na zdarzenia nie dające się przewidzieć na pewno.

Zdarzenia dają się przewidzieć, gdy znamy przyczyny powodujące ich zajście i związki, jakie pomiędzy przyczynami a samem zdarzeniem zachodzą. Badaniem tej kategoryi zjawisk zajmują się nauki ścisłe.

Jeżeli jednak przyczyn powodujących zajście zdarzeń nie znamy, albo gdy przyczyn jest bardzo wiele i są ze sobą w sposób bardzo zawiły powiązane — tak, że nie jesteśmy w możności pochwycić związków zachodzących pomiędzy przyczynami a samem zdarzeniem, wtedy zdarzeń przewidzieć nie jesteśmy w stanie i dlatego uważamy je za przypadkowe. Tej kategoryi zdarzenia właśnie stanowią główny przedmiot badań statystycznych.

Zajmuje się niemi Statystyka matematyczna na podstawie materyałów dostarczonych przez Statystykę praktyczną i przy pomocy reguł stanowiących treść Rachunku prawdopodobieństwa.

Z powodu swego znaczenia gospodarczego, Statystyka praktyczna była od dawna w użyciu; Statystyka matematyczna natomiast jest zdobyczą ubiegłego dopiero stulecia.

Odkrycia Queteleta zwróciły myśl ludzką w tym kierunku. Uczony ten, badając różne zjawiska społeczne, zachodzące wśród ludności Belgii, spostrzegł, że np. urodzenia, zgony, przestępstwa kryminalne i tym podobne zjawiska społeczne zachowują z roku na rok pewną stałość liczebną, niezupełnie ścisłą, lecz dość wyraźną — podobną do tej, jaka daje się zauważyć przy losowaniu kul różnobarwnych z urny, jeżeli wykonamy bardzo wiele ciągnień. To nasunęło myśl, że zachodzi tu pewna analogia, że mianowicie, o ile stosunki i warunki życiowe bardzo licznej ludności nie ulegają zmianie, zjawiska społeczne powtarzają się z roku na rok, jeżeli nie w tej samej, to przynajmniej w bardzo zbliżonej do siebie stosunkowo liczbie. Liczby te ulegają znaczniejszej zmianie wtedy dopiero, gdy się zmieniają warunki oddziaływające na odnośne zjawiska — tak samo, jak się zmienia liczba pojawiających się kul pewnego koloru, gdy zmienimy ich skład stosunkowy w urnie.

Wypłynął stąd wniosek, że zasady Teoryi prawdopodobieństwa mogą się dać zastosować do zjawisk społecznych i to stanowiło punkt wyjścia dla Statystyki matematycznej, propagowanej gorąco przez następców Queteleta, jak przez Wittsteina i innych jemu spółczesnych.

Właściwe jednak podwaliny Statystyce matematycznej nadał G. F. Knapp w dziele p. t. „Über die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungs-Statistik" (Lipsk, 1868) oraz jednocześnie, lecz całkiem od Knappa niezależnie, Gustaw Zeuner w pracy p. t. „Abhandlungen aus der mathematischen Statistik" (Lipsk, 1869). Następują potem prace E. Dormoy, W. Lexisa, K. Beckera, L. Bortkiewicza i wielu innych myślicieli. Uczeni ci określili ściślej cel, zasady i zadania Statystyki matematycznej, acz dalecy jeszcze jesteśmy od zupełnego i wszechstronnego wyczerpania tego bardzo ciekawego, ale też bardzo trudnego i zawiłego przedmiotu.

Najpierwszem zadaniem Statystyki matematycznej, w chwili gdy przystępuje do badań, jest rozpoznanie, czy do mających się zbadać zjawisk można zastosować zasady Teoryi prawdopodobieństwa, a temsamem, czy dane zjawiska posiadają charakter przypadkowości.

Do celu tego służą odchylenia średnie, o których była mowa w Rozdziale III-im (art. 15-y, 16-y i 17-y). Wyprowadzone tam wzory odnoszą się właśnie do zdarzeń przypadkowych, gdy więc dla danego materyału statystycznego obliczymy z jednej strony wielkość odchyleń średnich przy założeniu, że zjawiska są przypadkowe, z drugiej strony obrachujemy odchylenia rzeczywiste, jakie z materyału statystycznego wyprowadzić się dają, to jeżeli zjawiska, objęte materyałem statystycznym, posiadają istotnie charakter przypadkowy, odchylenia rzeczywiste powinny być równe, a przynajmniej dość zbliżone do odchyleń teoretycznych.

Badania, przeprowadzone przez różnych uczonych, wykazały, że, z całego szeregu zjawisk społecznych, warunkowi temu odpowiadają dość ściśle tylko urodzenia chłopców i dziewcząt*), czyli że urodzenie się chłopca albo dziewczęcia może być uważane za zdarzenie czysto przypadkowe. Wszystkie inne zjawiska społeczne, a w ich liczbie i śmiertelność, która nas tutaj, ze względu na Rozdział VI-y, najwięcej obchodzi, nie tak wyraźnie zdradzają charakter przypadkowości, co dowodzi, że zachodzić tu muszą jakieś wpływy uboczne, psujące przypadkowość, np. w śmiertelności zmiany w stanie ekonomicznym społeczeństwa, epidemie, wojny, polityka, zmiany warunków sanitarnych i t. p. Wpływy te jednak nie odbierają zjawiskom społecznym charakteru przypadkowości, lecz zmieniają ustawicznie prawdopodobieństwa ich zajścia, skutkiem czego znajduje tu zastosowanie twierdzenie Poissona. Z Rozdziału III-go (art. 19-y) wiemy, jaka jest treść tego twierdzenia; wypływa z niej wniosek, że prawdopodobieństwa zmienne można, z pewnem przybliżeniem, zastąpić przez prawdopodobieństwa stałe, równe średniej arytmetycznej z wszystkich zmiennych; przybliżenie będzie tem większe, im więcej prób użyjemy do wyznaczenia prawdopodobieństwa średniego.

W zastosowaniu do Statystyki oznacza to, że prawdopodobieństwa zmienne zjawisk społecznych można, z pewnem przybliżeniem, zastąpić przez prawdopodobieństwa stałe, które otrzymują się z materyału statystycznego dostatecznie obfitego i zebranego w ciągu odpowiednio długiego czasu, gdyż tą drogą następuje, do pewnego stopnia, wyrównanie czyli kompensata różnych wpływów, zakłócających w różnych kierunkach stałość prawdopodobieństw.

Przy stosowaniu wszakże prawdopodobieństwa średniego do praktyki życiowej, zawsze pilnie baczyć należy i często sprawdzać, czy oparte na niem obliczenia odpowiadają rzeczywiście osiąganym rezultatom i w razie przeciwnym, zwłaszcza w razie dużej niezgodności, prawdopodobieństwa dawne zastąpić przez inne — odpowiedniejsze.

Z takiemi zastrzeżeniami śmiertelność traktować można jako zjawisko przypadkowe i stosować do niej reguły Rachunku prawdopodobieństwa w zakresie twierdzenia Bernoulli'ego.

3. Statystyka śmiertelności. Po uznaniu śmierci za zjawisko przypadkowe, najważniejszem z kolei zadaniem Statystyki matematycznej jest wyznaczenie prawdopodobieństwa śmierci.

---

*) L. Bortkiewicz zauważył, że temu warunkowi odpowiadają również zjawiska zachodzące bardzo rzadko, względnie których prawdopodobieństwa są bardzo małe. Nasunęło mu to myśl pewnego prawa, nazwanego przezeń „Prawem małych liczb" (Dr. L. von Bortkewitsch „Das Gesetz der kleinen Zahlen". Lipsk, 1898). Rzecz ta wszakże nie jest jeszcze dotąd stanowczo przesądzona.

Z powodu wielkiej ilości i dużego powikłania przyczyn sprowadzających śmierć jednostki, prawdopodobieństwo śmierci a priori nie może być wyznaczone, może tu być mowa tylko o prawdopodobieństwie a posteriori.

Otóż, stosując do śmiertelności twierdzenie odwrotne do twierdzenia Bernoulli'ego (Rozdział III-ci, art. 23-ci), wyobraźmy sobie pewną dostatecznie liczną grupę osób. Każda z tych osób może w ciągu pewnego czasu umrzeć; mamy więc tyle wszystkich możliwych przypadków śmierci w ciągu danego czasu, ile jest wszystkich osób w grupie. Lecz z grupy rzeczonej, w ciągu danego czasu, umrze pewna tylko liczba osób; jest to liczba wszystkich przypadków, jakie zaszły. Więc stosunek tej ostatniej liczby do liczby wszystkich wziętych pod obserwacyę osób jest najprawdopodobniejszem, wyznaczonem a posteriori, prawdopodobieństwem śmierci osób składających grupę w przeciągu czasu, przez jaki była pod obserwacyą. Przytem może być zawsze wyznaczone prawdopodobieństwo, z jakiem znalezione prawdopodobieństwo śmierci odchyla się, w danych granicach, w jednę lub w drugą stronę, od prawdopodobieństwa rzeczywistego, i naodwrót. Odchylenie, przy tem samem prawdopodobieństwie, będzie tem mniejsze, im większą liczbę osób weźmiemy pod obserwacyę.

Jeżeli obserwacya trwa przez rok jeden, prawdopodobieństwo będzie roczne.

Dajmy np., że z pośród miliona osób umarło w ciągu roku 24000; roczne prawdopodobieństwo śmierci (wyznaczone a posteriori) wynosi:

$$\frac{24000}{1000000} = 0{,}024.$$

Gdybyśmy chcieli poznać granice, w jakich prawdopodobieństwo 0,024 odchyla się od rzeczywistego z prawdopodobieństwem 0,999, należy, z jednej z tablic wskazanych w przypisku na str. 177-ej, odszukać t odpowiadające wartości funkcyi $\Phi(t) = 0{,}999$; jest niem $t = 2{,}33$. Gdy następnie we wzór (37) na str. 196-ej podstawimy $t = 2{,}33$, $n = 1000000$, $\mu = 24000$, $\nu = 976000$, to znajdziemy odchylenie:

$$t\sqrt{\frac{2\mu\nu}{n^3}} = 2{,}33\sqrt{\frac{2 . 24000 . 976000}{(1000000)^3}} = 0{,}0005,$$

czyli rzeczywiste prawdopodobieństwo śmierci mieści się, z prawdopodobieństwem 0,999, w granicach 0,024 $\pm$ 0,0005, t. j. od 0,0245 do 0,0235. Granice te dają miarę ścisłości, z jaką prawdopodobieństwo śmierci zostało wyznaczone.

Tak się rzecz przedstawia, gdy prawdopodobieństwo śmierci zostało wyznaczone przy spełnieniu się wszystkich warunków, jakim zdarzenia przypadkowe odpowiadać winny.

Ale stosunek liczby zdarzeń zaszłych do liczby wszystkich zajść mogących wtedy dopiero, jak wiemy, wyraża prawdopodobieństwo zdarzeń zaszłych, gdy wszystkie zdarzenia zajść mogące (jak w obecnym razie — śmierć każdej osoby) są jednakowo możliwe. Żeby więc wywyznaczone, dla danej grupy osób, prawdopodobieństwo śmierci odpowiadało powyższemu warunkowi, każda z osób, wchodząca w skład grupy poddanej obserwacyi, winna posiadać jednakowe widoki śmierci. W zasadzie więc nie można łączyć w jednę grupę osób różniących się czy to stanem zdrowia, płcią czy też warunkami bytu, lecz trzeba dobierać grupy możliwie jednolite i dla każdej oddzielnie wyznaczyć prawdopodobieństwo śmierci.

Najważniejszym i największy wpływ na śmierć mającym czynnikiem jest w i e k, zrozumiałą bowiem jest rzeczą, iż prawdopodobieństwo śmierci np. 90-cio letniego starca nie może być takie same jak 25-cio letniego młodzieńca.

Przedewszystkiem więc Statystyka matematyczna zająć się powinna wyznaczeniem prawdopodobieństwa śmierci dla każdego wieku oddzielnie. Tem się też rzeczywiście najprzód zajęła, w tym kierunku, jak dotąd, poczyniła najwięcej wysiłków, i w tym też dziale, posiadającym dla nas największe znaczenie, osiągnęła najpoważniejsze rezultaty.

U w a g a. Postępowanie opisane w niniejszym artykule, chociaż podane specyalnie dla śmiertelności, stosuje się jednak, w zasadzie, do każdego innego zjawiska społecznego — do urodzeń, do zawieranych małżeństw, do przestępstw kryminalnych i t. p.

4. Śmiertelność według wieku. Ze wszystkiego, cośmy w artykule poprzednim powiedzieli, wynika, że dla wyznaczenia rocznego prawdopodobieństwa śmierci dla osób w pewnym wieku — oznaczmy go przez x — należy wziąć pod obserwacyę dostatecznie liczną grupę osób x letnich, pozostających, ile można, w jednakowych warunkach; wyznaczyć, ile ich umarło w ciągu roku i liczbę zmarłych podzielić przez liczbę osób żyjących na początku roku i wziętych pod obserwacyę. Otrzymany iloraz, w zasadzie, będzie wyrażał roczne prawdopodobieństwo śmierci osób pomienionych.

Jeżeli wzięte pod obserwacyę osoby pozostają w różnych warunkach, wyznaczone prawdopodobieństwo nie będzie się odnosiło do każdej z nich poszczególnie, lecz raczej do pewnego typu przeciętnego, który podstawiamy zamiast rzeczywiście wziętych pod obserwacyę osób. Ponieważ zaś dostatecznie wielkiej liczby osób ściśle pozostających w jednakowych warunkach (jednolitych) zebrać niepodobna, właściwie więc każde prawdopodobieństwo śmierci, taką otrzymane drogą, stosuje się nie do osób rzeczywistych, lecz do wzmiankowanego wyżej typu przeciętnego — idealnego; chodzi tylko o to, aby ten typ idealny możliwie jak najmniej się oddalał od osób realnych.

Na prawdopodobieństwie jednak obliczonem z jednego roku poprzestać nie można, wiemy bowiem, że prawdopodobieństwo śmierci jest wielkością zmienną, wyznaczone więc z jednego roku może się nie stosować do lat innych; trzeba wyznaczyć prawdopodobieństwo średnie z większej liczby lat. Dopiero takie prawdopodobieństwo średnie uważać można za normalne (przynajmniej przez czas pewien) dla osób danego wieku.

W każdym razie, pierwszym krokiem jest wyznaczenie prawdopodobieństwa śmierci z jednego roku, dla każdego wieku oddzielnie.

Wiemy jak postępować należy, aby dojść do prawdopodobieństwa rocznego; postępowanie zdaje się być proste, a jednak nastręcza nadzwyczaj wiele trudności.

Bo zważmy, że ludzie nie rodzą się przecież jednocześnie, lecz w ciągu całego roku, najczęściej zatem w danym momencie czasu, wśród danej grupy osób, ściśle biorąc, albo wcale niema osób tego samego wieku, albo jest ich tak niewiele, że na nich obliczeń poważniejszych oprzeć nie można.

Trudności wszelako zostały pokonane, przynajmniej teoretycznie, w sposób bardzo zręczny. Pokonali je najprzód dwaj pierwsi z wymienionych w art. 2-gim myśliciele. Starać się będziemy przedstawić tę rzecz czytelnikom naszym zwięźle i przystępnie — przynajmniej o tyle, o ile sam przedmiot do takiego traktowania się nadaje.

5. Graficzny sposób badania śmiertelności. Nadzwyczaj wielką usługę i ułatwienie w pojmowaniu rzeczy oddaje graficzny sposób postępowania. Sposobów takich jest kilka. Jednym z najzręczniejszych, naszym zdaniem, na punkcie jasności jest sposób użyty przez W. Lexisa.

Weźmy dwie proste OT i OX do siebie prostopadłe (Fig. 2). Punkt O niech wyobraża jakiś moment czasu, np. erę chrześcijańską. Od punktu O odetnijmy na prostej OT i OX cały szereg odcinków sobie równych, np. $OA = OB$, i t. d. — tak, że np. $x_1 x_2 = x_2 x_3 = x_4 x_5 = \ldots = t_1 t_2 = t_2 t_3 = \ldots$ Każdy z tych odcinków niech przedstawia rok; przytem odcinków takich na prostej OT może być liczba nieogra-

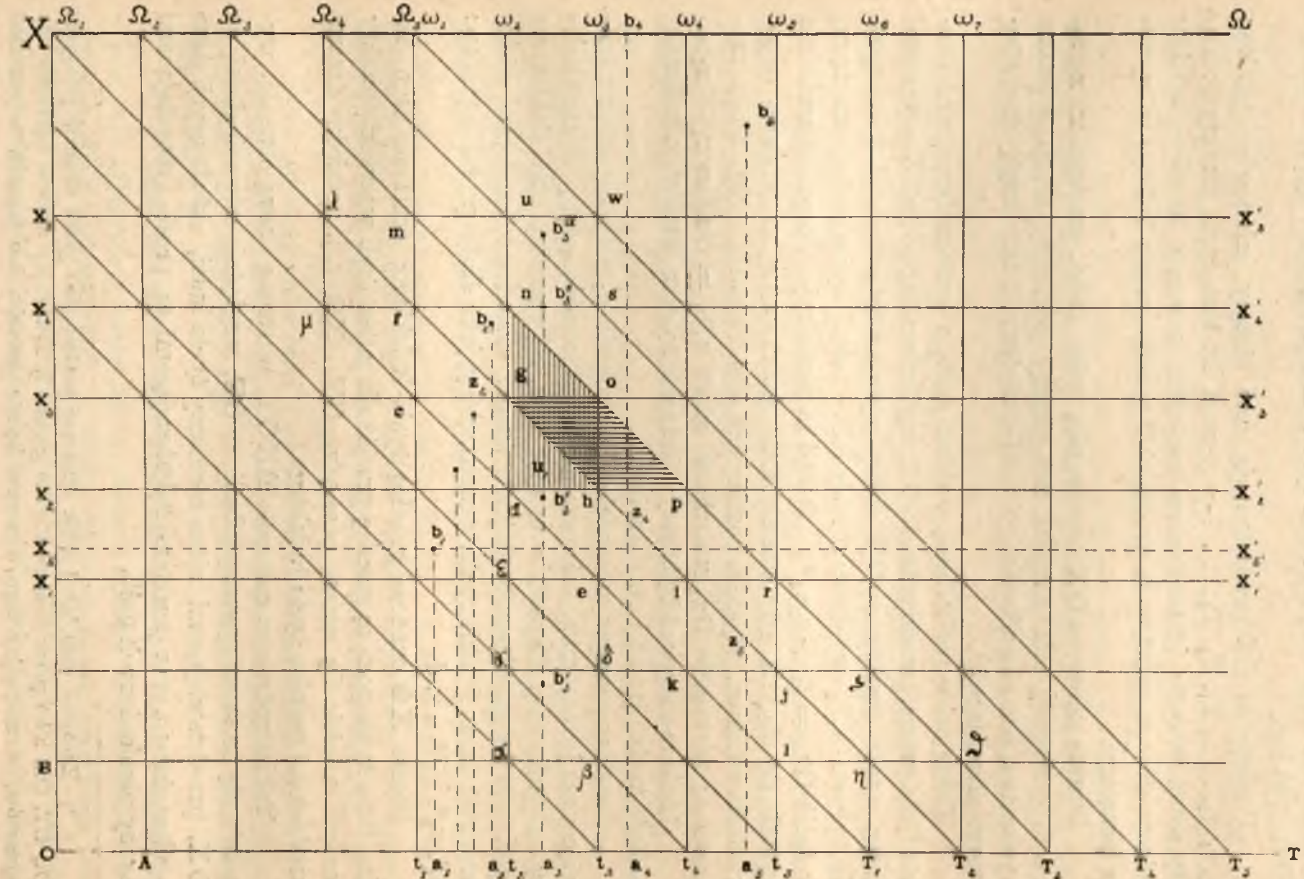
X
O
T
A
B
Ω
Ω_1 Ω_2 Ω_3 Ω_4 Ω_5
ω_1 ω_2 ω_3 ω_4 ω_5 ω_6 ω_7
b_4
x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6
x'_1 x'_2 x'_3 x'_4 x'_5 x'_6
t_1 a_1 a_2 t_2 a_3 t_3 a_4 t_4 a_5 t_5
T_1 T_2 T_3 T_4 T_5

Fig. 2.

niczona, zaś na prostej OX tyle tylko, jaka jest granica życia ludzkiego (około 100 lat).

Punkty na OT przedstawiają czas bieżący, mianowicie punkty: t_1, t_2, t_3, ..., T_1, T_2, T_3, ... 1-y styczeń lat bieżących, punkty pomiędzy niemi zawarte przedstawiają wszystkie momenty lat odpowiednich; jednem słowem, punkty na prostej OT przedstawiają kolejne daty czasu bieżącego.

Punkty znów na OX wyobrażają wiek ludzi, przytem x_1, x_2, x_3, i t. d. oznaczają lata okrągłe, zaś punkty pomiędzy niemi położone wyobrażają lata niecałkowite, t. j. wiek złożony z lat okrągłych i z pewnego ułamku roku.

Każdą osobę, wchodzącą w skład danego społeczeństwa, przedstawia linia prosta, prostopadła do OT, czyli równoległa do OX, wyprowadzona z tego punktu na OT, który reprezentuje datę urodzenia osoby. Np. prosta $a_4 b_4$ wyobraża osobę (albo raczej życie osoby), urodzoną w dacie $Oa_4 = t_3 + t_3 a_4$ *). Dokąd ta osoba żyje, dotąd odpowiednia jej linia się ciągnie, gdy umrze, linia przerywa się na punkcie, odpowiednim wiekowi, w jakim pomieniona osoba umarła. Np. osoba urodzona w momencie Oa_1 umarła w wieku $a_1 b_1 = Ox_b' = x_1 + x_1 x_b'$.

Linie te nazywać będziemy **liniami życia**; punkty, zakończające linie życia, **punktami śmierci**.

Jeżeli w pewnym momencie, np. w chwili a_3 rodzi się jednocześnie więcej niż jedna osoba, wówczas prostą odpowiednią $a_3 b_3$ uważać należy za tylokrotną, ile osób w momencie a_3 się urodziło, czyli linia życia tych osób biegnie łącznie, dopiero śmierć stopniowo zmniejsza wielokrotność łącznej linii życia, pozostawiając jako ślady po sobie punkty: b_3', b_3'', b_3''', i t. d.

Prosta XΩ oznacza granicę życia ludzkiego; skutkiem tego żadna linia życia poza tę granicę przejść nie może, czyli wszystkie punkty śmierci mieścić się muszą pomiędzy OT i XΩ, t. j. pomiędzy datami urodzenia i granicą życia ludzkiego.

Takim sposobem całe pole ΩXOT, w stronę prawą otwarte, wypełnia się prostemi, prostopadłemi do OT, względnie równoległemi do OX, przedstawiającemi różne momenty życia ludzi, składających dane społeczeństwo, oraz punktami zakończającemi te proste i określającemi zgony pomienionych osób.

---

*) Zarówno czas jak i wiek oznaczać można albo przez długość prostych: Ot, OT, Ox, albo przez końcowe tylko głoski: t, T, x. My używać będziemy obu sposobów, w miarę jak tego wymagać będzie potrzeba lub jasność, w ten atoli sposób, że przy sposobie pierwszym oznaczania czasu i wieku używać będziemy głosek prostych, przy drugim — głosek ukośnych, np. $Ot_1 = t_1$, $OT_2 = T_2$, $O x_3 = x_3$, i t. d.

6. Zbiory główne osób żyjących i zmarłych. Otóż wszystkie te osoby, wyrażone przez linie życia i punkty śmierci, zostają rozdzielone na pewne grupy przez proste, prostopadłe do OT i do OX, np. prosta $t_1\,\omega_1$ dzieli je na osoby urodzone przed momentem t_1 (strona lewa) i na urodzone po momencie t_1 (strona prawa), sama zaś prosta $t_1\,\omega_1$ przedstawia jednę lub więcej osób urodzonych w momencie t_1. Podobnie prosta $t_2\,\omega_2$ dzieli wszystkie osoby na urodzone przed i po momencie t_2. Wynika stąd, że linie i punkty, zawarte pomiędzy prostemi $t_1\,\omega_1$ i $t_2\,\omega_2$ przedstawiają zbiór osób urodzonych w okresie $(t_2 - t_1)$. Jeżeli np. t_1 przedstawia 1 styczeń 1900 roku, t_2 — 1-y styczeń 1901 roku, proste i punkty mieszczące się w prostokącie $t_1\,\omega_1\,\omega_2\,t_2$ przedstawiają zbiór osób urodzonych w 1900-ym roku.

Zbiór taki nazywać będziemy pokoleniem albo generacyą z okresu $(t_2 - t_1)$, jak w danym przykładzie — pokoleniem lub generacyą z 1900-go roku.

Proste znów prostopadłe do OX, czyli równoległe do OT dzielą osoby według wieku, np. prosta $x_1\,x_1'$ dzieli, widocznie, osoby wszystkich generacyj na takie, które niedożyły x_1 lat (część dolna, t. j. $x_1'\,x_1$ OT) i które ten wiek przeżyły (część górna, t. j. $x_1'\,x_1\,X\Omega$). Policzywszy wszystkie punkty przecięć prostej $x_1\,x_1'$ z liniami życia (z uwzględnieniem punktów wielokrotnych, powstających z przecięcia wielokrotnej linii życia z prostą $x_1\,x_1'$), otrzymamy liczbę osób, które dożyły wieku x_1 lat i których punkty śmierci znajdują się albo się znajdą ponad prostą $x_1\,x_1'$. Ta prosta, a raczej zbiór punktów jej przecięć z liniami życia, względnie zbiór punktów śmierci już istniejących lub przybyć mających, położonych ponad prostą $x_1\,x_1'$, przedstawia t. zw. Pierwszy zbiór główny osób żyjących (w wieku lat x_1). Z tego samego powodu prosta $x_2\,x_2'$, względnie zbiór punktów śmierci ponad nią położonych, jest zbiorem osób żyjących w wieku lat x_2; podobnie prosta $x_3\,x_3'$ reprezentuje zbiór osób żyjących w wieku lat x_3 i t. d.

Ten pierwszy zbiór osób żyjących określać będziemy przez figurę, mieszczącą lub pomieścić mającą punkty śmierci wszystkich osób żyjących w danym wieku. Np. figura $x_1'\,x_1\,X\,\Omega$ określa zbiór osób żyjących w wieku lat x_1.

Gdy teraz od zbioru osób żyjących w wieku lat x_1 odejmiemy zbiór osób żyjących w wieku lat x_2, różnica mieścić w sobie będzie, widocznie, zbiór osób zmarłych w wieku od x_1 do x_2 lat, czyli zbiór punktów śmierci w polu $x_2'\,x_2\,x_1\,x_1'$. Ten zbiór osób zmarłych zowie się: Pierwszym zbiorem głównym osób zmarłych (w danych granicach wieku).

Widocznie, zarówno zbiór osób żyjących w danym wieku jak i zbiór osób zmarłych w danych granicach wieku można jeszcze podzielić na generacye, do których należą; wtedy mieć będziemy zebrania główne osób żyjących w danym wieku i zmarłych w danych granicach wieku z pośród uważanej generacyi.

Np. prosta ograniczona ei, względnie punkty śmierci w polu ω_3 ei ω_4 przedstawiają zbiór osób żyjących w wieku lat x_1; prosta ograniczona hp, względnie punkty śmierci w polu ω_3 hp ω_4 reprezentują zbiór osób żyjących w wieku lat x_2; zbiór punktów śmierci, mieszczących się w polu phei przedstawia zbiór osób zmarłych w wieku od x_1 do x_2 lat — wszyscy z pośród urodzonych w okresie od t_3 do t_4, czyli z pośród należących do generacyi $(t_4 - t_3)$.

7. Ciąg dalszy art. 6-go. Przeprowadźmy teraz przez punkty: c, f, m, i t. d. proste pod kątem 45° do OX i OT, wtedy otrzymamy szereg prostych $\Omega_1 T_1$, $\Omega_2 T_2$, $\Omega_3 T_3$, i t. d., pochylonych na 45° do OX i OT, więc od siebie równoległych i odcinających na prostej OT części $T_1 T_2$, $T_2 T_3$, i t. d. sobie równe i widocznie także równe odcinkom $x_1 x_2 = x_2 x_3 = x_3 x_4 =$ i t. d. Zobaczmy, jakie może być znaczenie tych prostych.

Zauważmy przedewszystkiem, że punkty przecięcia się np. prostej $T_2 \Omega_2$ z liniami życia, np. punkty: f, z_2, g, h, z_4, i, z_5, j, i t. d. przedstawiają chwile: $Ot_1 + t_1 f$, $Oa_2 + a_2 z_2$, $Ot_2 + t_2 g$, $Ot_3 + t_3 h$, $Oa_4 + a_4 z_4$, $Ot_4 + t_4 i$, $Oa_5 + a_5 z_5$, $Ot_5 + t_5 j$, i t. d., w których osoby urodzone w momentach t_1, a_2, t_2, t_3, a_4, t_4, a_5, t_5, i t. d. dosięgają wieku $t_1 f$, $a_2 z_2$, $t_2 g$, $t_3 h$, $a_4 z_4$, $t_4 i$, $a_5 z_5$, $t_5 j$, i t. d. Ponieważ zaś $t_1 f = t_1 T_2$, $a_2 z_2 = a_2 T_2$, $t_2 g = t_2 T_2$, $t_3 h = t_3 T_2$, $a_4 z_4 = a_4 T_2$, $t_4 i = t_4 T_2$, $a_5 z_5 = a_5 T_2$, $t_5 j = t_5 T_2$, zatem $Ot_1 + t_1 f = Oa_2 + a_2 z_2 = Ot_2 + t_2 g = Ot_3 + t_3 h = Oa_4 + a_4 z_4 = Ot_4 + t_4 i = Oa_5 + a_5 z_5 = Ot_5 + t_5 j =$ i t. d. $= OT_2$, t. j. punkty przecięcia się prostej $\Omega_2 T_2$ z liniami życia reprezentują jeden i ten sam moment czasu OT_2, co się widocznie stosuje i do $\Omega_1 T_1$, $\Omega_3 T_3$, i t. d. — wogóle do wszelkich prostych, pochylonych do OX i OT pod kątem 45°, t. j. każdy punkt takiej prostej przedstawia ten sam moment czasu, wyznaczony na prostej OT przez punkt przecięcia się tej prostej z OT.

Prosta zatem, pochylona do OX i OT pod kątem 45°, np. prosta $\Omega_2 T_2$ dzieli pole otwarte ΩXOT na dwie części, z których część zawarta pomiędzy O i prostą $\Omega_2 T_2$, t. j. $\Omega_2 XOT_2$ mieści w sobie punkty śmierci osób zmarłych przed momentem T_2, pole zaś nieograniczone, leżące po stronie drugiej prostej $\Omega_2 T_2$, czyli $\Omega \Omega_2 T_2 T$ mieści w sobie, albo mieścić będzie punkty śmierci osób zmarłych po momencie T_2. Innemi słowy, prosta $\Omega_2 T_2$, albo raczej zbiór punktów przecięć się prostej

$\Omega_2 T_2$ z liniami życia, odpowiadający przyszłemu zbiorowi punktów śmierci w polu $\Omega\Omega_2 T_2 T$ przedstawia liczbę osób żyjących w chwili T_2 i zowie się: Drugiem zebraniem głównem osób żyjących (w danym momencie czasu).

To drugie zebranie osób żyjących, w dalszym ciągu, określać będziemy przez figury (jak np. obecnie $\Omega\Omega_2 T_2 T$), które w przyszłości mieścić w sobie będą wszystkie punkty śmierci, powstałe ze zgonów osób żyjących w chwili T_2 lub innych.

Tak samo prosta $\Omega_3 T_3$, względnie zbiór punktów śmierci w polu $\Omega\Omega_3 T_3 T$ przedstawia zebranie osób żyjących w momencie T_3, skutkiem czego liczba punktów śmierci mieszcząca się w polu ograniczonem $\Omega_2 T_2 T_3 \Omega_3$ jest zbiorem liczby osób zmarłych w czasie od T_2 do T_3. Ten zbiór zowie się: Drugim zbiorem głównym osób zmarłych (w ciągu danego okresu czasu).

I tutaj, podobnie jak przy pierwszych zebraniach osób żyjących i zmarłych, można te osoby podzielić na generacye zapomocą prostych $t_1\omega_1$, $t_2\omega_2$, $t_3\omega_3$, i t. d. Tak np. prosta gh, względnie liczba punktów śmierci w polu $\omega_2 g h \omega_3$ przedstawia zbiór osób żyjących w momencie T_2 z pośród generacyi $(t_3 - t_2)$; zbiór punktów śmierci w polu ngho reprezentuje zbiór osób zmarłych w okresie od T_2 do T_3 z pośród urodzonych w czasie od t_2 do t_3.

8. Ciąg dalszy art. 7-go. Oprócz dwóch już nam znanych zbiorów osób zmarłych, bywa jeszcze wyróżniane Trzecie zebranie główne osób zmarłych, wyrażające liczbę osób zmarłych w ciągu danego okresu czasu i w danych granicach wieku. Obrazem graficznym takiego zebrania jest np. zbiór punktów śmierci w równoległoboku goph, który, jak łatwo na figurze rozpoznać można, przedstawia liczbę osób zmarłych w okresie czasu od T_2 do T_3 i w wieku od x_2 do x_3 lat.

I wogóle każda figura, ograniczona znanemi nam prostemi, przedstawia pewne zebranie zmarłych. Np. trapez nghpn przedstawia, widocznie, zebranie osób zmarłych w czasie od T_2 do T_3, w wieku lat od x_2 do x_4 z pośród urodzonych w czasie od t_2 do t_4, i t. d.

Najważniejszemi jednak są powyżej zaznaczone dwa zebrania główne osób żyjących i trzy zebrania główne osób zmarłych, a mianowicie:

A. Zebrania główne osób żyjących:

I. w danym wieku x z pośród urodzonych w okresie od t do t',

II. w danym momencie T z pośród urodzonych w okresie od t do t'.

B. Zebrania główne osób zmarłych:

I. w wieku od x do x' z pośród urodzonych w okresie od t do t',

II. w czasie od T do T' z pośród urodzonych w okresie od t do t',
III. w czasie od T do T' i w wieku od x do x'.

Wszystkie zebrania zmarłych, podobnie jak zebrania osób żyjących, określać będziemy przez figury, mieszczące w sobie odpowiednie punkty śmierci — tak, że np. figura f m u n nie oznacza kwadratu ani jego pola, lecz zbiór punktów śmierci, mieszczących się w niej.

9. Bliższe rozpoznanie trzech głównych zebrań osób zmarłych. Z powyższego okazuje się, że wszystkie trzy główne zebrania osób zmarłych określają się przez trojakiego rodzaju cechy: I-e przez wiek (x) i daty urodzenia (t), II-e przez czas (T) i daty urodzenia (t), III-e przez czas (T) i wiek (x). Zachodzi teraz pytanie, jak się w tych trzech zebraniach zachowuje cecha trzecia: w I-em zebraniu czas (T), w II-em wiek (x), w III-iem daty urodzenia (t).

Pierwsze zebranie osób zmarłych, np. dla okresów równych $(x_3 - x_2) = (t_3 - t_2)$, przedstawia na Fig. 2 kwadrat g d h o, który się mieści pomiędzy prostemi $\Omega_1 T_1$ i $\Omega_3 T_3$; te proste określają czas $(T_3 - T_1)$ dwa razy dłuższy od każdego okresu: $(x_3 - x_2)$ i $(t_3 - t_2)$. To znaczy, że osób zmarłych w wieku od x_2 do x_3 z pośród urodzonych w ciągu czasu od t_2 do t_3, równego okresowi $(x_3 - x_2)$, szukać trzeba w ciągu dwa razy dłuższego czasu: od $T_1 = t_2 + x_2$ do $T_3 = t_3 + x_3$. Np. zmarłych w wieku od lat 24 do 25 z pośród urodzonych w 1880 roku (od 1 stycznia 1880 do 1 stycznia 1881) szukać należy w latach od 1 stycznia 1880 + 24 = 1904 roku do 1 stycznia 1881 + 25 = 1906 roku, czyli w ciągu dwóch lat 1904-go i 1905-go.

Drugie zebranie osób zmarłych, np. z okresów $(t_3 - t_2)$ i $(T_3 - T_2)$, przedstawia równoległobok n g h o, który się mieści pomiędzy prostemi $x_2 x'_2$ i $x_4 x'_4$; te proste określają znów wiek od x_2 do x_4, obejmujący okres dwa razy dłuższy od $(t_3 - t_2)$ i $(T_3 - T_2)$. To znów znaczy, że w ciągu czasu od T_2 do T_3 z pośród urodzonych w czasie od t_2 do t_3 umierają osoby w wieku lat od $x_2 = T_2 - t_3$ do $x_4 = T_3 - t_2$. Np. osoby zmarłe w 1905 roku (od 1 stycznia 1905 r. do 1 stycznia 1906 r.) z pośród urodzonych w 1885 roku (od 1 stycznia 1885 r. do 1 stycznia 1886 r.) posiadały lat wieku od 1905 — 1886 = 19-u do 1906 — 1885 = 21, t. j. umierały w 20-ym i 21-ym roku życia.

Trzecie zebranie osób zmarłych, np. w okresie od T_2 do T_3 i w wieku od x_2 do x_3, przedstawia równoległobok g h p o, który zawiera się pomiędzy prostemi $t_2 \omega_2$ i $t_4 \omega_4$, t. j. mieści w sobie zgony osób urodzonych w podwójnym okresie $(t_3 - t_2)$ i $(t_4 - t_3)$, czyli od $t_2 = T_2 - x_3$ do $t_4 = T_3 - x_2$. Np. osoby zmarłe w ciągu 1907-go roku (od 1 stycznia 1907 do 1 stycznia 1908 r.) w 36-ym roku życia (od 35 do 36 lat wieku) urodziły się w czasie od 1-go stycznia 1907 — 36 = 1871 roku do 1-go stycznia 1908 — 35 = 1873 roku, czyli w ciągu dwóch lat: 1871 i 1872-go roku.

10. Zebrania elementarne osób zmarłych. Wykazana w poprzednim artykule okoliczność, że z pośród trojakich cech, charakteryzujących każde z trzech głównych zebrań osób zmarłych, jedna posiada zawsze dwa razy większą rozciągłość niż dwie inne, przedstawia pewne niedogodności dla Statystyki praktycznej i dlatego starać się należy o zastąpienie ich przez inne zebrania, nie posiadające tej wady, a jednak dające możność dojścia z nich do zebrań głównych.

Owóż, rozpatrując się w Fig. 2, widzimy, że zarówno kwadrat g d h o jak i równoległoboki n g h o oraz g h p o składają się z trójkątów: kwadrat g d h o z trójkątów g h o + g d h, równoległobok n g h o z g h o + n g o, równoległobok g h p o z trójkątów g h o + o h p.

Trójkąty te, podobnie jak każda inna figura, utworzona przez proste x x′, t ω i Ω T (i wogóle jak jakakolwiek figura zamknięta, nakreślona w polu Ω X O T), przedstawiają pewne zebrania osób zmarłych i właśnie takie zebrania, których wszystkie trzy cechy są jednakowo rozciągłe.

Istotnie, weźmy np. pod uwagę trójkąt g h o; zawiera on, widocznie, zbiór punktów, przedstawiających zgony zaszłe w czasie od T_2 do T_3, w wieku od x_2 do x_3, z pośród urodzonych w okresie od t_2 do t_3, t. j. w okresach sobie równych: $(T_3 - T_2) = (x_3 - x_2) = (t_3 - t_2)$ i tak samo rzecz się ma z każdym innym trójkątem.

Tego rodzaju zebrania zowią się **zebraniami elementarnemi osób zmarłych.** Granice wieku, urodzeń i okresów wymierania wyznaczają się dla tych zebrań, z Fig. 2, równie łatwo jak dla zebrań głównych. Np. z g h o okazuje się, że:

1. Zgony osób w wieku od x_2 do x_3, z pośród urodzonych w okresie od t_2 do t_3, zachodzą w czasie od $T_2 = t_3 + x_2 = t_2 + x_3$ do $T_3 = t_3 + x_3$. Np. zgony osób zmarłych w wieku od lat 15 do 16 z pośród urodzonych w 1890-ym roku (od 1 stycznia 1890 do 1 stycznia 1891 roku) zaszły w czasie od 1 stycznia 1891 + 15 = 1890 + 16 = 1906 r. do 1 stycznia 1891 + 16 = 1907 roku, czyli w ciągu jednego 1906-go roku.

2. Osoby zmarłe w czasie od T_2 do T_3 z pośród urodzonych w okresie od t_2 do t_3 posiadają lat od $x_2 = T_2 - t_3$ do $x_3 = T_3 - t_3 = T_2 - t_2$. Np. zmarli w 1900-ym roku (od 1 stycznia 1900 r. do 1 stycznia 1901 r.) z pośród urodzonych w roku 1880-ym (od 1 stycznia 1880 r. do 1 stycznia 1881 r.) posiadali lat od 1900 — 1881 = 19-u do 1901 — 1881 = 1900 — 1880 = 20-u.

3. Osoby zmarłe w okresie od T_2 do T_3 i w wieku lat od x_2 do x_3 pochodzą z generacyi okresu od $t_2 = T_2 - x_3$ do $t_3 = T_3 - x_3$ $= T_2 - x_2$. Np. zmarli w 1907-ym roku (od 1 stycznia 1907 do 1 stycznia 1908 r.) w wieku lat od 40 do 41 pochodzą z urodzonych w okresie od 1 stycznia 1907 — 41 = 1866 roku do 1 stycznia 1908 — 41 = 1907 — 40 = 1867 r., t. j. z urodzonych w ciągu 1866-go roku.

11. Obliczenie zebrań głównych osób zmarłych z zebrań elementarnych. Posiadając zebrania elementarne osób zmarłych z dwóch lat sąsiednich, łatwo ułożyć z nich można wszystkie trzy rodzaje zebrań głównych; albowiem, jak widzieliśmy już z Fig. 2: I) gdho = gdh + hgo, II) ngho = gho + gno, III) ghpo = gho + hop.

Dajmy np., że posiadamy następujące zebrania elementarne osób zmarłych:

1) W roku 1900-ym: Schemat 1.

W wieku lat od—do	35 — 36		36 — 37		37 — 38		38 — 39		39 — 40	
Z pośród urodz. w r.	1865	1864	1864	1863	1863	1862	1862	1861	1861	1860
Zmarło osób . . .	380	345	400	320	415	393	438	412	490	476

2) W roku 1901-ym: Schemat 2.

W wieku lat od—do	35 — 36		36 — 37		37 — 38		38 — 39		39 — 40	
Z pośród urodz. w r.	1866	1865	1865	1864	1864	1863	1863	1862	1862	1861
Zmarło osób . . .	320	360	390	381	380	408	475	390	501	483

Z tych danych, dostarczonych przez Statystykę praktyczną, Statystyka matematyczna może wyprowadzić następujące trzy zebrania główne osób zmarłych:

Pierwsze zebranie główne osób zmarłych. Schemat 3.

W wieku lat od do	35 — 36	36 — 37	37 — 38	38 — 39	39 — 40
Z pośród urodz. w r.	1865	1864	1863	1862	1861
Zmarło w 1900 r.	380	400	415	438	490
Zmarło w 1901 r.	360	381	408	390	483
Razem zmarło osób	740	781	823	828	973

Drugie zebranie główne osób zmarłych, np. w 1900 r.

Schemat 4.

Z pośród urodz. w r.	1864	1863	1862	1861	1860
W wieku lat od do	35 — 37	36 — 38	37 — 39	38 — 40	
Zmarło w 1900-ym r.	345 400	320 415	393 438	412 490	
Razem zmarło osób	745	735	831	902	

Trzecie zebranie główne osób zmarłych, np. w 1901 r.

Schemat 5.

W wieku lat od—do	35 — 36	36 — 37	37 — 38	38 — 39	39 — 40
Z pośród urodz. w lat	1866 i 1865	1865 i 1864	1864 i 1863	1863 i 1862	1862 i 1861
Zmarło w 1901-ym r.	320 360	390 381	380 408	475 390	501 483
Razem zmarło osób	680	771	788	865	984

12. Wyznaczenie prawdopodobieństw śmierci. Z art. 4-go wiemy, że najpierwszym celem Statystyki śmiertelności jest wyznaczenie rocznego prawdopodobieństwa śmierci dla osób każdego wieku i że dla osiągnięcia tego celu trzeba znać liczbę osób, jaka dożyła danego wieku, oraz liczbę osób, jaka z pośród nich zmarła w ciągu roku: iloraz bowiem, otrzymany z podzielenia liczby drugiej przez pierwszą, jest właśnie prawdopodobieństwem śmierci w ciągu roku osoby danego wieku, wyznaczonem a posteriori.

Jeżeli np. pierwszą liczbę osób w wieku lat x_2 oznaczymy przez L_{x_2}, drugą przez U_{x_2}, a roczne prawdopodobieństwo śmierci osoby x_2 letniej przez q_{x_2}, to:

$$q_{x_2} = \frac{U_{x_2}}{L_{x_2}} \quad \dots\dots\dots \quad (1).$$

Otóż z Fig. 2 widzimy, że np. z generacyi $(t_3 - t_2)$ liczbą osób żyjących w wieku lat x_2 jest zbiór punktów przecięć prostej dh z liniami życia, względnie zbiór punktów śmierci, mieszczących się w polu $\omega_2 d h \omega_3$, a liczbą osób zmarłych z pośród nich w wieku lat od x_2 do x_3 jest zbiór punktów śmierci, mieszczący się w polu kwadratu gdho, czyli I-e zebranie główne osób zmarłych.

Jeżeli tedy Statystyka praktyczna dostarczy nam danych, według schematów 1 i 2, dla dwóch z kolei po sobie następujących lat i dla wieku od x_2 do x_3 lat, w takim razie, zapomocą schematu 3, otrzymujemy U_{x_2} dla każdego wieku. Chodzi więc tylko jeszcze o sposób otrzymania L_x. Do tego dojść można dwojakim sposobem, z których każdy daje inny rodzaj śmiertelności, mianowicie śmiertelność osób, należących do tej samej generacyi, czyli t. zw. śmiertelność rówieśników, i śmiertelność osób żyjących jednocześnie, t. j. t. zw. śmiertelność spółczesnych.

13. Śmiertelność rówieśników. Liczbę osób urodzonych w pewnym okresie, np. w okresie $(t_3 - t_2)$ oznaczmy przez L_0; liczbę tę na Fig. 2 wyobraża zbiór linij życia, a temsamem i zbiór punktów śmierci, mieszczący się w prostokącie $\omega_2 t_2 t_3 \omega_3$. Gdy wiadomym sposobem (schematy 1, 2, 3) wyznaczymy liczbę osób zmarłych w pierwszym roku życia tej generacyi $(t_3 - t_2)$, określoną graficznie przez kwadrat $t_2 \alpha \beta t_3$, i oznaczymy ją przez U_0, to otrzymamy roczne prawdopodobieństwo śmierci nowonarodzonego dziecka, mianowicie:

$$q_0 = \frac{U_0}{L_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Gdy następnie od L_0 odejmiemy wszystkie zmarłe dzieci w wieku od lat 0 do 1, otrzymamy liczbę osób, jaka z danej generacyi dożyła jednego roku, t. j.

$$L_1 = L_0 - U_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Jeżeli dalej zwykłym sposobem (schemat 1, 2, 3) obrachujemy liczbę osób zmarłych, określoną przez kwadrat $\alpha \gamma \delta \beta$, i gdy ją oznaczymy przez U_1, będzie:

$$q_1 = \frac{U_1}{L_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2').$$

Postępowanie to można przeciągnąć do końca, czyli do granicy życia ludzkiego, t. j. do $\omega_2 \omega_3$. Stąd otrzymamy:

$$q_2 = \frac{U_2}{L_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2''),$$

gdzie $L_2 = L_1 - U_1$; $q_3 = \frac{U_3}{L_3}$, gdzie $L_3 = L_2 - U_2$; i t. d. do końca, t. j. otrzymamy roczne prawdopodobieństwa śmierci, a temsamem, jako dopełnienia do jedności, także prawdopodobieństwa przeżycia roku:

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= 1 - q_0 = 1 - \frac{U_0}{L_0} = \frac{L_0 - U_0}{L_0} = \frac{L_1}{L_0} \\ p_1 &= 1 - q_1 = 1 - \frac{U_1}{L_1} = \frac{L_1 - U_1}{L_1} = \frac{L_2}{L_1} \\ p_2 &= \frac{L_3}{L_2}, \quad p_3 = \frac{L_4}{L_3}, \text{ i t. d.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (2''').$$

wogóle:

$$q_x = \frac{U_x}{L_x}, \qquad p_x = \frac{L_{x+1}}{L_x} \tag{4, 4'}$$

dla każdego wieku oddzielnie, co właśnie było celem, do którego dążyliśmy i który osiągamy, gdy nam Statystyka praktyczna poda liczbę urodzonych w danym okresie generacyjnym oraz liczbę osób umierających z tej generacyi w wieku lat od 0 do 1, od 1 do 2, od 2 do 3, i t. d. aż do zupełnego wymarcia całej generacyi.

Ponieważ powyższych obliczeń dokonaliśmy na osobach należących do tej samej generacyi, czyli na osobach będących w tym samym wieku, t. j. na rówieśnikach, zatem i prawdopodobieństwa, wyznaczane z takiego materyału, noszą miano prawdopodobieństw śmierci lub przeżycia roku rówieśników.

W ten sposób jednak obliczonych prawdopodobieństw, od chwili przyjścia na świat generacyi do jej wymarcia, nigdzie jeszcze dotąd nie otrzymano, widocznie bowiem do tego są potrzebne obserwacye prowadzone przez mniej więcej 100 lat, a tak długoletnich obserwacyj dotąd nie posiadamy.

Prawdopodobieństwa śmierci rówieśników miałyby bardzo duże znaczenie naukowe, posiadając je bowiem, dla idących z kolei po sobie generacyj, moglibyśmy zbadać zmiany, jakim z biegiem czasu podlega śmiertelność. Praktyczne wszakże ich znaczenie jest niewielkie, śmiertelność bowiem generacyami, jako dająca się wykończyć dopiero w ciągu, mniej więcej, 100 lat, daje dla młodszych lat śmiertelność przestarzałą w porównaniu do warunków obecnych.

Dlatego do celów praktycznych lepiej się nadaje śmiertelność wyznaczona sposobem drugim, opartym na życiu osób spółczesnych.

14. Śmiertelność spółczesnych. Załóżmy, że w chwili T_2 dokonany został momentalny spis ludności (t. zw. spis jednodniowy), który daje nam liczbę spółcześnie żyjących osób w wieku lat od 0 do 1 = zbiorowi punktów przecięć prostej $T_2\eta$ z liniami życia osób urodzonych w okresie $(T_2 - T_1)$, względnie zbiorowi punktów śmierci w polu $T_2\eta\omega_6\omega_7$; od 1 do 2 lat $= \eta j \omega_5 \omega_6$, i t. d. — wogóle liczkę osób żyjących spółcześnie w wieku od lat x_2 do $x_3 = hg\omega_2\omega_3$. Każda z tych grup osób żyjących jednocześnie należy widocznie do innej generacyi: grupa osób żyjących w wieku lat od 0 do 1 należy do generacyi urodzonych w okresie od $T_1 = T_2 - 1$ do T_2; żyjących jednocześnie w wieku lat od 1 do 2 należy do generacyi urodzonych w okresie od $t_5 = T_2 - 2$ do $T_1 = T_2 - 1$, i t. d.; wogóle grupa osób żyjących w momencie T_2 w wieku lat od x_2 do x_3 należy do generacyi urodzonych w okresie od $t_2 = T_2 - x_3$ do $t_3 = T_2 - x_2$.

Ujmując te rezultaty spisu jednodniowego w schemat z przykładami liczebnemi, otrzymujemy następujący:

Rezultat spisu momentalnego, np. dokonanego d. 1 stycznia 1901-go roku (godzina 12-a w nocy z d. 31 grudnia 1900 r. na d. 1 stycznia 1901 roku).

Schemat 6.

W wieku lat od - do	35 — 36	36 — 37	37 — 38	38 — 39	39 - 40
Z pośród urodz. w r.	1865	1864	1863	1862	1861
Żyło osób[1]	82209	81410	80657	79381	78535

Jeżeli teraz do h g $\omega_2 \omega_3$, otrzymanego ze spisu momentalnego, dodamy z schematu 1 odpowiednio wyjętą liczbę osób zmarłych h d g, to otrzymamy h g $\omega_2 \omega_3$ + h d g = h d $\omega_2 \omega_3 = L_{x_2}$; gdy zaś od tegoż h g $\omega_2 \omega_3$ odejmiemy odpowiednią liczbę osób zmarłych h g o, wyjętą z schematu 2, mieć będziemy h g $\omega_2 \omega_3$ — h g o = g $\omega_2 \omega_3$ o $= L_{x_3}$; stąd znów $L_{x_2} - L_{x_3}$ = h d g o $= U_{x_2}$, co przedstawia liczbę osób, jaka z pośród L_{x_2} osób żyjących w wieku lat x_2 umarła w ciągu roku, przed dojściem do x_3 lat, czyli w wieku lat od x_2 do x_3 i którą mamy gotową w schemacie 3.

Stąd wypada:

$$q_{x_2} = \frac{\text{h d g o}}{\text{h d } \omega_2 \omega_3} = \frac{U_{x_2}}{L_{x_2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

oraz:

$$p_{x_2} = \frac{\text{o g } \omega_2 \omega_3}{\text{h d } \omega_2 \omega_3} = \frac{L_{x_3}}{L_{x_2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5'),$$

tak, że:

$$p_{x_2} + q_{x_2} = \frac{U_{x_2} + L_{x_3}}{L_{x_2}} = \frac{L_{x_2} - L_{x_3} + L_{x_3}}{L_{x_2}} = \frac{L_{x_2}}{L_{x_2}} = 1 \quad . \quad (6),$$

jak być powinno.

W taki sam sposób otrzymamy prawdopodobieństwo śmierci i przeżycia roku dla każdego wieku od 0 do granicy życia ludzkiego.

Otóż, ponieważ te prawdopodobieństwa otrzymujemy z osób żyjących jednocześnie (w momencie T_2), przeto zowią się one śmiertelnością spółczesnych i posiadają tę zaletę, że do ich wyznaczenia wystarcza, oprócz spisu momentalnego, dwuletnia tylko obserwacya zgonów i że przedstawiają śmiertelność bieżącą, zatem nadającą się do zastosowań praktycznych.

Od Statystyki praktycznej wymaga się tu danych ze spisu momentalnego, według schematu 6-go, oraz danych śmiertelności (podzielonych na generacye) z roku bezpośrednio poprzedzającego spis i z roku bezpośrednio następującego po spisie*) — według schematu 1-go i 2-go i sformowanego z nich schematu 3-go.

Stosując np. liczebne dane, pomieszczone w pomienionych schematach, otrzymujemy następującą tablicę:

Tablica prawdopodobieństw śmierci i przeżycia roku.

Schemat 7.

Dla wieku lat $x =$ . . .	35	36	37	38	39
Ze spisu momentalnego . .	82209	81410	80657	79381	78535
Z schematu 1-go, $u_1 =$ . .	380	400	415	438	490
Liczba osób żyjących $L_x =$	82589	81810	81072	79819	79025
Z schematu 1-go, $u_1 =$ . .	380	400	415	438	490
Z schematu 2-go, $u_2 =$ . .	360	381	408	390	483
Z schematu 3, $U_x = u_1 + u_2 =$	740	781	823	828	973
$q_x = \frac{U_x}{L_x} =$	0,00896	0,00955	0,01015	0,01037	0,01231
$p_x = 1 - q_x =$	0,99104	0,99045	0,98985	0,98963	0,98769

15. Przechodztwo (wędrówka, migracya) ludności. Tak się rzecz ma gdy przyjmiemy, że w składzie ludności zachodzą zmiany tylko z powodu urodzeń i śmierci. Lecz zmiany wśród danej ludności zachodzą jeszcze z przyczyny przenoszenia się mieszkańców z jednych okolic w drugie, skutkiem czego podczas obserwowania danej grupy osób nietylko wybywają z niej jednostki z powodu śmierci, jak to dotąd przyjmowaliśmy, lecz jedne wydalają się poza granicę naszej obserwacyi (wychodztwo, emigracya), inne zaś napływają z innych, nie objętych naszą obserwacyą, okolic (przychodztwo, imigracya). Zachodzi tedy pytanie, czy takie zmiany w składzie ludności oddziaływają na

*) Dla lepszego uwydatnienia tych ważnych zebrań elementarnych zgonów, zaszłych w roku przed i po spisie ludności, oznaczyliśmy je na figurze głoskami u_1 i u_2 — tak, że hdg $= u_1$, hgo $= u_2$; skutkiem tego $U_{x_1} =$ hdgo $= u_1 + u_2$.

sposób wyznaczania prawdopodobieństw śmierci, a jeżeli oddziaływają, to jak w rachunku uwzględnić je można i należy.

Z prawa wielkich liczb wiemy, że prawdopodobieństwa, wyznaczane a posteriori, mają wtedy dopiero istotne znaczenie, t. j. zbliżają się do rzeczywistego stanu rzeczy, gdy je wyprowadzamy z bardzo wielkiej liczby faktów; więc np. przy wyznaczaniu prawdopodobieństwa śmierci, gdy bierzemy pod uwagę bardzo wiele jednostek. Owóż, jeżeli wśród bardzo licznej grupy osób zachodzi nieznaczny i krótkotrwały ruch przechodczy, t. j. gdy z pośród danej grupy osób, obserwowanych przez czas niezbyt długi, niewiele tylko osób wydala się z granic obserwacyi i niewiele z zewnątrz do grupy przybywa, wtedy, wobec wielkiej liczby osób obserwowanych, zmiany te wywierają bardzo mały wpływ na rezultat ostateczny — tak, że skutek jaki stąd płynie, bez wielkiej szkody, pominięty być może — zwłaszcza, gdy ubytek osób do pewnego stopnia równoważy się z napływem. Tak np. przy wyznaczaniu prawdopodobieństwa śmierci dla całego kraju, którego mieszkańcy, prowadząc życie osiadłe, mało się wydalają poza granice swego kraju i do którego mało przybywa osób z zagranicy, i jeżeli nadto używamy metody śmiertelności spółczesnych, która wymaga tylko dwuletniej obserwacyi, to wtedy na ruch przechodczy ostatecznie uwagi zwracać niema potrzeby.

Jeżeli jednak ludność na danym terenie jest bardzo ruchliwa, jeżeli przychodztwo i wychodztwo jest liczne, jak to ma np. miejsce w szybko rozwijających się miastach, jeżeli oprócz tego jeszcze obserwacya musi trwać dłużej, jak to np. ma miejsce przy metodzie rówieśników, to przechodztwo wywiera na rezultat ostateczny wpływ tak wielki, że go nieraz z gruntu zmienia i wtedy skutek wywierany przez przechodztwo w rachunku koniecznie uwzględnić trzeba.

Bo zważmy, że jeżeli mamy na początku roku choćby bardzo wielką liczbę osób x letnich i jeżeli z pośród nich w ciągu roku wydala się stosunkowo wiele osób poza obręb naszej obserwacyi, to z pod obserwacyi usunie się pewna liczba przypadków śmierci, zaszłych pomiędzy osobami wybyłemi, przez co śmiertelność wypadnie za mała. I naodwrót, jeżeli na dany teren obserwacyjny przybędzie znaczniejsza liczba osób, niezaliczonych do liczby osób żyjących na początku roku, w takim razie liczba zgonów zwiększy się, a temsamem zwiększy się wyznaczona, bez uwzględnienia tej okoliczności, śmiertelność. Oczywiście, gdyby napływ zrównoważył się z odpływem osób, rezultat wypadłby taki sam, jak gdyby zmian nie było żadnych; ponieważ jednak na tak szczególny przypadek liczyć nie można, przeto obmyśleć należy pewne środki uwzględnienia przychodztwa i wychodztwa, gwoli otrzymania możliwie jak najbardziej zbliżonych do rzeczywistości rezultatów.

16. Uwzględnienie przechodztwa. Załóżmy najprzód, że w momencie, od którego rozpoczynamy obserwacyę, mamy L_x osób x letnich, dla których chcemy wyznaczyć prawdopodobieństwo śmierci. Jeżeli w ciągu roku przybyło do tej grupy P_x osób, w wieku od lat x do $x+1$, a wybyło W_x, to można, z pewnem przybliżeniem, przyjąć, iż zarówno napływ jak i ubytek rozłożyły się jednostajnie na rok cały. Wychodzi to na to samo, jakby wszystkie te osoby przybyły i wybyły w połowie roku, temsamem zaś, jak gdyby wszystkie były pod obserwacyą przez pół roku, lub jakby połowa ich zostawała pod obserwacyą przez rok cały, czyli jakby na początku roku było osób x letnich nie L_x, lecz $L_x + \frac{P_x - W_x}{2}$. Skutkiem tego wzór (4) przechodzi na:

$$q_x = \frac{U_x}{L_x + \frac{P_x - W_x}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7).$$

Wzór (7) można bezpośrednio zastosować przy wyznaczaniu śmiertelności rówieśników. Gdy jednak chodzi o śmiertelność spółczesnych (opisanym przez nas sposobem wyznaczaną), trzeba przedewszyskiem do liczby osób, otrzymanej ze spisu ludności i zwiększanej o ilość zmarłych w ciągu roku poprzedzającego spis, dodać wszystkie osoby wybyłe w ciągu tegoż roku i odjąć wszystkie przybyłe (w odpowiednim wieku będące i w odpowiednim roku urodzone), gdyż tym sposobem otrzymamy liczbę osób żyjących w danym wieku; dopiero do tak zmienionej liczby osób żyjących zastosować wzór (7), przyczem P_x oznaczać będzie liczbę osób przybyłych, zaś W_x liczbę osób wybyłych w ciągu roku poprzedzającego spis i w ciągu bezpośrednio po nim następującego. Np.:

Schemat 8.

W wieku lat	35 — 36	36 — 37	37 — 38	38 — 39	39 — 40
Z urodzonych w roku . . .	1865	1864	1863	1862	1861
Wybyło { w 1900 r. . .	4081	3857	5263	4712	3989
Wybyło { w 1901 r. . .	3798	4215	4627	3684	5078
Przybyło { w 1900 r. . .	5107	2969	4268	3995	4824
Przybyło { w 1901 r. . .	5746	3572	4986	5007	3668
Z 1900 r., $W_x - P_x =$	—1026	888	995	717	—835
Żyjący 1/I 1901 r. + zmarli w 1900 r. =	82589	81810	81072	79819	79025
Razem.	81563	82698	82067	80536	78190
Z 1900 + 1901 r., $\frac{P_x - W_x}{2} =$	1487	—766	—318	303	—288
Zreduk. liczba osób x letnich=	83050	81932	81749	80839	77902
Zmarli w ciągu 1900 i 1901 r.:	740	781	823	828	973
Prawd. śmierci w ciągu roku	0,00891	0,00953	0,01007	0,01024	0,01249
Prawd. przeżycia roku. . .	0,99109	0,99047	0,98993	0,98976	0,98751

Gdyby wybyli i przybyli nie zostali przez Statystykę praktyczną tak ściśle rozdzieleni, to, przy wyznaczaniu śmiertelności spółczesnych, najlepiej jest wpływ przechodztwa zupełnie pominąć. Przyjmując bowiem, (dość, w przybliżeniu, możliwe do przyjęcia) założenie, że w roku przed i po spisie ludności ubywa i przybywa jednakowa ilość osób, czyli że w roku przed spisem ludności wybyło osób $\frac{W_x}{2}$ przybyło $\frac{P_x}{2}$, za liczbę osób dosięgających x lat przyjąć (według tego co wyżej powiedziano) należy $L_x + \frac{W_x - P_x}{2}$ i następnie zastosować wzór (7). Wtedy otrzymamy:

$$q_x = \frac{U_x}{\left(L_x + \frac{W_x - P_x}{2}\right) + \frac{P_x - W_x}{2}} = \frac{U_x}{L_x} \quad . \quad . \quad . \quad (7'),$$

t. j. przechodztwo na prawdopodobieństwo śmierci wpływu nie wywiera — o tyle, naturalnie, o ile nasze założenie się urzeczywistnia.

17. Przejście od prawdopodobieństwa śmierci rówieśników do prawdopodobieństwa śmierci spółczesnych i naodwrót. Jakkolwiek podane w poprzednich artykułach sposoby wyznaczania prawdopodobieństw śmierci dla rówieśników i spółczesnych różnią się od siebie, niemniej jednak schodzą się one z sobą w ten sposób, że, posiadając prawdopodobieństwa śmierci rówieśników dla stu kolejnych pokoleń, moglibyśmy z nich wybrać prawdopodobieństwa dla spółczesnych i naodwrót, mając prawdopodobieństwa śmierci dla spółczesnych ze stu lat, możnaby z nich wybrać prawdopodobieństwa śmierci dla tej samej generacyi.

Widzimy bowiem z Fig. 2, że prawdopodobieństwa śmierci dla osób: w wieku lat x_3 z pokolenia $(t_2 - t_1)$ (stosunek $\frac{\mathrm{gcfn}}{\mathrm{gc}\omega_1\omega_2}$), w wieku lat x_2 z pokolenia $(t_3 - t_2)$ (stosunek $\frac{\mathrm{hdgo}}{\mathrm{hd}\omega_2\omega_3}$), w wieku lat x_1 z pokolenia $(t_4 - t_3)$ (stosunek $\frac{\mathrm{iehp}}{\mathrm{ie}\omega_3\omega_4}$), i t. d. są zarazem prawdopodobieństwami śmierci dla spółcześnie żyjących w momencie T_2 w wieku lat od x_3 do x_4, od x_2 do x_3, od x_1 do x_2, i t. d.

I naodwrót, prawdopodobieństwa śmierci dla osób: w wieku lat x_1, z pośród żyjących w momencie T_1 w wieku od x_1 do x_2 (stosunek $\frac{\mathrm{e}\varepsilon\mathrm{dh}}{\mathrm{e}\varepsilon\omega_2\omega_3}$); dla osób w wieku lat x_2, z pośród żyjących w momencie T_2 w wieku od x_2 do x_3 (stosunek $\frac{\mathrm{hdgo}}{\mathrm{hd}\omega_2\omega_3}$); dla osób w wieku lat x_3, z pośród żyjących w momencie T_3 w wieku od x_3 do x_4 (stosunek $\frac{ogns}{og\omega_2\omega_3}$); dla osób w wieku lat x_4, z pośród żyjących w momencie T_4 w wieku od x_4 do x_5 (stosunek $\frac{snuw}{sn\omega_2\omega_3}$), i t. d. są prawdopodobieństwami śmierci osób w wieku lat x_1, x_2, x_3, x_4, i t. d. z pośród tego samego pokolenia urodzonych w czasie od t_2 do t_3.

18. Tablice śmiertelności. Posiadając, dla rówieśników czy też spółczesnych, roczne prawdopodobieństwa śmierci osób w wieku kolejno po sobie idących lat, np. dla 0, 1, 2, 3, 4, i t. d. letnich, które oznaczmy przez q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, i t. d., możemy już z łatwością ułożyć t. zw. tablicę śmiertelności dla dowolnej liczby osób.

Jeżeli bowiem za, dowolnie zresztą wziętą, liczbę nowonarodzonych przyjmiemy L_0, to z pośród tej liczby nowonarodzonych w ciągu roku umrze $L_0 . q_0 = U_0$ dzieci, czyli dożyje jednego roku osób $L_0 - U_0 = L_1$. Z tej ostatniej liczby L_1 osób żyjących, umiera w ciągu roku $L_1 . q_1 = U_1$, czyli dożyje dwóch lat $L_1 - U_1 = L_2$ osób, i t. d. aż do granicy życia ludzkiego, t. j. otrzymamy tablicę:

W wieku lat	Żyje osób	Umiera	Prawdop. śmierci
1	2	3	4
0	L_0	U_0	q_0
1	L_1	U_1	q_1
2	L_2	U_2	q_2
3	L_3	U_3	q_3
	i t. d.		

której dwie pierwsze kolumny zowią się tablicą śmiertelności, chociaż właściwie zwać się powinny tablicą dożywających. Do takiej tablicy dołącza się zazwyczaj jeszcze liczbę osób umierających (kol. 3-cia) w wieku lat od 0 do 1, od 1 do 2, od 2 do 3, i t. d., chociaż nie jest to konieczne, gdyż znając L_0, L_1, L_2, L_3, i t. d. znamy temsamem i $U_0 = L_0 - L_1$, $U_1 = L_1 - L_2$, $U_2 = L_2 - L_3$, i t. d.

Również, dla dogodności posiłkujących się tablicą, dołączają się także prawdopodobieństwa śmierci: q_0, q_1, q_2, q_3, i t. d. (kol. 4-a), które również z kol. 2 dają się wyprowadzić. mianowicie:

$$q_0 = \frac{U_0}{L_0} = \frac{L_0 - L_1}{L_0}, q_1 = \frac{U_1}{L_1} = \frac{L_1 - L_2}{L_1}, q_2 = \frac{U_2}{L_2} = \frac{L_2 - L_3}{L_2},$$

i t. d.

Tablice śmiertelności stanowią właśnie prawo statystyczne śmiertelności, wyrażone liczbami (art. 1-y).

19. Wyrównywanie tablic śmiertelności. Prawdopodobieństwa, wyprowadzone bezpośrednio z surowego materyału statystycznego, przedstawiają najczęściej różne nieprawidłowości, sprzeczne z przyczynami naturalnemi śmierci. Prawdopodobieństwa w sąsiednich latach życia bywają często stosunkowo za duże lub za małe; trafia się nawet czasami, że śmiertelność w wieku późniejszym wypada mniejsza od śmiertelności w wieku wcześniejszym. Tymczasem, z wyjątkiem lat dziecięctwa, organizm ludzki niewątpliwie z biegiem lat słabnie, lecz, ogólnie biorąc, słabnie nie nagle tylko stopniowo, stając się powoli coraz podatniejszym dla chorób i śmierci; okoliczność ta powinna się odbić w tablicy śmiertelności. Jeżeli więc w tablicy zmiany w śmiertelności zachodzą nieprawidłowo, gdy śmiertelność zmienia się nie stopniowo lecz gwałtownie, jak to ma np. miejsce dla wieku 39 — 40 w schemacie 8-ym, lub za wolno, a tembardziej, gdy się zmienia w kierunku odwrotnym, wtedy można być pewnym, iż tu zachodzą jakieś nadzwyczajne przyczyny, tkwiące najczęściej w samym materyale statystycznym.

Gdy liczba wziętych pod uwagę osób jest mała, taka nieprawidłowość w przebiegu śmiertelności łatwo wytłómaczyć się daje za małą liczbą osób, gdyż prawdziwy stan rzeczy, według prawa wielkich liczb, może się odbić tylko na wielkiej liczbie jednostek obserwowanych. Taki szczupły materyał nie posiada wartości naukowej i do ułożenia tablicy użytym być nie powinien.

Wszakże, jeżeli materyał jest obfity, wtedy przyczyna nieprawidłowości, z wyjątkiem rzadkich przypadków, tkwić może tylko w błędach obserwacyjnych, które naprawić trzeba w ten sposób, aby, przy jak najmniejszem zboczeniu od rezultatów bezpośrednich, tablica posiadała zadawalające stopniowanie, czyli t. zw. „gradacyę“.

Nazywa się to „wyrównaniem“ tablicy śmiertelności i dokonywa się w trojaki sposób: analitycznie, mechanicznie i graficznie; czasami do wyrównania tej samej tablicy używa się paru sposobów.

Wyrównywać można albo prawdopodobieństwa, albo też liczby osób żyjących, pomieszczone w tablicy bezpośrednio wyprowadzonej.

20. Sposób analityczny wyrównywania tablic. Sposób pierwszy — analityczny stoi w ścisłym związku z następującem, po wyznaczeniu prawdopodobieństw śmierci, zadaniem Statystyki matematycznej, mianowicie z poszukiwaniem prawa statystycznego śmiertelności, czyli związku analitycznego pomiędzy prawdopodobieństwem śmierci, względnie liczbą osób żyjących, a wiekiem. Innemi słowy, chodzi o wyprowadzenie wzoru, zapomocą którego możnaby dla każdego wieku obliczyć odpowiednie mu prawdopodobieństwo śmierci, albo liczbę osób żyjących w tym wieku z pośród danej liczby urodzonych dzieci.

Wzór taki, oprócz wieku jako zmiennej, zawierać w sobie także musi pewne ilości stałe, zwane parametrami, które mogą być wyznaczone zapomocą bezpośrednio z materyału statystycznego wyprowadzonych prawdopodobieństw, albo liczb osób żyjących, pomieszczonych w tablicy sformowanej na podstawie rzeczonych prawdopodobieństw.

Posiadając wzór taki, łatwo już można wyrównać tablicę, wystarczy bowiem weń wstawiać kolejno wiek, aby otrzymać, z dostateczną gradacyą, odpowiednie prawdopodobieństwa śmierci lub liczby osób żyjących, mających wchodzić w skład tablicy.

Wyprowadzeniem takich wzorów zajmowało się wielu uczonych: Moivre, Lambert, Wittstein, Babbage, Moser i inni. Usiłowania ich jednak nie wydały pożądanych rezultatów. Do względnie najlepszych rezultatów doprowadziła analiza Gompertza z poprawką Makehama; ich wzór posiada kształt:

$$y = a . s^x . g^{q^x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

gdzie y oznacza liczbę osób żyjących w tablicy wyrównanej w wieku lat x, zaś a, s, g i q stałe (parametry), wyznaczające się z rezultatów otrzymanych bezpośrednio z materyału statycznego.

Wzór (8) przedstawia dość dokładnie prawo statystyczne śmiertelności (wyrażone analitycznie) dla wieku od lat 29 do 90.

W bliższe szczegóły metody analitycznej wchodzić tutaj nie możemy, wymaga ona bowiem znajomości Analizy wyższej, co przekracza granice niniejszej książki.

Natomiast nieco szczegółowiej zajmiemy się metodami bardziej elementarnemi, mianowicie mechaniczną i graficzną.

21. Sposób mechaniczny i graficzny wyrównywania tablic śmiertelności. Sposobów mechanicznych jest kilka. Najprostszy, polegający na wyprowadzeniu średniej arytmetycznej dla każdego wieku, opiera się na założeniu, że błędy obserwacyjne powstają głównie z mylnego zaliczenia osób do tego lub innego wieku. Oczywiście takie pomyłki najczęściej zachodzą pomiędzy wiekami sąsiedniemi, a przynajmniej bardzo do siebie zbliżonemi. Skutkiem tego część, że tak powiem, prawdopodobieństwa śmierci pewnego wieku przechodzi na inny i naodwrót.

Otóż dla zniesienia, przynajmniej częściowego, takich błędów, do prawdopodobieństwa śmierci w wieku x lat dodaje się prawdopodobieństwa śmierci z lat sąsiednich ($x - 1$ i $x + 1$) i sumę podzieloną przez 3 przyjmuje się za poprawione prawdopodobieństwo śmierci dla wieku x; albo też, jeżeli to nie wystarcza, do prawdopodobieństwa śmierci w wieku x lat dodaje się dwa poprzednie (dla $x - 1$ i dla $x - 2$) i dwa następne prawdopodobieństwa (dla $x + 1$ i $x + 2$) i sumę dzieli się przez 5. W taki sam sposób postępuje się z każdym innym wiekiem. Jeżeli i wówczas jeszcze nie otrzymujemy zadawalającej gradacyi, wtedy z poprawionemi w ten sposób prawdopodobieństwami postępuje się tak samo raz jeszcze, poczem najczęściej gradacya staje się prawidłową.

W taki sposób, np. z schematu 8-go, otrzymujemy:

na prawd. śmierci osoby 36 letn.: $\frac{0{,}00891 + 0{,}00953 + 0{,}01007}{3} = 0{,}00950,$

„ „ „ „ 37 „ $\frac{0{,}00953 + 0{,}01007 + 0{,}01024}{3} = 0{,}00995,$

„ „ „ „ 38 „ $\frac{0{,}01007 + 0{,}01024 + 0{,}01249}{3} = 0{,}01093$

i następnie:

na prawd. śmierci osoby 37 letn.: $\frac{0{,}00950 + 0{,}00995 + 0{,}01093}{3} = 0{,}01013.$

Metoda ta, nazwana przez nas mechaniczną, może być z pewnem powodzeniem stosowana do tych okresów życia ludzkiego, w których śmiertelność zmienia się łagodnie; do okresów o zmianach gwałtownych, jak np. w latach dziecięctwa (art. 25-y) stosować jej nie można, gdyż z gruntu zmienićby mogła charakter śmiertelności. Dla takich okresów życia ludzkiego użyć trzeba innych metod; pomiędzy innemi można użyć i metody graficznej, do opisania której właśnie przechodzimy.

Metoda graficzna polega w zasadzie na założeniu pewnej ciągłości w zmianach prawdopodobieństwa śmierci lub liczby osób wykazanych w tablicy śmiertelności jako żyjących.

Gdy zastosujemy ten sposób do liczby osób żyjących, wykazanych w tablicy, którą mamy wyrównać, należy na jednej z dwóch prostych OX i OY, do siebie prostopadłych, np. na prostej OX (Fig. 3), odciąć części równe: ab, bc, cd, de, i t. d., wyobrażające wiek; z punktów podziału wyprowadzamy równoległe do OY i na nich odcinamy długości $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, $e\varepsilon$, i t. d., proporcyonalne do liczby osób, odpowiedniego wieku, wykazanych w tablicy śmiertelności.

Punkty α, β, γ, δ, ε, . . . , połączone prostemi (przerywanemi), dają linię łamaną, zwykle dość nieprawidłową. Otóż, gdy pomiędzy temi punktami α, β, γ, δ, ε, . . . przeprowadzimy krzywą α, β', γ', δ', ε', . . . , możliwie zbliżoną do punktów α, β, γ, δ, ε, . . . , lecz prawidłową, to gdy rysunek jest wykonany na dużą skalę, z punktów α, β', γ', δ', ε', . . . możemy odczytać te liczby osób żyjących, które, będąc z jednej strony niezbyt oddalone od poprzednich liczb osób żyjących, z drugiej jednak przedstawiają dość prawidłową gradacyę.

Do dobrych rezultatów dochodzi się zwłaszcza wtedy, gdy metodę mechaniczną stosuje się do prawdopodobieństw śmierci i następnie metodę graficzną do otrzymanej, z tych poprawionych prawdopodobieństw, tablicy osób żyjących.

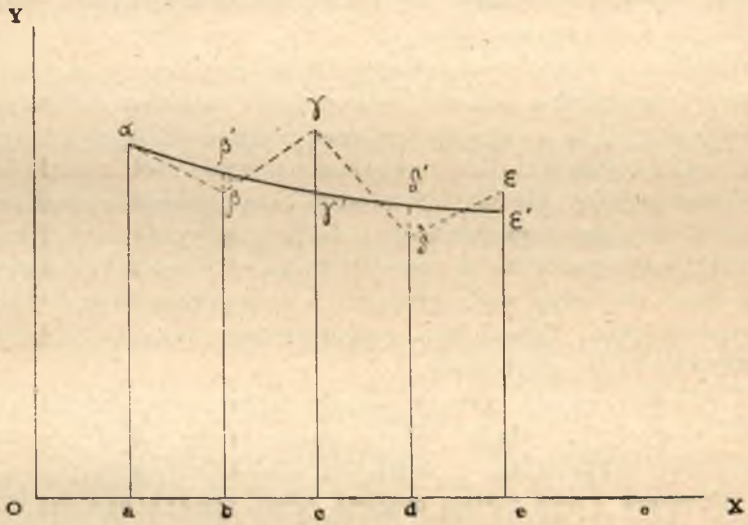

Fig. 3.

Uwagą. Na kongresie międzynarodowym matematyków ubezpieczeniowych (actuaries), odbytym w Londynie w 1898 r., zgodzono się na uniwersalny system znakowania czynników wchodzących w skład tablic śmiertelności i teoryi ubezpieczeń życiowych, którego i my w dalszym ciągu trzymać się będziemy. Według tego systemu przez L_x rozumieć należy liczbę osób żyjących w wieku lat x wogóle, przez l_x liczbę osób żyjących w wieku x lat, wykazaną w tablicy śmiertelności (wyrównanej); przez d_x liczbę osób zmarłych, według tablicy śmiertelności, w wieku lat od x do $x+1$; q_x roczne prawdopodobieństwo śmierci osoby x letniej, p_x prawdopodobieństwo przeżycia roku przez osobę x letnią.

22. Tablice śmiertelności ogólne (ogółu ludności). Opisany w art. 14-ym sposób wyznaczania śmiertelności zowie się bezpośrednim i jest, jak wynika z naszych rozumowań, bezwzględnie ścisły — o tyle, o ile materyał statystyczny jest dokładny i w ten sposób pogrupowany, jak tego wymaga metoda. Mimo to (art. 4) wyprowadzona z jednego spisu ludności tablica śmiertelności nie przedstawia śmiertelnośni normalnej z tego powodu, ze śmiertelność w danym roku może być wyjątkowo wielka lub mała. Dlatego lepiej jest połączyć ze sobą kilka spisów ludności ze śmiertelnością w latach sąsiednich, wtedy bowiem zmienność śmiertelności w latach poszczególnych do pewnego stopnia wzajemnie się znosi jak oraz zyskujemy na obfitości materyału. Tą drogą właśnie otrzymuje się owe prawdopodobieństwa śmierci, o jakich była mowa w art. 4-ym.

Wszakże, pomimo doskonałości omawianej metody, na ile nam wiadomo, dotąd nigdzie jeszcze według niej, z zupełnem zachowaniem wszystkich przepisów, tablicy nie ułożono, ponieważ Statystyka wypadków śmierci nie jest jak należy prowadzona; wiek osób zmarłych jest wprawdzie notowany, ale daty ich urodzenia są najczęściej pomijane.

Zazwyczaj prawdopodobieństwa śmierci są wyznaczane jako stosunek liczby osób zmarłych w pewnym wieku w ciągu roku następującego po spisie do liczby osób żyjących w tym samym wieku w chwili dokonywania spisu. Sposób taki, najrozmaiciej zresztą modyfikowany, jest naturalnie tylko przybliżony.

W podobny sposób ułożone zostały tablice śmiertelności ogólne, czyli dla całego ogółu ludności różnych społeczeństw. W Tablicy VI-ej podajemy dwie takie tablice, z podziałem ludności na mężczyzn i na kobiety. Pierwsza z nich została ułożona przez Queteleta dla Belgii na podstawie spisu, odbytego w 1856 r., wykazującego 4529560 osób żyjących; druga przez Farra dla Anglii i Walii, na podstawie spisów przeprowadzonych w latach od 1841 do 1851 roku, z 6470720 wypadkami śmierci.

23. Tablice śmiertelności specyalne. Dla różnych specyalnych grup ludzi, jak np. dla osób ubezpieczonych na życie lub t. p., ze względu na niewielką stosunkowo liczbę osób i na ogrome zmiany, jakie ustawicznie w składzie grup zamkniętych zachodzą, Statystyka teoretyczna wypracowała inne metody, z których podamy tu najprostszą.

Ponieważ w oddzielnie branych towarzystwach ubezpieczeń życiowych, które tutaj, z uwagi na Rozdział następny, głównie mamy na myśli, w stosunku do wymagań prawa wielkich liczb, osób bywa niewiele, przeto, gwoli zwiększenia materyału statystycznego, potrzebnego do ułożenia tablicy śmiertelności, łączy się pewna liczba towarzystw do wspólnej pracy. Każde towarzystwo dostarcza swego materyału jak również każdą osobę ubezpieczoną wprowadza się do rachunku wielokrotnie, mianowicie tyle razy, ile razy jej wiek uległ zmianie, t. j. przez ile lat była ubezpieczona.

Aby taki rachunek przeprowadzić, przedewszystkiem ustanawia się pewien okres czasu: 20, 25, 30 lat ze ściśle określonemi terminami, np. od 1 stycznia 1875 r. do 31 grudnia 1904 roku. Każde towarzystwo dla każdej ubezpieczonej u siebie, w ciągu pomienionego okresu, osoby wystawia kartę rachunkową, potocznie w technice asekuracyjnej określaną wyrazem fish (po angielsku ryba), w której wymienia się: datę urodzenia, datę zawarcia umowy i wyjścia, uważając za datę wyjścia i moment, na którym okres rachunkowy się kończy (jak w przytoczonym powyżej okresie rachunkowym dzień 31 grudnia 1904 r.). Osoby, wybyłe przed datą, rozpoczynającą okres rachunkowy, i osoby, ubezpieczone po dacie kończącej okres rachunkowy, do obliczenia się nie wprowadzają. Tym sposobem za wyjście osoby z pod obserwacyi uważa się: 1) śmierć (podczas trwania ubezpieczenia); 2) dobrowolne zerwanie umowy lub wyekspirowanie terminu przed końcem okresu rachunkowego i 3) należenie do liczby osób ubezpieczonych w terminie kończącym okres rachunkowy.

Na podstawie trzech, powyżej zaznaczonych momentów: daty urodzenia, daty zawarcia umowy i wyjścia, wyznacza się zaraz na karcie: wiek wstąpienia i czas należenia do grupy, czyli czas, przez jaki dana osoba była pod obserwacyą. Wiek wstąpienia wyznacza się w latach okrągłych, w ten mianowicie sposób, że mniej niż pół roku do lat się nie zalicza, więcej niż pół roku liczy się za rok cały. Np. osobę mającą 20 lat 5 miesięcy i 29 dni (a nawet 20 lat i 6 miesięcy) uważa się za 20-o letnią, posiadającą 20 lat 6 miesięcy i 1 dzień za 21-o letnią.

Gdy mamy już gotowe wszystkie karty rachunkowe, rozgrupowywa się je najprzód według wieku wstąpienia, następnie każdą grupę dzieli się na mniejsze według czasu trwania obserwacyi, wreszcie każdą z tych ostatnich na oddzielne paczki według sposobu wyjścia: na zmarłych, na wybyłych przed terminem kończącym okres rachunkowy i na pozostających w towarzystwie w chwili kończącej okres rachunkowy.

Po przeliczeniu kartek w każdej paczce, z łatwością układa się dla każdego wieku wstąpienia następujący wykaz:

Wiek wstąpienia lat 20. Schemat 9.

Czas trwania obserwacyi od lat do lat	Liczba			Suma liczb	
	Zmarłych	Wybyłych za życia	Pozostających w towarzystwie w terminie kończącym okres rachunkowy	w kolumnach: 2, 3 i 4 w poprzek	w kolumnie 5-ej od dołu ku górze
1	2	3	4	5	6
0 — 1	${}_{20}\tau_0$	${}_{20}\lambda_0$	${}_{20}k_0$	${}_{20}\sigma_0$	${}_{20}s_0$
1 — 2	${}_{20}\tau_1$	${}_{20}\lambda_1$	${}_{20}k_1$	${}_{20}\sigma_1$	${}_{20}s_1$
2 — 3	${}_{20}\tau_2$	${}_{20}\lambda_2$	${}_{20}k_2$	${}_{20}\sigma_2$	${}_{20}s_2$
3 — 4	${}_{20}\tau_3$	${}_{20}\lambda_3$	${}_{20}k_3$	${}_{20}\sigma_3$	${}_{20}s_3$
		i t. d.			

Liczba 20 po stronie lewej, przy wszystkich oznaczeniach, wskazuje, że dane odnoszą się do osób, zawierających ubezpieczenia w wieku lat 20; liczby po stronie prawej wskazują czas trwania ubezpieczeń, czyli czas, przez jaki osoby te zostawały pod obserwacyą. Tym sposobem np. ${}_{20}\tau_2$ oznacza liczbę osób zmarłych w trzecim roku trwania ubezpieczeń (od 2 do 3 lat) z pośród wstępujących w 20-ym roku życia; ${}_{20}\lambda_1$ — liczbę osób wybyłych za życia w drugim roku trwania ubezpieczeń (od 1 do 2 lat) również z pośród wstępujących w 20-ym roku życia; ${}_{20}k_3$ liczbę osób, które w chwili kończącej okres rachunkowy znajdują się w towarzystwach w czwartym roku trwania ubezpieczeń (od 3 do 4 lat) także z pośród wstępujących w 20-ym roku życia.

Kolumna 5-ta nie potrzebuje objaśnień (${}_{20}\sigma_0 = {}_{20}\tau_0 + {}_{20}\lambda_0 + {}_{20}k_0$). Co się tyczy kolumny 6-ej, to jeżeli założymy, iż wszystkie osoby wybywają w końcu roku trwania ubezpieczeń*), czyli że przebywają w towarzystwie zawsze okrągłą liczbę lat, będzie:

$$\left.\begin{array}{l} {}_{20}s_0 = {}_{20}\sigma_0 + {}_{20}\sigma_1 + {}_{20}\sigma_2 + \ldots + {}_{20}\sigma_{n-1} + {}_{20}\sigma_n, \\ {}_{20}s_1 = \qquad\quad {}_{20}\sigma_1 + {}_{20}\sigma_2 + \ldots + {}_{20}\sigma_{n-1} + {}_{20}\sigma_n, \\ {}_{20}s_2 = \qquad\qquad\quad {}_{20}\sigma_2 + \ldots + {}_{20}\sigma_{n-1} + {}_{20}\sigma_n, \\ \text{i t. d.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right| \quad . \quad (9),$$

gdzie n oznacza najdłuższy czas przebywania w towarzystwie, czyli naj-

*) Założenie to może być zresztą urzeczywistnione rachunkowo przez odpowiednie zredukowanie, podobnie jak przy wychodztwie, liczb osób wybywających w ciągu roku ubezpieczeniowego i objętych pierwszemi wyrazami po stronie prawej w wyrażeniach (9).

dalszy okres roczny pozostawania pod obserwacyą osób zawierających ubezpieczenia w 20-ym roku życia.

Liczby: ${}_{20}s_0$, ${}_{20}s_1$, ${}_{20}s_2$, . . , zawarte w kol. 6-ej, przedstawiają zatem liczby wszystkich osób obserwowanych w ciągu 1-go, 2-go, 3-go, i t. d. roku trwania ubezpieczeń; albowiem osoby, które wybyły w drugim roku ubezpieczeniowym, musiały być pod obserwacyą przez rok pierwszy; te, które wybyły w trzecim roku ubezpieczeniowym, musiały być pod obserwacyą przez rok drugi i pierwszy, i t. d. Że zaś w ciągu pierwszego roku trwania ubezpieczeń umarło osób ${}_{20}\tau_0$, w ciągu drugiego zmarło osób ${}_{20}\tau_1$, w ciągu trzeciego ${}_{20}\tau_2$ i t. d., zatem stosunki:

$$\frac{{}_{20}\tau_0}{{}_{20}s_0},\ \frac{{}_{20}\tau_1}{{}_{20}s_1},\ \frac{{}_{20}\tau_2}{{}_{20}s_2},\ \text{i t. d.}$$

przedstawiają prawdopodobieństwa śmierci osób w pierwszym, drugim, trzecim, i t. d. roku trwania ubezpieczeń, z pośród zawierających ubezpieczenia w 20-ym roku życia.

W ten sam sposób można ułożyć schemat 9 dla każdego wieku wstąpienia i obliczyć prawdopodobieństwa śmierci w kolejno idących po sobie latach trwania ubezpieczeń.

24. Ciąg dalszy art. 23-go. Gdy mamy wypełnione schematy 9 dla każdego wieku wstąpienia, zważmy dalej, że np. osoby, wstępujące w wieku lat 20 i występujące w drugim roku trwania ubezpieczeń albo później, były pod obserwacyą przez rok jako 21-o letnie — tak samo, jak osoby wstępujące w 21-ym roku życia i występujące w pierwszym roku trwania ubezpieczeń albo później, t. j. żeśmy mieli pod obserwacyą roczną osób 21-o letnich ${}_{20}s_1 + {}_{21}s_0 = L_{21}$, z których w ciągu tegoż roku umarło osób ${}_{20}\tau_1 + {}_{21}\tau_0 = U_{21}$. Podobnie, osoby, wstępujące w wieku lat 20 i występujące w 3-im roku trwania ubezpieczeń albo później, wstępujące w 21-ym roku życia i występujące w 2-im roku trwania ubezpieczeń albo później, wreszcie osoby wstępujące w 22-im roku życia i występujące w 1-ym roku trwania ubezpieczeń lub później, były pod roczną obserwacyą jako osoby 22-u letnie, t. j. żeśmy mieli pod roczną obserwacyą osób 22-u letnich:

$${}_{20}s_2 + {}_{21}s_1 + {}_{22}s_0 = L_{22},$$

z których w ciągu roku, jako 22-u letnie, umarło osób:

$${}_{20}\tau_2 + {}_{21}\tau_1 + {}_{22}\tau_0 = U_{22},\ \text{i t. d.}$$

Gdy więc z schematów 9, wypełnionych dla każdego wieku wstąpienia (przy założeniu, że ubezpieczonych młodszych od lat 20-u nie było) ułożymy tablicę:

Schemat 10.

Wiek wstąpienia	Wiek obserwacyi 20		21		22		23		24		25	
	kol. 2	kol. 6	kol. 2	kol. 6	kol. 2	kol. 6	kol. 2	kol. 6	kol. 2	kol. 6	kol. 2	kol. 6
20	${}_{20}\tau_0$	${}_{20}s_0$	${}_{20}\tau_1$	${}_{20}s_1$	${}_{20}\tau_2$	${}_{20}s_2$	${}_{20}\tau_3$	${}_{20}s_3$	${}_{20}\tau_4$	${}_{20}s_4$	${}_{20}\tau_5$	${}_{20}s_5$
21	U_{20}	L_{20}	${}_{21}\tau_0$	${}_{21}s_0$	${}_{21}\tau_1$	${}_{21}s_1$	${}_{21}\tau_2$	${}_{21}s_2$	${}_{21}\tau_3$	${}_{21}s_3$	${}_{21}\tau_4$	${}_{21}s_4$
22			U_{21}	L_{21}	${}_{22}\tau_0$	${}_{22}s_0$	${}_{22}\tau_1$	${}_{22}s_1$	${}_{22}\tau_2$	${}_{22}s_2$	${}_{22}\tau_3$	${}_{22}s_3$
23					U_{22}	L_{22}	${}_{23}\tau_0$	${}_{23}s_0$	${}_{23}\tau_1$	${}_{23}s_1$	${}_{23}\tau_2$	${}_{23}s_2$
24							U_{23}	L_{23}	${}_{24}\tau_0$	${}_{24}s_0$	${}_{24}\tau_1$	${}_{24}s_1$
25									U_{24}	L_{24}	${}_{25}\tau_0$	${}_{25}s_0$
.											U_{25}	L_{25}

i znajdujące się w niej liczby zsumujemy kolumnami, to stosunki $\frac{U_{20}}{L_{20}}, \frac{U_{21}}{L_{21}}, \frac{U_{22}}{L_{22}}, \frac{U_{23}}{L_{23}}$, i t. d. będą szukanemi prawdopodobieństwami śmierci (rocznemi) dla osób w wieku lat 20, 21, 22, 23, . . . bez względu na czas trwania ubezpieczeń.

Pozostaje tylko te prawdopodobieństwa wyrównać i ułożyć tablicę śmiertelności w formie wyrażającej liczby osób żyjących w każdym wieku, a więc: $l_x, l_{x+1}, l_{x+2}, l_{x+3}, \ldots$ Do tej tablicy można jeszcze dołączyć $d_x = l_x - l_{x+1}$, $d_{x+1} = l_{x+1} - l_{x+2}$, $d_{x+2} = l_{x+2} - l_{x+3}, \ldots$, a stąd znów prawdopodobieństwa śmierci i przeżycia roku (znane nam już zresztą jeszcze przed ułożeniem tablicy śmiertelności):

$$\left.\begin{aligned} q_x &= \frac{d_x}{l_x},\ q_{x+1} = \frac{d_{x+1}}{l_{x+1}},\ q_{x+2} = \frac{d_{x+2}}{l_{x+2}}, \ldots \\ p_x &= \frac{l_{x+1}}{l_x},\ p_{x+1} = \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}},\ p_{x+2} = \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}}, \ldots \end{aligned}\right| \quad . \quad (10).$$

Tablic w ten lub w podobny sposób ułożonych istnieje wiele, jak np. tablice 17-u Towarzystw angielskich, 20-u Towarzystw angielskich, 30-u Towarzystw amerykańskich, 23-ch Towarzystw niemieckich, Towarzystw francuskich, wreszcie ostatnio ułożone tablice Towarzystw austryackich, nie licząc wielu innych mniejsze już dziś posiadających znaczenie. Są one ułożone oddzielnie dla mężczyzn i oddzielnie dla kobiet oraz mieszane (łącznie mężczyźni z kobietami); bywają pomiędzy niemi oparte na życiu osób poddanych badaniu lekarskiemu, lub bez badania lekarskiego, tablice rentyerów i t. p.

Z pośród tych rozmaitych tablic podajemy, przy końcu książki, w Tabl. VI', najczęściej dziś w Niemczech i Austryi używane tablice śmiertelności 23-ch Towarzystw niemieckich, ułożone z osób poddanych badaniu lekarskiemu, mianowicie dla mężczyzn (MI), dla kobiet (WI) i łącznie dla mężczyzn i kobiet (Mu.WI). Z tych pierwsza (MI) obowiązuje u nas, dla ubezpieczeń zawieranych na przypadek śmierci i w kombinacyach mieszanych, skutkiem czego tej właśnie tablicy używać będziemy przy rozwiązywaniu zadań w Rozdziale następnym. Jak widzimy z Tabl. VI', tablice śmiertelności 23-ch Towarzystw niemieckich zaczynają się od 17-go roku życia (dla kobiet od 15-go) i kończą się na 89-ym roku. Pochodzi to stąd, że dzieci nie bywają ubezpieczane na przypadek śmierci, ani na kombinacye mieszane, towarzystwa zatem nie posiadają (i nie potrzebują posiadać) odnośnego materyału statystycznego, z którego możnaby wyznaczyć śmiertelność dzieci z badaniem lekarskiem. Co się tyczy końcowych lat życia — od 90-go, to materyał statystyczny był za ubogi na to, aby zeń można było wyprowadzić śmiertelność osób w tak późnym wieku żyjących. Jeżeli zachodzi potrzeba uzupełnienia tablicy do granicy życia ludzkiego, wtedy dochodzi się do tego drogą odpowiedniej interpolacyi. W ten właśnie sposób uzupełniona została tablica MI, użyta do ułożenia Tabl. VIII-ej, IX-ej i X-ej, o których będzie mowa później.

W Tabl. VI'' podajemy tablicę śmiertelności Dr. Semmlera (bez badania lekarskiego), ułożoną na podstawie danych statystycznych, dostarczonych przez Pruską instytucyę ubezpieczania rent*); podajemy ją dlatego, że obowiązuje u nas przy ubezpieczaniu rent i kapitałów na dożycie. Tablica ta, ułożona dla mężczyzn i kobiet łącznie, jest kompletna — od 0 do 100 lat. Wreszcie w tej samej Tabl. VI'' podajemy jeszcze, jako nowość, dwie tablice śmiertelności Towarzystw austryackich (Personenzählung) dla mężczyzn i kobiet oddzielnie (od 20-go roku życia do 97-go, względnie 95-go). Tablica ta, jak wszystkie inne tablice austryackie, ułożone jednocześnie z podanemi przez nas, nie są jeszcze w użyciu praktycznem, ponieważ wykończone zostały w ostatnich dopiero latach i dopiero w 1907 r. wydrukowane.

25. Charakterystyka śmiertelności. Porównanie różnych tablic śmiertelności ze sobą wykazało dużą rozmaitość, czemu dziwić się nie można. Przedewszystkiem tablice są układane dla różnych krajów i w różnych czasach, a ponieważ kraje różnią się od siebie kulturą, obyczajami, dobrobytem i warunkami klimatycznemi, wszystko to zaś silnie oddziaływa na śmiertelność, więc rzecz naturalna, że i tablice śmiertel-

---

*) Preussische Renten-Versicherungs-Anstalt in Berlin.

ności różnią się od siebie. Również i bieg czasu zmienia śmiertelność, gdyż z biegiem czasu zmieniają się warunki bytu; warunki sanitarne przeważnie się ulepszają, kultura i dobrobyt różnym podlegają zmianom, a wszystko to nie pozostaje bez wpływu na śmiertelność. Wreszcie i sposób układania tablic, szczególniej zaś większa lub mniejsza ścisłość i obfitość materyału wywierają wpływ na rezultaty i powodują różnice w tablicach, ułożonych nawet dla tego samego społeczeństwa. Nie można się przecież dziwić, że np. tablice, układane przez towarzystwa ubezpieczeniowe z osób poddanych badaniu lekarskiemu przy zawieraniu ubezpieczeń, więc zupełnie zdrowych, są różne od tablic śmiertelności całej ludności, w skład której wchodzą zarówno zdrowi jak i słabowici.

Pomimo to jest jednak wiele cech wspólnych. Uderza najprzód ogromna, lecz szybko malejąca śmiertelność dzieci. Śmiertelność zwłaszcza noworodków w pierwszym roku życia bywa bardzo wielka, dochodzi czasami do połowy wszystkich urodzonych lub nawet więcej, tak, że skutkiem tego okazała się potrzeba rozważania śmiertelności dzieci w okresach mniejszych niż roczne — w miesięcznych, nawet w tygodniowych. Z badań tych okazało się, że, zapewne z powodu wielkiej zmiany, jaka zachodzi w warunkach bytu noworodków, śmiertelność w pierwszych chwilach po urodzeniu jest największa, później zaś, w miarę jak organizm przywyka do nowych warunków bytu, śmiertelność stosunkowo bardzo szybko się zmniejsza, choć nie przestaje być w dalszym ciągu znaczną. Kultura i dobrobyt, objawiające się w większej troskliwości o niemowlęta, w umiejętniejszem obchodzeniu się z niemi i w lepszych warunkach bytowania niemowląt, zmniejszają śmiertelność i wywołują duże w niej różnice w różnych społeczeństwach. W dalszych latach życia śmiertelność dzieci stopniowo się zmniejsza i dochodzi do minimum mniej więcej w wieku od lat 10 do 15; od tej pory śmiertelność zaczyna się zwiększać, z początku powoli później coraz szybciej, aż w końcu, w najpóźniejszej starości staje się prawie równą dziecięcej — czasami nawet ją przewyższa.

Taki jest przebieg śmiertelności zarówno u mężczyzn jak i u kobiet, acz w niejednakowym stopniu. Na ogół biorąc, śmiertelność kobiet jest mniejsza od śmiertelności mężczyzn, co pochodzi z odmiennych warunków bytu obu płci; w paru jednak okresach życia, mianowicie w okresie dojrzewania dziewcząt (mniej więcej od 14 do 18 lat) i okresie porodowym (od 18 do 40 lat) rzecz się ma naodwrót z przyczyn fizyologicznych.

Zawód bardzo silnie oddziaływa na śmiertelność ludzi. Bardzo dużą śmiertelność zauważono wśród nauczycieli i urzędników; następnie idą, w porządku malejącym, drukarze, górnicy, tkacze, krawcy, szewcy, rzeźnicy, cieśle i stolarze, wreszcie ogrodnicy i rolnicy.

Charakterystycznie przedstawia się śmiertelność u osób ubezpieczonych na przypadek śmierci (z badaniem lekarskiem). Przez pierwsze 5 do 6 lat śmiertelność jest mniejsza od ogólnej, później staje się jej równą, w końcu przewyższa śmiertelność ogólną. Pochodzi to stąd, że z biegiem czasu, z pośród ubezpieczonych, wybywają dobrowolnie zdrowi, pozostają zaś przeważnie słabsi, których śmiertelność okazuje się większa od ogólnej. Naodwrót, rentyerzy (przyjmowani bez badania lekarskiego) odznaczają się małą, stosunkowo, śmiertelnością, bo renty nabywają osoby tylko zdrowe (jest to t. zw. przeciwwybór naturalny) i nabywcy ich prowadzą życie spokojne, bez troski o jutro.

26. Prawdopodobieństwa wyznaczane z tablic śmiertelności. Tablice śmiertelności dają nam możność wyznaczania różnych prawdopodobieństw, odnoszących się do życia i śmierci osób pojedynczych i połączonych w grupy.

Prawdopodobieństwa te wymagają pewnych oznaczeń. Znamy już oznaczenia odnoszące się do prawdopodobieństwa śmierci i życia w przeciągu jednego roku, obecnie potrzebować będziemy jeszcze innych. Główniejszemi zasadami systemu uniwersalnego znakowania są następujące.

Prawdopodobieństwo życia oznacza się przez p, prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku przez q, w ciągu dłuższego czasu przez Q; wiek osoby, dla której wyznaczamy prawdopodobieństwo, oznacza się, jak zwykle, przez skaźnik po stronie prawej nieco niżej, np. p_x, q_x.

Jeżeli wogóle fakt jakiś (np. śmierć lub życie) ma zajść lub zachodzić w c i ą g u n lat, wtedy po stronie lewej, nieco niżej odnośnej głoski, stawia się $|n$ (kreska pionowa po stronie lewej głoski n); gdy ma zajść p o u p ł y w i e n lat, pisze się w tem samem miejscu $n|$ (kreska pionowa po prawej stronie głoski n). Jeżeli $n = 1$, po stronie lewej nie stawia się żadnego znaku.

W następstwie takiej umowy, p_x oznacza prawdopodobieństwo przeżycia roku przez osobę x letnią, q_x prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku*); ${}_{n|}q_x$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba x letnia (po przeżyciu n lat) umrze w ciągu następnego ($n + 1$-go) roku; ${}_{|n}Q_x$ wyobraża prawdopodobieństwo śmierci osoby x letniej w ciągu n lat, bezpośrednio po wieku x następujących. Prawdopodobieństwo przeżycia n lat przez osobę x letnią wychodzi na to samo co i prawdopodo-

*) W taki właśnie sposób oznaczaliśmy prawdopodobieństwa roczne życia i śmierci w artykułach poprzednich, przy podawaniu sposobów ich wyznaczania.

bieństwo, że osoba x letnia żyć będzie po upływie n lat, czyli symbole $_np_x$ i $_{n|}p_x$ mają jednakowe znaczenie i dlatego kresek pionowych w tym razie wcale się nie stawia, czyli prawdopodobieństwo to oznacza się poprostu przez $_np_x$.

W podobny sposób można tworzyć oznaczenia dla prawdopodobieństw życia i śmierci grup złożonych z dwóch, trzech i więcej osób, acz, wobec wielu kombinacyj, jakie tu trafić się mogą, dowolności uniknąć trudno, ogólne bowiem zasady nie wyczerpują wszystkich poszczególnych przypadków.

Oprócz tego, nie na wszystko zgodzić się można. Tak np. system zaleca nie stawiać pomiędzy skaźnikami, obok siebie napisanemi, żadnych znaków przedzielczych (kropek, przecinków), żeby ich nie brać za oznaczenie mnożenia lub ułamku dziesiętnego; jeżeli zaś jasność tego wymaga, stawiać zaleca dwukropek.

Otóż nam się zdaje, że brak znaku przedzielczego może również, tak jak kropka, być wzięty za oznakę mnożenia, a dwukropek znaczy przecież dzielenie. Wobec tego my, zgodnie z najczęściej używanym sposobem, skaźniki przedzielać będziemy przecinkami.

Owóż prawdopodobieństwem, z jakiem osoba x letnia przeżyje rok, jest:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11),$$

z jakiem przeżyje n lat, czyli z jakiem po n latach żyć będzie:

$$_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12).$$

Prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku jest dopełnieniem do jedności prawdopodobieństwa przeżycia roku, zatem:

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} \quad . \; . \quad (13).$$

Prawdopodobieństwem śmierci w ciągu n lat jest:

$$_{|n}Q_x = 1 - {_np_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \quad . \; . \; . \quad (14).$$

Prawdopodobieństwem, że osoba x letnia przeżyje n lat i umrze w następnym: $n + 1$-ym, t. j. w $(x + n + 1)$-ym roku życia, jest:

$$_{n|}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} = \frac{d_{x+n}}{l_x} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14').$$

Biorąc np. za podstawę tablicę śmiertelności MI, znajdujemy:

$$p_{30} = \frac{92886}{93607} = 0{,}99230,$$

$$q_{30} = \frac{93607 - 92886}{93607} = \frac{721}{93607} = 0{,}00770 = 1 - 0{,}99230,$$

$$_{10}p_{30} = \frac{85318}{93607} = 0{,}91145,$$

$$_{|10}Q_{30} = \frac{93607 - 85318}{93607} = \frac{8289}{93607} = 0{,}08855 = 1 - 0{,}91145.$$

Dla wyznaczania prawdopodobieństw różnych stosunków trwałości życia, jakie pomiędzy dwiema osobami mogą się zdarzyć, użyć należy znanych nam twierdzeń o prawdopodobieństwie złożonem i zupełnem (mnożenie i dodawanie prawdopodobieństw).

Weźmy np. pod uwagę dwie osoby A i B, pierwszą w wieku lat x, drugą w wieku lat y; można dla nich wyznaczyć, pomiędzy innemi, następujące sześć prawdopodobieństw:

I. Prawdopodobieństwo, z jakiem obie osoby po upływie lat n żyć będą. Prawdopodobieństwo, że osoba A po n latach żyć będzie, równa się $\frac{l_{x+n}}{l_x}$, że osoba B po n latach żyć będzie równa się $\frac{l_{y+n}}{l_y}$; prawdopodobieństwo, z jakiem obie osoby przeżyją n lat, jest prawdopodobieństwem złożonem z dwóch poprzednich, t. j.:

$$_np_{x,y} = {_np_x}.{_np_y} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = \frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x \cdot l_y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

II. Prawdopodobieństwo, z jakiem jedna lub obie osoby A i B w ciągu n lat umrą, jest dopełnieniem poprzedniego prawdopodobieństwa do jedności:

$$_{|n}Q_{\substack{1,2\\x,y}} = 1 - {_np_{x,y}} = 1 - \frac{l_{x+n}\, l_{y+n}}{l_x\, l_y} = \frac{l_x\, l_y - l_{x+n}\, l_{y+n}}{l_x\, l_y} \quad . \quad (16).$$

III. Prawdopodobieństwo, z jakiem obie osoby po n latach żyć nie będą, czyli w ciągu n lat umrą, równa się iloczynowi z prawdopodobieństw śmierci, w ciągu n lat, jednej i drugiej osoby:

$$_{|n}Q_{x,y} = {_{|n}Q_x} \cdot {_{|n}Q_y} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_y - l_{y+n}}{l_y} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{y+n}}{l_y}$$

$$+ \frac{l_{x+n}\, l_{y+n}}{l_x\, l_y} = 1 - {_np_x} - {_np_y} + {_np_{x,y}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

IV. Prawdopodobieństwo, z jakiem obie lub przynajmniej jedna z obu osób A i B po n latach żyć będzie, jest dopełnieniem poprzedniego prawdopodobieństwa do jedności:

$$_np_{\overline{\overset{1,2}{x,y}}} = 1 - {}_{|n}Q_{x,y} = \frac{l_{x+n}}{l_x} + \frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{x+n}\,l_{y+n}}{l_x\,l_y} = {}_np_x + {}_np_y - {}_np_{x,y}{}^{*)} \quad (18).$$

V. Prawdopodobieństwo, z jakiem osoba A po n latach żyć będzie, a osoba B umrze do tego czasu, wyraża się przez:

$$_np_{\overline{\overset{1}{x}y}} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_y - l_{y+n}}{l_y} = \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{x+n}\,l_{y+n}}{l_x\,l_y} = {}_np_x - {}_np_{x,y} \quad (19).$$

I naodwrót, prawdopodobieństwem, że osoba A umrze, a B żyć będzie, jest:

$$_np_{\overline{x,\overset{1}{y}}} = \frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{x+n}\,l_{y+n}}{l_x\,l_y} = {}_np_y - {}_np_{x,y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19').$$

VI. Prawdopodobieństwo, że wogóle jedna, którakolwiek, osoba umrze, a druga żyć będzie po n latach, jest sumą (19) i (19'):

$$_np_{\overline{x,y}} = \frac{l_{x+n}}{l_x} + \frac{l_{y+n}}{l_y} - 2\,\frac{l_{x+n}\,l_{y+n}}{l_x\,l_y} = {}_np_x + {}_np_y - 2\,{}_np_{x,y} \quad (20).$$

Według tablicy śmiertelności MI, powyższe prawdopodobieństwa dla dwóch osób — 30-o i 50-o letniej, przy $n = 10$, posiadają następujące wartości liczebne:

$$\text{I.} \quad {}_{10}p_{30,50} = \frac{85318 \times 56692}{93607 \times 73755} = 0{,}70059.$$

$$\text{II.} \quad {}_{|10}Q_{\overset{1,2}{30,50}} = 1 - {}_{10}p_{30,50} = 0{,}29941.$$

$$\text{III.} \quad {}_{|10}Q_{30,50} = 1 - \frac{85318}{93607} - \frac{56692}{73755} + \frac{85318 \times 56692}{93607 \times 73755} = 0{,}02019.$$

---

*) Można je otrzymać i bezpośrednio, albowiem równa się prawdopodobieństwu, że pierwsza żyć będzie a druga umrze, pierwsza umrze a druga żyć będzie, obie żyć będą, t. j.:

$$_np_{\overline{\overset{1,2}{x,y}}} = {}_np_x \cdot {}_nQ_y + {}_{|n}Q_x \cdot {}_np_y + {}_np_x \cdot {}_np_y$$

$$= \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_y - l_{y+n}}{l_y} + \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} + \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = \frac{l_{x+n}}{l_x} + \frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x\,l_y}.$$

IV. $_{10}p_{\overset{1,2}{30,50}} = 1 - {}_{|10}Q_{30,50} = 0,97951.$

V. $_{10}p_{\overset{1}{30,50}} = \frac{85318}{93607} - \frac{85318 \times 56692}{93607 \times 73755} = 0,21086,$

$_{10}p_{\underset{30,50}{\ 1}} = \frac{56692}{73755} - \frac{85318 \times 56692}{93607 \times 73755} = 0,06806.$

VI. $_{10}p_{\overline{30,50}} = {}_{10}p_{\overset{1}{30,50}} + {}_{10}p_{\underset{30,50}{\ 1}} = 0,27892.$

Suma prawdopodobieństw I, III i VI powinna być, oczywiście, równa jedności (mogą: albo obie żyć, albo obie nie żyć, albo jedna, którakolwiek, może żyć, druga — nie) i tak jest rzeczywiście: 0,70059 + 0,02049 + 0,27892 = 1.

W podobny sposób można obliczać różne prawdopodobieństwa dla trzech i więcej osób, np. prawdopodobieństwem, z jakiem osoby x, y i z letnia po n latach żyć będą, jest:

$$_{n}p_{x,y,z} = \frac{l_{x+n}\, l_{y+n}\, l_{z+n}}{l_x\, l_y\, l_z}.$$

27. Życie średnie i prawdopodobne. Oprócz powyższych prawdopodobieństw, rozważa się jeszcze w Statystyce śmiertelności i jej zastosowaniach t. zw. życie średnie i prawdopodobne.

Życiem średniem osoby x letniej nazywa się przeciąg czasu, przez jaki każda x letnia osoba przeżyćby musiała, aby wszystkie razem przeżyły tyle czasu, ile rzeczywiście przeżyją.

Uniwersalny system znakowania zaleca oznaczać życie średnie przez e; symbolem więc życia średniego osoby x letniej jest e_x.

Jeżeli powyższą definicyę zastosujemy do tablicy śmiertelności, to ponieważ liczbę osób, wykazaną w tablicy jako żyjącą w wieku lat x, oznacza się przez l_x, tedy wszystkie one przeżyją lat $e_x . l_x$. Obliczmy teraz, ile lat osoby te przeżyją istotnie według tablicy śmiertelności.

Z pośród l_x osób x letnich umiera w ciągu roku osób d_x, ale nie jednocześnie. Gdy, z dużem przybliżeniem, przyjmiemy, że momenty zgonów tych osób rozkładają się jednostajnie na cały rok, wtedy wychodzi na to samo, jakby wszystkie umarły jednocześnie w połowie roku, czyli jakby każda przeżyła pół roku, t. j. że d_x osób, zmarłych w ciągu roku, przeżyje razem $\frac{1}{2} d_x$ lat. Podobnie, z pozostałych przy życiu l_{x+1} osób $x + 1$ letnich, z których każda przeżyła rok, umiera w następnym roku d_{x+1} osób, które, średnio biorąc, w roku swej śmierci przeżyły po pół roku, czyli razem przeżyły lat $(1 + \frac{1}{2})\, d_{x+1}$. Wynika stąd, że:

$$e_x . l_x = \tfrac{1}{2} d_x + (1 + \tfrac{1}{2})\, d_{x+1} + (2 + \tfrac{1}{2})\, d_{x+2} + \text{i t. d.} \quad . \; . \; . \quad (\alpha)$$

do końca tablicy.

Zanim pójdziemy dalej, wprowadźmy następujące oznaczenia, które w dalszym ciągu mieć będą bardzo częste zastosowanie.

Jeżeli liczby w kolumnie, mieszczącej liczby osób żyjących (l_x) w tablicy śmiertelności, dodamy od dołu ku górze, to otrzymamy sumę osób żyjących aż do wieku, na którym dodawanie kończymy. Sumę taką oznaczać będziemy przez Σl_x, gdzie Σ jest symbolem dodawania, zaś l_x liczbą osób żyjących w wieku x lat. Mamy więc:

$$\Sigma l_x = l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots \quad \ldots \quad (\beta)$$

do końca tablicy.

Gdy sumę osób, żyjących w wieku od lat x do $x + n - 1$ włącznie, oznaczymy przez:

$$\sum_x^{x+n-1} l_x = l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{x+n-1},$$

to możemy ją wyrazić inaczej. Jest bowiem:

$$l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{x+n-1}$$
$$= (l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{x+n-1} + l_{x+n} + \ldots \text{ do końca tablicy})$$
$$- (l_{x+n} + l_{x+n+1} + \ldots \text{ do końca tablicy})$$
$$= \Sigma l_x - \Sigma l_{x+n},$$

czyli:

$$\sum_x^{x+n-1} l_x = \Sigma l_x - \Sigma l_{x+n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\gamma).$$

Zupełnie w ten sam sposób przychodzimy do oznaczeń, odnoszących się do osób zmarłych, mianowicie:

$$\Sigma d_x = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots \text{ do końca tablicy} \quad \ldots \quad (\delta),$$

oraz:

$$\sum_x^{x+n-1} d_x = \Sigma d_x - \Sigma d_{x+n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\varepsilon).$$

Ponieważ jednak:

$$\Sigma d_x = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots = (l_x - l_{x+1}) + (l_{x+1} - l_{x+2})$$
$$+ (l_{x+2} - l_{x+3}) + \ldots = l_x,$$

przeto:

$$(\zeta) \quad \ldots \quad \Sigma d_x = l_x, \qquad \text{zaś } \Sigma d_x - \Sigma d_{x+n} = l_x - l_{x+n} \quad . \quad (\zeta').$$

Wiedząc to, wróćmy do wyrażenia (α), które teraz możemy napisać w kształcie:

$$e_x . l_x = \tfrac{1}{2} \Sigma d_x + d_{x+1} + 2 d_{x+2} + 3 d_{x+3} + \ldots$$
$$= \tfrac{1}{2} l_x + d_{x+1} + 2 d_{x+2} + 3 d_{x+3} + \ldots$$

Gdy dalej podstawimy: $d_{x+1} = l_{x+1} - l_{x+2}$, $d_{x+2} = l_{x+2} - l_{x+3}, \ldots$ i gdy do strony drugiej dodamy i odejmiemy po $\frac{1}{2} l_x$, wypadnie:

$$e_x . l_x = l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots - \tfrac{1}{2} l_x = \Sigma l_x - \tfrac{1}{2} l_x;$$

stąd:

$$e_x = \frac{\Sigma l_x}{l_x} - \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Według tego wzoru, z tablicy MI, otrzymujemy np.:

$$e_{20} = 40{,}46; \quad e_{50} = 18{,}73; \quad e_{75} = 6{,}04,$$

t. j. osoba 20-o letnia ma na widoku, średnio licząc, 40,46 lat życia; osoba 50-o letnia 18,73; 75-o letnia 6,04.

Życiem prawdopodobnem osoby $x$letniej zowie się taki przeciąg czasu, podczas którego połowa liczby l_x osób żyjących wymiera, t. j. gdy zachodzi jednakie prawdopodobieństwo ($= \frac{1}{2}$), że osoba x letnia ten przeciąg czasu przeżyje albo go nie przeżyje. Otóż, gdy to życie prawdopodobne oznaczymy przez ρ_x, ma być:

$$_{\rho_x}p_x = \frac{l_{x+\rho_x}}{l_x} = \frac{1}{2}, \quad \text{stąd } l_{x+\rho_x} = \frac{l_x}{2} \quad \ldots\ldots \quad (22).$$

Np. dla $x = 20$, mamy, według tablicy MI:

$$l_{20+\rho_{20}} = \frac{l_{20}}{2} = \frac{100000}{2} = 50000;$$

skoro zaś:

$$l_{63} = 50256, \qquad l_{64} = 48016,$$

następnie $50256 - 48016 = 2240$, $50256 - 50000 = 256$, przeto:

$$l_{20+\rho_{20}} = 50000 = l_{63+\frac{256}{2240}} = l_{63,11},$$

czyli: $\quad 20 + \rho_{20} = 63{,}11, \qquad$ skąd $\rho_{20} = 63{,}11 - 20 = 43{,}11.$

To znaczy, że osoba 20-o letnia, z tem samem prawdopodobieństwem ($= \frac{1}{2}$), przeżyje lub nie przeżyje 43,11 lat.

W podobny sposób znajdziemy dla osoby 50-o i 75-o letniej:

$$\rho_{50} = 18{,}71, \qquad \rho_{75} = 5{,}22.$$

Z porównania liczb e_{20}, e_{50} i e_{75} z ρ_{20}, ρ_{50} i ρ_{75} okazuje się, że życie prawdopodobne zbliża się do średniego, lecz nie jest mu równe.

Życie średnie lepiej charakteryzuje śmiertelność niż życie prawdopodobne, bo gdy mamy np. l_x osób żyjących w wieku lat x i $l_{x+\rho_x} = \frac{l_x}{2}$

osób żyjących w wieku lat $x+\rho_x$, to życie prawdopodobne zawsze się równa ρ_x bez względu na przebieg śmiertelności w czasie od x do $x+\rho_x$ lat, czyli życie prawdopodobne nie zależy od śmiertelności w poszczególnych latach, lecz tylko od śmiertelności całookresowej. Tymczasem życie średnie jak najściślej zależy od przebiegu śmiertelności w latach poszczególnych, skutkiem czego może, do pewnego stopnia, służyć za sumaryczną jej ocenę. Okoliczność ta stanowi przyczynę, dla której w praktyce bierze się zwykle pod uwagę tylko życie średnie.

Często zdarza się słyszeć lub czytać o życiu średniem całego społeczeństwa wogóle, bez uwzględnienia poszczególnych lat życia. Ponieważ w tak pojętem życiu średniem trzeba uwzględnić każdy wiek, najwłaściwiej więc przez takie życie rozumieć życie średnie dziecka zero letniego (noworodka); jeżeli zaś niema odpowiedniej tablicy śmiertelności, można za życie średnie całego ogółu ludności przyjąć życie średnie wszystkich osób zmarłych w ciągu dłuższego czasu, które się otrzymuje z podzielenia sumy lat, jaką osoby zmarłe przeżyły, przez ich liczbę.

Pamiętać jednak należy, że życie średnie noworodka nie jest bynajmniej najdłuższe, ponieważ wielka śmiertelność w pierwszym roku życia i w kilku jeszcze następnych latach obniża życie średnie dzieci w pierwszych latach. Tak np., według tablicy śmiertelności Queteleta dla mężczyzn, przebieg życia średniego dzieci aż do chwili dojścia do pełnoletności jest następujący (w Σl_x ułamek 0,4 opuszczamy, jako nie wywierający wpływu na rezultaty):

Wiek	Liczba osób żyjących	Suma liczb osób żyjących (do końca tablicy)	Życie średnie	Wiek	Liczba osób żyjących	Suma liczb osób żyjących (do końca tablicy)	Życie średnie
x	l_x	Σl_x	$e_x=\frac{\Sigma l_x}{l_x}-\frac{1}{2}$	x	l_x	Σl_x	$e_x=\frac{\Sigma l_x}{l_x}-\frac{1}{2}$
0	1000	37924	37,42	11	679	29618	43,12
1	838	36924	43,56	12	675	28939	42,37
2	782	36086	45,65	13	672	28264	41,56
3	752	35304	46,45	14	669	27592	40,74
4	734	34552	46,57	15	666	26923	39,93
5	720	33818	46,47	16	663	26257	39,10
6	710	33098	46,12	17	659	25594	38,34
7	702	32388	45,64	18	654	24935	37,63
8	695	31686	45,09	19	647	24281	37,03
9	689	30991	44,48	20	640	23634	36,43
10	684	30302	43,80	21	633	22994	35,83

Widzimy z powyższej tabelki, że życie średnie dziecka zero letniego wynosi lat 37,42, podczas gdy dziecka jedno letniego, z powodu przeżycia roku najkrytyczniejszego, jest już znacznie dłuższe, bo wynosi 43,56 lat; w następnych latach wzrasta jeszcze; w czwartym roku życia dochodzi do maximum (46,57), potem maleje stopniowo, ale dopiero pomiędzy 18-ym i 19-ym rokiem życia przybiera tę samą długość, jaką posiadało życie średnie dziecka zero letniego; dalej maleje już stale aż do granicy życia ludzkiego.

28. **Statystyka niezdolności do pracy.** Dla pewnych praktycznych zastosowań, o jakich mówić będziemy w Rozdziale VI-ym, należy nam jeszcze, choć w krótkich słowach, powiedzieć nieco o Statystyce niezdolności do pracy.

Jak wiadomo, wielu ludzi, czy to z powodu nieszczęśliwego wypadku, czy też z przyczyny słabej organizacyi, choroby lub innych powodów, staje się wcześniej lub później, w większym lub mniejszym stopniu, niezdolnymi do pracy. Zbadanie porządku, w jakim tego rodzaju wypadki dotykają ludzi, w zależności od wieku, przedstawia, podobnie jak śmiertelność, bardzo ważny przedmiot badań statystycznych.

Statystyka matematyczna zrobiła już w tym kierunku bardzo wiele, lecz Statystyka praktyczna uczyniła mało, gdyż zadanie przedstawia duże trudności.

Nadzwyczaj ważną rzeczą dla Statystyki praktycznej jest możność niewątpliwego stwierdzenia, że fakt badany zaszedł. Fakt śmierci daje się zawsze tak dokładnie stwierdzić, że nigdy nie przedstawia żadnej wątpliwości (prócz oszustwa albo letargu) i dlatego Statystyka śmiertelności jest, stosunkowo, bardzo dokładna. Tymczasem z niezdolnością do pracy rzecz się ma inaczej, stwierdzić bowiem, czy człowiek jest zdolny do pracy lub nie, jest nader trudno. Zapewne, są przypadki nie przedstawiające żadnej pod tym względem wątpliwości, jak np. zupełna ślepota, paraliż, pomieszanie zmysłów, utrata obu rąk lub obu nóg, lecz w większości przypadków pewności takiej niema i wyradza się najczęściej za każdym razem pytanie, czy fakt dany należy czy też nie należy podciągnąć pod tytuł niezdolności do pracy.

Istotnie, kogo właściwie za niezdolnego do pracy uważać należy: czy tego, kto nie jest w stanie pełnić swych dotychczasowych czynności, czy też tego tylko, kto bezwarunkowo żadnych już czynności załatwiać nie może? Jeżeli pierwszego, tedy np. śpiewak tracący głos musi być uważany za niezdolnego do pracy, chociaż może być człowiekiem zdrowym, silnym i zdatnym do wykonywania wielu innych robót; jeżeli drugiego — w takim razie nawet ociemniały pedagog może być uznany za zdolnego do pracy, ponieważ może jeszcze wykonywać jakie mechaniczne czynności, albo posiłkować się samą tylko pamięcią. Jeżeli zaś nie postawimy ani jednej ani drugiej zasady, wówczas każdy poszczególny przypadek będzie zależał od chwilowego poglądu sądzących, co, naturalnie, tak urozmaici dane statystyczne, że te żadnej wartości posiadać nie będą.

Dlatego, jak dotąd, Statystyka niezdolności do pracy prawie wyłącznie ogranicza się do pewnych tylko specyalnych zawodów, zwłaszcza zaś do górnictwa i służby dróg żelaznych. W tym kierunku uczynili już nieco: Heym i Zeuner dla górnictwa; Behm, Zimmermann i Bentzien dla służby dróg żelaznych. W każdym razie to, co jest zrobione, jest zaledwie małą cząstką tego, co uczynić trzeba; jeżeli zaś, mimo to, wzmiankowane rezultaty znajdują praktyczne zastosowanie, to tylko z powodu braku lepszych i z konieczności posiadania jakichkolwiek, choćby najsłabiej przybliżonych do istotnego stanu rzeczy.

29. Tablice czynnych i niezdolnych do pracy. Natomiast strona teoretyczna przedmiotu, jak wyżej powiedziano, jest już bardzo dokładnie rozwinięta i do niej też obecnie przechodzimy, przy niezupełnie ścisłem założeniu, że Statystyka praktyczna dostarczy nam danych, jakich teorya potrzebuje.

Danemi temi są: prawdopodobieństwa, z jakiemi osoby zdolne do pracy (czynne = actives) w każdym wieku stać się mogą w ciągu roku niezdolnemi do pracy (inwalidami), oraz roczne prawdopodobieństwa śmierci inwalidów w każdym wieku. Prawdopodobieństwa te wyznaczają się a posteriori, z odpowiedniego materyału statystycznego, w podobny sposób jak zwykłe prawdopodobieństwa śmierci.

Posiadając prawdopodobieństwa śmierci inwalidów, możemy, wiadomym sposobem, ułożyć tablicę śmiertelności inwalidów i taką właśnie tablicę, ułożoną przez Bentziena dla służby dróg żelaznych niemieckich, podajemy w Tabl. VII-ej *).

Z tablicy pomienionej widzimy tę szczególną okoliczność, że śmiertelność wśród inwalidów, w sprzeczności ze śmiertelnością ogólną, stale maleje aż do 55-go roku życia i od tej dopiero pory zaczyna wzrastać, przybierając rozmiary śmiertelności osób 20-o letnich dopiero w 74-ym roku życia. Jest to objaw podobny do zauważonego w latach dziecięctwa i może pochodzić najprzód stąd, że inwalidność w młodszych la-

*) Liczby osób żyjących i zmarłych obliczyliśmy z prawdopodobieństw, pomieszczonych w kol. 3-ej t blicy, znajdującej się w rozprawie E. Hamzy: „Note sur la théorie mathéma que de l'assurance contre le risque d'invalidité". (Paryż, 1900), przedstawionej r kongresie międzynarodowym matematyków ubezzeniowych, odbytym w Pa.yżu w 1900 roku.

tach i wogóle w latach początkowych po jej zajściu bardzo szkodliwie oddziaływa na zdrowie i życie osobnika, lecz w miarę jak organizm przystosowywa się do nowych warunków, szkodliwy ten wpływ słabnie; następnie, że inwalidzi zazwyczaj mają byt zabezpieczony, skutkiem czego, jako wolni od trosk życiowych, wiodą życie spokojne.

Z prawdopodobieństw stania się, w każdym roku życia, niezdolnym do pracy układa się tablicę zmian, zachodzących, z biegiem lat, wśród dowolnej grupy osób czynnych (zdolnych do pracy). Do ułożenia takiej tablicy użyjemy prawdopodobieństw, obliczonych przez Zimmermanna dla służby dróg żelaznych i podanych przez nas w kol. 3-ej Tabl. VIII-ej.

Zanim podamy sposób ułożenia takiej tablicy zmian wśród osób czynnych, wprowadźmy następujące oznaczenia:

l_x — liczba osób żyjących w wieku x lat, wyrażona w tablicy śmiertelności ogólnej (zdolnych i niezdolnych do pracy),

q_x — ogólne prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku $= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$,

p_x — ogólne prawd. przeżycia roku $= 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$,

$\overset{(i)}{l_x}$ — liczba inwalidów żyjących w wieku x lat, wyrażona w tablicy śmiertelności inwalidów,

$\overset{(ii)}{q_x}$ — prawd. śmierci x letniego inwalidy w ciągu roku $= \frac{\overset{(i)}{l_x} - \overset{(i)}{l_{x+1}}}{\overset{(i)}{l_x}}$,

$\overset{(ii)}{p_x}$ — odpowiednie prawd. przeżycia roku, równe $1 - \overset{(ii)}{q_x} = \frac{\overset{(i)}{l_{x+1}}}{\overset{(i)}{l_x}}$,

$\overset{(a)}{l_x}$ — liczba osób żyjących w wieku lat x w stanie czynnym, wykazana w tablicy zmian, zachodzących wśród danej grupy osób czynnych,

$\overset{(aa)}{q_x}$ — prawd. śmierci w ciągu roku w stanie czynnym,

$\overset{(aa)}{p_x}$ — prawd. przeżycia roku w stanie czynnym,

$\overset{(ai)}{q_x}$ — prawdopodobieństwo, że osoba czynna x letnia stanie się w ciągu roku inwalidą i umrze przed nadejściem końca roku,

$\overset{(ai)}{p_x}$ — prawdopodobieństwo, że osoba x letnia stanie się w ciągu roku inwalidą i żyć będzie przy końcu tegoż roku,

w_x — prawdopodobieństwo stania się inwalidą w ciągu roku przez osobę zdolną do pracy na początku roku i będącą w wieku lat x,

J_x — liczba osób, jaka, z pośród $\overset{(a)}{l_x}$ zdolnych do pracy, stała się w ciągu roku niezdolną do pracy, bez względu na to, czy osoby te żyją czy nie żyją w końcu roku,

J_x' — liczba osób, jaka, z pośród J_x, żyje przy końcu tego roku, w którym stała się niezdolną do pracy. Stąd wypada, że $J_x - J_x'$ równa się liczbie osób zmarłych w stanie inwalidności z pośród J_x. Zauważyć i zapamiętać należy, że osoby J_x' są w wieku lat $x+1$; znaczek x przypomina tylko wiek osób czynnych (na początku roku), z pośród których w ciągu roku stało się inwalidami J_x' osób żyjących przy końcu roku,

wreszcie

P_x — liczba wszystkich osób, żyjących w wieku x lat jako inwalidzi, powstali z danej, w pewnym wieku, grupy osób zdolnych do pracy.

30. Sposób układania tablicy zmian, zachodzących wśród osób czynnych. Mając w pamięci powyższe oznaczenia, zważmy, że jako dane posiadamy:

$$q_x, \text{ względnie } p_x = 1 - q_x,$$
$$\overset{(ii)}{q_x}, \text{ względnie } \overset{(ii)}{p_x} = 1 - \overset{(ii)}{q_x}$$

oraz w_x, z których mamy obliczyć wszystkie inne liczby i ułożyć tablicę zmian zachodzących, z biegiem czasu, wśród dowolnej liczby osób czynnych $\overset{(a)}{l_n}$ w wieku lat n.

Ponieważ niezdolność do pracy nie może się trafiać w dzieciństwie*), lecz dopiero w późniejszych latach, gdy już człowiek pracuje, przeto, opierając się na obserwacyi, zaczynamy od wieku $n = 20$ i przyjmujemy:

$$\overset{(a)}{l_{20}} = 100000.$$

Owóż wypadki inwalidności, podobnie jak śmierci, nie dotykają osób jednocześnie, lecz w różnych momentach roku. Jeżeli zatem przyjmiemy, że się rozkładają jednostajnie na rok cały, to wychodzi to prawie na to samo, jak gdyby wszyscy, stający się w ciągu roku inwalidami, zostali nimi jednocześnie w połowie roku i temsamem pozostawali, jako tacy, pod obserwacyą tylko przez drugie półrocze. Na tej podstawie możemy przyjąć:

$$\overset{(ai)}{q_x} = \tfrac{1}{2} w_x \overset{(ii)}{q_x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha),$$
$$\overset{(ai)}{p_x} = w_x - \overset{(ai)}{q_x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta).$$

Z wiadomych w_x i $\overset{(ii)}{q_x}$ możemy zatem obrachować $\overset{(ai)}{q_x}$ oraz $\overset{(ai)}{p_x}$.

*) Trafiają się wprawdzie przypadki, że dzieci ulegają nieszczęściu, skutkiem którego tracą przyszłą zdolność do pracy; są to jednak zdarzenia, jakich tutaj nie bierzemy pod uwagę.

Mając te prawdopodobieństwa, znajdziemy:

$$\overset{(a)}{l}_{x+1} = \overset{(a)}{l}_x (1 - w_x) - \overset{(a)}{l}_x \cdot \overset{(aa)}{q}_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma),$$

jak również:

$$l_x \cdot q_x = (\overset{(a)}{l}_x + P_x)\, q_x = \overset{(a)}{l}_x \cdot (\overset{(aa)}{q}_x + \overset{(ai)}{q}_x) + P_x \cdot \overset{(ii)}{q}_x \quad . \quad . \quad (\delta).$$

Stąd:

$$\overset{(a)}{l}_x \cdot \overset{(aa)}{q}_x = \overset{(a)}{l}_x (q_x - \overset{(ai)}{q}_x) + P_x (q_x - \overset{(ii)}{q}_x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon).$$

Gdy ostatnie wyrażenie podstawimy w (γ), wypadnie:

$$\overset{(a)}{l}_{x+1} = \overset{(a)}{l}_x \cdot (1 - w_x - q_x + \overset{(ai)}{q}_x) + P_x \cdot (\overset{(ii)}{q}_x - q_x),$$

albo, ponieważ $1 - q_x = p_x$, $w_x - \overset{(ai)}{q}_x = \overset{(ai)}{p}_x$, $\overset{(ii)}{q}_x = 1 - \overset{(ii)}{p}_x$, $q_x = 1 - p_x$:

$$\overset{(a)}{l}_{x+1} = \overset{(a)}{l}_x \cdot (p_x - \overset{(ai)}{p}_x) + P_x \cdot (p_x - \overset{(ii)}{p}_x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}).$$

Z drugiej strony jest oczywiście:

$$P_{x+1} = \overset{(a)}{l}_x \cdot \overset{(ai)}{p}_x + P_x \cdot \overset{(ii)}{p}_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}),$$

skutkiem czego z (I) otrzymujemy:

$$\overset{(a)}{l}_{x+1} = (\overset{(a)}{l}_x + P_x) \cdot p_x - P_{x+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{III}).$$

Tym sposobem, mając $\overset{(a)}{l}_x$ i P_x, z (II) wyznaczymy P_{x+1}, a, mając P_{x+1}, z (III) obrachujemy $\overset{(a)}{l}_{x+1}$, t. j. znajdziemy, ile osób, z pośród $\overset{(a)}{l}_x$, żyjących w stanie czynnym na początku roku, żyć będzie w stanie czynnym przy końcu roku, czyli na początku roku następnego. Znalazłszy $\overset{(a)}{l}_{x+1}$, w ten sam sposób obrachujemy $\overset{(a)}{l}_{x+2}$, i t. d. — czyli ułożymy tablicę zmian, zachodzących wśród danej grupy osób $\overset{(a)}{l}_n$, o co właśnie nam chodziło. Jednocześnie znajdziemy też P_x, $J_x = \overset{(a)}{l}_x \cdot w_x$, $J_x' = \overset{(a)}{l}_x \cdot \overset{(ai)}{p}_x$ dla każdego wieku.

Gdy np. założymy, że wśród n letnich niema inwalidów, wtedy $P_n = 0$, i gdy nadto wyjdziemy z dowolnej liczby $\overset{(a)}{l}_n$ osób czynnych, otrzymamy z (II):

$$P_{n+1} = \overset{(a)}{l}_n \cdot \overset{(ai)}{p}_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}');$$

stąd:

$$\overset{(a)}{l}_{n+1} = \overset{(a)}{l}_n \cdot p_n - P_{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{III}').$$

Mając $\overset{(a)}{l}_{n+1}$, otrzymujemy z (II):

$$P_{n+2} = \overset{(a)}{l}_{n+1} \cdot \overset{(ai)}{p}_{n+1} + P_{n+1} \cdot \overset{(ii)}{p}_{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II}''),$$

oraz z (III):

$$\overset{(a)}{l}_{n+2} = (\overset{(a)}{l}_{n+1} + P_{n+1}) \cdot p_{n+1} - P_{n+2} \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III}''),$$

i t. d. do końca tablicy.

Gdy założymy $n = 20$, $\overset{(a)}{l}_{20} = 100000$ i podstawimy za w_x, $\overset{(ii)}{q}_x$ względnie za $\overset{(ii)}{p}_x$ wartości pomieszczone w Tabl. VII i VIII, to rachunek przeprowadza się w sposób następujący:

x	$\overset{(a)}{l}_x$	p_x	w_x	$\overset{(ii)}{q}_x$	$\overset{(ii)}{p}_x$	$\overset{(ai)}{q}_x = \frac{1}{2} w_x \overset{(ii)}{q}_x$	$\overset{(ai)}{p}_x = w_x - \overset{(ai)}{q}_x$	$(\overset{(a)}{l}_x + P_x) \cdot p_x$	P_x	$J_x = \overset{(a)}{l}_x \cdot w_x$	$J'_x = \overset{(a)}{l}_x \cdot \overset{(ai)}{p}_x$	$P_x \cdot \overset{(ii)}{p}_x$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
20	100000	0,99375	0,00020	0,1044	0,8956	0,00001	0,00019	99375	0	20	19	0
21	99356	0,99381	0,00023	0,1005	0,8995	0,00001	0,00022	93760	19	23	22	17
22	98721	0,99387	0,00026	0,0966	0,9034	0,00001	0,00025	98155	39	26	25	35
23	98095	0,99374	0,00030	0,0927	0,9073	0,00001	0,00029	97541	60	29	28	55
24	97458	0,99365	0,00034	0,0888	0,9112	0,00001	0,00033	96922	83	33	32	75

i t. d.

Z obliczeń tych sformowaną tablicę podajemy przy końcu książki (Tabl. VIII). W tablicy tej*) wszakże kol. 6 ($\overset{(a)}{l}_x$) nie została obliczona z wzoru (III), lecz powstała z odjęcia kol. 7 (P_x) od liczby osób żyjących w odpowiednim wieku, podanej w tablicy śmiertelności MI (kol. 1). Właściwie wychodzi to na jedno i to samo; ze względu jednak na rozmaite zaokrąglenia do liczb całkowitych lub do ograniczonej liczby cyfr dziesiętnych, mogą się tu trafić drobne różnice, jak to np. ma miejsce w drugiej, czwartej i piątej liczbie kol. 2-ej powyższego schematu w porównaniu z kol. 6-tą Tabl. VIII-ej.

W powyższym schemacie kol. 13-tą podaliśmy dla sprawdzenia

*) Kolumny: 3, 6, 7 i 8 wprowadzone zostały również z wzmiankowanej w poprzednim przypisku rozprawy E. Hamzy — przyczem liczby w kol. 8-ej pozaokrąglaliśmy do całkowitych.

rachunku; widocznie bowiem P_{x+1} powinno być równe pozostałym, po roku, przy życiu z pośród P_x (t. j. $P_x . p_x^{(ii)}$ w kol. 13-ej) + pozostałym przy życiu z pośród inwalidów, jakich w ciągu roku dostarczyła liczba $l_x^{(a)}$ czynnych (J_x' z kol. 12-ej). I rzeczywiście mamy:

$$19 = 0 + 19, \quad 39 = 17 + 22, \quad 60 = 35 + 25, \quad 83 = 55 + 28.$$

ROZDZIAŁ VI.

Ubezpieczenia.

W Rozdziale I-ym wskazaliśmy dwa sposoby zdobycia kapitału, względnie zabezpieczenia sobie i swym najbliższym bytu drogą oszczędności: sposób odkładania części dochodów i kapitalizowania ich w ten lub inny sposób (czy to przez składanie w kasie oszczędnościowej, przez zakupywanie walorów procentujących, lub t. p.) i sposób zaciągnięcia pożyczki długoterminowej ze stopniowem jej umarzaniem. Sposób pierwszy jest doskonały, lecz, aby mógł doprowadzić do pożądanych rezultatów, wymaga dużo silnej woli i długiego życia; sposób drugi jest przystępny tylko dla posiadaczów nieruchomości i nie ma tem samem znaczenia dla osób żyjących z pracy rąk własnych albo z pracy umysłowej.

Obecnie przystępujemy do przedstawienia zasad matematycznych idei, przewyższającej wszystkie inne pomysły, odnoszące się do zabezpieczenia bytu jednostkom w sposób przystępny zarówno dla ubogich jak i dla zamożnych. Ideą tą są ubezpieczenia życiowe.

1. Definicya. Na kongresie międzynarodowym matematyków ubezpieczeniowych, odbytym w 1906 r. w Berlinie, duże uznanie zyskała sobie, podana przez Sekretarza kongresu, prof. Manesa, następująca definicya ubezpieczeń wogóle: „Przez ubezpieczenie rozumieć należy urządzenia gospodarcze, oparte na wzajemności i mające na celu pokrywanie przypadkowych, dających się ocenić potrzeb majątkowych“ *).

*) Unter Versicherung hat man zu verstehen: „auf Gegenseitigkeit beruhende wirtschaftliche Veranstaltungen zwecks Deckung zufälligen schätzbaren Vermögensbedarfes“.

Definicya powyższa wyraźnie orzeka, że owe potrzeby majątkowe, pokrywane przez urządzenia gospodarcze, zwane ubezpieczeniem, powinny być przypadkowe, lecz takie tylko przypadkowe, które się dają ocenić.

Otóż zdarzenia przypadkowe notuje Statystyka praktyczna, Statystyka zaś teoretyczna z odnośnego materyału ocenia te zdarzenia przypadkowe, wyznaczając dla nich odpowiednie prawdopodobieństwa, które właśnie służą do wyznaczania opłat, jakie za różnego rodzaju ubezpieczenia pobierać trzeba.

Widzimy więc, że ubezpieczenia muszą się opierać na Rachunku prawdopodobieństwa; o ile zaś nie opierają się na nim, nie są we właściwem znaczeniu ubezpieczeniami, lecz więcej lub mniej ryzykownemi interesami, nie opartemi na dostatecznie racyonalnych podstawach.

Owa przypadkowość obliczalna jest podstawą ubezpieczeń tak dalece zasadniczą i charakterystyczną, że według stopnia obliczalności zdarzeń przypadkowych, stanowiących przedmiot ubezpieczeń, sądzić można o większej lub mniejszej niejako godności danej gałęzi ubezpieczeń. Im dokładniej obrachować się dają prawdopodobieństwa zdarzeń przypadkowych, stanowiących przedmiot ubezpieczeń, tem wyżej stoi odnośny rodzaj ubezpieczeń.

Owóż, z pośród różnego rodzaju zdarzeń, zależnych od losu, względnie od przypadku, najściślej zbadana jest, jak wiemy z Rozdziału poprzedniego, śmiertelność ludzka w zależności od wieku, i dlatego na pierwszem miejscu w hierarchii asekuracyjnej stoją ubezpieczenia kapitałów i rent, płatnych w zależności od życia ludzkiego, t. j. t. zw. ubezpieczenia życiowe.

Inne rodzaje ubezpieczeń mają za przedmiot zdarzenia mniej dokładnie zbadane, skutkiem czego odznaczają się mniejszą ścisłością rachunkową i polegają więcej na długoletniej praktyce, niż na przewidywaniach rachunkowych. Niektóre z nich, jak np. ubezpieczenia na przypadek niezdolności do pracy, teoretycznie są już bardzo gruntownie opracowane, lecz Statystyka praktyczna nie dostarczyła nam jeszcze dostatecznie ścisłego materyału do zastosowania teoryi w praktyce, z tego głównie powodu, że sam rodzaj zdarzeń (niezdolność do pracy) jest trudny do określenia.

Jeszcze mniej dokładne materyały statystyczne posiadamy dla nieszczęśliwych wypadków z ludźmi, dla wypadków ogniowych, burz atmosferycznych i ziemskich i dla tym podobnych zjawisk. Tego zaś rodzaju zdarzenia, jak zbicie szyb, kradzież, i t. d. ledwie zasługują na miano zdarzeń kwalifikujących się do racyonalnego ubezpieczenia.

Z tych powodów właściwie do wykładu nadają się tylko ubezpieczenia życiowe oraz ubezpieczenia na przypadek niezdolności do pracy i temi też dwoma rodzajami ubezpieczeń w Rozdziale niniejszym zajmować się będziemy.

2. Dwa pierwsze warunki ubezpieczeń życiowych. Jak z powyższego wynika, ubezpieczenia życiowe opierają się na zasadach Rachunku prawdopodobieństwa, mianowicie na prawdopodobieństwie śmierci, względnie przeżycia roku. Znając te prawdopodobieństwa, możemy przewidywać, z pewnem przybliżeniem, ile osób z pośród danej liczby umrze lub przeżyje rok, a temsamem możemy obrachować, jaką kwotę każda z tych osób, żyjących na początku roku, zapłacić powinna, aby można było pokryć wszystkie ubezpieczone potrzeby majątkowe, wypływające ze śmierci osób lub z ich dożycia do pewnego terminu.

Wiemy jednak z prawa wielkich liczb, iż, aby można było przewidzieć prawdopodobną liczbę przypadków śmierci lub przeżycia roku przez daną liczbę osób, osób tych musi być bardzo wiele, skąd płynie ten ważny dla ubezpieczeń życiowych warunek, o którym nigdy zapominać nie należy, iż wszelkie obliczenia, odnoszące się do ubezpieczeń życiowych i oparte na podstawach Rachunku prawdopodobieństwa, wtedy tylko mają znaczenie aktualne, gdy się odnoszą do bardzo wielkiej liczby osób ubezpieczonych. Dla małej liczby osób obliczenia te nie posiadają żadnego znaczenia — tak samo, jak nie mają znaczenia wyprowadzone a posteriori prawdopodobieństwa śmierci dla pojedynczej osoby lub dla niewielkiej liczby osób. Prawdopodobieństwo śmierci danej osoby może być bardzo małe, a mimo to osoba pomieniona umrzeć może; dopiero gdy znalezione prawdopodobieństwo zastosujemy do bardzo wielu osób, możemy z pewnem, zresztą zawsze dającem się ocenić przybliżeniem (prawdopodobieństwem) obrachować liczbę wypadków śmierci, jaka wśród danej liczby osób zajść może.

3. Trzeci warunek ubezpieczeń życiowych. Mamy tedy już dwa warunki, na podstawie których można wykonywać obliczenia, odnoszące się do ubezpieczeń życiowych: bardzo wielką liczbę osób oraz znajomość prawdopodobieństwa ich śmierci, względnie przeżycia roku.

Do powyższych dwóch warunków przybywa jeszcze trzeci — oprocentowanie wnoszonych przez osoby ubezpieczone sum pieniężnych. Skoro bowiem ubezpieczeni wnoszą do instytucyi pewne kwoty, zwane premiami, z których zbierają się sumy, mające w przyszłości służyć do pokrywania zachodzących potrzeb majątkowych, przeto te gromadzące się pieniądze nie powinny próżnować, czyli leżeć bez procentu, byłoby to bowiem z krzywdą ubezpieczonych, którzy musieliby wnosić premie większe o ten nie pozyskany procent.

Aby módz oprocentować gromadzące się w instytucyach ubezpieczeń życiowych kapitały, należy je w ten lub inny sposób puścić w ruch, przez co, oprócz głównego celu — pozyskania procentu, odnośne instytucye oddają zarazem wielkie usługi gospodarstwu społecznemu, z drobnych bowiem oszczędności uczestników tworzą się wielkie kapitały, mogące odegrać dużą rolę w gospodarstwie tego społeczeństwa, wśród którego się gromadzą.

Okoliczność ta uczy, że każdy dobry obywatel powinien we własnym ubezpieczać się kraju, gdyż w razie przeciwnym, t. j. jeżeli się ubezpiecza w instytucyi obcej, oszczędności swe skazuje na oddawanie usług gospodarstwu nie własnego, lecz obcego społeczeństwa.

Ale lokacya kapitałów, gromadzących się w instytucyi ubezpieczeniowej, powinna być bardzo oględna, żeby uniknąć większych strat, któreby mogły podkopać byt instytucyi i zawieść nadzieje osób ubezpieczonych, powierzających jej swoje oszczędności—często całą swoją i swych rodzin przyszłość. Dlatego instytucye ubezpieczeniowe lokują zwykle kapitały w papierach procentowych pewnych, na pierwszych numerach hypotecznych, w pożyczkach udzielanych własnym uczesnikom pod zastaw ich ubezpieczeń lub w nieruchomościach, dających się łatwo i bez niebezpieczeństwa administrować, albo sprzedać, jak np. w domach miast ruchliwych i rozwijających się pomyślnie. Wszelkie interesy ryzykowniejsze, jak: przemysłowe, handlowe, bankierskie i t. p. są zupełnie wykluczone.

Zdawać się może, iż ten ostatni warunek osłabia znaczenie gospodarcze i społeczne kapitałów gromadzących się w instytucyach ubezpieczeniowych. Lecz tak bynajmniej nie jest: najprzód dlatego, że nabywanie np. papierów procentowych rozwija kredyt publiczny i oddaje usługi korzystającym z niego; następnie dlatego, że, wykupując podobne papiery, podnosimy ich kurs i obniżamy tem samem stopę procentową, co pośrednio zniewala kapitały prywatne do zwrócenia się w innym kierunku, dla pozyskania większego procentu, zatem w kierunku bardziej ryzykownym — do przemysłu, rolnictwa, handlu i tym podobnych przedsiębiorstw.

Obowiązek szukania lokacyj pewnych powoduje potrzebę zadawalania się nizkiem oprocentowaniem kapitałów. Na to jednak niema rady: instytucye ubezpieczeniowe nie mogą zapewnić wysokiego oprocentowania, nietylko z powodu bezpieczeństwa lokacyj, lecz jeszcze i z tej racyi, że ich zobowiązania są długoletnie, nie można więc przewidzieć, czy bieżąca stopa procentowa utrzyma się przez cały czas trwania ubezpieczeń.

Dlatego właśnie w instytucyach ubezpieczeń życiowych spotykamy się z dwoma rodzajami stóp procentowych: ze stopą procentową handlową, t. j. taką, jaką instytucya w tym lub innym roku pozyskać zdoła, i ze stopą procentową techniczną, do jakiej względem uczestników się obowiązuje i na jakiej opiera obliczenia premij. Stopa techniczna zawsze jest, a przynajmniej być powinna niższa od handlowej; u nas obecnie wynosi 4%, w innych krajach 3½%, 3%, albo mniej jeszcze.

4. Tablice pomocnicze. Oprocentowanie może być w dwojaki sposób do obliczeń ubezpieczeniowych wprowadzone: można rachunkowo oprocentowywać lub dyskontować albo pieniądze, wnoszone przez osoby ubezpieczone i płacone przez instytucye, albo, zamiast pieniędzy, można oprocentowywać lub dyskontować liczby osób ubezpieczonych. Ostatecznie wychodzi to na jedno i to samo, lecz obecnie w użyciu będąca technika ubezpieczeniowa posiłkuje się sposobem drugim, otrzymując tą drogą bardzo udatne wzory na różne manipulacye ubezpieczeniowe.

Powstały stąd pewne specyalne nazwy i wyrażenia oraz związki pomiędzy odnośnemi wielkościami, z któremi przedewszystkiem czytelników naszych zaznajomić musimy.

Iloczyn z liczby osób żyjących w danym wieku, wykazanej w tablicy śmiertelności, przez czynnik dyskontujący v podniesiony do potęgi wieku tych osób, nazywa się zdyskontowaną liczbą osób żyjących. W systemie uniwersalnym (międzynarodowym) znakowania iloczyn taki oznacza się przez D_x, gdzie x przedstawia wiek. Mamy więc:

$$D_x = l_x . v^x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

gdzie v jest czynnikiem dyskontującym przy stopie technicznej.

Iloczyn z liczby osób zmarłych, w wieku od lat x do $x+1$, przez czynnik dyskontujący podniesiony do potęgi $x+1$, zowie się zdyskontowaną liczbą osób zmarłych w pomienionym wieku i oznacza się przez C_x, t. j.

$$C_x = d_x . v^{x+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Oprócz tego w technice asekuracyjnej używa się sum zdyskontowanych liczb osób żyjących i zmarłych, oraz sum tych sum, formowanych z dołu (od najpóźniejszego wieku) ku górze, tak samo, jak to czyniliśmy w Rozdz. V-ym (art. 27) z sumami osób żyjących i zmarłych. Dla sum i sumy sum zdyskontowanych liczb osób żyjących używa się oznaczeń N_x i S_x; dla odpowiednich sum zdyskontowanych liczb osób zmarłych — oznaczeń M_x i R_x. Mianowicie:

$$N_x = \Sigma D_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots \ldots \quad (3).$$

$$S_x = \Sigma N_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots \ldots \quad (4).$$

$$M_x = \Sigma C_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots \ldots \quad (5).$$

$$R_x = \Sigma M_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots \ldots \quad (6).$$

Liczby te, dla obowiązującej u nas tablicy MI (str. 277) przy 4%, podajemy przy końcu książki jako Tabl. IX. Tablica taka zowie się pomocniczą albo przygotowawczą.

Symbole D i N utworzono z pierwszych głosek wyrazów angielskich: Divisor (dzielnik), Numerator*) (licznik), gdyż pierwszy we wzorach na wartość rent wchodzi jako mianownik, drugi jako licznik; S jest wzięte z wyrazu Sum (suma). C, M i R są głoskami, poprzedzającemi, w alfabecie, trzy poprzednie.

Sposób przeprowadzania rachunków zapomocą tablic pomocniczych zowie się kolumnowym albo tabelarycznym (Méthode à colonnes).

5. Związki pomiędzy liczbami zdyskontowanemi osób żyjących i zmarłych. Pomiędzy liczbami D, N, S i C, M, R zachodzą pewne związki, które znać trzeba z uwagi na różne przeróbki wzorów.

Wiemy już, że:

$$C_x = d_x v^{x+1} = (l_x - l_{x+1}) v^{x+1} = v\, l_x v^x - l_{x+1} v^{x+1} = v D_x - D_{x+1},$$

czyli ostatecznie:

$$C_x = \frac{D_x}{r} - D_{x+1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Jest to związek zachodzący pomiędzy zdyskontowaną liczbą osób zmarłych i żyjących. Np. według Tabl. IX-ej:

$$C_{30} = \frac{D_{30}}{1{,}04} - D_{31} = \frac{28860{,}79}{1{,}04} - 27537{,}01 = 213{,}75.$$

Następnie, po zsumowaniu (7) przy $x = x,\ x+1,\ x+2, \ldots,$ wypada:

$$\Sigma C_x = \frac{\Sigma D_x}{r} - \Sigma D_{x+1},$$

*) System uniwersalny znakowania jest właściwie systemem angielskim, przyjętym za uniwersalny; dlatego większość symboli jest utworzona z pierwszych głosek odpowiednich wyrazów angielskich. W systemie tym ΣD_x jest oznaczone przez N_x, a ΣD_{x+1} przez N_x; rozróżnienie to jest jednak tak dalece zbyteczne, że uważamy za stosowne uchylić się od niego — podobnie jak to czyni większość autorów.

czyli:

$$M_x = \frac{N_x}{r} - N_{x+1} = \frac{N_x}{r} - (N_x - D_x) = \frac{N_x}{r} - N_x + D_x,$$

t. j.

$$M_x = D_x - \frac{r-1}{r} N_x = D_x - \frac{i}{1+i} N_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Np. $M_{30} = D_{30} - \frac{0{,}04}{1{,}04} N_{30} = 28860{,}79 - \frac{4}{104} . 509677{,}65 = 9257{,}80.$

Wreszcie:

$$\Sigma\Sigma C_x = \Sigma M_x = \Sigma D_x - \frac{r-1}{r} \Sigma N_x,$$

czyli:

$$R_x = N_x - \frac{r-1}{r} S_x = N_x - \frac{i}{1+i} S_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Np. $R_{30} = N_{30} - \frac{0{,}04}{1{,}04} S_{30} = 509677{,}65 - \frac{4}{104} . 7337079{,}7$

$= 509677{,}65 - 282195{,}37 = 227482{,}28.$

6. **Reguła zasadnicza.** W teoryi ubezpieczeń życiowych wszystkie wzory mogą być wyprowadzone dwojakim sposobem: albo zapomocą liczb osób żyjących i zmarłych, zamieszczonych w tablicy śmiertelności, lub też zapomocą prawdopodobieństw śmierci i przeżycia danego czasu. Pierwszy sposób był użyty w książce „Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych" (Warszawa, 1896), obecnie więc zastosujemy sposób drugi.

Gdy osoba ubezpieczona zawarła umowę z odpowiednią instytucyą, na mocy której w razie swej śmierci lub dożycia pewnego terminu ma prawo otrzymać lub otrzymywać od instytucyi jakieś kwoty pieniężne, to, oczywiście, prawo takie posiada pewną wartość aktualną, która, o ile śmierć lub dożycie terminu uważać będziemy za zdarzenie przypadkowe, mierzy się wartością średnią*) praw osoby ubezpieczonej, czyli jej nadzieją matematyczną (Rozdział III-ci, art. 24 i 32). Skoro tak jest, tedy osoba ubezpieczona, w zamian za swoje prawa, powinna jednorazowo lub peryodycznie zapłacić coś instytucyi, t. j. instytucya, w stosunku do osoby ubezpieczonej, posiada

---

*) Dwie powyższe nazwy, oraz używane jeszcze „wartość matematyczna" i „oczekiwanie matematyczne" są synonimami tego samego pojęcia. Nazwy takiej lub innej używać będziemy w dalszym ciągu zależnie od tego, która z nich lepiej odpowiadać będzie użytemu sposobowi wysłowienia się.

również pewne prawa, które, tak samo jak prawa osoby ubezpieczonej, posiadają swoją wartość aktualną, wyrażającą się także przez wartość średnią praw instytucyi, czyli przez jej nadzieję matematyczną.

Otóż, ponieważ każda tranzakcya prawidłowa polega na wzajemnej wymianie dóbr równowartych, przeto obie powyższe wartości powinny być sobie równe i ten właśnie warunek stanowi podstawę wszelkich obliczeń ubezpieczeniowych. Innemi słowy, przy wszelkich obliczeniach ubezpieczeniowych obowiązuje reguła, aby wartość matematyczna praw osoby ubezpieczonej była równa wartości matematycznej praw instytucyi ubezpieczającej; albo inaczej, aby nadzieja matematyczna osoby ubezpieczonej była równa nadziei matematycznej instytucyi ubezpieczającej (w stosunku do osoby pomienionej).

Reguła powyższa stanowi tę samą zasadę, jaką poznaliśmy już w grach losowych (równoważnych). Ale na tej wspólnej zasadzie kończy się też całe podobieństwo gier losowych do ubezpieczeń wogóle, wszczególności zaś do ubezpieczeń życiowych, strona bowiem etyczna i celowa obu tych urządzeń wykazuje tak wielkie różnice, że każdy bez żadnych trudności dostrzedz je może i uznać musi.

I tak, w grze losowej można wygrać albo przegrać, w rzadkich tylko przypadkach nic nie wygrać i nic nie przegrać; w ubezpieczeniach życiowych zawsze ubezpieczony dochodzi do wytkniętego sobie celu — o ile, naturalnie, sam spełnia swoje zobowiązania. Następnie, ostatecznym celem gry losowej jest zgranie, względnie zrujnowanie partnerów, podczas gdy celem ubezpieczeń jest zaspokojenie „przypadkowych potrzeb majątkowych“, więc nie ruina, lecz przeciwnie — podtrzymanie dobrobytu uczestników, albo ich rodzin. Wreszcie następstwem gier losowych jest szkoda, następstwem ubezpieczeń wielostronna korzyść społeczna.

Trudno wyobrazić sobie sprzeczność większą od zachodzącej między temi dwoma urządzeniami. Wspólność „narzędzia“ niczego nie dowodzi — wszakże ten sam nóż równie dobrze posłużyć może zbrodniarzowi do spełnienia morderstwa, jak chirurgowi do uratowania życia ludzkiego. Nie narzędzie, lecz cel i sposób dążenia do tego celu decydują o charakterze urządzeń.

7. **Premie.** Opłaty, wnoszone przez osobę ubezpieczoną do odpowiedniej instytucyi w celu zabezpieczenia sobie przypadkowych potrzeb majątkowych, zowią się, jak już wiemy, premiami. Premie mogą być jednorazowe lub peryodyczne. Premie jednorazowe wnoszą się raz tylko jeden za cały czas trwania ubezpieczeń; premie

peryodyczne wnoszą się co czas pewien, najczęściej r o c z n i e z g ó r y. Na żądanie ubezpieczonego, w celu ułatwienia mu opłat, instytucye rozkładają premie roczne na drobniejsze: na półroczne, kwartalne lub miesięczne.

Rozkład premij rocznych na drobniejsze może być przeprowadzony w ten sposób, aby uczestnik, po zajściu zdarzenia decydującego pokrycie z góry przewidzianych potrzeb majątkowych, nie potrzebował dopłacać żadnych należności, choćby ostatnia premia nie była za cały rok wniesiona. Zazwyczaj jednak instytucye urządzają się inaczej — przyjmują mianowicie za zasadę, że premia roczna, w każdym razie, wniesioną być powinna w całości z góry; jeżeli zaś wypłata instytucyi następuje przed wniesieniem premii całorocznej, niedobór potrąca się z wypłaty pomienionej. Rozkład tedy premii rocznej na raty uważa się tu za rodzaj kredytu, udzielonego uczestnikowi przez instytucyę, za co ubezpieczony winien jest płacić odpowiedni procent, który się oblicza według wzorów (16), względnie (16′), podanych w Rozdziale I-ym (art. 10).

Gdyby np. ubezpieczony miał płacić rocznie po 120 rub. i życzył sobie wnosić tę premię w ratach kwartalnych, za co godzi się uiszczać $6^0/_0$ w stosunku rocznym z dołu, to ponieważ na podstawie wzmiankowanego wyżej wzoru (16):

$$s_4'\% = \frac{4-1}{2 \times 4} . 6 = 2{,}25\%,$$

kwartalnie wnosić powinien po rub. 30,675, gdyż:

$$\frac{120 \times 1{,}0225}{4} = 30{,}675.$$

Premie bywają n e t t o i b r u t t o (taryfowe).

Premie netto obliczają się według zasad matematycznych i służą jedynie do pokrywania zobowiązań instytucyi względem osób ubezpieczonych według umowy — tak, że, gdyby tablica śmiertelności i procent techniczny, na podstawie których rachunek został przeprowadzony, urzeczywistniły się, wniesione przez ubezpieczonych premie netto wystarczyłyby ściśle na pokrycie zobowiązań instytucyi; nicby jednak z nich nie pozostało na inne potrzeby. Tymczasem instytucye są wystawione na różne inne wydatki (lokal, obsługa, druki, opłata agentów, ryzyko, polegające na wątpliwości czy śmiertelność okaże się taką, jaką wskazuje użyta do obliczeń tablica, i t. p.), na które potrzebują pieniędzy, jakich im premie netto w zasadzie nie dostarczają. Dlatego do premij netto dolicza się pewien procent, zwany d o d a t k i e m n a administracyę, i stąd powstają t. zw. premie brutto, pomieszczane w taryfach towarzystw ubezpieczeniowych.

Dodatek taki, pomimo robionych prób, matematycznie nie daje się obliczyć, zależy bowiem od wielu okoliczności, nie dających się ująć w formy matematyczne. Bierze się więc taki, na jaki pozwala konkurencya, następnie zaś, o ile okaże się zysk, ten dzieli się w towarzystwach akcyjnych pomiędzy akcyonaryuszów, w towarzystwach wzajemnych pomiędzy ubezpieczonych. Na przypadek ewentualnych strat, z zysków lat innych wydziela się część pewna na t. zw. kapitał zapasowy, z którego pokrywają się straty lat niepomyślnych.

Dokument, wydany przez instytucyę na dowód, że umowa ubezpieczeniowa została zawarta, zowie się polisą.

8. Trzy główne typy ubezpieczeń życiowych. Trzy są główne typy ubezpieczeń życiowych, z których powstają wszystkie inne t. zw. kombinacye ubezpieczeniowe, czyli rodzaje ubezpieczeń: 1) ubezpieczenie rent, 2) ubezpieczenie kapitałów na dożycie i 3) ubezpieczenie kapitałów na przypadek śmierci.

1) Z Rozdz. I-go (art. 33) przypomina sobie czytelnik, czem jest renta pewna; jest to pewna kwota pieniędzy, wypłacana peryodycznie przez czas z góry ściśle określony, bez względu na to, czy rentyer przez cały ten czas żyć będzie, czy wcześniej umrze. Owóż, jeżeli renta przestaje się wypłacać z chwilą śmierci rentyera, wtedy staje się rentą życiową i, jako zależna od życia danej osoby, stanowi przedmiot ubezpieczeń życiowych.

2) Jeżeli kapitał wypłaca się w takim tylko razie, gdy osoba dożyje terminu z góry oznaczonego, wówczas umowa taka zowie się ubezpieczeniem kapitału na dożycie (danego terminu). Wreszcie

3) Gdy kapitał wypłaca się sukcesorom po śmierci osoby ubezpieczonej, tranzakcya nosi miano ubezpieczenia kapitału na przypadek śmierci.

Określenia powyższe wyjaśniają nam trafność definicyi, podanej w art. 1-ym Rozdziału niniejszego. Dotąd ubezpieczenia definiowano najczęściej jako pokrywanie szkód, wynikłych z powodu zajścia zdarzenia przypadkowego. Definicya taka może być stosowana do tego rodzaju ubezpieczeń, jak ogniowe, od gradobicia i t. p., lecz do ubezpieczeń życiowych stosować się nie może, chociaż te stanowią najdoskonalszy typ ubezpieczeń. Czyż bowiem wypłatę np. renty lub kapitału ubezpieczonego na dożycie można uważać za odszkodowanie? Żadną miarą, bo przecież w obu razach żadna szkoda ubezpieczonego nie dotyka; przeciwnie, fakt dożycia pewnego terminu, warunkujący zarówno wypłatę renty jak i kapitału ubezpieczonego na dożycie, jest raczej zdarzeniem pomyślnem, nie zaś szkodliwem dla ubezpieczonego, a jednak ten ostatni otrzymuje pewną sumę pieniędzy. Natomiast fakt dożycia jakiegoś terminu pociąga za sobą pewne potrzeby majątkowe, np. potrzebę posiadania środków na dalsze utrzymanie rentyera; fakt śmierci niezamożnego ojca pociąga za sobą potrzebę istnienia środków na utrzymanie osieroconej rodziny.

Jeżeli zauważymy dalej, że i odszkodowania strat poniesionych skutkiem pogorzeli, lub innych nieszczęśliwych wypadków, mogą być również nazwane zaspokojeniem potrzeb, powstałych wskutek owych wypadków (np. potrzebę odbudowania domu spalonego), to przyznać musimy, iż podana w art. 1-ym definicya, jako obejmująca wszystkie rodzaje ubezpieczeń, jest rzeczywiście ogólniejsza i lepiej maluje istotę rzeczy; jest przytem bardzo treściwa, co dla każdej definicyi stanowi zaletę bardzo pożądaną.

Określenie trzech zasadniczych kombinacyj ubezpieczeniowych nastręcza nam bardzo ważną uwagę.

Jak z pomienionych określeń wynika, ubezpieczenia kapitałów na przypadek śmierci mają wprost przeciwne znaczenie w stosunku do ubezpieczeń rent i kapitałów na dożycia, pierwsze bowiem powodują wypłaty, gdy ubezpieczony umiera, drugie i trzecie, naodwrót, gdy ubezpieczony żyje; to więc, co jest korzystne dla instytucyi w ubezpieczeniach pośmiertnych (życie), stanowi stratę instytucyi w ubezpieczeniach rent i kapitałów na dożycie i naodwrót.

Wynika stąd, że aby zabezpieczyć się przed stratami natychmiastowemi, instytucya do ubezpieczeń na przypadek śmierci może przyjmować tylko osoby zdrowe, które temsamem mają pewne widoki dłuższego życia, co dla instytucyi w ubezpieczeniach rent i kapitałów jest rzeczą, co najmniej, obojętną, przedwczesna bowiem śmierć w obu ostatnich kombinacyach przynosi jej raczej korzyść niż stratę. Dlatego właśnie kandydatów do ubezpieczeń na przypadek śmierci przyjmuje się przeważnie na podstawie badania lekarskiego, wykazującego czy kandydat (klient) jest dostatecznie zdrowy, podczas gdy kandydaci do ubezpieczenia rent lub kapitałów na dożycie badaniu lekarskiemu się nie poddają.

Następnie, tablica śmiertelności wykazująca dużą śmiertelność jest, oczywiście, korzystniejsza dla instytucyi w ubezpieczeniach na przypadek śmierci, daje bowiem premie wyższe, zaś mniej korzystna dla rent i ubezpieczeń kapitałów na dożycie. Z tych powodów instytucye oględne używają innej tablicy (wykazującej większą śmiertelność) dla ubezpieczeń pośmiertnych, innej zaś (wykazującej śmiertelność mniejszą) dla ubezpieczeń rent i kapitałów na dożycie, czego, ze względu na bezpieczeństwo instytucyi, ganić im nie można.

Mimo to, ponieważ nam nie chodzi o praktykę, lecz o teoryę, do przykładów używać będziemy jednej tylko tablicy MI, aby bezpotrzebnie nie zwiększać liczby podanych przy końcu książki tablic.

I jeszcze jedna uwaga. Z powodu sprzeczności, zachodzących pomiędzy kombinacyami ubezpieczeniowemi, o jakich mówiliśmy wyżej, uprawianie przez daną instytucyę jednych i drugich stanowi rodzaj zabezpieczenia się przed skutkami nadzwyczajnej śmiertelności, spowodowanej np. przez epidemie; każda bowiem epidemia zwiększa śmiertelność tak dobrze pomiędzy osobami ubezpieczonemi na przypadek śmierci jak i na przypadek dożycia, zwiększa tedy straty w jednego rodzaju ubezpieczeniach, a zyski w rodzaju drugim, czyli prowadzi, naturalnie nie ściśle, lecz w pewnym stopniu, do zrównoważenia się strat z zyskami i chroni tym sposobem instytucyę oraz wszystkich ubezpieczonych od ewentualnej klęski.

Po tych ogólnych wskazówkach i objaśnieniach, przechodzimy do poszczególnego rozpatrzenia każdego rodzaju ubezpieczeń i wyprowadzenia wzorów na premie netto zarówno jednorazowe jak i roczne. Ograniczymy się jednak tylko do przypadków najprostszych, Rozdział bowiem niniejszy nie ma stanowić podręcznika ubezpieczeń życiowych, lecz część integralną Arytmetyki politycznej, chodzi więc nie o wyczerpanie przedmiotu, lecz o danie ogólnego o rzeczy pojęcia i o same tylko zasady, na jakich rachunek oprzeć należy. Ktoby chciał bliżej z przedmiotem się zapoznać, ten, na podstawie powziętych z tego Rozdziału wiadomości, może już łatwo braki uzupełnić z tego lub innego podręcznika, specyalnie ubezpieczeniom życiowym poświęconego.

Wzory na premie stale wyprowadzać będziemy dla jednostki zarówno renty rocznej jak i kapitału; oszczędzi nam to używania specyalnych symboli na wysokość rent i kapitałów, rezultat zaś będzie równie ogólny. By od premii za 1-kę renty lub kapitału przejść do premii za dowolnej wysokości rentę lub kapitał, wystarczy pierwszą pomnożyć przez właściwą wysokość renty albo kapitału.

A. Ubezpieczenie rent.

9. Rodzaje i oznaczenia rent. Renty życiowe mogą być płacone albo do śmierci, bez względu na to kiedy śmierć nastąpi, albo też przez czas ograniczony, ewentualnie do śmierci, jeżeli ta przed upływem wyznaczonego terminu nastąpi. Renty pierwszego rodzaju zowią się dożywotniemi, renty drugiego rodzaju — czasowemi.

Następnie, renty mogą być płacone rocznie *z góry*, t. j. za rok następny, lub *z dołu* czyli za rok ubiegły. Pierwsze bywają czasami nazywane, z cudzoziemska, *praenumerando*, drugie — *postnumerando*.

Wreszcie wypłata może się rozpoczynać albo zaraz po zawarciu umowy, albo też dopiero po upływie pewnego czasu, o ile wtedy osoba ubezpieczona pozostaje przy życiu. Są to t. zw. renty *natychmiastowe* i renty *odroczone*.

Ze skombinowania powyższych przypadków powstaje cały szereg rent różnego rodzaju: *natychmiastowe dożywotnie* lub *czasowe*, *odroczone dożywotnie* lub *czasowe*, te i tamte płatne z góry (praenumerando) lub *z dołu* (postnumerando). Wreszcie renty mogą być wypłacane rocznie, półrocznie, kwartalnie i miesięcznie, również z dołu lub z góry.

Według systemu uniwersalnego znakowania, wartość jednostki renty rocznej, płatnej rocznie z góry, oznacza się przez a (małe—od wyrazu „annuity“ — dochód roczny, spłata roczna); płatnej z dołu przez a. Wiek rentyera określa się znakiem, napisanym po stronie prawej głoski a lub a nieco niżej. Np. a_x oznacza wartość jednostki renty rocznej płatnej z góry, mającej się pobierać przez osobę x letnią.

Rentę czasową, płatną przez n lat, określa się (według zasady wzmiankowanej już w Rozdziale V-ym, art. 26) przez $|n$, napisane po stronie lewej głoski a lub a nieco niżej; np. ${}_{|n}\mathrm{a}_x$ wyobraża wartość jednostki renty, płatnej natychmiast z góry przez n lat lub do czasu wcześniejszej śmierci osoby x letniej*).

Naodwrót znaczek $n|$, napisany również po stronie lewej nieco niżej, symbolizuje rentę odroczoną dożywotnią, której wypłata rozpoczyna się dopiero po upływie n lat i trwa do śmierci, np. ${}_{n|}\mathrm{a}_x$ lub ${}_{n|}a_x$. Stąd bezpośrednio wynika, że symbole ${}_{n|t}\mathrm{a}_x$ i ${}_{n|t}a_x$ reprezentują rentę odroczoną na n lat i płatną następnie czasowo przez lat t z góry lub z dołu.

Jeżeli po stronie lewej głoski a lub a niema żadnego znaczka, wskazuje to, że renta jest natychmiastowa i dożywotnia.

Ponieważ renta natychmiastowa, płatna z dołu, jest po prostu odroczoną na rok jeden i płatną z góry, przeto można napisać $a_x = {}_{1|}\mathrm{a}_x$; z takiego samego powodu można napisać ${}_{n|}a_x = {}_{n+1}\mathrm{a}_x$, i t. d.

Jeżeli po stronie prawej głoski a lub a nieco wyżej znajduje się (m), wyobraża to wartość jednostki renty rocznej, płaconej m razy

---

*) Czasami oznacza się to samo symbolem $\mathrm{a}_{x,\overline{n}|}$.

w ciągu roku po $\frac{1}{m}$ jednostki. Np. ${}_{n|t}a_x^{(m)}$ przedstawia wartość jednostki renty rocznej, ubezpieczonej osobie x letniej, płatnej z góry po upływie n lat przez lat t w ratach co m-ta część roku po $\frac{1}{m}$.

Wiedząc to, przejdźmy do wzorów na premie.

10. Renty dożywotnie natychmiastowe. Obliczmy najprzód wartość jednostki renty, mającej się płacić, osobie x letniej, natychmiast dożywotnio z góry w ratach rocznych.

Pierwszą jednostkę renty płacimy zaraz po zawarciu umowy, obecna więc wartość tej pierwszej wypłaty równa się 1. Drugą jednostkę wypłacimy dopiero po roku o tyle, o ile rentyer wówczas żyć będzie, a ponieważ po roku żyć on będzie z prawdopodobieństwem $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$, przeto wartość matematyczna drugiej wypłaty równa się $1 . \frac{l_{x+1}}{l_x}$ po roku, w chwili zaś zawierania umowy wynosi $\frac{l_{x+1}}{l_x} . v = \frac{l_{x+1}\ v}{l_x}$. W taki sposób rozumując dalej, przekonamy się, że obecna wartość trzeciej wypłaty równa się $\frac{l_{x+2} . v^2}{l_x}$, czwartej $\frac{l_{x+3} . v^3}{l_x}$ i t. d. do końca tablicy śmiertelności.

Mamy więc:

$$a_x = 1 + \frac{l_{x+1}\, v}{l_x} + \frac{l_{x+2}\, v^2}{l_x} + \frac{l_{x+3}\, v^3}{l_x} + \dots$$

$$\dots = \frac{l_x + l_{x+1} v + l_{x+2} v^2 + l_{x+3} v^3 + \dots}{l_x},$$

albo, mnożąc licznik i mianownik przez v^x,

$$a_x = \frac{l_x v^x + l_{x+1} v^{x+1} + l_{x+2} v^{x+2} + \dots}{l_x v^x}.$$

W liczniku i mianowniku ostatniego wyrażenia mieszczą się zdyskontowane liczby osób żyjących, jest zatem:

$$a_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots}{D_x},$$

czyli ostatecznie:

$$a_x = \frac{N_x}{D_x} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (10),$$

t. j. wyrażamy wartość renty przez liczby, znajdujące się w tablicy pomocniczej IX.

Wartość ta stanowi właśnie **jednorazową premię netto** za ubezpieczenie jednostki renty dożywotnej, płatnej z góry osobie x letniej (w chwili zawierania umowy).

Np. $$\mathrm{a}_{35} = \frac{N_{35}}{D_{35}} = \frac{378092{,}68}{22751{,}14} = 16{,}618626.$$

Za ubezpieczenie 1000 rub. renty rocznej musielibyśmy zapłacić netto:

$$16{,}618626 \times 1000 = 16618{,}63.$$

Wartości jednostek rent, płatnych dożywotnie rocznie z góry, mamy gotowe w Tabl. IX-ej (kol. 10) dla każdego wieku.

Renta płacona rocznie z dołu jest mniejsza od płaconej z góry tylko o jednostkę, zapłaconą zaraz po zawarciu umowy, t. j.:

$$a_x = \mathrm{a}_x - 1 = \frac{N_x}{D_x} - 1 = \frac{N_x - D_x}{D_x},$$

ponieważ zaś $N_x - D_x = N_{x+1}$, przeto:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Np. $$a_{35} = \frac{N_{36}}{D_{35}} = \frac{355341{,}54}{22751{,}14} = 15{,}618626 = 16{,}618626 - 1.$$

Za 100 rubli renty rocznej, płatnej dożywotnie z dołu, premia jednorazowa netto wynosi $15{,}618626 \times 100 = 1561{,}86$, a po dodaniu np. 6% na administracyę, otrzymujemy premię brutto:

$$1561{,}86 \times 1{,}06 = 1655{,}57.$$

Gdy podobne obliczenie przeprowadzimy dla każdego wieku, sformujemy t. zw. **taryfę premij** dla rent natychmiastowych dożywotnich, płatnych rocznie z dołu.

11. Renty czasowe i odroczone. Skoro renta czasowa płaci się przez ograniczoną liczbę n lat, ewentualnie do chwili wcześniejszej śmierci rentyera, tedy sumowania wyrażeń równych: 1, $\frac{l_{x+1} v}{l_x}$, $\frac{l_{x+2} v^2}{l_x}$, i t. d. nie należy prowadzić do końca tablicy śmiertelności, lecz tylko przez lat n, t. j.:

$$_{|n}\mathrm{a}_x = 1 + \frac{l_{x+1} v}{l_x} + \frac{l_{x+2} v^2}{l_x} + \ldots + \frac{l_{x+n-1} v^{n-1}}{l_x}$$

$$= \frac{l_x + l_{x+1} v + l_{x+2} v^2 + \ldots + l_{x+n-1} v^{n-1}}{l_x} = \frac{l_x v^x + l_{x+1} v^{x+1} + \ldots + l_{x+n-1} v^{x+n-1}}{l_x v^x}$$

$$= \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x}.$$

Lecz:

$$D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1} = (D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots$$
$$\ldots + D_{x+n-1} + D_{x+n} + \ldots \text{ do końca tablicy}) - (D_{x+n} + D_{x+n+1}$$
$$+ D_{x+n+2} + \ldots \text{ do końca tablicy})$$
$$= N_x - N_{x+n}.$$

Wypada zatem:

$$_{n|}a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Np.

$$_{15|}a_{35} = \frac{N_{35} - N_{50}}{D_{35}} = \frac{378092{,}68 - 132778{,}06}{22751{,}14} = \frac{245314{,}62}{22751{,}14} = 10{,}782520.$$

Gdyby renta czasowa miała być płacona z dołu przez lat n, byłoby:

$$_{n|}a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n}}{D_x},$$

czyli:

$$_{n|}a_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12').$$

Np. wartością jednostki renty czasowej, płatnej osobie 17-to letniej (w chwili zawierania umowy) z dołu przez lat 25, jest:

$$_{25|}a_{17} = \frac{N_{18} - N_{43}}{D_{17}} = \frac{982464{,}62 - 223999{,}66}{52419{,}51} = \frac{758464{,}96}{52419{,}51}$$
$$= 14{,}469135 \text{ netto za 1-kę renty,}$$

$$14{,}469135 \times 1000 = 14469{,}14 \text{ netto za 1000 rubli renty rocznej.}$$

Wartość 1000 rub. renty pewnej, płaconej również z dołu przez lat 25, przy uwzględnieniu tej samej stopy procentowej (4%), wynosi (Rozdz. I-y, art. 33), bez względu na wiek rentyera, rub. 15622,08, czyli jest większa od wartości renty życiowej; tak być powinno, ponieważ renta pewna płaci się zawsze na pewno przez lat 25, podczas gdy życiowa przestaje się płacić w razie ewentualnie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej. Różnica:

$$15622{,}08 - 14469{,}14 = 1152{,}94$$

jest nawet stosunkowo niewielka, ale i wiek rentyera, w chwili zawierania umowy, jest nizki; gdy wiek się podnosi, wartość renty życiowej maleje, podczas gdy wartość renty pewnej nie ulega zmianie.

Wartość renty natychmiastowej jest widocznie sumą wartości renty płatnej czasowo przez lat n i wartości renty odroczonej na lat n, t. j.

$$a_x = {}_{|n}a_x + {}_{n|}a_x .$$

Stąd na wartość renty odroczonej na lat n wypada:

$$_{n|}a_x = a_x - {}_n a_x = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x},$$

czyli, po zredukowaniu:

$$_{n|}a_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

co zresztą bardzo łatwo otrzymać też można drogą bezpośredniego rozumowania.

Albowiem w danym przypadku wartość renty równa się:

$$\frac{l_{x+n}v^n + l_{x+n+1}v^{n+1} + l_{x+n+2}v^{n+2} + \ldots \text{ do końca tablicy}}{l_x},$$

t. j.

$$_{n|}a_x = \frac{l_{x+n}v^{x+n} + l_{x+n+1}v^{x+n+1} + \ldots}{l_x v^x} = \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots}{D_x},$$

czyli, jak wyżej:

$$_{n|}a_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}.$$

Np.
$$_{15|}a_{35} = \frac{N_{35+15}}{D_{35}} = \frac{N_{50}}{D_{35}} = \frac{132778{,}06}{22751{,}14}$$

$$= 5{,}836106 = 16{,}618626 - 10{,}782520.$$

Co się wreszcie tyczy renty odroczonej na lat n i płatnej czasowo przez lat t, to miejmy na uwadze, że jest ona różnicą pomiędzy rentą czasową, płatną przez lat $n + t$, i płatną czasowo przez lat n, t. j.:

$$_{n|t}a_x = {}_{|n+t}a_x - {}_{|n}a_x = \frac{N_x - N_{x+n+t}}{D_x} - \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x},$$

skąd:

$$_{n|t}a_x = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x} = {}_{n|}a_x - {}_{n+t|}a_x \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

t. j., wartość renty odroczonej na lat n i płatnej czasowo przez lat t jest zarazem różnicą pomiędzy wartością renty odroczonej na lat n i na lat $n + t$, jak rzeczywiście być powinno.

Np.

$$ {}_{10|12}a_{35} = \frac{N_{35+10} - N_{35+10+12}}{D_{35}} = \frac{N_{45} - N_{57}}{D_{35}} = \frac{194329,44 - 71750,275}{22751,14} $$

$$ = \frac{122579,165}{22751,14} = 5,387825. $$

Zresztą wzór (14) można, podobnie jak wzór (13), wyprowadzić bezpośrednio.

12. Renty płatne w ratach częstszych niż roczne. Dotąd przyjmowaliśmy, że renty wypłacają się rocznie — z góry albo z dołu, lecz rocznie. Ażeby obrachować wartość renty płatnej m razy na rok po $\frac{1}{m}$ jednostki, uciec się musimy do znanej nam już hypotezy, że śmiertelność rozkłada się jednostajnie na cały rok, t. j. że w ciągu każdej m-tej części roku umiera m-ta część wszystkich zmarłych w ciągu roku. Jest to założenie nieścisłe (acz dosyć do prawdy zbliżone), skutkiem czego i rezultat będzie tylko przybliżony, nietylko z powodu powyższej hypotezy, ale i z innych przyczyn, które się okażą w trakcie dalszego rozumowania.

Chodzi o wyznaczenie wartości jednostki renty rocznej dożywotniej, płatnej osobie x letniej z dołu po $\frac{1}{m}$ co m-ta część roku.

W tym celu dajmy, iż w ten sposób ubezpieczamy l_x osób x letnich, wykazanych, jako żyjące, w tablicy śmiertelności.

Skoro w ciągu roku umiera d_x osób z pośród l_x żyjących na początku roku, przeto, według naszej hypotezy, w ciągu każdej m-tej części roku umiera:

w pierwszym roku po $\frac{d_x}{m} = \frac{l_x - l_{x+1}}{m}$ osób,

„ drugim „ „ $\frac{d_{x+1}}{m} = \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{m}$ „ ,

„ trzecim „ „ $\frac{d_{x+2}}{m} = \frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{m}$ „ ,

i t. d. do końca tablicy śmiertelności.

Zobaczmy teraz, jakie sumy instytucya wypłacać będzie w ten sposób w pierwszym roku.

Na początku roku, oczywiście, nic nie wypłaci, ponieważ zaś w ciągu pierwszej m-tej części roku umiera osób $\frac{l_x - l_{x+1}}{m}$, zatem:

przy końcu pierwszej m-tej części roku pozostaje przy życiu osób:

$$ l_x - \frac{l_x - l_{x+1}}{m} = \frac{(m-1)\, l_x + l_{x+1}}{m}, $$

przy końcu drugiej m-tej części roku pozostaje przy życiu osób:

$$l_x - \frac{2(l_x - l_{x+1})}{m} = \frac{(m-2)\,l_x + 2\,l_{x+1}}{m},$$

przy końcu trzeciej m-tej części roku pozostaje przy życiu osób:

$$l_x - \frac{3(l_x - l_{x+1})}{m} = \frac{(m-3)\,l_x + 3\,l_{x+1}}{m},$$

i t. d. . . . .

przy końcu $\overline{m-1}$-ej części roku pozostaje przy życiu osób:

$$l_x - \frac{\overline{m-1}\,(l_x - l_{x+1})}{m} = \frac{1 . l_x + \overline{m-1}\, l_{x+1}}{m},$$

przy końcu m-tej części roku:

$$l_x - \frac{m\,(l_x - l_{x+1})}{m} = \frac{0 . l_x + m\, l_{x+1}}{m}.$$

Wszystkim tym, pozostającym przy życiu, osobom płacimy za każdym razem po $\frac{1}{m}$ jednostki monetarnej, o ile zatem powyżej przewidywane przez nas liczby osób żyjących się sprawdzą, w ciągu roku pierwszego wypłacimy:

$$\frac{1}{m} . \frac{(m-1)\,l_x + l_{x+1}}{m} + \frac{1}{m} . \frac{(m-2)\,l_x + 2\,l_{x+1}}{m} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{m} . \frac{1 . l_x + (m-1)\,l_{x+1}}{m} + \frac{1}{m} . \frac{0 . l_x + m\,l_{x+1}}{m}$$

$$= \frac{1}{m^2} . \{(\overline{m-1} + \overline{m-2} + \ldots + 1 + 0)\,l_x + (1 + 2 + 3 + \ldots + \overline{m-1} + m)\,l_{x+1}\}$$

$$= \frac{1}{m^2} . \left\{\frac{m(m-1)}{2}\,l_x + \frac{m(m+1)}{2}\,l_{x+1}\right\} = \frac{1}{2m}\{(m-1)l_x + (m+1)\,l_{x+1}\}.$$

Załóżmy teraz, że te wszystkie sumy wypłacamy nie co m-ta część roku, lecz razem przy końcu roku (drugi powód nieścisłości); w takim razie wartością, w chwili zawierania umowy, sum:

wypłaconych w pierwszym roku jest $\frac{v}{2m}\{(m-1)\,l_x + (m+1)\,l_{x+1}\}$,

„ „ drugim „ „ $\frac{v^2}{2m}\{(m-1)\,l_{x+1} + (m+1)\,l_{x+2}\}$,

„ „ trzecim „ „ $\frac{v^3}{2m}\{(m-1)\,l_{x+2} + (m+1)\,l_{x+3}\}$,

i t. d. do końca tablicy śmiertelności.

Gdy szukaną wartość matematyczną takiej renty, czyli należną za nią premię jednorazową netto, oznaczymy przez $\overset{(m)}{a_x}$, to każda osoba w wieku lat x zapłacić powinna $\overset{(m)}{a_x}$, zaś l_x osób zapłacić powinny:

$$\begin{aligned}\overset{(m)}{a_x}.l_x = & \frac{m-1}{2m} l_x \ .v + \frac{m+1}{2m} l_{x+1}.v \\ & + \frac{m-1}{2m} l_{x+1}.v^2 + \frac{m+1}{2m} l_{x+2}.v^2 \\ & + \frac{m-1}{2m} l_{x+2}.v^3 + \frac{m+1}{2m} l_{x+3}.v^3 \\ & + \text{i t. d.} \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Po zsumowaniu strony prawej otrzymujemy:

$$l_x.\overset{(m)}{a_x} = \frac{m-1}{2m}.v(l_x + l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \ldots) + \frac{m+1}{2m}(l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \ldots).$$

Czynnik dyskontujący v jest blizki jedności; jeżeli zatem wyrzucony za nawias, w pierwszem wyrażeniu po stronie prawej, czynnik v, przyjmiemy za jedność (trzeci powód nieścisłości) i obie strony podzielimy przez l_x, wypadnie:

$$\begin{aligned}\overset{(m)}{a_x} = & \frac{m-1}{2m}\left(\frac{l_x + l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \ldots}{l_x}\right) \\ & + \frac{m+1}{2m}\left(\frac{l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \ldots}{l_x}\right),\end{aligned}$$

albo, po pomnożeniu liczników i mianowników przez v^x,

$$\begin{aligned}\overset{(m)}{a_x} = & \frac{m-1}{2m}.\frac{N_x}{D_x} + \frac{m+1}{2m}.\frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{m-1}{2m}.\frac{N_x}{D_x} \\ & + \frac{m+1}{2m}.\frac{N_x - D_x}{D_x} = \left(\frac{m-1}{2m} + \frac{m+1}{2m}\right).\frac{N_x}{D_x} - \frac{m+1}{2m} \\ & = \frac{N_x}{D_x} - \frac{m+1}{2m}.\end{aligned}$$

Inaczej:

$$\overset{(m)}{a_x} = \mathfrak{a}_x - \frac{m+1}{2m} \ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Że zaś $\mathfrak{a}_x = a_x + 1$, jest przeto:

$$a_x^{(m)} = a_x + 1 - \frac{m+1}{2m} = a_x + \frac{2m - m - 1}{2m},$$

czyli:

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Z dodania (15) do (16) i podzielenia obu stron przez 2, otrzymujemy:

$$a_x^{(m)} = \frac{a_x + a_x}{2} - \frac{1}{2m} \quad \ldots\ldots \quad (17).$$

Aby otrzymać wyrażenia na rentę płatną z góry po $\frac{1}{m}$ co m-ta część roku, wystarczy do powyższych wyrażeń dodać po $\frac{1}{m}$ jednostki, co czyniąc, znajdujemy:

$$a_x^{(m)} = a_x - \frac{m-1}{2m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18),$$

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m+1}{2m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19),$$

$$a_x^{(m)} = \frac{a_x + a_x}{2} + \frac{1}{2m} \quad \ldots\ldots \quad (20).$$

13. Ciąg dalszy art. 12-go. Z tych, wprawdzie przybliżonych tylko, lecz wystarczających dla praktyki wyrażeń okazuje się, że zmiany, jakie zachodzą w wartościach rent, płaconych ratami rocznemi, przy przejściu do rent, płaconych ratami mniejszemi od rocznych, nie zależą wcale od wieku, tylko od liczby rat w roku.

Tak np.:

przy ratach półrocznych ($m=2$): $\frac{m-1}{2m} = 0{,}25$; $\frac{m+1}{2m} = 0{,}75$

„ „ kwartalnych ($m=4$): $\frac{m-1}{2m} = 0{,}375$; $\frac{m+1}{2m} = 0{,}625$

„ „ miesięcznych ($m=12$): $\frac{m-1}{2m} = 0{,}45833\ldots$; $\frac{m+1}{2m} = 0{,}54166\ldots$

Skutkiem tego:

$$(15') \ldots \left|\begin{array}{lll} a_x^{(2)} = a_x - 0{,}75 & = a_x + 0{,}25 \\ a_x^{(4)} = a_x - 0{,}625 & = a_x + 0{,}375 \\ a_x^{(12)} = a_x - 0{,}54166\ldots & = a_x + 0{,}45833\ldots \end{array}\right| \ldots (16');$$

$$(18') \quad \left| \begin{array}{l} a_x^{(2)} = a_x - 0{,}25 \qquad\quad = a_x + 0{,}75 \\ a_x^{(4)} = a_x - 0{,}375 \qquad = a_x + 0{,}625 \\ a_x^{(12)} = a_x - 0{,}45833... = a_x + 0{,}54166... \end{array} \right| \quad (19').$$

Z przykładów np. podanych w art. 10-ym otrzymujemy:

$$a_{35}^{(2)} = 16{,}618626 - 0{,}75 \;= 15{,}618626 + 0{,}25 \;= 15{,}868626,$$
$$a_{35}^{(4)} = 16{,}618626 - 0{,}375 = 15{,}618626 + 0{,}625 = 16{,}243626.$$

Jeżeli we wzorach (18), (19) pomyślimy m jako rosnące nieograniczenie, wtedy wyrażenia:

$$\frac{m-1}{2m} = \frac{1 - \frac{1}{m}}{2} \text{ i } \frac{m+1}{2m} = \frac{1 + \frac{1}{m}}{2}$$

dążą do wartości równej $\frac{1}{2}$. Gdy jej dosięgną i gdy odpowiednią temu wartość na $a_x^{(m)}$ oznaczymy przez $\bar{a}_x$, z wzorów (18), (19) otrzymamy:

$$\bar{a} = a_x - \frac{1}{2} = a_x + \frac{1}{2} = \frac{a_x + a_x}{2} \quad . \; . \; . \; . \quad (21).$$

Renta taka nazywa się **ciągłą**. Nie może mieć ona, oczywiście, zastosowania praktycznego, ale posiada pewne znaczenie teoretyczne, z którego my jednak korzystać nie będziemy.

14. Renty czasowe i odroczone, płatne ratami częstszemi od rocznych. Na wartość rent odroczonych i czasowych, płatnych ratami częstszemi niż rocznie, wyprowadzimy bezpośrednio tylko wzór na przypadek najogólniejszy — dla renty odroczonej i płatnej czasowo; czyniąc bowiem we wzorze dla przypadku najogólniejszego odpowiednie założenia, łatwo otrzymamy wzory dla wszystkich innych przypadków — dla renty czasowej natychmiastowej i dla odroczonej dożywotniej.

Według wzoru (14) jest ${}_{n|t}a_x = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x}$. Wyrażenie to można przekształcić w sposób następujący:

$$\frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_x} - \frac{N_{x+n+t}}{D_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}}$$

$$- \frac{D_{x+n+t}}{D_x} \cdot \frac{N_{x+n+t}}{D_{x+n+t}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot a_{x+n} - \frac{D_{x+n+t}}{D_x} \cdot a_{x+n+t} \,.$$

Jeżeli raty mają być płacone z góry m razy w ciągu roku po $\frac{1}{m}$, należy za a_{x+n} i a_{x+n+t} podstawić $\overset{(m)}{a}_{x+n}$ i $\overset{(m)}{a}_{x+n+t}$, t. j., według np. wzoru (18) za a_{x+n} oraz a_{x+n+t} należy podstawić $a_{x+n} - \frac{m-1}{2m}$ i $a_{x+n+t} - \frac{m-1}{2m}$. Wtedy otrzymujemy:

$$
{}_{n|t}\overset{(m)}{a}_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}\left(a_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\right) - \frac{D_{x+n+t}}{D_x}\left(a_{x+n+t} - \frac{m-1}{2m}\right)
$$

$$
= \frac{D_{x+n}}{D_x} a_{x+n} - \frac{D_{x+n+t}}{D_x} a_{x+n+t} - \frac{m-1}{2m}\left(\frac{D_{x+n} - D_{x+n+t}}{D_x}\right).
$$

Lecz:

$$
\frac{D_{x+n}}{D_x} a_{x+n} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} = \frac{N_{x+n}}{D_x},
$$

$$
\frac{D_{x+n+t}}{D_x} a_{x+n+t} = \frac{D_{x+n+t}}{D_x} \cdot \frac{N_{x+n+t}}{D_{x+n+t}} = \frac{N_{x+n+t}}{D_x}.
$$

Skutkiem tego:

$$
{}_{n|t}\overset{(m)}{a}_x = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x} - \frac{m-1}{2m}\left(\frac{D_{x+n} - D_{x+n+t}}{D_x}\right),
$$

albo ostatecznie, na podstawie wzoru (14):

$$
{}_{n|t}\overset{(m)}{a}_x = {}_{n|t}a_x - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_{x+n} - D_{x+n+t}}{D_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22),
$$

t. j. od wartości renty odroczonej, płatnej czasowo rocznie, trzeba odjąć podaną we wzorze poprawkę.

Jeżeli w (22) założymy $n = 0$, znaczyć będzie, że renta jest odroczoną na zero lat, czyli jest natychmiastową i czasową przez lat t, wtedy:

$$
{}_{|t}\overset{(m)}{a}_x = {}_{|t}a_x - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_x - D_{x+t}}{D_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha).
$$

Gdyby nam chodziło o rentę natychmiastową, płatną czasowo z dołu co m-ta część roku po $\frac{1}{m}$, należy od (α) odjąć $\frac{1}{m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{D_x}{D_x}$ i dodać $\frac{1}{m} \cdot \frac{D_{x+t}}{D_x}$, co czyniąc, otrzymujemy:

$$
{}_{|t}\overset{(m)}{a}_x = {}_{|t}a_x - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_x - D_{x+t}}{D_x} - \frac{1}{m} \cdot \frac{D_x}{D_x} + \frac{1}{m} \cdot \frac{D_{x+t}}{D_x}
$$

$$
= {}_{|t}a_x - \frac{(m-1)(D_x - D_{x+t}) + 2(D_x - D_{x+t})}{2m\, D_x},
$$

czyli ostatecznie:

$$ {}_{t|}a_x^{(m)} = {}_{t|}a_x - \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{D_x - D_{x+t}}{D_x} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha'). $$

Jeżeli chodzi o rentę odroczoną dożywotnią, płatną co m-ta część roku po $\frac{1}{m}$ z góry, trzeba w (22) założyć, że t sięga do granicy życia ludzkiego; w takim jednak razie staje się $D_{x+n+t} = 0$, skutkiem czego:

$$ {}_{n|}a_x^{(m)} = {}_{n|}a_x - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}. $$

Chcąc np. od obliczonej w art. 11-ym wartości jednostki renty odroczonej płatnej rocznie z góry:

$$ {}_{15|}a_{35} = 5{,}836106 $$

przejść do takiej samej renty lecz płatnej kwartalnie, należy od ${}_{15|}a_{35}$ odjąć:

$$ \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{3}{8} \cdot \frac{D_{50}}{D_{35}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{10378{,}26}{22751{,}14} = 0{,}171062, $$

z czego otrzymamy:

$$ {}_{15|}a_{35}^{(4)} = 5{,}836106 - 0{,}171062 = 5{,}665044. $$

Uczyńmy wreszcie w (22) oba założenia, t. j. że $n = 0$ i że t sięga do granicy życia ludzkiego, wtedy $\frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_{x+n} - D_{x+n+t}}{D_x}$ stanie się równe $\frac{m-1}{2m}$ i wzór (22) przechodzi na:

$$ a_x^{(m)} = a_x - \frac{m-1}{2m}, $$

znany nam już z art. 12-go jako wzór (18) i wyrażający wartość jednostki renty natychmiastowej dożywotniej, płatnej z góry ratami co m-ta część roku po $\frac{1}{m}$ jednostki.

15. Premie peryodyczne. Renty natychmiastowe, zarówno z góry jak i z dołu płatne, mogą być ubezpieczone tylko za premie jednorazowe, skoro bowiem wypłata rent takich rozpoczyna się co najwyżej w rok po zawarciu umowy, to, gdyby osoba ubezpieczona miała wnosić premie przez czas dłuższy, jednocześnie pobierałaby rentę i wnosiła premie, co wprawdzie jest do pomyślenia i da się obrachować, ale w wykonaniu nie miałoby sensu.

Wszakże za renty odroczone, których wypłata rozpoczyna się dopiero po więcej lub mniej długim czasie, premie nie potrzebują być koniecznie od razu w całości zapłacone; uczestnik może je płacić przez czas krótszy lub dłuższy, byle tylko wszystkie należności uiścił przed rozpoczęciem pobierania renty. Znaczy to, że premie mogą być płacone przez lat kilka, kilkanaście lub kilkadziesiąt, zawsze jednak co najwyżej przez czas odroczenia.

Premie peryodyczne w zasadzie zawsze się wnoszą rocznie z góry, chodzi więc nam teraz o sposób obrachowania premij stałych, wnoszonych rocznie z góry, zarówno za renty odroczone dożywotnie jak i za odroczone czasowe.

Do wyprowadzenia wzorów na premie roczne służy ogólna zasada, podana w art. 6-ym, że wartość matematyczna praw osoby ubezpieczonej powinna być równa wartości matematycznej praw instytucyi, czyli, chcąc obrachować premię roczną, trzeba obliczyć wartość praw (nadzieję matematyczną) instytucyi, przyjąwszy wysokość premii rocznej za wiadomą, następnie wartość praw (nadzieję matematyczną) osoby ubezpieczonej, obie te wartości ze sobą zrównać i z tak otrzymanego równania znaleść wysokość premii rocznej.

Dajmy najprzód, że chodzi nam o niewiadomą premię roczną ${}_{\nu}P_x$*), jaką instytucya przez lat $\nu \leqq n$ ma pobierać corocznie z góry za ubezpieczenie osobie x letniej jednostki renty dożywotniej, płatnej rocznie z góry, odroczonej na lat n, t. j. takiej, którą zaczyna się wypłacać po upływie n lat od chwili zawarcia umowy, o ile wtedy osoba ubezpieczona żyć będzie. Jeżeli zaś osoba ubezpieczona umrze przed upływem owych n lat, wszystkie wniesione przez nią premie przechodzą na rzecz instytucyi, albo raczej na rzecz pozostałych przy życiu osób ubezpieczonych (zasada wzajemności).

---

*) W systemie znakowania nniwersalnym. premię roczną, mającą się płacić przez osobę x letnią w ciągu ν lat, oznacza się przez ${}_{\nu}P$ (kreseczki przed ν stawiać nie potrzeba, premie bowiem mogą być tylko albo dożywotnie, albo czasowe), do którego dodać należy, w nawiasie, symbol ubezpieczenia, za jakie premia ma być wnoszona. Więc np. premia roczna, płacona przez ν lat za jednostkę renty odroczonej na lat n i płatnej rocznie z góry dożywotnio, oznacza się przez ${}_{\nu}P\,({}_{n|}\text{ä}_x)$; za jednostkę renty odroczonej na lat n i płatnej czasowo rocznie z góry przez lat t, oznacza się przez ${}_{\nu}P\,({}_{n|t}\text{ä}_x)$ i t. d. — samego ${}_{\nu}P_x$ (z dodaniem do P wieku osoby ubezpieczonej) wolno używać w takich tylko razach, gdy z tego powodu nie może powstać wątpliwość. Otóż, ponieważ przy wyprowadzaniu wzorów zawsze wiemy o jaki rodzaj ubezpieczenia nam chodzi, więc, aby nie nagromadzać wielu znaków obok siebie, co utrudnia czytanie, przy wyprowadzaniu wzorów używać będziemy samych ${}_{\nu}P_x$, a symbole w pełni rozwinięte dawać będziemy dopiero we wzorach już ostatecznie wykończonych.

Obliczmy wynikające z takiej umowy wartości praw zarówno instytucyi jak i osoby ubezpieczonej.

Pierwszą premię roczną ${}_{\nu}P_x$ otrzyma instytucya natychmiast, t. j. zaraz po zawarciu umowy, jej wartość matematyczna równa się zatem jej samej, t. j. ${}_{\nu}P_x$. Drugą premię otrzyma instytucya dopiero za rok, o ile wówczas osoba ubezpieczona żyć będzie; ponieważ zaś żyć będzie z prawdopodobieństwem $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$, więc jej wartość matematyczna równa się ${}_{\nu}P_x . \frac{l_{x+1}}{l_x}$ po roku, obecna zaś jej wartość wynosi ${}_{\nu}P_x . \frac{l_{x+1}}{l_x} . v$. Wartość premii, mającej się wnieść po dwóch latach, równa się ${}_{\nu}P_x . \frac{l_{x+2}}{l_x} . v^2$; po trzech latach ${}_{\nu}P_x . \frac{l_{x+3}}{l_x} . v^3$ i t. d., po $\nu - 1$ latach ${}_{\nu}P_x . \frac{l_{x+\nu-1}}{l_x} . v^{\nu-1}$.

Razem, wartość aktualna tego na co liczy instytucya wynosi:

$$
{}_{\nu}P_x + {}_{\nu}P_x . \frac{l_{x+1} v}{l_x} + {}_{\nu}P_x . \frac{l_{x+2} v^2}{l_x} + \ldots + {}_{\nu}P_x . \frac{l_{x+\nu-1} v^{\nu-1}}{l_x}
$$

$$
= {}_{\nu}P_x . \left(\frac{l_x + l_{x+1} v + l_{x+2} v^2 + \ldots + l_{x+\nu-1} v^{\nu-1}}{l_x} \right),
$$

a po pomnożeniu licznika i mianownika przez v^x równa się:

$$
{}_{\nu}P_x . \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+\nu-1}}{D_x} = {}_{\nu}P_x . \frac{N_x - N_{x+\nu}}{D_x}.
$$

Lecz, według wzoru (12), $\frac{N_x - N_{x+\nu}}{D_x} = {}_{|\nu}a_x$, skutkiem czego wartość matematyczna praw instytucyi wyraża się przez:

$$
{}_{\nu}P_x . {}_{|\nu}a_x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (\alpha),
$$

t. j. równa się iloczynowi z mającej się pobierać rocznie premii netto przez wartość jednostki renty natychmiastowej, płatnej rocznie z góry przez ν lat osobie lub przez osobę x letnią.

Wartość praw osoby ubezpieczonej znamy już z art. 11-go — wzór (13), jest nią:

$$
\frac{N_{x+n}}{D_x} = {}_{n|}a_x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (\beta).
$$

Ażeby istniała równowaga pomiędzy prawami instytucyi i osoby ubezpieczonej, musi być $(\alpha) = (\beta)$, czyli:

$$
{}_{\nu}P_x . {}_{|\nu}a_x = {}_{n|}a_x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (\gamma),
$$

skąd:

$$ {}_{\nu}P\,({}_{n|}a_x) = \frac{{}_{n|}a_x}{{}_{|\nu}a_x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23). $$

Do tego samego rezultatu dojść można drogą krótszą i ogólniejszą.

Premię roczną ${}_{\nu}P_x$ płaci ubezpieczony przez lat ν, albo do chwili swej śmierci, jeżeli umrze wcześniej; jest to więc renta natychmiastowa płatna z góry czasowo, oparta na życiu osoby x letniej. Otóż, gdyby ubezpieczony płacił po jednostce rocznie, wartość jego zobowiązania wynosiłaby ${}_{|\nu}a_x$, że zaś płaci po ${}_{\nu}P_x$, zatem wartość jego zobowiązania wynosi ${}_{\nu}P_x \,.\, {}_{|\nu}a_x$. Ta wartość mającej się płacić premii, według znanej nam zasady, powinna być równa wartości ubezpieczenia, którą przedstawia jednorazowa premia netto, jak obecnie ${}_{n|}a_x$, mamy więc:

$$ {}_{\nu}P_x \,.\, {}_{|\nu}a_x = {}_{n|}a_x. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\delta), $$

skąd wychodzi wzór (23).

W powyższem rozumowaniu za premię jednorazową przyjęliśmy ${}_{n|}a_x$, ale rozumowanie nic na znaczeniu nie straci, gdy zamiast ${}_{n|}a_x$ podstawimy premię jednorazową (netto) za jakiekolwiek inne ubezpieczenie; gdy premię jednorazową oznaczymy ogólnie przez Π_x, to (δ) przejdzie na:

$$ (A) \quad . \; . \; . \quad {}_{\nu}P_x \,.\, {}_{|\nu}a_x = \Pi_x, \qquad \text{skąd} \qquad {}_{\nu}P_x = \frac{\Pi_x}{{}_{|\nu}a_x} \quad . \; . \; . \; . \quad (B), $$

gdzie ${}_{\nu}P_x$ przedstawia teraz roczną premię netto, płaconą za ubezpieczenie, którego wartością matematyczną, czyli premią jednorazową netto jest Π_x.

Wypływają stąd następujące reguły ogólne, stosujące się do wszelkiego rodzaju ubezpieczeń o premiach stałych, zarówno już przez nas poznanych jak i do tych, o których następnie mówić będziemy:

I. Wartością matematyczną wnoszonej z góry przez ubezpieczonego premii rocznej jest iloczyn z wysokości tej premii przez wartość matematyczną jednostki renty życiowej, płaconej rocznie z góry osobie tego samego co ubezpieczony wieku i przez taki sam czas, przez jaki premia roczna ma być wnoszona (α).

II. Premia jednorazowa netto za dane ubezpieczenie równa się iloczynowi z wnoszonej za to ubezpieczenie rocznej premii netto przez wartość matematyczną jednostki renty życiowej, płaconej rocznie z góry osobie tego samego co ubezpieczony wieku i przez taki sam czas, przez jaki premia roczna ma być wnoszona (A).

III. Roczna premia netto, płacona z góry za dane ubezpieczenie, równa się ilorazowi, powstałemu z podzielenia jednorazowej premii netto za to samo ubezpieczenie (czyli wartości matematycznej ubezpieczenia) przez wartość matematyczną jednostki renty rocznej, płaconej rocznie z góry osobie tego samego co ubezpieczony wieku i przez taki sam czas, przez jaki premia roczna ma być wnoszona (B)*).

16. Ciąg dalszy art. 15-go. Gdy w (23) podstawimy:

$$_{n|}a_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} \quad \text{oraz} \quad _{|\nu}a_x = \frac{N_x - N_{x+\nu}}{D_x},$$

zamiast (23) wypadnie wzór:

$$_{\nu}P(_{n|}a_x) = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+\nu}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24),$$

z którego można obliczyć premię roczną bezpośrednio zapomocą Tab. IX.

Gdy premia roczna ma być wnoszona przez cały czas odroczenia, czyli przez lat n, należy w w (23) i (24) podstawić $\nu = n$; wtedy:

$$(23') \quad \ldots\ldots \quad _{n}P(_{n|}a_x) = \frac{_{n|}a_x}{_{|n}a_x} = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad \ldots\ldots \quad (24').$$

Np. premia roczna, płacona przez cały czas odroczenia, za ubezpieczenie osobie 35-o letniej jednostki renty odroczonej na lat 25 i płatnej rocznie z góry, wynosi:

---

*) Są ubezpieczenia, jak np. ubezpieczenia z ewentualnym zwrotem wniesionych premij, do których na pozór powyższe reguły się nie stosują. Po bliższem jednak rozpatrzeniu stanu rzeczy, okazuje się, że w zasadzie stosują się i do nich, tylko ubezpieczenia tego rodzaju, zawierane za premie jednorazowe, są ubezpieczeniami odmiennemi od ubezpieczeń zawieranych za premie roczne. Gdy dla pierwszych odszukamy odpowiednich im premij rocznych, dla drugich — odpowiednich im premij jednorazowych, wtedy się okaże, że i do tych rodzajów ubezpieczeń stosują się nasze reguły. Do przedmiotu tego powrócimy we właściwem miejscu.

Powiedzieliśmy w tekście, iż reguły omawiane stosują się do premij stałych, można je wszakże, na podstawie takiego samego rozumowania, zastosować i do premij rocznych zmiennych (rosnących lub malejących), jeżeli wyrażenie „premia roczna" zastąpimy wyrażeniem „pierwsza premia roczna", a „wartość matematyczna jednostki renty rocznej" przez „wartość matematyczna renty, płaconej za pierwszy rok w wysokości jednostki i następnie zmieniającej się w taki sam sposób, jak się ma zmieniać premia roczna". I do tego przedmiotu powrócimy raz jeszcze.

$$_{25}P(_{25|}a_{35}) = \frac{N_{60}}{N_{35} - N_{60}} = \frac{53019,852}{378092,68 - 53019,852} = 0,163101;$$

za 100 jednostek renty rocznej wynosi:

$$0,163101 \times 100 = 16,31.$$

Taka jest premia netto; jeżeli przyjmiemy za dodatek na administracyę 20%, premia brutto wyniesie:

$$16,31 \times 1,2 = 19,57,$$

czyli np. za 600 rubli renty rocznej, osoba ta przez lat 25, o ile żyje, płacić winna rocznie z góry po rub. 117,42, gdyż:

$$19,57 \times 6 = 117,42.$$

Gdyby premie miały być wnoszone ratami częstszemi niż roczne, np. m razy w ciągu roku po $\frac{1}{m}$, wtedy we wzorze (23) należałoby zamiast $_{|\nu}a_x$ podstawić $_{\nu}a_x^{(m)}$ i rezultat podzielić przez m. W praktyce jednak, jak wiemy, prawie nigdy tak się nie postępuje, tylko raty mniejsze od rocznych oprocentowuje się w sposób wskazany przez wzór (16), podany w Rozdziale I-ym (art. 10). Chcąc np. w poprzednim przykładzie obrachować raty kwartalne przy stopie $6^0/_0$, liczonej rocznie z dołu, należy we wzorze (16) podstawić $m = 4$, $s = 6$, wtedy:

$$s_4' = \frac{4-1}{2 \times 4} \times 6 = \frac{3}{8} \times 6 = \frac{9}{4} = 2,25,$$

czyli rata kwartalna wynosi:

$$\frac{117,42 \times 1,0225}{4} = \frac{120,06}{4} = 30,02.$$

Bez szczegółowych wywodów, które, dla wprawy, pozostawiamy czytelnikowi, na podstawie wypowiedzianej w poprzednim artykule reguły III-ej, podajemy wzory na premię roczną za ubezpieczenie jednostki renty odroczonej na lat n i płatnej czasowo przez lat t, mianowicie:

gdy premie mają być wnoszone przez lat $\nu < n$:

$$_{\nu}P(_{n|t}a_x) = \frac{_{n|t}a_x}{_{|\nu}a_x} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{N_x - N_{x+\nu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

gdy premie mają być płacone przez cały czas odroczenia ($\nu = n$):

$$_{n}P(_{n|t}a_x) = \frac{_{n|t}a_x}{_{|n}a_x} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{N_x - N_{x+n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25').$$

Np., gdyby poprzednia renta miała być płacona nie dożywotnio, lecz przez lat, dajmy na to, 15, byłoby:

$$_{25}P\left({}_{25|15}a_{35}\right) = \frac{N_{60} - N_{75}}{N_{35} - N_{60}} = \frac{53019,852 - 6369,568}{378092,68 - 53019,852}$$
$$= 0,143507 \text{ od jednostki,}$$

$0,143507 \times 100 = 14,35$ netto za 100 jednostek renty rocznej, odroczonej na lat 25 i płatnej przez lat 15.

17. Renty zmienne. Dotąd zajmowaliśmy się rentami stałemi, t. j. takiemi, których wysokość jest jednakowa przez cały czas trwania ubezpieczeń. Teraz zobaczmy, jak się rzecz przedstawia, gdy wysokość rent się zmienia.

Renty mogą się zmieniać co rok albo co lat kilka w najrozmaitszy sposób — jednostajnie albo niejednostajnie. Poniżej zajmiemy się tylko rentami, rosnącemi lub malejącemi corocznie w sposób jednostajny.

Weźmy następujące zadanie.

Osoba x letnia ubezpiecza sobie rentę dożywotnią, natychmiast z góry rocznie płatną w ten sposób, że pierwsza rata równa się jedności, druga jest większa od pierwszej o i (o $s\%$ pierwszej raty, $i = \frac{s}{100}$), trzecia o i wyższa od drugiej, czyli o $2i$ wyższa od pierwszej i t. d., aż gdy się stanie k razy większą od pierwszej, przestaje dalej wzrastać i pozostaje do śmierci rentyera stale równą k. Obrachować wartość matematyczną takiej renty, czyli premię jednorazową netto, jaką osoba x letnia (w chwili zawierania umowy) za taką rentę zapłacić powinna.

Załóżmy, że w ten sposób zmieniająca się renta roczna wzrośnie do wysokości k jednostek w t-ym roku od chwili zawarcia umowy, względnie, że rata t-ta będzie już równa k. Jeżeli tak, to oczywiście $t - 1$ przyrostów po i rocznie muszą być równe $k - 1$ jednostkom, czyli:

(α) . . $k - 1 = (t - 1)i$; stąd $k = 1 + (t - 1)i$ . . (α')

oraz:

(β) . . . . $t = 1 + \frac{k-1}{i}$, $i = \frac{k-1}{t-1}$ . . . . (β').

Drogą podobnego rozumowania jak w art. 10-ym otrzymujemy *):

---

*) Ponad znaczkami uniwersalnemi dodajemy takie same oznaczenia, jakich używaliśmy w Rozdziale I-ym dla wkładów rosnących i malejących, ponieważ oznaczenia systemu uniwersalnego znakowania nie wyczerpują tych wszystkich przypadków, które weźmiemy pod uwagę (np. nie podają oznaczeń na przyrosty różne od jedności, i t. p.).

$$\overset{1,+i,t}{a_x} = \frac{l_x}{l_x} + (1+i)\,\frac{l_{x+1}v}{l_x} + (1+2i)\,\frac{l_{x+2}v^2}{l_x} + \dots$$

$$\dots + (1+\overline{t-2}\,.\,i)\,\frac{l_{x+t-2}v^{t-2}}{l_x} + k.\frac{l_{x+t-1}v^{t-1}}{l_x} + k.\frac{l_{x+t}\,v^t}{l_x} + \dots$$

Po pomnożeniu liczników i mianowników przez v^x oraz napisaniu wspólnego mianownika raz jeden, jest:

$$\overset{1,+i,t}{a_x}$$

$$= \frac{D_x+(1+i)D_{x+1}+(1+2i)D_{x+2}+\dots+(1+\overline{t-2}.i)D_{x+t-2}+k(D_{x+t-1}+D_{x+t}+\dots)}{D_x},$$

albo, po małych przeróbkach i wprowadzeniu sum zdyskontowanych liczb osób żyjących, mamy:

$$\overset{1,+i,t}{a_x}$$

$$= \frac{N_x - N_{x+t-1} + i\,(D_{x+1} + 2\,D_{x+2} + \dots + \overline{t-2}.\,D_{x+t-2}) + k\,N_{x+t-1}}{D_x} \qquad (\gamma).$$

Sumę w nawiasie $(D_{x+1} + 2\,D_{x+2} + 3\,D_{x+3} + \dots + \overline{t-2}\,.\,D_{x+t-2})$ można rozłożyć w sposób następujący:

$$\begin{aligned} D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots &+ D_{x+t-2} \\ + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots &+ D_{x+t-2} \\ + D_{x+3} + \dots &+ D_{x+t-2} \\ + \dots\dots\dots\dots & \\ &+ D_{x+t-2}, \end{aligned}$$

skąd, po zsumowaniu wyrażenia wierszami poziomemi, wypada:

$$(N_{x+1} - N_{x+t-1}) + (N_{x+2} - N_{x+t-1}) + (N_{x+3} - N_{x+t-1}) + \dots$$

$$\dots + (N_{x+t-2} - N_{x+t-1}) = S_{x+1} - S_{x+t-1} - (t-2)\,N_{x+t-1}.$$

Gdy ostatnie wyrażenie podstawimy w (γ) na miejsce sumy w nawiasie i za k podstawimy wyrażenie z (α'), będzie:

$$\overset{1,+i,t}{a_x}$$

$$= \frac{N_x - N_{x+t-1} + i\,(S_{x+1} - S_{x+t-1} - \overline{t-2}\,.\,N_{x+t-1}) + (1 + \overline{t-1}\,.\,i)\,N_{x+t-1}}{D_x}$$

$$= \frac{N_x + i\,(S_{x+1} - S_{x+t-1} + N_{x+t-1})}{D_x},$$

albo ostatecznie, ponieważ $-S_{x+t-1}+N_{x+t-1}=-S_{x+t}$,

$$\overset{1,+i,t}{a_x}=\frac{N_x+i\,(S_{x+1}-S_{x+t})}{D_x}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(\mathrm{I}).$$

Wyrażeniu temu możemy nadać inną postać. Stronę prawą można mianowicie napisać w kształcie rozwiniętym:

$$\frac{N_x}{D_x}+i\left(\frac{N_{x+1}}{D_x}+\frac{N_{x+2}}{D_x}+\frac{N_{x+3}}{D_x}+\ldots+\frac{N_{x+t-1}}{D_x}\right),$$

ponieważ zaś:

$$\frac{N_x}{D_x}=a_x,\quad \frac{N_{x+1}}{D_x}={}_{1|}a_x,\quad \frac{N_{x+2}}{D_x}={}_{2|}a_x,\ldots,\quad \frac{N_{x+t-1}}{D_x}={}_{t-1|}a_x,$$

zatem:

$$\overset{1,+i,t}{a_x}=a_x+i\,({}_{1|}a_x+{}_{2|}a_x+{}_{3|}a_x+\ldots+{}_{t-1|}a_x)=a_x+i\sum_{\lambda=1}^{\lambda=t-1}{}_{\lambda|}a_x\quad(\mathrm{I}'),$$

t. j. wartość renty dożywotniej, płatnej z góry począwszy od 1-ki i rosnącej o i corocznie aż do wysokości $k=1+(t-1)\,i$, równa się sumie wartości rent: natychmiastowej dożywotniej, płatnej z góry w wysokości 1-ki + sumie wartości rent dożywotnich, odroczonych na rok, dwa, trzy i t. d., na lat $t-1$, płatnych z góry po i rocznie.

Wyrażenie (I') jest tak dalece bezpośrednio oczywiste, że można je przyjąć za punkt wyjścia do wyprowadzenia nietylko wzoru (I), lecz i do obliczania wartości rent najrozmaiciej płatnych — co lat kilka i w sposób dowolnie niejednostajny.

Gdy renta wzrasta corocznie o swą pierwszą wysokość, czyli, jak obecnie, o jedność, wystarczy w (I), względnie w (I') podstawić $i=1$, wtedy otrzymamy:

$$\overset{1,+1,t}{a_x}=\frac{S_x-S_{x+t}}{D_x}=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=t-1}{}_{\lambda|}a_x\quad\ldots\ldots\quad(\mathrm{I}'').$$

W tym przypadku szczególnym, gdy $i=1$, staje się $k=t$.

Gdyby renta wzrastała nie przez lat t, lecz do śmierci, S_{x+t} staje się zerem, skutkiem czego:

$$\overset{1,+1}{a_x}=\frac{S_x}{D_x}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(\mathrm{I}''').$$

Obliczmy np. wartość renty dożywotniej, mającej się pobierać przez osobę 40-o letnią (w chwili zawierania umowy) w pierwszym roku w wysokości 1-ki i następnie rosnącej co rok o 25% swej pierwotnej wielkości, aż póki nie stanie się 10 razy większą od raty pierwszej, poczem renta pozostaje już jednakowa do śmierci rentyera. Mamy tu, $k=10$, $i=0{,}25$, wypada więc z (β) $t=1+\frac{10-1}{0{,}25}=37$, czyli renta stanie się 10 razy większą od pierwszej raty w 37-ym roku (37-a rata będzie już 10 razy większa od pierwszej).

$$\overset{1,+0{,}25,37}{a_{40}}=\frac{N_{40}+0{,}25\,(S_{41}-S_{77})}{D_{40}}$$

$$=\frac{274701{,}58+0{,}25\,(3116096{,}4-18604{,}826)}{17770{,}80}$$

$$=\frac{1049074{,}4735}{17770{,}8}=59{,}033610.$$

Za rentę, płaconą pierwszy raz w wysokości 100 rub., następnie rosnącą co rok po 25 rub. aż do chwili dojścia do 1000 rub., poczem już pozostaje tą samą do śmierci rentyera, posiadającego w chwili zawierania umowy 40 lat wieku, zapłacić należy netto:

$$59{,}033610\times 100=5903{,}36.$$

Gdy w (I) i (I′) przyjmiemy i za ujemne, otrzymamy wartość renty malejącej w ten sam sposób, jak tam rosła. Dla renty malejącej mamy zatem wzór:

$$\overset{1,-i,t}{a_x}=\frac{N_x-i\,(S_{x+1}-S_{x+t})}{D_x}=a_x-i\sum_{\lambda=1}^{\lambda=t-1}{}_{\lambda}a_x\quad .\ .\ .\ (\mathrm{II}).$$

Tutaj, oczywiście, musi być $k<1$, a o ile renta ma do końca pozostać dodatnią, musi być także $k>0$, mamy zatem:

$$k=1-(t-1)\,i\geqslant 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\delta);$$

stąd:

$$\text{przy dowolnem } t, \text{ musi być } i\leqslant\frac{1}{t-1}\quad .\ .\ .\ .\ (\varepsilon),$$

$$\text{„ „ } i, \text{ „ „ } t\leqslant\frac{1}{i}+1\quad .\ .\ .\ .\ (\varepsilon'),$$

Gdyby np. było $t=15$, musi być $i\leqslant\frac{1}{14}$; przy $i=0{,}05$, $t\leqslant\frac{1}{0{,}05}+1=21$. Jeżeli przyjmiemy, przy $t=15$, $i=\frac{1}{20}=0{,}05$, będzie $k=0{,}3$; gdy przyjmiemy, przy $i=0{,}05$, $t=18$, jest $k=0{,}15$.

Jeżeli $k = 0{,}5$, $t = 17$, musi być, według (δ), $1 - 16\,i = 0{,}5$, skąd $i = \frac{0{,}5}{16} = 0{,}03125$. Np. renta, poczynająca się od 1000 rubli, podlega z biegiem lat następującym zmianom:

Rok	Wysokość renty		Rok	Wysokość renty		Rok	Wysokość renty		Rok	Wysokość renty		Rok	Wysokość renty	
1	1000	—	5	875	—	9	750	—	13	625	—	17	500	—
2	968	75	6	843	75	10	718	75	14	593	75	18	500	—
3	937	50	7	812	50	11	687	50	15	562	50	19	500	—
4	906	25	8	781	25	12	656	25	16	531	25	.	.	.

Widzimy, że istotnie 17-a rata stanowi połowę raty pierwszej i taką pozostaje do śmierci rentyera.

Wartość matematyczna takiej renty, zaczynającej się od jednostki, dla osoby 40-o letniej (w chwili zawierania umowy), wynosi:

$$
{}^{1,\,-0{,}03125,\,17}a_{40} = \frac{N_{40} - 0{,}03125\,(S_{41} - S_{57})}{D_{40}}
$$

$$
= \frac{274701{,}58 - 0{,}03125\,(3116096{,}4 - 613231{,}11)}{17770{,}80}
$$

$$
= \frac{196487{,}04}{17770{,}8} = 11{,}056736.
$$

Wynika stąd, że za rentę, określoną przez powyższą tabelkę, osoba 40-to letnia zapłacić powinna jednorazowo netto:

$$
11{,}056736 \times 1000 = 11056{,}74.
$$

Z wzorów (I) i (II) łatwo przejść można do wzorów na wartość rent dożywotnich odroczonych i czasowych.

Dla rent odroczonych na lat n wystarczy wzór (I) zastosować do wieku $x + n$ i zdyskontować go **życiowo** na n lat. Wartość renty natychmiastowej, płatnej na tych samych co poprzednio warunkach osobie $x + n$ letniej, wynosi:

$$
{}^{1,\,+i,\,t}a_{x+n} = \frac{N_{x+n} + i\,(S_{x+n+1} - S_{x+n+t})}{D_{x+n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\zeta).
$$

Jeżeli zatem osoba x letnia ubezpiecza sobie omawianą rentę, której wypłata rozpoczyna się dopiero po n latach, jej wartość w chwili zawierania umowy jest zdyskontowaną wartością (ζ), czyli równa się

$\overset{1,+i,t}{a}_{x+n} \cdot v^n$, o ile rentyer po n latach żyć będzie; że zaś osoba x letnia po n latach żyć będzie z prawdopodobieństwem $\frac{l_{x+n}}{l_x}$, przeto wartość dzisiejsza renty odroczonej równa się:

$$\overset{1,+i,t}{a}_{x+n} \cdot \frac{l_{x+n} v^n}{l_x} = \overset{1,+i,t}{a}_{x+n} \cdot \frac{l_{x+n} v^{x+n}}{l_x v^x} = \overset{1,+i,t}{a}_{x+n} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x},$$

t. j.:

$$\overset{1,+i,t}{{}_{n|}a_x} = \frac{N_{x+n} + i\,(S_{x+n+1} - S_{x+n+t})}{D_{x+n}} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x},$$

albo po skróceniu:

$$\overset{1,+i,t}{{}_{n|}a_x} = \frac{N_{x+n} + i\,(S_{x+n+1} - S_{x+n+t})}{D_x} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(III)}.$$

Wartość renty malejącej przedstawia wzór:

$$\overset{1,-i,t}{{}_{n|}a_x} = \frac{N_{x+n} - i\,(S_{x+n+1} - S_{x+n+t})}{D_x} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(IV)}.$$

Gdy w (III) i (IV) założymy $n = 1$, otrzymamy wzory na renty odroczone na rok jeden, czyli na natychmiastowo płatne z dołu.

Chodzi jeszcze o wzory na renty natychmiastowe czasowe.

Wartość renty czasowej natychmiastowej jest różnicą pomiędzy wartością renty dożywotniej natychmiastowej i wartością renty dożywotniej odroczonej; jeżeli więc renta czasowa ma być płacona przez lat $n \geqslant t$, należy od (I) lub (II) odjąć $k \cdot \frac{N_{x+n}}{D_x}$, co czyniąc, otrzymujemy:

$$\overset{1,+i,t}{{}_{|n}a_x} = \frac{N_x + i\,(S_{x+1} - S_{x+t}) - k N_{x+n}}{D_x}\text{*)} \quad . \ . \ . \ . \quad \text{(V)},$$

oraz:

$$\overset{1,-i,t}{{}_{|n}a_x} = \frac{N_x - i\,(S_{x+1} - S_{x+t}) - k N_{x+n}}{D_x}\text{*)} \quad . \ . \ . \ . \quad \text{(VI)}.$$

Przy $n > t$ płaci się najwyższą, względnie najniższą ratę k przez $n - t + 1$ lat ostatnich; gdy $n = t$, rata największa, względnie najmniejsza wypłaca się raz jeden. Przypadek $n < t$ daje się zawsze sprowadzić do przypadku poprzedniego.

Jeżeli $i = 1$, staje się $k = t$, wtedy (V) przybiera kształt:

$$\overset{1,+1,t}{{}_{|n}a_x} = \frac{S_x - S_{x+t} - t N_{x+n}}{D_x} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(V')},$$

---

*) Obu tym wzorom można jeszcze nadać inną postać przez podstawienie $k = 1 + (t - 1)\,i$, względnie $k = 1 - (t - 1)\,i$.

gdy nadto będzie jeszcze $t = n$:

$$ {}_{|n}^{1,+1,n}a_x = \frac{S_x - S_{x+n} - n N_{x+n}}{D_x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{V}''). $$

W podobny sposób można wyprowadzić wzory na wartość rent odroczonych i czasowo płatnych.

Gdy we wzorach (I), (III) i (V) założymy $i = 0$, co oznacza, że renta jest stała, to otrzymamy wzory: (10) z art. 10-go, (13) i (12) z art. 11-go, które są zatem tylko przypadkami szczególnemi wzorów ogólniejszych, wyprowadzonych w artykule niniejszym.

18. Zastosowanie rent w praktyce. Premie peryodyczne zmienne. W praktyce renty posiadają zastosowąnia wielostronne.

Osoba w podeszłym wieku, jeżeli nie ma rodziny, a posiada jakiś kapitalik niewystarczający, przy zwykłem oprocentowaniu, na jej utrzymanie, może z korzyścią dla siebie nabyć rentę dożywotnią natychmiastową, gdyż tą drogą pozyska dochód większy.

Osoba młodsza, żyjąca z własnej tylko pracy, lecz niedość produkcyjnej, aby drogą zwykłej oszczędności mogła sobie odłożyć kapitalik na starość, roztropnie postąpi, jeżeli sobie ubezpieczy rentę odroczoną do chwili, gdy prawdopodobnie dalej już pracować nie będzie mogła. Będzie to rodzaj emerytury, zdobytej samodzielnie.

Ojciec rodziny, pragnący zabezpieczyć dzieciom środki na wykształcenie, może im ubezpieczyć rentę odroczoną, czasowo płatną.

Wreszcie, jak już widzieliśmy, renty odgrywają bardzo ważną rolę przy obliczaniu premij peryodycznych za wszelkiego rodzaju ubezpieczenia.

W poprzednich artykułach mówiliśmy o premiach peryodycznych stałych, teraz wypada nam jeszcze powiedzieć o premiach zmiennych.

Premie zmienne w praktyce rzadko bywają stosowane, a jeżeli są w użyciu, to tylko malejące, gdyż premie rosnące przedstawiają dla instytucyi pewne niebezpieczeństwo, z tego mianowicie powodu, że w razie zerwania umowy przez ubezpieczonego, ten byłby przez czas pewien ubezpieczony za stosunkowo niedostateczne wynagrodzenie. Dlatego i my weźmiemy pod uwagą tylko premie malejące.

Dajmy, że za ubezpieczenie (osoby x letniej w chwili zawierania umowy), którego wartość matematyczną, czyli premię jednorazową netto oznaczmy przez Π_x, klient ma wnosić przez ν lat premie malejące. Wysokość pierwszej premii rocznej oznaczmy przez ${}_\nu\overset{1}{P}_x$; premie maleją co rok w stosunku i od jednostki przez lat $t - 1$ $(t < \nu)$, następne pozostają stałe aż do wyekspirowania płatności premij.

Otóż, gdyby pierwszą premią była jednostka, wartością mających się wnieść premij netto byłoby $\overset{1,-i,t}{{}_{|v}a_x}$, obliczone według wzoru (VI); ponieważ zaś pierwszą premią jest ${}_v\overset{1}{P}_x$, przeto wartością mających się wnieść premij jest ${}_v\overset{1}{P}_x \, . \, \overset{1,-i,t}{{}_{|v}a_x}$, która to wielkość, według ogólnej zasady, powinna być równa wartości ubezpieczenia, t. j. Π_x. Mamy więc:

$$(A') \quad . \quad . \quad . \; {}_v\overset{1}{P}_x \, . \, \overset{1,-i,t}{{}_{|v}a_x} = \Pi_x, \qquad \text{skąd} \qquad {}_v\overset{1}{P}_x = \frac{\Pi_x}{\overset{1,-i,t}{{}_{|v}a_x}} \; . \; . \; . \; (B').$$

Gdy wyrażenia (A′) i (B′) porównamy z (A) i (B) w art. 15-ym, dostrzeżemy, że co do kształtu są jednakowe, tylko „premia roczna" (${}_vP_x$) jest zastąpiona przez „pierwszą premię roczną" (${}_v\overset{1}{P}_x$), a „wartość matematyczna jednostki renty rocznej" (${}_{|v}a_x$) przez „wartość matematyczną renty, płaconej w pierwszym roku w wysokości jednostki i następnie zmieniającej się w taki sam sposób, jak się mają zmieniać premie roczne" $\left(\overset{1,-i,t}{{}_{|v}a_x}\right)$. Czyli istotnie, jak to zapowiedzieliśmy w art. 15-ym (w przypisku na str. 321), przytoczone tam reguły stosują się i do premij malejących — wogóle do premij zmiennych, gdy w ich wysłowieniu wprowadzimy zmiany, wskazane w art. 15-ym i tutaj powtórzone.

Obliczmy, dla przykładu, premie, płatne przez lat 25 i malejące przez pierwsze lat 15 w stosunku 5% premii pierwszorocznej, za ubezpieczenie 100 rub. renty rocznej, odroczonej na lat 25 i płatnej dożywotnio osobie 35-o letniej (w chwili zawierania umowy).

Premia stała, według obliczenia przeprowadzonego w art. 16-ym, wynosi 16,31 rocznie netto; premia jednorazowa netto za dane ubezpieczenie od jednostki renty równa się:

$$\Pi_{35} = {}_{25|}a_{35} = \frac{N_{60}}{D_{35}} = \frac{53019{,}852}{22751{,}14} = 2{,}330426\,.$$

Zobaczmy przedewszystkiem, czy warunki zadania mogą się spełnić. Ponieważ winno być $i < \frac{1}{t-1} = \frac{1}{15-1} = \frac{1}{14} = 0{,}071\ldots$, a $i = 0{,}05$, zatem rozwiązanie zadania jest możliwe; $k = 1 - (t-1)\,i = 1 - 14 \times 0{,}05 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, t. j. premia maleje aż do 0,3 swej pierwszej wielkości.

Według (B′):

$$ {}_{25}\overset{1}{P}_{35} = \frac{\Pi_{35}}{\overset{1,-0{,}05,\,15}{{}_{|25}a_{35}}} = \frac{2{,}330426}{\overset{1,-0{,}05,\,15}{{}_{|25}a_{35}}}\,;$$

ponieważ zaś według wzoru (VI):

$$ {}_{|25}\overset{1,\,-0,05,15}{a}_{35} = \frac{N_{35} - 0,05\,(S_{36} - S_{50}) - 0,3\,N_{60}}{D_{35}} $$

$$ = \frac{378092,68 - 0,05\,(4686230,6 - 1344567,8) - 0,3 \times 53019,852}{22751,14} $$

$$ = \frac{195103,5844}{22751,14} = 8,575552, $$

przeto:

$$ {}_{25}\overset{1}{P}_{35} = \frac{2,330426}{8,575552} = 0,2718 \text{ od 1-ki renty.} $$

Pierwsza premia netto od 100 rub. renty wynosi zatem $0,2718 \times 100 = 27,18$, podczas gdy stała premia roczna za to samo ubezpieczenie była równa 16,31. Zmniejszenie roczne premii wynosi $27,18 \times 0,05 = 1,36$, najmniejsza premia (poczynając od 15-ej) dochodzi do $27,18 \times 0,3 = 8,15$. Premie zmieniają się w sposób następujący:

Rok	Premia		Rok	Premia		Rok	Premia	
1	27	18	7	19	02	13	10	86
2	25	82	8	17	66	14	9	50
3	24	46	9	16	30	15	8	14
4	23	10	10	14	94	16	8	14
5	21	74	11	13	58	.	.	.
6	20	38	12	12	22	.	.	.

Mała różnica pomiędzy 8,14 a z góry obliczonem 8,15 nie ma oczywiście znaczenia.

B. Ubezpieczenie kapitałów na dożycie.

19. Premie jednorazowe i roczne. Gdy kapitał wypłaca się w takim tylko razie, jeżeli osoba ubezpieczona dożyje pewnego z góry ściśle wyznaczonego terminu (wieku), to odnośna umowa nazywa się ubezpieczeniem kapitału n a d o ż y c i e.

Wartość jednostki kapitału, płatnego osobie x letniej (w chwili zawierania umowy) w razie jeżeli przeżyje n lat, oznacza się przez „E_x, od wyrazu angielskiego „Endowment“ = nadanie, uposażenie.

Wartość dzisiejsza jednostki, płatnej po n latach, wynosi $1 . v^n = v^n$; skoro jednak ta jednostka będzie wypłacona tylko w takim razie, jeżeli osoba x letnia po n latach żyć będzie, a to nastąpi z prawdopodobieństwem ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$, wartością tedy matematyczną takiego ubezpieczenia jest $v^n . \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+n} v^n}{l_x} = \frac{l_{x+n} v^{x+n}}{l_x v^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$, t. j.

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26). $$

co zarazem stanowi premię jednorazową netto za takie ubezpieczenie.

Np. ${}_{25}E_{30} = \frac{7645,176}{28860,79} = 0,264898$ od jednostki,

$$ 0,264898 \times 1000 = 264,90 \text{ netto od } 1000; $$

przy 10% dodatku na administracyę, premia brutto od 1000 rubli wynosi:

$$ 264,90 \times 1,1 = 291,39. $$

Z wzoru (26) można wyprowadzić wzór na wartość jednostki renty. Jeżeli renta wypłaca się rocznie z dołu, stanowi ona poprostu to samo, co ubezpieczenie jednostki kapitału płatnego po roku, po dwóch, po trzech latach, i t. d. aż do śmierci, czyli stanowi sumę wartości kapitałów, ubezpieczonych na przypadek przeżycia jednego roku, dwóch, trzech i t. d. lat. To jest:

$$ a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots $$

$$ = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}, $$

co znamy już z art. 10-go jako wzór (11).

Premia roczna, według ogólnej reguły, otrzymuje się z podzielenia premii jednorazowej za dane ubezpieczenie przez wartość jednostki renty, płaconej z góry przez czas wnoszenia premij rocznych.

Gdy więc premia ma być płacona przez lat $\nu < n$, w takim razie:

$$ {}_\nu P({}_nE_x) = \frac{{}_nE_x}{{}_{|\nu}a_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} : \frac{N_x - N_{x+\nu}}{D_x} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+\nu}}, $$

czyli:

$$ {}_\nu P({}_nE_x) = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+\nu}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27). $$

Gdy premia roczna ma być płacona przez cały czas trwania umowy ($\nu = n$), będzie:

$$_nP(_nE_x) = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27').$$

Np. $$_{25}P(_{25}E_{30}) = \frac{D_{55}}{N_{30} - N_{55}} = \frac{7645,167}{509677,65 - 86552,969}$$

$$= 0,018068 \text{ od jednostki;}$$

$$0,018068 \times 1000 = 18,07 \text{ netto od } 1000,$$

przy $10^0/_0$ dodatku na administracyę:

$$18,07 \times 1,1 = 19,88 \text{ brutto rocznie od } 1000.$$

Ubezpieczenie kapitałów na dożycie znajduje zastosowanie praktyczne przy chęci zapewnienia dzieciom posagów, lub też jeżeli osoba młoda pragnie, w celu np. zwiększenia produkcyjności swej pracy, pozyskać z czasem jakiś kapitał. Co prawda, do tego samego celu można dojść i drogą zwykłej oszczędności, na to jednak potrzeba dużo silnej woli, na jaką nie wszystkie charaktery zdobyć się mogą.

C. Ubezpieczenie kapitałów pośmiertnych.

20. Rodzaje i oznaczenia ubezpieczeń pośmiertnych. Kapitał wypłacany dopiero po śmierci osoby ubezpieczonej nazywa się pośmiertnym.

Jeżeli kapitał pośmiertny wypłaca się bez względu na to, kiedy śmierć osoby ubezpieczonej nastąpi, wtedy ubezpieczenie takie zwać będziemy natychmiastowem dożywotniem. Jeżeli zaś wypłaca się w takim tylko razie, gdy śmierć nastąpi w przeciągu ściśle określonego czasu, wówczas przybiera miano ubezpieczenia czasowego. Gdy wreszcie kapitał pośmiertny wypłaca się, skoro śmierć osoby ubezpieczonej zajdzie dopiero po upływie pewnego czasu, ubezpieczenie zowie się odroczonem.

Ubezpieczenie odroczone może być ze swej strony albo dożywotnie, albo też czasowe tylko.

Kapitały pośmiertne wogóle, w szczególności zaś natychmiastowe, zarówno dożywotnie jak i czasowe, mogą być ubezpieczane tylko przez osoby zdrowe, gdyż w razie przeciwnym instytucya byłaby narażona na straty, spowodowane przedwczesną śmiercią osób niezdrowych. Dlatego, pragnący się ubezpieczyć na przypadek śmierci są poddawani badaniu lekarskiemu, które orzeka, czy dana osoba może być, bez wyraźnego dla instytucyi niebezpieczeństwa, ubezpieczona lub nie.

Ponieważ jednak badanie lekarskie, jak tego dowiodła Statystyka, oddziaływa tylko na jakieś pięć lub sześć lat początkowych, przeto ubezpieczenia odroczone bywają czasami przyjmowane bez badania lekarskiego. Odroczenie zatem zastępuje do pewnego stopnia badanie lekarskie i skutkiem tego czas odroczenia bywa nazywany czasem próby (Carrenzzeit). Do takich ubezpieczeń wszelako, winno się w zasadzie stosować tablicę śmiertelności, ułożoną na podstawie Statystyki osób ubezpieczonych bez badania lekarskiego.

Wartość matematyczną jednostki kapitału, ubezpieczonego na przypadek śmierci i wypłacanego przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć nastąpi, system uniwersalny znakowania zaleca oznaczać przez A, z dodaniem takich samych jak w rentach znaczków na wiek, na odroczenie i na czasowe trwanie umowy.

Tym sposobem: A_x oznacza wartość jednostki kapitału pośmiertnego, ubezpieczonego natychmiastowo i dożywotnio przez osobę x letnią; $_{|t}A_x$ wartość ubezpieczenia czasowego, zawartego na t lat; $_{n|}A_x$ wartość ubezpieczenia dożywotniego, odroczonego na n lat; $_{n|t}A_x$ — odroczonego na n lat i czasowego przez t lat.

Jeżeli kapitał ma być wypłacony natychmiast po śmierci, nad A dodaje się kreseczkę poziomą, np. $\bar{A}_x$.

21. Premie jednorazowe. Weźmy najprzód pod uwagę ubezpieczenia natychmiastowe dożywotnie, przy założeniu, że kapitał wypłaca się nie zaraz po śmierci, lecz dopiero przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć nastąpi. Gdyby np. ubezpieczenie było zawarte 15-go maja, a śmierć nastąpiła 20 stycznia któregokolwiek roku, kapitał zostałby wypłacony dopiero 15-go maja tegoż roku.

Otóż prawdopodobieństwo q_x, że osoba x letnia umrze zaraz w pierwszym roku ubezpieczeniowym, równa się $\frac{d_x}{l_x}$, więc obecna wartość matematyczna wypłaty jednostki kapitału przy końcu pierwszego roku ubezpieczeniowego równa się $1 . \frac{d_x}{l_x} . v = \frac{d_x v}{l_x}$; podobnie, wartością ewentualnej wypłaty 1-ki kapitału przy końcu drugiego roku ubezpieczeniowego jest $1 . \frac{d_{x+1}}{l_x} . v^2 = \frac{d_{x+1} v^2}{l_x}$, i t. d. do końca tablicy śmiertelności.

Mamy zatem:

$$A_x = \frac{d_x v}{l_x} + \frac{d_{x+1} v^2}{l_x} + \frac{d_{x+2} v^3}{l_x} + \ldots = \frac{d_x v + d_{x+1} v^2 + d_{x+2} v^3 + \ldots}{l_x}$$

albo, po pomnożeniu licznika i mianownika przez v^x:

$$A_x = \frac{d_x v^{x+1} + d_{x+1} v^{x+2} + d_{x+2} v^{x+3} + \dots}{l_x v^x} = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots}{D_x},$$

czyli:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (28).$$

Wzór ten można także wyrazić przez wartość renty; albowiem według wzoru (8):

$$M_x = D_x - \frac{i}{1+i} N_x,$$

co gdy podstawimy w (28), otrzymamy:

$$A_x = \frac{D_x - \frac{i}{1+i} N_x}{D_x} = 1 - \frac{i}{1+i} \cdot \frac{N_x}{D_x},$$

t. j.

$$A_x = 1 - \frac{i}{1+i} a_x \quad \dots\dots\dots \quad (28').$$

Jest to wartość matematyczna danego ubezpieczenia, czyli premia jednorazowa netto, z której otrzymamy premię brutto, gdy do niej dodamy odpowiedni dodatek na administracyę.

Np. $$A_{45} = \frac{M_{45}}{D_{45}} = 1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} a_{45} = \frac{6217{,}5547}{13691{,}76}$$

$$= 1 - \frac{0{,}04}{1{,}04} \times 14{,}193167 = 0{,}454109 \text{ od jednostki kapitału;}$$

$$0{,}454109 \times 1000 = 454{,}11 \text{ netto od } 1000,$$

a przy 15°/₀ dodatku na administracyę:

$$454{,}11 \times 1{,}15 = 522{,}23 \text{ brutto od } 1000.$$

W poprzednim wywodzie założyliśmy, iż kapitał ubezpieczony wypłaca się przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć nastąpi. Ponieważ wypłata kapitału pośmiertnego może, naturalnie, być uskuteczniona dopiero po wylegitymowaniu śmierci osoby ubezpieczonej, co wymaga pewnego czasu na zebranie i dostarczenie instytucyi odpowiednich dokumentów, przeto kapitał nigdy natychmiast po śmierci, lecz dopiero po pewnym czasie może być wypłacony. Z tego powodu w praktyce zazwyczaj oblicza się premie przy powyższem założeniu, a kapitał wypłaca się zaraz po załatwieniu przez sukcesorów wszystkich formalności prawnych.

Gdyby jednak, mimo to, chodziło o wzór uwzględniający natychmiastową wypłatę, należy się uciec do hypotezy jednostajnego rozkładania się wypadków śmierci na rok cały. Hypoteza ta sprowadza się do założenia, że wszystkie wypadki śmierci zachodzą jednocześnie w połowie roku, czyli, że kapitał, zamiast być wypłaconym przy końcu roku ubezpieczeniowego, jest wypłacany w połowie roku, co znów wychodzi na to, jakby kapitał miał być płacony przy końcu roku, lecz z procentem półrocznym. Innemi słowy, jest to po prostu ubezpieczenie kapitału, wypłacanego przy końcu roku ubezpieczeniowego, lecz większego o półroczny procent, skutkiem czego i premia winna być większa o procent półroczny, t. j. wzór (28) należy zastąpić przez:

$$\bar{A}_x = \frac{r^{\frac{1}{2}} M_x}{D_x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28'').$$

Skoro w obliczeniach naszych przyjmujemy stopę 4%, będzie:

$$r^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1{,}04} = 1{,}0198039\ldots,$$

zatem poprzednio obliczona premia od jednostki, równa 0,454109, przechodzi obecnie na:

$$0{,}454109 \times 1{,}0198039 = 0{,}463102,$$

a po dodaniu 15%, premia brutto od 1000 wynosi:

$$463{,}102 \times 1{,}15 = 532{,}57.$$

22. Premie roczne. Według zasady ogólnej, wyprowadzonej przy rozważaniu rent (art. 15-y), premie roczne otrzymują się z podzielenia premij jednorazowych przez wartość jednostki renty, płatnej przez czas wnoszenia premij rocznych.

Gdy więc premia roczna ma być wnoszona dożywotnio, otrzymamy ją, dzieląc (28), względnie (28') i (28'') przez wyrażenie (10) z art. 10-go, t. j.:

$$P(A_x) = \frac{A_x}{a_x} = \frac{M_x}{D_x} : \frac{N_x}{D_x},$$

albo:

$$(29) \ \ldots \ P(A_x) = \frac{M_x}{N_x}, \quad \text{względnie} \quad P(A_x) = \frac{1}{a_x} - \frac{i}{1+i} \ . \ (29').$$

Takie jednak obciążenie budżetu osoby ubezpieczonej na całe życie jest bardzo niebezpieczne, w końcu bowiem, gdy już straci możność zarobkowania, może nie być w stanie płacić dalszych premij, co pociągnie za sobą jeżeli nie całkowitą utratę praw, to przynajmniej znaczną ich redukcyę.

Dlatego lepiej jest zobowiązać się do wnoszenia premij rocznych przez czas ograniczony. Gdy osoba x letnia obowiązuje się wnosić premie tylko przez lat n, w takim razie A_x należy podzielić przez wartość jednostki renty czasowej, płatnej również przez lat n. Wówczas odnośnym wzorem jest:

$$ {}_nP(A_x) = \frac{A_x}{{}_na_x} = \frac{M_x}{D_x} : \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}, $$

czyli:

$$ {}_nP(A_x) = \frac{M_x}{N_x - N_{x+n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30). $$

Takie ubezpieczenie nazywa się ubezpieczeniem pośmiertnem skróconem.

Jeżeliby kapitał miał być zapłacony zaraz po śmierci, byłoby:

$$ (29') \;\ldots\; P(\bar{A}_x) = \frac{r^{\frac{1}{2}} M_x}{N_x}, \qquad {}_nP(\bar{A}_x) = \frac{r^{\frac{1}{2}} M_x}{N_x - N_{x+n}} \;\ldots\; (30'). $$

W podanym np. w poprzednim artykule przykładzie premia roczna, płatna dożywotnio, wynosi:

$$ P(A_{45}) = \frac{M_{45}}{N_{45}} = \frac{6217,5547}{194329,44} = 0,031995 \text{ od jednostki;} $$

$$ 0,031995 \times 1000 = 32,00 \text{ netto od } 1000, $$

przy 25°/₀ dodatku na administracyę:

$$ 32,00 \times 1,25 = 40,00 \text{ brutto od } 1000. $$

Premie roczne, wnoszone przez lat 20, wynoszą:

$$ {}_{20}P(A_{45}) = \frac{M_{45}}{N_{45} - N_{65}} = \frac{6217,5547}{194329,44 - 29881,163} = 0,037809 \text{ od 1-stki;} $$

$$ 0,037809 \times 1000 = 37,81 \text{ netto od } 1000, $$

przy 25°/₀ dodatku na administracyę:

$$ 37,81 \times 1,25 = 47,26 \text{ brutto od } 1000. $$

Gdybyśmy uwzględnili wypłatę kapitału natychmiast po śmierci, odnośna premia roczna brutto wyniosłaby:

$$ 47,26 \times 1,0198039 = 48,20. $$

Uwaga. Ciekawe jest porównanie rezultatów, do jakich dochodzi się drogą zwykłej oszczędności, np. przez składanie pieniędzy w kasach oszczędnościowych, z rezultatami osiąganemi na drodze asekuracyi życiowej.

Jak wiemy z poprzedniego artykułu, za ubezpieczenie 1000 rub. kapitału płatnego na przypadek śmierci, osoba 45-o letnia płaci jednorazowo 454,11 netto, 522,23 rub. brutto (przy 15% dodatku na administracyę). Otóż, według Tabl. I-ej, 454,11 rub., oddane na procent składany przy stopie 4%, zamienia się na 1000 rub. po upływie 20-u lat z ułamkiem; 522,23 rub. po upływie 16-u lat z ułamkiem, czyli ubezpieczenie przez pierwsze lat 20, względnie przez lat 16 daje więcej, aniżeli zwykły sposób skupiania kapitału.

Premia roczna za ubezpieczenie 1000 rub. wynosi dla osoby tego samego wieku 32 rub. netto, 40 rub. brutto (przy 25% dodatku na administracyę). Według Tabl. III-ej sumy te, składane z góry rocznie na procent składany, przy stopie 4%, zamieniają się na 1000 rub.: pierwsza po 20 latach z ułamkiem, druga po 17-u latach z ułamkiem.

Po dłuższym przeciągu czasu kasa oszczędnościowa daje już więcej niż ubezpieczenie, czemu dziwić się nie można, ponieważ instytucya ubezpieczeniowa musi przecież mieć kompensatę strat, ponoszonych na wcześniej umierających. Na to jednak, aby módz drogą zwykłej oszczędności pozyskać kapitał taki sam, albo większy od ubezpieczonego, potrzeba najprzód przeżyć odpowiednią liczbę lat, czego z góry przewidzieć nie można, następnie zaś trzeba posiadać dużo silnej woli, żeby gromadzonego kapitału przedwcześnie nie naruszyć, na co mało kto zdobyć się potrafi. Ponieważ premie są tem niższe, im ubezpieczenie w młodszym zawiera się wieku, a kasa oszczędnościowa daje zawsze to samo bez względu na wiek składającego pieniądze, przeto i rezultaty, płynące z ubezpieczeń, są tem korzystniejsze od osiąganych zapomocą kas oszczędnościowych, im wcześniej się ubezpieczamy.

23. Premie od ubezpieczeń czasowych i odroczonych. Wzory na premię jednorazową za ubezpieczenia czasowe, trwające przez lat n, i na odroczone na lat n, otrzymamy z wyrażenia podanego w art. 21-ym:

$$\frac{d_x v}{l_x} + \frac{d_{x+1} v^2}{l_x} + \frac{d_{x+2} v^3}{l_x} + \ldots,$$

gdy zatrzymamy lub opuścimy w niem pierwsze n wyrazów.

Gdy to uczynimy i następnie liczniki i mianowniki pomnożymy przez v^x, wypadnie:

dla ubezpieczeń czasowych:

$$(31) \quad {}_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}, \quad \text{względnie} \quad {}_{|n}\bar{A}_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} . r^{\frac{1}{2}} \quad (31'),$$

dla ubezpieczeń odroczonych:

$$(32)\quad {}_{n|}A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x}, \quad \text{względnie} \quad {}_{n|}\bar{A}_x = \frac{r^{\frac{1}{2}} M_{x+n}}{D_x} \quad . \quad . \quad (32').$$

Dla ubezpieczeń odroczonych na lat n i czasowych przez lat t:

$$ {}_{n|t}A_x = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+t}}{D_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33),$$

względnie

$$ {}_{n|t}\bar{A}_x = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+t}}{D_x} \cdot r^{\frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33').$$

Odnośne premie roczne, płatne przez lat ν, wyrażają się wzorami:

$$(34)\quad {}_{\nu}P({}_{|n}A_x) = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+\nu}}, \text{ gdy } \nu = n \ldots {}_{n}P({}_{|n}A_x) = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \ (34'),$$

oraz:

$$(35)\quad {}_{\nu}P({}_{n|}A_x) = \frac{M_{x+n}}{N_x - N_{x+\nu}}, \text{ gdy } \nu = n \ldots {}_{n}P({}_{n|}A_x) = \frac{M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \ (35').$$

Gdyby za ubezpieczenie kapitału pośmiertnego odroczonego premie roczne miały być wnoszone dożywotnio, byłoby:

$$P({}_{n|}A_x) = \frac{M_{x+n}}{N_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

W razie płatności kapitałów natychmiast po śmierci, drugie strony we wzorach od (34) do (36) należy pomnożyć przez $r^{\frac{1}{2}}$.

Ze wszystkich powyższych przypadków weźmy przykład liczebny na wzór (34'), t. j. gdy nam chodzi o premię roczną za czasowe — 10-o letnie ubezpieczenie kapitału pośmiertnego dla osoby 36-o letniej (w chwili zawierania umowy) z opłatą premij rocznych przez cały czas trwania umowy, t. j. przez lat 10:

$$ {}_{10}P({}_{|10}A_{36}) = \frac{M_{36} - M_{46}}{N_{36} - N_{46}} = \frac{8005{,}1564 - 6023{,}4749}{355341{,}54 - 180637{,}68}$$

$$= 0{,}011343 \text{ od jednostki kapitału;}$$

$$0{,}011343 \times 1000 = 11{,}34 \text{ netto od } 1000,$$

a przy 30% dodatku na administracyę:

$$11{,}34 \times 1{,}3 = 14{,}74 \text{ brutto od } 1000.$$

Ubezpieczenia pośmiertne natychmiastowe dożywotnie zalecają się osobom, które, mając los zabezpieczony przez czas swego życia, pragną też zabezpieczyć los rodziny po swej śmierci. Ubezpieczenia czasowe bywają używane przez osoby zaciągające dług, który mógłby nie być spłacony w razie przedwczesnej śmierci dłużnika. Ubezpieczenia odroczone posiadają małe zastosowanie praktyczne, gdyż pozbawiają sukcesorów korzyści w razie, gdy osoba ubezpieczona umrze w ciągu trwania czasu odroczenia.

24. Ubezpieczenie kapitałów zmiennych. Podobnie jak renty, mogą być również ubezpieczane kapitały zmienne — rosnące i malejące. Bezpośredniego zastosowania w praktyce życiowej ubezpieczenia kapitałów zmiennych, o ile nam wiadomo, nie posiadają, lecz mają zastosowanie pośrednie przy ubezpieczeniach ze zwrotem premij. Do tego celu jednak potrzebna jest tylko znajomość zasad ubezpieczania kapitałów rosnących, tym więc tylko przypadkiem zajmiemy się szczegółowiej, do czego nas upoważnia i ta jeszcze okoliczność, że od kapitałów rosnących przechodzi się łatwo do kapitałów malejących przez zmianę znaku czynnika i — jak to widzieliśmy przy rentach.

Osoba x letnia ubezpiecza dożywotnio kapitał pośmiertny, płatny przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć nastąpi, w wysokości 1-ki, jeżeli umrze w pierwszym roku; w wysokości $1+i$, jeżeli umrze w drugim roku, i t. d. kapitał rośnie co rok o $i=\frac{s}{100}$, aż póki nie stanie się k razy większym od pierwszorocznego — dalej przestaje się zmieniać, czyli pozostaje w tej samej wysokości k do końca.

Dajmy, że kapitał stanie się k razy większym od pierwszorocznego w t-ym roku ubezpieczeniowym; prowadzi to do równości:

$$(\alpha)\quad .\quad k-1=(t-1)\,i,\qquad \text{z której}\qquad k=1+(t-1)\,i\quad .\ (\alpha')$$

$$(\beta)\quad .\quad t=1+\frac{k-1}{i},\qquad\qquad i=\frac{k-1}{t-1}\quad .\ .\ .\ .\ .\ (\beta')$$

Drogą podobnego rozumowania, jak w art. 21-ym, otrzymujemy:

$$\overset{1,+i,t}{A_x}=1.\frac{d_x v}{l_x}+(1+i)\frac{d_{x+1}v^2}{l_x}+(1+2i)\frac{d_{x+2}v^3}{l_x}+\ldots$$
$$\ldots+(1+\overline{t-2}.i)\frac{d_{x+t-2}v^{t-1}}{l_x}+k\frac{d_{x+t-1}v^t}{l_x}+k\frac{d_{x+t}v^{t+1}}{l_x}+\ldots$$

Po pomnożeniu liczników i mianowników przez v^x i napisaniu raz jeden mianownika wspólnego, wypada:

$$\overset{1,+i,t}{A_x}$$
$$=\frac{C_x+(1+i)C_{x+1}+(1+2i)C_{x+2}+\ldots+(1+\overline{t-2}.i)C_{x+t-2}+k(C_{x+t-1}+C_{x+t}+\ldots)}{D_x}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+t-1} + i(C_{x+1} + 2C_{x+2} + 3C_{x+3} + \ldots + \overline{t-2}.C_{x+t-2}) + kM_{x+t-1}}{D_x} \quad (\gamma).$$

Lecz:

$$\begin{aligned} & C_{x+1} + 2C_{x+2} + 3C_{x+3} + \ldots + (t-2)\,C_{x+t-2} \\ = & C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots\ldots\ldots + C_{x+t-2} \\ & \quad + C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots\ldots\ldots + C_{x+t-2} \\ & \qquad + C_{x+3} + \ldots\ldots\ldots + C_{x+t-2} \\ & \qquad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad\qquad\qquad + C_{x+t-2} \\ = & (M_{x+1} - M_{x+t-1}) + (M_{x+2} - M_{x+t-1}) + (M_{x+3} - M_{x+t-1}) + \ldots \\ & \ldots + (M_{x+t-2} - M_{x+t-1}) = R_{x+1} - R_{x+t-1} - (t-2)\,M_{x+t-1}. \end{aligned}$$

Gdy to wyrażenie podstawimy w (γ), wypadnie:

$$\overset{1,+i,t}{A_x} = \frac{M_x - M_{x+t-1} + i(R_{x+1} - R_{x+t-1} - \overline{t-2}.M_{x+t-1}) + kM_{x+t-1}}{D_x} \quad (\gamma'),$$

wreszcie, po podstawieniu $k = 1 + (t-1)\,i$ i przeprowadzeniu podobnej, jak w art. 17-ym, redukcyi, otrzymujemy ostatecznie:

$$\overset{1,+i,t}{A_x} = \frac{M_x + i\,(R_{x+1} - R_{x+t})}{D_x} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(VII)}.$$

Gdyby kapitał miał być wypłacony zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, stronę drugą wzoru (VII) należałoby jeszcze pomnożyć przez $r^{\frac{1}{2}}$.

Wzór (VII) co do kształtu jest podobny do wzoru (I) z art. 17-go, tylko, tam gdzie we wzorze (I) znajdują się N_x i S_x, tutaj wchodzą M_x i R_x, t. j. zdyskontowane liczby osób żyjących są zastąpione przez zdyskontowane liczby osób zmarłych; tak być powinno, skoro tam sumy wypłacają się w razie przeżycia roku, dwóch, trzech i t. d. lat, a tutaj w razie śmierci. Analogia ta powtarzać się będzie w dalszych wzorach.

Po rozwinięciu wyrażenia (VII), mamy:

$$\overset{1,+i,t}{A_x} = \frac{M_x + i\,(M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots + M_{x+t-1})}{D_x}$$

$$= \frac{M_x}{D_x} + i\left(\frac{M_{x+1}}{D_x} + \frac{M_{x+2}}{D_x} + \ldots + \frac{M_{x+t-1}}{D_x}\right),$$

t. j.

$$\overset{1,+i,t}{A_x} = A_x + i\,({}_{1|}A_x + {}_{2|}A_x + \ldots + {}_{t-1|}A_x) = A_x + i\sum_{\lambda=1}^{\lambda=t-1} {}_{\lambda|}A_x, \quad \text{(VII')},$$

wzór analogiczny z wzorem (I') w art. 17-ym.

Jeżeli w (VII), względnie w (VII') założymy $i = 1$, t. j. że kapitał wzrasta corocznie o swą początkową wielkość, w którym to razie, według (α'), $k = t$, to przyjdziemy do wzoru:

$$\overset{1,+1,t}{A_x} = \frac{R_x - R_{x+t}}{D_x} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=t-1} {}_{\lambda|}A_x \quad \ldots\ldots \quad \text{(VII'')},$$

odpowiadającego wzorowi (II'') w art. 17-ym.

Gdy kapitał wzrasta nie przez lat t, lecz do śmierci, R_{x+t} staje się zerem, i wtedy jest:

$$\overset{1,+1}{A_x} = \frac{R_x}{D_x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII''')}.$$

Jeżeli ubezpieczenie jest odroczone na lat n, w takim razie, tą samą drogą, jak w art. 17-ym, znajdziemy:

$${}_{n|}\overset{1,+i,t}{A_x} = \frac{M_{x+n} + i\,(R_{x+n+1} - R_{x+n+t})}{D_{x+n}} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x},$$

czyli:

$${}_{n|}\overset{1,+i,t}{A_x} = \frac{M_{x+n} + i\,(R_{x+n+1} - R_{x+n+t})}{D_x} \quad \ldots\ldots \quad \text{(VIII)}.$$

Gdy wreszcie ubezpieczenie jest czasowe i ma trwać przez lat $n \geqslant t$, należy od (VII) odjąć wartość ubezpieczenia kapitału w wysokości k, odroczonego na lat n, t. j. $k \cdot \frac{M_{x+n}}{D_x} = \frac{(1 + \overline{t-1} \, . \, i)\, M_{x+n}}{D_x}$. Po wykonaniu odejmowania i redukcyi, otrzymujemy:

$${}_{|n}\overset{1,+i,t}{A_x} = \frac{M_x - M_{x+n} + i\,(R_{x+1} - R_{x+t} - \overline{t-1} \, . \, M_{x+n})}{D_x}. \quad \text{(IX)}.$$

Jeżeli w (IX) założymy $i = 1$ oraz $n = t$, będzie:

$${}_{|n}\overset{1,+1,n}{A_x} = \frac{R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n}}{D_x} \quad \ldots\ldots \quad \text{(X)}.$$

Np. dla $x = 40$, $n = 20$, wypada:

$${}_{|20}\overset{1,+1,n}{A_{40}} = \frac{R_{40} - R_{60} - 20\,M_{60}}{D_{40}}$$

$$= \frac{144286{,}27 - 36958{,}512 - 20 \times 3349{,}939}{17770{,}8}$$

$$= \frac{40328{,}978}{17770{,}8} = 2{,}269396.$$

Na tych wzorach możemy poprzestać, właściwie bowiem będzie nam potrzebny tylko wzór (X), wzory zaś dla kapitałów malejących, gdyby były potrzebne, mogą być łatwo otrzymane z wyżej podanych przez przyjęcie i za ujemne i wprowadzenie warunku $1-(t-1)i \geqslant 0$, tak samo jak w rentach. Dodamy tylko to samo cośmy przy końcu art. 17-go o rentach powiedzieli, że wzory (VII), (VIII) i (IX) są uogólnieniem wzorów na ubezpieczenie kapitałów stałych; gdy w wymienionych wzorach założymy $i=0$, otrzymamy wzory: (28) z art. 21-go, (32) i (31) z art. 23-go.

D. Ubezpieczenia skombinowane.

25. Ubezpieczenia mieszane. Z połączenia podanych wyżej trzech zasadniczych typów: ubezpieczenia rent, kapitałów na dożycie i na przypadek śmierci można ułożyć bardzo dużą liczbę kombinacyj, z których tutaj omówimy tylko kilka, najczęściej używanych; przytem premie jednorazowe netto oznaczać będziemy ogólnie przez Π_x, roczne przez ${}_vP_x$.

Najważniejszą z tych kombinacyj jest t. zw. ubezpieczenie mieszane, polegające na tem, że jeżeli osoba ubezpieczona umrze w ciągu z góry określonego czasu, np. w ciągu n lat, kapitał wypłaca się sukcesorom, jeżeli zaś przeżyje ten czas, wtedy kapitał wypłaca się jej samej.

Kombinacya ta najczęściej bywa w praktyce życiowej używana, ponieważ rzeczywiście najlepiej odpowiada potrzebom rodzinnym. Kapitału potrzebuje rodzina, gdy traci ojca przedwcześnie, wtedy bowiem dzieci są jeszcze małoletnie i nie potrafią na utrzymanie zapracować; gdy zaś dzieci są już dorosłe, gdy już zapracować na siebie umieją, wówczas kapitał potrzebniejszy jest zestarzałym rodzicom, aby nie byli ciężarem ani dla własnych dzieci, ani dla społeczeństwa. Obu tym potrzebom czyni właśnie zadość kombinacya mieszana.

Zadanie przedstawia się w ten sposób: Osoba x letnia ubezpiecza jednostkę kapitału, płatnego sukcesorom w razie jeżeli umrze przed upływem n lat od chwili zawarcia umowy, albo jej samej, jeżeli te n lat przeżyje.

Ubezpieczenie takie widocznie składa się z dwóch części: z ubezpieczenia czasowego pośmiertnego, trwającego przez lat n, i z ubezpieczenia na dożycie wieku lat $x+n$. Gdy więc wzór (31) połączymy z wzorem (26), otrzymamy wzór na premię jednorazową za ubezpieczenie jednostki kapitału według kombinacyi mieszanej, mianowicie:

$$\Pi_x = {}_{|n}A_x + {}_nE_x = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

Przy wypłacie kapitału zaraz po śmierci, jest:

$$\Pi_x = {}_{|n}\bar{A}_x + {}_nE_x = \frac{(M_x - M_{x+n}) . r^{\frac{1}{2}} + D_{x+n}}{D_x} \quad . \; . \; . \quad (37').$$

Gdy premia ma być płacona rocznie z góry, to, stosownie do tego cośmy w poprzednich artykułach powiedzieli, mianownik D_x w wyrażeniu na premię jednorazową trzeba zastąpić przez $N_x - N_{x+\nu}$, gdzie ν oznacza czas płacenia premij.

W dalszym ciągu stale przyjmować będziemy $\nu = n$, bo tak prawie zawsze w praktyce bywa, jak również pomijać będziemy wzory z wypłatą kapitału zaraz po śmierci, ponieważ przejście do nich jest łatwe i dobrze już czytelnikom znane.

Otóż, zgodnie z powyższem, otrzymamy następujący wzór na premię roczną za ubezpieczenie mieszane:

$${}_nP_x = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (38).$$

Np. dla $x = 35$, $n = 25$, będzie:

$M_{35} = 8209{,}1071$	$N_{35} = 378092{,}680$
$M_{60} = 3349{,}9390$	$N_{60} = 53019{,}852$
$M_{35} - M_{60} = 4859{,}1681$	Mianownik $= 325072{,}828$.
$D_{60} = 5389{,}164$	
Licznik $= 10248{,}3321$	

Zatem: $\quad {}_{25}P_{35} = \dfrac{10248{,}3321}{325072{,}828} = 0{,}031526$ od jednostki;

$$0{,}031526 \times 1000 = 31{,}53 \text{ netto od } 1000,$$

przy 25% dodatku na administracyę:

$$31{,}53 \times 1{,}25 = 39{,}41 \text{ brutto od } 1000.$$

26. Ciąg dalszy art. 25-go. Wzór (37), względnie (38) można uogólnić w ten sposób, że zarówno kapitał pośmiertny jak i dożyciowy mogą stanowić część lub wielokrotność jednostki. Jeżeli wogóle kapitał pośmiertny ma stanowić α razy wziętą jednostkę, dożyciowy β razy wziętą jednostkę, przyczem $\alpha \gtreqless 1$, $\beta \gtreqless 1$, to mamy:

$$\Pi_x = \frac{\alpha\,(M_x - M_{x+n}) + \beta\,D_{x+n}}{D_x} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (37''),$$

$${}_nP_x = \frac{\alpha\,(M_x - M_{x+n}) + \beta\,D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (38').$$

Weźmy jeszcze pod uwagę dwie kombinacye, które w praktyce asekuracyjnej bywają nazywane ubezpieczeniami półmieszanemi.

W pierwszej z tych kombinacyj kapitał wypłaca się zawsze w całości sukcesorom po śmierci osoby ubezpieczonej i oprócz tego połowę kapitału otrzymuje sam ubezpieczony, jeżeli przeżyje n lat po zawarciu umowy.

Gdy za kapitał całkowity przyjmiemy jednostkę, wtedy, oczywiście, wzorami na odnośne premie będą:

$$\Pi_x = \frac{M_x + \frac{1}{2} D_{x+n}}{D_x} \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

$$_nP_x = \frac{M_x + \frac{1}{2} D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad \ldots \ldots \quad (39')$$

W drugiej kombinacyi kapitał całkowity bywa wypłacany sukcesorom w takim tylko razie, jeżeli osoba ubezpieczona umrze w ciągu n lat, następujących bezpośrednio po zawarciu umowy; jeżeli ubezpieczony przeżyje te n lat, wówczas sam otrzymuje połowę kapitału ubezpieczonego, a drugą połowę wypłaca się sukcesorom po późniejszej śmierci osoby ubezpieczonej.

Ta kombinacya jest widocznie połączeniem ubezpieczenia mieszanego o terminie n letnim na połowę kapitału z ubezpieczeniem dożywotnio pośmiertnem na drugą połowę kapitału. Skutkiem tego premia jednorazowa równa się:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{M_x}{D_x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x},$$

czyli po zredukowaniu:

$$\Pi_x = \frac{M_x + \frac{1}{2}(D_{x+n} - M_{x+n})}{D_x} \quad \ldots \ldots \quad (40),$$

$$_nP_x = \frac{M_x + \frac{1}{2}(D_{x+n} - M_{x+n})}{N_x - N_{x+n}} \quad \ldots \ldots \quad (40').$$

27. Ubezpieczenie kapitałów z terminem stałym. Nieco inny rodzaj ubezpieczenia przedstawia t. zw. kombinacya z terminem stałym.

Kapitał wypłaca się bezwarunkowo w ściśle z góry oznaczonym terminie, bez względu na to, czy wówczas osoba ubezpieczona żyje lub nie żyje. Natomiast premie roczne wnoszą się tylko do chwili ewentualnej śmierci ubezpieczonego przed upływem terminu płatności kapitału.

Tu kapitał nie przedstawia przedmiotu ryzyka, ponieważ zawsze musi być w terminie wypłacony. W ryzyku są tylko premie roczne, które mogą być wnoszone przez czas krótszy lub dłuższy.

Wartością teraźniejszą jednostki kapitału, mającego się bezwarunkowo wypłacić po n latach, jest jego zdyskontowana wartość na n lat, bez względu na wiek osoby ubezpieczonej, jednorazowa zatem premia za to ubezpieczenie równa się v^n. Skutkiem tego wzorem na premię roczną dla osoby x letniej, według ogólnej reguły, jest:

$$\frac{v^n}{{}_n a_x} = v^n : \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x},$$

czyli:

$$ {}_nP_x = \frac{D_x \cdot v^n}{N_x - N_{x+n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41).$$

Np. dla osoby 30-letniej premia roczna, płatna przez lat 20, za ubezpieczenie jednostki kapitału z terminem stałym 20-letnim, wynosi:

$$\frac{D_{30} \cdot v^{20}}{N_{30} - N_{50}} = \frac{28860{,}79 \times 0{,}456387}{509677{,}65 - 132778{,}06} = 0{,}034947 \text{ od jednostki};$$

$$0{,}034947 \times 1000 = 34{,}95 \text{ netto od } 1000,$$

przy 25% dodatku na administracyę:

$$34{,}95 \times 1{,}25 = 43{,}69 \text{ brutto od } 1000.$$

Kombinacya ta doskonale się nadaje do ubezpieczenia dzieciom posagów, opartych na życiu ojca, w razie bowiem śmierci ojca premie nie potrzebują być dalej wnoszone, a mimo to kapitał będzie dziecku wypłacony za nadejściem terminu. Nadto, gdyby dziecko umarło przed terminem, ubezpieczenie, bez żadnych strat, może być przeniesione na inne dziecko lub kapitał wypłacony samym rodzicom.

Wszakże do zawarcia takiego ubezpieczenia ojciec musi być człowiekiem zdrowym (co stwierdzone być winno badaniem lekarskiem). Ludzie niedość zdrowi nie mogą z niego korzystać i z konieczności muszą się posiłkować ubezpieczeniem na dożycie terminu przez dziecko, o tyle niekorzystnem, że w razie śmierci ojca premie muszą być dalej wnoszone, co często przechodzi środki osieroconej rodziny; w razie zaś śmierci dziecka ubezpieczenie samo z siebie upada.

Do ubezpieczenia z terminem stałym dodaje się czasami warunek, aby w razie śmierci osoby ubezpieczonej nietylko premie nie były dalej wnoszone, ale nadto jeszcze, aby był płacony jakiś procent od kapitału ubezpieczonego aż do nadejścia terminu płatności kapitału. Jest to ubezpieczenie kapitału z terminem stałym i ewentualną rentą.

Kombinacya ta jest już bardziej skomplikowana i dlatego w bliższe o niej szczegóły wchodzić tu nie będziemy.

Uwaga 1. We wszystkich rodzajach ubezpieczeń, przewidzianych w częściach B, C i D, mogą być zastosowane premie malejące, które obliczają się w ten sam sposób, jak dla rent odroczonych (art. 18-ty).

Uwaga 2. Acz rzadko, może się jednak trafić, że klient życzy sobie część należności za ubezpieczenie zapłacić jednorazowo, a resztę spłacać premiami rocznemi. Chodzi wtedy o obliczenie wysokości tej premii rocznej dodatkowej.

Gdy przez C oznaczymy część, wniesioną jednorazowo na rachunek 1-ki kapitału lub renty ubezpieczonej, przez ${}_{\nu}P_x$ nieznaną premię roczną, płatną przez lat ν, a wartość ubezpieczenia, czyli całkowitą premię jednorazową netto za 1-kę ubezpieczenia przez Π_x, to powinno być:

$$C + {}_{\nu}P_x \cdot {}_{|\nu}a_x = \Pi_x.$$

Stąd:

$${}_{\nu}P_x = \frac{\Pi_x - C}{{}_{|\nu}a_x},$$

t. j. dodatkowa premia roczna oblicza się jak zwykle, tylko wartość ubezpieczenia (całkowita premia jednorazowa) zmniejsza się o jednorazowo wniesioną kwotę.

W rachunku powyższym C oznacza część premii jednorazowej netto, podczas gdy to, co klient wnosi, stanowi premię brutto. Okoliczność tę należy uwzględnić przy wyznaczaniu wielkości C, t. j. należy rzeczywiście wniesioną przez klienta kwotę zmniejszyć o dodatek na administracyę i dopiero z pozostałej reszty obrachować C.

E. Rezerwa premiowa.

28. Istota rezerwy premiowej. Ze sposobu wyprowadzania wzorów na premie jednorazowe i roczne wynika, że premie netto starczą na pokrycie wszystkich zobowiązań instytucyi względem osób ubezpieczonych—naturalnie o tyle, o ile śmiertelność rzeczywista zgadza się z śmiertelnością, wskazaną przez tablicę, na której oparliśmy rachunek, oraz o ile stopa rzeczywiście pozyskiwanego procentu zgadza się ze stopą techniczną.

Mimo to, aby unaocznić czytelnikowi powyżej zaznaczoną zgodność, weźmy przykład liczebny. W przykładzie tym będzie pewna niekonsekwencya z praktycznego punktu widzenia, mianowicie wejdą doń liczby ułamkowe osób zmarłych i żyjących. Teoretycznie jednak jest to rzecz dopuszczalna, a ze względu na nasz cel nawet konieczna, gdyż bez tego nie moglibyśmy wykazać liczebnie zgodności obliczeń.

W praktyce owe ułamkowe liczby osób urzeczywistniają się w taki sposób, że w jednym roku umiera osób mniej, w innym więcej niż z teoryi wypada, skutkiem czego rezultaty teoretyczne nabierają aktualnego znaczenia, mimo pozornej niekonsekwencyi.

Owóż załóżmy, że 1000 osób 53-letnich zawiera ubezpieczenie według kombinacyi mieszanej, każda na 1000 rub. z terminem 5-letnim, za premię roczną z góry rocznie przez lat pięć płatną.

Według wzoru (38) premia netto od jednostki kapitału, ubezpieczonego na powyższych warunkach, wynosi:

$$ {}_5P_{53} = \frac{M_{53} - M_{58} + D_{58}}{N_{53} - N_{58}} $$

$$ = \frac{4702{,}3937 - 3735{,}2415 + 6237{,}617}{103384{,}004 - 65061{,}803} = \frac{7204{,}7692}{38322{,}201} = 0{,}188005. $$

Każda więc osoba, żyjąca na początku każdego roku ubezpieczeniowego, za 1000 rub. płaci przez lat 5 lub do ewentualnie wcześniejszej śmierci po 188 rub. netto. Półkopiejki opuszczamy, co spowoduje w końcu pewien drobny brak, o czem z góry uprzedzamy.

Te 1000 osób (kol. 3 tablicy, pomieszczonej na str. 349) w chwili zawierania umowy wnoszą 188000 rub. (kol. 5), które, przy stopie 4%, zamieniają się w końcu roku na 188000 × 1,04 = 195520 rub. (kol. 7).

Ponieważ prawdopodobieństwo śmierci osoby 53-letniej, w ciągu roku, wynosi 0,02309, przeto z pośród 1000 osób tego wieku najprawdopodobniej umrze w ciągu roku 1000 × 0,02309 = 23,09 osób (kol. 8 — liczba ułamkowa, o czem mówiliśmy poprzednio), pozostanie zaś przy życiu osób 1000 — 23,09 = 976,91 (kol. 3).

Sukcesorom po 23,09 zmarłych wypłacimy, przy końcu roku, 1000 × 23,09 = 23090 rub. (kol. 9), pozostanie zatem 195520 — 23090 = 172430 (kol. 10). Pozostałość tę przenosimy do kol. 4-ej.

Każda z pozostałych przy życiu 976,91 osób (kol. 3) wnosi na początku drugiego roku (kol. 2) po 188 rub., razem wnoszą 188 × 976,91 = 183659,08 rub. (kol. 5), po dołączeniu pozostałych z poprzedniego roku 172430 rub., razem na początku drugiego roku mamy 172430 + 183659,08 = 356089,08 rub. (kol. 6), a przy końcu drugiego roku 356089,08 × 1,04 = 370332,64 rub. (kol. 7).

W ciągu drugiego roku najprawdopodobniej umrze osób 976,91 × 0,2470 = 24,13 (kol. 8); ich sukcesorom wypłacimy, przy końcu

Ruch premij netto, wnoszonych przez 1000 osób 53-letnich, ubezpieczonych, na 1000 rubli każda, według kombinacyi mieszanej z terminem 5-letnim. Roczna premia netto równa się 188 rub. (po opuszczeniu ½ kop.). Tablica śmiertelności M.I, stopa procentowa 4%.

Wiek	Na początku roku	Jest osób żyjących	Pozostaje z roku poprzedniego		Wpływa premij rocznych		Razem		Po rocznem oprocentowaniu przy 4% jest		W ciągu roku umiera osób	Sukcesorowie po zmarłych otrzymują przy końcu roku	Pozostaje przy końcu roku dla osób żyjących. (Rezerwa ogólna)		Pozostaje przy końcu roku osób żyjących	Rezerwa każdej żyjącej osoby przy końcu roku	
1	2	3	4		5		6		7		8	9	10		11	12	
53	1	1000,000	—	—	188000	—	188000	—	195520	—	23,090	23090	172430	—	976,910	176	50
54	2	976,910	172430	—	183659	08	356089	08	370332	64	24,130	24130	346202	64	952,780	363	36
55	3	952,780	346202	64	179122	64	525325	28	546338	29	25,096	25096	521242	29	927,684	561	87
56	4	927,684	521242	29	174404	59	695646	88	723472	76	26,124	26124	697348	76	901,560	773	49
57	5	901,560	697348	76	169493	28	866842	04	901515	72	27,146	27146	874369	72	874,414	999	95

roku drugiego 1000 $\times$ 24,13 = 24130 rub. (kol. 9) i pozostanie na początku roku trzeciego 370332,64—24130=346202,64 rub. (kol. 10 i 4).

Prowadząc w taki sam sposób rachunek dalej, aż do końca piątego roku, otrzymamy tablicę (str. 349), z której okazuje się, że w chwili wyekspirowania terminu pozostaje 874369,72 rub. (kol. 10) dla 874,414 pozostałych przy życiu osób (kol. 11), którym wypłacić musimy 1000 $\times$ 874,414 = 874414, t. j. brakuje nam (z powodu różnych zaokrągleń) tylko 874414 — 874369,72 = 44,28, czyli kwota nieznaczna w porównaniu do miliona wypłat (1000 osób po 1000 rubli).

Widzimy zatem, że istotnie premie netto, wnoszone przez osoby ubezpieczone, starczą na pokrycie wszystkich zobowiązań instytucyi (zawsze przy wiadomych warunkach), lecz na wszelkie inne wydatki premie netto środków nie dostarczają, gdybyśmy bowiem z wykazanych w kol. 10-ej pozostałości chcieli czerpać środki na administracyę, wtedy, oczywiście, brakłoby nam w końcu pieniędzy na zaspokojenie tych osób, które najprawdopodobniej po 5 latach pozostaną przy życiu.

To jest właśnie powód podwyższania premij netto o pewien dodatek na koszta administracyjne, i stąd powstają t. zw. premie brutto, jakie znajdujemy w taryfach towarzystw.

Skoro z sum, znajdujących się w kol. 10-ej, nie może instytucya czerpać na swoje potrzeby, musi je więc corocznie odkładać i oprocentowywać. Te odkładane sumy zowią się właśnie r e z e r w ą p r e m i o w ą ogółu ubezpieczonych. Dzieląc je przez liczbę osób pozostałych przy życiu (kol. 11), otrzymamy rezerwy premiowe dla każdej pojedynczej osoby. Znajdujemy je w kol. 12-ej i widzimy, że rezerwy stopniowo rosną aż do wysokości kapitału ubezpieczonego.

29. Wytrzymałość (pewność) instytucyi. Z poprzedniego artykułu okazuje się, jak ważną jest rzeczą prawidłowe obliczenie rezerwy premiowej i odkładanie jej zgodnie z obliczeniem. Jest to warunek równie ważny, jak prawidłowe obliczenie premij, wszelka bowiem nieścisłość, zarówno pod jednym jak i pod drugim względem, grozi bezpieczeństwu instytucyi.

Drugi wzgląd, z uwagi na bezpieczeństwo instytucyi, oprócz odpowiedniego oprocentowania kapitałów, jest zgodność śmiertelności rzeczywistej z oczekiwaną według użytej tablicy śmiertelności. Jeżeli śmiertelność w ubezpieczeniach pośmiertnych i mieszanych okaże się stale większą, a w ubezpieczeniach na dożycie stale mniejszą od przewidywanej, w takim razie instytucya z czasem również w niebezpieczeństwie znaleść się może.

Jest to t. zw. r y z y k o. Sprawa ryzyka już niejednokrotnie rozpatrywana była teoretycznie, dotąd jednak rezultaty otrzymane nie znalazły zastosowania w praktyce, z powodu różnych przyczyn, pomiędzy innemi z przyczyny zależności ryzyka od bardzo zmiennej liczby osób ubezpieczonych i wielkiej rozmaitości sum ubezpieczanych.

Stanowi to zatem brak, który wypełnić powinna czujność administracyi, oparta na wskazówkach teoretycznych. A więc przedewszystkiem administracya starać się powinna o jak największą liczbę ubezpieczonych, by uczynić zadość wymaganiu prawa wielkich liczb, gdyż przewidywania dobrej tablicy śmiertelności sprawdzić się mogą tylko na bardzo wielkiej liczbie osób.

Następnie, unikać powinna kombinacyj niepraktycznych i bardzo drogich, mogących posiadać niewielką tylko liczbę osób ubezpieczonych, różne bowiem warunki ubezpieczeniowe nie kompensują się wzajemnie; dlatego najrozumniej administrowane instytucye prawie zawsze ograniczają się do niewielkiej liczby najpraktyczniejszych kombinacyj.

Dalej dbać powinna o możliwie jednostajne rozłożenie wysokości kapitałów ubezpieczonych pomiędzy wszystkich uczestników, do czego służy reasekuracya przewyżek ponad przeciętną miarę wszystkich kapitałów na jednego ubezpieczonego.

Wreszcie z osiąganych zysków winna administracya odkładać kapitał z a s o b o w y, mający służyć do pokrywania strat nadzwyczajnych, spowodowanych np. przez epidemie lub t. p. wypadki trudne do przewidzenia. Niektórzy specyaliści temu ostatniemu warunkowi pewności instytucyi przypisują wyższe nawet znaczenie od rezerwy, lecz mniemanie takie, naszem zdaniem, jest niesłuszne; instytucya jest pewną wtedy dopiero, gdy przy pełnej i dobrze obliczonej rezerwie posiada odpowiednio ustosunkowany kapitał zasobowy.

30. Reguły obliczania rezerwy premiowej. Tabelka pomieszczona w art. 28-ym daje nam sposób obliczania rezerwy premiowej, sposób ten wszakże jest bardzo mozolny i dla praktyki nieodpowiedni.

Bardzo proste zastanowienie pozwoli nam znaleść inny sposób — prostszy i łatwiejszy do zastosowania.

W art. 6-ym poznaliśmy zasadę, na podstawie której obliczaliśmy premie netto: nadzieja matematyczna instytucyi powinna być równa nadziei matematycznej osoby ubezpieczonej. Otóż zasada ta stale utrzymywać się powinna przez cały czas trwania ubezpieczeń i ta właśnie okoliczność pozwoli nam odnaleść sposób obliczania rezerwy.

Sposoby są dwa: pierwszy opiera się na przyszłym przebiegu warunków ubezpieczenia (od chwili obliczania rezerwy do końca trwania ubezpieczeń), drugi na już ubiegłym (od chwili zawarcia umowy do chwili obliczania rezerwy). Pierwszy sposób, w praktyce asekuracyjnej, nazywa się p r o s p e k t y w n y m, drugi r e t r o s p e k t y w n y m.

My mówić tu będziemy tylko o sposobie prospektywnym, jako jaśniejszym i łatwiejszym do zrozumienia.

Wyznaczmy przedewszystkiem nadzieję matematyczną instytucyi i osoby ubezpieczonej po upływie μ lat od chwili zawarcia umowy przez osobę x letnią (w chwili zawierania umowy), obowiązaną płacić premie roczne przez lat n.

Nadzieja matematyczna, czyli wartość praw instytucyi składa się w tym momencie z dwóch części: z odłożonej i zachowanej w kasie, dotąd nam jeszcze nieznanej rezerwy premiowej, którą oznaczmy przez ${}_\mu V_x$ (rezerwa osoby x letniej po upływie μ lat od chwili zawarcia umowy), i z wartości matematycznej tego, co ubezpieczony ma jeszcze instytucyi zapłacić od chwili obliczania rezerwy do chwili wyekspirowania czasu płacenia premij. Osoba ubezpieczona jest obowiązana wnosić dalej premie roczne przez pozostałą liczbę $n-\mu$ lat, względnie do chwili wcześniejszej śmierci; gdy wartość tych, mających się jeszcze wnieść, premij (netto), w chwili obliczania rezerwy, oznaczymy przez ${}_{n-\mu}W_{x+\mu}$, to wartość praw instytucyi wyraża się przez ${}_\mu V_x + {}_{n-\mu}W_{x+\mu}$.

Wartość praw osoby ubezpieczonej jest wartością zawartego przez nią ubezpieczenia w chwili obliczania rezerwy, którą, jak wiemy, reprezentuje premia jednorazowa netto, jaką osoba $x+\mu$ letnia zapłaciłaby powinna za to samo ubezpieczenie, mające trwać jeszcze przez lat $n-\mu$. Gdy tę premię jednorazową oznaczymy przez $\Pi_{x+\mu}$, powinno być:

$$ {}_\mu V_x + {}_{n-\mu}W_{x+\mu} = \Pi_{x+\mu}; $$

stąd szukana rezerwa:

$$ {}_\mu V_x = \Pi_{x+\mu} - {}_{n-\mu}W_{x+\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42), $$

t. j. rezerwa premiowa od ubezpieczenia, zawartego przez osobę x letnią (w chwili zawarcia umowy) za opłatą premij rocznych, równa się jednorazowej premii netto, należnej za to samo ubezpieczenie w chwili obliczania rezerwy, zmniejszonej o wartość matematyczną mających się jeszcze wnieść przez ubezpieczonego rocznych premij netto.

Gdyby ubezpieczenie było zawarte na podstawie premii jednorazowej, ubezpieczony nie ma obowiązku wnosić dalej żadnych premij, czyli ich wartość równa się zeru, t. j.: ${}_{n-\mu}W_{x+\mu} = 0$, skutkiem czego:

$$ {}_\mu V_x = \Pi_{x+\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42'), $$

czyli, przy premiach jednorazowych rezerwa po μ latach równa się premii jednorazowej (netto), jaką osoba o μ lat starsza za to samo ubezpieczenie, w chwili obliczania rezerwy, zapłaciłaby musiała.

31. Zastosowanie reguły ogólnej obliczania rezerwy do ubezpieczeń poszczególnych. Ponieważ wartość matematyczna premij rocznych stałych równa się ich wysokości rocznej pomnożonej przez wartość jednostki renty czasowej, płatnej przez taki czas, przez jaki premia roczna ma być wnoszona, przeto $W_{x+\mu} = {}_nP_x \cdot {}_{|n-\mu}a_{x+\mu}$; skutkiem tego wzór (42) przechodzi na:

$$ {}_\mu V_x = II_{x+\mu} - {}_nP_x \cdot {}_{|n-\mu}a_{x+\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (43). $$

Stosując wzór (43), względnie (42′) do rozpatrywanych przez nas kombinacyj, otrzymujemy:

1) Dla rent:

a) natychmiastowych dożywotnich i czasowych (z góry płatnych):

$$ {}_\mu V(a_x) = \frac{N_{x+\mu}}{D_{x+\mu}}, \quad \text{względnie} \quad {}_\mu V({}_{|t}a_x) = \frac{N_{x+\mu} - N_{x+t}}{D_{x+\mu}}; $$

b) odroczonych dożywotnich i czasowych, ubezpieczonych za premię jednorazową, przy $\mu < n$:

$$ {}_\mu V({}_{n|}a_x) = \frac{N_{x+n}}{D_{x+\mu}}, \quad \text{względnie} \quad {}_\mu V({}_{n|t}a_x) = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_{x+\mu}}; $$

c) dla rent odroczonych, ubezpieczonych za premie roczne, również przy $\mu < n$:

$$ {}_\mu V({}_{n|}a_x) = \frac{N_{x+n}}{D_{x+\mu}} - {}_nP_x \cdot {}_{|n-\mu}a_{x+\mu} = \frac{N_{x+n}}{D_{x+\mu}} - \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+\mu} - N_{x+n}}{D_{x+\mu}} $$

i podobnie dla rent odroczonych czasowych.

Po upływie czasu odroczenia ($\mu > n$), rezerwa oblicza się tak samo, jak dla rent natychmiastowych dożywotnich i czasowych.

2) Dla kapitałów, ubezpieczonych na dożycie:

a) przy premiach jednorazowych:

$$ {}_\mu V({}_nE_x) = \frac{D_{x+n}}{D_{x+\mu}}, $$

b) przy premiach rocznych:

$$ {}_\mu V({}_nE_x) = \frac{D_{x+n}}{D_{x+\mu}} - {}_nP_x \cdot {}_{|n-\mu}a_{x+\mu} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+\mu}} - \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+\mu} - N_{x+n}}{D_{x+\mu}}. $$

3) Dla kapitałów pośmiertnych:

a) przy premiach jednorazowych:

$$ {}_\mu V(A_x) = \frac{M_{x+\mu}}{D_{x+\mu}}, $$

b) przy premiach rocznych, płatnych dożywotnio:

$$_{\mu}V(A_x) = \frac{M_{x+\mu}}{D_{x+\mu}} - P_x \cdot a_{x+\mu} = \frac{M_{x+\mu}}{D_{x+\mu}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+\mu}}{D_{x+\mu}}.$$

Podobnie postępować należy w każdej innej kombinacyi, a reguła jest tak prosta i jasna, że nie mamy potrzeby rozpatrywać każdej kombinacyi szczegółowo.

Natomiast, dla zilustrowania reguły na liczbach, obrachujmy powyższym sposobem rezerwy, znane nam już z tabelki, pomieszczonej w art. 28-ym.

Premia roczna od jednostki kapitału wynosiła tam:

$$_5P_{53} = 0{,}188005.$$

Rezerwą od jednostki po 2-ch latach jest:

$$_2V_{53} = \Pi_{53+2} - 0{,}188005 \cdot {}_{|5-2}a_{53+2}.$$

Ponieważ:

$$\Pi_{53+2} = \Pi_{55} = \frac{M_{55} - M_{58} + D_{58}}{D_{55}} = \frac{6818{,}5909}{7645{,}176} = 0{,}891881,$$

$$_{|5-2}a_{53+2} = {}_{|3}a_{55} = \frac{N_{55} - N_{58}}{D_{55}} = \frac{21491{,}166}{7645{,}176} = 2{,}811075,$$

$$0{,}188005 \times {}_{|3}a_{55} = 0{,}188005 \times 2{,}811075 = 0{,}528496,$$

zatem:

$$_2V_{53} = 0{,}891881 - 0{,}528496 = 0{,}363385 \text{ od 1-ki kapitału;}$$

$$0{,}363385 \times 1000 = 363{,}39 \text{ od 1000 rub. kapitału ubezpieczonego,}$$

czyli prawie to samo, co znajdujemy w wierszu drugim kol. 12-ej naszej tabelki z art. 28-go (363,36).

W taki sam sposób można sprawdzić wszystkie inne pozycye kol. 12-ej.

Po pięciu latach:

$$_{|0}a_{53+5} = {}_{|0}a_{58} = \frac{N_{58} - N_{58}}{D_{58}} = 0; \quad \Pi_{53+5} = \frac{M_{58} - M_{58} + D_{58}}{D_{58}} = 1;$$

skutkiem tego $_5V_{53} = 1 - 0 = 1$ od jednostki, $1 \times 1000 = 1000$ od 1000 rubli kapitału ubezpieczonego, t. j. tyle, ile nam potrzeba dla osoby ubezpieczonej, żyjącej po upływie lat pięciu.

32. Rezerwa w końcu roku sprawozdawczego. Podanym wyżej sposobem można obliczyć rezerwę premiową przy końcu każdego roku ubezpieczeniowego. Lecz rezerwa, w celach sprawozdawczych, oblicza się również na końcu roku kalendarzowego, t. j. na d. 31 grudnia, w którym niewiele polis kończy swój rok ubezpieczeniowy. Ażeby obliczyć wysokość rezerwy na d. 31 grudnia, należy ją obrachować na koniec roku ubezpieczeniowego, bezpośrednio poprzedzającego i bezpośrednio następującego po 31 grudnia danego roku sprawozdawczego i proporcyonalną część przyrostu rocznego, przypadającą na część poprzedzającą dzień 31 grudnia, dodać do rezerwy wypadłej na końcu roku ubezpieczeniowego, poprzedzającego dzień 31 grudnia.

Nie jest to jednak wszystko. Premie roczne, względnie półroczne, kwartalne lub miesięczne wnoszą się, jak wiemy, z góry za czas odpowiedni — tak, że ostatnia rata, wniesiona w roku sprawozdawczym, zazwyczaj mieści w sobie należność za część roku następnego. Otóż wniesioną z góry premię dzieli się proporcyonalnie pomiędzy rok sprawozdawczy i następny i tę ostatnią część włącza się do rezerwy jako przeniesienie premii, co razem wzięte stanowi t. zw. rezerwę pełną w końcu roku sprawozdawczego.

Suma w ten sposób obliczonych rezerw dla każdego ubezpieczenia pojedynczego stanowi rezerwę premiową ogółu ubezpieczonych i wchodzi do bilansu.

Taki sposób obliczania rezerwy premiowej zowie się systemem jednostkowym.

Sposób ten jest nadzwyczaj mozolny i może być stosowany tylko przez instytucye, posiadające stosunkowo niewielką jeszcze liczbę osób ubezpieczonych. Instytucye, cieszące się bardzo liczną klientelą, nie byłyby w możności sformować na czas bilansu, lub mogłyby to uczynić tylko kosztem nadmiernych wydatków.

Dlatego zamiast systemu jednostkowego wprowadza się system grupowy obliczania rezerwy, w którym pewna liczba odpowiednich ubezpieczeń łączy się w jednę grupę i rezerwa oblicza się dla całej grupy razem, jakby dla jednego ubezpieczenia.

Systemów grupowych jest kilka i przyznać trzeba, że się odznaczają dużą zręcznością. Ponieważ jednak podana przez nas reguła ogólna nie ulega przytem zmianie, a szczegóły obchodzą tylko specyalistów, zatem pomijamy ten przedmiot, odsyłając ciekawych do odnośnych prac, pomieszczonych w „Wiadomościach matematycznych“ *).

Dla dokładniejszego objaśnienia systemu jednostkowego obliczania rezerwy na d. 31 grudnia, uważamy za stosowne podać jeszcze następujący przykład liczebny.

Dajmy, że obliczone w art. 28-ym ubezpieczenie zostało zawarte w d. 1 maja 1900-go roku, przy 12% dodatku na administracyę.

---

*) B. Danielewicz: „W przedmiocie obliczania rezerwy premiowej od ubezpieczeń życiowych“. Wiad. mat. Tom IV, 1900 r.

Skoro roczna premia netto za to ubezpieczenie wynosi 188 rub., przeto premia brutto $= 188 \times 1{,}12 = 210{,}56$; załóżmy przytem, że jest wnoszona rocznie z góry.

Gdy chodzi o rezerwę na d. 31 grudnia 1902 r., należy obliczyć rezerwę na d. 1 maja 1902 r. i na dniu 1 maja 1903-go roku, t. j. po 2-ch i 3-ch latach trwania ubezpieczenia i wyznaczyć przyrost roczny.

Z odnośnej tablicy (w art. 28-ym, kol. 12) widzimy, iż:

rezerwa po 3-ch latach	= 561,87
„ „ 2-ch „	= 363,36
przyrost	198,51 ,

z czego na okres od 1 maja 1902-go roku do 31 grudnia 1902-go przypada $198{,}51 \times \frac{8}{12} =$ 132,34
po dodaniu rezerwy z d. 1 maja 1902 roku 363.36
otrzymujemy na rezerwę premiową na d. 31 grudnia 1902 r. 495,70

Że zaś ubezpieczony wniósł, tytułem premii brutto, za cały rok (od 1 maja 1902-go do 1 maja 1903 r.) rubli 210,56, z czego na rok 1902-gi przypada $\frac{2}{3}$, a $\frac{1}{3}$ na rok 1903-ci, zatem z 210,56 rub. należy na rok 1903-ci przenieść $210{,}56 \times \frac{1}{3} =$ 70,19
skutkiem czego rezerwa pełna na d. 31 grudnia 1902-go roku wynosi 565,89,
którą na rachunek danego ubezpieczenia w bilansie zapisać należy.

F. Ubezpieczenia ze zwrotem premij (bez procentów).

33. Wiadomości ogólne. We wszystkich dotąd rozważanych rodzajach ubezpieczeń, osoba ubezpieczona lub przez nią obdarowana otrzymywały sam tylko kapitał ubezpieczony albo rentę, gdy zaszły warunki, na jakich ubezpieczenie zostało zawarte; premie przechodziły zawsze w całości na rzecz instytucyi, względnie na rzecz całego ogółu ubezpieczonych. Obecnie zajmiemy się ubezpieczeniami, w których ubezpieczony, albo osoba obdarowana otrzymują w pewnych razach zwrot premij, wniesionych przez osobę ubezpieczoną.

Zwrot wniesionych premij, w razie zajścia przewidzianych z góry okoliczności, może być zastrzeżony we wszelkiego rodzaju kombinacyach, wszakże racyonalne znaczenie posiada tylko wtedy, gdy jest zastrzeżony na przypadek nie osiągnięcia głównego celu, dla jakiego ubezpieczenie zostało zawarte Jeżeli np. ubezpiecza ktoś rentę odroczoną i umiera przed upływem czasu odroczenia, wówczas renta się nie wypłaca, czyli cel ubezpieczenia nie zostaje osiągnięty, może więc ubezpieczony zastrzedz sobie, aby w razie takim wniesione przezeń premie były zwrócone tej lub innej osobie. Podobnie, gdy ktoś ubezpiecza sobie kapitał na dożycie z góry oznaczonego terminu i umiera przed jego nadejściem, kapitał nie będzie wypłacony — cel ubezpieczenia nie zostaje osiągnięty. Albo ubezpiecza się kapitał pośmiertny czasowo, lecz osoba ubezpieczona nie umiera w okresie trwania umowy—znów cel nie zostaje osiągnięty, i t. d.

Za tak podwyższone warunki, ubezpieczony, naturalnie, musi zapłacić i płaci rzeczywiście premie wyższe niż za ubezpieczenia zwyczajne. Chodzi nam właśnie o sposoby wyznaczania tych premij podwyższonych.

Premie mogą być zwracane albo netto albo brutto. Ponieważ jednak ubezpieczeni premij netto nie znają i każdemu w takich razach chodzi, oczywiście, o to wszystko, co wniósł, przeto znaczenie aktualne posiadają tylko ubezpieczenia ze zwrotem premij brutto.

Premie netto w tego rodzaju ubezpieczeniach oznaczać będziemy: jednorazowe przez Π, roczne przez π. Premie brutto otrzymują się z netto przez dodanie do tych ostatnich pewnego procentu na administracyę. Gdy stopę dodatku od jednostki premii netto oznaczymy przez i', a czynnik oprocentowujący przez θ, t. j. $\theta = 1 + i'$, to premiami brutto, odpowiadającemi premiom netto Π i π, są $\Pi\theta$, względnie $\pi\theta$. Np. gdy premia netto od 1000 wynosi 58,16, dodatek na administracyę stanowi 25% premii netto, t. j. $\theta = 1,25$, premia brutto $= 58,16 \times 1,25 = 72,70$.

Zajmiemy się przedewszystkiem najczęściej się trafiającemi ubezpieczeniami kapitałów na dożycie, ze zwrotem wniesionych premij brutto w razie śmierci osoby ubezpieczonej przed nadejściem terminu płatności kapitału.

34. Premie jednorazowe. Weźmy następujące zadanie. Osoba x letnia ubezpiecza jednostkę kapitału, płatnego po upływie n lat w razie, jeżeli wówczas pozostawać będzie przy życiu; jeżeli zaś umrze przed upływem n lat, to wszystkie wniesione przez nią do śmierci premie brutto mają być zwrócone sukcesorom, albo wogóle osobie wskazanej przez ubezpieczonego w polisie, przy końcu roku ubezpieczeniowego, w którym śmierć nastąpi.

Rozważmy najprzód przypadek zawarcia ubezpieczenia za premię jednorazową, którą, jak wyżej nadmieniliśmy, oznaczać będziemy przez Π_x, i obliczmy obustronne nadzieje matematyczne.

Nadzieja matematyczna instytucyi, jak wiemy, równa się otrzymanej przez nią premii jednorazowej netto Π_x (dodatek na administracyę nie wchodzi w rachunek, ponieważ ma swoje specyalne przeznaczenie pokrywania kosztów utrzymania instytucyi).

Nadzieja matematyczna osoby ubezpieczonej składa się z dwóch części: z wartości matematycznej jednostki kapitału, ubezpieczonego na przypadek przeżycia n lat, i z wartości matematycznej ubezpieczenia czasowego (trwającego przez lat n) kapitału na przypadek śmierci w wysokości $\Pi_x \theta$.

Drogą takiego samego, jak w poprzednich artykułach, rozumowania przychodzimy łatwo do wniosku, że wartość matematyczna na powyższych warunkach zawartego ubezpieczenia wynosi:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} + \Pi_x \theta \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Powinno być:

$$\Pi_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \Pi_x \theta \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \quad \ldots\ldots \quad (\beta),$$

skąd:

$$\Pi({}_nE_x) = \frac{D_{x+n}}{D_x - \theta(M_x - M_{x+n})} \quad \ldots\ldots \quad (44).$$

Gdyby premia miała być zwrócona zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, byłoby:

$$\bar{\Pi}({}_nE_x) = \frac{D_{x+n}}{D_x - \theta r^{\frac{1}{2}}(M_x - M_{x+n})} \quad \ldots\ldots \quad (44').$$

W razie zwracania premij netto, w (44) i (44′) należy założyć $\theta = 1$.

Stosując wzór (44) do przykładu podanego w art. 19-ym, dla osoby 30-o letniej z terminem 25-o letnim, otrzymamy na premię jednorazową:

$$\Pi({}_{25}E_{30}) = \frac{D_{55}}{D_{30} - 1{,}1(M_{30} - M_{55})} = \frac{7645.176}{23425{,}05} = 0{,}326368$$

netto od jednostki kapitału;

$0{,}326368 \times 1000 = 326{,}37$ netto od 1000 (zamiast dawniejszej 264,90), $326{,}37 \times 1{,}1 = 359{,}01$ brutto od 1000 (zamiast dawniejszej 291,39); lecz za to w poprzedniem ubezpieczeniu sukcesorowie nic nie otrzymują w razie śmierci osoby ubezpieczonej przed upływem lat 25-ciu, obecnie zaś w razie takim otrzymują 359,01.

35. Premie roczne. Gdy chodzi o premię roczną (netto), którą oznaczmy przez ${}_n\pi_x$, nadzieja matematyczna instytucyi posiada wartość:

$${}_n\pi_x \cdot {}_na_x = {}_n\pi_x \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

Nadzieja matematyczna osoby ubezpieczonej składa się z dwóch części: z ubezpieczenia 1-ki kapitału na dożycie, którego wartością matematyczną jest $\frac{D_{x+n}}{D_x}$, i z czasowego, przez lat n trwającego, ubezpieczenia kapitału pośmiertnego, poczynającego się od wysokości rocznej premii brutto ${}_n\pi_x\theta$ i zwiększającego się co rok (aż do ewentualnej śmierci osoby ubezpieczonej) o tę samą premię roczną ${}_n\pi_x\theta$. Wartością matematyczną tej drugiej części danego ubezpieczenia, według wzoru (X) w art. 24-ym, jest:

$$ {}_n\pi_x\theta\,\frac{R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n}}{D_x}. $$

Po złączeniu części pierwszej z drugą wypada na nadzieję matematyczną osoby ubezpieczonej wartość:

$$ \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{{}_n\pi_x\theta\,(R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n})}{D_x} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\gamma), $$

która powinna być równa nadziei matematycznej instytucyi, t. j. mamy równanie:

$$ {}_n\pi_x . \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = \frac{D_{x+n} + {}_n\pi_x . \theta\,(R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n})}{D_x} \quad . \quad (\delta); $$

z niego otrzymujemy wyrażenie na szukaną roczną premię netto:

$$ {}_n\pi\,({}_nE_x) = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - \theta\,(R_x - R_{x+n} - n\,M_{x+n})} \quad . \; . \quad (45). $$

Gdyby premie miały być zwrócone zaraz po ewentualnej śmierci osoby ubezpieczonej:

$$ {}_n\bar{\pi}\,({}_nE_x) = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - \theta\,r^{\frac{1}{2}}(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n})} \quad . \; . \quad (45'). $$

Stosując (45) do przykładu, rozwiązanego w art. 19-ym, otrzymujemy na roczną premię netto:

$$ {}_{25}\pi\,({}_{25}E_{30}) = \frac{D_{55}}{N_{30} - N_{55} - 1{,}1\,(R_{30} - R_{55} - 25\,M_{55})} $$

$$ = \frac{7645{,}176}{353853{,}72} = 0{,}021605 \text{ od jednostki kapitału;} $$

$$ 0{,}021605 \times 1000 = 21{,}61 \text{ netto od } 1000 \text{ (zamiast } 18{,}07), $$
$$ 21{,}61 \times 1{,}1 = 23{,}77 \text{ brutto od } 1000 \text{ (zamiast } 19{,}88); $$

lecz za to przy pierwszym sposobie ubezpieczenia, w razie śmierci osoby ubezpieczonej przed upływem lat 25-ciu, sukcesorowie nic nie otrzymują, przy drugim sposobie otrzymują wszystkie wniesione przez ubezpieczonego aż do śmierci premie brutto.

Zakładając we wzorach (44) i (45) $\theta = 0$, przychodzimy do wzorów (26) i (27) w art. 19-ym.

Postępując zupełnie tak samo, znajdziemy odpowiednie wzory dla rent i kapitałów odroczonych, mianowicie:

dla rent dożywotnich, odroczonych na n lat:

$$\Pi\left({}_{n|}a_x\right) = \frac{N_{x+n}}{D_x - \theta(M_x - M_{x+n})} \quad \ldots\ldots \quad (44''),$$

$$_n\pi\left({}_{n|}a_x\right) = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - \theta(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n})} \quad (45'');$$

dla kapitałów pośmiertnych, odroczonych na lat n:

$$\Pi\left({}_{n|}A_x\right) = \frac{M_{x+n}}{D_x - \theta(M_x - M_{x+n})} \quad \ldots\ldots \quad (44'''),$$

$$_n\pi\left({}_{n|}A_x\right) = \frac{M_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - \theta(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n})} \quad (45''').$$

36. Uwagi. I. W art. 15-ym podaliśmy reguły, omawiające, że premie jednorazowe (netto) są równe wartości matematycznej odpowiednich im premij rocznych (netto), a temsamem, że premia roczna równa się ilorazowi, wypadłemu z podzielenia premii jednorazowej przez wartość jednostki renty rocznej, płatnej w taki sam sposób, jak się płacą premie roczne. Nadmieniliśmy przytem, iż te reguły stosują się również do ubezpieczeń ze zwrotem premij, chociaż na pozór może się wydawać inaczej.

Owóż, jeżeli porównamy wzór (45) z wzorem (44) w artykule poprzednim spostrzeżemy od razu, iż pomiędzy $\Pi({}_nE_x)$ i $_n\pi({}_nE_x)$ nie zachodzi wzmiankowany wyżej związek. Nie pochodzi to jednak stąd, aby powyższe reguły nie stosowały się do ubezpieczeń ze zwrotem premij, lecz ponieważ tu obie premie — jednorazowa i roczna odnoszą się nie do tego samego ubezpieczenia, lecz do dwóch odmiennych: pierwsza do ubezpieczenia 1-ki kapitału na dożycie z ewentualnym zwrotem premii $\theta\,\Pi({}_nE_x)$, druga do ubezpieczenia 1-ki kapitału na dożycie i ewentualnego zwrotu tylu premij $\theta\,{}_n\pi({}_nE_x)$, ile ich ubezpieczony wniesie przed śmiercią. Wysokość pierwszego zwrotu ewentualnego przedstawia zatem sumę stałą, niezależną od chwili śmierci osoby ubezpieczonej, wysokość zaś drugiego zwrotu jest zmienna i zależy od chwili śmierci osoby ubezpieczonej.

Właściwą premią jednorazową od ubezpieczenia (45) jest (γ), a skoro tak, tedy okazuje się z (δ), iż (45) wypada z podzielenia (γ) przez $\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = {}_{|n}a_x$, t. j. tak samo, jak we wszystkich innych rodzajach ubezpieczeń.

II. We wzorach (44) i (45) wchodzą do mianowników różnice, zawierające czynnik dowolny $\theta = 1 + i'$, zależnie więc od wielkości θ mianowniki mogą przybierać wartości dodatnie, zero lub ujemne. Ponieważ znaczenia dorzeczne posiadają tylko premie dodatnie skończone, zatem θ, a temsamem i dodatek na administracyę, w ubezpieczeniach ze zwrotem premij, nie może przekraczać pewnych granic, mianowicie:

dla premij jednorazowych musi być:

$$D_x - \theta (M_x - M_{x+n}) > 0.$$

czyli:

$$\theta < \frac{D_x}{M_x - M_{x+n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha);$$

dla premij rocznych:

$$N_x - N_{x+n} - \theta (R_x - R_{x+n} - n\, M_{x+n}) > 0,$$

czyli:

$$\theta < \frac{N_x - N_{x+n}}{R_x - R_{x+n} - n\, M_{x+n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta).$$

W przykładzie podanym w art. 34-ym powinno być:

$$\theta < \frac{D_{30}}{M_{30} - M_{55}} = \frac{28860{,}79}{4941{,}5832} = 5{,}8 \ldots;$$

w przykładzie podanym w art. 35-ym:

$$\theta < \frac{N_{30} - N_{55}}{R_{30} - R_{55} - 25\, M_{55}} = \frac{423124{,}681}{62973{,}599} = 6{,}7 \ldots$$

Jak widzimy, w danych ubezpieczeniach granice są tak wysokie, że o ich przekroczeniu mowy być nie może; mogą się jednak trafić przypadki, w których z tą okolicznością rachować się trzeba, i dlatego zwracamy na nią uwagę czytelników naszych *).

37. Rezerwa przy premiach jednorazowych. Pozostaje nam jeszcze zbadać, jak się oblicza rezerwa premiowa w ubezpieczeniach ze zwrotem premij. Zasada pozostaje ta sama, że w każdym momencie

---

*) Bliższe szczegóły o tym przedmiocie znaleść można w B. Danielewicza „Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych“ (Warszawa, 1896).

trwania umowy nadzieja matematyczna instytucyi powinna być równa nadziei matematycznej osoby ubezpieczonej.

Gdy ubezpieczenie zostało zawarte na podstawie premii jednorazowej, instytucya nie otrzymuje od ubezpieczonego nic więcej nad wniesioną premię przy zawarciu umowy; jej więc nadzieja matematyczna sprowadza się do wysokości rezerwy, jaką posiadać winna, i tę oznaczmy, jak dawniej, przez ${}_{\mu}V_x$, gdzie x oznacza wiek osoby ubezpieczonej w chwili zawierania umowy, μ liczbę lat, po upływie której obliczamy rezerwę.

Nadzieja matematyczna osoby ubezpieczonej równa się wartości ubezpieczenia w chwili obliczania rezerwy, t. j. wartości 1-ki kapitału, płatnego po $n - \mu$ latach, jeżeli ubezpieczony tego terminu dożyje $+$ wartość zwrotu wniesionej premii brutto, jeżeli umrze przed upływem $n - \mu$ lat.

Wartość pierwszej części ubezpieczenia równa się, jak wiemy, $\frac{D_{x+n}}{D_{x+\mu}}$; wartość części drugiej równa się wartości kapitału pośmiertnego w wysokości $\Pi_x \theta$, ubezpieczonego czasowo na $n - \mu$ lat przez osobę $x + \mu$ letnią, która wynosi $\Pi_x \theta \frac{M_{x+\mu} - M_{x+n}}{D_{x+\mu}}$.

Z tego wynika, że być powinno:

$$
\begin{aligned}
{}_{\mu}V_x &= \frac{D_{x+n}}{D_{x+\mu}} + \Pi_x \theta \frac{M_{x+\mu} - M_{x+n}}{D_{x+\mu}} \\
&= \Pi_x \left\{ \frac{D_{x+n}}{D_{x+\mu}\,\Pi_x} + \frac{\theta\,(M_{x+\mu} - M_{x+n})}{D_{x+\mu}} \right\}.
\end{aligned}
$$

Gdy teraz za Π_x w klamrze podstawimy odpowiednie mu wyrażenie $\frac{D_{x+n}}{D_x - \theta\,(M_x - M_{x+n})}$, wypadnie:

$$
\begin{aligned}
{}_{\mu}V_x &= \Pi_x \left\{ \frac{D_x - \theta\,(M_x - M_{x+n}) + \theta\,(M_{x+\mu} - M_{x+n})}{D_{x+\mu}} \right\} \\
&= \Pi_x \left\{ \frac{D_x - \theta\,(M_x - M_{x+\mu})}{D_{x+\mu}} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha).
\end{aligned}
$$

Lecz:

$$
\frac{D_x - \theta\,(M_x - M_{x+\mu})}{D_{x+\mu}} = \frac{1}{\dfrac{D_{x+\mu}}{D_x - \theta\,(M_x - M_{x+\mu})}}.
$$

Mianownik ostatniego wyrażenia jest widocznie premią jednorazową netto za ubezpieczenie 1-ki kapitału (osobie x letniej) na dożycie terminu μ letniego (t. j. terminu obliczania rezerwy) ze zwrotem premii jednorazowej brutto w razie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej. Po podstawieniu tego w (α), otrzymujemy:

$$_{\mu}V(_{n}E_{x}) = \frac{\Pi(_{n}E_{x})}{\Pi(_{\mu}E_{x})} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46),$$

t. j. rezerwa premiowa równa się ilorazowi, otrzymanemu z podzielenia wniesionej przez ubezpieczonego jednorazowej premii netto przez premię jednorazową netto, jaką tenże ubezpieczony wnieśćby powinien, gdyby ubezpieczył 1-kę kapitału na dożycie terminu obliczenia rezerwy ze zwrotem odpowiedniej premii brutto w razie wcześniejszej śmierci.

W przykładzie, obliczonym w art. 34-ym, rezerwa po 15-tu latach od 1-ki równa się ilorazowi, wypadłemu z podzielenia 0,326368 przez premię jednorazową netto, jaką ta sama osoba 30-letnia wnieśćby musiała za takie samo ubezpieczenie, lecz z terminem 15-letnim, czyli:

$$\Pi(_{15}E_{30}) = \frac{D_{45}}{D_{30} - 1{,}1\,(M_{30} - M_{45})} = 0{,}536584.$$

Następnie:

$$_{15}V(_{25}E_{30}) = \frac{0{,}326368}{0{,}536584} = 0{,}608233 \text{ od 1-ki kapitału,}$$

$$0{,}608233 \times 1000 = 608{,}23 \text{ od } 1000.$$

Gdyby wniesiona jednorazowa premia netto 326,37 była oddana na procent składany przy stopie 4%, mielibyśmy po 15 latach $326{,}37 \times 1{,}800944 = 587{,}77$, czyli nieco mniej od rezerwy. To zwiększenie pochodzi z zysków, jakie płyną ze śmierci osób 30-o letnich, jednocześnie ubezpieczonych i zmarłych w przeciągu owych lat 15-u.

Według wzoru (46), rezerwa po n latach, t. j. przy $\mu = n$, czyli w chwili nadejścia terminu płatności kapitału ubezpieczonego na dożycie, wynosi:

$$_{n}V(_{n}E_{x}) = \frac{\Pi(_{n}E_{x})}{\Pi(_{n}E_{x})} = 1 \text{ od 1-ki kapitału,}$$

t. j. równa się kapitałowi ubezpieczonemu, jaki mamy wypłacić osobie ubezpieczonej, pozostającej przy życiu w chwili płatności kapitału.

38. Rezerwa przy premiach rocznych. Gdy ubezpieczenie jest zawarte za premie roczne, nadzieja matematyczna instytucyi, w chwili obliczania rezerwy, równa się szukanej rezerwie $_{\mu}V_{x}$ + wartość matematyczna mających się jeszcze wnieść przez ubezpieczonego rocznych premij netto. Wartość tych premij, jak wiemy, równa się ${}_n\pi_x \,.\, {}_{n-\mu}a_{x+\mu}$ $= {}_n\pi_x \,.\, \frac{N_{x+\mu} - N_{x+n}}{D_{x+\mu}}$; skutkiem tego nadzieja matematyczna instytucyi wyraża się przez:

$$ {}_\mu V_x + {}_n\pi_x \,.\, \frac{N_{x+\mu} - N_{x+n}}{D_{x+\mu}} \,. $$

Nadzieja matematyczna ubezpieczonego, w tej samej chwili, składa się z trzech części: 1) z wartości kapitału ubezpieczonego na dożycie, płatnego po $n - \mu$ latach, równej $\frac{D_{x+n}}{D_{x+\mu}}$, 2) z wartości zwrotu μ premij rocznych brutto, wniesionych do chwili obliczania rezerwy, równej $\mu \,.\, {}_n\pi_x\theta \,.\, \frac{M_{x+\mu} - M_{x+n}}{D_{x+\mu}}$ i 3) z wartości matematycznej zwrotu rocznych premij brutto, mających się wnieść do chwili ewentualnej śmierci osoby ubezpieczonej przed upływem $n - \mu$ lat, która się równa:

$$ {}_n\pi_x\,\theta \,.\, \frac{R_{x+\mu} - R_{x+n} - (n-\mu) M_{x+n}}{D_{x+\mu}} \,. $$

Całkowita nadzieja matematyczna osoby ubezpieczonej wynosi zatem:

$$ \frac{D_{x+n}}{D_{x+\mu}} + \mu \,.\, {}_n\pi_x\theta \frac{M_{x+\mu} - M_{x+n}}{D_{x+\mu}} + {}_n\pi_x\theta \,.\, \frac{R_{x+\mu} - R_{x+n} - (n-\mu) M_{x+n}}{D_{x+\mu}} $$

i powinna być równa nadziei matematycznej instytucyi, czyli mamy równanie:

$$ {}_\mu V_x + {}_n\pi_x \,.\, \frac{N_{x+\mu} - N_{x+n}}{D_{x+\mu}} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+\mu}} + \mu \,.\, {}_n\pi_x\theta \,.\, \frac{M_{x+\mu} - M_{x+n}}{D_{x+\mu}} $$
$$ + {}_n\pi_x\theta \,.\, \frac{R_{x+\mu} - R_{x+n} - (n-\mu) M_{x+n}}{D_{x+\mu}} \,, $$

z którego można wyznaczyć rezerwę ${}_\mu V_x$.

Wyrażenie powyższe daje się uprościć; jest mianowicie:

$$ {}_\mu V_x = \frac{{}_n\pi_x}{D_{x+\mu}} \Big\{ -(N_{x+\mu} - N_{x+n}) + \frac{D_{x+n}}{{}_n\pi_x} + \mu\theta (M_{x+\mu} - M_{x+n}) $$
$$ + \theta (R_{x+\mu} - R_{x+n} - \overline{n - \mu} \,.\, M_{x+n}) \Big\} \,. $$

Po podstawieniu za ${}_n\pi_x$ w klamrach odpowiedniego mu wyrażenia

$$ {}_n\pi_x = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - \theta (R_x - R_{x+n} - n\, M_{x+n})} \,, $$

po otwarciu nawiasów i zredukowaniu wyrazów podobnych, jest:

$$ {}_{\mu}V_x = \frac{{}_n\pi_x}{D_{x+\mu}} \{N_x - N_{x+\mu} - \theta(R_x - R_{x+\mu} - \mu M_{x+\mu})\}, $$

albo:

$$ {}_{\mu}V_x = \frac{{}_n\pi_x}{\dfrac{D_{x+\mu}}{N_x - N_{x+\mu} - \theta(R_x - R_{x+\mu} - \mu M_{x+\mu})}}; $$

ponieważ wreszcie:

$$ \frac{D_{x+\mu}}{N_x - N_{x+\mu} - \theta(R_x - R_{x+\mu} - \mu M_{x+\mu})} = {}_{\mu}\pi_x, $$

jest zatem ostatecznie:

$$ {}_{\mu}V({}_nE_x) = \frac{{}_n\pi({}_nE_x)}{{}_{\mu}\pi({}_{\mu}E_x)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47), $$

t. j., podobnie jak przy premiach jednorazowych, rezerwa premiowa równa się ilorazowi, otrzymanemu z podzielenia opłacanej przez ubezpieczonego rocznej premii netto przez roczną premię netto, jaką tenże ubezpieczony opłacaćby musiał za jednostkę kapitału, ubezpieczonego na dożycie terminu obliczania rezerwy, ze zwrotem odpowiednich premij brutto, wniesionych do chwili śmierci, w razie gdyby ubezpieczony umarł przed nadejściem terminu płatności kapitału.

Stosując tę regułę do przykładu podanego w art. 35-ym, w którym roczna premia netto wynosiła 0,021605, dla $\mu = 15$, otrzymamy:

$$ {}_{15}\pi({}_{15}E_{30}) = \frac{D_{45}}{N_{30} - N_{45} - 1{,}1\,(R_{30} - R_{45} - 15\,M_{45})} = 0{,}047381, $$

$$ {}_{15}V({}_{25}E_{30}) = \frac{0{,}021605}{0{,}047381} = 0{,}455984 \text{ od 1-ki kapitału;} $$

$$ 0{,}455984 \times 1000 = 455{,}98 \text{ od } 1000. $$

Rezerwa po $\mu = n$ latach, t. j. w chwili nadejścia terminu płatności kapitału, wzrasta do:

$$ {}_nV({}_nE_x) = \frac{{}_n\pi({}_nE_x)}{{}_n\pi({}_nE_x)} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47'), $$

czyli, jak być powinno, równa się kapitałowi, mającemu się wypłacić osobie ubezpieczonej w razie, jeżeli w tym czasie pozostawać będzie przy życiu.

Zupełnie w taki sam sposób (zarówno przy premiach jednorazowych jak rocznych) wyprowadzić można taką samą regułę dla ubezpieczeń rent odroczonych i kapitałów pośmiertnych odroczonych, ze zwrotem premij w razie śmierci osoby ubezpieczonej przed upływem lat odroczenia. Dzielną (licznikiem) jest również premia netto (jednorazowa lub roczna), płacona za dane ubezpieczenie przez osobę ubezpieczoną; dzielnikiem (mianownikiem) jest premia netto (odpowiednio—jednorazowa lub roczna), jaką ta sama osoba zapłacić lub płacićby musiała za ubezpieczenie 1-ki kapitału, ubezpieczonego na dożycie terminu obliczania rezerwy, ze zwrotem odpowiednich temu ubezpieczeniu premij brutto, wniesionych do chwili ewentualnej śmierci ubezpieczonego przed nadejściem terminu płatności kapitału (określonego chwilą obliczania rezerwy).

G. Ubezpieczenia, oparte na życiu dwóch osób.

39. Renty wspólne. Wszystkie dotąd rozważane przez nas kombinacye ubezpieczeniowe były oparte na życiu jednej osoby. Lecz ubezpieczenia mogą być także oparte na życiu dwóch, trzech i więcej osób. Zasada pozostaje ta sama, zawsze zarówno premie jak i rezerwy obliczają się ze zrównania nadziei matematycznej instytucyi z nadzieją matematyczną osób ubezpieczonych, rachunek tylko jest bardziej skomplikowany.

Ubezpieczenia, oparte na życiu dwóch, zwłaszcza zaś trzech lub więcej osób, nie posiadają dużego uznania wśród publiczności, skutkiem czego odnośne instytucye rzadko je wprowadzają w sferę swej działalności. Jak dotąd ten rodzaj ubezpieczeń znajduje głównie zastosowanie w kasach emerytalnych, o których później będzie mowa.

Dlatego ubezpieczeniami temi szczegółowo zajmować się tu nie będziemy; weźmiemy parę tylko przykładów, aby czytelnikowi dać pojęcie, jak w takich razach postępować należy.

Niech będą dwie osoby (np. mąż i żona) w wieku lat x i y. Osoby te ubezpieczają sobie jednostkę renty rocznej, płatnej natychmiast z góry aż do śmierci jednej z nich; nazywa się to rentą wspólną. Chodzi o wartość matematyczną takiego ubezpieczenia, czyli o premię jednorazową, jaką te osoby zapłacić powinny. Wartość matematyczną, czyli premię jednorazową netto za taką rentę oznaczmy przez $a_{x.y}$.

Z góry płaci instytucya jednostkę za rok pierwszy, której wartość matematyczna równa się 1. Jeżeli po roku obie osoby żyć będą, instytucya zapłaci im znów jednostkę, która dziś jest warta $1.v = v$, a ponieważ prawdopodobieństwo wspólnego życia obu tych osób po roku równa się $\frac{l_{x+1}}{l_x}\cdot\frac{l_{y+1}}{l_y}$, przeto wartość matematyczna pomienionej wypłaty w chwili zawierania umowy, równa się $v\cdot\frac{l_{x+1}}{l_x}\cdot\frac{l_{y+1}}{l_y}=\frac{l_{x+1}v\cdot l_{y+1}}{l_x\cdot l_y}$. Podobnie wartość matematyczna wypłaty trzeciej jednostki, po dwóch latach, wynosi $\frac{l_{x+2}v^2\cdot l_{y+2}}{l_x\cdot l_y}$, i t. d. do końca tablicy śmiertelności.

Gdy za pierwszą jednostkę podstawimy $\frac{l_x\,l_y}{l_x\,l_y}=1$, otrzymamy:

$$a_{x,y}=\frac{l_x\cdot l_y+l_{x+1}v\,l_{y+1}+l_{x+2}v^2\cdot l_{y+2}+l_{x+3}v^3\cdot l_{y+3}+\dots}{l_x\,l_y},$$

albo, po pomnożeniu licznika i mianownika przez v^x:

$$a_{x,y}=\frac{l_xv^x\cdot l_y+l_{x+1}v^{x+1}\cdot l_{y+1}+l_{x+2}v^{x+2}\cdot l_{y+2}+\dots}{l_xv^x\cdot l_y}$$

$$=\frac{D_xl_y+D_{x+1}l_{y+1}+D_{x+2}l_{y+2}+\dots}{D_xl_y},$$

czyli ostatecznie:

$$a_{x,y}=\frac{\Sigma D_xl_y}{D_xl_y}\quad\dots\dots\dots\dots\quad(48).$$

Wyrażenia D_xl_y, $D_{x+1}l_{y+1}$, i t. d. zowią się **zdyskontowanemi liczbami par żyjących**, zaś ΣD_xl_y jest sumą takich liczb, poczynając od D_xl_y do końca tablicy śmiertelności.

Z wzoru (48) łatwo przyjść można do wartości renty wspólnej, odroczonej i czasowej na n lat, mianowicie:

$$(48')\quad\dots\quad {}_{n|}a_{x,y}=\frac{\Sigma D_{x+n}l_{y+n}}{D_xl_y};\qquad {}_{|n}a_{x,y}=a_{x,y}-{}_{n|}a_{x,y}\quad\dots\quad(48'').$$

Owóż wiek każdej pary może być najrozmaitszy; np. obok $x=25$, może być $y=18$, 19, 20 i t. d. aż do najpóźniejszego wieku (około 100 lat); obok $x=26$, znów $y=18$, 19, 20, i t. d., czyli chcąc mieć materyał kompletny i gotowy dla różnych kombinacyj lat, musimy posiadać bardzo wiele tablic przygotowawczych — takich, jakich jedna tylko wystarcza dla ubezpieczeń, opartych na życiu pojedynczej osoby.

Przy ubezpieczaniu trzech osób, liczba tablic przygotowawczych jest jeszcze większa i ta ich mnogość stanowi właśnie ową komplikacyę, o której wzmiankowaliśmy wyżej.

Dla przykładu i późniejszych zastosowań dołączamy poniżej urywek z tablicy wartości jednostek rent, obliczonych według wzoru (48), przy zastosowaniu tablicy śmiertelności MI i przy stopie $4^0/_0$.

$x \backslash y$	25	26	27	28	29	30	31	32
25	15,9484	—	—	—	—	—	—	—
26	15,8488	15,7518	—	—	—	—	—	—
27	15,7435	15,6490	15,5489	—	—	—	—	—
28	15,6332	15,5414	15,4439	15,3418	—	—	—	—
29	15,5178	15,4286	15,3339	15,2345	15,1301	—	—	—
30	15,3979	15,3114	15,2194	15.1229	15,0213	14,9156	—	—
31	15,2732	15,1894	15,1002	15,0065	14,9080	14,8051	14,6977	—
32	15,1436	15,0625	14,9762	14,8854	14,7897	14,6899	14,5856	14,4766
33	15,0083	14,9299	14,8464	14,7585	14,6659	14.5691	14,4680	14,3622
34	14,8678	14,7922	14,7114	14,6265	14,5368	14,4432	14,3452	14,2426
35	14,7217	14,6488	14,5709	14,4889	14,4022	14,3117	14,2169	14,1176
36	14,5698	14,4996	14,4246	14,3455	14,2619	14,1745	14,0829	13,9869
37	14,4117	14,3443	14,2721	14,1959	14,1153	14,0311	13,9427	13.8501
38	14,2482	14,1834	14.1140	14,0408	13,9633	13.8821	13,7970	13,7076
39	14,0790	14,0169	13,9503	13,8799	13,8054	13.7274	13,6455	13,5595
40	13,9040	13,8445	13,7807	13,7131	13,6417	13.5668	13,4881	13,4054

40. Inne rodzaje rent. Gdy mamy obliczone wartości rent $a_{x,y}$ dla różnych połączeń lat, inne kombinacye ubezpieczeniowe dają się już łatwo wyprowadzić drogą prostego zastanowienia — tak, że obliczenie wielkości $a_{x,y}$ stanowi rachunek podstawowy.

Tak np., gdyby pomienione osoby, w wieku lat x i y, chciały ubezpieczyć jednostkę renty, płatną od chwili śmierci jednej z nich aż do śmierci drugiej, czyli t. zw. r e n t ę n a p r z e ż y c i e, załóżmy najprzód, że każda z nich ubezpiecza sobie oddzielnie jednostkę renty dożywotniej, płatnej natychmiast z góry. W takim razie jedna płaci jednorazową premię netto a_x, druga a_y, obie za dwie jednostki renty rocznej płacą razem $a_x + a_y$.

Jeżeli od $a_x + a_y$ odejmiemy $2\,a_{x,y}$, otrzymamy, widocznie, wartość jednostki renty na przeżycie, albowiem przez to renty oddzielne obu osób się znoszą aż do chwili śmierci jednej z nich i pozostaje tylko wartość jednostki renty dożywotniej, płatnej osobie pozostałej przy życiu od chwili śmierci drugiej. Zatem premię jednorazową netto, za jednostkę renty na przeżycie, przedstawia wyrażenie:

$$a_x + a_y - 2\,a_{x,y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (49).$$

Premię roczną, płatną do śmierci jednej z dwóch osób ubezpieczonych, otrzymamy, dzieląc (49) przez (48), czyli premia roczna równa się:

$$\frac{a_x + a_y - 2a_{x,y}}{a_{x,y}} = \frac{a_x + a_y}{a_{x,y}} - 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49').$$

Np. za 900 rub. renty rocznej, płatnej dożywotnio tej z dwóch osób 38 i 32-letniej, która drugą przeżyje, premia roczna, płatna do śmierci jednej z nich, wynosi:

$$\frac{a_{38} + a_{32} - 2\,a_{38,\,32}}{a_{38,\,32}} = \frac{a_{38} + a_{32}}{a_{38,\,32}} - 2 = \frac{15{,}9362 + 17{,}2574}{13{,}7076} - 2$$

$$= 0{,}42155 \text{ netto od jednostki renty,}$$

$0{,}42155 \times 900 = 379{,}40$ netto od 900 rubli renty rocznej, a przy 12% dodatku na administracyę $379{,}40 \times 1{,}12 = 424{,}93$ brutto rocznie, aż do chwili śmierci jednej z dwóch wzajem ubezpieczonych osób — 38 i 32-letniej.

Z równą łatwością zrozumieć można, iż wartość jednostki renty, płatnej dożywotnio osobie x letniej od chwili śmierci osoby y letniej (o ile ta, naturalnie, umrze przed osobą x letnią), wynosi:

$$a_{y|x} = a_x - a_{x,y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50),$$

a premia roczna za to ubezpieczenie, płatna aż do śmierci jednej lub drugiej osoby, równa się:

$$P(a_{y|x}) = \frac{a_x - a_{x,y}}{a_{x,y}} = \frac{a_x}{a_{x,y}} - 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50').$$

Jest to t. zw. j e d n o s t r o n n a r e n t a n a p r z e ż y c i e, stanowiąca podstawę do obliczania wartości r e n t w d o w i c h.

Np. mąż 36-letni, za ubezpieczenie 26-letniej żonie 1200 rub. renty rocznej dożywotniej na przypadek swej śmierci, musiałby płacić rocznie do śmierci swojej lub żony:

$$\frac{a_{26}}{a_{36,\,26}} - 1 = \frac{18{,}4138}{14{,}4996} - 1 = 0{,}26995 \text{ netto od jednostki renty,}$$

$$0{,}26995 \times 1200 = 323{,}94 \text{ netto od 1200 rub. renty rocznej,}$$

a przy 15% dodatku na administracyę $323{,}94 \times 1{,}15 = 372{,}53$ brutto.

Gdyby żona umarła przed mężem, całe ubezpieczenie upada i wniesione premie przechodzą na rzecz pozostałych przy życiu współubezpieczonych, o ile nie został zastrzeżony zwrot premij na ten przypadek, lecz wtedy premia wypadłaby wyższa.

W podobny sposób, t. j. drogą prostego zastanowienia, zamiast bezpośredniego wywodu, można wyprowadzić wzory na różne inne kombinacye rentowe, które się otrzymują przez odpowiednie połączenia wartości rent płaconych osobom pojedynczym z wartościami rent wspólnych. Możnaby również wyprowadzić wzory na premie za ubezpieczenie kapitałów dla dwóch lub więcej osób w różnych kombinacyach, takie wszakże ubezpieczenia prawie nigdy się nie trafiają.

Zasadnicza reguła obliczania rezerwy premiowej pozostaje bez zmiany — jest taka sama, jak dla ubezpieczeń, opartych na życiu osób pojedynczych.

Na tej wzmiance poprzestajemy, licząc, że czytelnicy nasi, po tem co dotąd powiedzieliśmy, bez wielkich trudności, radzić sobie potrafią czy to samodzielnie, czy też z pomocą odpowiedniego podręcznika, poświęconego specyalnie ubezpieczeniom życiowym.

H. Ubezpieczenie niezdolności do pracy (inwalidności).

41. Wiadomości wstępne. Życie ludzi podlega rozmaitym wypadkom, z których najsmutniejszym jest utrata zdolności do pracy. Gdy los taki spotka osobę ubezpieczoną, traci ona możność dalszego opłacania premij i ubezpieczenie ustaje z dużą dla osób zainteresowanych stratą.

Wyrodziła się stąd myśl wprowadzenia do ubezpieczeń takich warunków, aby osoba ubezpieczona albo otrzymała kapitał ubezpieczony w razie stania się niezdolną do pracy, lub przynajmniej, żeby była zwolnioną od dalszego wnoszenia premij, albo wreszcie, żeby od chwili stania się niezdolną do pracy mogła pobierać pewną, z góry określoną, rentę dożywotnią. Ubezpieczenia takie zowią się ubezpieczeniami na przypadek niezdolności do pracy (na przypadek inwalidności).

By módz obliczyć racyonalnie premie za takie ubezpieczenia, potrzeba przedewszystkiem posiadać odpowiednie dane statystyczne i ułożyć z nich właściwe tablice.

Tablice takie poznaliśmy już w Rozdziale V-ym (art. 28 i dalsze) i wiemy, że przedstawiają jeszcze bardzo wiele do życzenia.

Teorya jednak jest już dość dokładnie rozwinięta; dlatego, zajmiemy się, choć krótko, zasadniczemi jej podstawami, aby nie pozostawić braku w naszym wykładzie.

Jak powiedziano wyżej, tablice są już znane czytelnikom z Rozdziału V-go. Są niemi Tabl. VII i VIII naszego zbioru, pomieszczonego przy końcu książki. Tabl. VII przedstawia śmiertelność inwalidów, Tabl. VIII podaje zmiany, zachodzące w składzie osób czynnych, czyli zdolnych do pracy, pod wpływem śmierci i inwalidności.

Tabl. VII różni się od zwykłej tablicy śmiertelności tem tylko, że się odnosi do specyalnej kategoryi ludzi — do inwalidów; na jej podstawie zatem można obliczać zarówno premie jak i rezerwy premiowe wszystkich znanych nam kombinacyj ubezpieczeniowych dla osób pozostających w stanie niezdolności do pracy. W tym celu z Tab. VII trzeba obliczyć tablicę pomocniczą, taką samą jak Tabl. IX dla MI. W Tablicy X-ej (kol. 9, 10 i 11) podajemy tylko część tablicy przygotowawczej dla inwalidów, inne bowiem kolumny, wchodzące w skład całości, nie będą nam potrzebne.

Znakowanie dla ubezpieczeń inwalidów pozostawiamy dawne z dodaniem u góry, nieco na prawo, znaczka (i), jako skazówki, że dany symbol odnosi się do inwalidów. Tym sposobem np. $D_x^{(i)}$ oznacza zdyskontowaną liczbę inwalidów, żyjących w wieku x lat; $a_x^{(i)}$ oznacza wartość matematyczną, czyli premię jednorazową netto za ubezpieczenie jednostki renty rocznej, płatnej natychmiast z góry dożywotnio inwalidzie w wieku lat x, i t. d.

Najkapitalniejszą częścią Tabl. VIII-ej jest kol. 3, obejmująca prawdopodobieństwa, z jakiemi osoby czynne (na początku roku) w każdym wieku stają się, w ciągu roku, niezdolnemi do pracy. Prawdopodobieństwa te zostały obliczone przez Zimmermanna na podstawie danych statystycznych, dostarczonych przez zarządy dróg żelaznych niemieckich. Zapomocą tej kolumny i kol. 3 z Tabl. VII-ej obliczają się inne kolumny Tabl. VIII-ej, znane nam już z Rozdz. V-go, objaśnione zresztą przez nagłówki.

Aby ją zastosować do celów ubezpieczeniowych, należy przedewszystkiem obrachować tablicę pomocniczą, która mieścić w sobie powinna następujące, dla każdego wieku, liczby:

$$\left.\begin{array}{l} D_x^{(a)} = l_x^{(a)} v^x, \quad N_x^{(a)} = \Sigma D_x^{(a)}; \\ C_x^{(a)} = (l_x^{(a)} - l_{x+1}^{(a)})\, v^{x+1} = (d_x^{(a)} + J_x)\, v^{x+1}, \quad M_x^{(a)} = \Sigma C_x^{(a)}; \\ I_x = J_x v^{x+1}, \quad I'_x = J'_x v^{x+1} \text{ oraz } \Sigma I_x \text{ i } \Sigma I'_x \end{array}\right| \quad . (51).$$

Zachowując te oznaczenia w pamięci, jak również dodając do zwykłych symboli znaczek (a), u góry po stronie prawej, dla ubezpieczeń odnoszących się do osób zdolnych do pracy; znaczek (ai), gdy chodzi o ubezpieczenie osób zdolnych do pracy na przypadek inwalidności, przechodzimy do wyprowadzenia wzorów dla najważniejszych kombinacyj tej kategoryi ubezpieczeń.

Zdolnych do pracy, w dalszym ciągu, często nazywać będziemy czynnymi.

42. Ubezpieczenie rent czynnym i kapitałów na przypadek śmierci albo inwalidności. Renty czynnych różnią się tem od rent zwykłych, że gdy te drugie wypłacają się przez czas z góry wyznaczony lub do chwili wcześniejszej śmierci rentyera, pierwsze przestają się płacić nadto jeszcze w razie, jeżeli rentyer czynny staje się niezdolnym do pracy.

Wynika stąd, że renty czynnych natychmiastowe i odroczone dożywotnie, względnie płatne do chwili zajścia inwalidności, i czasowe obliczają się tak samo jak renty zwyczajne, tylko za podstawę przyjmuje się kol. 1 i 2 z Tabl. X, gdyż te właśnie kolumny wykazują liczby zdyskontowane osób czynnych oraz ich sumy, t. j. $D_x^{(a)}$ i $N_x^{(a)}$.

Według powyższego mamy zatem:

$$a_x^{(a)} = \frac{N_x^{(a)}}{D_x^{(a)}}, \qquad {}_{|n}a_x^{(a)} = \frac{N_x^{(a)} - N_{x+n}^{(a)}}{D_x^{(a)}}, \qquad {}_{n|}a_x^{(a)} = \frac{N_{x+n}^{(a)}}{D_x^{(a)}} \quad (52);$$

dla ostatniej kombinacyi wzorem na premię roczną, płatną przez lat ν lub do czasu wcześniejszej śmierci w stanie czynnym, albo stania się inwalidą, jest:

$${}_{\nu}P^{(a)}\left({}_{n|}a_x^{(a)}\right) = \frac{{}_{n|}a_x^{(a)}}{{}_{|\nu}a_x^{(a)}} = \frac{N_{x+n}^{(a)}}{N_x^{(a)} - N_{x+\nu}^{(a)}}, \quad \nu \leqq n \; . \; . \; . \quad (53).$$

Podobnie, wzorami na ubezpieczenie kapitałów, płatnych, przy końcu roku ubezpieczeniowego, w razie śmierci osoby czynnej albo stania się niezdolną do pracy, są:

dla premii jednorazowej:

$$A_x^{(a)} = \frac{M_x^{(a)}}{D_x^{(a)}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (54);$$

dla premii rocznej, płatnej do śmierci w stanie czynnym, lub do chwili stania się niezdolną do pracy:

$$P^{(a)}\left(A_x^{(a)}\right) = \frac{A_x^{(a)}}{a_x^{(a)}} = \frac{M_x^{(a)}}{N_x^{(a)}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 54');$$

dla premii rocznej, płatnej co najwyżej przez lat ν:

$$ {}_{\nu}P^{(a)}(A_x^{(a)}) = \frac{A_x^{(a)}}{{}_{|\nu}a_x^{(a)}} = \frac{M_x^{(a)}}{N_x^{(a)} - N_{x+\nu}^{(a)}} \quad . \; . \; . \; . \; (54''). $$

Dla ubezpieczeń czasowych:

$$ (55) \quad . \; {}_{|n}A_x^{(a)} = \frac{M_x^{(a)} - M_{x+n}^{(a)}}{D_x^{(a)}}, \quad {}_{\nu}P^{(a)}({}_{|n}A_x^{(a)}) = \frac{M_x^{(a)} - M_{x+n}^{(a)}}{N_x^{(a)} - N_{x+\nu}^{(a)}}, \nu \leqq n \; (55'). $$

Dla ubezpieczeń odroczonych:

$$ (56) \quad . \; {}_{n|}A_x^{(a)} = \frac{M_{x+n}^{(a)}}{D_x^{(a)}}, \qquad {}_{\nu}P^{(a)}({}_{n|}A_x^{(a)}) = \frac{M_{x+n}^{(a)}}{N_x^{(a)} - N_{x+\nu}^{(a)}} \quad . \; . \; (56'). $$

Gdyby ubezpieczenia zwyczajne miały być zawarte za premie roczne, płatne dożywotnio lub czasowo przez lat ν, pod tym atoli warunkiem, że nie będą dalej wnoszone w razie, jeżeli ubezpieczony stanie się do pracy niezdolnym, trzeba premie jednorazowe, należne za te ubezpieczenia, podzielić nie przez a_x, względnie nie przez ${}_{|\nu}a_x$, lecz przez $a_x^{(a)}$, względnie przez ${}_{|\nu}a_x^{(a)}$.

W art. 21-ym i 22-im obliczyliśmy, dla osoby 45-o letniej, premię jednorazową i roczną, płatną dożywotnio, za ubezpieczenie kapitału pośmiertnego. Jednorazowa premia netto od jednostki kapitału wynosiła 0,454109, roczna 0,031995.

Gdyby kapitał był płatny nietylko w razie śmierci ubezpieczonego, ale także w przypadku gdy ubezpieczony stanie się do pracy niezdolnym, premia jednorazowa, według wzoru (54), wyniosłaby:

$$ A_{45}^{(a)} = \frac{M_{45}^{(a)}}{D_{45}^{(a)}} = \frac{7134{,}755}{13296{,}26} = 0{,}536599 > 0{,}454109; $$

premia roczna, płatna do śmierci ubezpieczonego w stanie czynnym, albo do chwili stania się przezeń niezdolnym do pracy, według wzoru (54'), wynosiłaby:

$$ P^{(a)}(A_{45}^{(a)}) = \frac{M_{45}^{(a)}}{N_{45}^{(a)}} = \frac{7134{,}755}{160197{,}3} = 0{,}044537. $$

Jeżeli kapitał ma być wypłacony tylko w razie śmierci, a premia roczna wnoszona do śmierci w stanie czynnym lub do chwili zajścia inwalidności, premia roczna równa się:

$$ \frac{A_{45}}{a_{45}^{(a)}} = A_{45} : \frac{N_{45}^{(a)}}{D_{45}^{(a)}} = 0{,}454109 : \frac{160197{,}3}{13296{,}26} = \frac{0{,}454109}{12{,}048298} = 0{,}037691. $$

Z tych trzech premij rocznych:

$$0{,}031995 < 0{,}037691 < 0{,}044537,$$

jak rzeczywiście być powinno.

Jeżeli kapitał jest ubezpieczony tylko na przypadek stania się niezdolnym do pracy, a na przypadek śmierci w stanie czynnym nie jest ubezpieczony, i jeżeli wypłata kapitału ma nastąpić dopiero przy końcu roku ubezpieczeniowego, bez względu na to, czy wtedy inwalida żyje lub nie, w takim razie, ponieważ, z pośród $l_x^{(a)}$ osób czynnych w wieku lat x, staje się w ciągu pierwszego roku J_x osób inwalidami, przeto prawdopodobieństwo, z jakiem dana osoba stanie się w ciągu pierwszego roku inwalidą, jest równe $\frac{J_x}{l_x^{(a)}} = w_x$. Wartość matematyczna (nadzieja matematyczna) jednostki kapitału, płatnego w końcu pierwszego roku ubezpieczeniowego w razie zajścia inwalidności, wynosi $1 . \frac{J_x}{l_x^{(a)}}$, a po zdyskontowaniu na początek roku równa się $\frac{J_x . v}{l_x^{(a)}}$. Podobnie, wartość matematyczna jednostki kapitału, płatnego przy końcu drugiego roku ubezpieczeniowego, wynosi $\frac{J_{x+1} . v^2}{l_x^{(a)}}$, i t. d. do końca tablicy.

Po zsumowaniu tych poszczególnych wartości, wypada:

$$A_x^{(ai)} = \frac{J_x v + J_{x+1} v^2 + J_{x+2} v^3 + \ldots}{l_x^{(a)}},$$

a po pomnożeniu licznika i mianownika przez v^x:

$$A_x^{(ai)} = \frac{J_x v^{x+1} + J_{x+1} v^{x+2} + J_{x+2} v^{x+3} + \ldots}{l_x^{(a)} v^x} = \frac{I_x + I_{x+1} + I_{x+2} + \ldots}{D_x^{(a)}},$$

czyli ostatecznie:

$$A_x^{(ai)} = \frac{\Sigma I_x}{D_x^{(a)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57).$$

Wzorem na premię roczną, płatną przez czas pozostawania w stanie czynnym, jest:

$$P^{(a)} (A_x^{(ai)}) = \frac{\Sigma I_x}{N_x^{(a)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57').$$

Gdy kapitał ubezpieczony ma być płatny przy końcu roku ubezpieczeniowego o tyle tylko, o ile wtedy inwalida żyje, wówczas w poprzednie wzory na miejsce I_x należy podstawić I'_x.

Np. w pierwszym razie:

$$\overset{(ai)}{A_{45}} = \frac{\Sigma I_{45}}{\overset{(a)}{D_{45}}} = \frac{3554,4017}{13296,26} = 0,267323,$$

$$\overset{(a)}{P}(\overset{(ai)}{A_{45}}) = \frac{\Sigma I_{45}}{\overset{(a)}{N_{45}}} = \frac{3554,4017}{160197,3} = 0,022188;$$

w razie drugim:

$$\overset{(ai)}{A_{45}} = \frac{\Sigma I'_{45}}{\overset{(a)}{D_{45}}} = \frac{3448,3399}{13296,26} = 0,259347,$$

$$\overset{(a)}{P}(\overset{(ai)}{A_{45}}) = \frac{\Sigma I'_{45}}{\overset{(a)}{N_{45}}} = \frac{3448,3399}{160197,3} = 0,021526.$$

Różnice pomiędzy wysokościami premij w obu przypadkach są nieznaczne, ale i różnice pomiędzy liczbą osób stających się inwalidami w ciągu roku i liczbą żyjących z pośród nich w końcu roku są również niewielkie *).

43. Ubezpieczenie rent na przypadek niezdolności do pracy. Bardzo ważną — najważniejszą, rzec można, kombinacyą dla czynnych jest ubezpieczenie rent dożywotnich na przypadek stania się niezdolnym do pracy.

Weźmy przypadek, gdy wypłata jednostki renty dożywotniej ma się dokonywać rocznie z góry, poczynając od końca roku ubezpieczeniowego, w którym osoba czynna stanie się inwalidą.

Otóż w pierwszym roku ubezpieczeniowym, z pośród $\overset{(a)}{l_x}$ osób czynnych w wieku lat x, staje się J_x osób inwalidami, a z tych przy końcu roku pozostaje przy życiu J'_x inwalidów w wieku lat $x+1$ (str. 290). Każdy z tych inwalidów otrzyma jednostkę renty dożywotniej, wypłacanej rocznie z góry, której wartość matematyczna wynosi $\overset{(i)}{a}_{x+1} = \frac{\overset{(i)}{N}_{x+1}}{\overset{(i)}{D}_{x+1}}$ przy końcu roku, a $\overset{(i)}{a}_{x+1}.v$ w chwili zawierania umowy. Zatem war-

*) Zwracamy uwagę na niektóre nieprawidłowości w Tabl. X, np. w kolumnie 5 i 7 dla wieku lat 55. Nie są to pomyłki w obliczeniach, ani w korekcie, lecz wina materyału.

tością matematyczną (dla osoby, ubezpieczającej się w wieku lat x) takiej renty, mogącej się otrzymać przy końcu pierwszego roku ubezpieczeniowego, jest:

$$\overset{(i)}{a}_{x+1} v . \frac{J'_x}{\overset{(a)}{l_x}} = \overset{(i)}{a}_{x+1} . \frac{J'_x v}{\overset{(a)}{l_x}} .$$

Podobnie, wartością matematyczną renty dożywotniej, mogącej się otrzymać przy końcu drugiego roku ubezpieczeniowego, jest:

$$\overset{(i)}{a}_{x+2} . \frac{J'_{x+1} v^2}{\overset{(a)}{l_x}} ,$$

i t. d. do końca tablicy.

Mamy więc:

$$\overset{(ai)}{a_x} = \frac{\overset{(i)}{a}_{x+1} J'_x v + \overset{(i)}{a}_{x+2} J'_{x+1} v^2 + \overset{(i)}{a}_{x+3} J'_{x+2} v^3 + \dots}{\overset{(a)}{l_x}} ;$$

gdy licznik i mianownik pomnożymy przez v^x, otrzymamy:

$$\overset{(ai)}{a_x} = \frac{\overset{(i)}{a}_{x+1} J'_x v^{x+1} + \overset{(i)}{a}_{x+2} J'_{x+1} v^{x+2} + \overset{(i)}{a}_{x+3} J'_{x+2} v^{x+3} + \dots}{\overset{(a)}{l_x} v^x}$$

$$= \frac{\overset{(i)}{a}_{x+1} I'_x + \overset{(i)}{a}_{x+2} I'_{x+1} + \overset{(i)}{a}_{x+3} I'_{x+2} + \dots}{\overset{(a)}{D_x}} \quad . \; . \; . \; . \quad (\alpha).$$

Żeby uniknąć zbyt rozciągłych, w dalszym ciągu, przeróbek i wzorów, wprowadźmy analogiczne (lecz nie identyczne) z poprzedniemi oznaczenia:

$$\overset{(ai)}{D_x} = \overset{(i)}{a}_{x+1} . I'_x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta),$$

$$\overset{(ai)}{N_x} = \Sigma \overset{(ai)}{D_x} = \Sigma \overset{(i)}{a}_{x+1} . I'_x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\gamma),$$

$$\overset{(ai)}{S_x} = \Sigma \overset{(ai)}{N_x} = \Sigma \Sigma \overset{(ai)}{D_x} = \Sigma \Sigma \overset{(i)}{a}_{x+1} . I'_x \quad . \; . \; . \; . \quad (\delta).$$

Na podstawie tych oznaczeń, wyrażenie (α) można napisać w kształcie:

$$\overset{(ai)}{a_x} = \frac{\overset{(ai)}{D_x} + \overset{(ai)}{D}_{x+1} + \overset{(ai)}{D}_{x+2} + \dots}{\overset{(a)}{D_x}} = \frac{\Sigma \overset{(ai)}{D_x}}{\overset{(a)}{D_x}} = \frac{\overset{(ai)}{N_x}}{\overset{(a)}{D_x}} ,$$

t. j. na wartość jednostki renty inwalidnej, czyli na premię jednorazową netto za nią, otrzymujemy wzór:

$$a_x^{(ai)} = \frac{N_x^{(ai)}}{D_x^{(a)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58).$$

Wzorem na premię roczną, płatną przez cały czas pozostawania w stanie czynnym, według ogólnej reguły, jest:

$$P^{(a)}(a_x^{(ai)}) = \frac{a_x^{(ai)}}{a_x^{(a)}} = \frac{N_x^{(ai)}}{N_x^{(a)}} \quad \ldots\ldots \quad (58'),$$

na premię roczną, płatną przez lat ν, lub do chwili wcześniej zajść mogącej inwalidności, albo śmierci w stanie czynnym:

$$_\nu P^{(a)}(a_x^{(ai)}) = \frac{N_x^{(ai)}}{N_x^{(a)} - N_{x+\nu}^{(a)}} \quad \ldots\ldots \quad (58'').$$

Jeżeli renta ma być przyznana w takim tylko razie, gdy ubezpieczony stanie się inwalidą dopiero (co najmniej) po upływie n lat (ubezpieczenie odroczone), premia jednorazowa wynosi:

$$_{n||}a_x^{(ai)\,*)} = \frac{N_{x+n}^{(ai)}}{D_x^{(a)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59);$$

premia roczna, płatna przez cały czas pozostawania w stanie czynnym, wyraża się wzorem:

$$P^{(a)}(_{n||}a_x^{(ai)}) = \frac{N_{x+n}^{(ai)}}{N_x^{(a)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59'),$$

premia roczna, płatna przez lat ν, lub do wcześniej zajść mogącej inwalidności, albo śmierci w stanie czynnym:

$$_\nu P^{(a)}(_{n||}a_x^{(ai)}) = \frac{N_{x+n}^{(ai)}}{N_x^{(a)} - N_{x+\nu}^{(a)}} \quad \ldots\ldots \quad (59'').$$

Jeżeli przyznawać będziemy rentę tylko wtedy, gdy osoba czynna stanie się niezdolną do pracy w ciągu pierwszych t lat (ubezpieczenie czasowe), w takim razie:

$$_{||t}a_x^{(ai)\,*)} = \frac{N_x^{(ai)} - N_{x+t}^{(ai)}}{D_x^{(a)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60),$$

*) Stawiamy nie jednę, tylko dwie kreseczki po n, względnie przed t na znak, że tu jest mowa nie o wypłacaniu, lecz o przyznawaniu odroczonem, względnie czasowem renty (dożywotniej).

$$ {}_{\nu}P^{(a)}\left({}_{|t}a_x^{(ai)}\right) = \frac{N_x^{(ai)} - N_{x+t}^{(ai)}}{N_x^{(a)} - N_{x+\nu}^{(a)}}, \quad \nu < t \quad . \quad . \quad (60'). $$

Gdy, oprócz tego, po upływie t lat, przyznamy ubezpieczonemu rentę nawet gdyby wtedy był jeszcze zdolnym do pracy (renta na starość), to trzeba do (60) dodać wartość renty dożywotniej zwykłej (np. obliczonej z tab. MI), odroczonej dla czynnych na lat t, t. j. dodać należy:

$$ a_{x+t} \cdot \frac{l_{x+t}^{(a)}}{l_x^{(a)}} \cdot v^t = a_{x+t} \cdot \frac{l_{x+t}^{(a)} \cdot v^{x+t}}{l_x^{(a)} \cdot v^x} = \frac{D_{x+t}^{(a)} \cdot a_{x+t}}{D_x^{(a)}} \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon); $$

czyniąc tak, otrzymujemy:

$$ {}_{|t}\overline{a_x^{(ai)}}^{\,*)} = \frac{N_x^{(ai)} - N_{x+t}^{(ai)} + D_{x+t}^{(a)} \cdot a_{x+t}}{D_x^{(a)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61), $$

$$ {}_{\nu}P^{(a)}\left(\overline{{}_{|t}a_x^{(ai)}}\right) = \frac{N_x^{(ai)} - N_{x+t}^{(ai)} + D_{x+t}^{(a)} \cdot a_{x+t}}{N_x^{(a)} - N_{x+\nu}^{(a)}}, \quad \nu < t \quad . \quad (61'). $$

Łącząc wreszcie czasowość z odroczeniem na lat n i z przyznaniem, po upływie lat $n + t = T$, renty nawet gdyby osoba ubezpieczona była wtedy jeszcze zdolną do pracy, wzory (61), względnie (61′) należy skombinować z wzorami (59), względnie z (59″); wtedy otrzymamy:

$$ {}_{n|t}\overline{a_x^{(ai)}} = \frac{N_{x+n}^{(ai)} - N_{x+T}^{(ai)} + D_{x+T}^{(a)} \cdot a_{x+T}}{D_x^{(a)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62), $$

$$ {}_{\nu}P^{(a)}\left({}_{n|t}\overline{a_x^{(ai)}}\right) = \frac{N_{x+n}^{(ai)} - N_{x+T}^{(ai)} + D_{x+T}^{(a)} \cdot a_{x+T}}{N_x^{(a)} - N_{x+\nu}^{(a)}}, \quad \nu < T = n + t \quad (62'). $$

W podobny sposób dojść możemy do wzorów na premie jednorazowe i roczne, gdy wysokość renty wzrasta w miarę, im później osoba ubezpieczona stanie się niezdolną do pracy.

Weźmy od razu przypadek najogólniejszy, odpowiadający wzorom (62) i (62′). Załóżmy mianowicie, że jeżeli ubezpieczony, po upływie n lat odroczenia, stanie się inwalidą w $(n+1)$-ym roku, to otrzyma rentę dożywotnią w wysokości $S\%_0$ jednostki, następnie każdy rok

---

*) Kreska pozioma nad a nie oznacza tutaj renty ciągłej (art. 18), lecz ma przypominać, że renta, po upływie lat t, przyznana będzie ubezpieczonemu nawet gdyby wtedy był jeszcze zdolnym do pracy.

dalszy opóźnienia się inwalidności zwiększa stale rentę o $s^0/_0$ jednostki. Renta zwiększa się w ten sposób przez lat $t-1$, a jeżeli ubezpieczony nie stanie się przez cały ten czas inwalidą, wtedy otrzyma rentę na starość w takiej samej wysokości, jakąby otrzymał, gdyby się stał niezdolnym do pracy w $n+t=T$-ym roku ubezpieczeniowym.

Renta ma być wypłacana rocznie z góry, począwszy od końca roku ubezpieczeniowego, w którym zaszła inwalidność.

Wynika stąd, że gdy wprowadzimy oznaczenia skrócone:

$$\alpha = \frac{S}{100}, \quad i = \frac{s}{100} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\zeta),$$

ubezpieczony, w razie jeżeli się stanie niezdolnym do pracy:

w $(n+1)$ roku ubezpieczen., otrzyma rentę w wysokości α rocznie,
„ $(n+2)$ „ „ „ „ „ $\alpha+i$ „ ,
„ $(n+3)$ „ „ „ „ „ $\alpha+2i$ „ ,

i t. d.

jeżeli się stanie niezdolnym do pracy w $n+t=T$-ym roku ubezpieczeniowym, albo po upływie tego czasu będzie jeszcze czynnym, otrzyma rentę w wysokości $\alpha+(t-1)i$ rocznie.

Otóż drogą takiego samego rozumowania, jaką doszliśmy do wzoru (58), tylko z uwzględnieniem wzrastania renty, łatwo przychodzimy do następującego wyrażenia:

$$\overset{\alpha,+i}{{}_{n|t}\overline{\overset{(ai)}{a}_x}} = \Big[\alpha D^{(ai)}_{x+n} + (\alpha+i) D^{(ai)}_{x+n+1} + (\alpha+2i) D^{(ai)}_{x+n+2} + \ldots$$

$$\ldots + (\alpha + \overline{t-1}.i) D^{(ai)}_{x+n+t-1} + (\alpha + \overline{t-1}.i) D^{(a)}_{x+n+t} \cdot a_{x+n+t}\Big] : D^{(a)}_x \quad . \quad . \quad (\eta).$$

Dzielną powyższego wyrażenia można rozwinąć w sposób następujący:

$$\alpha[D^{(ai)}_{x+n} + D^{(ai)}_{x+n+1} + D^{(ai)}_{x+n+2} + \ldots + D^{(ai)}_{x+n+t-1}] + i[D^{(ai)}_{x+n+1} + 2D^{(ai)}_{x+n+2}$$

$$+ 3D^{(ai)}_{x+n+3} + \ldots + (t-1) D^{(ai)}_{x+n+t-1}] + (\alpha + \overline{t-1}.i) D^{(a)}_{x+n+t} \cdot a_{x+n+t} .$$

Suma wyrazów w pierwszej klamrze widocznie równa się:

$$N^{(ai)}_{x+n} - N^{(ai)}_{x+n+t} = N^{(ai)}_{x+n} - N^{(ai)}_{x+T} .$$

Sumę wyrazów w klamrze drugiej można napisać w kształcie:

$$
\begin{aligned}
D^{(ai)}_{x+n+1} + D^{(ai)}_{n+n+2} + D^{(ai)}_{x+n+3} + \ldots + D^{(ai)}_{x+n+t-1}& \\
+ D^{(ai)}_{x+n+2} + D^{(ai)}_{x+n+3} + \ldots + D^{(ai)}_{x+n+t-1}& \\
+ D^{(ai)}_{x+n+3} + \ldots + D^{(ai)}_{x+n+t-1}& \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots& \\
+ D^{(ai)}_{x+n+t-1}&\ ,
\end{aligned}
$$

skąd, po wykonaniu sumowań wierszami, wypada:

$$
\begin{aligned}
&(N^{(ai)}_{x+n+1} - N^{(ai)}_{x+n+t}) + (N^{(ai)}_{x+n+2} - N^{(ai)}_{x+n+t}) + (N^{(ai)}_{x+n+3} - N^{(ai)}_{x+n+t}) + \ldots \\
&\qquad \ldots + (N^{(ai)}_{x+n+t-1} - N^{(ai)}_{x+n+t}) \\
&= (N^{(ai)}_{x+n+1} + N^{(ai)}_{x+n+2} + N^{(ai)}_{x+n+3} + \ldots + N^{(ai)}_{x+n+t-1}) - (t-1) N^{(ai)}_{x+n+t} \\
&= S^{(ai)}_{x+n+1} - S^{(ai)}_{x+n+t} - (t-1) N^{(ai)}_{x+n+t} = S^{(ai)}_{x+n+1} - S^{(ai)}_{x+T} - (t-1) N^{(ai)}_{x+T}.
\end{aligned}
$$

Gdy te wyrażenia podstawimy w (η), przyjdziemy do wzoru na premię jednorazową:

$$
{}_{n|t}\overset{\alpha,+i}{\overline{a}}{}^{(ai)}_x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XI)}
$$

$$
= \frac{\alpha(N^{(ai)}_{x+n} - N^{(ai)}_{x+T}) + i(S^{(ai)}_{x+n+1} - S^{(ai)}_{x+T} - \overline{t-1} \,.\, N^{(ai)}_{x+T}) + (\alpha + \overline{t-1} \,.\, i) D^{(a)}_{x+T} \,.\, a_{x+T}}{D^{(a)}_x}
$$

i następnie, drogą zwykłą, do wzoru na premię roczną, płatną przez lat ν, lub do wcześniej zajść mogącej inwalidności, albo śmierci w stanie czynnym:

$$
{}_\nu P^{(a)} \left({}_{n|t}\overset{\alpha,+i}{\overline{a}}{}^{(ai)}_x \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XII)}
$$

$$
= \frac{\alpha(N^{(ai)}_{x+n} - N^{(ai)}_{x+T}) + i(S^{(ai)}_{x+n+1} - S^{(ai)}_{x+T} - \overline{t-1} \,.\, N^{(ai)}_{x+T}) + (\alpha + \overline{t-1} \,.\, i) D^{(a)}_{x+T} \,.\, a_{x+T}}{N^{(a)}_x - N^{(a)}_{x+\nu}}
$$

$$
\nu \leqslant T = n + t.
$$

Gdy renta ma wzrastać aż do jedności, trzeba założyć:

$$
\alpha + (t-1)\, i = 1. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\vartheta),
$$

wtedy z trzech wielkości: α, t, i, dwie mogą być dowolne, a trzecia od nich zależy.

Wzory (XI) i (XII) są ogólne, można zatem przejść od nich do różnych przypadków szczególnych. Gdy np. założymy $D^{(a)}_{x+T} = 0$, otrzymamy wzory na premie za renty, przyznawane tylko w przypadku zajścia inwalidności (bez rent na starość); gdy założymy $n=0$, wyłączymy odroczenie. Jeżeli w (XI) i (XII) założymy $i = 0$ oraz $\alpha = 1$, otrzymamy wzory (62) i (62′); jeżeli nadto założymy jeszcze $n = 0$, mięć będziemy wzory (61) i (61′), i t. d.

We wszystkich wyprowadzonych powyżej wzorach przyjmowaliśmy, że renty wypłacają się rocznie z góry; gdyby miały być wypłacane rocznie z dołu, albo ratami częstszemi od rocznych, wystarczy na miejsce $\overset{(i)}{a}_x$, względnie za a_{x+t} (ob. wyrażenie (ε)) podstawić wartości, odpowiednie danemu sposobowi wypłacania rent.

Dla umożliwienia rachunków, pomieściliśmy w Tabl. X gotową kol. 11 z wartościami na $\overset{(i)}{a}_x$, kolumnę 12 z wartościami $D^{(ai)}_x = \overset{(i)}{a}_{x+1} l'_x$, w kol. 13-ej zamieściliśmy sumy tych liczb $N^{(ai)}_x = \Sigma \overset{(i)}{a}_{x+1} l'_x$ obliczone z dołu ku górze, w kol. 14 sumy sum, t. j. $S^{(ai)}_x = \Sigma\Sigma \overset{(i)}{a}_{x+1} l'_x$.

Tym sposobem dostarczamy czytelnikom naszym gotowego materyału pomocniczego do wykonywania różnych obliczeń.

Ogólna reguła na obliczanie rezerwy premiowej pozostaje i tutaj bez zmiany.

44. Przykłady. Na podstawie wzorów, podanych w artykule poprzednim, i posiłkując się Tabl. X, obliczmy dla paru przypadków premie jednorazowe i roczne (netto) za ubezpieczenie jednostek rent dożywotnich, płatnych w razie zajścia inwalidności, aby nabrać pojęcia o ich wysokości. Za wiek osoby ubezpieczonej (w chwili zawarcia umowy) przyjmujemy lat 36.

1-o. Renta przyznaje się tylko w razie zajścia inwalidności, premie roczne płatne do śmierci w stanie czynnym lub do czasu zajścia inwalidności.

a) Bez odroczenia. Według wzorów (58) i (58′) mamy:

$$\overset{(ai)}{a}_{36} = \frac{N^{(ai)}_{36}}{D^{(a)}_{36}} = \frac{34660,7462}{21488,44} = 1,612995 \quad . \; . \; . \quad (\alpha);$$

$$P^{(a)}(\overset{(ai)}{a}_{36}) = \frac{N^{(ai)}_{36}}{N^{(a)}_{36}} = \frac{34660,7462}{318664,7} = 0,108769. \quad . \; . \; . \quad (\alpha').$$

b) Z odroczeniem na lat 10. Według wzorów (59) i (59′) jest:

$${}_{10|}\overset{(ai)}{a}_{36} = \frac{N^{(ai)}_{46}}{D^{(a)}_{36}} = \frac{29113,3733}{21488,44} = 1,354839 \quad . \; . \; . \quad (\beta);$$

$$P^{(a)}({}_{10|}\overline{a}_{36}^{(ai)}) = \frac{N_{46}^{(ai)}}{N_{36}^{(a)}} = \frac{29113{,}3733}{318664{,}7} = 0{,}091361 \quad . \quad . \quad (\beta').$$

2-o. Renta przyznaje się w razie zajścia inwalidności lub dożycia do 65-iu lat w stanie czynnym, premie roczne płatne przez czas pozostawania przy życiu w stanie czynnym, lecz co najwyżej do 65-iu lat życia.

a) Bez odroczenia. Według wzorów (61) i (61′) mamy:

$$\overline{{}_{|29}a_{36}^{(ai)}} = \frac{N_{36}^{(ai)} - N_{65}^{(ai)} + D_{65}^{(a)} \cdot a_{65}}{D_{36}^{(a)}} = \frac{45322{,}6981}{21488{,}44} = 2{,}109167 \quad . \quad (\gamma);$$

$${}_{29}P^{(a)}(\overline{{}_{|29}a_{36}^{(ai)}}) = \frac{N_{36}^{(ai)} - N_{65}^{(ai)} + D_{65}^{(a)} \cdot a_{65}}{N_{36}^{(a)} - N_{65}^{(a)}} = \frac{45322{,}6981}{307741{,}63} = 0{,}147275 \ (\gamma').$$

b) Z odroczeniem na lat 10. Według wzorów (62) i (62′):

$$\overline{{}_{10|19}a_{36}^{(ai)}} = \frac{N_{46}^{(ai)} - N_{65}^{(ai)} + D_{65}^{(a)} \cdot a_{65}}{D_{36}^{(a)}} = \frac{39775{,}3252}{21488{,}44} = 1{,}851010 \quad . \quad (\delta);$$

$${}_{29}P^{(a)}(\overline{{}_{10|19}a_{36}^{(ai)}}) = \frac{N_{46}^{(ai)} - N_{65}^{(ai)} + D_{65}^{(a)} \cdot a_{65}}{N_{36}^{(a)} - N_{65}^{(a)}} = \frac{39775{,}3252}{307741{,}63} = 0{,}129249 \ (\delta').$$

3-o. Gdy renta przyznaje się, po upływie 10-iu lat, w stosunku 60% jednostki rocznie w razie, jeżeli ubezpieczony stanie się niezdolnym do pracy w 11-ym roku ubezpieczeniowym, i następnie wzrasta o 2% z każdym rokiem późniejszego nadejścia inwalidności aż do 65-iu lat życia, w którym to czasie osoba ubezpieczona otrzyma rentę na starość w stosunku $60\% + 2\% . 18 = 96\%$ jednostki choćby była jeszcze zdolną do pracy, to należne za takie ubezpieczenie premie obliczają się z wzorów (XI) i (XII), przy założeniu: $x = 36$, $n = 10$, $t = 19$, $T = 10 + 19 = 29$, $x + T = 36 + 29 = 65$, $\alpha = 0{,}60$, $i = 0{,}02$, $\alpha + (t-1)i = 0{,}96$.

Otrzymujemy wtedy:

$$N_{46}^{(ai)} - N_{65}^{(ai)} = 29113{,}3733 - 8544{,}3163 = 20569{,}057,$$

$$S_{47}^{(ai)} - S_{65}^{(ai)} - 18\, N_{65}^{(ai)} = 204806{,}8245$$

i następnie, po podstawieniu tych liczb w (XI) i (XII):

$$\overset{0{,}60,\ +0{,}02}{\overline{{}_{10|19}a_{36}^{(ai)}}} = \frac{0{,}60 \times 20569{,}057 + 0{,}02 \times 204806{,}8245 + 0{,}96 \times 19206{,}2682}{21488{,}44}$$

$$= \frac{34875{,}5882}{21488{,}44} = 1{,}622993.$$

Jeżeli premie roczne mają być płacone, co najwyżej, przez cały czas $T = 29 = \nu$, to mamy:

$$ {}_{20}P^{(a)}\left({}_{10||19}\overline{a}_{36}^{(ai)\,0{,}60,\,+0{,}92}\right) = \frac{34875{,}5882}{318664{,}7 - 10923{,}07} = \frac{34875{,}5882}{307741{,}63} = 0{,}113327. $$

Z porównania ze sobą powyższych premij dostrzegamy łatwo wpływ, jaki na ich wysokość wywierają warunki przyznawania rent.

I. Wykup, redukcya i zmiana ubezpieczeń.

45. Ubezpieczenia roczne. Ubezpieczenia życiowe stanowią, jak widzieliśmy, umowy długoletnie, ubezpieczenia pośmiertne jednak mogłyby być zawierane rocznie, przytem, gdyby ktoś chciał być ubezpieczony przez czas dłuższy, musiałby z roku na rok umowę przedłużać. W takim wszakże razie premie nie mogłyby być przez cały czas stałe, lecz również z roku na rok ulegałyby zmianie.

Premie za ubezpieczenia roczne jednostki kapitału na przypadek śmierci, dla osoby w wieku lat x, wynosiłyby: w pierwszym roku $\frac{d_x v}{l_x}$, w drugim $\frac{d_{x+1} v}{l_{x+1}}$, w trzecim $\frac{d_{x+2} v}{l_{x+2}}$, i t. d. Są to t. zw. roczne ryzyko-premie. Ponieważ stosunki $\frac{d_x}{l_x}, \frac{d_{x+1}}{l_{x+1}}, \frac{d_{x+2}}{l_{x+2}}$, i t. d. są prawdopodobieństwami śmierci w ciągu roku osób w wieku lat $x, x+1, x+2$, i t. d., a roczne prawdopodobieństwa śmierci osób normalnych, począwszy od pewnego wieku, stale rosną zatem i roczne ryzyko-premie stale zwiększać się muszą.

Przy takim sposobie ubezpieczania, widocznie, nie zachodziłaby potrzeba odkładania rezerwy premiowej, cała rezerwa byłaby sprowadzona do przeniesienia premij z roku na rok, jak to ma miejsce w innych działach asekuracyi, np. w ubezpieczeniach ogniowych, od nieszczęśliwych wypadków i t. d. Każdy rok mógłby być zamknięty z odłożeniem samego tylko przeniesienia premij, gdyż instytucya na większą odległość czasu nie miałaby żadnych zobowiązań.

Lecz taki sposób płacenia premij jest dla uczestników niedogodny, w późniejszych bowiem latach premie mogłyby dojść do wielkości nadmiernej, przechodzącej wypłacalność ubezpieczonych, przytem powstałyby rozmaite zawikłania lekarskie na punkcie stanu ich zdrowia. Dlatego ubezpieczenia roczne zastępują się przez długoletnie o premiach stałych, które oczywiście muszą być wyższe od najniższych, a niższe od najwyższych premij za ubezpieczenia roczne.

Ten początkowy nadmiar premij stałych długoletnich nad należne za ubezpieczenia roczne winien być przez instytucyę odkładany i oprocentowany, aby miała z czego czerpać wówczas, gdy premie za ubezpieczenia roczne staną się większe od premii stałej długoletniej—i to właśnie stanowi źródło tworzenia się rezerwy premiowej. Skoro tak jest, tedy powstaje pytanie, kto w istocie jest właścicielem rezerwy premiowej: instytucya czy ubezpieczony? Od odpowiedzi na to pytanie zależy rozstrzygnięcie sprawy, czy, w razie zerwania przez ubezpieczonego umowy, należy mu, odpowiednią jego ubezpieczeniu, rezerwę zwrócić, czy też rezerwa powinna zostać w instytucyi.

Prawnicy utrzymywali, że instytucya ma prawo zatrzymać rezerwę, gdyż ubezpieczenie stanowi dobrowolną umowę, czyli kontrakt, z mocy którego obie strony przyjmują na siebie pewne zobowiązania: instytucya obowiązek wypłacania pewnych sum w danych przypadkach, osoba ubezpieczona obowiązek wnoszenia premij. O ile więc ubezpieczony nie spełnia przyjętych na się zobowiązań, zrzeka się temsamem połączonych z umową korzyści, czyli nie powinien otrzymać żadnego odszkodowania, co jest tembardziej słuszne. iż stronie drugiej, t. j. instytucyi pod żadnym pozorem umowy zerwać nie wolno.

Matematycy ubezpieczeniowi, naodwrót, utrzymywali, że ubezpieczonym, zrywającym umowę, rezerwa powinna być zwrócona, albowiem rezerwa stanowi nadpłatę ponad potrzebną instytucyi premię za ubezpieczenie roczne. Gdyby klient zawarł ubezpieczenie za premie obliczane z roku na rok, wtedy po pewnej liczbie lat, nie przedłużając dalej ubezpieczenia (co wychodzi na zerwanie umowy długoletniej), byłby równie długo jak i przy długoletniej umowie ubezpieczony, a mimo to owe nadpłaty, z których powstała rezerwa, posiadałby u siebie i nikt nie miałby prawa odeń żądać dopłaty.

Wywiązał się zatem spór naukowy, lecz nim się skończył, praktyka sprawę rozstrzygnęła na korzyść ubezpieczonych. W celach konkurencyjnych, gwoli odciągnięcia klientów od innych towarzystw i pozyskania ich dla siebie, niektóre towarzystwa zaczęły dobrowolnie wypłacać część premij, wniesionych przez osoby zrywające umowy. Gdy to uczyniły jedne towarzystwa, inne poszły w ich ślady, aż zwyczaj przedostał się do prawodawstwa i obecnie w koncesyach, wydawanych towarzystwom, zwrot pewnej części wniesionych przez zrywającego umowę premij bywa prawnie zastrzeżony.

46. Wykup polis. Suma, wypłacona osobie ubezpieczonej w razie zerwania przez nią umowy, nazywa się w y k u p e m p o l i s y, wychodzi to bowiem na to samo, jakby towarzystwo za pewną cenę odkupiło od ubezpieczonego zagwarantowane mu prawa.

Prawo wskazało wykup polis, lecz nie naznaczyło normy, co dało powód do nowej konkurencyi pomiędzy towarzystwami — jedne płacą za polisy więcej inne mniej, i tej okoliczności używają za środek agitacyjny na swoją korzyść.

Zachodzi pytanie, czy istnieje jaka norma racyonalna?

Wszystkich wniesionych premij, nawet bez procentu, towarzystwa bezwarunkowo zwracać nie mogą — najprzód dlatego, że poniosły pewne koszta akwizycyjne, lekarskie i wogóle administracyjne, następnie, ponieważ przez czas trwania umowy pokryły wiele zobowiązań względem spółubezpieczonych, co, na podstawie zasady wzajemności, dało się uskutecznić ze środków, dostarczonych przez wszystkich ubezpieczonych.

Otóż, aby módz pokryć koszta zawarcia ubezpieczenia, utarł się zwyczaj (usankcyonowany przez prawo), że, gdy ubezpieczenie zostanie zerwane, w pierwszych, najczęściej trzech latach, żaden wykup klientowi się nie wypłaca. Po trzech latach, klient, w zasadzie, ma prawo do rezerwy premiowej od swego ubezpieczenia. Ponieważ jednak praktyka dowiodła, że w ubezpieczeniach pośmiertnych umowy zrywają prawie zawsze tylko zupełnie zdrowi, słabi zaś prawie nigdy tego nie czynią, skutkiem czego, z powodu zrywania umów, przeciętny stan zdrowia ogółu ubezpieczonych się obniża, co zwiększa ryzyko towarzystw i naraża je na straty, przeto, dla zrównoważenia takiego stanu rzeczy, tytułem wykupu płaci się mniej, niż wynosi rezerwa. Ile mniej, to już zależy od uznania danego towarzystwa i dziś ta skala tylko stanowi szczupłe pole dla konkurencyi. Najczęściej towarzystwa, tytułem wykupu, płacą 75$^0/_0$ rezerwy premiowej.

W każdym razie z powyższego wypada, że wszyscy, czyniący towarzystwom zarzuty z powodu niezwracania wniesionych premij w razie zerwania umowy przez osobę ubezpieczoną, nie mają słuszności i pretensyami swemi zdradzają tylko zupełną nieznajomość rzeczy.

47. Redukcya polis. Gdy ubezpieczenie zostało skupione, wtedy, naturalnie, wszelkie zobowiązania instytucyi względem osoby ubezpieczonej ustają; zerwana umowa nietylko nie przyniosła pożytku, lecz nawet spowodowała pewne straty.

Dlatego, zamiast wykupu, wiele osób ubezpieczonych, nie mogących dalej wnosić premij z powodu zmian zaszłych w ich położeniu materyalnem, pragnąc uratować choć część swoich zamiarów, godzi się na zmniejszenie sumy ubezpieczonej, przy zachowaniu wszystkich innych warunków, oprócz wysokości ubezpieczonego kapitału i dalszego wnoszenia premij.

Z wykładu naszego czytelnik łatwo zrozumie, jaką zasadą należy się tu kierować.

Stan rzeczy jest taki. Instytucya posiada do rozporządzenia rezerwę premiową klienta, która w zasadzie jest własnością ubezpieczonego. Jeżeli w zamian za nią klient chce zawrzeć nowe ubezpieczenie, to instytucya nie ma racyi zmniejszać rezerwy, klient bowiem nie przestaje być ubezpieczonym i temsamem nie zmienia przeciętnego stanu zdrowia ogółu ubezpieczonych. Skoro zaś nie chce, czy nie może dalej płacić premij, rezerwa musi być uważana za wniesioną przezeń premię jednorazową.

Powstaje więc zadanie, co można ubezpieczyć klientowi za premię jednorazową w wysokości posiadanej przezeń rezerwy premiowej.

Obliczamy premię jednorazową np. za 1000 rubli i z porównania tej premii z rezerwą wyznacza się wysokość kapitału zredukowanego.

Np. osoba 36-letnia ubezpieczyła, według kombinacyi mieszanej, 5000 rub. z terminem 20-letnim. Po 8-iu latach chce polisę zredukować.

Roczna premia netto od jednostki za dawne ubezpieczenie wynosi:

$$ {}_{20}P_{36} = \frac{M_{36} - M_{56} + D_{56}}{N_{36} - N_{56}} = \frac{11040{,}071}{276433{,}75} = 0{,}039937. $$

Po 8-iu latach osoba ubezpieczona posiada lat $36 + 8 = 44$ i jeżeli chce utrzymać dawne warunki umowy (oprócz wysokości kapitału i obowiązku wnoszenia premij), ubezpieczenie ma jeszcze trwać przez lat $20 - 8 = 12$.

Premia jednorazowa za ubezpieczenie mieszane dla 44-letniej osoby z terminem 12-letnim równa się:

$$ \Pi_{44} = \frac{M_{44} - M_{56} + D_{56}}{D_{44}} = 0{,}654182 \text{ netto od jednostki,} $$

$0{,}654182 \times 1000 = 654{,}18$ netto od 1000, a przy $15^0/_0$ dodatku na administracyę:

$$ 654{,}18 \times 1{,}15 = 752{,}31 \text{ brutto od 1000.} $$

Rezerwa od pierwotnego ubezpieczenia po 8-iu latach wynosi:

$$ {}_{8}V_{36} = \Pi_{44} - 0{,}039937 \times {}_{|12}a_{44} = 0{,}654182 - 0{,}039937 \times 8{,}991269 $$

$$ = 0{,}654182 - 0{,}359084 = 0{,}295098 \text{ od jednostki,} $$

$$ 0{,}295098 \times 5000 = 1475{,}49 \text{ od 5000 rubli.} $$

Skoro zatem za 752,31 możemy danemu klientowi ubezpieczyć 1000 rub., to za 1475,49 możemy mu ubezpieczyć:

$$\frac{1475,49}{752,31} = 1,961 \text{ tysięcy, czyli 1961 rub.}$$

I to właśnie stanowi sumę zredukowaną.

Wykup wyniósłby $1475,49 \times 0,75 = 1106,62$.

Wysokość w ten sposób redukowanych kapitałów jest dość zbliżona do proporcyonalnego podziału kapitału pierwotnego w stosunku liczby lat, przez jaką ubezpieczony premie płacił do liczby lat, przez jaką płacić był obowiązany. Np. w danym przykładzie na kapitał zredukowany wypadłoby $5000 \times \frac{8}{20} = 2000$, zamiast (przy 15% dodatku na administracyę) 1961. Skutkiem tego w ostatnich czasach zaczyna się coraz bardziej rozpowszechniać zwyczaj redukcyi proporcyonalnej, co łatwiej trafia do przekonania klientów i mniej sprawia ambarasu towarzystwom.

48. Zmiana ubezpieczeń. Redukcya polisy jest tylko szczególnym przypadkiem zmiany ubezpieczenia, w czasie jego trwania, na inne. Weźmy przypadek najogólniejszy.

Osoba x letnia (w chwili zawierania umowy), ubezpieczona na sumę K według pewnej kombinacyi, życzy sobie, po μ latach trwania umowy, zmienić kombinacyę, sumę ubezpieczoną i wysokość premij rocznych, mających się jeszcze wnosić przez lat ν.

Oznaczmy wysokość zmienionej sumy przez K', jednorazową premię netto od jednostki za nowe ubezpieczenie przez $\Pi_{x+\mu}$, czynnik zamieniający tę premię jednorazową netto na brutto przez θ; roczną premię netto od 1-ki za nowe ubezpieczenie przez ${}_\nu P_{x+\mu}$, czynnik zamieniający ją na premię brutto przez θ'.

Zadanie jest podobne do rozważanego w uwadze 2-ej do art. 27-go, albowiem klient posiada pewną rezerwę od dawnego ubezpieczenia, którą można przyjąć za część jednorazową premij należnych za nowe ubezpieczenie. Jeżeli tę rezerwę od 1-ki oznaczymy, jak zwykle, przez ${}_\mu V_x$, rezerwa całkowita od sumy K wynosi ${}_\mu V_x . K$. Tę rezerwę przyjąć należy za premię jednorazową brutto, więc jej część netto wyraża się przez:

$$\frac{{}_\mu V_x . K}{\theta},$$

a nadzieja matematyczna towarzystwa przez:

$$\frac{{}_\mu V_x K}{\theta} + {}_\nu P_{x+\mu} . K' . {}_{|\nu}a_{x+\mu} .$$

Nadzieja matematyczna klienta wyraża się przez $\Pi_{x+\mu} . K'$.

Obie te wartości powinny być sobie równe, t. j. otrzymujemy równanie:

$$\frac{{}_{\mu}V_x K}{\theta} + {}_{\nu}P_{x+\mu} \cdot K' \cdot {}_{|\nu}a_{x+\mu} = \Pi_{x+\mu} \cdot K' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63),$$

które pozwala rozwiązać każde zadanie na zmianę ubezpieczeń.

Jeżeli klient naznacza nową sumę K', możemy łatwo z (63) obrachować nową roczną premię netto od 1-ki, mianowicie:

$${}_{\nu}P_{x+\mu} = \frac{\Pi_{x+\mu} \cdot K' - \frac{{}_{\mu}V_x \cdot K}{\theta}}{K' \cdot {}_{|\nu}a_{x+\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64),$$

stąd znów premię brutto od jednostki równą ${}_{\nu}P_{x+\mu} \cdot \theta'$ i od sumy K' równą ${}_{\nu}P_{x+\mu} \cdot \theta' \cdot K'$.

Jeżeli, naodwrót, klient oświadcza, że chce dalej za inną kombinacyę płacić inną premię w wysokości c rocznie, to się znaczy, że mamy dane:

$$c = {}_{\nu}P_{x+\mu} \cdot \theta' \cdot K' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha),$$

a szukamy K'.

Z (α) otrzymujemy:

$${}_{\nu}P_{x+\mu} \cdot K' = \frac{c}{\theta'} ,$$

co, po podstawieniu w (63), daje:

$$\frac{{}_{\mu}V_x \, K}{\theta} + \frac{c}{\theta'} \cdot {}_{|\nu}a_{x+\mu} = \Pi_{x+\mu} \cdot K';$$

stąd:

$$K' = \frac{\frac{{}_{\mu}V_x K}{\theta} + \frac{c}{\theta'} \cdot {}_{|\nu}a_{x+\mu}}{\Pi_{x+\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64').$$

Dajmy np., że osoba 36-letnia (w chwili zawierania umowy), ubezpieczona na 10000 rub. na przypadek śmierci z dożywotnią opłatą premij rocznych, w wysokości:

$$P_{36} = \frac{M_{36}}{N_{36}} = \frac{8005{,}1564}{355341{,}54} = 0{,}022528 \text{ netto od 1-ki,}$$

po 15-tu latach zmienia ubezpieczenie na mieszane z 10-letnim terminem i chce za to płacić 500 rub. rocznie. Jaki kapitał można jej za to ubezpieczyć?

Po 15-u latach rezerwa od danego ubezpieczenia wynosi:

$$\frac{M_{51}}{D_{51}} - 0{,}022528 \cdot a_{51} = 0{,}237557 \text{ od 1-ki,}$$

$$0{,}237557 \times 10000 = 2375{,}57 \text{ od 10000 rub.}$$

Jeżeli dodatek na administracyę do premii jednorazowej wynosi 15%, czyli $\theta = 1{,}15$, to w rezerwie, przyjętej za część premii jednorazowej brutto, mieści się premia netto w wysokości:

$$\frac{{}_{\mu}V_x K}{\theta} = \frac{2375{,}57}{1{,}15} = 2065{,}71.$$

Ponieważ dalej $c = 500$, gdy więc za dodatek do premii rocznej przyjmiemy 18%, t. j. $\theta' = 1{,}18$, mamy:

$${}_{\nu}P_{x+\mu} K' = \frac{500}{1{,}18} = 423{,}73.$$

Oprócz tego:

$${}_{|\nu}a_{x+\mu} = {}_{|10}a_{51} = \frac{N_{51} - N_{61}}{D_{51}} = 7{,}636492,$$

$$\Pi_{51} = \frac{M_{51} - M_{61} + D_{61}}{D_{51}} = 0{,}706288.$$

Mając to, otrzymujemy z (64'):

$$K' = \frac{2065{,}71 + 423{,}73 \times 7{,}636492}{0{,}706288} = 7506 \text{ rub.}$$

(kopiejki opuszczone), t. j. klienta, przy podanych przezeń nowych warunkach, można ubezpieczyć na 7506 rub.

Jeżeli ubezpieczony nie życzy sobie dalej płacić premij rocznych, wychodzi to na założenie w (63) ${}_{\nu}P_{x+\mu} = 0$, wtedy otrzymujemy:

$$\frac{{}_{\mu}V_x K}{\theta} = \Pi_{x+\mu} . K',$$

a stąd:

$$K' = \frac{{}_{\mu}V_x . K}{\theta . \Pi_{x+\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65),$$

czyli wzór, wyrażający zasadę, według jakiej w art. 47-ym przeprowadziliśmy redukcyę polis.

J. Kasy emerytalne.

49. Wiadomości ogólne. Przedmiot nie byłby wyczerpany, gdybyśmy pominęli sprawę kas emerytalnych — zwłaszcza wobec dziś panujących prądów.

Kasy emerytalne z początku nie były oparte prawie na żadnym rachunku; snadź zdawało się twórcom, że wystarczą same dobre chęci, skoro dbali o to tylko, aby uczestnicy, kosztem jak najmniejszych ofiar, mieli sobie przyznawane jak największe prawa. Rezultaty okazały się, naturalnie, takiemi, jakiemi być musiały; przyszedł czas, w którym kasy trzeba było zlikwidować.

To nauczyło ludzi, iż bez rachunku obejść się nie można, zabrano się zatem do obliczeń i tym sposobem powstały t. zw. kasy emerytalne racyonalne.

Kasy racyonalne, o ile mają być tak jak dziś urządzone, przedstawiają najbardziej skomplikowaną formę ubezpieczeń życiowych, chcąc zatem przedmiot gruntownie przedstawić, trzeba mu bardzo dużo poświęcić miejsca. My tego uczynić nie możemy, dlatego musimy poprzestać nieledwie na samej tylko wzmiance.

Kasy emerytalne, zorganizowane na dzisiejszy sposób, mają zapewnić uczestnikom dożywotnie utrzymanie na przypadek stania się niezdolnymi do pracy, bez względu na przyczynę powstania niezdolności, albo na starość, jeżeli jej uczestnik doczeka. Oprócz tego mają również zapewnić utrzymanie wdowom po uczestnikach i dostarczyć funduszów na wychowanie pozostałych po nich sierot. Fundusze na pomienione cele udzielają się uczestnikom i wdowom w formie rent dożywotnich, sierotom w formie rent czasowych aż do chwili dojścia do wieku, w którym dziecko może już samo pomyśleć o sobie.

Nowo przystępujący do kasy uczestnik musi najczęściej przez czas pewien (krótszy lub dłuższy — zależnie od ustawy) pozostawać bez praw do emerytury, jest to t. zw. okres wyczekiwania, albo czas odroczenia praw. Po upływie okresu wyczekiwania, nabywa uczestnik prawo do emerytury w pewnej wysokości; następnie wysokość emerytury wzrasta corocznie o pewien procent w miarę im później zachodzi inwalidność, aż w końcu dochodzi do takiego lub innego maximum, którego przekroczyć nie może. To samo bywa najczęściej stosowane do emerytur wdów i funduszów na wychowanie sierot.

Ponieważ emerytury uczestników są rentami, płaconemi w przypadku zajścia inwalidności lub na starość, przeto obliczenie premij, mających się płacić za prawa emerytalne uczestników, które tu zowią się składkami emerytalnemi, dokonywa się na podstawie wzorów podanych w art. 43-im, rozszerzonych na renty rosnące — wzór (XI) i (XII) — i odpowiednio zmodyfikowanych w razie wprowadzenia nieuwzględnionych tam przez nas warunków. Składki za prawa wdów i sierot obliczają się, w zasadzie, na podstawie wzorów (50) i (50′) w art. 40-ym, odpowiednio przekształconych i rozszerzonych, w razie potrzeby, na trzy życia.

50. Dwa typy kas emerytalnych. Można rozróżnić dwa typy kas emerytalnych. W pierwszym składki są, w zasadzie, dowolne, i zależnie od sumy wniesionych składek wyznacza się, według reguł ustawy, wysokość emerytury w chwili, gdy się uczestnikowi przyznaje. W typie drugim, naodwrót, wysokość emerytury wyznacza się z góry na każdy przypadek i oblicza się należną zań składkę roczną, którą uczestnik, w tej właśnie wysokości stałej, wnosić jest obowiązany.

Pierwszy typ został wprowadzony, na podstawie obliczeń B. Maleszewskiego, na drogach żelaznych w Rosyi i u nas; drugi, na podstawie obliczeń G. Rozmanitha z Pragi Czeskiej, w Stowarzyszeniu emerytalnem pracowników prywatnych w Królestwie Polskiem, założonem przed paru laty na podobieństwo Towarzystwa wzajemnych ubezpieczeń urzędników prywatnych w Galicyi.

I. Pierwszy typ kas emerytalnych. Każdy rubel, wniesiony przez uczestnika do kasy pierwszego rodzaju, uważa się za premię jednorazową, za którą uczestnik nabywa prawo do pewnej wysokości emerytury, ustanowionej według przepisów ustawy, w zależności od wieku uczestnika w chwili, gdy składkę wnosi. Z tego wypływa przedewszystkiem wniosek, że wysokość emerytury, przyznawanej za rubla, zmienia się z wiekiem, względnie z rokiem, w którym uczestnik składkę wnosi. Znając wysokość emerytury, do jakiej uczestnik ma prawo za taką lub inną liczbę rubli, wniesionych w każdym roku jego uczestnictwa, można obrachować należną mu emeryturę w chwili, gdy jest mu przyznawana.

Aby uniknąć zbyt skomplikowanych rachunków, weźmy za przykład najprostszą formę kasy. Uczestnik otrzymuje zawsze tę samą emeryturę, bez względu na liczbę lat uczestnictwa, ale tylko w przypadku stania się niezdolnym do pracy lub po dojściu do 65 lat życia. Za wysokość emerytury, przy obliczeniach, przyjmijmy jednostkę, wtedy bowiem wartość emerytury większej oblicza się, mnożąc wartość 1-ki emerytury przez jej wysokość rzeczywistą.

Do obliczenia składek za emeryturę uczestników służą wzory podane w art. 43-im, w danym mianowicie razie wzór (61) dla składki jednorazowej, (61′) dla rocznej.

Załóżmy, że uczestnik, w chwili przystępowania do kasy, ma lat 36.

Otóż wartością 1-ki emerytury (przyznawanej na powyższych warunkach), gdy uczestnik wnosi składkę w 36-ym roku życia, jest, według obliczenia dokonanego w art. 44-ym (γ), 2,109167, skutkiem czego za każdego wniesionego rubla kasa może mu przyznać (w razie stania się niezdolnym do pracy lub w razie dożycia 65-iu lat w stanie czynnym) emeryturę w wysokości:

$$\frac{1}{2{,}109167} = 0{,}474121;$$

gdyby uczestnik wniósł np. 60 rub., nabrałby prawa do emerytury w wysokości:

$$0{,}474121 \times 60 = 28{,}45.$$

Za każdego rubla, wniesionego w dalszych latach, emerytura wypada mniejsza i to tem mniejsza, im później składki wpływają.

Jeżeli, w chwili przystępowania do kasy, uczestnik jest żonaty z kobietą o 10 lat od siebie młodszą i chce jej zabezpieczyć emeryturę dożywotnią na przypadek swej śmierci, płatną z góry, poczynając od końca roku ubezpieczeniowego, w którym umrze—stałą, bez względu na liczbę lat służby, to emerytura taka jest, widocznie, zwyczajnem ubezpieczeniem renty na przeżycie męża przez żonę, więc oblicza się z wzoru (50) art. 40-y, według tablicy normalnej (np. według MI). Premia jednorazowa wynosi:

$$a_{36|26} = a_{26} - a_{36,26} = 18{,}4138 - 14{,}4996 = 3{,}9142,$$

a renta, nabyta za jednego rubla, równa się:

$$\frac{1}{3{,}9142} = 0{,}25548.$$

Za 30 rub. np., wniesione na cel pomieniony, uczestnik 36-letni dla swej 26-letniej żony nabywa prawo do:

$$0{,}25548 \times 30 = 7{,}66$$

rubli emerytury dożywotniej.

Za każdego rubla, wniesionego później, renta wypadnie mniejsza.

II. Drugi typ kas emerytalnych. Weźmy tę samą parę małżeńską (w chwili przystępowania do kasy: mąż liczy lat 36, żona — 26) i niech wysokością emerytury zarówno uczestnika jak i żony będzie 1-ka, płacona rocznie z góry na tych samych co poprzednio warunkach. Składki mają być stałe, wnoszone rocznie z góry.

Za emeryturę własną, (γ') w art. 44-ym, uczestnik płacić powinien po 0,147275 do czasu stania się niezdolnym do pracy, lub dożycia 65-iu lat. Więc np. za 300 rub. emerytury wnosić powinien rocznie po:

$$0{,}147275 \times 300 = 44{,}18.$$

Ażeby obrachować składkę roczną za emeryturę żony (w wysokości 1-ki), należy składkę jednorazową (3,9142) podzielić przez wartość

1-ki renty, płatnej do chwili śmierci jednego z małżonków lub do czasu inwalidności albo dożycia 65-iu lat przez męża, o ile wtedy żyje jeszcze żona, gdyż w każdym z tych trzech przypadków składka nie potrzebuje lub nie może być dalej płacona. Jest to, widocznie, wartość jednostki renty wspólnej (art. 39-y), obliczająca się z wzoru (48″) w tym artykule podanego, lecz tem od tamtej różnej, że tu $l_{36} v^{36} . l_{26} = D_{36} . l_{26}$ zastąpić należy przez $\overset{(a)}{D_{36}} l_{26}$, bo składka ma być płacona, więc renta liczona tylko przez czas pozostawania męża w stanie czynnym.

Ponieważ w ten sposób zdyskontowanych liczb $(\overset{(a)}{D_x} l_y)$ nie posiadamy, zatem i szukanej składki na tem miejscu obliczyć nie jesteśmy w możności.

51. Uwagi i wnioski. Nader proste warunki emerytalne, podane w artykule poprzednim, przyjęliśmy nietylko, aby uprościć przykłady, lecz oraz i dlatego, że uważamy je za odpowiadające istotnym potrzebom uczestników. Emerytury, mające się, przed osiągnięciem starości, przyznawać tylko niezdolnym do pracy, nie powinny być, naszem zdaniem, ani odraczane, ani ustosunkowane do lat uczestnictwa, bo każdy uczestnik tracący zdolność do pracy jest zarówno potrzebującym pomocy, bez względu na liczbę lat uczestnictwa, po których stanie się inwalidą. Może nawet inwalida młodszy jest w gorszem od starszego położeniu, skoro przez czas dłuższy w takim żyć musi stanie. Wprawdzie jedno i drugie podnosi wysokość składek, z koniecznością tą jednak pogodzić się trzeba, jeżeli kasy mają w całości, a nie połowicznie spełniać swe zadanie.

Gdyby prawa do emerytury miały być odroczone i jej wysokość ustosunkowana do lat uczestnictwa, składki obliczaćby należało z wzorów (XI) lub (XII) — zależnie od typu kasy. Nadto kasy emerytalne powinny mieć na uwadze i dzieci, których prawa bywają zazwyczaj dzielone na prawa sierot przy matce żyjącej i na prawa sierot zupełnych (bez ojca i bez matki). Do obliczenia odnośnych składek użyć należy wzorów, opartych na życiu trzech osób (ojca, matki i dziecka).

Wszystko to wikła i utrudnia rachunki i, co za tem idzie, podnosi koszta prowadzenia kas ze szkodą dla uczestników, którzy wogóle nie są zadowoleni z obecnych form kas emerytalnych. Narzekają na czas wyczekiwania i na małe rezultaty, na powikłane i nieekonomiczne, ich zdaniem, warunki. Bardzo np. narzekają na to, że uczestnik, w razie przeżycia żony, traci składki wniesione na jej rachunek.

Wobec tego może byłoby lepiej oprzeć kasy emerytalne na ubezpieczeniu mieszanem kapitałów, z uwzględnieniem inwalidności, pod warunkiem, że kapitał w chwili jego płatności będzie zamieniony na rentę, odpowiednią takiemu położeniu, w jakiem się uczestnik i jego rodzina wówczas znajdują. Jeżeli uczestnik umarł, kapitał może być podzielony pomiędzy wdowę i sieroty nieletnie w odpowiednim stosunku i zamieniony na renty w zależności od wieku i czasu, przez jaki emerytury mają być płacone. Jeżeli uczestnik stanie się niezdolnym do pracy, albo dożyje ustanowionego terminu starości, a żona nie żyje i dzieci niema lub są dorosłe, otrzymuje odpowiednią całemu kapitałowi rentę dożywotnią; jeżeli żona żyje i dzieci są jeszcze nieletnie, kapitał dzieli się pomiędzy wszystkich i w zamian przyznaje się każdemu odpowiednia renta.

Tym sposobem zasady stają się jasne i warunki proste, oraz składki nigdy, bez korzyści dla uczestnika, nie przepadają. Rachunkowość przytem staje się prosta i temsamem koszta prowadzenia kasy maleją.

Jakakolwiek jednak będzie forma kasy emerytalnej, zawsze niezbędny jest warunek, aby uczestników było bardzo wielu; bez spełnienia się tego warunku, wszelkie, choćby najsubtelniej przeprowadzone rachunki mogą się okazać złudnemi. Otóż żadna chyba instytucya prywatna dostatecznej liczby uczestników dostarczyć nie może, żadna zatem samodzielnie o kasie emerytalnej myśleć nie powinna. Pozostaje zjednoczenie się całego społeczeństwa w jednę kasę, ale to bez przymusu stać się nie może; dlatego nastręcza się pytanie, czy sprawa kas emerytalnych nie jest sprawą państwową.

Zdaje się, że ludzkość zaczyna na tę właśnie wchodzić drogę. Początek zrobiła Anglia, przyznając wszystkim swym starcom od 70-iu lat życia drobne emerytury. Jest to, naturalnie, tylko początek, tylko próba finansowa, lecz nie ulega wątpliwości, że sprawa, z czasem, przybierze poważne rozmiary, a gdy to się stanie wszędzie, wówczas powiedzieć będzie można, iż sprawa kas emerytalnych została „racyonalnie" rozwiązana.

Takie jednak rozwiązanie sprawy kas emerytalnych jest jeszcze bardzo odległe; skutkiem tego wszystkie tymczasowe usiłowania prywatne zasługują na uznanie i poparcie, chociaż będą to zawsze tylko krople w całym oceanie niezaspokojonych w tym kierunku „potrzeb majątkowych" ogółu ludności.

TABLICE.

Tablica I.

Sumy, na jakie zamienia się po *n* latach 1-ka kapitału, oddana

$r^n = (1 + i)^n$.

0	1	2	3	4	5	0
Po latach	1%	2%	2½%	3%	3½%	Po latach
1	1,010 000 00	1,020 000 00	1,025 000 00	1,030 000 00	1,035 000 00	1
2	1,020 100 00	1,040 400 00	1,050 625 00	1,060 900 00	1,071 225 00	2
3	1,030 301 00	1,061 208 00	1,076 890 62	1,092 727 00	1,108 717 87	3
4	1,040 604 01	1,082 432 16	1,103 812 89	1,125 508 81	1,147 523 00	4
5	1,051 010 05	1,104 080 80	1,131 408 21	1,159 274 07	1,187 686 31	5
6	1,061 520 15	1,126 162 42	1,159 693 42	1,194 052 30	1,229 255 33	6
7	1,072 135 35	1,148 685 67	1,188 685 75	1,229 873 87	1,272 279 26	7
8	1,082 856 71	1,171 659 38	1,218 402 90	1,266 770 08	1,316 809 04	8
9	1,093 685 27	1,195 092 57	1,248 862 97	1,304 773 18	1,362 897 35	9
10	1,104 622 13	1,218 994 42	1,280 084 54	1,343 916 38	1,410 598 76	10
11	1,115 668 35	1,243 374 31	1,312 086 66	1,384 233 87	1,459 969 72	11
12	1,126 825 03	1,268 241 79	1,344 888 82	1,425 760 89	1,511 068 66	12
13	1,138 093 28	1,293 606 63	1,378 511 04	1,468 533 71	1,563 956 06	13
14	1,149 474 21	1,319 478 76	1,412 973 82	1,512 589 72	1,618 694 52	14
15	1,160 968 96	1,345 868 34	1,448 298 17	1,557 967 42	1,675 348 83	15
16	1,172 578 64	1,372 785 70	1,484 505 62	1,604 706 44	1,733 986 04	16
17	1,184 304 43	1,400 241 42	1,521 618 26	1,652 847 63	1,794 675 55	17
18	1,196 147 48	1,428 246 25	1,559 658 72	1,702 433 06	1,857 489 20	18
19	1,208 108 95	1,456 811 17	1,598 650 19	1,753 506 05	1,922 501 32	19
20	1,220 190 04	1,485 947 40	1,638 616 44	1,806 111 23	1,989 788 86	20
21	1,232 391 94	1,515 666 34	1,679 581 85	1,860 294 57	2,059 431 47	21
22	1,244 715 86	1,545 979 67	1,721 571 40	1,916 103 41	2,131 511 58	22
23	1,257 163 02	1,576 899 26	1,764 610 68	1,973 586 51	2,206 114 48	23
24	1,269 734 65	1,608 437 25	1,808 725 95	2,032 794 11	2,283 328 49	24
25	1,282 431 99	1,640 605 99	1,853 944 10	2,093 777 93	2,363 244 98	25
26	1,295 256 31	1,673 418 11	1,900 292 70	2,156 591 27	2,445 958 56	26
27	1,308 208 88	1,706 886 48	1,947 800 02	2,221 289 01	2,531 567 11	27
28	1,321 290 97	1,741 024 21	1,996 495 02	2,287 927 68	2,620 171 96	28
29	1,334 503 88	1,775 844 69	2,046 407 39	2,356 565 51	2,711 877 98	29
30	1,347 848 92	1,811 361 58	2,097 567 58	2,427 262 47	2,806 793 70	30
31	1,361 327 40	1,847 588 82	2,150 006 77	2,500 080 35	2,905 031 48	31
32	1,374 940 68	1,884 540 59	2,203 756 94	2,575 082 76	3,006 707 59	32
33	1,388 690 09	1,922 231 40	2,258 850 86	2,652 335 24	3,111 942 35	33
34	1,402 576 99	1,960 676 03	2,315 322 13	2,731 905 30	3,220 860 33	34
35	1,416 602 76	1,999 889 55	2,373 205 19	2,813 862 45	3,333 590 45	35
36	1,430 768 78	2,039 887 34	2,432 535 32	2,898 278 33	3,450 266 11	36
37	1,445 076 47	2,080 685 09	2,493 348 70	2,985 226 68	3,571 025 43	37
38	1,459 527 24	2,122 298 79	2,555 682 42	3,074 783 48	3,696 011 32	38
39	1,474 122 51	2,164 744 77	2,619 574 48	3,167 026 98	3,825 371 71	39
40	1,488 863 73	2,208 039 66	2,685 063 84	3,262 037 79	3,959 259 72	40
41	1,503 752 37	2,252 200 46	2,752 190 43	3,359 898 93	4,097 833 81	41
42	1,518 789 89	2,297 244 47	2,820 995 20	3,460 695 89	4,241 257 99	42
43	1,533 977 79	2,343 189 36	2,891 520 08	3,564 516 77	4,389 702 02	43
44	1,549 317 57	2,390 053 14	2,963 808 08	3,671 452 27	4,543 341 60	44
45	1,564 810 75	2,437 854 21	3,037 903 28	3,781 595 84	4,702 358 55	45

Tablica I.

na procent składany przy różnych stopach procentowych.

$r^n = (1 + i)^n$.

0	6	7	8	9	10	0
Po latach	4%	4½%	5%	6%	8%	Po latach
1	1,040 000 00	1,045 000 00	1,050 000 00	1,060 000 00	1,080 000 00	1
2	1,081 600 00	1,092 025 00	1,102 500 00	1,123 600 00	1,166 400 00	2
3	1,124 864 00	1,141 166 12	1,157 625 00	1,191 016 00	1,259 712 00	3
4	1,169 858 56	1,192 518 60	1,215 506 25	1,262 476 96	1,360 488 96	4
5	1,216 652 90	1,246 181 94	1,276 281 56	1,338 225 58	1,469 328 08	5
6	1,265 319 02	1,302 260 12	1,340 095 64	1,418 519 11	1,586 874 32	6
7	1,315 931 78	1,360 861 83	1,407 100 42	1.503 630 26	1,713 824 27	7
8	1,368 569 05	1 422 100 61	1,477 455 44	1,593 848 07	1,850 930 21	8
9	1,423 311 81	1,486 095 14	1,551 328 22	1,689 478 96	1,999 004 63	9
10	1,480 244 28	1,552 969 42	1,628 894 63	1,790 847 70	2,158 925 00	10
11	1,539 454 06	1,622 853 05	1,710 339 36	1,898 298 56	2.331 639 00	11
12	1,601 032 22	1,695 881 43	1,795 856 33	2,012 196 47	2,518 170 12	12
13	1,665 073 51	1,772 196 10	1,885 649 14	2,132 928 26	2,719 623 73	13
14	1,731 676 45	1,851 944 92	1,979 931 60	2,260 903 96	2,937 193 62	14
15	1,800 943 51	1,935 282 44	2,078 928 18	2,396 558 19	3,172 169 11	15
16	1,872 981 25	2.022 370 15	2,182 874 59	2,540 351 68	3,425 942 64	16
17	1,947 900 50	2,113 376 81	2,292 018 32	2,692 772 79	3,700 018 05	17
18	2,025 816 52	2,208 478 77	2,406 619 23	2,854 339 15	3,996 019 50	18
19	2,106 849 18	2,307 860 31	2,526 950 20	3,025 599 50	4,315 701 06	19
20	2,191 123 14	2,411 714 02	2,653 297 71	3,207 135 47	4,660 957 14	20
21	2,278 768 07	2,520 241 16	2,785 962 59	3,399 563 60	5,033 833 72	21
22	2,369 918 79	2,633 652 01	2,925 260 72	3,603 537 42	5,436 540 41	22
23	2,464 715 55	2,752 166 35	3,071 523 76	3,819 749 66	5,871 463 65	23
24	2,563 304 17	2,876 013 83	3,225 099 94	4,048 934 64	6,341 180 74	24
25	2,665 836 33	3,005 434 46	3,386 354 94	4.291 870 72	6,848 475 20	25
26	2,772 469 79	3,140 679 01	3,555 672 69	4,549 382 96	7,396 353 21	26
27	2,883 368 58	3,282 009 56	3,733 456 32	4,822 345 94	7,988 061 47	27
28	2,998 703 32	3,429 699 99	3,920 129 14	5,111 686 70	8,627 106 39	28
29	3,118 651 45	3,584 036 49	4,116 135 60	5,418 387 90	9,317 274 90	29
30	3,243 397 51	3,745 318 13	4,321 942 38	5,743 491 17	10.062 656 89	30
31	3,373 133 41	3,913 857 45	4,538 039 49	6 088 100 64	10,867 669 44	31
32	3,508 058 75	4,089 981 04	4,764 941 47	6,453 386 68	11,737 083 00	32
33	3,648 381 10	4,274 030 18	5,003 188 54	6,840 589 88	12,676 049 63	33
34	3,794 316 34	4,466 361 54	5,253 347 97	7,251 025 28	13,690 133 61	34
35	3,946 088 99	4,667 347 81	5,516 015 37	7,686 086 79	14,785 344 29	35
36	4,103 932 55	4,877 378 46	5,791 816 14	8,147 252 00	15,968 171 84	36
37	4,268 089 86	5,096 860 49	6,081 406 94	8,636 087 12	17,245 625 58	37
38	4,438 813 45	5,326 219 21	6,385 477 29	9,154 252 35	18,625 275 63	38
39	4,616 365 99	5,565 899 08	6,704 751 15	9.703 507 49	20,115 297 68	39
40	4,801 020 63	5,816 364 54	7,039 988 71	10,285 717 94	21,724 521 50	40
41	4,993 061 45	6,078 100 94	7,391 988 15	10,902 861 01	23,462 483 22	41
42	5,192 783 91	6,351 615 48	7,761 587 55	11,557 032 67	25.339 481 87	42
43	5,400 495 27	6,637 438 18	8,149 666 93	12,250 454 63	27,366 640 42	43
44	5,616 515 08	6,936 122 90	8,557 150 28	12,985 481 91	29,555 971 66	44
45	5,841 175 68	7,248 248 43	8,985 007 79	13,764 610 83	31,920 449 39	45

0	1	2	3	4	5	0
Po latach	1%	2%	2½%	3%	3½%	Po latach
46	1,580 458 85	2,486 611 29	3,113 850 86	3,895 043 72	4,866 941 10	46
47	1,596 263 44	2,536 343 51	3,191 697 13	4,011 895 03	5,037 284 04	47
48	1,612 226 08	2,587 070 39	3,271 489 56	4,132 251 88	5,213 588 98	48
49	1,628 348 34	2,638 811 79	3,353 276 80	4,256 219 44	5.396 064 59	49
50	1,644 631 82	2,691 588 03	3,437 108 72	4,383 906 02	5,584 926 86	50
51	1,661 078 14	2,745 419 79	3,523 036 44	4,515 423 20	5,780 399 30	51
52	1,677 688 92	2,800 328 19	3,611 112 35	4,650 885 90	5,982 713 27	52
53	1,694 465 81	2,856 334 75	3.701 390 16	4,790 412 47	6,192 108 24	53
54	1,711 410 47	2,913 461 44	3,793 924 91	4,934 124 85	6,408 832 02	54
55	1,728 524 57	2,971 730 67	3.888 773 03	5,082 148 59	6,633 141 14	55
56	1,745 809 82	3,031 165 29	3,985 992 36	5,234 613 05	6,865 301 08	56
57	1,763 267 92	3,091 788 59	4,085 642 17	5,391 651 44	7,105 586 62	57
58	1,780 900 60	3,153 624 36	4,187 783 22	5.553 400 98	7,354 282 15	58
59	1,798 709 60	3,216 696 85	4,292 477 80	5,720 003 01	7,611 682 03	59
60	1,816 696 70	3.281 030 79	4,399 789 75	5,891 603 10	7,878 090 90	60
61	1,834 863 67	3,346 651 40	4,509 784 49	6,068 351 20	8,153 824 08	61
62	1,853 212 30	3,413 584 43	4,622 529 10	6,250 401 73	8,439 207 93	62
63	1,871 744 43	3,481 856 12	4,738 092 33	6,437 913 79	8,734 580 20	63
64	1,890 461 87	3,551 493 24	4.856 544 64	6,631 051 20	9,040 290 51	64
65	1,909 366 49	3,622 523 11	4,977 958 26	6,829 982 73	9,356 700 68	65
66	1,928 460 15	3,694 973 57	5,102 407 21	7,034 882 22	9,684 185 20	66
67	1,947 744 75	3,768 873 04	5,229 967 39	7,245 928 68	10,023 131 68	67
68	1,967 222 20	3,844 250 50	5,360 716 58	7,463 306 54	10,373 941 29	68
69	1.986 894 42	3,921 135 51	5,494 734 49	7,687 205 74	10,737 029 24	69
70	2,006 763 37	3,999 558 22	5,632 102 86	7,917 821 91	11,112 825 26	70
71	2,026 831 00	4,079 549 39	5,772 905 43	8,155 356 57	11,501 774 14	71
72	2,047 099 31	4.161 140 37	5,917 228 06	8,400 017 27	11,904 336 24	72
73	2,067 570 31	4,244 363 18	6,065 158 76	8,652 017 78	12,320 988 01	73
74	2,088 246 01	4,329 250 45	6,216 787 73	8,911 578 32	12.752 222 59	74
75	2,109 128 47	4,415 835 45	6,372 207 43	9,178 925 67	13.198 550 38	75
76	2.130 219 75	4,504 152 16	6,531 512 61	9,454 293 44	13,660 499 64	76
77	2,151 521 95	4,594 235 21	6,694 800 43	9.737 922 24	14,138 617 13	77
78	2,173 037 17	4,686 119 91	6,862 170 44	10,030 059 91	14,633 468 73	78
79	2,194 767 54	4,779 842 31	7,033 724 70	10.330 961 71	15,145 640 13	79
80	2,216 715 22	4,875 439 16	7,209 567 82	10,640 890 56	15,675 737 54	80
81	2,238 882 37	4,972 947 94	7,389 807 01	10,960 117 27	16,224 388 35	81
82	2.261 271 19	5,072 406 90	7,574 552 19	11,288 920 79	16,792 241 95	82
83	2,283 883 90	5,173 855 04	7,763 915 99	11,627 588 42	17,379 970 41	83
84	2.306 722 74	5,277 332 14	7,958 013 89	11,976 416 07	17,988 269 38	84
85	2,329 789 97	5,382 878 78	8,156 964 24	12,335 708 55	18,617 858 81	85
86	2.353 087 87	5,490 536 35	8,360 888 34	12,705 779 81	19,269 483 86	86
87	2,376 618 75	5,600 347 08	8,569 910 55	13,086 953 20	19,943 915 80	87
88	2,400 384 94	5,712 354 02	8,784 158 32	13,479 561 80	20,641 952 85	88
89	2,424 388 79	5,826 601 10	9,003 762 27	13.883 948 65	21,364 421 20	89
90	2.448 632 67	5,943 133 13	9,228 856 33	14,300 467 11	22,112 175 95	90
91	2,473 119 00	6,061 995 79	9,459 577 74	14.729 481 12	22,886 102 10	91
92	2,497 850 19	6,183 235 70	9,696 067 18	15,171 365 56	23,687 115 68	92
93	2,522 828 69	6,306 900 42	9.938 468 86	15,626 506 52	24.516 164 73	93
94	2,548 056 98	6,433 038 43	10,186 930 58	16,095 301 72	25,374 230 49	94
95	2,573 537 55	6,561 699 19	10,441 603 85	16,578 160 77	26,262 328 56	95
96	2,599 272 93	6,692 933 18	10,702 643 95	17,075 505 59	27.181 510 06	96
97	2,625 265 65	6,826 791 84	10,970 210 04	17,587 770 76	28,132 862 91	97
98	2,651 518 31	6,963 327 68	11,244 465 30	18,115 403 88	29,117 513 11	98
99	2.678 033 49	7,102 594 23	11,525 576 93	18,658 866 00	30,136 626 07	99
100	2.704 813 83	7,244 646 12	11,813 716 35	19,218 631 98	31,191 407 98	100

0	6	7	8	9	10	0
Po latach	**4%**	**4½%**	**5%**	**6%**	**8%**	Po latach
46	6,074 822 71	7,574 419 61	9,434 258 18	14,590 487 48	34,474 085 34	46
47	6,317 815 62	7,915 268 49	9,905 971 09	15,465 916 73	37,232 012 17	47
48	6,570 528 24	8,271 455 57	10,401 269 65	16,393 871 73	40,210 573 14	48
49	6,833 349 37	8,643 671 07	10,921 333 13	17,377 504 03	43,427 418 99	49
50	7,106 683 35	9,032 636 27	11,467 399 78	18,420 154 27	46,901 612 51	50
51	7,390 950 68	9,439 104 90	12,040 769 77	19,525 363 53	50,653 741 51	51
52	7,686 588 71	9,863 864 63	12,642 808 26	20,696 885 34	54,706 040 84	52
53	7,994 052 26	10,307 738 53	13,274 948 68	21,938 698 46	59,082 524 10	53
54	8,313 814 35	10,771 586 77	13,938 696 11	23,255 020 37	63,809 126 03	54
55	8,646 366 92	11,256 308 17	14,635 630 92	24,650 321 59	68,913 856 11	55
56	8,992 221 60	11,762 842 04	15,367 412 46	26,129 340 89	74,426 964 60	56
57	9,351 910 46	12,292 169 93	16,135 783 08	27,697 101 34	80,381 121 77	57
58	9,725 986 88	12,845 317 58	16,942 572 24	29,358 927 42	86,811 611 51	58
59	10,115 026 36	13,423 356 87	17,789 700 85	31,120 463 07	93,756 540 43	59
60	10,519 627 41	14,027 407 93	18,679 185 89	32,987 690 85	101,257 063 67	60
61	10,940 412 51	14,658 641 29	19,613 145 19	34,966 952 30	109,357 628 76	61
62	11,378 029 01	15,318 280 14	20,593 802 45	37,064 969 44	118,106 239 06	62
63	11,833 150 17	16,007 602 75	21,623 492 57	39,288 867 61	127,554 738 19	63
64	12,306 476 17	16,727 944 87	22,704 667 20	41,646 199 67	137,759 117 24	64
65	12,798 735 22	17,480 702 39	23,839 900 56	44,144 971 65	148,779 846 62	65
66	13,310 684 63	18,267 334 00	25,031 895 59	46,793 669 94	160,682 234 35	66
67	13,843 112 01	19,089 364 03	26,283 490 36	49,601 290 14	173,536 813 10	67
68	14,396 836 49	19,948 385 41	27,597 664 88	52,577 367 55	187,419 758 14	68
69	14,972 709 95	20,846 062 76	28,977 548 13	55,732 009 60	202,413 338 80	69
70	15,571 618 35	21,784 135 58	30,426 425 53	59,075 930 18	218,606 405 90	70
71	16,194 483 09	22,764 421 68	31,947 746 81	62,620 485 99	236,094 918 37	71
72	16,842 262 41	23,788 820 66	33,545 134 15	66,377 715 15	254,982 511 84	72
73	17,515 952 91	24,859 317 59	35,222 390 86	70,360 378 06	275,381 112 79	73
74	18,216 591 02	25,977 986 88	36,983 510 40	74,582 000 74	297,411 601 81	74
75	18,945 254 66	27,146 996 29	38,832 685 92	79,056 920 79	321,204 529 96	75
76	19,703 064 85	28,368 611 12	40,774 320 22	83,800 336 03	346,900 892 35	76
77	20,491 187 44	29,645 198 62	42,813 036 23	88,828 356 19	374,652 963 74	77
78	21,310 834 94	30,979 232 56	44,953 688 04	94,158 057 57	404,625 200 84	78
79	22,163 268 34	32,373 298 02	47,201 372 44	99,807 541 02	436,995 216 91	79
80	23,049 799 07	33,830 096 43	49,561 441 06	105,795 993 48	471,954 834 26	80
81	23,971 791 04	35,352 450 77	52,039 513 12	112,143 753 09	509,711 221 00	81
82	24,930 662 68	36,943 311 06	54,641 488 77	118,872 378 28	550,488 118 68	82
83	25,927 889 18	38,605 760 06	57,373 563 21	126,004 720 97	594,527 168 18	83
84	26,965 004 75	40,343 019 26	60,242 241 37	133,565 004 23	642,089 341 63	84
85	28,043 604 94	42,158 455 13	63,254 353 44	141,578 904 48	673,456 488 96	85
86	29,165 349 14	44,055 585 61	66,417 071 11	150,073 638 75	748,933 008 08	86
87	30,331 963 11	46,038 086 96	69,737 924 67	159,078 057 08	808,847 648 73	87
88	31,545 241 63	48,109 800 87	73,224 820 90	168,622 740 50	873,555 460 62	88
89	32,807 051 29	50,274 741 91	76,886 061 95	178,740 104 93	943,439 897 47	89
90	34,119 333 35	52,537 105 30	80,730 365 04	189,464 511 23	1018,915 089 27	90
91	35,484 106 68	54,901 275 03	84,766 883 29	200,832 381 90	1100,428 296 41	91
92	36,903 470 95	57,371 832 41	89,005 227 46	212,882 324 82	1188,462 560 13	92
93	38,379 609 79	59,953 564 87	93,455 488 83	225,655 264 31	1283,539 564 94	93
94	39,914 794 18	62,651 475 29	98,128 263 27	239,194 580 17	1386,222 730 13	94
95	41,511 385 94	65,470 791 68	103,034 676 44	253,546 254 98	1497,120 548 54	95
96	43,171 841 38	68,416 977 30	108,186 410 26	268,759 030 27	1616,890 192 42	96
97	44,898 715 04	71,495 741 28	113,595 730 77	284,884 572 09	1746,241 407 82	97
98	46,694 663 64	74,713 049 64	119,275 517 31	301,977 646 42	1885,940 720 44	98
99	48,562 450 18	78,075 136 87	125,239 293 18	320,096 305 20	2036,815 978 08	99
100	50,504 948 19	81,588 518 03	131,501 257 84	339,302 083 51	2199,761 256 32	100

Tablica II.

Teraźniejsza wartość 1-ki kapitału, płatnego

$$v^n = \frac{1}{r^n} = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}.$$

0	1	2	3	4	5	0
Po latach	1%	2%	2½%	3%	3½%	Po latach
1	0,990 0990	0,980 3922	0,975 6098	0,970 8728	0,966 1836	1
2	0,980 2960	0,961 1688	0,951 8144	0,942 5959	0,933 5107	2
3	0,970 5901	0,942 3223	0,928 5994	0,915 1417	0,901 9427	3
4	0,960 9803	0,923 8454	0,905 9506	0,888 4870	0,871 4422	4
5	0,951 4657	0,905 7308	0,883 8543	0,862 6088	0,841 9732	5
6	0,942 0452	0,887 9714	0,862 2969	0,837 4843	0,813 5006	6
7	0,932 7181	0,870 5602	0,841 2652	0,813 0915	0,785 9910	7
8	0,923 4832	0,853 4904	0,820 7466	0,789 4092	0,759 4116	8
9	0,914 3398	0,836 7553	0,800 7284	0,766 4167	0,733 7310	9
10	0,905 2870	0,820 3483	0,781 1984	0,744 0939	0,708 9188	10
11	0,896 3237	0,804 2630	0,762 1448	0,722 4213	0,684 9457	11
12	0,887 4492	0,788 4932	0,743 5559	0,701 3799	0,661 7833	12
13	0,878 6626	0,773 0325	0,725 4204	0,680 9513	0,639 4042	13
14	0,869 9630	0,757 8750	0,707 7272	0,661 1178	0,617 7818	14
15	0,861 3495	0,743 0147	0,690 4656	0,641 8619	0,596 8906	15
16	0,852 8213	0,728 4458	0,673 6249	0,623 1669	0,576 7059	16
17	0,844 3775	0,714 1626	0,657 1951	0,605 0164	0,557 2038	17
18	0,836 0173	0,700 1594	0,641 1659	0,587 3946	0,538 3611	18
19	0,827 7399	0,686 4308	0,625 5277	0,570 2860	0,520 1557	19
20	0,819 5445	0,672 9713	0,610 2709	0,553 6758	0,502 5659	20
21	0,811 4302	0,659 7758	0,595 3863	0,537 5493	0,485 5709	21
22	0,803 3962	0,646 8390	0,580 8649	0,521 8925	0,469 1506	22
23	0,795 4418	0,634 1559	0,566 6972	0,506 6917	0,453 2856	23
24	0,787 5661	0,621 7215	0,552 8754	0,491 9337	0,437 9571	24
25	0,779 7684	0,609 5309	0,539 3906	0,477 6056	0,423 1470	25
26	0,772 0480	0,597 5793	0,526 2347	0,463 6947	0,408 8377	26
27	0,764 4039	0,585 8620	0,513 3997	0,450 1891	0,395 0122	27
28	0,756 8356	0,574 3746	0,500 8778	0,437 0768	0,381 6543	28
29	0,749 3421	0,563 1123	0,488 6613	0,424 3464	0,368 7482	29
30	0,741 9229	0,552 0709	0,476 7427	0,411 9868	0,356 2784	30
31	0,734 5771	0,541 2460	0,465 1148	0,399 9871	0,344 2303	31
32	0,727 3041	0,530 6333	0,453 7706	0,388 3370	0,332 5897	32
33	0,720 1031	0,520 2287	0,442 7030	0,377 0262	0,321 3427	33
34	0,712 9733	0,510 0282	0,431 9053	0,366 0449	0,310 4761	34
35	0,705 9142	0,500 0276	0,421 3711	0,355 3834	0,299 9769	35
36	0,698 9249	0,490 2231	0,411 0937	0,345 0324	0,289 8327	36
37	0,692 0049	0,480 6109	0,401 0670	0,334 9829	0,280 0316	37
38	0,685 1534	0,471 1872	0,391 2849	0,325 2262	0,270 5619	38
39	0,678 3697	0,461 9482	0,381 7414	0,315 7535	0,261 4125	39
40	0,671 6531	0,452 8904	0,372 4306	0,306 5568	0,252 5725	40
41	0,665 0031	0,444 0102	0,363 3470	0,297 6280	0,244 0314	41
42	0,658 4189	0,435 3041	0,354 4848	0,288 9592	0,235 7791	42
43	0,651 8999	0,426 7688	0,345 8389	0,280 5429	0,227 8059	43
44	0,645 4455	0,418 4007	0,337 4038	0,272 3718	0,220 1023	44
45	0,639 0549	0,410 1968	0,329 1744	0,264 4386	0,212 6592	45

Tablica II.

po *n* latach, przy różnych stopach procentowych.

$$v^n = \frac{1}{r^n} = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}.$$

0	6	7	8	9	10	0
Po latach	4%	4½%	5%	6%	8%	Po latach
1	0,961 5385	0,956 9378	0,952 3810	0,943 3962	0,925 9259	1
2	0,924 5562	0,915 7300	0,907 0295	0,889 9964	0,857 3388	2
3	0,888 9964	0,876 2966	0,863 8376	0,839 6193	0,793 8322	3
4	0,854 8042	0,838 5613	0,822 7025	0,792 0937	0,735 0298	4
5	0,821 9271	0,802 4510	0,783 5262	0,747 2582	0,680 5832	5
6	0,790 3145	0,767 8957	0,746 2154	0,704 9605	0,630 1696	6
7	0,759 9178	0,734 8285	0,710 6813	0,665 0571	0,583 4904	7
8	0,730 6902	0,703 1851	0,676 8394	0,627 4124	0,540 2689	8
9	0,702 5867	0,672 9044	0,644 6089	0,591 8985	0,500 2490	9
10	0,675 5642	0,643 9277	0,613 9133	0,558 3948	0,463 1935	10
11	0,649 5809	0,616 1987	0,584 6793	0,526 7875	0,428 8829	11
12	0,624 5970	0,589 6639	0,556 8374	0,496 9694	0,397 1138	12
13	0,600 5741	0,564 2716	0,530 3214	0,468 8390	0,367 6980	13
14	0,577 4751	0,539 9729	0,505 0680	0,442 3010	0,340 4610	14
15	0,555 2645	0,516 7204	0,481 0171	0,417 2651	0,315 2417	15
16	0,533 9082	0,494 4693	0,458 1115	0,393 6463	0,291 8905	16
17	0,513 3732	0,473 1764	0,436 2967	0,371 3644	0,270 2689	17
18	0,493 6281	0,452 8004	0,415 5207	0,350 3438	0,250 2490	18
19	0,474 6424	0,433 3018	0,395 7340	0,330 5130	0,231 7121	19
20	0,456 3869	0,414 6429	0,376 8895	0,311 8047	0,214 5482	20
21	0,438 8336	0,396 7874	0,358 9424	0,294 1554	0,198 6557	21
22	0,421 9554	0,379 7009	0,341 8499	0,277 5051	0,183 9405	22
23	0,405 7263	0,363 3501	0,325 5713	0,261 7973	0,170 3153	23
24	0,390 1215	0,347 7035	0,310 0679	0,246 9785	0,157 6993	24
25	0,375 1168	0,332 7306	0,295 3028	0,232 9986	0,146 0179	25
26	0,360 6892	0,318 4025	0,281 2407	0,219 8100	0,135 2018	26
27	0,346 8166	0,304 6914	0,267 8483	0,207 3680	0,125 1868	27
28	0,333 4775	0,291 5707	0,255 0936	0,195 6301	0,115 9137	28
29	0,320 6514	0,279 0150	0,242 9463	0,184 5567	0,107 3275	29
30	0,308 3187	0,267 0000	0,231 3774	0,174 1101	0,099 3773	30
31	0,296 4603	0,255 5024	0,220 3595	0,164 2548	0,092 0160	31
32	0,285 0579	0,244 4999	0,209 8662	0,154 9574	0,085 2000	32
33	0,274 0942	0,233 9712	0,199 8725	0,146 1862	0,078 8889	33
34	0,263 5521	0,223 8959	0,190 3548	0,137 9115	0,073 0453	34
35	0,253 4155	0,214 2544	0,181 2903	0,130 1052	0,067 6345	35
36	0,243 6687	0,205 0282	0,172 6574	0,122 7408	0,062 6246	36
37	0,234 2968	0,196 1992	0,164 4356	0,115 7932	0,057 9857	37
38	0,225 2854	0,187 7504	0,156 6054	0,109 2388	0,053 6905	38
39	0,216 6206	0,179 6655	0,149 1480	0,103 0555	0,049 7134	39
40	0,208 2890	0,171 9287	0,142 0457	0,097 2222	0,046 0309	40
41	0,200 2779	0,164 5251	0,135 2816	0,091 7190	0,042 6212	41
42	0,192 5749	0,157 4403	0,128 8396	0,086 5274	0,039 4641	42
43	0,185 1682	0,150 6605	0,122 7044	0,081 6296	0,036 5408	43
44	0,178 0463	0,144 1728	0,116 8613	0,077 0091	0,033 8341	44
45	0,171 1984	0,137 9644	0,111 2965	0,072 6501	0,031 3279	45

0	1	2	3	4	5	0
Po latach	1%	2%	$2^1/_2\%$	3%	$3^1/_2\%$	Po latach
46	0,632 7276	0,402 1537	0,321 1458	0,256 7365	0,205 4679	46
47	0,626 4630	0,394 2684	0,313 3129	0,249 2588	0,198 5197	47
48	0,620 2604	0,386 5376	0,305 6712	0,241 9988	0,191 8065	48
49	0,614 1192	0,378 9584	0,298 2158	0,234 9503	0,185 3202	49
50	0,608 0388	0,371 5279	0,290 9422	0,228 1071	0,179 0534	50
51	0,602 0186	0,364 2430	0,283 8461	0,221 4632	0,172 9984	51
52	0,596 0581	0,357 1010	0,276 9230	0,215 0128	0,167 1482	52
53	0,590 1565	0,350 0990	0,270 1688	0,208 7503	0,161 4959	53
54	0,584 3134	0,343 2343	0,263 5793	0,202 6704	0,156 0347	54
55	0,578 5281	0,336 5042	0,257 1505	0,196 7672	0,150 7581	55
56	0,572 8001	0,329 9061	0,250 8786	0,191 0361	0,145 6600	56
57	0,567 1288	0,323 4374	0,244 7596	0,185 4719	0,140 7343	57
58	0,561 5137	0,317 0955	0,238 7898	0,180 0698	0,135 9752	58
59	0,555 9541	0,310 8779	0,232 9657	0,174 8251	0,131 3770	59
60	0,550 4496	0,304 7823	0,227 2836	0,169 7331	0,126 9343	60
61	0,544 9996	0,298 8061	0,221 7401	0,164 7894	0,122 6418	61
62	0,539 6036	0,292 9472	0,216 3318	0,159 9897	0,118 4945	62
63	0,534 2610	0,287 2031	0,211 0554	0,155 3298	0,114 4875	63
64	0,528 9713	0,281 5717	0,205 9077	0,150 8057	0,110 6159	64
65	0,523 7339	0,276 0507	0,200 8856	0,146 4133	0,106 8753	65
66	0,518 5484	0,270 6379	0,195 9859	0,142 1488	0,103 2611	66
67	0,513 4143	0,265 3313	0,191 2058	0,138 0085	0,099 7692	67
68	0,508 3310	0,260 1287	0,186 5422	0,133 9889	0,096 3954	68
69	0,503 2980	0,255 0282	0,181 9924	0,130 0863	0,093 1356	69
70	0,498 3149	0,250 0276	0,177 5536	0,126 2974	0,089 9861	60
71	0,493 3810	0,245 1251	0,173 2230	0,122 6188	0,086 9431	71
72	0,488 4961	0,240 3187	0,168 9980	0,119 0474	0,084 0030	72
73	0,483 6595	0,235 6066	0,164 8761	0,115 5800	0,081 1623	73
74	0,478 8708	0,230 9869	0,160 8548	0,112 2136	0,078 4177	74
75	0,474 1295	0,226 4577	0,156 9315	0,108 9452	0,075 7659	75
76	0,469 4351	0,222 0174	0,153 1039	0,105 7721	0,073 2038	76
77	0,464 7873	0,217 6641	0,149 3697	0,102 6913	0,070 7283	77
78	0,460 1854	0,213 3962	0,145 7265	0,099 7003	0,068 3365	78
79	0,455 6291	0,209 2119	0,142 1722	0,096 7964	0,066 0256	79
80	0,451 1179	0,205 1097	0,138 7046	0,093 9771	0,063 7929	80
81	0,446 6514	0,201 0880	0,135 3215	0,091 2399	0,061 6356	81
82	0,442 2291	0,197 1451	0,132 0210	0,088 5824	0,059 5513	82
83	0,437 8506	0,193 2795	0,128 8010	0,086 0024	0,057 5375	83
84	0,433 5155	0,189 4897	0,125 6595	0,083 4974	0,055 5918	84
85	0,429 2232	0,185 7742	0,122 5946	0,081 0655	0,053 7119	85
86	0,424 9735	0,182 1316	0,119 6045	0,078 7043	0,051 8955	86
87	0,420 7658	0,178 5604	0,116 6873	0,076 4120	0,050 1406	87
88	0,416 5998	0,175 0592	0,113 8413	0,074 1864	0,048 4450	88
89	0,412 4751	0,171 6266	0,111 0647	0,072 0256	0,046 8068	89
90	0,408 3912	0,168 2614	0,108 3558	0,069 9278	0,045 2240	90
91	0,404 3477	0,164 9622	0,105 7130	0,067 8911	0,043 6946	91
92	0,400 3443	0,161 7276	0,103 1346	0,065 9136	0,042 2170	92
93	0,396 3805	0,158 5565	0,100 6191	0,063 9938	0,040 7894	93
94	0,392 4559	0,155 4475	0,098 1650	0,062 1299	0,039 4101	94
95	0,388 5702	0,152 3995	0,095 7707	0,060 3203	0,038 0774	95
96	0,384 7230	0,149 4113	0,093 4349	0,058 5634	0,036 7897	96
97	0,380 9138	0,146 4817	0,091 1560	0,056 8577	0,035 5456	97
98	0,377 1424	0,143 6095	0,088 9326	0,055 2016	0,034 3436	98
99	0,373 4083	0,140 7936	0,086 7636	0,053 5938	0,033 1822	99
100	0,369 7112	0,138 0330	0,084 6474	0,052 0328	0,032 0601	100

0	6	7	8	9	10	0
Po latach	4%	4½%	5%	6%	8%	Po latach
46	0,164 6139	0,132 0233	0,105 9967	0,068 5378	0,029 0073	46
47	0,158 2826	0,126 3381	0,100 9492	0,064 6583	0,026 8586	47
48	0,152 1948	0,120 8977	0,096 1421	0,060 9984	0,024 8691	48
49	0,146 3411	0,115 6916	0,091 5639	0,057 5457	0,023 0269	49
50	0,140 7126	0,110 7097	0,087 2037	0,054 2884	0,021 3212	50
51	0,135 3006	0,105 9422	0,083 0512	0,051 2154	0,019 7419	51
52	0,130 0967	0,101 3801	0,079 0964	0,048 3164	0,018 2795	52
53	0,125 0930	0,097 0145	0,075 3299	0,045 5816	0,016 9255	53
54	0,120 2817	0,092 8368	0,071 7427	0,043 0015	0,015 6717	54
55	0,115 6555	0,088 8391	0,068 3264	0,040 5674	0,014 5109	55
56	0,111 2072	0,085 0135	0,065 0728	0,038 2712	0,013 4360	56
57	0,106 9300	0,081 3526	0,061 9741	0,036 1049	0,012 4407	57
58	0,102 8173	0,077 8494	0,059 0229	0,034 0612	0,011 5192	58
59	0,098 8628	0,074 4970	0,056 2123	0,032 1332	0,010 6659	59
60	0,095 0604	0,071 2890	0,053 5355	0,030 3143	0,009 8758	60
61	0,091 4042	0,068 2191	0,050 9862	0,028 5984	0,009 1443	61
62	0,087 8887	0,065 2815	0,048 5583	0,026 9797	0,008 4670	62
63	0,084 5084	0,062 4703	0,046 2460	0,025 4525	0,007 8398	63
64	0,081 2580	0,059 7802	0,044 0438	0,024 0118	0,007 2590	64
65	0,078 1327	0,057 2059	0,041 9465	0,022 6526	0,006 7213	65
66	0,075 1276	0,054 7425	0,039 9490	0,021 3704	0,006 2235	66
67	0,072 2381	0,052 3852	0,038 0467	0,020 1608	0,005 7625	67
68	0,069 4597	0,050 1294	0,036 2349	0,019 0196	0,005 3356	68
69	0,066 7882	0,047 9707	0,034 5095	0,017 9430	0,004 9403	69
70	0,064 2194	0,045 9050	0,032 8662	0,016 9274	0,004 5744	70
71	0,061 7494	0,043 9282	0,031 3011	0,015 9692	0,004 2356	71
72	0,059 3744	0,042 0366	0,029 8106	0,015 0653	0,003 9218	72
73	0,057 0908	0,040 2264	0,028 3910	0,014 2125	0,003 6313	73
74	0,054 8950	0,038 4941	0,027 0391	0,013 4081	0,003 3623	74
75	0,052 7837	0,036 8365	0,025 7515	0,012 6491	0,003 1132	75
76	0,050 7535	0,035 2502	0,024 5252	0,011 9331	0,002 8827	76
77	0,048 8015	0,033 7323	0,023 3574	0,011 2577	0,002 6691	77
78	0,046 9245	0,032 2797	0,022 2451	0,010 6204	0,002 4714	78
79	0,045 1197	0,030 8897	0,021 1858	0,010 0193	0,002 2883	79
80	0,043 3843	0,029 5595	0,020 1770	0,009 4522	0,002 1188	80
81	0,041 7157	0,028 2866	0,019 2162	0,008 9171	0,001 9619	81
82	0,040 1112	0,027 0685	0,018 3011	0,008 4124	0,001 8166	82
83	0,038 5685	0,025 9029	0,017 4296	0,007 9362	0,001 6820	83
84	0,037 0851	0,024 7874	0,016 5996	0,007 4870	0,001 5574	84
85	0,035 6588	0,023 7200	0,015 8092	0,007 0632	0,001 4420	85
86	0,034 2873	0,022 6986	0,015 0564	0,006 6634	0,001 3352	86
87	0,032 9685	0,021 7211	0,014 3394	0,006 2862	0,001 2363	87
88	0,031 7005	0,020 7858	0,013 6566	0,005 9304	0,001 1447	88
89	0,030 4813	0,019 8907	0,013 0063	0,005 5947	0,001 0600	89
90	0,029 3089	0,019 0342	0,012 3869	0,005 2780	0,000 9814	90
91	0,028 1816	0,018 2145	0,011 7971	0,004 9793	0,000 9087	91
92	0,027 0977	0,017 4302	0,011 2353	0,004 6974	0,000 8414	92
93	0,026 0555	0,016 6796	0,010 7003	0,004 4315	0,000 7791	93
94	0,025 0534	0,015 9613	0,010 1907	0,004 1807	0,000 7214	94
95	0,024 0898	0,015 2740	0,009 7055	0,003 9441	0,000 6679	95
96	0,023 1632	0,014 6163	0,009 2433	0,003 7208	0,000 6185	96
97	0,022 2724	0,013 9868	0,008 8031	0,003 5102	0,000 5727	97
98	0,021 4157	0,013 3845	0,008 3840	0,003 3115	0,000 5302	98
99	0,020 5920	0,012 8082	0,007 9847	0,003 1241	0,000 4910	99
100	0,019 8000	0,012 2566	0,007 6045	0,002 9472	0,000 4546	100

Tablica III.

Sumy, na jakie zamieniają się 1-ki, wnoszone corocznie z góry,

$$\overset{1,n}{\mathrm{W}}_{p,g} = r.\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

0	1	2	3	4	5	0
Przez lat	1%	2%	2½%	3%	3½%	Przez lat
1	1,010 000 00	1,020 000 00	1,025 000 00	1,030 000 00	1,035 000 00	1
2	2,030 100 00	2,060 400 00	2,075 625 00	2,090 900 00	2,106 225 00	2
3	3,060 401 00	3,121 608 00	3,152 515 62	3,183 627 00	3,214 942 87	3
4	4,101 005 01	4,204 040 16	4,256 328 52	4,309 135 81	4,362 465 88	4
5	5,152 015 06	5,308 120 96	5,387 736 73	5,468 409 88	5,550 152 18	5
6	6,213 535 21	6,434 283 38	6,547 430 15	6,662 462 18	6,779 407 51	6
7	7,285 670 56	7,582 969 05	7,736 115 90	7,892 336 05	8,051 686 77	7
8	8,368 527 27	8,754 628 43	8,954 518 80	9,159 106 13	9,368 495 81	8
9	9,462 212 54	9,949 721 00	10,203 381 77	10,463 879 31	10,731 393 16	9
10	10,566 834 67	11,168 715 42	11,483 466 31	11,807 795 69	12,141 991 92	10
11	11,682 503 01	12,412 089 73	12,795 552 97	13,192 029 56	13,601 961 64	11
12	12,809 328 04	13,680 331 52	14,140 441 79	14,617 790 45	15,113 030 30	12
13	13,947 421 32	14,973 938 15	15,518 952 84	16,086 324 16	16,676 986 36	13
14	15,096 895 54	16,293 416 92	16,931 926 66	17,598 913 89	18,295 680 88	14
15	16,257 864 49	17,639 285 25	18,380 224 83	19,156 881 30	19,971 029 71	15
16	17,430 443 14	19,012 070 96	19,864 730 45	20,761 587 74	21,705 015 75	16
17	18,614 747 57	20,412 312 38	21,386 348 71	22,414 435 37	23,499 691 30	17
18	19,810 895 04	21,840 558 63	22,946 007 43	24,116 868 44	25,357 180 50	18
19	21,019 003 99	23,297 369 80	24,544 657 61	25,870 374 49	27,279 681 81	19
20	22,239 194 03	24,783 317 19	26,183 274 05	27,676 485 72	29,269 470 68	20
21	23,471 585 98	26,298 983 54	27,862 855 90	29,536 780 30	31,328 902 15	21
22	24,716 301 83	27,844 963 21	29,584 427 30	31,452 883 70	33,460 413 73	22
23	25,973 464 85	29,421 862 47	31,349 037 98	33,426 470 22	35,666 528 21	23
24	27,243 199 50	31,030 299 72	33,157 763 93	35,459 264 32	37,949 856 69	24
25	28,525 631 50	32,670 905 72	35,011 708 03	37,553 042 25	40,313 101 68	25
26	29,820 887 81	34,344 323 83	36,912 000 73	39,709 633 52	42,759 060 24	26
27	31,129 096 69	36,051 210 31	38,859 800 75	41,930 922 52	45,290 627 34	27
28	32,450 387 66	37,792 234 51	40,856 295 77	44,218 850 20	47,910 799 30	28
29	33,784 891 53	39,568 079 20	42,902 703 16	46,575 415 71	50,622 677 28	29
30	35,132 740 45	41,379 440 79	45,000 270 74	49,002 678 18	53,429 470 98	30
31	36,494 067 85	43,227 029 60	47,150 277 51	51,502 758 52	56,334 502 47	31
32	37,869 008 53	45,111 570 20	49,354 034 45	54,077 841 28	59,341 210 05	32
33	39,257 698 62	47,033 801 60	51,612 885 31	56,730 176 52	62,453 152 40	33
34	40,660 275 60	48,994 477 63	53,928 207 44	59,462 081 81	65,674 012 74	34
35	42,076 878 36	50,994 367 18	56,301 412 63	62,275 944 27	69,007 603 18	35
36	43,507 647 14	53,034 254 53	58,733 947 94	65,174 222 59	72,457 869 30	36
37	44,952 723 61	55,114 939 60	61,227 296 64	68,159 449 27	76,028 894 72	37
38	46,412 250 85	57,237 238 41	63,782 979 06	71,234 232 75	79,724 906 04	38
39	47,886 373 36	59,401 983 18	66,402 553 54	74,401 259 73	83,550 277 75	39
40	49,375 237 09	61,610 022 84	69,087 617 37	77,663 297 53	87,509 537 47	40
41	50,878 989 46	63,862 223 30	71,839 807 81	81,023 196 45	91,607 371 28	41
42	52,397 779 36	66,159 467 76	74,660 803 00	84,483 892 34	95,848 629 28	42
43	53,931 757 15	68,502 657 12	77,552 323 08	88,048 409 11	100,238 331 30	43
44	55,481 074 72	70,892 710 26	80,516 131 16	91,719 861 39	104,781 672 90	44
45	57,045 885 47	73,330 564 47	83,554 034 43	95,501 457 23	109,484 031 45	45

Tablica III.

przez *n* lat, na procent składany przy różnych stopach pr.

$$\overset{1,n}{W}_{p,g} = r.\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

0	6	7	8	9	10	0
Przez lat	4%	4 1/4 %	4 1/2 %	5%	6%	Przez lat
1	1,040 000 00	1,042 500 00	1,045 000 00	1,050 000 00	1,060 000 00	1
2	2,121 600 00	2,129 306 25	2,137 025 00	2,152 500 00	2,183 600 00	2
3	3,246 464 00	3,262 301 77	3,278 191 12	3,310 125 00	3,374 616 00	3
4	4,416 322 56	4,443 449 59	4,470 709 73	4,525 631 25	4,637 092 96	4
5	5,632 975 46	5,674 796 20	5,716 891 66	5,801 912 81	5,975 318 54	5
6	6,898 294 48	6,958 475 04	7,019 151 79	7,142 008 45	7,393 837 65	6
7	8,214 226 26	8,296 710 23	8,380 013 62	8,549 108 88	8,897 467 91	7
8	9,582 795 31	9,691 820 41	9,802 114 23	10,026 564 32	10,491 315 98	8
9	11,006 107 12	11,146 222 78	11,288 209 37	11,577 892 54	12,180 794 94	9
10	12,486 351 41	12,662 437 25	12,841 178 79	13,206 787 16	13,971 642 64	10
11	14,025 805 46	14,243 090 83	14,464 031 84	14,917 126 52	15,869 941 20	11
12	15,626 837 68	15,890 922 19	16,159 913 27	16,712 982 85	17,882 137 67	12
13	17,291 911 19	17,608 786 38	17,932 109 37	18,598 631 99	20,015 065 93	13
14	19,023 587 64	19,399 659 80	19,784 054 29	20,578 563 59	22,275 969 88	14
15	20,824 531 14	21,266 645 34	21,719 336 73	22,657 491 77	24,672 528 08	15
16	22,697 512 39	23,212 977 77	23,741 706 89	24,840 366 36	27,212 879 76	16
17	24,645 412 88	25,242 029 33	25,855 083 70	27,132 384 67	29,905 652 55	17
18	26,671 229 40	27,357 315 57	28,063 562 46	29,539 003 91	32,759 991 70	18
19	28,778 078 58	29,562 501 49	30,371 422 77	32,065 954 10	35,785 591 20	19
20	30,969 201 72	31,861 407 80	32,783 136 80	34,719 251 81	38,992 726 68	20
21	33,247 969 79	34,258 017 63	35,303 377 95	37,505 214 40	42,392 290 28	21
22	35,617 888 58	36,756 483 38	37,937 029 96	40,430 475 12	45,995 827 69	22
23	38,082 604 13	39,361 133 92	40,689 196 31	43,501 998 87	49,815 577 35	23
24	40,645 908 30	42,076 482 11	43,565 210 14	46,727 098 82	53,864 512 00	24
25	43,311 744 63	44,907 232 60	46,570 644 60	50,113 453 76	58,156 382 72	25
26	46,084 214 41	47,858 289 99	49,711 323 61	53,669 126 45	62,705 765 68	26
27	48,967 582 99	50,934 767 32	52,993 333 17	57,402 582 77	67,528 111 62	27
28	51,966 286 31	54,141 994 93	56,423 033 16	61,322 711 91	72,639 798 32	28
29	55,084 937 76	57,485 529 71	60,007 069 66	65,438 847 50	78,058 186 22	29
30	58,328 335 27	60,971 164 72	63,752 387 79	69,760 789 88	83,801 677 39	30
31	61,701 468 68	64,604 939 22	67,666 245 24	74,298 829 36	89,889 778 03	31
32	65,209 527 43	68,393 149 14	71,756 226 28	79,063 770 83	96,343 164 71	32
33	68,857 908 53	72,342 357 98	76,030 256 46	84,066 959 37	103,183 754 60	33
34	72,652 224 87	76,459 408 19	80,496 618 00	89,320 307 34	110,434 779 87	34
35	76,598 313 87	80,751 433 04	85,163 965 81	94,836 322 71	118,120 866 66	35
36	80,702 246 42	85,225 868 95	90,041 344 27	100,628 138 84	126,268 118 66	36
37	84,970 336 28	89,890 468 38	95,138 204 76	106,709 545 79	134,904 205 78	37
38	89,409 149 73	94,753 313 28	100,464 423 98	113,095 023 08	144,058 458 13	38
39	94,025 515 72	99,822 829 10	106,030 323 06	119,799 774 23	153,761 965 62	39
40	98,826 536 35	105,107 799 33	111,846 687 59	126,839 762 94	164,047 683 56	40
41	103,819 597 80	110,617 380 80	117,924 788 54	134,231 751 09	174,950 544 57	41
42	109,012 381 71	116,361 119 49	124,276 404 02	141,993 338 64	186,507 577 24	42
43	114,412 876 98	122,348 967 07	130,913 842 20	150,143 005 58	198,758 031 88	43
44	120,029 392 06	128,591 298 17	137,849 965 10	158,700 155 86	211,743 513 79	44
45	125,870 567 74	135,098 928 34	145,098 213 53	167,685 163 65	225,508 124 62	45

0	1	2	3	4	5	0
Przez lat	1%	2%	$2^1/_2$%	3%	$3^1/_2$%	Przez lat
46	58,626 344 32	75,817 175 76	86,667 885 29	99,396 500 95	114,350 972 55	46
47	60,222 607 77	78,353 519 27	89,859 582 43	103,408 395 98	119,388 256 59	47
48	61,834 833 85	80,940 589 66	93,131 071 99	107,540 647 85	124,601 845 57	48
49	63,463 182 18	83,579 401 45	96,484 348 79	111,796 867 29	129,997 910 16	49
50	65,107 814 01	86,270 989 48	99,921 457 51	116,180 773 31	135,582 837 02	50
51	66,768 892 15	89,016 409 27	103,444 493 95	120,696 196 51	141,363 236 31	51
52	68,446 581 07	91,816 737 45	107,055 606 29	125,347 082 40	147,345 949 58	52
53	70,141 046 88	94,673 072 20	110,756 996 45	130,137 494 88	153,538 057 82	53
54	71,852 457 35	97,586 533 65	114,550 921 36	135,071 619 72	159,946 889 84	54
55	73,580 981 92	100,558 264 82	118,439 694 40	140,153 768 31	166,580 030 99	55
56	75,326 791 74	103,589 429 61	122,425 686 76	145,388 381 36	173,445 332 07	56
57	77,090 059 66	106,681 218 20	126,511 328 93	150,780 032 80	180,550 918 69	57
58	78,870 960 25	109,834 842 56	130,699 112 15	156,333 433 79	187,905 200 85	58
59	80,669 669 86	113,051 539 41	134,991 589 95	162,053 436 80	195,516 882 88	59
60	82,486 366 55	116,332 570 20	139,391 379 70	167,945 039 91	203,394 973 78	60
61	84,321 230 22	119,679 221 60	143,901 164 19	174,013 391 10	211,548 797 86	61
62	86,174 442 52	123,092 806 04	148,523 693 30	180,263 792 84	219,988 015 79	62
63	88,046 186 95	126,574 662 16	153,261 785 63	186,701 706 62	228,722 585 99	63
64	89,936 648 82	130,126 155 40	158,118 330 27	193,332 757 82	237,762 876 50	64
65	91,846 015 31	133,748 678 51	163,096 288 53	200,162 740 55	247,119 577 18	65
66	93,774 475 46	137,443 652 08	168,198 695 74	207,197 622 77	256,803 762 38	66
67	95,722 220 21	141,212 525 12	173,428 663 13	214,443 551 45	266,826 894 06	67
68	97,689 442 42	145,056 775 62	178,789 379 71	221,906 858 00	277,200 835 35	68
69	99,676 336 84	148,977 911 13	184,284 114 21	229,594 063 74	287,937 864 59	69
70	101,683 100 21	152,977 469 36	189,916 217 06	237,511 885 65	299,050 689 85	70
71	103,709 931 21	157,057 018 74	195,689 122 49	245,667 242 22	310,552 463 99	71
72	105,757 030 52	161,218 159 12	201,606 350 55	254,067 259 48	322,456 800 23	72
73	107,824 600 83	165,462 522 30	207,671 509 31	262,719 277 27	334,777 788 24	73
74	109,912 846 84	169,791 772 75	213,888 297 05	271,630 855 59	347,530 010 83	74
75	112,021 975 30	174,207 608 20	220,260 504 47	280,809 781 26	360,728 561 21	75
76	114,152 195 06	178,711 760 37	226,792 017 08	290,264 074 69	374,389 060 85	76
77	116,303 717 01	183,305 995 57	233,486 817 51	300,001 996 93	388,527 677 98	77
78	118,476 754 18	187,992 115 48	240,348 987 95	310,032 056 84	403.161 146 71	78
79	120,671 521 72	192,771 957 79	247,382 712 65	320,363 018 55	418,306 786 85	79
80	122,888 236 94	197,647 396 95	254,592 280 46	331,003 909 10	433,982 524 39	80
81	125,127 119 31	202,620 344 89	261,982 087 48	341,964 026 38	450,206 912 74	81
82	127,388 390 50	207,692 751 79	269,556 639 66	353,252 947 17	466,999 154 69	82
83	129,672 274 40	212,866 606 82	277,320 555 65	364,880 535 58	484,379 125 10	83
84	131,978 997 15	218,143 938 96	285,278 569 54	376,856 951 65	502,367 394 48	84
85	134,308 787 12	223,526 817 74	293,435 533 78	389,192 660 20	520,985 253 28	85
86	136,661 874 99	229,017 354 09	301,796 422 13	401,898 440 01	540,254 737 15	86
87	139,038 493 74	234,617 701 17	310,366 332 68	414,985 393 21	560,198 652 95	87
88	141,438 878 68	240,330 055 20	319,150 491 00	428,464 955 00	580,840 605 80	88
89	143,863 267 46	246,156 656 30	328,154 253 27	442,348 903 65	602,205 027 01	89
90	146,311 900 14	252,099 789 43	337,383 109 61	456,649 370 76	624,317 202 95	90
91	148,785 019 14	258,161 785 22	346,842 687 35	471,378 851 88	647,203 305 05	91
92	151,282 869 33	264,345 020 92	356,538 754 53	486,550 217 44	670,890 420 73	92
93	153,805 698 03	270,651 921 34	366,477 223 39	502,176 723 96	695.406 585 46	93
94	156,353 755 01	277,084 959 76	376,664 163 98	518,272 025 68	720,780 815 95	94
95	158,927 292 56	283,646 658 96	387,105 757 83	534,850 186 45	747,043 144 51	95
96	161,526 565 48	290,339 592 14	397,808 401 77	551,925 692 05	774,224 654 56	96
97	164,151 831 14	297,166 383 98	408,778 611 82	569,513 462 81	802,357 517 47	97
98	166,803 349 45	304,129 711 66	420,023 077 11	587,628 866 69	831,475 030 59	98
99	169,481 382 94	311,232 305 89	431,548 654 04	606,287 732 69	861,611 656 66	99
100	172,186 196 77	318,476 952 01	443,362 370 39	625,506 354 67	892,803 064 64	100

0	6	7	8	9	10	0
Przez lat	4%	4¼%	4½%	5%	6%	Przez lat
46	131,945 390 45	141,883 132 79	152,672 633 14	177,119 421 83	240,098 612 09	46
47	138,263 206 07	148.955 665 94	160,587 901 63	187,025 392 92	255,564 528 82	47
48	144,833 734 31	156,328 781 74	168,859 357 20	197,426 662 57	271,958 400 55	48
49	151,667 083 68	164,015 254 96	177,503 328 28	208,347 995 70	289,335 904 58	49
50	158,773 767 03	172,028 403 30	186,535 664 55	219,815 395 48	307,756 058 86	50
51	166,164 717 71	180,382 110 44	195,974 769 46	231,856 165 26	327,281 422 39	51
52	173,851 306 42	189,090 850 13	205,838 634 08	244,498 973 52	347,978 307 73	52
53	181,845 358 68	198,169 711 27	216,146 372 61	257,773 922 20	369,917 006 20	53
54	190,159 173 02	207,634 423 99	226,917 959 38	271,712 618 31	393,172 026 57	54
55	198,805 539 94	217,501 387 01	238,174 267 55	286,348 249 22	417,822 348 16	55
56	207,797 761 54	227,787 695 96	249,937 109 59	301,715 661 68	443,951 689 05	56
57	217,149 672 00	238,511 173 04	262,229 279 53	317,851 444 77	471,648 790 39	57
58	226,875 658 88	249,690 397 89	275,074 597 10	334,794 017 00	501,007 717 82	58
59	236,990 685 24	261,344 739 80	288,497 953 97	352,583 717 85	532,128 180 89	59
60	247,510 312 65	273,494 391 25	302,525 361 90	371,262 903 75	565,115 871 74	60
61	258,450 725 16	286,160 402 87	317,184 003 19	390,876 048 93	600,082 824 04	61
62	269,828 754 16	299,364 720 00	332,502 283 33	411,469 851 38	637,147 793 49	62
63	281,661 904 33	313,130 220 60	348,509 886 08	433,093 343 95	676,436 661 10	63
64	293,968 380 50	327,480 754 97	365,237 830 96	455,798 011 15	718,082 860 76	64
65	306,767 115 72	342,441 187 06	382,718 533 35	479,637 911 70	762,227 832 41	65
66	320,077 800 35	358,037 437 51	400,985 867 35	504,669 807 29	809,021 502 35	66
67	333,920 912 36	374,296 528 60	420,075 231 38	530,953 297 65	858,622 792 49	67
68	348,317 748 86	391,246 631 07	440,023 616 79	558,550 962 54	911,200 160 04	68
69	363,290 458 81	408,917 112 89	460,869 679 55	587,528 510 66	966,932 169 64	69
60	378,862 077 16	427,338 590 19	482,653 815 13	617,954 936 20	1026,008 099 82	70
71	395,056 560 25	446,542 980 27	505,418 236 81	649,902 683 01	1088,628 585 81	71
72	411,898 822 66	466,563 556 93	529,207 057 46	683,447 817 16	1155,006 300 96	72
73	429,414 775 57	487,435 008 10	554,066 375 05	718,670 208 02	1225,366 679 01	73
74	447,631 366 59	509,193 495 94	580,044 361 93	755,653 718 42	1299,948 679 76	74
75	466,576 621 25	531,876 719 52	607,191 358 21	794,486 404 34	1379,005 600 55	75
76	486,279 686 10	555,523 980 10	635,559 969 33	835,260 724 55	1462,805 936 58	76
77	506,770 873 55	580,176 249 26	665,205 167 95	878,073 760 78	1551,634 292 77	77
78	528,081 708 49	605,876 239 85	696,184 400 51	923,027 448 82	1645,792 350 34	78
79	550,244 976 83	632,668 480 04	728,557 698 53	970,228 821 26	1745.599 891 36	79
80	573,294 775 90	660,599 390 44	762,387 794 97	1019,790 262 32	1851,395 884 84	80
81	597,266 566 94	689,717 364 54	797,740 245 74	1071,829 775 44	1963,539 637 93	81
82	622,197 229 62	720,072 852 53	834,683 556 80	1126,471 264 21	2082,412 016 21	82
83	648,125 118 80	751,718 448 76	873,289 316 86	1183,844 827 42	2208,416 737 18	83
84	675,090 123 55	784.708 982 84	913.632 336 11	1244,087 068 79	2341,981 741 41	84
85	703,133 728 49	819,101 614 61	955,790 791 24	1307,341 422 23	2483.560 645 89	85
86	732,299 077 63	854,955 933 23	999,846 376 85	1373,758 493 35	2633,634 284 65	86
87	762,631 040 74	892,334 060 39	1045.884 463 80	1443,496 418 01	2792,712 341 73	87
88	794,176 282 37	931,300 757 96	1093,994 264 67	1516,721 238 91	2961,335 082 23	88
89	826,983 333 66	971,923 540 17	1144.269 006 58	1593,607 300 86	3140,075 187 16	89
90	861,102 667 01	1014,272 790 63	1196.806 111 88	1674,337 665 90	3329,539 698 39	90
91	896,586 773 69	1058,421 884 23	1251.707 386 92	1759.104 549 20	3530,372 080 30	91
92	933,490 244 64	1104,447 314 31	1309,079 219 33	1848,109 776 66	3743,254 405 12	92
93	971,869 854 42	1152,428 825 17	1369,032 784 20	1941,565 265 49	3968,909 669 42	93
94	1011,784 648 60	1202,449 550 24	1431,684 259 49	2039,693 528 76	4208,104 249 59	94
95	1053,296 034 54	1254,596 156 12	1497,155 051 16	2142,728 205 20	4461,650 504 56	95
96	1096,467 875 93	1308,958 992 76	1565,572 028 46	2250,914 615 46	4730,409 534 84	96
97	1141,366 590 96	1365,632 249 95	1637,067 769 74	2364,510 346 23	5015,294 106 93	97
98	1188,061 254 60	1424,714 120 57	1711,780 819 38	2483,785 863 55	5317,271 753 34	98
99	1236,623 704 79	1486,306 970 69	1789.855 956 26	2609,025 156 72	5637,368 058 54	99
100	1287,128 652 98	1550,517 516 94	1871,444 474 29	2740,526 414 56	5976,670 142 05	100

Tablica IV.

Teraźniejsza wartość 1-ek, wnoszonych corocznie z góry,

$$\overset{1,n}{W}_{t,g} = \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

0	1	2	3	4	5	0
Przez lat	1%	2%	2½%	3%	3½%	Przez lat
1	1,000 0000	1,000 0000	1,000 0000	1,000 0000	1,000 0000	1
2	1,990 0990	1,980 3922	1,975 6098	1,970 8738	1,966 1836	2
3	2,970 3951	2,941 5609	2,927 4242	2,913 4697	2,899 6943	3
4	3,940 9852	3,883 8833	3,856 0236	3,828 6114	3,801 6370	4
5	4,901 9656	4,807 7287	4,761 9742	4,717 0984	4,673 0792	5
6	5,853 4312	5,713 4595	5,645 8285	5,579 7072	5,515 0524	6
7	6,795 4765	6,601 4309	6,508 1254	6,417 1914	6,328 5530	7
8	7,728 1945	7,471 9911	7,349 3906	7,230 2830	7,114 5440	8
9	8,651 6778	8,325 4814	8,170 1372	8,019 6922	7,873 9555	9
10	9,566 0176	9,162 2367	8,970 8655	8,786 1089	8,607 6865	10
11	10,471 3045	9,982 5850	9,752 0639	9,530 2028	9,316 6053	11
12	11,367 6282	10,786 8480	10,514 2087	10,252 6241	10,001 5510	12
13	12,255 0775	11,575 3412	11,257 7646	10,954 0040	10,663 3343	13
14	13,133 7401	12,348 3737	11,983 1850	11,634 9553	11,302 7385	14
15	14,003 7030	13,106 2488	12,690 9122	12,296 0731	11,920 5203	15
16	14,865 0525	13,849 2635	13,381 3777	12,937 9351	12,517 4109	16
17	15,717 8738	14,577 7093	14,055 0027	13,561 1020	13,094 1168	17
18	16,562 2513	15,291 8719	14,712 1977	14,166 1185	13,651 3206	18
19	17,398 2686	15,992 0313	15,353 3636	14,753 5131	14,189 6817	19
20	18,226 0085	16,678 4620	15,978 8913	15,323 7991	14,709 8374	20
21	19,045 5530	17,351 4333	16,589 1623	15,877 4749	15,212 4033	21
22	19,856 9831	18,011 2092	17,184 5486	16,415 0241	15,697 9742	22
23	20,660 3793	18,658 0482	17,765 4132	16,936 9166	16,167 1248	23
24	21,455 8211	19,292 2041	18,332 1105	17,443 6084	16,620 4105	24
25	22,243 3873	19,913 9256	18,884 9858	17,935 5421	17,058 3676	25
26	23,023 1557	20,523 4565	19,424 3764	18,413 1477	17,481 5146	26
27	23,795 2037	21,121 0358	19,950 6111	18,876 8424	17,890 3523	27
28	24,559 6076	21,706 8978	20,464 0109	19,327 0315	18,285 3645	28
29	25,316 4432	22,281 2724	20,964 8887	19,764 1082	18,667 0188	29
30	26,065 7853	22,844 3847	21,453 5499	20,188 4546	19,035 7670	30
31	26,807 7082	23,396 4556	21,930 2926	20,600 4413	19,392 0454	31
32	27,542 2854	23,937 7015	22,395 4074	21,000 4285	19,736 2758	32
33	28,269 5895	24,468 3348	22,849 1780	21,388 7655	20,068 8655	33
34	28,989 6925	24,988 5636	23,291 8809	21,765 7918	20,390 2082	34
35	29,702 6659	25,498 5917	23,723 7863	22,131 8367	20,700 6842	35
36	30,408 5801	25,998 6193	24,145 1573	22,487 2201	21,000 6611	36
37	31,107 5050	26,488 8425	24,556 2511	22,832 2525	21,290 4938	37
38	31,799 5099	26,969 4534	24,957 3181	23,167 2354	21,570 5254	38
39	32,484 6633	27,440 6406	25,348 6030	23,492 4616	21,841 0874	39
40	33,163 0330	27,902 5888	25,730 3444	23,808 2151	22,102 4999	40
41	33,834 6861	28,355 4792	26,102 7751	24,114 7720	22,355 0723	41
42	34,499 6892	28,799 4895	26,466 1220	24,412 4000	22,599 1037	42
43	35,158 1081	29,234 7936	26,820 6068	24,701 3592	22,834 8828	43
44	35,810 0081	29,661 5623	27,166 4457	24,981 9021	23,062 6887	44
45	36,455 4535	30,079 9631	27,503 8495	25,254 2739	23,282 7910	45

Tablica IV.

przez ***n*** lat, na procent składany przy różnych stopach pr.

$$\overset{1,n}{W}_{t,g} = \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

0	6	7	8	9	10	0
Przez lat	4%	4½%	5%	6%	8%	Przez lat
1	1,000 0000	1,000 0000	1,000 0000	1,000 0000	1,000 0000	1
2	1,961 5385	1,956 9378	1,952 3810	1,943 3962	1,925 9259	2
3	2,886 0947	2,872 6678	2,859 4104	2,833 3927	2,783 2647	3
4	3,775 0910	3,748 9644	3,723 2480	3,673 0119	3,577 0970	4
5	4,629 8952	4,587 5257	4,545 9505	4,465 1056	4,312 1268	5
6	5,451 8223	5,389 9767	5,329 4767	5,212 3638	4,992 7101	6
7	6,242 1369	6,157 8725	6,075 6921	5,917 3243	5,622 8797	7
8	7,002 0547	6,892 7009	6,786 3734	6,582 3814	6,206 3701	8
9	7,732 7449	7,595 8861	7,463 2128	7,209 7938	6,746 6389	9
10	8,435 3316	8,268 7905	8,107 8217	7,801 6923	7,246 8879	10
11	9,110 8958	8,912 7182	8,721 7349	8,360 0871	7,710 0814	11
12	9,760 4767	9,528 9169	9,306 4142	8,886 8746	8,138 9643	12
13	10,385 0738	10,118 5808	9,863 2516	9,383 8439	8,536 0780	13
14	10,985 6478	10,682 8524	10,393 5730	9,852 6830	8,903 7759	14
15	11,563 1229	11,222 8253	10,898 6409	10,294 9839	9,244 2370	15
16	12,118 3874	11,739 5457	11,379 6580	10,712 2490	9,559 4787	16
17	12,652 2956	12,234 0150	11,837 7696	11,105 8953	9,851 3692	17
18	13,165 6689	12,707 1914	12,274 0662	11,477 2597	10,121 6381	18
19	13,659 2970	13,159 9918	12,689 5869	11,827 6035	10,371 8871	19
20	14,133 9394	13,593 2936	13,085 3209	12,158 1165	10,603 5992	20
21	14,590 3263	14,007 9365	13,462 2103	12,469 9212	10,818 1474	21
22	15,029 1599	14,404 7239	13,821 1527	12,764 0766	11,016 8031	22
23	15,451 1153	14,784 4248	14,163 0026	13,041 5817	11,200 7437	23
24	15,856 8417	15,147 7749	14,488 5739	13,303 3790	11,371 0589	24
25	16,246 9631	15,495 4784	14,798 6418	13,550 3575	11,528 7583	25
26	16,622 0799	15,828 2090	15,093 9446	13,783 3562	11,674 7762	26
27	16,982 7692	16,146 6114	15,375 1853	14,003 1662	11,809 9779	27
28	17,329 5857	16,451 3028	15,643 0336	14,210 5341	11,935 1648	28
29	17,663 0632	16,742 8735	15,898 1273	14,406 1643	12,051 0785	29
30	17,983 7146	17,021 8885	16,141 0736	14,590 7210	12,158 4060	30
31	18,292 0333	17,288 8885	16,372 4510	14,764 8312	12,257 7833	31
32	18,588 4936	17,544 3910	16,592 8105	14,929 0860	12,349 7994	32
33	18,873 5515	17,788 8909	16,802 6767	15,084 0434	12,434 9994	33
34	19,147 6457	18,022 8621	17,002 5492	15,230 2296	12,513 8884	34
35	19,411 1978	18,246 7580	17,192 9040	15,368 1411	12,586 9337	35
36	19,664 6132	18,461 0124	17,374 1943	15,498 2464	12,654 5682	36
37	19,908 2820	18,666 0406	17,546 8517	15,620 9871	12,717 1928	37
38	20,142 5788	18,862 2398	17,711 2873	15,736 7803	12,775 1785	38
39	20,367 8642	19,049 9902	17,867 8927	15,846 0192	12,828 8690	39
40	20,584 4848	19,229 6557	18,017 0407	15,949 0747	12,878 5824	40
41	20,792 7739	19,401 5844	18,159 0864	16,046 2969	12,924 6133	41
42	20,993 0518	19,566 1095	18,294 3680	16,138 0159	12,967 2346	42
43	21,185 6267	19,723 5498	18,423 2076	16,224 5433	13,006 6987	43
44	21,370 7949	19,874 2103	18,545 9120	16,306 1729	13,043 2395	44
45	21,548 8413	20,018 3831	18,662 7733	16,383 1820	13,077 0736	45

0	1	2	3	4	5	0
Przez lat	1%	2%	2½%	3%	3½%	Przez lat
46	37,094 5084	30,490 1599	27,833 0239	25,518 7125	23,495 4503	46
47	37,727 2361	30,892 3136	28,154 1696	25,775 4491	23,700 9181	47
48	38,353 6991	31,286 5820	28,467 4826	26,024 7078	23,899 4378	48
49	38,973 9595	31,673 1196	28,773 1537	26,266 7066	24,091 2443	49
50	39,588 0787	32,052 0780	29,071 3695	26,501 6569	24,276 5645	50
51	40,196 1175	32,423 6059	29,362 3117	26,729 7640	24,455 6179	51
52	40,798 1362	32,787 8489	29,646 1577	26,951 2272	24,628 6163	52
53	41,394 1942	33,144 9499	29,923 0807	27,166 2400	24,795 7645	53
54	41,984 3507	33,495 0489	30,193 2495	27,374 9903	24,957 2604	54
55	42,568 6641	33,838 2833	30,456 8288	27,577 6605	25,113 2951	55
56	43,147 1922	34,174 7875	30,713 9793	27,774 4276	25,264 0532	56
57	43,719 9922	34,504 6936	30,964 8578	27,965 4637	25,409 7133	57
58	44,287 1210	34,828 1310	31,209 6174	28,150 9357	25,550 4476	58
59	44,848 6347	35,145 2265	31,448 4072	28,331 0055	25,686 4228	59
60	45,404 5888	35,456 1044	31,681 3729	28,505 8306	25,817 7998	60
61	45,955 0384	35,760 8867	31,908 6565	28,675 5637	25,944 7341	61
62	46,500 0380	36,059 6928	32,130 3966	28,840 3531	26,067 3760	62
63	47,039 6416	36,352 6400	32,346 7284	29,000 3428	26,185 8705	63
64	47,573 9026	36,639 8432	32,557 7838	29,155 6726	26,300 3580	64
65	48,102 8738	36,921 4149	32,763 6915	29,306 4783	26,410 9739	65
66	48,626 6078	37,197 4655	32,964 5771	29,452 8915	26,517 8492	66
67	49,145 1562	37,468 1035	33,160 5630	29,595 0403	26,621 1103	67
68	49,658 5705	37,733 4348	33,351 7688	29,733 0488	26,720 8795	68
69	50,166 9015	37,993 5635	33,538 3110	29,867 0377	26,817 2749	69
70	50,670 1995	38,248 5917	33,720 3034	29,997 1240	26,910 4105	70
71	51,168 5143	38,498 6193	33,897 8570	30,123 4214	27,000 3966	71
72	51,661 8954	38,743 7444	34,071 0800	30,246 0401	27,087 3398	72
73	52,150 3915	38,984 0631	34,240 0780	30,365 0875	27,171 3428	73
74	52,634 0510	39,219 6697	34,404 9542	30,480 6675	27,252 5051	74
75	53,112 9218	39,450 6566	34,565 8089	30,592 8811	27,330 9228	75
76	53,587 0512	39,677 1143	34,722 7404	30,701 8263	27,406 6887	76
77	54,056 4864	39,899 1317	34,875 8443	30,807 5983	27,479 8924	77
78	54,521 2736	40,116 7958	35,025 2140	30,910 2896	27,550 6207	78
79	54,981 4590	40,330 1919	35,170 9405	31,009 9899	27,618 9572	79
80	55,437 0882	40,539 4039	35,313 1127	31,106 7863	27,684 9828	80
81	55,888 2061	40,744 5136	35,451 8172	31,200 7634	27,748 7757	81
82	56,334 8575	40,945 6016	35,587 1388	31,292 0033	27,810 4113	82
83	56,777 0867	41,142 7466	35,719 1598	31,380 5858	27,869 9626	83
84	57,214 9373	41,336 0261	35,847 9657	31,466 5881	27,927 5001	84
85	57,648 4528	41,525 5158	35,973 6202	31,550 0856	27,983 0919	85
86	58,077 6760	41,711 2900	36,096 2149	31,631 1510	28,036 8037	86
87	58,502 6495	41,893 4216	36,215 8194	31,709 8554	28,088 6993	87
88	58,923 4154	42,071 9819	36,332 5067	31,786 2673	28,138 8399	88
89	59,340 0152	42,247 0411	36,446 3480	31,860 4537	28,187 2849	89
90	59,752 4903	42,418 6677	36,557 4127	31,932 4794	28,234 0917	90
91	60,160 8815	42,586 9292	36,665 7685	32,002 4071	28,279 3156	91
92	60,565 2292	42,751 8913	36,771 4814	32,070 2982	28,323 0103	92
93	60,965 5735	42,913 6190	36,874 6160	32,136 2118	28,365 2273	93
94	61,361 9539	43,072 1754	36,975 2352	32,200 2057	28,406 0167	94
95	61,754 4098	43,227 6230	37,073 4002	32,262 3356	28,445 4268	95
96	62,142 9800	43,380 0225	37,169 1709	32,322 6559	28,483 5042	96
97	62,527 7030	43,529 4339	37,262 6057	32,381 2193	28,520 2939	97
98	62,908 6168	43,675 9155	37,353 7617	32,438 0770	28,555 8395	98
99	63,285 7592	43,819 5250	37,442 6943	32,493 2787	28,590 1831	99
100	63,659 1676	43,960 3187	37,529 4579	32,546 8725	28,623 3653	100

0	6	7	8	9	10	0
Przez lat	4%	4½%	5%	6%	8%	Przez lat
46	21,720 0397	20,156 3474	18,774 0698	16,455 8321	13,108 4015	46
47	21,884 6536	20,288 3707	18,880 0665	16,524 3699	13,137 4088	47
48	22,042 9361	20,414 7088	18,981 0157	16,589 0282	13,164 2674	48
49	22,195 1309	20,535 6065	19,077 1578	16,650 0266	13,189 1365	49
50	22,341 4720	20,651 2981	19,168 7217	16,707 5723	13,212 1634	50
51	22,482 1846	20,762 0078	19,255 9255	16,761 8606	13,233 4846	51
52	22,617 4852	20,867 9500	19,338 9766	16,813 0761	13,253 2265	52
53	22,747 5819	20,969 3302	19,418 0730	16,861 3925	13,271 5060	53
54	22,872 6749	21,066 3447	19,493 4028	16,906 9741	13,288 4315	54
55	22,992 9567	21,159 1815	19,565 1456	16,949 9755	13,304 1033	55
56	23,108 6122	21,248 0206	19,633 4720	16,990 5430	13,318 6141	56
57	23,219 8194	21,333 0340	19,698 5447	17,028 8141	13,332 0501	57
58	23,326 7494	21,414 3866	19,760 5188	17,064 9190	13,344 4908	58
59	23,429 5668	21,492 2360	19,819 5417	17,098 9802	13,356 0100	59
60	23,528 4296	21,566 7330	19,875 7540	17,131 1134	13,366 6760	60
61	23,623 4900	21,638 0220	19,929 2895	17,161 4277	13,376 5518	61
62	23,714 8942	21,706 2412	19,980 2757	17,190 0261	13,385 6961	62
63	23,802 7829	21,771 5227	20,028 8340	17,217 0058	13,394 1631	63
64	23,887 2912	21,833 9930	20,075 0800	17,242 4583	13,402 0029	64
65	23,968 5493	21,893 7732	20,119 1238	17,266 4701	13,409 2619	65
66	24,046 6820	21,950 9791	20,161 0703	17,289 1227	13,415 9832	66
67	24,121 8096	22,005 7217	20,201 0194	17,310 4931	13,422 2067	67
68	24,194 0477	22,058 1068	20,239 0661	17,330 6539	13,427 9692	68
69	24,263 5074	22,108 2362	20,275 3010	17,349 6735	13,433 3048	69
70	24,330 2956	22,156 2069	20,309 8105	17,367 6165	13,438 2452	70
71	24,394 5150	22,202 1119	20,342 6766	17,384 5439	13,442 8196	71
72	24,456 2644	22,246 0401	20,373 9778	17,400 5131	13,447 0552	72
73	24,515 6388	22,288 0766	20,403 7883	17,415 5784	13,450 9770	73
74	24,572 7297	22,328 3030	20,432 1794	17,429 7909	13,454 6084	74
75	24,627 6247	22,366 7971	20,459 2185	17,443 1990	13,457 9707	75
76	24,680 4083	22,403 6336	20,484 9700	17,455 8481	13,461 0840	76
77	24,731 1619	22,438 8838	20,509 4952	17,467 7812	13,463 9667	77
78	24,779 9633	22,472 6161	20,532 8526	17,479 0389	13,466 6358	78
79	24,826 8878	22,504 8958	20,555 0977	17,489 6593	13,469 1072	79
80	24,872 0075	22,535 7854	20,576 2835	17,499 6786	13,471 3956	80
81	24,915 3918	22,565 3449	20,596 4605	17,509 1308	13,473 5142	81
82	24,957 1075	22,593 6315	20,615 6767	17,518 0479	13,475 4763	82
83	24,997 2188	22,620 7000	20,633 9778	17,526 4603	13,477 2929	83
84	25,035 7873	22,646 6029	20,651 4074	17,534 3965	13,478 9749	84
85	25,072 8724	22,671 3903	20,668 0070	17,541 8835	13,480 5323	85
86	25,108 5312	22,695 1103	20,683 8162	17,548 9467	13,481 9744	86
87	25,142 8184	22,717 8089	20,698 8726	17,555 6101	13,483 3096	87
88	25,175 7869	22,739 5301	20,713 2120	17,561 8963	13,484 5459	88
89	25,207 4874	22,760 3159	20,726 8686	17,567 8267	13,485 6907	89
90	25,237 9687	22,780 2066	20,739 8748	17,573 4214	13,486 7506	90
91	25,267 2776	22,799 2407	20,752 2617	17,578 6994	13,487 7320	91
92	25,275 4592	22,817 4553	20,764 0588	17,583 6787	13,488 6408	92
93	25,322 5569	22,834 8854	20,775 2941	17,588 3762	13,489 4822	93
94	25,348 6124	22,851 5650	20,785 9944	17,592 8077	13,490 2613	94
95	25,373 6658	22,867 5263	20,796 1851	17,596 9884	13,490 9827	95
96	25,397 7556	22,882 8003	20,805 8906	17,600 9324	13,491 6506	96
97	25,420 9188	22,897 4166	20,815 1339	17,604 6532	13,492 2691	97
98	25,443 1912	22,911 4034	20,823 9370	17,608 1634	13,492 8418	98
99	25,464 6069	22,924 7879	20,832 3210	17,611 4749	13,493 3720	99
100	25,485 1990	22,937 5961	20,840 3057	17,614 5990	13,493 8630	100

Tablica V.

Teraźniejsza wartość 1-ek, wnoszonych corocznie z dołu,

$$\overset{1,n}{W}_{t,d} = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

0	1	2	3	4	5	0
Przez lat	1%	2%	2½%	3%	3½%	Przez lat
1	0,990 0990	0,980 3922	0,975 6098	0,970 8738	0,966 1836	1
2	1,970 3951	1,941 5609	1,927 4242	1,913 4697	1,899 6943	2
3	2,940 9852	2,883 8833	2,856 0236	2,828 6114	2,801 6370	3
4	3,901 9656	3,807 7287	3,761 9742	3,717 0984	3,673 0792	4
5	4,853 4312	4,713 4595	4,645 8285	4,579 7072	4,515 0524	5
6	5,795 4765	5,601 4309	5,508 1254	5,417 1914	5,328 5530	6
7	6,728 1945	6,471 9911	6,349 3906	6,230 2830	6,114 5440	7
8	7,651 6778	7,325 4814	7,170 1372	7,019 6922	6,873 9555	8
9	8,566 0176	8,162 2367	7,970 8655	7,786 1089	7,607 6865	9
10	9,471 3045	8,982 5850	8,752 0639	8,530 2028	8,316 6053	10
11	10,367 6282	9,786 8480	9,514 2087	9,252 6241	9,001 5510	11
12	11,255 0775	10,575 3412	10,257 7646	9,954 0040	9,663 3343	12
13	12,133 7401	11,348 3737	10,983 1850	10,634 9553	10,302 7385	13
14	13,003 7030	12,106 2488	11,690 9122	11,296 0731	10,920 5203	14
15	13,865 0525	12,849 2635	12,381 3777	11,937 9351	11,517 4109	15
16	14,717 8738	13,577 7093	13,055 0027	12,561 1020	12,094 1168	16
17	15,562 2513	14,291 8719	13,712 1977	13,166 1185	12,651 3206	17
18	16,398 2686	14,992 0313	14,353 3636	13,753 5131	13,189 6817	18
19	17,226 0085	15,678 4620	14,978 8913	14,323 7991	13,709 8374	19
20	18,045 5530	16,351 4333	15,589 1623	14,877 4749	14,212 4033	20
21	18,856 9831	17,011 2092	16,184 5486	15,415 0241	14,697 9742	21
22	19,660 3793	17,658 0482	16,765 4132	15,936 9166	15,167 1248	22
23	20,455 8211	18,292 2041	17,332 1105	16,443 6084	15,620 4105	23
24	21,243 3873	18,913 9256	17,884 9858	16,935 5421	16,058 3676	24
25	22,023 1557	19,523 4565	18,424 3764	17,413 1477	16,481 5146	25
26	22,795 2037	20,121 0358	18,950 6111	17,876 8424	16,890 3523	26
27	23,559 6076	20,706 8978	19,464 0109	18,327 0315	17,285 3645	27
28	24,316 4432	21,281 2724	19,964 8887	18,764 1082	17,667 0188	28
29	25,065 7853	21,844 3847	20,453 5499	19,188 4546	18,035 7670	29
30	25,807 7082	22,396 4556	20,930 2926	19,600 4413	18,392 0454	30
31	26,542 2854	22,937 7015	21,395 4074	20,000 4285	18,736 2758	31
32	27,269 5895	23,468 3348	21,849 1780	20,388 7655	19,068 8655	32
33	27,989 6925	23,988 5636	22,291 8809	20,765 7918	19,390 2082	33
34	28,702 6659	24,498 5917	22,723 7863	21,131 8367	19,700 6842	34
35	29,408 5801	24,998 6193	23,145 1573	21,487 2201	20,000 6611	35
36	30,107 5050	25,488 8425	23,556 2511	21,832 2525	20,290 4938	36
37	30,799 5099	25,969 4534	23,957 3181	22,167 2354	20,570 5254	37
38	31,484 6633	26,440 6406	24,348 6030	22,492 4616	20,841 0874	38
39	32,163 0330	26,902 5888	24,730 3444	22,808 2151	21,102 4999	39
40	32,834 6861	27,355 4792	25,102 7751	23,114 7720	21,355 0723	40
41	33,499 6892	27,799 4895	25,466 1220	23,412 4000	21,599 1037	41
42	34,158 1081	28,234 7936	25,820 6068	23,701 3592	21,834 8828	42
43	34,810 0081	28,661 5623	26,166 4457	23,981 9021	22,062 6887	43
44	35,455 4535	29,079 9631	26,503 8495	24,254 2739	22,282 7910	44
45	36,094 5084	29,490 1599	26,833 0239	24,518 7125	22,495 4503	45

Tablica V.

przez ***n*** lat, na procent składany przy różnych stopach pr.

$$\overset{1,n}{W}_{t,d} = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} .$$

0	6	7	8	9	10	0
Przez lat	4%	4½%	5%	6%	8%	Przez lat
1	0,961 5385	0,956 9378	0,952 3810	0,943 3962	0,925 9259	1
2	1,886 0947	1,872 6678	1,859 4104	1,833 3927	1,783 2647	2
3	2,775 0910	2,748 9644	2,723 2480	2,673 0119	2,577 0970	3
4	3,629 8952	3,587 5257	3,545 9505	3,465 1056	3,312 1268	4
5	4,451 8223	4,389 9767	4,329 4767	4,212 3638	3,992 7101	5
6	5,242 1369	5,157 8725	5,075 6921	4,917 3243	4,622 8797	6
7	6,002 0547	5,892 7009	5,786 3734	5,582 3814	5,206 3701	7
8	6,732 7449	6,595 8861	6,463 2128	6,209 7938	5,746 6389	8
9	7,435 3316	7,268 7905	7,107 8217	6,801 6923	6,246 8879	9
10	8,110 8958	7,912 7182	7,721 7349	7,360 0871	6,710 0814	10
11	8,760 4767	8,528 9169	8,306 4142	7,886 8746	7,138 9643	11
12	9,385 0738	9,118 5808	8,863 2516	8,383 8439	7,536 0780	12
13	9,985 6478	9,682 8524	9,393 5730	8,852 6830	7,903 7759	13
14	10,563 1229	10,222 8253	9,898 6409	9,294 9839	8,244 2370	14
15	11,118 3874	10,739 5457	10,379 6580	9,712 2490	8,559 4787	15
16	11,652 2956	11,234 0150	10,837 7696	10,105 8953	8,851 3692	16
17	12,165 6689	11,707 1914	11,274 0662	10,477 2597	9,121 6381	17
18	12,659 2970	12,159 9918	11,689 5869	10,827 6035	9,371 8871	18
19	13,133 9394	12,593 2936	12,085 3209	11,158 1165	9,603 5992	19
20	13,590 3263	13,007 9365	12,462 2103	11,469 9212	9,818 1474	20
21	14,029 1599	13,404 7239	12,821 1527	11,764 0766	10,016 8031	21
22	14,451 1153	13,784 4248	13,163 0026	12,041 5817	10,200 7437	22
23	14,856 8417	14,147 7749	13,488 5739	12,303 3790	10,371 0589	23
24	15,246 9631	14,495 4784	13,798 6418	12,550 3575	10,528 7583	24
25	15,622 0799	14,828 2090	14,093 9446	12,783 3562	10,674 7762	25
26	15,982 7692	15,146 6114	14,375 1853	13,003 1662	10,809 9779	26
27	16,329 5857	15,451 3028	14,643 0336	13,210 5341	10,935 1648	27
28	16,663 0632	15,742 8735	14,898 1273	13,406 1643	11,051 0785	28
29	16,983 7146	16,021 8885	15,141 0736	13,590 7210	11,158 4060	29
30	17,292 0333	16,288 8885	15,372 4510	13,764 8312	11,257 7833	30
31	17,588 4936	16,544 3910	15,592 8105	13,929 0860	11,349 7994	31
32	17,873 5515	16,788 8909	15,802 6767	14,084 0434	11,434 9994	32
33	18,147 6457	17,022 8621	16,002 5492	14,230 2296	11,513 8884	33
34	18,411 1978	17,246 7580	16,192 9040	14,368 1411	11,586 9337	34
35	18,664 6132	17,461 0124	16,374 1943	14,498 2464	11,654 5682	35
36	18,908 2820	17,666 0406	16,546 8517	14,620 9871	11,717 1928	36
37	19,142 5788	17,862 2398	16,711 2873	14,736 7803	11,775 1785	37
38	19,367 8642	18,049 9902	16,867 8927	14,846 0192	11,828 8690	38
39	19,584 4848	18,229 6557	17,017 0407	14,949 0747	11,878 5824	39
40	19,792 7739	18,401 5844	17,159 0864	15,046 2969	11,924 6133	40
41	19,993 0518	18,566 1095	17,294 3680	15,138 0159	11,967 2346	41
42	20,185 6267	18,723 5498	17,423 2076	15,224 5433	12,006 6987	42
43	20,370 7949	18,874 2103	17,545 9120	15,306 1729	12,043 2395	43
44	20,548 8413	19,018 3831	17,662 7733	15,383 1820	12,077 0736	44
45	20,720 0397	19,156 3474	17,774 0698	15,455 8321	12,108 4015	45

0	1	2	3	4	5	0
Przez lat	1%	2%	$2^1/_2\%$	3%	$3^1/_2\%$	Przez lat
46	36,727 2361	29,892 3136	27,154 1696	24,775 4491	22,700 9181	46
47	37,353 6991	30,286 5820	27,467 4826	25,024 7078	22,899 4378	47
48	37,973 9595	30,673 1196	27,773 1537	25,266 7066	23,091 2443	48
49	38,588 0787	31,052 0780	28,071 3695	25,501 6569	23,276 5645	49
50	39,196 1175	31,423 6059	28,362 3117	25,729 7640	23,455 6179	50
51	39,798 1362	31,787 8489	28,646 1577	25,951 2272	23,628 6163	51
52	40,394 1942	32,144 9499	28,923 0807	26,166 2400	23,795 7645	52
53	40,984 3507	32,495 0489	29,193 2495	26,374 9903	23,957 2604	53
54	41,568 6641	32,838 2833	29,456 8288	26,577 6605	24,113 2951	54
55	42,147 1922	33,174 7875	29,713 9793	26,774 4276	24,264 0532	55
56	42,719 9922	33,504 6936	29,964 8578	26,965 4637	24,409 7133	56
57	43,287 1210	33,828 1310	30,209 6174	27,150 9357	24,550 4476	57
58	43,848 6347	34,145 2265	30,448 4072	27,331 0055	24,686 4228	58
59	44,404 5888	34,456 1044	30,681 3729	27,505 8306	24,817 7998	59
60	44,955 0384	34,760 8867	30,908 6565	27,675 5637	24,944 7341	60
61	45,500 0380	35,059 6928	31,130 3966	27,840 3531	25,067 3760	61
62	46,039 6416	35,352 6400	31,346 7284	28,000 3428	25,185 8705	62
63	46,573 9026	35,639 8432	31,557 7838	28,155 6726	25,300 3580	63
64	47,102 8738	35,921 4149	31,763 6915	28,306 4783	25,410 9739	64
65	47,626 6078	36,197 4655	31,964 5771	28,452 8915	25,517 8492	65
66	48,145 1562	36,468 1035	32,160 5630	28,595 0403	25,621 1103	66
67	48,658 5705	36,733 4348	32,351 7688	28,733 0488	25,720 8795	67
68	49,166 9015	36,993 5635	32,538 3110	28,867 0377	25,817 2749	68
69	49,670 1995	37,248 5917	32,720 3034	28,997 1240	25,910 4105	69
70	50,168 5143	37,498 6193	32,897 8570	29,123 4214	26,000 3966	70
71	50,661 8954	37,743 7444	33,071 0800	29,246 0401	26,087 3398	71
72	51,150 3915	37,984 0631	33,240 0780	29,365 0875	26,171 3428	72
73	51,634 0510	38,219 6697	33,404 9542	29,480 6675	26,252 5051	73
74	52,112 9218	38,450 6566	33,565 8089	29,592 8811	26,330 9228	74
75	52,587 0512	38,677 1143	33,722 7404	29,701 8263	26,406 6887	75
76	53,056 4864	38,899 1317	33,875 8443	29,807 5983	26,479 8924	76
77	53,521 2736	39,116 7958	34,025 2140	29,910 2896	26,550 6207	77
78	53,981 4590	39,330 1919	34,170 9405	30,009 9899	26,618 9572	78
79	54,437 0882	39,539 4039	34,313 1127	30,106 7863	26,684 9828	79
80	54,888 2061	39,744 5136	34,451 8172	30,200 7634	26,748 7757	80
81	55,334 8575	39,945 6016	34,587 1388	30,292 0033	26,810 4113	81
82	55,777 0867	40,142 7466	34,719 1598	30,380 5858	26,869 9626	82
83	56,214 9373	40,336 0261	34,847 9657	30,466 5881	26,927 5001	83
84	56,648 4528	40,525 5158	34,973 6202	30,550 0856	26,983 0919	84
85	57,077 6760	40,711 2900	35,096 2149	30,631 1510	27,036 8037	85
86	57,502 6495	40,893 4216	35,215 8194	30,709 8554	27,088 6993	86
87	57,923 4154	41,071 9819	35,332 5067	30,786 2673	27,138 8399	87
88	58,340 0152	41,247 0411	35,446 3480	30,860 4537	27,187 2849	88
89	58,752 4903	41,418 6677	35,557 4127	30,932 4794	27,234 0917	89
90	59,160 8815	41,586 9292	35,665 7685	31,002 4071	27,279 3156	90
91	59,565 2292	41,751 8913	35,771 4814	31,070 2982	27,323 0103	91
92	59,965 5735	41,913 6190	35,874 6160	31,136 2118	27,365 2273	92
93	60,361 9539	42,072 1754	35,975 2352	31,200 2057	27,406 0167	93
94	60,754 4098	42,227 6230	36,073 4002	31,262 3356	27,445 4268	94
95	61,142 9800	42,380 0225	36,169 1709	31,322 6559	27,483 5042	95
96	61,527 7030	42,529 4339	36,262 6057	31,381 2193	27,520 2939	96
97	61,908 6168	42,675 9155	36,353 7617	31,438 0770	27,555 8395	97
98	62,285 7592	42,819 5250	36,442 6943	31,493 2787	27,590 1831	98
99	62,659 1676	42,960 3187	36,529 4579	31,546 8725	27,623 3653	99
100	63,028 8788	43,098 3516	36,614 1053	31,598 9053	27,655 4254	100

0	6	7	8	9	10	0
Przez lat	4%	4½%	5%	6%	8%	Przez lat
46	20,884 6536	19,288 3707	17,880 0665	15,524 3699	12,137 4088	46
47	21,042 9361	19,414 7088	17,981 0157	15,589 0282	12,164 2674	47
48	21,195 1309	19,535 6065	18,077 1578	15,650 0266	12,189 1365	48
49	21,341 4720	19,651 2981	18,168 7217	15,707 5723	12,212 1634	49
50	21,482 1846	19,762 0078	18,255 9255	15,761 8606	12,233 4846	50
51	21,617 4852	19,867 9500	18,338 9766	15,813 0761	12,253 2265	51
52	21,747 5819	19,969 3302	18,418 0730	15,861 3925	12,271 5060	52
53	21,872 6749	20,066 3447	18,493 4028	15,906 9741	12,288 4315	53
54	21,992 9567	20,159 1815	18,565 1456	15,949 9755	12,304 1033	54
55	22,108 6122	20,248 0206	18,633 4720	15,990 5430	12,318 6141	55
56	22,219 8194	20,333 0340	18,698 5447	16,028 8141	12,332 0501	56
57	22,326 7494	20,414 3866	18,760 5188	16,064 9190	12,344 4908	57
58	22,429 5668	20,492 2360	18,819 5417	16,098 9802	12,356 0100	58
59	22,528 4296	20,566 7330	18,875 7540	16,131 1134	12,366 6760	59
60	22,623 4900	20,638 0220	18,929 2895	16,161 4277	12,376 5518	60
61	22,714 8942	20,706 2412	18,980 2757	16,190 0261	12,385 6961	61
62	22,802 7829	20,771 5227	19,028 8340	16,217 0058	12,394 1631	62
63	22,887 2912	20,833 9930	19,075 0800	16,242 4583	12,402 0029	63
64	22,968 5493	20,893 7732	19,119 1238	16,266 4701	12,409 2619	64
65	23,046 6820	20,950 9791	19,161 0703	16,289 1227	12,415 9832	65
66	23,121 8096	21,005 7217	19,201 0194	16,310 4931	12,422 2067	66
67	23,194 0477	21,058 1068	19,239 0661	16,330 6539	12.427 9692	67
68	23,263 5074	21,108 2362	19,275 3010	16,349 6735	12,433 3048	68
69	23,330 2956	21,156 2069	19,309 8105	16,367 6165	12,438 2452	69
70	23,394 5150	21,202 1119	19,342 6766	16,384 5439	12,442 8196	70
71	23,456 2644	21,246 0401	19,373 9778	16,400 5131	12,447 0552	71
72	23,515 6388	21,288 0766	19,403 7883	16,415 5784	12,450 9770	72
73	23,572 7297	21,328 3030	19,432 1794	16,429 7909	12,454 6084	73
74	23,627 6247	21,366 7971	19,459 2185	16,443 1990	12,457 9707	74
75	23,680 4083	21,403 6336	19,484 9700	16,455 8481	12,461 0840	75
76	23,731 1619	21,438 8838	19,509 4952	16,467 7812	12,463 9667	76
77	23,779 9633	21,472 6161	19,532 8526	16,479 0389	12,466 6358	77
78	23,826 8878	21,504 8958	19,555 0977	16,489 6593	12,469 1072	78
79	23,872 0075	21,535 7854	19,576 2835	16,499 6786	12,471 3956	79
80	23,915 3918	21,565 3449	19,596 4605	16,509 1308	12,473 5142	80
81	23,957 1075	21,593 6315	19,615 6767	16,518 0479	12,475 4763	81
82	23,997 2188	21,620 7000	19,633 9778	16,526 4603	12,477 2929	82
83	24,035 7873	21,646 6029	19,651 4074	16,534 3965	12,478 9749	83
84	24,072 8724	21,671 3903	19,668 0070	16,541 8835	12,480 5323	84
85	24,108 5312	21,695 1103	19,683 8162	16,548 9467	12,481 9744	85
86	24,142 8184	21,717 8089	19,698 8726	16,555 6101	12,483 3096	86
87	24,175 7869	21,739 5301	19,713 2120	16,561 8963	12,484 5459	87
88	24,207 4874	21,760 3159	19,726 8686	16,567 8267	12,485 6907	88
89	24,237 9687	21,780 2066	19,739 8748	16,573 4214	12,486 7506	89
90	24,267 2776	21,799 2407	19,752 2617	16,578 6994	12,487 7320	90
91	24,275 4592	21,817 4553	19,764 0588	16,583 6787	12,488 6408	91
92	24,322 5569	21,834 8854	19,775 2941	16,588 3762	12,489 4822	92
93	24,348 6124	21,851 5650	19,785 9944	16,592 8077	12,490 2613	93
94	24,373 6658	21,867 5263	19,796 1851	16,596 9884	12,490 9827	94
95	24,397 7556	21,882 8003	19,805 8906	16,600 9324	12,491 6506	95
96	24,420 9188	21,897 4166	19,815 1339	16,604 6532	12,492 2691	96
97	24,443 1912	21,911 4034	19,823 9370	16,608 1634	12,492 8418	97
98	24,464 6069	21,924 7879	19,832 3210	16,611 4749	12,493 3720	98
99	24,485 1990	21,937 5961	19,840 3057	16,614 5990	12,493 8630	99
100	24,504 9990	21,949 8527	19,847 9102	16,617 5462	12,494 3176	100

Tablica VI.

Tablice śmiertelności ogólne.

0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
Wiek	Queteleta		Farra		Wiek	Queteleta		Farra	
	Mężczyźni	Kobiety	Mężczyźni	Kobiety		Mężczyźni	Kobiety	Mężczyźni	Kobiety
	Liczba osób żyjących					Liczba osób żyjących			
0	1000	1000	511 745	488 255	50	403	415	233 216	231 064
1	838	864	428 026	422 481	51	396	406	228 821	227 318
2	782	808	400 505	396 322	52	389	397	224 195	223 530
3	752	777	386 290	382 299	53	382	389	219 437	219 698
4	734	756	377 077	373 056	54	374	381	214 552	215 822
5	720	741	370 358	366 460	55	366	373	209 539	211 576
6	710	730	365 325	361 594	56	358	365	204 395	207 137
7	702	720	361 372	357 779	57	349	358	199 114	202 509
8	695	712	358 062	354 530	58	340	351	193 686	197 692
9	689	705	355 328	351 806	59	330	344	188 102	192 683
10	684	699	353 031	349 478	60	319	337	182 350	187 477
11	679	694	351 048	347 433	61	307	329	176 421	182 068
12	675	690	349 272	345 572	62	294	321	170 303	176 449
13	672	687	347 606	343 807	63	280	311	163 989	170 614
14	669	684	345 969	342 062	64	265	301	157 474	164 557
15	666	681	344 290	340 273	65	250	290	150 754	158 275
16	663	678	342 509	338 385	66	235	279	143 833	151 766
17	659	674	340 581	336 356	67	220	267	136 718	145 035
18	654	669	338 469	334 151	68	205	253	129 421	138 088
19	647	660	336 149	331 751	69	192	238	121 963	130 939
20	640	650	333 608	329 142	70	179	221	114 370	123 607
21	633	641	330 844	326 323	71	166	204	106 675	116 118
22	626	631	328 043	323 456	72	153	187	98 919	108 505
23	618	622	325 207	320 544	73	139	170	91 149	100 807
24	611	614	322 339	317 592	74	125	154	83 416	93 071
25	604	607	319 442	314 603	75	111	137	75 777	85 347
26	597	600	316 516	311 579	76	99	123	68 294	77 694
27	589	594	313 562	308 524	77	88	110	61 026	70 173
28	581	588	310 581	305 440	78	78	98	54 036	62 844
29	574	582	307 572	302 328	79	69	87	47 381	55 773
30	566	576	304 534	299 190	80	60	76	41 115	49 018
31	558	570	301 466	296 027	81	52	66	35 283	42 636
32	550	562	298 366	292 840	82	45	57	29 922	36 677
33	541	555	295 232	289 631	83	38	48	25 060	31 181
34	533	547	292 061	286 398	84	32	41	20 711	26 178
35	525	539	288 850	283 143	85	26	35	16 877	21 688
36	517	531	285 596	279 864	86	21	29	13 549	17 716
37	509	523	282 296	276 563	87	17	24	10 709	14 258
38	501	515	278 944	273 237	88	13	19	8 325	11 296
39	493	507	275 538	269 887	89	10	15	6 360	8 802
40	484	499	272 073	266 511	90	7	11	4 770	6 739
41	475	491	268 544	263 109	91	5	8	3 510	5 066
42	467	483	264 948	259 678	92	4	6	2 531	3 735
43	459	475	261 280	256 219	93	3	5	1 787	2 698
44	451	467	257 534	252 729	94	2,4	3,7	1 234	1 908
45	443	459	253 708	249 207	95	1,7	2,4	833	1 320
46	435	451	249 796	245 652	96	1,1	1,5	548	892
47	426	442	245 795	242 061	97	0,6	1,0	352	588
48	418	433	241 700	238 434	98	0,4	0,6	220	378
49	410	424	237 508	234 769	99	0,2	0,4	134	236
					100	—	—	79	144

Tablica VI'.

Tablice śmiertelności specyalne (ubezpieczeniowe).

0	1	2	3	4	5	6	0
	23-ch Towarzystw niemieckich						
Wiek	M I		W I		M u. W I		Wiek
	Liczba osób żyjących	Prawdopodob. śmierci	Liczba osób żyjących	Prawdopodob. śmierci	Liczba osób żyjących	Prawdopodob. śmierci	
0	"	"	"	"	"	"	0
1	"	"	"	"	"	"	1
2	"	"	"	"	"	"	2
3	"	"	"	"	"	"	3
4	"	"	"	"	"	"	4
5	"	"	"	"	"	"	5
6	"	"	"	"	"	"	6
7	"	"	"	"	"	"	7
8	"	"	"	"	"	"	8
9	"	"	"	"	"	"	9
10	"	"	"	"	"	"	10
11	"	"	"	"	"	"	11
12	"	"	"	"	"	"	12
13	"	"	"	"	"	"	13
14	"	"	"	"	"	"	14
15	"	"	105 199	0,009 22	"	"	15
16	"	"	104 229	0,009 42	"	"	16
17	102 108	0,007 21	103 248	0,009 88	102 787	0,008 86	17
18	101 373	0,006 95	102 228	0,010 68	101 878	0,009 20	18
19	100 668	0,006 64	101 137	0,011 24	100 942	0,009 34	19
20	100 000	0,006 25	100 000	0,011 46	100 000	0,009 20	20
21	99 376	0,006 19	98 853	0,011 71	99 081	0,009 17	21
22	98 760	0,006 13	97 695	0,011 83	98 173	0,009 03	22
23	98 154	0,006 26	96 538	0,011 68	97 286	0,008 84	23
24	97 539	0,006 35	95 411	0,011 55	96 425	0,008 66	24
25	96 919	0,006 54	94 311	0,011 38	95 590	0,008 54	25
26	96 285	0,006 69	93 237	0,011 34	94 774	0,008 48	26
27	95 642	0,006 90	92 181	0,011 29	93 970	0,008 48	27
28	94 982	0,007 12	91 140	0,011 35	93 173	0,008 54	28
29	94 306	0,007 41	90 105	0,011 39	92 378	0,008 67	29
30	93 607	0,007 70	89 080	0,011 51	91 578	0,008 83	30
31	92 886	0,008 00	88 054	0,011 55	90 770	0,009 01	31
32	92 142	0,008 31	87 038	0,011 70	89 952	0,009 23	32
33	91 378	0,008 62	86 020	0,011 80	89 121	0,009 45	33
34	90 590	0,008 96	85 006	0,011 93	88 280	0,009 70	34
35	89 778	0,009 32	83 992	0,012 07	87 424	0,009 98	35
36	88 941	0,009 68	82 979	0,012 20	86 551	0,010 27	36
37	88 081	0,010 10	81 967	0,012 25	85 662	0,010 59	37
38	87 191	0,010 56	80 964	0,012 34	84 756	0,010 95	38
39	86 270	0,011 03	79 965	0,012 44	83 828	0,011 33	39
40	85 318	0,011 58	78 970	0,012 47	82 878	0,011 77	40
41	84 330	0,012 21	77 985	0,012 58	81 903	0,012 29	41
42	83 301	0,012 84	77 003	0,012 59	80 897	0,012 79	42
43	82 232	0,013 50	76 034	0,012 59	79 862	0,013 32	43
44	81 122	0,014 14	75 078	0,012 66	78 799	0,013 85	44
45	79 976	0,014 74	74 128	0,012 83	77 707	0,014 37	45
46	78 797	0,015 32	73 176	0,013 08	76 590	0,014 89	46
47	77 591	0,015 97	72 219	0,013 57	75 450	0,015 50	47
48	76 352	0,016 70	71 239	0,014 18	74 281	0,016 21	48
49	75 077	0,017 63	70 230	0,014 75	73 077	0,017 06	49

Tablica VI'.

(Dokończenie).

0	1	2	3	4	5	6	0
	23-ch Towarzystw niemieckich						
	M I		W I		M u. W I		
Wiek	Liczba osób żyjących	Prawdopodob. śmierci	Liczba osób żyjących	Prawdopodob. śmierci	Liczba osób żyjących	Prawdopodob. śmterci	Wiek
50	73 755	0,018 84	69 194	0,015 38	71 831	0,018 14	50
51	72 365	0,020 14	68 130	0,016 05	70 528	0,019 31	51
52	70 907	0,021 57	67 036	0,016 80	69 166	0,020 61	52
53	69 378	0,023 09	65 910	0,017 66	67 741	0,021 99	53
54	67 777	0,024 70	64 746	0,018 72	66 251	0,023 49	54
55	66 103	0,026 34	63 533	0,020 13	64 695	0,025 05	55
56	64 362	0,028 16	62 254	0,021 79	63 074	0,026 80	56
57	62 550	0,030 11	60 898	0,023 56	61 383	0,028 67	57
58	60 667	0,032 23	59 463	0,025 51	59 624	0,030 73	58
59	58 711	0,034 40	57 947	0,027 76	57 792	0,032 89	59
60	56 692	0,036 89	56 338	0,030 15	55 892	0,035 36	60
61	54 601	0,039 35	54 640	0,032 53	53 916	0,037 82	61
62	52 453	0,041 87	52 863	0,035 29	51 878	0,040 42	62
63	50 256	0,044 57	50 998	0,038 07	49 781	0,043 17	63
64	48 016	0,047 55	49 056	0,040 78	47 632	0,046 13	64
65	45 733	0,050 83	47 055	0,044 26	45 435	0,049 43	65
66	43 408	0,054 63	44 973	0,048 36	43 189	0,053 29	66
67	41 036	0,059 01	42 798	0,052 54	40 887	0,057 62	67
68	38 615	0,063 50	40 549	0,057 78	38 532	0,062 26	68
69	36 163	0,068 27	38 206	0,063 94	36 133	0,067 31	69
70	33 695	0,073 40	35 763	0,070 30	33 701	0,072 76	70
71	31 221	0,078 92	33 248	0,076 89	31 249	0,078 56	71
72	28 757	0,084 62	30 692	0,083 97	28 794	0,084 59	72
73	26 324	0,091 11	28 114	0,091 38	26 358	0,091 30	73
74	23 925	0,098 19	25 545	0,098 84	23 952	0,098 54	74
75	21 576	0,106 08	23 020	0,107 33	21 592	0,106 49	75
76	19 288	0,114 05	20 549	0,115 84	19 293	0,114 51	76
77	17 088	0,122 38	18 169	0,126 13	17 083	0,123 12	77
78	14 997	0,131 89	15 877	0,134 14	14 980	0,132 33	78
79	13 019	0,142 30	13 748	0,141 66	12 998	0,142 19	79
80	11 167	0,156 00	11 800	0,151 71	11 150	0,155 14	80
81	9 425	0,171 37	10 010	0,163 35	9 420	0,169 74	81
82	7 809	0,187 11	8 375	0,174 53	7 821	0,184 51	82
83	6 348	0,200 57	6 913	0,190 31	6 378	0,198 25	83
84	5 075	0,212 24	5 598	0,208 79	5 114	0,211 12	84
85	3 998	0,223 15	4 429	0,221 42	4 034	0,222 00	85
86	3 106	0,229 13	3 448	0,230 98	3 138	0,228 05	86
87	2 394	0,236 07	2 652	0,237 00	2 423	0,233 68	87
88	1 829	0,244 51	2 023	0,238 33	1 857	0,237 88	88
89	1 382	0,257 74	„	„	1 415	0,243 16	89
90	„	-	„	-	„	„	90
91	-	„	„	-	„	„	91
92	-	„	-	„	„	„	92
93	„	-	„	-	-	-	93
94	-	„	„	-	-	-	94
95	„	„	„	„	-	-	95
96	„	-	-	„	„	„	96
97	„	„	„	-	-	-	97
98	-	-	„	„	-	„	98
99	-	„	-	„	-	„	99
100	„	„	„	„	„	„	100

Tablica VI''.

Tablice śmiertelności specyalne (ubezpieczeniowe).

0	1	2	3	4	5	6	0
Wiek	D-ra Semmlera		Towarzystw austryackich				Wiek
	Mężczyźni i kobiety		Mężczyźni (M^p)		Kobiety (F^p)		
	Liczba osób żyjących	Prawdopodob. śmierci	Liczba osób żyjących	Prawdopodob. śmierci	Liczba osób żyjących	Prawdopodob. śmierci	
0	100 000	0,065 040	"	"	"	"	0
1	93 496	0,018 332	"	"	"	"	1
2	91 782	0,015 493	"	"	"	"	2
3	90 360	0,013 313	"	"	"	"	3
4	89 157	0,011 328	"	"	"	"	4
5	88 147	0,009 586	"	"	"	"	5
6	87 302	0,007 972	"	"	"	"	6
7	86 606	0,006 431	"	"	"	"	7
8	86 049	0,004 986	"	"	"	"	8
9	85 620	0,003 714	"	"	"	"	9
10	85 302	0,002 450	"	"	"	"	10
11	85 093	0,001 963	"	"	"	"	11
12	84 926	0,002 202	"	"	"	"	12
13	84 739	0,002 537	"	"	"	"	13
14	84 524	0,003 052	"	"	"	"	14
15	84 266	0,003 833	"	"	"	"	15
16	83 943	0,004 551	"	"	"	"	16
17	83 561	0,005 182	"	"	"	"	17
18	83 128	0,005 726	"	"	"	"	18
19	82 652	0,006 195	"	"	"	"	19
20	82 140	0,006 611	100 000	0,003 62	100 000	0,007 40	20
21	81 597	0,006 986	99 638	0,003 78	99 260	0,007 45	21
22	81 027	0,007 306	99 261	0,003 92	98 520	0,007 49	22
23	80 435	0,007 596	98 872	0,004 08	97 782	0,007 55	23
24	79 824	0,007 867	98 469	0,004 24	97 044	0,007 60	24
25	79 196	0,008 018	98 052	0,004 42	96 306	0,007 67	25
26	78 561	0,008 096	97 618	0,004 61	95 568	0,007 74	26
27	77 925	0,008 059	97 167	0,004 83	94 828	0,007 82	27
28	77 297	0,008 047	96 698	0,005 05	94 087	0,007 90	28
29	76 675	0,008 047	96 210	0,005 29	93 344	0,008 00	29
30	76 058	0,008 125	95 701	0,005 56	92 597	0,008 10	30
31	75 440	0,008 324	95 169	0,005 84	91 847	0,008 22	31
32	74 812	0,008 568	94 613	0,006 14	91 092	0,008 35	32
33	74 171	0,008 831	94 032	0,006 47	90 332	0,008 49	33
34	73 516	0,009 073	93 423	0,006 83	89 565	0,008 64	34
35	72 849	0,009 293	92 785	0,007 21	88 791	0,008 82	35
36	72 172	0,009 477	92 115	0,007 63	88 008	0,009 01	36
37	71 488	0,009 624	91 412	0,008 08	87 215	0,009 22	37
38	70 800	0,009 760	90 674	0,008 56	86 411	0,009 45	38
39	70 109	0,009 885	89 898	0,009 08	85 594	0,009 71	39
40	69 416	0,010 012	89 082	0,009 64	84 763	0,010 00	40
41	68 721	0,010 128	88 223	0,010 24	83 916	0,010 31	41
42	68 025	0,010 217	87 320	0,010 89	83 050	0,010 66	42
43	67 330	0,010 278	86 369	0,011 60	82 165	0,011 04	43
44	66 638	0,010 399	85 367	0,012 35	81 258	0,011 46	44
45	65 945	0,010 554	84 312	0,013 17	80 326	0,011 94	45
46	65 249	0,010 774	83 202	0,014 05	79 368	0,012 45	46
47	64 546	0,011 139	82 032	0,015 00	78 379	0,013 02	47
48	63 827	0,011 610	80 802	0,016 03	77 358	0,013 65	48
49	63 086	0,012 190	79 507	0,017 13	76 302	0,014 35	49

Tablica VI''.

(Dokończenie).

0	1	2	3	4	5	6	0
Wiek	D-ra Semmlera		Towarzystw austryackich				Wiek
	Mężczyźni i kobiety		Mężczyźni (**M**P)		Kobiety (**F**P)		
	Liczba osób żyjących	Prawdopodob. śmierci	Liczba osób żyjących	Prawdopodob. śmierci	Liczba osób żyjących	Prawdopodob. śmierci	
50	62 317	0,012 902	78 144	0,018 32	75 207	0,015 12	50
51	61 513	0,013 558	76 713	0,019 60	74 069	0,015 97	51
52	60 679	0,014 074	75 209	0,020 99	72 886	0,016 91	52
53	59 825	0,014 526	73 630	0,022 47	71 653	0,017 95	53
54	58 956	0,015 028	71 975	0,024 08	70 367	0,019 10	54
55	58 070	0,015 791	70 242	0,025 81	69 023	0,020 36	55
56	57 153	0,016 342	68 429	0,027 67	67 618	0,021 76	56
57	56 219	0,017 450	66 535	0,029 68	66 147	0,023 29	57
58	55 238	0,019 262	64 560	0,031 84	64 606	0,024 99	58
59	54 174	0,021 486	62 505	0,034 16	62 991	0,026 87	59
60	53 010	0,023 694	60 369	0,036 67	61 299	0,028 93	60
61	51 754	0,025 911	58 156	0,039 36	59 525	0,031 21	61
62	50 413	0,028 108	55 867	0,042 26	57 667	0,033 72	62
63	48 996	0,030 492	53 506	0,045 38	55 723	0,036 49	63
64	47 502	0,033 114	51 078	0,048 73	53 689	0,039 54	64
65	45 929	0,036 230	48 588	0,052 34	51 566	0,042 90	65
66	44 265	0,039 738	46 045	0,056 22	49 354	0,046 60	66
67	42 506	0,043 523	43 457	0,060 38	47 054	0,050 67	67
68	40 656	0,047 447	40 833	0,064 86	44 669	0,055 15	68
69	38 727	0,051 463	38 185	0,069 66	42 206	0,060 08	69
70	36 734	0,055 807	35 525	0,074 82	39 670	0,065 50	70
71	34 684	0,060 230	32 867	0,080 35	37 072	0,071 45	71
72	32 595	0,064 979	30 226	0,086 28	34 423	0,077 98	72
73	30 477	0,070 315	27 618	0,092 65	31 739	0,085 14	73
74	28 334	0,076 410	25 059	0,099 46	29 036	0,092 99	74
75	26 169	0,082 884	22 567	0,106 76	26 336	0,101 59	75
76	24 000	0,090 250	20 158	0,114 56	23 661	0,111 00	76
77	21 834	0,098 882	17 848	0,122 91	21 034	0,121 29	77
78	19 675	0,108 717	15 654	0,131 84	18 483	0,132 51	78
79	17 536	0,119 411	13 591	0,141 36	16 034	0,144 75	79
80	15 442	0,131 460	11 669	0,151 52	13 713	0,158 08	80
81	13 412	0,144 423	9 901	0,162 36	11 545	0,172 57	81
82	11 475	0,158 606	8 295	0,173 89	9 552	0,188 29	82
83	9 655	0,175 142	6 853	0,186 16	7 754	0,205 32	83
84	7 964	0,193 621	5 576	0,199 19	6 162	0,223 73	84
85	6 422	0,213 796	4 466	0,213 03	4 783	0,243 57	85
86	5 049	0,231 531	3 514	0,227 69	3 618	0,264 91	86
87	3 880	0,245 876	2 714	0,243 20	2 660	0,287 80	87
88	2 926	0,259 057	2 054	0,259 59	1 894	0,312 27	88
89	2 168	0,269 834	1 521	0,276 89	1 303	0,338 33	89
90	1 583	0,281 744	1 100	0,295 10	862	0,365 99	90
91	1 137	0,295 515	775	0,314 23	547	0,395 21	91
92	801	0,309 613	532	0,334 30	331	0,425 94	92
93	553	0,327 306	354	0,355 29	190	0,458 09	93
94	372	0,344 086	228	0,377 21	103	0,491 53	94
95	244	0,364 754	142	0,400 03	52	0,526 09	95
96	155	0,387 097	85	0,423 71	„	„	96
97	95	0,442 105	49	0,448 22	„	„	97
98	53	0,509 434	„	„	„	„	98
99	26	0,576 923	„	„	„	„	99
100	11	1,000 000	„	„	„	„	100

Tablica VII.

Tablica śmiertelności inwalidów

(według prawdopodobieństw, wyznaczonych przez Bentziena).

0	1	2	3	1	2	3	0
Wiek	Liczba osób żyjących	Liczba osób zmarłych	Prawdopodob. śmierci	Liczba osób żyjących	Liczba osób zmarłych	Prawdopodob. śmierci	Wiek
x	$l_x^{(i)}$	$d_x^{(i)}$	$q_x^{(ii)}$	$l_x^{(i)}$	$d_x^{(i)}$	$q_x^{(ii)}$	x
20	10 000	1 044	0,104 4	763,15	38,00	0,049 8	60
21	8 956	900	0,100 5	725,15	36,91	0,050 9	61
22	8 056	778	0,096 6	688,24	36,55	0,053 1	62
23	7 278	675	0,092 7	651,69	35,84	0,055 0	63
24	6 603	586	0,088 8	615,85	35,35	0,057 4	64
25	6 017	511	0,084 9	580,50	34,48	0,059 4	65
26	5 506	446	0,081 0	546,02	33,80	0,061 9	66
27	5 060	389	0,076 9	512,22	32,83	0,064 1	67
28	4 671	341	0,072 9	479,39	32,22	0,067 2	68
29	4 330	299	0,069 1	447,17	31,84	0,071 2	69
30	4 031	269	0,066 7	415,33	31,36	0,075 5	70
31	3 762	245	0,065 2	383,97	30,99	0,080 7	71
32	3 517	226	0,064 2	352,98	30,50	0,086 4	72
33	3 291	208	0,063 3	322,48	30,38	0,094 2	73
34	3 083	192	0,062 4	292,10	29,62	0,101 4	74
35	2 891	178	0,061 6	262,48	28,01	0,106 7	75
36	2 713	164	0,060 5	234,47	26,74	0,114 05	76
37	2 549	151	0,059 3	207,73	25,42	0,122 38	77
38	2 398	139	0,057 8	182,31	24,04	0,131 89	78
39	2 259	129	0,057 2	158,27	22,52	0,142 30	79
40	2 130	119	0,055 8	135,75	21,18	0,156 00	80
41	2 011	111	0,055 1	114,57	19,634	0,171 37	81
42	1 900	103	0,054 4	94,936	17,763	0,187 11	82
43	1 797	96,3	0,053 6	77,173	15,479	0,200 57	83
44	1 700,7	89,1	0,052 4	61,694	13,094	0,212 24	84
45	1 611,6	83,2	0,051 6	48,600	10,845	0,223 15	85
46	1 528,4	77,5	0,050 7	37,755	8,651	0,229 13	86
47	1 450,9	71,8	0,049 5	29,104	6,871	0,236 07	87
48	1 379,1	68,0	0,049 3	22,233	5,436	0,244 51	88
49	1 311,1	64,5	0,049 2	16,797	4,329	0,257 74	89
50	1 246,6	61,1	0,049 0	12,468	4,036 3	0,323 73	90
51	1 185,5	57,4	0,048 4	8,431 7	3,043 8	0,360 99	91
52	1 128,1	54,5	0,048 3	5,387 9	2,183 5	0,405 26	92
53	1 073,6	51,9	0,047 4	3,204 4	1,465 1	0,457 23	93
54	1 021,7	48,12	0,047 1	1,739 3	0,898 00	0,516 30	94
55	973,58	45,76	0,047 0	0,841 30	0,491 55	0,584 27	95
56	927,82	43,61	0,047 0	0,349 75	0,226 86	0,648 64	96
57	884,21	41,73	0,047 2	0,122 89	0,085 08	0,692 31	97
58	842,48	40,35	0,047 9	0,037 81	0,028 36	0,750 00	98
59	802,13	38,98	0,048 6	0,009 45	0,009 45	1,000 00	99
				—	—	—	100

Tablica VIII.

Tablica zmian, zachodzących z biegiem lat wśród osób zdolnych do pracy (czynnych), ułożona na podstawie tablicy śmiertelności 23-ch Towarzystw niemieckich (MI), tablicy śmiertelności inwalidów (**Bentziena**) oraz prawdopodobieństw stania się inwalidą w ciągu roku (**Zimmermanna**).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Wiek	Liczba osób żyjących (według tablicy MI)	Prawdopodobieństwo przeżycia roku (według tablicy MI)	Prawdopodobieństwo stania się niezdolnym do pracy w ciągu roku (według Zimmermanna)	Prawdopodobieństwo śmierci przed końcem roku, po staniu się niezdolnym do pracy	Prawdopodobieństwo dożycia końca roku, po staniu się niezdolnym do pracy	Z pośród 100000 osób zdolnych do pracy w 20-ym roku życia, żyje w wieku lat x: Osób zdolnych do pracy (czynnych)	Osób niezdolnych do pracy (inwalidów)	Liczba osób stających się inwalidami w ciągu roku	Liczba osób stających się inwalidami w ciągu roku i żyjących w końcu roku	Wiek
x	l_x	p_x	w_x	$q_x^{(ai)} = \frac{1}{2} w_x q_x^{(ii)}$	$p_x^{(ai)} = w_x - q_x^{(ai)}$	$l_x^{(a)}$	P_x	$J_x = l_x^{(a)} \cdot w_x$	$J'_x = l_x^{(a)} \cdot p_x^{(ai)}$	x
20	100 000	0,993 75	0,000 20	0,000 01	0,000 19	100 000	0	20	19	20
21	99 376	0,993 81	0,000 23	0,000 01	0,000 22	99 357	19	23	22	21
22	98 760	0,993 87	0,000 26	0,000 01	0,000 25	98 721	39	26	25	22
23	98 154	0,993 74	0,000 30	0,000 01	0,000 29	98 094	60	29	28	23
24	97 539	0,993 65	0,000 34	0,000 01	0,000 33	97 456	83	33	32	24
25	96 919	0,993 46	0,000 38	0,000 02	0,000 36	96 812	107	37	35	25
26	96 285	0,993 31	0,000 43	0,000 02	0,000 41	96 152	133	41	39	26
27	95 642	0,993 10	0,000 49	0,000 02	0,000 47	95 480	162	47	45	27
28	94 982	0,992 88	0,000 54	0,000 02	0,000 52	94 787	195	51	49	28
29	94 306	0,992 59	0,000 66	0,000 02	0,000 64	94 076	230	62	60	29
30	93 607	0,992 30	0,000 79	0,000 03	0,000 76	93 333	274	74	71	30
31	92 886	0,992 00	0,000 85	0,000 03	0,000 82	92 559	327	79	76	31
32	92 142	0,991 69	0,001 07	0,000 03	0,001 04	91 760	382	98	95	32
33	91 378	0,991 38	0,001 31	0,000 04	0,001 27	90 925	453	119	115	33
34	90 590	0,991 04	0,001 50	0,000 05	0,001 45	90 050	540	135	131	34
35	89 778	0,990 68	0,001 81	0,000 06	0,001 75	89 141	637	161	156	35
36	88 941	0,990 32	0,002 18	0,000 07	0,002 11	88 187	754	192	186	36
37	88 081	0,989 90	0,002 35	0,000 07	0,002 28	87 186	895	205	199	37
38	87 191	0,989 44	0,002 62	0,000 08	0,002 54	86 150	1 041	226	219	38
39	86 270	0,988 97	0,002 93	0,000 08	0,002 85	85 070	1 200	249	242	39
40	85 318	0,988 42	0,003 14	0,000 09	0,003 05	83 945	1 373	264	256	40
41	84 330	0,987 79	0,003 20	0,000 09	0,003 11	82 777	1 553	265	257	41
42	83 301	0,987 16	0,003 52	0,000 10	0,003 42	81 576	1 725	287	279	42
43	82 232	0,986 50	0,003 71	0,000 10	0,003 61	80 321	1 911	298	290	43
44	81 122	0,985 86	0,004 17	0,000 11	0,004 06	79 023	2 099	330	321	44
45	79 976	0,985 26	0,004 63	0,000 12	0,004 51	77 666	2 310	360	350	45
46	78 797	0,984 68	0,005 74	0,000 15	0,005 59	76 256	2 541	438	426	46
47	77 591	0,984 03	0,006 56	0,000 16	0,006 40	74 752	2 839	490	478	47
48	76 352	0,983 30	0,007 79	0,000 19	0,007 60	73 175	3 177	570	556	48
49	75 077	0,982 37	0,008 70	0,000 21	0,008 49	71 501	3 576	622	607	49
50	73 755	0,981 16	0,010 12	0,000 25	0,009 87	69 748	4 007	706	688	50
51	72 365	0,979 86	0,011 01	0,000 27	0,010 74	67 866	4 499	747	729	51
52	70 907	0,978 43	0,012 13	0,000 29	0,011 84	65 897	5 010	799	780	52
53	69 378	0,976 91	0,013 31	0,000 32	0,012 99	63 830	5 548	850	829	53
54	67 777	0,975 30	0,014 54	0,000 35	0,014 19	61 663	6 114	897	875	54
55	66 103	0,973 66	0,015 44	0,000 36	0,015 08	59 401	6 702	917	896	55
56	64 362	0,971 84	0,016 78	0,000 39	0,016 39	57 079	7 283	958	936	56
57	62 550	0,969 89	0,019 23	0,000 45	0,018 78	54 674	7 876	1 051	1 027	57
58	60 667	0,967 77	0,021 98	0,000 53	0,021 45	52 136	8 531	1 146	1 118	58
59	58 711	0,965 60	0,026 98	0,000 66	0,026 32	49 470	9 241	1 335	1 302	59

Tablica VIII.

Tablica zmian, zachodzących z biegiem lat wśród osób zdolnych do pracy (czynnych), ułożona na podstawie tablicy śmiertelności 23-ch Towarzystw niemieckich (MI), tablicy śmiertelności inwalidów (**Bentziena**) oraz prawdopodobieństw stania się inwalidą w ciągu roku (**Zimmermanna**).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Wiek	Liczba osób żyjących (według tablicy MI)	Prawdopodobieństwo przeżycia roku (według tablicy MI)	Prawdopodobieństwo stania się niezdolnym do pracy w ciągu roku (według Zimmermanna)	Prawdopodobieństwo śmierci przed końcem roku, po staniu się niezdolnym do pracy	Prawdopodobieństwo dożycia końca roku, po staniu się niezdolnym do pracy	Z pośród 100000 osób zdolnych do pracy w 20-ym roku życia, żyje w wieku lat x: Osób zdolnych do pracy (czynnych)	Z pośród 100000 osób zdolnych do pracy w 20-ym roku życia, żyje w wieku lat x: Osób niezdolnych do pracy (inwalidów)	Liczba osób stających się inwalidami w ciągu roku	Liczba osób stających się inwalidami w ciągu roku i żyjących w końcu roku	Wiek
x	l_x	p_x	w_x	$q_x^{(ai)} = \frac{1}{2} w_x q_x^{(ii)}$	$p_x^{(ai)} = w_x - q_x^{(ai)}$	$l_x^{(a)}$	P_x	$J_x = l_x^{(a)} \cdot w_x$	$J'_x = l_x^{(a)} \cdot p_x^{(ai)}$	x
60	56 692	0,963 11	0,033 53	0,000 83	0,032 70	46 598	10 094	1 562	1 524	60
61	54 601	0,960 65	0,042 17	0,001 08	0,041 09	43 486	11 115	1 834	1 787	61
62	52 453	0,958 13	0,050 34	0,001 34	0,049 00	40 117	12 336	2 019	1 966	62
63	50 256	0,955 43	0,059 32	0,001 63	0,057 69	36 609	13 647	2 172	2 112	63
64	48 016	0,952 45	0,068 34	0,001 96	0,066 38	33 008	15 008	2 256	2 191	64
65	45 733	0,949 17	0,076 30	0,002 27	0,074 03	29 395	16 338	2 243	2 176	65
66	43 408	0,945 37	0,082 93	0,002 57	0,080 36	25 864	17 544	2 145	2 078	66
67	41 036	0,940 99	0,095 09	0,003 05	0,092 04	22 499	18 537	2 140	2 071	67
68	38 615	0,936 50	0,111 03	0,003 73	0,107 30	19 195	19 420	2 131	2 060	68
69	36 163	0,931 73	0,129 01	0,004 59	0,124 42	15 988	20 175	2 063	1 989	69
70	33 695	0,926 60	0,155 09	0,005 85	0,149 24	12 967	20 728	2 011	1 935	70
71	31 221	0,921 08	0,189 29	0,007 64	0,181 65	10 123	21 098	1 916	1 839	71
72	28 757	0,915 38	0,221 27	0,009 56	0,211 71	7 523	21 234	1 665	1 593	72
73	26 324	0,908 89	0,252 58	0,011 90	0,240 68	5 332	20 992	1 347	1 283	73
74	23 925	0,901 81	0,288 56	0,014 63	0,273 93	3 627	20 298	1 047	994	74
75	21 576	0,893 92	0,330 91	0,017 65	0,313 26	2 343	19 233	775	734	75
76	19 288	0,885 95	0,381 47	0,021 75	0,359 72	1 373	17 915	524	494	76
77	17 088	0,877 62	0,442 88	0,027 10	0,415 78	722	16 366	320	300	77
78	14 997	0,868 11	0,519 09	0,034 23	0,484 86	334	14 663	173	162	78
79	13 019	0,857 70	0,613 20	0,043 63	0,569 57	128	12 891	78	73	79
80	11 167	0,844 00	0,743 99	0,058 03	0,685 96	37	11 130	28	25	80
81	9 425	0,828 63	0,920 00	0,078 83	0,841 17	6	9 419	6	5	81
82	7 809	0,812 89	„	„	„	„	7 809	„	„	82
83	6 348	0,799 43	„	„	„	„	6 348	„	„	83
84	5 075	0,787 76	„	„	„	„	5 075	„	„	84
85	3 998	0,776 85	„	„	„	„	3 998	„	„	85
86	3 106	0,770 87	„	„	„	„	3 106	„	„	86
87	2 394	0,763 93	„	„	„	„	2 394	„	„	87
88	1 829	0,755 49	„	„	„	„	1 829	„	„	88
89	1 382	0,742 26	„	„	„	„	1 382	„	„	89
90	1 026	0,676 27	„	„	„	„	1 026	„	„	90
91	694	0,639 01	„	„	„	„	694	„	„	91
92	443	0,594 74	„	„	„	„	443	„	„	92
93	263	0,542 77	„	„	„	„	263	„	„	93
94	143	0,483 70	„	„	„	„	143	„	„	94
95	69	0,415 73	„	„	„	„	69	„	„	95
96	29	0,351 36	„	„	„	„	29	„	„	96
97	10	0,307 69	„	„	„	„	10	„	„	97
98	3	0,250 00	„	„	„	„	3	„	„	98
99	1	0,000 00	„	„	„	„	1	„	„	99
100	—	—	—	—	—	—	—	—	—	100

Tablica IX.

Tablica pomocnicza, ułożona na podstawie tablicy śmiertelności 23-ch Towarzystw niemieckich (MI), przy stopie 4%.

0	1	2	3	4	5	6	7	0
Wiek	Liczba osób żyjących	Liczba osób zmarłych	Prawdopodobieństwo przeżycia roku	Prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku	Suma liczb osób żyjących	Życie średnie	Zdyskontowana liczba osób żyjących	Wiek
x	l_x	$d_x = l_x - l_{x+1}$	$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$	$q_x = \frac{d_x}{l_x}$	Σl_x	$e_x = \frac{\Sigma l_x}{l_x} - \frac{1}{2}$	$D_x = l_x v^x$	x
17	102 108	735	0,992 79	0,007 21	4 399 724	42,59	52 419,51	17
18	101 373	705	0,993 05	0,006 95	4 297 616	41,89	50 040,56	18
19	100 668	668	0,993 36	0,006 64	4 196 243	41,18	47 781,30	19
20	100 000	624	0,993 75	0,006 25	4 095 575	40,46	45 638,69	20
21	99 376	616	0,993 81	0,006 19	3 995 575	39,71	43 609,53	21
22	98 760	606	0,993 87	0,006 13	3 896 199	38,95	41 672,32	22
23	98 154	615	0,993 74	0,006 26	3 797 439	38,19	39 823,66	23
24	97 539	620	0,993 65	0,006 35	3 699 285	37,42	38 052,06	24
25	96 919	634	0,993 46	0,006 54	3 601 746	36,66	36 355,95	25
26	96 285	643	0,993 31	0,006 69	3 504 827	35,90	34 728,96	26
27	95 642	660	0,993 10	0,006 90	3 408 542	35,14	33 170,23	27
28	94 982	676	0,992 88	0,007 12	3 312 900	34,38	31 674,36	28
29	94 306	699	0,992 59	0,007 41	3 217 918	33,62	30 239,35	29
30	93 607	721	0,992 30	0,007 70	3 123 612	32,87	28 860,79	30
31	92 886	744	0,992 00	0,008 00	3 030 005	32,12	27 537,01	31
32	92 142	764	0,991 69	0,008 31	2 937 119	31,37	26 265,81	32
33	91 378	788	0,991 38	0,008 62	2 844 977	30,63	25 046,18	33
34	90 590	812	0,991 04	0,008 96	2 753 599	29,89	23 875,18	34
35	89 778	837	0,990 68	0,009 32	2 663 009	29,16	22 751,14	35
36	88 941	860	0,990 32	0,009 68	2 573 231	28,43	21 672,14	36
37	88 081	890	0,989 90	0,010 10	2 484 290	27,70	20 637,10	37
38	87 191	921	0,989 44	0,010 56	2 396 209	26,98	19 642,86	38
39	86 270	952	0,988 97	0,011 03	2 309 018	26,26	18 687,86	39
40	85 318	988	0,988 42	0,011 58	2 222 748	25,55	17 770,80	40
41	84 330	1 029	0,987 79	0,012 21	2 137 430	24,84	16 889,44	41
42	83 301	1 069	0,987 16	0,012 84	2 053 100	24,14	16 041,68	42
43	82 232	1 110	0,986 50	0,013 50	1 969 799	23,45	15 226,75	43
44	81 122	1 146	0,985 86	0,014 14	1 887 567	22,77	14 443,47	44
45	79 976	1 179	0,985 26	0,014 74	1 806 445	22,09	13 691,76	45
46	78 797	1 206	0,984 68	0,015 32	1 726 469	21,41	12 971,08	46
47	77 591	1 239	0,984 03	0,015 97	1 647 672	20,73	12 281,31	47
48	76 352	1 275	0,983 30	0,016 70	1 570 081	20,06	11 620,38	48
49	75 077	1 322	0,982 37	0,017 63	1 493 729	19,39	10 986,85	49
50	73 755	1 390	0,981 16	0,018 84	1 418 652	18,73	10 378,26	50
51	72 365	1 458	0,979 86	0,020 14	1 344 897	18,08	9 791,028	51
52	70 907	1 529	0,978 43	0,021 57	1 272 532	17,44	9 224,767	52
53	69 378	1 601	0,976 91	0,023 09	1 201 625	16,82	8 678,702	53
54	67 777	1 674	0,975 30	0,024 70	1 132 247	16,20	8 152,333	54
55	66 103	1 741	0,973 66	0,026 34	1 064 470	15,60	7 645,176	55

Tablica IX.

Tablica pomocnicza, ułożona na podstawie tablicy śmiertelności 23-ch Towarzystw niemieckich (MI) przy stopie $4^0/_0$.

0	8	9	10	11	12	13	0
Wiek	Suma zdyskontowanych liczb osób żyjących	Suma sum zdyskontowanych liczb osób żyjących	Wartość 1-ki renty dożywotnej płatnej rocznie z góry	Zdyskontowana liczba osób zmarłych	Suma zdyskontowanych liczb osób zmarłych	Suma sum zdyskontowanych liczb osób zmarłych	Wiek
x	$N_x = \Sigma D_x$	$S_x = \Sigma N_x$	$a_x = \frac{N_x}{D_x}$	$C_x = d_x v^{x+1}$	$M_x = \Sigma C_x$	$R_x = \Sigma M_x$	x
17	1 034 884,13	17 305 123	19,742 347	362,816 7	12 616,278 9	369 302,52	17
18	982 464,62	16 270 239	19,633 366	334,622 9	12 253,462 2	356 686,24	18
19	932 424,06	15 287 774	19,514 414	304,866 4	11 918,839 3	344 432,78	19
20	884 642,76	14 355 350	19,383 614	273,832 2	11 613,972 9	332 513,94	20
21	839 004,07	13 470 707	19,239 007	259,924 5	11 340,140 7	320 899,97	21
22	795 394,54	12 631 703	19,086 879	245,870 1	11 080,216 2	309 559,83	22
23	753 722,22	11 836 308	18,926 493	239,924 7	10 834,346 1	298 479,61	23
24	713 898,56	11 082 586	18,761 102	232,572 4	10 594,421 4	287 645,26	24
25	675 846,50	10 368 687	18,589 708	228,677 0	10 361,849 0	277 050,84	25
26	639 490,55	9 692 840,3	18,413 755	223,003 1	10 133,172 0	266 688,99	26
27	604 761,59	9 053 349,7	18,232 059	220,095 2	9 910,168 9	256 555,82	27
28	571 591,36	8 448 588,1	18,045 869	216,760 3	9 690,073 7	246 645,65	28
29	539 917,00	7 876 996,7	17,854 782	215,514 8	9 473,313 4	236 955,58	29
30	509 677,65	7 337 079,7	17,659 865	213,747 9	9 257,798 6	227 482,27	30
31	480 816,86	6 827 402,0	17,460 750	212,083 1	9 044,050 7	218 224,47	31
32	453 279,85	6 346 585,1	17,257 410	209,408 0	8 831,967 6	209 180,42	32
33	427 014,04	5 893 305,2	17,049 069	207,679 1	8 622,559 6	200 348,45	33
34	401 967,86	5 466 291,2	16,836 223	205,773 4	8 414,880 5	191 725,89	34
35	378 092,68	5 064 323,3	16,618 626	203,950 7	8 209,107 1	183 311,01	35
36	355 341,54	4 686 230,6	16,396 237	201,495 2	8 005,156 4	175 101,90	36
37	333 669,40	4 330 889,1	16,168 425	200,504 0	7 803,661 2	167 096,74	37
38	313 032,30	3 997 219,7	15,936 188	199,507 6	7 603,157 2	159 293,08	38
39	293 389,44	3 684 187,4	15,699 467	198,291 1	7 403,649 6	151 689,92	39
40	274 701,58	3 390 798,0	15,458 031	197,874 6	7 205,358 5	144 286,27	40
41	256 930,78	3 116 096,4	15,212 510	198,159 6	7 007,483 9	137 080,91	41
42	240 041,34	2 859 165,6	14,963 604	197,944 8	6 809,324 3	130 073,43	42
43	223 999,66	2 619 124,3	14,710 930	197,631 4	6 611,379 5	123 264,11	43
44	208 772,91	2 395 124,6	14,454 484	196,193 4	6 413,748 1	116 652,73	44
45	194 329,44	2 186 351,7	14,193 167	194,079 8	6 217,554 7	110 238,98	45
46	180 637,68	1 992 022,3	13,926 187	190,888 8	6 023,474 9	104 021,43	46
47	167 666,60	1 811 384,6	13,652 176	188,569 4	5 832,586 1	97 997,951	47
48	155 385,29	1 643 718,0	13,371 791	186,584 9	5 644,016 7	92 165,365	48
49	143 764,91	1 488 332,7	13,085 180	186,022 1	5 457,431 8	86 521,348	49
50	132 778,06	1 344 567,8	12,793 865	188,067 8	5 271,409 7	81 063,916	50
51	122 399,799	1 211 789,7	12,501 220	189,681 0	5 083,341 9	75 792,506	51
52	112 608,771	1 089 389,9	12,207 221	191,267 2	4 893,660 9	70 709,164	52
53	103 384,004	976 781,17	11,912 381	192,571 0	4 702,393 7	65 815,503	53
54	94 705,302	873 397,17	11,616 957	193,607 3	4 509,822 7	61 113,109	54
55	86 552,969	778 691,87	11,321 253	193,611 7	4 316,215 4	56 603,286	55

Tablica IX.

(Dokończenie).

0	1	2	3	4	5	6	7	0
Wiek	Liczba osób żyjących	Liczba osób zmarłych	Prawdopodobieństwo przeżycia roku	Prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku	Suma liczb osób żyjących	Życie średnie	Zdyskontowana liczba osób żyjących	Wiek
x	l_x	$d_x = l_x - l_{x+1}$	$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$	$q_x = \frac{d_x}{l_x}$	Σl_x	$e_x = \frac{\Sigma l_x}{l_x} - \frac{1}{2}$	$D_x = l_x v^x$	x
56	64 362	1 812	0,971 84	0,028 16	998 367	15,01	7 157,518	56
57	62 550	1 883	0,969 89	0,030 11	934 005	14,43	6 688,472	57
58	60 667	1 956	0,967 77	0,032 23	871 455	13,86	6 237,617	58
59	58 711	2 019	0,965 60	0,034 40	810 788	13,31	5 804,334	59
60	56 692	2 091	0,963 11	0,036 89	752 077	12,77	5 389,164	60
61	54 601	2 148	0,960 65	0,039 35	695 385	12,23	4 990,761	61
62	52 453	2 197	0,958 13	0,041 87	640 784	11,71	4 610,026	62
63	50 256	2 240	0,955 43	0,044 57	588 331	11,20	4 247,054	63
64	48 016	2 283	0,952 45	0,047 55	538 075	10,70	3 901,684	64
65	45 733	2 325	0,949 17	0,050 83	490 059	10,22	3 573,243	65
66	43 408	2 372	0,945 37	0,054 63	444 326	9,73	3 261,139	66
67	41 036	2 421	0,940 99	0,059 01	400 918	9,26	2 964,363	67
68	38 615	2 452	0,936 50	0,063 50	359 882	8,81	2 682,186	68
69	36 163	2 468	0,931 73	0,068 27	321 267	8,38	2 415,262	69
70	33 695	2 474	0,926 60	0,073 40	285 104	7,96	2 163,873	70
71	31 221	2 464	0,921 08	0,078 92	251 409	7,55	1 927,878	71
72	28 757	2 433	0,915 38	0,084 62	220 188	7,15	1 707,430	72
73	26 324	2 399	0,908 89	0,091 11	191 431	6,76	1 502,858	73
74	23 925	2 349	0,901 81	0,098 19	165 107	6,39	1 313,363	74
75	21 576	2 288	0,893 92	0,106 08	141 182	6,04	1 138,861	75
76	19 288	2 200	0,885 95	0,114 05	119 606	5,70	978,933 5	76
77	17 088	2 091	0,877 62	0,122 38	100 318	5,38	833,920 0	77
78	14 997	1 978	0,868 11	0,131 89	83 230	5,05	703,726 7	78
79	13 019	1 852	0,857 70	0,142 30	68 233	4,74	587,413 4	79
80	11 167	1 742	0,844 00	0,156 00	55 214	4,44	484,472 5	80
81	9 425	1 616	0,828 63	0,171 37	44 047	4,17	393,170 5	81
82	7 809	1 461	0,812 89	0,187 11	34 622	3,93	313,228 4	82
83	6 348	1 273	0,799 43	0,200 57	26 813	3,72	244,832 8	83
84	5 075	1 077	0,787 76	0,212 24	20 465	3,53	188,206 9	84
85	3 998	892	0,776 85	0,223 15	15 390	3,35	142,563 9	85
86	3 106	712	0,770 87	0,229 13	11 392	3,17	106,496 4	86
87	2 394	565	0,763 93	0,236 07	8 286	2,96	78,926 59	87
88	1 829	447	0,755 49	0,244 51	5 892	2,72	57,980 21	88
89	1 382	356	0,742 26	0,257 74	4 063	2,44	42,125 16	89
90	1 026	332	0,676 27	0,323 73	2 681	2,11	30,070 93	90
91	694	251	0,639 02	0,360 98	1 655	1,88	19,558 03	91
92	443	180	0,594 74	0,405 26	961	1,67	12,004 28	92
93	263	120	0,542 77	0,457 23	518	1,47	6,852 597	93
94	143	74	0,483 70	0,516 30	255	1,28	3,582 636	94
95	69	40	0,415 73	0,584 27	112	1,12	1,662 196	95
96	29	19	0,351 35	0,648 65	43	0,98	0,671 732 8	96
97	10	7	0,307 69	0,692 31	14	0,90	0,222 724 0	97
98	3	2	0,250 00	0,750 00	4	0,83	0,064 247 1	98
99	1	1	0,000 00	1,000 00	1	0,50	0,020 592 0	99
100	0	—	—	—	—	—	—	100

Tablica IX.

(Dokończenie).

0	8	9	10	11	12	13	0
Wiek	Suma zdyskontowanych liczb osób żyjących	Suma sum zdyskontowanych liczb osób żyjących	Wartość 1-ki renty dożywotnej płatnej rocznie z góry	Zdyskontowana liczba osób zmarłych	Suma zdyskontowanych liczb osób zmarłych	Suma sum zdyskontowanych liczb osób zmarłych	Wiek
x	$N_x=\Sigma D_x$	$S_x=\Sigma N_x$	$a_x=\frac{N_x}{D_x}$	$C_x=d_x v^{x+1}$	$M_x=\Sigma C_x$	$R_x=\Sigma M_x$	x
56	78 907,793	692 138,90	11,024 463	193,757 2	4 122,603 7	52 287,071	56
57	71 750,275	613 231,11	10,727 454	193,605 0	3 928,846 5	48 164,467	57
58	65 061,803	541 480,83	10,430 554	193,375 6	3 735,241 5	44 235,620	58
59	58 824,186	476 419,03	10,134 528	191,926 9	3 541,865 9	40 500,378	59
60	53 019,852	417 594,84	9,838 233	191,126 2	3 349,939 0	36 958,512	60
61	47 630,688	364 574,99	9,543 773	188,784 9	3 158,812 8	33 608,573	61
62	42 639,927	316 944,30	9,249 390	185,665 0	2 970,027 9	30 449,760	62
63	38 029,901	274 304,37	8,954 419	182,017 9	2 784,362 9	27 479,732	63
64	33 782,847	236 274,47	8,658 530	178,377 0	2 602,345 0	24 695,369	64
65	29 881,163	202 491,62	8,362 477	174,671 7	2 423,968 0	22 093,024	65
66	26 307,920	172 610,46	8,067 096	171,348 8	2 249,296 3	19 669,056	66
67	23 046,781	146 302,54	7,774 615	168,161 9	2 077,947 5	17 419,760	67
68	20 082,418	123 255,76	7,487 332	163,764 7	1 909,785 6	15 341,812	68
69	17 400,232	103 173,34	7,204 283	158,493 5	1 746,020 9	13 432,026	69
70	14 984,970	85 773,107	6,925 069	152,768 0	1 587,527 4	11 686,005	70
71	12 821,097	70 788,137	6,650 367	146,298 5	1 434,759 4	10 098,478	71
72	10 893,219	57 967,040	6,379 892	138,901 9	1 288,460 9	8 663,718 7	72
73	9 185,789	47 073,821	6,112 214	131,693 1	1 149,559 0	7 375,257 8	73
74	7 682,931	37 888,032	5,849 815	123,988 9	1 017,865 9	6 225,698 8	74
75	6 369,568	30 205,101	5,592 928	116,124 0	893,877 0	5 207,832 9	75
76	5 230,706 9	23 835,533	5,343 271	107,363 3	777,753 0	4 313,955 9	76
77	4 251,773 4	18 604,826	5,098 539	98,119 13	670,389 7	3 536,202 9	77
78	3 417,853 4	14 353,053	4,856 791	89,246 77	572,270 57	2 865,813 2	78
79	2 714,126 7	10 935,200	4,620 471	80,347 72	483,023 80	2 293,542 6	79
80	2 126,713 3	8 221,073 0	4,389 750	72,668 75	402,676 08	1 810,518 8	80
81	1 642,240 8	6 094,359 7	4,176 918	64,819 70	330,007 33	1 047,842 7	81
82	1 249,070 3	4 452,118 9	3,987 730	56,348 58	265,187 63	1 077,835 4	82
83	935,841 9	3 203,048 6	3,822 371	47,209 33	208,839 05	812,647 73	83
84	691,009 1	2 267,206 7	3,671 540	38,404 53	161,629 72	603,808 68	84
85	502,802 2	1 576,197 6	3,526 855	30,584 27	123,225 19	442,178 96	85
86	360,238 3	1 073,395 4	3,382 034	23,473 57	92,640 92	318,953 77	86
87	253,741 93	713,157 06	3,214 911	17,910 78	69,167 35	226,312 85	87
88	174,815 34	459,415 13	3,015 086	13,625 14	51,256 57	157,145 50	88
89	116,835 13	284,599 79	2,773 524	10,433 97	37,631 43	105,888 93	89
90	74,709 97	167,764 66	2,484 458	9,356 291	27,197 455	68,257 498	90
91	44,639 04	93,054 69	2,282 389	6,801 523	17,841 164	41,060 043	91
92	25,081 01	48,415 645	2,089 339	4,689 990	11,039 641	23,218 879	92
93	13,076 725	23,334 635	1,908 287	3,006 408	6,349 651 0	12,179 238	93
94	6,224 128	10,257 910	1,737 304	1,782 645	3,343 242 5	5,829 587 4	94
95	2,641 492	4,033 782 1	1,589 158	0,926 528	1,560 597 5	2,486 344 9	95
96	0,979 295 9	1,392 290 1	1,457 865	0,423 175 6	0,634 069 5	0,925 747 4	96
97	0,307 563 1	0,412 994 2	1,380 916	0,149 909 9	0,210 893 9	0,291 677 9	97
98	0,084 839 1	0,105 431 1	1,320 513	0,041 184 0	0,060 984 0	0,080 784 0	98
99	0,020 592 0	0,020 592 0	1,000 000	0,019 800 0	0,019 800 0	0,019 800 0	99
100	—	—	—	—	—	—	100

Tablica X.

Tablica pomocnicza dla czynnych i inwalidów, ułożona na podstawie tablicy śmiertelności 23-ch Towarzystw niemieckich (MI), tablicy śmiertelności inwalidów (**Bentziena**) i prawdopodobieństw stania się inwalidą (**Zimmermanna**), przy stopie 4%.

0	1	2	3	4	5	6	7	0
Wiek	Zdyskontowana liczba osób czynnych	Suma zdyskontowanych liczb osób czynnych	Zdyskontowana liczba osób wybyłych z pośród czynnych (zarówno zmarłych jak i inwalidów)	Suma zdyskontowanych liczb osób wybyłych z pośród czynnych (zarówno zmarłych jak i inwalidów)	Zdyskontowana liczba osób, stających się w ciągu roku inwalidami	Suma zdyskontowanych liczb, pomieszczonych w kol. 5-ej	Zdyskontowana liczba osób, stających się w ciągu roku inwalidami i żyjących w końcu roku	Wiek
x	$D_x^{(a)}=l_x^{(a)}v^x$	$N_x^{(a)}=\Sigma D_x^{(a)}$	$C_x^{(a)}=\left(d_x^{(a)}+J_x\right)v^{x+1}$	$M_x^{(a)}=\Sigma C_x^{(a)}$	$I_x=J_x v^{x+1}$	ΣI_x	$I'_x=J'_x v^{x+1}$	x
20	45 638,70	846 883,2	282,170 3	13 066,15	8,776 7	4 320,546 3	8,337 8	20
21	43 601,23	801 244,5	268,363 4	12 783,98	9,705 0	4 311,769 6	9,283 0	21
22	41 655,82	757 643,3	254,390 2	12 515,62	10,548 9	4 302,064 6	10,143 2	22
23	39 799,29	715 987,5	248,897 8	12 261,23	11,313 5	4 291,515 7	10,923 4	23
24	38 019,73	676 188,2	241,575 3	12 012,33	12,378 9	4 280,202 2	12,003 7	24
25	36 315,83	638 168,5	238,054 7	11 770,75	13,345 5	4 267,823 3	12,624 1	25
26	34 680,97	601 852,7	233,061 0	11 532,70	14,219 5	4 254,477 8	13,525 9	26
27	33 114,09	567 171,7	231,100 3	11 299,64	15,673 5	4 240,258 3	15,006 5	27
28	31 609,38	534 057,6	227,982 9	11 068,54	16,353 2	4 224,584 8	15,711 9	28
29	30 165,56	502 448,2	229,081 0	10 840,56	19,115 8	4 208,231 6	18,499 1	29
30	28 776,34	472 282,6	229,460 0	10 611,48	21,938 0	4 189,115 8	21,048 7	30
31	27 440,04	443 506,3	227,761 3	10 382,02	22,519 6	4 167,177 8	21,664 4	31
32	26 156,92	416 066,3	228,868 5	10 154,26	26,861 2	4 144,658 2	26,038 9	32
33	24 922,00	389 909,4	230,608 0	9 925,394	31,362 7	4 117,797 0	30,308 5	33
34	23 732,86	364 987,4	230,355 1	9 694,786	34,211 2	4 086,434 3	33,197 5	34
35	22 589,76	341 254,5	232,460 2	9 464,431	39,230 7	4 052,223 1	38,012 4	35
36	21 488,44	318 664,7	234,531 3	9 231,971	44,985 0	4 012,992 4	43,579 2	36
37	20 427,42	297 176,3	233,395 3	8 997,440	46,183 4	3 968,007 4	44,831 7	37
38	19 408,30	276 748,9	233,950 7	8 764,045	48,956 3	3 921,824 0	47,440 0	38
39	18 427,95	257 340,6	234,325 1	8 530,094	51,864 0	3 872,867 7	50,405 9	39
40	17 484,82	238 912,6	233,924 7	8 295,769	52,873 4	3 821,003 7	51,271 2	40
41	16 578,41	221 427,8	231,282 6	8 061,844	51,032 4	3 768,130 3	49,491 8	41
42	15 709,50	204 849,4	232,385 8	7 830,561	53,143 2	3 717,097 9	51,661 9	42
43	14 872,88	189 139,9	231,103 7	7 598,175	53,057 7	3 663,954 7	51,633 3	43
44	14 069,73	174 267,0	232,315 7	7 367,071	56,495 3	3 610,897 0	54,954 6	44
45	13 296,26	160 197,3	232,105 7	7 134,755	59,261 0	3 554,401 7	57,614 9	45
46	12 552,81	146 901,0	238,057 6	6 902,649	69,328 0	3 495,140 7	67,428 6	46
47	11 831,97	134 348,2	240,011 5	6 664,591	74,575 6	3 425,812 7	72,749 2	47
48	11 136,87	122 516,2	244,974 8	6 424,579	83,414 4	3 351,237 1	81,365 6	48
49	10 463,53	111 379,3	246,669 9	6 179,604	87,523 5	3 267,822 7	85,412 8	49
50	9 814,450	100 915,8	254,636 5	5 932,934	95.522 5	3 180,299 2	93,087 1	50
51	9 182,338	91 101,37	256,161 0	5 678,297	97,182 5	3 084,776 7	94,840 7	51
52	8 573,002	81 919,03	258,567 2	5 422,136	99,949 3	2 987,594 2	97,572 5	52
53	7 984,686	73 346,03	260,651 1	5 163,569	102,239 7	2 887,644 9	99,713 8	53
54	7 416,949	65 361,34	261,613 9	4 902,918	103,743 4	2 785,405 2	101,199 0	54
55	6 870,082	57 944,39	258,222 7	4 641,304	101,976 8	2 681,661 8	99,641 5	55
56	6 347,584	51 074,31	257,166 7	4 383,081	102,438 9	2 579,685 0	100,086 5	56
57	5 846,291	44 726,73	260,949 5	4 125,914	108,060 7	2 477,246 1	105,593 1	57
58	5 360,467	38 880,44	263,568 8	3 864,964	113,297 0	2 369,185 4	110,528 8	58
59	4 890,753	33 519,97	273,012 3	3 601,395	126,905 1	2 255,888 4	123,768 1	59

Tablica X.

Tablica pomocnicza dla czynnych i inwalidów, ułożona na podstawie tablicy śmiertelności 23-ch Towarzystw niemieckłch (MI), tablicy śmiertelności inwalidów (Bentziena) i prawdopodobieństw stania się inwalidą (Zimmermana), przy stopie 4%.

0	8	9	10	11	12	13	14	0
Wiek	Suma zdyskontowanych liczb osób, wykazanych w kol. 7-ej	Zdyskontowana liczba inwalidów	Suma zdyskontowanych liczb inwalidów	Wartość 1-ki renty, płatnej dożywotnio rocznie z góry inwalidom	Iloczyny liczb, pomieszczonych w kol. 7-ej, przez odpowiednie liczby kol. 11-ej (pomieszczone o rok niżej)	Suma liczb, pomieszczonych w kol. 12-ej	Suma sum, pomieszczonych w kol. 13-ej	Wiek
x	$\Sigma I'_x$	$D_x^{(i)}=l_x^{(i)}v^x$	$N_x^{(i)}=\Sigma D_x^{(i)}$	$a_x^{(i)}=\frac{N_x^{(i)}}{D_x^{(i)}}$	$D_x^{(ai)}=a_{x+1}^{(i)}\cdot I'_x$	$N_x^{(ai)}=\sum a_{x+1}^{(i)}\cdot I'_x$	$S_x^{(ai)}=\sum\sum a_{x+1}^{(i)}\cdot I'_x$	x
20	4 189,938 5	4 563,87	39 359,2	8,624 084	73,817 2	37 732,144 7	1 339 440,854 2	20
21	4 181,600 7	3 930,20	34 795,3	8,853 315	84,288 9	37 658,327 5	1 301 708,709 5	21
22	4 172,317 7	3 399,27	30 865,1	9,079 920	94,345 9	37 574,038 6	1 264 050,382 0	22
23	4 162,174 5	2 952,87	27 465,8	9,301 392	103,946 5	37 479,692 7	1 226 476,343 4	23
24	4 151,251 1	2 575,98	24 512,9	9,515 951	116,665 8	37 375,746 2	1 188 996,650 7	24
25	4 139,247 4	2 257,08	21 936,9	9,719 150	125,098 7	37 259,080 4	1 151 620,904 5	25
26	4 126,623 3	1 985,95	19 679,8	9,909 514	136,375 8	37 133,981 7	1 114 361,824 1	26
27	4 113,097 4	1 754,89	17 693,8	10,082 569	153,553 4	36 997,605 9	1 077 227,842 4	27
28	4 098,090 9	1 557,68	15 938,9	10,232 461	162,743 2	36 844,052 5	1 040 230,236 5	28
29	4 082,379 0	1 388,42	14 381,2	10,357 961	193,393 4	36 681,309 3	1 003 386,184 0	29
30	4 063,879 9	1 242,83	12 992,8	10,454 205	221,758 0	36 487,915 9	966 704,874 7	30
31	4 042,831 2	1 115,28	11 750,0	10,535 471	229,808 4	36 266,157 9	930 216,958 8	31
32	4 021,166 8	1 002,55	10 634,7	10,607 650	278,047 3	36 036,349 5	893 950,800 9	32
33	3 995,127 9	902,043	9 632,15	10,678 149	325,644 9	35 758,302 2	857 914,451 4	33
34	3 964,819 4	812,531	8 730,11	10,744 341	358,769 5	35 432,657 3	822 156,149 2	34
35	3 931,621 9	732,626	7 917,58	10,807 124	413,141 6	35 073,887 8	786 723,491 9	35
36	3 893,609 5	661,074	7 184,95	10,868 602	476,045 8	34 660,746 2	751 649,604 1	36
37	3 850,030 3	597,223	6 523,88	10,923 692	491,829 0	34 184,700 4	716 988,857 9	37
38	3 805,198 6	540,233	5 926,66	10,970 563	522,190 2	33 692,871 4	682 804,157 5	38
39	3 757,758 6	489,347	5 386,43	11,007 383	556,380 9	33 170,681 2	649 111,286 1	39
40	3 707,352 7	443,656	4 897,08	11,038 011	566,920 1	32 614,300 3	615 940,604 9	40
41	3 656,081 5	402,759	4 453,42	11,057 282	547,904 6	32 047,380 2	583 326,304 6	41
42	3 606,589 7	365,893	4 050,66	11,070 614	572,093 0	31 499,475 6	551 278,924 4	42
43	3 554,927 8	332,747	3 684,77	11,073 789	571,579 1	30 927,382 6	519 779,448 8	43
44	3 503,294 5	302,803	3 352,02	11,069 970	607,346 3	30 355,803 5	488 852,066 2	44
45	3 448,339 9	275,903	3 049,22	11,051 783	635,083 9	29 748,457 2	458 496,262 7	45
46	3 390,725 0	251,596	2 773,32	11,022 910	740,404 2	29 113,373 3	428 747,805 5	46
47	3 323,296 4	229,653	2 521,72	10,980 566	794,438 4	28 372,969 1	399 634,432 2	47
48	3 250,547 2	209,892	2 292,07	10,920 235	882,991 5	27 578,530 7	371 261,463 1	48
49	3 169,181 6	191,868	2 082,18	10,852 148	920,436 3	26 695,539 2	343 682,932 4	49
50	3 083,768 8	175,413	1 890,31	10,776 339	995,237 3	25 775,102 9	316 987,393 2	50
51	2 990,681 7	160,399	1 714,90	10,691 463	1 004,550 7	24 779,865 6	291 212,290 3	51
52	2 895,841 0	146,762	1 554,50	10,591 979	1 022,760 3	23 775,314 9	266 432,424 7	52
53	2 798,268 5	134,300	1 407,74	10,482 055	1 033,261 2	22 752,554 6	242 657,109 8	53
54	2 698,554 7	122,892	1 273,44	10,362 269	1 034,054 2	21 719,293 4	219 904,555 2	54
55	2 597,355 7	112,600	1 150,55	10,218 028	1 002,354 1	20 685,239 2	198 185,261 8	55
56	2 497,714 2	103,180	1 037,95	10,059 605	989,524 5	19 682,885 1	177 500,022 6	56
57	2 397,627 7	94,548 6	934,773	9,886 693	1 024,249 9	18 693,360 6	157 817,137 5	57
58	2 292,034 6	86,621 3	840,224	9,699 970	1 050,363 0	17 669,110 7	139 123,776 9	58
59	2 181,505 8	79,301 0	753,603	9,503 071	1 150,418 1	16 618,747 7	121 454,666 2	59

Tablica X.

(Dokończenie).

0	1	2	3	4	5	6	7	0
Wiek	Zdyskontowana liczba osób czynnych	Suma zdyskontowanych liczb osób czynnych	Zdyskontowana liczba osób wybyłych z pośród czynnych (zarówno zmarłych jak i inwalidów)	Suma zdyskontowanych liczb osób wybyłych z pośród czynnych (zarówno zmarłych jak i inwalidów)	Zdyskontowana liczba osób, stających się w ciągu roku inwalidami	Suma zdyskontowanych liczb, pomieszczonych w kol. 5-ej	Zdyskontowana liczba osób, stających się w ciągu roku inwalidami i żyjących w końcu roku	Wiek
x	$D_x^{(a)}=l_x^{(a)}v^x$	$N_x^{(a)}=\Sigma D_x^{(a)}$	$C_x^{(a)}=\left(d_x^{(a)}+J_x\right)v^{x+1}$	$M_x^{(a)}=\Sigma C_x^{(a)}$	$I_x=J_x v^{x+1}$	ΣI_x	$I_x'=J_x' v^{x+1}$	x
60	4 429,606	28 629,22	284,449 2	3 328,383	142,773 0	2 128,983 3	139,299 7	60
61	3 974,794	24 199,61	296,098 0	3 043,934	161,188 4	1 986,210 3	157,057 6	61
62	3 525,843	20 224,82	296,454 1	2 747,836	170,621 7	1 825,021 9	166,142 7	62
63	3 093,753	16 698,98	292,610 1	2 451,382	176,492 4	1 654,400 2	171,616 9	63
64	2 682,164	13 605,23	282,294 5	2 158,772	176,268 0	1 477,907 8	171,189 4	64
65	2 296,720	10 923,07	265,277 0	1 876,477	168,512 1	1 301,639 8	163,478 5	65
66	1 943,111	8 626,349	243,080 9	1 611,200	154,950 5	1 133,127 7	150,110 6	66
67	1 622,283	6 683,238	229,495 8	1 368,119	148,644 4	978,177 2	143,851 7	67
68	1 333,285	5 060,955	214,189 1	1 138,623	142,325 2	829,532 8	137,583 3	68
69	1 067,807	3 727,670	194,005 6	924,434 2	132,483 8	687,207 6	127,731 6	69
70	832,727 8	2 659,863	175,614 2	730,428 6	124,177 2	554,723 8	119,484 3	70
71	625,084 1	1 827,145	154,372 4	554,814 4	113,760 6	430,546 6	109,188 8	71
72	446,670 6	1 202,061	125,086 4	400,442 0	95,056 5	316,786 0	90,946 0	72
73	304,409 2	755,390 4	93,596 0	275,355 6	73,943 6	221,729 5	70,430 3	73
74	199,104 2	450,981 2	67,774 66	181,759 6	55,264 8	147,785 9	52,467 3	74
75	123,672 9	251,877 0	49,231 38	113,984 9	39,334 4	92,521 1	37,253 4	75
76	69,685 24	128,204 1	31,770 10	64,753 53	25,572 2	53,186 7	24,108 2	76
77	35,235 04	58,518 85	18,206 90	32,983 43	15,016 0	27,614 5	14,077 5	77
78	15,672 95	23,283 81	9,294 720	14,776 53	7,805 8	12,598 5	7,309 4	78
79	5,775 360	7,610 864	3,947 944	5,481 806	3,384 0	4,792 7	3,167 0	79
80	1,605 208	1,855 504	1,293 196	1,533 862	1,168 0	1,408 7	1,042 9	80
81	0,250 296	0,250 296	0,240 666	0,240 666	0,240 7	0,240 7	0,200 6	81
82	„	„	„	„	„	„	„	82
83	„	„	„	„	„	„	„	83
84	„	„	„	„	„	„	„	84
85	„	„	„	„	„	„	„	85
86	„	„	„	„	„	„	„	86
87	„	„	„	„	„	„	„	87
88	„	„	„	„	„	„	„	88
89	„	„	„	„	„	„	„	89
90	„	„	„	„	„	„	„	90
91	„	„	„	„	„	„	„	91
92	„	„	„	„	„	„	„	92
93	„	„	„	„	„	„	„	93
94	„	„	„	„	„	„	„	94
95	„	„	„	„	„	„	„	95
96	„	„	„	„	„	„	„	96
97	„	„	„	„	„	„	„	97
98	„	„	„	„	„	„	„	98
99	„	„	„	„	„	„	„	99
100	„	„	„	„	„	„	„	100

Tablica X.

(Dokończenie).

0	8	9	10	11	12	13	14	0
Wiek	Suma zdyskontowanych liczb osób, wykazanych w kol. 7-ej	Zdyskontowana liczba inwalidów	Suma zdyskontowanych liczb inwalidów	Wartość 1-ki renty, płatnej dożywotnio rocznie z góry inwalidom	Iloczyny liczb, pomieszczonych w kol. 7-ej, przez odpowiednie liczby kol. 11-ej (pomieszczone o rok niżej)	Suma liczb, pomieszczonych w kol. 12-ej	Suma sum, pomieszczonych w kol. 13-ej	Wiek
x	$\Sigma I'_x$	$D_x^{(i)}=l_x^{(i)}v^x$	$N_x^{(i)}=\Sigma D_x^{(i)}$	$a_x^{(i)}=\frac{N_x^{(i)}}{D_x^{(i)}}$	$D_x^{(ai)}=a_{x+1}^{(i)}\cdot I'_x$	$N_x^{(ai)}=\Sigma a_{x+1}^{(i)}\cdot I'_x$	$S_x^{(ai)}=\Sigma\Sigma a_{x+1}^{(i)}\cdot I'_x$	x
60	2 057,737 7	72,545 0	674,302	9,294 948	1 264,673 3	15 468,329 6	104 835,918 5	60
61	1 918,438 0	66,281 6	601,757	9,078 794	1 390,349 3	14 203,656 3	89 367,588 9	61
62	1 761,380 4	60,488 7	535,475	8,852 480	1 432,924 6	12 813,307 0	75 163,932 6	62
63	1 595,237 7	55,073 0	474,986	8,624 662	1 440,053 5	11 380,382 4	62 350,625 6	63
64	1 423,620 8	50,042 7	419,913	8,391 094	1 396,012 6	9 940,328 9	50 970,243 2	64
65	1 252,431 4	45,356 2	369,870	8,154 784	1 293,253 4	8 544,316 3	41 029,914 3	65
66	1 088,952 9	41,021 4	324,514	7,910 847	1 150,090 5	7 251,062 9	32 485,598 0	66
67	938,842 3	37,001 7	283,493	7,661 621	1 064,860 5	6 100,972 4	25 234,535 1	67
68	794,990 6	33,298 4	246,491	7,402 488	978,848 9	5 036,111 9	19 133,562 7	68
69	657,407 3	29,965 6	213,193	7,114 591	877,466 7	4 057,263 0	14 097,450 8	69
70	529,675 7	26,672 1	183,227	6,869 613	788,950 8	3 179,796 3	10 040,187 8	70
71	410,191 4	23,709 8	156,555	6,602 966	691,114 0	2 390,845 5	6 860,391 5	71
72	301,002 6	20,957 8	132,845	6,338 690	552,704 4	1 699,731 5	4 469,546 0	72
73	210,056 6	18,410 7	111,887	6,077 281	410,581 5	1 147,027 1	2 769,814 5	73
74	139,626 3	16,034 8	93,476 7	5,829 614	293,270 0	736,445 6	1 622,787 4	74
75	87,159 0	13,854 7	77,441 9	5,589 576	199,057 1	443,175 6	886,341 8	75
76	49,905 6	11,900 3	63,587 2	5,343 327	122,916 5	244,118 5	443,166 2	76
77	25,797 4	10,137 6	51,686 9	5,098 535	68,371 4	121,202 0	199,047 7	77
78	11,719 9	8,554 90	41,549 3	4,856 784	33,771 8	52,830 6	77,845 7	78
79	4,410 5	7,141 14	32,994 4	4,620 327	13,902 5	19,058 8	25,015 1	79
80	1,243 5	5,889 38	25,853 3	4,389 816	4,356 3	5,156 3	5,956 3	80
81	0,200 6	4,779 40	19,963 9	4,177 072	0,800 0	0,800 0	0,800 0	81
82	"	3,807 98	15,184 5	3,987 547	"	"	"	82
83	"	2,976 49	11,376 5	"	"	"	"	83
84	"	2,287 92	8,400 01	"	"	"	"	84
85	"	1,733 03	6,112 09	"	"	"	"	85
86	"	1,294 51	4,379 06	"	"	"	"	86
87	"	0,959 530	3,084 554	"	"	"	"	87
88	"	0,704 808	2,125 024	"	"	"	"	88
89	"	0,511 989	1,420 216	"	"	"	"	89
90	"	0,365 425	0,908 227	"	"	"	"	90
91	"	0,237 622	0,542 802	"	"	"	"	91
92	"	0,146 001	0,305 180	"	"	"	"	92
93	"	0,083 494	0,159 179	"	"	"	"	93
94	"	0,043 575	0,075 685	"	"	"	"	94
95	"	0,020 267	0,032 110	"	"	"	"	95
96	"	0,008 101	0,011 843	"	"	"	"	96
97	"	0,002 737	0,003 742	"	"	"	"	97
98	"	0,000 810	0,001 005	"	"	"	"	98
99	"	0,000 195	0,000 195	"	"	"	"	99
100	"	—	—	"	"	"	"	100

SKOROWIDZ RZECZOWY.

(Liczby oznaczają stronice).

DZIEŁA
wydawane nakładem b. wychowańców
imienia **Leopolda Kron**

Monografia Szkoły Handlowej imienia Leopolda Kronenberga, przez *ROMANA PLENKIEWICZA*. 4°, str. 192, XLI. Cena rb. 4.

PODRĘCZNIKI Z DZIEDZINY NAUK HANDLOWYCH I EKONOMICZNYCH.

Arytmetyka handlowa. Część I, przez *STANISŁAWA KRAMSZTYKA*. Wydanie III (w druku).

Arytmetyka handlowa. Część II. Opracował *Dr. M. FELDBLUM* — (w przygotowaniu).

Ekonomia społeczna. Część I, przez *D-ra Z. DASZYŃSKĄ-GOLIŃSKĄ*. 1906. 8°, str. 191. Cena rb. 1 w kartonie.

Ekonomia społeczna. Część II, przez *D-ra Z. DASZYŃSKĄ-GOLIŃSKĄ*. 1907. 8°, str. 366. Cena rb. 1 kop. 80 w kartonie.

Zasady nauki o handlu. Według C. F. Findeisena opracował *Dr. MICHAŁ FELDBLUM*. 1906. 8°, str. 250. Cena rb. 1 w kart.

Towaroznawstwo. Część I, przez *KAZIMIERZA KUJAWSKIEGO*. 1907. 8°, str. 158. Cena kop. 75 w kartonie.

Towaroznawstwo. Część II, przez *KAZIMIERZA KUJAWSKIEGO* — (w przygotowaniu).

Zasady Buchalteryi, przez *STANISŁAWA LIPIŃSKIEGO*. 1907. 8°, str. 185. Cena rb. 1 w kartonie.

Zasady prawa handlowego. Wykład *KAROLA DUNINA*. Wydanie trzecie powiększone. 1911. 8°, str. X + 166. Cena kop. 75, w kartonie kop. 90.

Geografia ekonomiczna. Część I ogólna, przez *ANTONIEGO SUJKOWSKIEGO*. 1907. 8°, str. 141. Cena kop. 75 w kartonie.

Geografia ekonomiczna. Część II szczegółowa, przez *ANTONIEGO SUJKOWSKIEGO*. 1909. 8°, str. 348. Cena rb. 2 w kartonie.

Historya handlu przez *T. KORZONA* (w przygotowaniu).

Arytmetyka polityczna, przez *A. B. DANIELEWICZA* i *S. DICKSTEINA*. 1910. 8°, str. XII+394+37 str. tablic. Cena rb. 1 kop. 60, w kartonie rb. 1 kop. 80.