

~~18073~~

B. P. im. L.









WYKŁAD, ZUPEŁNY

~~AA~~  
ALGEBRY

WYKŁAD ZUPEŁNY

ALGEBRY



180884274

~~649~~



PARYZ — Drukarnia E. MARTINET, ULICA MIGNON, 2



2073.

WYKŁAD, ZUPEŁNY  
ALGEBRY

~~649~~  
CZEŚĆ DRUGA

ALGEBRA WYŻSZA

TOM II

TEORIA WYZNACZNIKÓW I ICH PRZEDNIEJSZE ZASTOSOWANIA,

POD TYM TYTUŁEM WIERNIE I BEZ ŻADNEJ ZMIANY

«LEKCYE ALGEBRY WYŻSZEJ» P. SALMONA

Z ORYGINALNEGO TEKSTU ANGIELSKIEGO

NA JĘZYK POLSKI W CAŁEJ OBSZERNOŚCI PRZEŁOŻYŁ

ADOLF SĄGAJŁO

Professor matematyki

166093

NAKŁADEM WŁAŚCICIELA BIBLIOTEKI KÓRNICKIEJ

PRZEWODNICZĄCEGO W TOWARZYSTWACH

NAUKOWEJ POMOCY I NAUK ŚCISŁYCH W PARYŻU

1874



WYKŁAD SUPLETA

AL GERRY



~~Handwritten scribble~~

II-323983

Ce.2, T.2



512

ADOLF SZYBLO



WYKŁAD SUPLETA

WYKŁAD SUPLETA

WYKŁAD SUPLETA

1911





# PRZEDMOWA

Nie podręczniki, ale dzieła naukowe klasyczne są same tylko zdolne rozprzestrzeniać granice wiedzy ludzkiej w umysłach najczęściej wykształconych każdego oświeconego narodu.

Podajemy zaraz na wstępie krótką wiadomość historyczną o rozwoju teorii wyznaczników, której wykład stanowi drugi tom naszej Algebry. Wiadomość tę skreśliłiśmy podług BALTZER'A *Theory of determinants* i SPOTTISWOODE'A *Theorems relating to determinants*, oraz podług naszych własnych poszukiwań.

*Dirichlet* zauważył, że pierwsza myśl o wyznacznikach należy się *Leibnitzowi* (Lubienieckiemu). W jego liście do *Hospital'a*, z 26 kwietnia 1693 roku, jest pierwszy przykład formacyi tych funkcyi, z zastosowaniem do zrównań liniijnych; użytą jest nawet podwójna notacya wskaźników.

Metoda jednak zaniechaną została i *Cramer*, w 1750 roku, rzec można, raz drugi odkryć ją musiał. W swej *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, obliczył wyznaczniki liniijnych zrównań o dwóch i trzech zmiennych, i wskazał prawo ich formacyi w razie większej ilości zmiennych.

Równoważność przemiany wskaźników została potem dowiedziona przez *Bézout* i *Laplace*. Pierwszy w *Histoire de l'Académie Royale des sciences de 1764*, oznaczał stopień zrównania wynikającego z wyrugowania nieznanych z układu danego, a zarazem zaznaczał wypadki wyznaczników, nie wdając się jednak ani we własności, ani w ogólne prawo tworzenia się tych funkcyi. Taż publikacya na rok 1772, zawiera prace *Laplace'a* i *Vandermonde'a* odnośnie do wyznaczników drugiego, trzeciego, czwartego i wyższych rzędów. *Laplace* rozbie-  
rając



układ społecznych różniczkowych zrównań, podał prawo tworzenia się wyznaczników, i odkrył że przemiana drugich kolumn lub linii sprowadza zmianę znaku wyznacznika, ich zaś równość czyni go zerem. *Vandermonde* użył znakowania zwanego potem przez *P. Sylwestra*, *umbral-notation*.

*Lagrange* w *Pamiętniku o piramidach* (*Mém. de l'Académie de Berlin*, 1773), używa wyznaczników trzeciego rzędu, i dowodzi że kwadrat takiego wyznacznika, może być sam wyrażonym jako wyznacznik.

*Gauss* w *Disquisitiones arithmeticae* (1801), spostrzegł, że dla drugiego i trzeciego rzędu, iloczyn dwóch wyznaczników jest wyznacznikiem, i rozebrał dokładnie wyznaczniki drugiego rzędu pochodzące od kształtu  $b^2 - ac$ .

*Binet* (1812, *Journ. de l'École Polyt.* tome IX, cahier 16), dowodzi głównych twierdzeń o wyznacznikach drugiego, trzeciego i czwartego rzędu i stosuje je do kwestyi geometrycznych.

W tomie X tegoż dziennika, *Cauchy* podaje pracę o funkcjach zmieniających znak przez przełożenia zmiennych. Druga część pracy odnosi się do wyznaczników i zawiera wiele twierdzeń ogólnych. *Cauchy* stanowczo wprowadza nazwę *wyznaczników* dawniej przez *Gauss'a* używaną do wyznaczników drugiego stopnia.

*Jacobi* od roku 1826, w dzienniku *Crell'a* po mistrzowsku wyznacznikami włada. Pamiętniki jego z roku 1841, *de formatione et proprietatibus determinantium*, oraz *de determinantibus functionalibus*, naukę wyznaczników przystępną dla każdego matematyka uczyniły.

Ostatnią ważną w tym przedmiocie pracą są wyznaczniki skośne *P. Cayle'a*. (*Crell'a*, tomy XXXII i XXXVIII.)

Najważniejsze dzieła elementarne są :

*Spottiswoode*, Elementary theorems relating to determinants. London, 1851.

*Brioschi*, la theoria dei determinanti. Pavia, 1854.

*Baltzer*, Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig, 1857.

Drugie i trzecie tłumaczone na francuzki.

Po ostatnich *Jacobiego* pięknych badaniach nad wyznacznikami, w roku 1841, nastąpił wkrótce cały szereg prac wielu znakomitych matematyków, z których przytoczymy następujące najwybitniejsze nazwiska, a mianowicie, 1° z angielskich : *Cayley*, *Sylvester*, *Boole*, *Salmon*, *Spottiswoode*, bracia *Roberts*, it. d. ; 2° z francuzkich : *Hermitte*, *Combescure*, *Painvin*, *Bertrand*, *Catalan* i inni ; 3° z włoskich : *Brioschi*, *Betti*, *Bellavitis*, *Genocchi*, *Fra di Bruno*, *Trudi*, it. d. ; 4° z niemieckich : *Clebsch*, *Aronhold*, *Kronecker*, *Kummer*, *Borchardt*, *Joachimsthal*, *Hess* i inni.

W Polsce spotykamy niektóre badania nad wyznacznikami, lub też ich zastosowania w głównych pracach PP. *Babczyńskiego*, *Zajączkowskiego* i *Żmurki*. Oprócz tego, w roku 1870, na końcu pierwszego tomu *Rachunku różniczkowego* przez P. *Folkierskiego*, ukazał się dodatek P. *Wł. Trzaski* o wyznacznikach, o której to pracy wszyscy recenzenci podzielili zdanie wyrażone przez P. *Folkierskiego* w przedmowie, twierdząc, że nacechowana sumiennem wypracowaniem, głęboką znajomością rzeczy i wysoką erudycją, zawiera wszystko, co jest godnego uwagi w tej pięknej teorii i co można było streścić w szczupłym zakresie, a nadto wiele jeszcze całkiem oryginalnych dowodzeń dla twierzeń, na których prostem wysłowieniu inni autorowie zwykli poprzestawać.

Z pomiędzy dzieł wykładowych w obcych językach, dwie bogate literatury: włoska i angielska, są same tylko pod tym względem obficie uposażone. Nic więc dziwnego, że pisarze innych narodów, których literatura tego rodzaju dzieł własnych dotąd jeszcze nie posiada, zastępują zwykle ten swej literatury niedostatek wiernym przekładem na język ojczysty znakomitych dzieł wykładowych bądź to włoskich, bądź angielskich. Ztąd wielka sława i wziętość pięknych dzieł o wyznacznikach *Brioschi* i *Salmona*. Przystępne i klasyczne dzieło *Salmona*: *Lessons introductory to the modern higher Algebra, by George Salmon, second edition. Dublin, Hodges, Smith et C<sup>o</sup>, 1866*, od dawna już tak w Anglii jak we Francji do wykładu wyznaczników powszechnie przyjęte, a obecnie z oryginalnego tekstu angielskiego bez żadnych zmian i dodatków, na język polski w całej obszerności najwierniej przez nas przełożone zostało w mniemaniu, że na jakiś czas przynajmniej korzystnie posłużyć zdoła do zastąpienia dotkliwego nieraz w naszej literaturze niedostatku. Teorye zaś użyte przez *P. Salmona* do wykładu wyznaczników, stale się opierały albo na jego własnych odkryciach, albo też na odkryciach zawartych w źródłach autentycznych wielu innych obecnie żyjących pierwszorzędných matematyków. Pierwsze, nietknięte w całości przechowaliśmy; do drugich zaś pozwoliliśmy sobie wprowadzić lekkie zmiany i niektóre proste ulepszenia, czerpiąc do tego potrzebne nam wiadomości z tychże samych co autor źródeł autentycznych, z stałą uwagą i dążeniem, aby te zmiany były zawsze zgodne z główną myślą przyjętego przez nas wykładu, t. j. z zadaniem skreślenia obszernego, systematycznego i przystępnego dla uczących się wykładu wyznaczników *P. Salmona*. Nieraz też



uważaliśmy za rzecz dla początkujących potrzebną dopełnić lub całkiem rozwinąć rachunki bądź przerwane, bądź w wielu zastosowaniach, zaledwie tylko wskazane. Te lekkie zmiany i proste przez nas do wykładu wprowadzone ulepszenia, posłużą nam przynajmniej za przekonywający dowód, żeśmy nie tyle nad poprawnem tłumaczeniem klassycznego dzieła, zawsze i usilnie pracowali, ile nad porządnem wyjaśnieniem głównej myśli znakomitego autora. To jest jedyna naszej pracy zaleta.

Słabą i ujemną naszej pracy stroną jest niewątpliwie terminologia przez nas użyta przy obszernym i systematycznym wykładzie ważnej teorii wyznaczników. W każdej ściślej nauce, do wysłowienia nowych pojęć, potrzeba koniecznie nowych technicznych wyrazów. Nie przeczymy, iż niektóre podane przez nas nazwiska są niewłaściwe, z duchem naszego języka niezgodne, a nawet być może zupełnie ułomne; ale te nazwiska są zarazem tak ściśle przez nas określone, iż jakkolwiek nadalibyśmy im nazwę, to bynajmniej w niczem nikomu nie przeszkodzi do jasnego zrozumienia obszernego i systematycznego wykładu wyznaczników P. *Salmona*. Wreszcie, dyskusyi nie unikamy. Przeciwnie prosimy uniżenie naszych zasłużonych w kraju erudyków o udzielenie nam w tym ważnym przedmiocie ich światłego zdania. Wzywamy zaś uprzejmie P. *Wł. Trzaskę*, dawnego naszego współpracownika, o zrobienie nad naszą świeżą pracą uniejętnie krytycznego w Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych rozbioru. Wszelkie ze strony szanownego recenzenta zrobione nam postrzeżenia przyjmiemy z wdzięcznością.

Za udzielenie kilku światłych uwag dotyczących wykładu wyznaczników, szanownemu memu koledze w Towarzystwie Nauk Ścisłych P. *Folkierskiemu*, nieskończenie jestem obowiązany.

Lecz przedewszystkiem winienem otwarcie oświadczyć, że tak w przekładzie wyznaczników *Salmona*, jak i w utworzeniu tomu poprzedniego, był mym gorliwym współpracownikiem od tylu lat zacny mój przyjaciel i kolega w Towarzystwie Nauk Ścisłych, ś. p. *Seweryn Elzanowski*. Wszystko co jest pięknie i porządnie w dwóch pierwszych tomach wykładu zupełnego mej Algebry prawdziwie wykończonem, to usilnym staraniom ś. p. Elzanowskiego zawdzięczam.

Do historii rozwoju teorii wyznaczników należy wreszcie rehabilitacya niektórych prac matematycznych *Hoëne Wrońskiego*, lubo późno, bo aż w kilkanaście lat po jego śmierci dokonana. Lat kilka temu, uczony *Terquem* we Francyi, a świeżo znakomity *Cayley* w Anglii, zrehabilitowali zaszczytnie w oczach potomności niektóre matematyczne prace naszego współziomka. Dwie więc piękne i tak żywo publiczność polską interesujące noty, starannie przez swych znakomych twórców w ich oryginalnych tekstach wykończone, a najwierniej i bez żadnych zmian w znakowaniu i w formie przez nas na język polski przełożone, na końcu tego tomu, dla wiadomości naszych czytelników przedstawiamy.

Na zakończenie byłem tu zamieścić słowa méj osobistej serdecznej wdzięczności i publicznego uznania dla czeigodnego wydawcy tego dzieła a naszego Przewodniczącego w Towarzystwie Nauk ścisłych; lecz na wyraźne jego żądanie, widzę się zmuszonym cały ten ustęp z wielkim mym żalem opuścić.

Paryż, dnia 17 maja 1874 r.

ADOLF SĄGAJŁO.



# WYKŁAD ALGEBRY

## SPIS RZECZY.

TOMU DRUGIEGO.

	Strona.
PRZEDMOWA .....	v
ROZDZIAŁ I. — Wyznaczniki. — Wiadomości wstępne.....	1
ROZDZIAŁ II. — Uproszczenie i rachunek wyznaczników .....	13
ROZDZIAŁ III. — Mnożenie wyznaczników. ....	28
ROZDZIAŁ IV. — Wyznaczniki odwrotne i mniejsze. ....	41
ROZDZIAŁ V. — Funkcye symetryczne.....	47
ROZDZIAŁ VI. — Wyznaczniki zwane wypadkowymi ( <i>Resultants</i> ). ..	61
ROZDZIAŁ VII. — Wyrażenie rugowników pod kształtem wyznaczników.....	83
ROZDZIAŁ VIII. — Oznaczenie pierwiastków spółnych .....	100
ROZDZIAŁ IX. — Dyskryminanty ( <i>Discriminants</i> ). ....	112
ROZDZIAŁ X. — Przekształcenia linijne. ....	127
ROZDZIAŁ XI. — Tworzenie się niezmienników i spółzmienników. ..	149
ROZDZIAŁ XII. — Przedstawienie symboliczne niezmienników i spółzmienników.....	171
ROZDZIAŁ XIII. — Kształty kanoniczne.....	205
ROZDZIAŁ XIV. — Układy czyli systemata kształtów.....	226
ROZDZIAŁ XV. — Zastosowania do kształtów podwójnych.....	243
ROZDZIAŁ XVI. — O rządzie restrykcyjnych układów zrównań... ..	315
ROZDZIAŁ XVII. — Zastosowania symbolicznych metod.....	352
NOTY: — NOTA PIERWSZA. ....	377
NOTA DRUGA .....	389

1875

1. Introduction ..... 1

2. The first part of the year ..... 2

3. The second part of the year ..... 3

4. The third part of the year ..... 4

5. The fourth part of the year ..... 5

6. The fifth part of the year ..... 6

7. The sixth part of the year ..... 7

8. The seventh part of the year ..... 8

9. The eighth part of the year ..... 9

10. The ninth part of the year ..... 10

11. The tenth part of the year ..... 11

12. The eleventh part of the year ..... 12

13. The twelfth part of the year ..... 13

14. The thirteenth part of the year ..... 14

15. The fourteenth part of the year ..... 15

16. The fifteenth part of the year ..... 16

17. The sixteenth part of the year ..... 17

18. The seventeenth part of the year ..... 18

19. The eighteenth part of the year ..... 19

20. The nineteenth part of the year ..... 20

21. The twentieth part of the year ..... 21

22. The twenty-first part of the year ..... 22

23. The twenty-second part of the year ..... 23

24. The twenty-third part of the year ..... 24

25. The twenty-fourth part of the year ..... 25

26. The twenty-fifth part of the year ..... 26

27. The twenty-sixth part of the year ..... 27

28. The twenty-seventh part of the year ..... 28

29. The twenty-eighth part of the year ..... 29

30. The twenty-ninth part of the year ..... 30

31. The thirtieth part of the year ..... 31

32. The thirty-first part of the year ..... 32

33. The thirty-second part of the year ..... 33

34. The thirty-third part of the year ..... 34

35. The thirty-fourth part of the year ..... 35

36. The thirty-fifth part of the year ..... 36

37. The thirty-sixth part of the year ..... 37

38. The thirty-seventh part of the year ..... 38

39. The thirty-eighth part of the year ..... 39

40. The thirty-ninth part of the year ..... 40

41. The fortieth part of the year ..... 41

42. The forty-first part of the year ..... 42

43. The forty-second part of the year ..... 43

44. The forty-third part of the year ..... 44

45. The forty-fourth part of the year ..... 45

46. The forty-fifth part of the year ..... 46

47. The forty-sixth part of the year ..... 47

48. The forty-seventh part of the year ..... 48

49. The forty-eighth part of the year ..... 49

50. The forty-ninth part of the year ..... 50

51. The fiftieth part of the year ..... 51

# WYKŁAD ALGEBRY

---

## CZEŚĆ DRUGA.

### ALGEBRA WYŻSZA

#### TEORYA WYZNACZNIKÓW I ICH PRZEDNIEJSZE ZASTOSOWANIA.

---

#### ROZDZIAŁ PIĘRWSZY.

##### WYZNACZNIKI. — WIADOMOŚCI WSTĘPNE.

---

1. Jeżeli mamy  $n$  równań jednorodnych pierwszego stopnia pomiędzy  $n$  zmiennymi, to możemy wyrugować zmienne i otrzymać na wypadek wyrażenie zawierające same tylko współczynniki. Otrzymany wypadek nazywa się właśnie *wyznacznikiem* tych równań. Podamy później prawidła na utworzenie tych wyznaczników, i udowodnimy niektóre ich przedniejsze własności; lecz teoria ogólna zdaje nam się, będzie lepiej objaśnioną przytoczeniem naprzód kilku przykładów zastosowań do przypadków najprostszyc.

Pocznijmy więc od dwóch równań między dwiema zmiennymi :

$$a_1x + b_1y = 0, \quad a_2x + b_2y = 0.$$

Wyrugujemy zmienne dodając do pierwszego równania pomnożonego przez  $b_2$  drugie pomnożone przez  $-b_1$ ; otrzymuje się  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ , równanie którego pierwszym członkiem jest wyznacznik szukany. Znakowanie zwykle używane dla oznaczenia tego wyznacznika jest

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

lecz piszemy często, dla skrócenia,  $(a_1 \ b_2)$ , zostawiając czytelnikowi przywrócenie odjemnego wyrazu; widoczną jest rzeczą że przy tém znakowaniu,  $(a_1 \ b_2) = -(a_2 \ b_1)$  (\*). Spółczynniki  $a_1, b_1, \dots$ , które wchodzi do wyrażenia jakiegokolwiek wyznacznika, są *elementami* tego wyznacznika; wieloczyny  $a_1 \ b_2, \dots$  stanowią jego różne wyrazy.

2. Można rozpoznać bezpośrednio że otrzymalibyśmy tenże sam wypadek rugując zmienne między równaniami

$$a_1x + a_2y = 0, \quad b_1x + b_2y = 0;$$

(\*) Możliwoby wreszcie tę równość tym sposobem wyprowadzić: Niech będzie

$$a_1b_2 - a_2b_1 = p;$$

zastępując  $a$  przez  $b$  i  $b$  przez  $a$ , otrzymamy

$$b_1a_2 - b_2a_1 = -p.$$

Otóż, wedle skróconego znakowania, mamy

$$p = (a_1b_2),$$

$$-p = (a_2b_1);$$

a tém samém,  $p = -(a_2b_1)$ ; albo,  $(a_1b_2) = -(a_2b_1)$ ,



innemi słowy,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix};$$

to jest że wartość wyznacznika nie zmienia się pisząc pionowo linie poziome, i *odwrotnie*.

3. Jeżeli mamy dwa równania jednorodne między trzema zmiennymi,

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0, \quad b_1x + b_2y + b_3z = 0,$$

to równania te wystarczą do oznaczenia stosunków  $x$ ,  $y$  i  $z$ ; tak więc, rugując na przemian  $y$  i  $x$ , znajdziemy  $x$  i  $y$  w funkcji  $z$ , co się da wyrazić

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = (a_2b_3 - a_3b_2)z, \quad (a_1b_2 - a_2b_1)y = (a_3b_1 - a_1b_3)z;$$

albo, opuszczając dla skrócenia, ostatnie wyrazy współczynników trzech zmiennych, te same dwa równania będzie można napisać

$$(a_1b_2)x = (a_2b_3)z, \quad (a_1b_2)y = (a_3b_1)z;$$

z ką d :

$$\frac{x}{z} = \frac{a_2b_3}{a_1b_2}, \quad \frac{y}{z} = \frac{a_3b_1}{a_1b_2};$$

innemi słowy  $x$ ,  $y$ ,  $z$  są odpowiednio proporcjonalnemi do  $(a_2b_3)$ ,  $(a_3b_1)$ ,  $(a_1b_2)$ ; podstawiając te wartości w równania pierwotne, mamy to samości :

$$a_1(a_2b_3) + a_2(a_3b_1) + a_3(a_1b_2) = 0,$$

$$b_1(a_2b_3) + b_2(a_3b_1) + b_3(a_1b_2) = 0;$$



związki te sprawdzają się bezpośrednio zastępując wyznaczniki przez ich wyrażenia rozwinięte, na przykład

$$a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$$

Znakowanie

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

w którym liczba kolumn pionowych przewyższa liczbę linii poziomych, jest używane dla oznaczenia trzech wyznaczników które się otrzymuje znosząc kolejno każdą kolumnę, to jest trzech wyznaczników świeżo przez nas zauważanych  $(a_2b_3)$ ,  $(a_3b_1)$ ,  $(a_1b_2)$ .

4. Przejdźmy teraz do układu trzech równań :

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0;$$

pomnożmy pierwsze przez  $(a_2b_3)$ , drugie przez  $(a_3b_1)$ , trzecie przez  $(a_1b_2)$ , i zrobmy sumę; współczynniki  $x$  i  $y$  zniszczą się na mocy tożsamości nr 3, i wyznacznik szukany jest

$$c_1(a_2b_3) + c_2(a_3b_1) + c_3(a_1b_2),$$

albo, rozwijając,

$$c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 + c_2a_3b_1 - c_2a_1b_3 + c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1;$$

można także napisać go pod jednym lub drugim z dwóch kształtów :

$$a_1(b_3c_3) + a_2(b_3c_1) + a_3(b_1c_2), \quad b_1(c_2a_3) + b_2(c_3a_1) + b_3(c_1a_2).$$

Ten wyznacznik jest przedstawiony za pomocą znakowania

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

oznaczać go będziemy często, dla skrócenia, przez  $(a_1b_2c_3)$ .

Pożyteczną jest rzeczą zauważyć że

$$(a_2b_3c_1) = (a_1b_2c_3), \quad \text{lecz} \quad (a_1b_3c_2) = - (a_1b_2c_3).$$

W rzeczy samej, podług analogii znakowania, mamy,

$$(a_2b_3c_1) = a_2(b_3c_1) + a_3(b_1c_2) + a_1(b_2c_3),$$

co się stosuje do  $(a_1b_2c_3)$ ; gdy tym czasem

$$(a_1b_3c_2) = a_1(b_3c_2) + a_3(b_2c_1) + a_2(b_1c_3),$$

co się stosuje do  $-(a_1b_2c_3)$ .

5. Otrzymalibyśmy tenże sam wypadek wykonywając rugowanie między trzema zrównaniami :

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0,$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = 0,$$

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0,$$

gdyż, jeżeli postąpimy jak poprzednio, mnożąc pierwsze przez  $(b_2c_3)$ , drugie przez  $(c_2a_3)$ , trzecie przez  $(a_2b_3)$  i dodając, spółczynniki  $y$  i  $z$  zniszczą się i otrzymamy wyznacznik pod kształtem

$$a_1(b_2c_3) + b_1(c_2a_3) + c_1(a_2b_3),$$

który, rozwinięty, wyda tak samo  $(a_1 b_2 c_3)$ ; zkad

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

to jest że wyznacznik nie zmienia się pisząc pionowo linie poziome, i odwrotnie : własność która zostanie dowiedzioną dla każdego wyznacznika.

6. Oznaczmy przez

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

układ wyznaczników które się otrzymuje, opuszczając kolejno każdą z kolumn : te cztery wyznaczniki są połączone z sobą przez związki

$$a_1(a_2 b_3 c_4) - a_2(a_3 b_4 c_1) + a_3(a_4 b_1 c_2) - a_4(a_1 b_2 c_3) = 0,$$

$$b_1(a_2 b_3 c_4) - b_2(a_3 b_4 c_1) + b_3(a_4 b_1 c_2) - b_4(a_1 b_2 c_3) = 0,$$

$$c_1(a_2 b_3 c_4) - c_2(a_3 b_4 c_1) + c_3(a_4 b_1 c_2) - c_4(a_1 b_2 c_3) = 0.$$

Te związki mogą być sprawdzone rozwinięciem wyznaczników, albo też udowodnione za pomocą sposobu odpowiedniego temu który został wskazany w n<sup>o</sup> 3. Weźmy trzy równania

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 v = 0,$$

$$b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 v = 0,$$

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 v = 0;$$

możemy, jak w nr<sup>o</sup> 5, wyrugować  $y$  i  $z$  mnożąc równania przez  $(b_2c_3)$ ,  $(c_2a_3)$ ,  $(a_2b_3)$  i dodając, co daje]

$$(a_1b_2c_3)x + (a_4b_2c_3)v = 0;$$

tak samo, mnożąc przez  $(b_3c_1)$ ,  $(c_3a_1)$ ,  $(a_3b_1)$ , przyjdzie

$$(a_2b_3c_1)y + (a_4b_3c_1)v = 0,$$

i tak samo jeszcze

$$(a_3b_1c_2)z + (a_4b_1c_2)v = 0;$$

odnosząc się zaś do uwag zrobionych nad znakami w nr<sup>o</sup> 4, te równania na jedno wychodzą co

$$(a_1b_2c_3)x = - (a_2b_3c_4)v,$$

$$(a_1b_2c_3)y = (a_3b_4c_1)v,$$

$$(a_1b_2c_3)z = - (a_4b_1c_2)v,$$

zkaż : 
$$\frac{x}{v} = \frac{(a_2b_3c_4)}{-(a_1b_2c_3)}, \quad \frac{y}{v} = \frac{-(a_3b_4c_1)}{-(a_1b_2c_3)}, \quad \frac{z}{v} = \frac{(a_4b_1c_2)}{-(a_1b_2c_3)},$$

to jest że  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i  $v$  są odpowiednio proporcjonalnymi do  $(a_2b_3c_4)$ ,  $-(a_3b_4c_1)$ ,  $(a_4b_1c_2)$ ,  $-(a_1b_2c_3)$ , a podstawiając te wartości w równania pierwotne, otrzymuje się tożsamości powyższe.

7. Jeżeli zechcemy teraz wykonać rugowanie między czterema równaniami

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1v =$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2v = 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3v = 0,$$

$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4v = 0,$$



to dosyć będzie dodać je do siebie mnożąc pierwsze przez  $(a_2b_3c_4)$ , drugie przez  $-(a_3b_4c_1)$ , trzecie przez  $(a_1b_1c_2)$ , czwarte przez  $-(a_1b_2c_3)$ ; współczynniki  $x, y$  i  $z$  staną się zerami, i otrzymamy, na oznaczenie wyznacznika,

$$d_1(a_2b_3c_4) - d_2(a_3b_4c_1) + d_3(a_1b_1c_2) - d_4(a_1b_2c_3),$$

albo, rozwijając,

$$\begin{aligned} & a_1b_2c_3d_4 - a_1b_3c_2d_4 + a_2b_3c_1d_4 - a_2b_1c_3d_4 \\ & + a_3b_1c_2d_4 - a_3b_2c_1d_4 + a_1b_1c_2d_3 - a_1b_2c_1d_3 \\ & + a_1b_2c_1d_3 - a_1b_1c_2d_3 + a_2b_1c_4d_3 - a_2b_1c_1d_3 \\ & + a_2b_4c_1d_2 - a_3b_1c_4d_2 + a_1b_1c_3d_2 - a_1b_3c_1d_2 \\ & + a_1b_3c_4d_2 - a_1b_4c_3d_2 + a_2b_4c_3d_1 - a_2b_3c_4d_1 \\ & + a_4b_3c_2d_1 - a_4b_2c_3d_1 + a_3b_2c_4d_1 - a_3b_1c_2d_1. \end{aligned}$$

8. Można bez żadnej trudności rozciągnąć do liczby jakiegokolwiek zrównań, sposób któregośmy dopiero użyli. Czytelnik zauważy, że wyrażenie ogólne jakiegokolwiek wyznacznika jest  $\Sigma \pm a_1b_2c_3d_4\dots$ , w którym każdy wieloczyn powinien zamykać wszystkie litery i wszystkie wskaźniki, bez powtórzenia ani opuszczenia: wyznacznik zawiera w sobie wszystkie wieloczyny tej samej natury jakie jest tylko podobna utworzyć. Co do znaku którym każdy wyraz jest oznaczony, prawidło jest następujące. Damy znak  $+$  dla wyrazu  $a_1b_2c_3d_4\dots$ , który się otrzymuje czytając wyznacznik poczynający się u kąta wyższego lewego (po lewej stronie położonego) a kończący na niższym prawym (po prawej stronie położonym), i, to przypuściwszy, znak każdego wieloczynu będzie  $+$  albo  $-$ , według tego jak pochodzi od tego pierwszego wyrazu przez poczynienie w nim parzystej lub nieparzystej liczby przemian wskaźników. Tak więc, w ostatnim przykładzie, drugi wyraz  $a_1b_3c_2d_4$  nie różni się od pierwszego



jak tylko samą przemianą wskaźników  $b$  i  $c$ : jest przeto z nim znaku przeciwnego. Trzeci wyraz  $a_2b_3c_1d_4$  różni się od drugiego samą tylko przemianą wskaźników  $a$  i  $c$ : jest temu samém z nim znaku przeciwnego, lecz ma on tenże sam znak jak pierwszy wyraz, gdyż może być uważany jako pochodzący przez wykonanie podwójnej przemiany na wskaźnikach.

PRZYKŁAD. — *Jaki jest, w wyznaczniku  $(a_1b_2c_3d_4e_5)$ , znak wyrazu  $(a_3b_5c_2d_1e_4)$ ?*

Zamieniając, w pierwszym wyrazie, wskaźniki  $a$  i  $c$ , otrzymujemy  $a_3b_2c_1d_4e_5$ , wieloczyn którego pierwszy element jest tenże sam co element wyrazu danego; zamieniając potem wskaźniki  $b$  i  $e$ , mamy wieloczyn  $a_3b_5c_1d_4e_2$ , który ma dwa elementa wspólne z wyrazem danym; potem zamieniając  $c$  i  $e$ , przyjdzie  $a_3b_5c_2d_4e_1$ ; i nakoniec, zamieniając  $d$  i  $e$ , mamy wyraz dany  $a_3b_5c_2d_1e_4$ . Więc, ponieważ przeszedł on przez liczbę parzystą (4) przemian, znak wyrazu jest  $+$ . W rzeczy samej, szereg wyrazów z ich znakami jest :

$$a_1b_2c_3d_4e_5 - a_3b_2c_1d_4e_5 + a_3b_5c_1d_4e_2 - a_3b_5c_2d_4e_1 + a_3b_5c_2d_1e_4 (*)$$

9. Przemiana kołowa wskaźników zmienia znak kiedy liczba wyrazów wieloczynu jest parzystą: nie zmienia znaku kiedy liczba wyrazów jest nieparzystą. I tak  $a_2b_1$ , wywodząc się z  $a_1b_2$  przez jedyną przemianę wskaźników, ma znak z nim przeciwny; lecz  $a_2b_3c_1$  ma tenże sam znak co  $a_1b_2c_3$  z którego pochodzi przez podwójną przemianę. Gdyż, zmieniając; wskaź-

(\*) Porównywając wyrazy  $a_1b_2c_3d_4e_5$ ,  $a_3b_5c_2d_1e_4$ , widzimy że wskaźnik 1, który się przedstawił pierwszy w pierwszym wyrazie, znajduje się w drugim poprzedzony trzema elementami; że wskaźnik 2 jest poprzedzony dwoma elementami i wskaźnik 4 jednym elementem, które to elementy przychodziły potem w wyrazie pierwotnym. Liczba całkowita przedstawień wykonanych jest więc sześć. Prawidło na znaki dane jest niekiedy pod tym kształtem: znak każdego wyrazu jest  $+$  lub  $-$  według tego jak liczba całkowita przedstawień wykonanych względem porządku wskaźników pierwotnego wyrazu jest parzystą lub nieparzystą.

niki  $a$  i  $b$ ,  $a_1b_2c_3$  staje się  $a_2b_1c_3$ , który zmieniając wskaźniki  $b$  i  $c$ , staje się  $a_2b_3c_1$ . Podobnie  $a_2b_3c_1d_4$  ma znak przeciwny znakowi pierwotnego wyrazu  $a_1b_2c_3d_4$ , z którego pochodzi przez trzy przemiany, to jest  $a_2b_1c_3d_4$ ,  $a_2b_3c_1d_4$ ,  $a_2b_3c_1d_4$ .

10. Możemy teraz podstawić w miejsce naszej pierwszej definicji wyznacznika, nową definicyą, która stanie się podstawą teoryj następujących. W rzeczy samej, ponieważ wyznacznik jest po prostu funkcją elementów  $a, b, c$  i nie zawiera w sobie zmierzających  $x, y, z$ , jest oczywiście rzeczą właściwszą podać definicyą nie robiącą wzmianki o zrównaniach między temi ilościami  $x, y, z$  (\*).

Weźmy więc  $n^2$  ilości urządzonych w kwadrat mający  $n$  kolumn pionowych i  $n$  linii poziomych; wyznacznikiem tych ilości jest summa wszystkich wieloczynów możebnych (oznaczonych znakami odpowiednemi, jak to już wyłożyliśmy w nrze 8) jakie można utworzyć za pomocą  $n$  elementów biorąc z nich tylko jeden w każdej kolumnie (pionowej) i w każdej linii (poziomej): ten wyznacznik jest nazwany  $n^{\text{tego}}$  rzędu. Dwa elementa są *sprzężone* kiedy każdy z nich zajmuje, w liniach poziomych, też same położenie co drugi w kolumnach pionowych. Kiedy elementa sprzężone są sobie równe, wyznacznik jest *symetryczny*. Przykład:

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}.$$

(\*) Moglibyśmy byli wyjść wprost z tej definicji wyznacznika, a twierdzenia poprzedzające nie są potrzebnemi dla rozwinięcia umiejętnego teoryi. Mniemaliśmy jednak że te objaśnienia zrobiły teoryą ogólną łatwiejszą do zrozumienia, i że ważność badania wyznaczników dała się uczuć więcej, skoro zostało okazaniem że wszelkie rugowanie zmiennych pomiędzy układem zrównań pierwszego stopnia, i każde rozwiązanie podobnego układu, daje początek wyznacznikom: układy zrównań pierwszego stopnia dają się napotykać stale we wszystkich gałęziach Matematyki czystej i zastosowanej.

11. Przy wykładzie pierwszych Rozdziałów klassycznej *Teorii Wyznaczników* P. SALMONA, pisać będziemy, tak jak to już zrobiliśmy w przykładach poprzedzających, wszystkie elementa téjże samej linii poziomej z tą samą literą, a wszystkie elementa téjże samej kolumny pionowej z tymże samym wskaźnikiem. Lecz znakowanie najwięcej użyte zależy na przydaniu do każdego elementu podwójnego wskaźnika, pierwszy wskaźnik oznacza rząd poziomy a drugi kolumnę pionową do której on należy. Wyznacznik trzeciego rzędu napisze się tym sposobem :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix},$$

albo jeszcze

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3};$$

wskaźniki, w téj summie, powinny być przemienione wszelkimi sposobami możebnymi. Modyfikuje się niekiedy znakowanie poprzedzające opuszczając literę  $a$ , i wyznacznik pisze się wtedy

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{vmatrix}.$$

P. SYLWESTER przedstawił jeszcze inne znakowanie (*umbral notation, znakowanie cieniowe Sylwestra*). Niech będzie, na przykład, wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a\alpha & b\alpha & c\alpha & d\alpha \\ a\epsilon & b\epsilon & c\epsilon & d\epsilon \\ a\gamma & b\gamma & c\gamma & d\gamma \\ a\delta & b\delta & c\delta & d\delta \end{vmatrix},$$



którego elementami są  $a\alpha, b\alpha, \dots$ ;  $a, b, c, \dots$ , nie są ilościami, lecz w niejaki sposób cieniami albo pozorami ilości, to jest że litery nie mają znaczenia same przez się a przyjmują je tylko przez ich połączenia z połączeniami innego szeregu  $\alpha, \epsilon, \gamma, \dots$ ; na przykład jeżeli  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$  przedstawiają wskaźniki 1, 2, 3, 4, elementa, podług znakowania jakiegoś przyjęli, zostaną otrzymane łącząc jedną z liter z jednym ze wskaźników 1, 2, 3, 4. P. SYLWESTER pisze wyznaczniki pod formą więcej skupioną (skoncentrowaną):

$$\begin{array}{cccc} a, & b, & c, & d, \\ \alpha, & \epsilon, & \gamma, & \delta, \end{array}$$

która wskazuje sumę wszystkich wieloczynów  $a\alpha.b\epsilon.c\gamma.d\delta$  jakie można otrzymać przemieniając wyrazy drugiej linii wszelkimi sposobami możebnymi, i zmieniając znaki każdej przemiany według pravidła zwyczajnego.



## ROZDZIAŁ II.

### UPROSZCZENIE I RACHUNEK WYZNACZNIKÓW.

12. Poznaliśmy, w pierwszym Rozdziale, prawo tworzenia się wyznaczników i wskazaliśmy, na przykładach szczególnych, niektóre ich własności. Dowiedziemy, w obecnym Rozdziale, sposobem ogólnym tych własności i niektórych innych jeszcze, bardzo często używanych dla uproszczenia i rachunku wyznaczników.

Wartość jakiegokolwiek wyznacznika nie zmienia się pisząc poziomo kolumny pionowe i *odwrotnie* (2,5). To wpływa bezpośrednio z prawa tworzenia się (10), które jest doskonale symetrycznym względem kolumn pionowych i linii poziomych. Jedną z głównych korzyści używania wskaźników podwójnych do znakowania, jest okazanie jasno tej symetrii.

13. Przez przemianę dwóch linii poziomych albo dwóch kolumn pionowych, wyznacznik zmienia swój znak.

Gdyż skutkiem tej zmiany jest oczywiście jakakolwiek prosta przemiana dwóch liter albo dwóch wskaźników, która według prawa tworzenia się, daje miejsce zmianie znaku.

14. Kiedy dwie linie albo dwie kolumny stają się jednakimi, wyznacznik sprowadza się do zera.

W rzeczy samej, przemiana dwóch linii, pociąga za sobą (13) zmianę znaku; lecz przemiana dwóch linii tosamych nie może zmodyfikować wcale wartości wyznacznika: ta wartość pozo-



staje więc tąż samą mimo zmianę znaku, a więc jest równą zeru.

To twierdzenie wypływa jeszcze bezpośrednio z definicyi wyznacznika uważanego jako wypadek otrzymany z rugowania nieznanych pomiędzy  $n$  zrównaniami liniijnymi. Gdyż to rugowanie odbywa się rozwiązując  $n - 1$  zrównań względem zmiennych i podstawiając w  $n^{\text{te}}$  wartości tym sposobem znalezione. Lecz, jeżeli to ostatnie jest jednakiem z jednem innych, to musi stać się tak samo zerem kiedy się w nie podstawia wartości nieznanych.

15. Jeżeli wszystkie elementa jakiegokolwiek linii lub jakiegokolwiek kolumny są pomnożone przez tenże sam czynnik, wyznacznik jest pomnożony przez ten czynnik.

Ta własność wynika bezpośrednio ztąd, że każdy wyraz w rozwinięciu wyznacznika zamyka w sobie jako czynnik, jeden element należący do téjże saméj linii albo téjże saméj kolumny, i zamyka jeden tylko.

I tak, na przykład, ponieważ każdy wyraz wyznacznika

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

zawiera w sobie  $a_1$  albo  $a_2$  albo  $a_3$ , wyznacznik może się napisać pod kształtem  $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$  (gdzie  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$  nie zawierają w sobie żadnego elementu kolumny  $a$ ), a jeżeli  $a_1$ ,  $a_2$  i  $a_3$  są pomnożonemi przez tenże sam czynnik  $k$ , wyznacznik zostanie pomnożony przez ten czynnik.

WNIOSEK. — Jeżeli elementa jakiegokolwiek linii albo jakiegokolwiek kolumny różnią się samym tylko mnożnikiem stałym od elementów którejkolwiek innéj linii albo kolumny, wyznacznik



przywodzi się do zera. I tak

$$\begin{vmatrix} ka_2 & a_2 & a_3 \\ kb_2 & b_2 & b_3 \\ kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_2 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_2 & b_3 \\ c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (14).$$

16. Jeżeli w jakim wyznaczniku, znosi się pewną liczbę linii poziomych i takąż samą liczbę kolumn pionowych, to wyznacznik utworzony z pozostałych linii jest jakimkolwiek wyznacznikiem *mniejszym* wyznacznika danego.

Mniejsze otrzymane przez zniesienie jednej linii i jednej kolumny są nazwane pierwszego rzędu, otrzymane przez zniesienie dwóch linii i dwóch kolumn są nazwane drugiego rzędu, i tak dalej.

Zauważyliśmy, w ostatnim numerze, że jeżeli elementami jakiegokolwiek kolumny są  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , to wyznacznik może się napisać pod kształtem  $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + \dots$ , i jest rzeczą oczywistą że  $A_1$  jest wyznacznikiem mniejszym otrzymanym przez zniesienie linii i kolumny które zamykają w sobie  $a_1, \dots$ . W rzeczy samej, wszystkie wyrazy wyznacznika które zamykają w sobie  $a_1$  nie mogą zamykać innego elementu kolumny albo linii którego  $a_1$  jest częścią, i element  $a_1$  musi być pomnożonym przez wszystkie kombinacje możebne  $n - 1$  elementów wziętych w innych liniach i kolumnach, a zbiór tych wieloczynów tworzy właśnie wyznacznik  $A_1$  (8). Podobnie wyznacznik pierwotny może się także napisać  $a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \dots$ ;  $B_1$  jest więc wyznacznikiem mniejszym jaki się otrzymuje zmasując linią i kolumnę które zamykają w sobie  $b_1, \dots$ .

17. Jeżeli wszystkie elementa jednej linii lub jednej kolumny wyznacznika  $n^{\text{tego}}$  rzędu całkowicie zniszczą się wyjąwszy jednego, to rachunek tego wyznacznika sprowadza się do rachunku wyznacznika  $(n - 1)^{\text{tego}}$  rzędu. W rzeczy samej, jest rzeczą



widoczną że gdy  $a_2, a_3, \dots$  stają się zerami, wyznacznik  $a_1A_1 + a_2A_2 + \dots$  sprowadza się do jedyne go wyrazu  $a_1A_1$ , i  $A_1$  jest istotnie wyznacznikiem mającym jedną linię i jedną kolumnę mniej jak wyznacznik dany.

18. Jeżeli wszystkie elementa jednego rzędu lub jednej kolumny dają się rozłożyć na sumę dwóch innych, wyznacznik rozkłada się tak samo na sumę dwóch wyznaczników.

Ta własność wypływa z zasady z której zrobiono już użytek w nr<sup>zo</sup> 16. I tak, w przykładzie danym powyżej jeżeli napiszemy  $a_1 + \alpha_1, b_1 + \epsilon_1, c_1 + \gamma_1$ , zamiast  $a_1, b_1, c_1$ , wyznacznik stanie się

$$\begin{aligned} & (a_1 + \alpha_1)A_1 + (b_1 + \epsilon_1)B_1 + (c_1 + \gamma_1)C_1 \\ & = (a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) + (\alpha_1A_1 + \epsilon_1B_1 + \gamma_1C_1). \end{aligned}$$

Mamy więc

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + \epsilon_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + \gamma_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_2 & a_3 \\ \epsilon_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Podobnie, jeżeliby wszystkie elementa jakiegokolwiek kolumny były summami pewnej liczby innych wyrazów, wyznacznik rozłożyłby się na równą liczbę innych wyznaczników.

19. Jeżeliby, w przykładzie poprzedzającym, elementa drugiej kolumny były także summą dwóch innych (gdyby, na przykład, pisało się  $a_2 + \sigma_2, b_2 + \epsilon_2, c_2 + \gamma_2$  w miejsce  $a_2, b_2, c_2$ ), to każdy z wyznaczników drugiego członka ostatniego równania zamieniłby się sam przez się w sumę dwóch innych, a tém samém widzimy bez trudności że

$$(a_1 + \alpha_1, b_2 + \epsilon_2, c_3) = (a_1b_2c_3) + (a_1\epsilon_2c_3) + (\alpha_1b_2c_3) + (\alpha_1\epsilon_2c_3).$$



Jeśliby każdy z elementów pierwszej kolumny mógł się zamienić w summe  $m$  innych, i każdy z elementów drugiej w summe  $n$  innych, wyznacznik mógłby więc być rozłożonym na liczbę  $mn$  innych wyznaczników. Gdyż rozłożyłoby się go naprzód, jak w numerze poprzedzającym, na  $m$  innych, biorąc, zamiast pierwszej kolumny, każdą kolumnę wchodzącą do składu  $m$  kolumn częściowych : każdy z tych wyznaczników rozłożyłby się potem na  $n$  innych działając tak samo na drugiej kolumnie. I, ogólnie, jeżeli każdy element składa się z summy pewnej liczby wyrazów, w taki sposób aby każda kolumna mogła się zamienić w summe oznaczoną kolumn częściowych (pierwsza w  $m$  kolumn, druga w  $n$ , trzecia w  $p$ , i t. d.), to wyznacznik będzie równym summie wszystkich wyznaczników jakie można utworzyć biorąc, zamiast każdej kolumny, jedną z kolumn częściowych z których się ona składa;  $t$  liczba tych wyznaczników będzie równą wieloczynowi  $mnp$ ...

20. Jeżeli elementa jednej linii lub jednej kolumny są odpowiednio równymi summie elementów odpowiednich innych linii albo kolumn, pomnożonych odpowiednio przez czynniki stałe, to wyznacznik sprowadzi się do zera. Gdyż, w tym przypadku, może on być rozłożony na wyznaczniki częściowe które się zniszczą oddzielnie. I tak

$$\begin{vmatrix} ka_2 + la_3 & a_2 & a_3 \\ kb_2 + lb_3 & b_2 & b_3 \\ kc_2 + lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_2 & a_2 & a_3 \\ kb_2 & b_2 & b_3 \\ kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} la_3 & a_2 & a_3 \\ lb_3 & b_2 & b_3 \\ lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

lecz te dwa ostatnie wyznaczniki zniszczą się (nr 15, wn.).

21. Wyznacznik nie zmienia wartości gdy się dodaje do każdego elementu jednej linii albo jednej kolumny, elementa innych linii lub kolumn pomnożonych odpowiednio przez czyn-

jaki stałe. I tak

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 + la_3 & a_2 & a_3 \\ b_1 + kb_2 + lb_3 & b_2 & b_3 \\ c_1 + kc_2 + lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 + la_3 & a_2 & a_3 \\ kb_2 + lb_3 & b_2 & b_3 \\ kc_2 + lc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

lecz ostatni wyznacznik sprowadza się do zera (nr 20) (\*). Przykłady następujące okażą w jaki sposób zasady któreśiny dopiero wyłożyli mogą posłużyć do uproszczenia rachunku wyznaczników.

PRZYKŁAD I. — Wyrachować wartość wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 & 4 \\ 18 & 28 & 33 & 8 \\ 30 & 40 & 54 & 13 \\ 24 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Drugi wyznacznik wyciąga się z pierwszego odciągając od pierwszej, drugiej i trzeciej kolumny, dwa razy, trzy razy i cztery razy, elementa odpowiednie ostatniej kolumny. Trzeci wyznacznik wyciąga się z drugiego odciągając tak samo sumę trzech pierwszych kolumn od ostatniej. Niekolwiek zatem razy natrafimy, jak teraz, na wyznacznik w którym wszyst-

(\*) Początkujący będą się starali baczyć pilnie, że gdy wyznacznik nie zmienia wartości przez podstawianie w pierwszej linii  $a_1 + ka_2 + la_3$  w miejsce  $a_1, \dots$ , to rzecz się dzieje inaczej kiedy się położy w miejsce  $a_2, \dots$ , toż same podstawienie w drugiej linii, albowiem mnoży się wtedy wyznacznik przez  $k$ , a kiedy się wykona to podstawienie w trzeciej, mnoży się go (to jest wyznacznik dany) przez  $l$ .

kie elementa jednej linii są sobie równe, możemy, przez odciąganie, wy-  
prowadzić z niego inny, w którym wszystkie elementa tejże samej linii  
zniszczą się wyjąwszy jednego, i przywieść tym sposobem rachunek do  
rachunku wyznacznika rzędu niższego (17). Tak więc, odciągając pier-  
wszą kolumnę od każdej z trzech innych, ostatni wyznacznik staje się

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -7 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$$

Trzeci wyznacznik tego szeregu wyprowadza się z poprzedzającego,  
odciągając od pierwszej kolumny podwójną ostatnią, i pozostanie nam  
tylko do obliczenia wyznacznik drugiego rzędu którego wartością szukaną  
jest  $-8 - 7 = -15$ .

PRZYKŁAD II. — *Wyrachować wyznacznik następujący*

$$\begin{vmatrix} 5 & -10 & 11 & 0 \\ -10 & -11 & 12 & 4 \\ 11 & 12 & -11 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 11 & 0 \\ -32 & -35 & 34 & 0 \\ 11 & 12 & -11 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ = -2 \begin{vmatrix} 5 & -10 & 11 \\ -32 & -35 & 34 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 32 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 27 & 9 & 0 \\ -39 & 17 & 0 \end{vmatrix} \\ = 90 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -39 & 17 \end{vmatrix} = 90(51 + 39) = 9100.$$

Pierwsze przekształcenie odbywa się [odciągając podwójną trzecią kolumnę od drugiej i dodając sumę drugiej i trzeciej do czwartej; odciągnąwszy wreszcie w drugiej linii *naprzód* pierwszą kolumnę od podwójnej trzeciej, *potem* potrójną czwartą od trzeciej, zakończymy, w danym przykładzie, pierwsze przekształcenie. Zauważmy potem że dwa wyrazy  $a_1 b_2 c_4 d_3$  i  $a_1 b_2 c_3 d_4$  są z sobą znaków przeciwnych, a  $c_4$  jest jedynym elementem czwartej kolumny który się nie niszczy, że więc wyznacznik sprowadza się do  $-c_4(a_1 b_2 d_3)$ . Dodajmy następnie do siebie, drugą i trzecią kolumnę, wyłączmy czynnik 5 spólny drugiej kolumnie i znak — spólny drugiej linii poziomej; odciągamy nakoniec, pierwszą linią od drugiej i ośm razy pierwszą od trzeciej; reszta rachunku jest oczywista.

## PRZYKŁAD III.

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -972.$$

## PRZYKŁAD IV.

$$\begin{vmatrix} 25 & -15 & 23 & -5 \\ -15 & -10 & 19 & 5 \\ 23 & 19 & -15 & 9 \\ -5 & 5 & 9 & -5 \end{vmatrix} = 194400.$$

PRZYKŁAD V. — *Mając dane n ilości  $\alpha, \epsilon, \gamma, \dots$ , znaleźć wartość wyznacznika*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \alpha & \epsilon & \gamma & \delta & \dots \\ \alpha^2 & \epsilon^2 & \gamma^2 & \delta^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{n-1} & \epsilon^{n-1} & \gamma^{n-1} & \delta^{n-1} & \dots \end{vmatrix}$$



Jest rzeczą oczywistą (14) że ten wyznacznik sprowadza się do zera gdy  $\alpha = \epsilon$ ; a zatem, przyjmuje on jako czynnik  $\alpha - \epsilon$ ; toż samo należy rozumieć o każdej innej różnicy między ilościami  $\alpha, \epsilon, \dots$ . Wyznacznik jest więc równy wieloczynowi

$$\pm (\alpha - \epsilon)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\epsilon - \gamma)(\epsilon - \delta)(\gamma - \delta)\dots$$

W rzeczy samej, jeżeli mu nie jest równy, to zawiera go w sobie jako czynnik; lecz nie może przypuszczać innych czynników zamykających  $\alpha, \epsilon, \dots$ , ponieważ zawiera już w sobie  $\alpha^{n-1}, \epsilon^{n-1}, \dots$  i że te ilości nie mogą być podniesione do potęg wyższej w wyznaczniku; porównywając współczynniki ilości  $\alpha^{n-1}$ , widzimy oprócz tego że wyznacznik nie może zamykać w sobie czynnika liczebnego. Ten przykład może być także traktowany w tenże co następujący sposób.

PRZYKŁAD VI. — Wyrachować wartość wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \epsilon & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \epsilon^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^4 & \epsilon^4 & \gamma^4 & \delta^4 \end{vmatrix}$$

Odciągając ostatnią kolumnę od każdej z trzech innych, wyznacznik stanie się podzielny przez  $(\alpha - \delta)(\epsilon - \delta)(\gamma - \delta)$  a iloraz będzie

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha + \delta & \epsilon + \delta & \gamma + \delta \\ \alpha^3 + \alpha^2\delta + \alpha\delta^2 + \delta^3 & \epsilon^3 + \epsilon^2\delta + \epsilon\delta^2 + \delta^3 & \gamma^3 + \gamma^2\delta + \gamma\delta^2 + \delta^3 \end{vmatrix}$$

Odciągając także ostatnią kolumnę od dwóch pierwszych, wyznacznik stanie się podzielny przez  $(\alpha - \gamma)(\epsilon - \gamma)$ , i znajdziemy bezpośrednio na jego wartość

$$(\alpha - \delta)(\epsilon - \delta)(\gamma - \delta)(\alpha - \gamma)(\epsilon - \gamma)(\alpha + \epsilon + \gamma + \delta).$$

PRZYKŁAD VII. — Rozwiązanie pewnego zagadnienia Geometrii

wymaga oznaczenia  $\lambda$  za pomocą zrównania

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ (a + \lambda)^3 & (b + \lambda)^3 & (c + \lambda)^3 \\ (2a + \lambda)^3 & (2b + \lambda)^3 & (2c + \lambda)^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Odciągnijmy pierwszą linią od drugiej i podzielmy przez  $\lambda$ ; odciągnijmy następnie ośm razy pierwszą linią od trzeciej i podzielmy przez  $\lambda$ ; potem odciągnijmy drugą linią od trzeciej i podzielmy przez 3, i na koniec odciągnijmy tę ostatnią od drugiej i podzielmy przez  $\lambda$ , wyznacznik stanie się

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ 2a + \lambda & 2b + \lambda & 2c + \lambda \\ 3a^3 + a\lambda & 3b^3 + b\lambda & 3c^3 + c\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Odciągnijmy teraz pierwszą kolumnę od drugiej i od trzeciej, potem drugą od trzeciej, i podzielmy przez  $b - a$ ,  $c - a$ ,  $c - b$ ; odciągnijmy od pierwszej kolumny drugą pomnożoną przez  $a$  i dodajmy trzecią pomnożoną przez  $ab$ ; na koniec odciągnijmy od drugiej kolumny trzecią pomnożoną przez  $a + b$ . Po wykonaniu powyższych wskazanych przekształceń przyjdzie

$$\begin{vmatrix} abc & -(ab + bc + ca) & a + b + c \\ \lambda & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

albo, uprościwszy

$$(a + b + c)\lambda^2 + 3(ab + bc + ca)\lambda + 6abc = 0.$$

#### PRZYKŁAD VIII.

$$\begin{vmatrix} (b + c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c + a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a + b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a + b + c)^2.$$

PRZYKŁAD IX.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{wst } \alpha & \text{wst } \epsilon & \text{wst } \gamma \\ \text{dos } \alpha & \text{dos } \epsilon & \text{dos } \gamma \end{vmatrix} = 4 \text{wst } \frac{1}{2} (\alpha - \epsilon) \text{wst } \frac{1}{2} (\epsilon - \gamma) \text{wst } \frac{1}{2} (\alpha - \gamma).$$

PRZYKŁAD X.

$$\begin{vmatrix} \text{dos } \frac{1}{2} (\alpha - \epsilon) & \text{dos } \frac{1}{2} (\epsilon - \gamma) & \text{dos } \frac{1}{2} (\gamma - \alpha) \\ \text{dos } \frac{1}{2} (\alpha + \epsilon) & \text{dos } \frac{1}{2} (\epsilon + \gamma) & \text{dos } \frac{1}{2} (\gamma + \alpha) \\ \text{wst } \frac{1}{2} (\alpha + \epsilon) & \text{wst } \frac{1}{2} (\epsilon + \gamma) & \text{wst } \frac{1}{2} (\gamma + \alpha) \end{vmatrix} \\ = 2 \text{wst } \frac{1}{2} (\alpha - \epsilon) \text{wst } \frac{1}{2} (\epsilon - \gamma) \text{wst } \frac{1}{2} (\alpha - \gamma).$$

PRZYKŁAD XI.

$$\begin{vmatrix} \text{wst } \alpha & \text{wst } \epsilon & \text{wst } \gamma \\ \text{dos } \alpha & \text{dos } \epsilon & \text{dos } \gamma \\ \text{wst } \alpha \text{ dos } \alpha & \text{wst } \epsilon \text{ dos } \epsilon & \text{wst } \gamma \text{ dos } \gamma \end{vmatrix} \\ = 2 \text{wst } \frac{1}{2} (\alpha - \epsilon) \text{wst } \frac{1}{2} (\epsilon - \gamma) \text{wst } \frac{1}{2} (\alpha - \gamma) \\ \times [\text{wst}(\alpha + \epsilon) + \text{wst}(\epsilon + \gamma) + \text{wst}(\gamma + \alpha)].$$

PRZYKŁAD XII. — Wiele z tych przykładów może się zastosować do obrachowania powierzchni trójkątów, przypominając sobie że podwójną powierzchnią trójkąta utworzonego przez trzy punkta mające za współrzędne  $x', y', \dots$ , jest

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \end{vmatrix} = x'y'' - x''y' + x'''y' - x'y''' + x''y''' - x'''y'';$$

podobnie trójkąt utworzony przez trzy proste mające za równania  $ax + by + c = 0, \dots$ , daje na wyrażenie swój podwójnej powierzchni kwadrat z wyznacznika

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2 \text{ podzielony przez } (ab' - a'b)(a'b'' - a''b')(a''b - ab'').$$

Tak samo powierzchnia trójkąta utworzonego przez środki krzywości w trzech punktach paraboli (wiedząc że, dla paraboli  $y^2 = 2px$ , i ze współrzędnymi środka krzywości są  $\frac{1}{2}p + 3x'$ ,  $-\frac{4y'^2}{p^2}$ ) sprowadza się ostatecznie do wyznaczenia wartości wyznacznika

$$\frac{6}{p^3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y'^2 & y''^2 & y'''^2 \\ y'^3 & y''^3 & y'''^3 \end{vmatrix} = \frac{6}{p^3} (y' - y'')(y'' - y''')(y''' - y') (y'y'' + y''y''' + y'''y').$$

Można obrachować także powierzchnią trójkąta utworzonego przez trzy normalne albo trzy inne linie mające związki znane z krzywą.

#### PRZYKŁAD XIII.

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = 2abc;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b & d \\ c & 0 & a & e \\ b & a & 0 & f \\ d & e & f & 0 \end{vmatrix} = a^2d^2 + b^2e^2 + c^2f^2 - 2abde - 2bcef - 2adcf.$$



PRZYKŁAD XIV. — *Dowieść równości*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(x + y + z)(y + z - x)(z + x - y)(x + y - z).$$

PRZYKŁAD XV. — *Wyrażenie*

$$\begin{vmatrix} a & \lambda & \lambda & \lambda & \dots \\ \lambda & b & \lambda & \lambda & \dots \\ \lambda & \lambda & c & \lambda & \dots \\ \lambda & \lambda & \lambda & d & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

w którym wszystkie elementa są równe, wyjąwszy elementów przekątnej, sprowadza się do  $\varphi(\lambda) - \lambda \frac{d\varphi}{d\lambda}$ ,  $\varphi(\lambda)$  jest wieloczynem  $(a-\lambda)(b-\lambda)\dots$

## ROZDZIAŁ III

### MNOŻENIE WYZNACZNIKÓW.

22. Wykażemy, w tym rozdziale, że wieloczyn dwóch wyznaczników może być położony pod kształtem jakiegokolwiek wyznacznika, mającego za elementa summy wieloczynów z elementów każdej linii jednego z dwóch wyznaczników przez elementa odpowiednich linii drugiego.

I tak, wieloczynem  $(a_1 b_2 c_3)$  przez  $(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)$  jest

$$\begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1 & a_1 \alpha_2 + b_1 \beta_2 + c_1 \gamma_2 & a_1 \alpha_3 + b_1 \beta_3 + c_1 \gamma_3 \\ a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1 & a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2 & a_2 \alpha_3 + b_2 \beta_3 + c_2 \gamma_3 \\ a_3 \alpha_1 + b_3 \beta_1 + c_3 \gamma_1 & a_3 \alpha_2 + b_3 \beta_2 + c_3 \gamma_2 & a_3 \alpha_3 + b_3 \beta_3 + c_3 \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Dowodzenia jakie mamy dla tego przypadku szczególnego zastosują się zupełnie do przypadku ogólnego. Ponieważ każdy element wyznacznika powyższego jest summą trzech wyrazów, wyznacznik może (19) się rozłożyć na summę dwudziestu siedmiu wyznaczników jakieby się otrzymało biorąc jedną kolumnę częściową w każdej z trzech kolumn powyższych. Nie potrzebujemy pisać tych dwudziestu siedmiu wyznaczników, dosyć jest wskazać dwa lub trzy pierwsze :

$$\begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 & a_1 \alpha_2 & a_1 \alpha_3 \\ a_2 \alpha_1 & a_2 \alpha_2 & a_2 \alpha_3 \\ a_3 \alpha_1 & a_3 \alpha_2 & a_3 \alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 & b_1 \beta_2 & c_1 \gamma_3 \\ a_2 \alpha_1 & b_2 \beta_2 & c_2 \gamma_3 \\ a_3 \alpha_1 & b_3 \beta_2 & c_3 \gamma_3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 & c_1 \gamma_2 & b_1 \beta_3 \\ a_2 \alpha_1 & c_2 \gamma_2 & b_2 \beta_3 \\ a_3 \alpha_1 & c_3 \gamma_2 & b_3 \beta_3 \end{vmatrix} + \dots$$

Należy zauważyć teraz że, we wszystkich, każda kolumna

ma jeden czynnik spólny który (15) może być wyłączony za nawias jako czynnik wyznacznika. Wyrazy dane powyżej mogą więc się napisać

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} + \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ & + \alpha_1 \gamma_2 \beta_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} + \dots; \end{aligned}$$

lecz pierwszy z tych wyznaczników sprowadza się do zera, gdyż ma dwie kolumny jednakie; drugi nie jest czem inném tylko wyznacznikiem  $(a_1 b_2 c_3)$ , a trzeci (13) jest  $-(a_1 b_3 c_2)$ . Tak samo, każdy inny wyznacznik częściowy mający dwie kolumny jednakie zniszczy się, i rozpozna się łatwo że wszystkie wyznaczniki nie znoszące się są równe wyznacznikowi  $(a_1 b_2 c_3)$ , gdy tymczasem czynniki mnożące je są wyrazami wyznacznika  $(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)$ .

Możnaby było, tymże samym sposobem, rozłożyć wyznacznik na szereg wyrazów równych wyznacznikowi  $(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3)$  pomnożonemu przez jeden z wyrazów  $(a_1 b_2 c_3)$ .

23. Z powodu ważności tego twierdzenia, damy inne dowodzenie, oparte na naszym pierwszym określeniu wyznacznika.

Wyznacznik jakisimy zauważyli w numerze poprzedzającym jest wypadkiem rugowania zmiennych między zrównaniami

$$\begin{aligned} & (a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1)x + (a_2 \alpha_2 + b_1 \beta_2 + c_1 \gamma_2)y \\ & \quad + (a_1 \alpha_3 + b_1 \beta_3 + c_1 \gamma_3)z = 0, \\ & (a_2 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + c_2 \gamma_1)x + (a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2)y \\ & \quad + (a_2 \alpha_3 + b_2 \beta_3 + c_2 \gamma_3)z = 0, \\ & (a_3 \alpha_1 + b_3 \beta_1 + c_3 \gamma_1)x + (a_3 \alpha_2 + b_3 \beta_2 + c_3 \gamma_2)y \\ & \quad + (a_3 \alpha_3 + b_3 \beta_3 + c_3 \gamma_3)z = 0. \end{aligned}$$

Zrobiwszy teraz

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = X,$$

$$\epsilon_1 x + \epsilon_2 y + \epsilon_3 z = Y,$$

$$\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = Z.$$

trzy równania poprzedzające mogą się napisać

$$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0,$$

$$a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = 0,$$

$$a_3 X + b_3 Y + c_3 Z = 0.$$

Rugując  $X, Y, Z$ , widzimy bezpośrednio że  $(a_1 b_2 c_3)$  powinien być jednym z czynników wypadku. Lecz można także znaleźć, dla  $x, y, z$ , jakikolwiek układ wartości zadosyć czyniący trzem równaniom danym, byleby tylko można było otrzymać jakikolwiek układ zadosyć czyniący równaniom  $X = 0, Y = 0, Z = 0$ . Więc wyznacznik  $(\alpha_1 \epsilon_2 \gamma_3) = 0$ , przedstawiający warunek konieczny ażeby te ostatnie równania stały się możliwemi, jest zarówno czynnikiem wypadku. A ponieważ widzimy bez trudności że stopień wypadku względem spółczynników jest ściśle tenże sam co stopień wieloczynu tych dwóch ilości, ten wypadek nie jest przeto czem inném tylko wieloczynem  $(a_1 b_2 c_3) (\alpha_1 \epsilon_2 \gamma_3)$ .

Wynika z tego co poprzedza że twierdzenie dotyczące mnożenia wyznaczników może się wyrazić pod formą następującą, jakiej nadal często użyjemy.

Kiedy jakikolwiek układ równań

$$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = 0,$$

$$a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = 0,$$

$$a_3 X + b_3 Y + c_3 Z = 0$$



est przekształcony za pomocą podstawień

$$X = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$

$$Y = \epsilon_1 x + \epsilon_2 y + \epsilon_3 z,$$

$$Z = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,$$

wyznacznik układu przekształconego jest równy  $(a_1 b_2 c_3)$ , to jest wyznacznikowi układu pierwotnego rozmnożonemu przez  $(\alpha_1 \epsilon_2 \gamma_3)$ , jaki nazwiemy *modułem przekształcenia*.

24. Twierdzenia numerów poprzedzających mogą być uogólnione w sposób następujący. Możemy mieć dwa szeregi elementów, w których liczba linii poziomych jest różną od liczby kolumn, na przykład :

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \epsilon & \gamma_1 \\ a_2 & \epsilon_2 & \gamma_2 \end{array} \right|,$$

i możemy z nich złożyć, jak w numerze poprzedzającym, wyznacznik

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 \alpha_1 + b_1 \epsilon_1 + c_1 \gamma_1 & a_2 \alpha_1 + b_2 \epsilon_1 + c_2 \gamma_1 \\ a_1 \alpha_2 + b_1 \epsilon_2 + c_1 \gamma_2 & a_2 \alpha_2 + b_2 \epsilon_2 + c_2 \gamma_2 \end{array} \right|,$$

którego zamierzamy sobie znaleźć wartość.

Przypuśćmy naprzód, jak w przykładzie powyższym, liczbę kolumn większą od liczby linii poziomych, tak że każdy element nowego wyznacznika jest sumą jakiegokolwiek liczby wyrazów przewyższającej liczbę tych linii. Postępując jak w n<sup>rze</sup> 22, wartość tego wyznacznika jest

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} a_1 \alpha_1 & a_2 \alpha_1 \\ a_1 \alpha_2 & a_2 \alpha_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_1 \alpha_1 & b_2 \epsilon_1 \\ a_1 \alpha_2 & b_2 \epsilon_2 \end{array} \right| + \dots \\ & = (a_1 b_2) (\alpha_1 \epsilon_2) + (a_1 c_2) (\alpha_1 \gamma_2) + (b_1 c_2) (\epsilon_1 \gamma_2), \end{aligned}$$

to jest że nowy wyznacznik jest summą wieloczynów wszystkich wyznaczników jakie można utworzyć z jednego szeregu elementów pomnożonych każdy przez wyznacznik odpowiedni utworzony z elementów drugiego szeregu.

25. Przypuśćmy teraz, powtóre, liczbę linii poziomych przewyższającą liczbę kolumn. I tak, za pomocą dwóch szeregów elementów

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{vmatrix},$$

utworzymy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\epsilon_1 & a_2\alpha_1 + b_2\epsilon_1 & a_3\alpha_1 + b_3\epsilon_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\epsilon_2 & a_2\alpha_2 + b_2\epsilon_2 & a_3\alpha_2 + b_3\epsilon_2 \\ a_1\alpha_3 + b_1\epsilon_3 & a_2\alpha_3 + b_2\epsilon_3 & a_3\alpha_3 + b_3\epsilon_3 \end{vmatrix}.$$

Rozkładając go podobnie na wyznaczniki częściowe, rozpoznamy że jest rzeczą niepodobną utworzyć z nich żadnego któryby nie miał dwóch kolumn jednakich. Wyznacznik sprowadza się więc jednako (identycznie) do zera. Można by jeszcze było o tém się przekonać bezpośrednio dodając do każdego szeregu jakąkolwiek kolumnę zer i mnożąc, co daje wyznacznik powyższy jako wieloczyn dwóch wyznaczników równych pojedynczo zeru.

26. Przypadek szczególny bardzo użyteczny n<sup>m</sup> 22 zależy na tém że kwadrat z któregokolwiek wyznacznika jest jakimkolwiek wyznacznikiem symetrycznym (10). I tak kwadrat z wy-

znacznika  $(a_1 b_2 c_3)$  jest

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & a_1^2 + b_2^2 + c_2^2 & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix}.$$

Wynika także z nr<sup>o</sup> 24 że summa kwadratów z wyznaczników

$$(a_1 b_2)^2 + (b_1 c_2)^2 + (c_1 a_2)^2$$

jest wyznacznikiem

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{vmatrix}.$$

PRZYKŁAD I. — Jeżeli oznaczymy przez  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  dostawy trzech kątów stanowiących kierunek dwóch linii w przestrzeni, a przez  $\theta$  kąt tych dwóch linii, wiadomo że mamy

$$\cos \theta = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2,$$

a tożsamość dowiedziona przez nas powyżej daje

$$\cos^2 \theta = (a_1 b_2)^2 + (b_1 c_2)^2 + (c_1 a_2)^2.$$

PRZYKŁAD II. — W teorii zrównań, jest pożytecznie wyrazić, pod kształtem wyznacznika, wieloczyn kwadratów z różnic pierwiastków. Wieloczyn z różnic  $n$  ilości był już położony pod kształtem wyznacznika, przykład V, nr<sup>o</sup> 21; jeżeli podniesiemy go do kwadratu, przyjdzie

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

$s_p$  oznacza sumę potęg  $p$  ilości  $\alpha, \epsilon, \dots$

PRZYKŁAD III. — N<sup>o</sup>r 24 dowodzi podobnież że

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \Sigma(\alpha - \epsilon)^2,$$

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \Sigma(\alpha - \epsilon)^2 (\epsilon - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2.$$

Utworzymy tym sposobem jakikolwiek szereg wyznaczników z których ostatni jest wieloczynem kwadratów z różnic  $\alpha, \epsilon, \dots$ ; wszystkie wyznaczniki podobne po za tym ostatnim zniszczą się identycznie (PP. Zajaczkowski, Skiba i inni piszą : *tożsamościowo*) (25). Ten szereg wyznaczników jest nader wielkiego znaczenia w teorii równań algebraicznych.

PRZYKŁAD IV. — Weźmy początek spólrzędnych w środku koła opisanego na trójkącie; niech będzie, R promieniem koła i M powierzchnią trójkąta, mamy

$$2MR = \begin{vmatrix} x' & y' & R \\ x'' & y'' & R \\ x''' & y''' & R \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad -2MR = \begin{vmatrix} x' & y' & -R \\ x'' & y'' & -R \\ x''' & y''' & -R \end{vmatrix}.$$

Mnożąc te wyznaczniki według pravidła powyższego, pierwszy wyraz

$$x'^2 + y'^2 - R^2$$

staje się równy zeru; drugi

$$x'x'' + y'y'' - R^2 = -\frac{1}{2} [(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2] = -\frac{1}{2} c^2,$$

c jest jakimkolwiek bokiem trójkąta. A zatem

$$-4M^2R^2 = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} a^2 b^2 c^2,$$



zkąd formuła znana

$$R = \frac{abc}{4M}$$

PRZYKŁAD V. — Można użyć tegoż samego sposobu dla znalezienia promienia sfery opisanéj na czworoscianie. Wychodząc z wyrażenia objętości czworoscianu

$$6V = \begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \\ x^{iv} & y^{iv} & z^{iv} & 1 \end{vmatrix},$$

znajdując się, jak powyżej że,  $a, d; b, e; c, f$  są parami krawędzi przeciwnych czworoscianu,

$$-36R^2V^2 = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & d^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & e^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & f^2 \\ d^2 & e^2 & f^2 & 0 \end{vmatrix},$$

zkąd, oznaczwszy  $ad + be + cf$  przez  $2S$ , wyciąga się, według wzoru podanego w przykładzie XIII, n<sup>o</sup> 21,

$$36R^2V^2 = S(S - ad)(S - be)(S - cf).$$

PRZYKŁAD VI. — Dowodzenia powyższe zostały natchnione P. BURNSIDE'OWI przez dowodzenie następujące dane przez P. JOACHIMSTHAL'A na wyrażenie powierzchni trójkąta wpisanego w elipsę. Mnóżmy zrównania

$$\frac{2M}{ab} = \begin{vmatrix} \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & 1 \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & 1 \\ \frac{x'''}{a} & \frac{y'''}{b} & 1 \end{vmatrix}, \quad -\frac{2M}{ab} = \begin{vmatrix} \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & -1 \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & -1 \\ \frac{x'''}{a} & \frac{y'''}{b} & -1 \end{vmatrix}.$$

Wieloczyn jest jakimkolwiek wyznacznikiem symetrycznym w którym

wyrazy przekątnej są kształtu  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1$  i stają się zerami kiedy punkta są na krzywej; inne punkta są  $\frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} - 1 \dots$  Teraz jest łatwo dowieść że oznaczając przez  $\gamma$  jakikolwiek bok trójkąta, a przez  $b''$  półśrednicy równoległej, otrzymamy

$$\frac{\gamma^2}{b''^2} = \frac{(x' - x'')^2}{a^2} + \frac{(y' - y'')^2}{b^2} = 2 \left( 1 - \frac{x'x''}{a^2} - \frac{y'y''}{b^2} \right).$$

Mamy więc

$$-2 \frac{M^2}{a^2 b^2} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\gamma^2}{b''^2} & \frac{e^2}{b''^2} \\ \frac{\gamma^2}{b''^2} & 0 & \frac{a^2}{b^2} \\ \frac{e^2}{b''^2} & \frac{a^2}{b^2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a^2 e^2 \gamma^2}{4 b'^2 b''^2 b''^2}.$$

PRZYKŁAD VII.— P. CAYLEY otrzymał, sposobem następującym (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, tom II, str. 270), związek łączący odległości czterech punktów branych po dwa, a leżących na jakimkolwiek kole lub pięciu punktów leżących na jakiejkolwiek kuli.

Podstawmy współrzędne każdego punktu w [zrównanie ogólne jakiegokolwiek koła

$$x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0,$$

i wyrugujemy A, B, C, otrzymamy jakikolwiek wyznacznik z czterech prostych takich jak

$$x'^2 + y'^2, \quad -2x', \quad -2y', \quad 1.$$

Pomnóżmy przez jakikolwiek inny wyznacznik, nieróżniący się od tego tylko samym czynnikiem liczebnym, i jaki utworzymy za pomocą czterech tinij kształtu 1,  $x'$ ,  $y'$ ,  $x'^2 + y'^2$ ; pierwszy wyraz wieloczynu zniszczy się, drugi jest  $(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2$ . A zatem, jeżeli (12)<sup>2</sup> oznacza kwadrat z odległości między dwoma punktami, wieloczyn pod kształtem

wyznacznika jest

$$\begin{vmatrix} 0 & (12)^2 & (13)^2 & (14)^2 \\ (21)^2 & 0 & (23)^2 & (24)^2 \\ (31)^2 & (32)^2 & 0 & (34)^2 \\ (41)^2 & (42)^2 & (43)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

jesto związek szukany. Tak więc jak to już widzieliśmy, ten wyznacznik rozwinięty daje związek

$$(12)(34) \pm (13)(24) \pm (14)(23) = 0.$$

Związek łączący odległości pięciu punktów na jakiegokolwiek kuli jest wyznacznikiem odpowiednim pięciu liniom.

**PRZYKŁAD VIII.** — Znaleźć związek między odległościami trzech punktów branych po dwa a leżących na jakiegokolwiek prostej, czterech punktów leżących na jakiegokolwiek płaszczyźnie lub pięciu punktów położonych w przestrzeni.

Przydajmy jedność i zera do dwóch wyznaczników z których zrobiliśmy wieloczyn w przykładzie poprzedzającym, przyjdzie

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x'^2 + y'^2 & -2x' & -2y' & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x' & y' & x'^2 + y'^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Mamy teraz pięć linii poziomych a tylko cztery kolumny; wieloczyn, rozwinięty jak w n<sup>o</sup> 25, musi więc być zerem. Lecz ten wieloczyn jest czem innym jak wyznacznikiem

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12)^2 & (13)^2 & (14)^2 \\ 1 & (21)^2 & 0 & (23)^2 & (24)^2 \\ 1 & (31)^2 & (32)^2 & 0 & (34)^2 \\ 1 & (41)^2 & (42)^2 & (43)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

jesto związek szukany. Przemazując ostatnią linią i ostatnią kolumnę, otrzymamy związek między odległościami trzech punktów leżących na jakiegokolwiek prostej; przydając, przeciwnie, nową linią 1,  $(51)^2$ ,  $(52)^2$ , ..., otrzymamy związek między odległościami pięciu punktów położonych w przestrzeni. Możemy, przy wykonaniu rachunku tych wyznaczników odciągnąć drugą kolumnę od każdej z następujących, a potem odciągnąć zarówno pierwszą linią od każdej z następujących, co daje

$$\begin{vmatrix} 2(12)^2 & (12)^2 + (13)^2 - (23)^2 & (12)^2 + (14)^2 - (24)^2 \\ (12)^2 + (13)^2 - (23)^2 & 2(13)^2 & (13)^2 + (14)^2 - (34)^2 \\ (12)^2 + (14)^2 - (24)^2 & (13)^2 + (14)^2 - (34)^2 & 2(14)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Możnaby wyznaczniki wprost otrzymać pod tym kształtem uproszczonymi, lecz nie symetrycznym, kładąc początek w punkcie (1) i tworząc, jak w nrze 25, z elementami  $x', y', x'', y'', \dots$ , wyznacznik następujący który powinien być identycznie zerem,

$$\begin{vmatrix} x'^2 + y'^2 & x'x'' + y'y'' & x'x''' + y'y''' \\ x'x'' + y'y'' & x''^2 + y''^2 & x''x''' + y''y''' \\ x'x''' + y'y''' & x''x''' + y''y''' & x'''^2 + y'''^2 \end{vmatrix}.$$

Rozpoznaje się bez trudności że jest on równoważny wyznacznikowi, który już był ustanowiony powyżej.

PRZYKŁAD IX. — Znaleźć związek między łukami łączącymi cztery punkta wzięte na jakiegokolwiek kuli.

Weźmy początek w środku kuli i utworzmy, z dostaw oznaczających kierunek promieni wodzących poprowadzonych do każdego punktu  $\text{dos } a'$ ,  $\text{dos } \epsilon'$ ,  $\text{dos } \gamma'$ ,  $\text{dos } x''$ , ..., jakikolwiek wyznacznik który będzie identycznie zerem, przyjdzie

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{dos } ab & \text{dos } ac & \text{dos } ad \\ \text{dos } ba & 1 & \text{dos } bc & \text{dos } bd \\ \text{dos } ca & \text{dos } cb & 1 & \text{dos } cd \\ \text{dos } da & \text{dos } db & \text{dos } dc & 1 \end{vmatrix} = 0.$$



jeżeli zastąpimy dostawy przez ich rozwinięcia na szeregi  $1 - \frac{(ab)^2}{2r^2} + \dots$ , i przypuścimy promień  $r$  nieskończony, wyznacznik sprowadza się do wyznacznika przykładu poprzedzającego względem czterech punktów położonych na jakiegokolwiek płaszczyźnie.

PRZYKŁAD X. — Niech będzie wyznacznik

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & h & g \\ h & b - \lambda & f \\ g & f & c - \lambda \end{vmatrix};$$

za pomocą tego wyznacznika chcemy obrachować wieloczyn  $\varphi(\lambda) \varphi(-\lambda)$ .

Wyznacznik przedstawiający wieloczyn jest tegoż samego kształtu jak poprzedzający,  $\lambda$  jest zastąpioném przez  $\lambda^2$ , zaś A, ..., H, przez wartości

$$A = a^2 + h^2 + g^2, \quad B = b^2 + f^2 + h^2, \quad C = c^2 + g^2 + f^2,$$

$$F = gh + f(b + c), \quad G = hf + g(c + a), \quad H = fg + h(a + b).$$

Rozwijając i równając zeru, mamy

$$\lambda^6 - L\lambda^4 + M\lambda^2 - N = 0,$$

zrównanie w którym

$$L = a^2 + b^2 + c^2 + 2(f^2 + g^2 + h^2),$$

$$M = (bc - f^2)^2 + (ca - g^2)^2 + (ah - h^2)^2$$

$$+ (af - gh)^2 + 2(bg - hf)^2 + 2(ch - fg)^2,$$

i N jest równe kwadratowi wyznacznika pierwotnego w którym zrobiło się  $\lambda = 0$ ; L, M i N są ilościami koniecznie dodatnimi. Podobnie, jeżeli się utworzy  $\varphi(\lambda)$  za pomocą wyznacznika symetrycznego jakiegokolwiek, wieloczyn  $\varphi(\lambda) \varphi(-\lambda)$  równy zeru, dostarczy jakiegokolwiek zrównania na  $\lambda^2$  którego wyrazy są na przemiany, dodatnie i odjemne,

które, według reguły DESKARTA, nie może mieć pierwiastku ujemnego. Tymto właśnie sposobem P. SYLWESTER dowiódł rzeczywistości pierwiastków równania  $\varphi(\lambda) = 0$ . Jest rzeczą oczywistą, według tego cośmy powiedzieli powyżej, że to równanie nie może mieć pierwiastku kształtu  $\epsilon \sqrt{-1}$ , i zobaczymy łatwo że ono nie może mieć także w swym składzie pierwiastku kształtu  $\alpha + \epsilon \sqrt{-1}$ ; dosyć na to napisać  $a - \alpha = a'$ ,  $b - \alpha = b'$ ,  $c - \alpha = c'$  i wróci się napowrót do przypadku poprzedzającego.

UWAGA. — Pan Edward COMBESURE, znakomity tłumacz na język francuzki głęboko pojętej i pięknie wykończonj *Teoryi Wyznaczników* BRIOSKIEGO (BRIOCHI. *La teorica dei determinanti*, Pavia, 1854), podaje w tém dziele o powyżej przytoczonj odkrywci, obok wiernie przełożonych ważnych nad tym wynalazkiem uwag włoskiego geometry, swe własne następujące spostrzeżenia :

Zrównanie trzeciego stopnia na jakie się natrafia, w Geometrii przy oznaczeniu osi głównych jakiegokolwiek powierzchni drugiego rzędu, w Mechanice przy szukaniu osi momentów głównych bezwładności jakiegokolwiek ciała, w Fizyce matematycznj przy poznawaniu sił głównych sprężystości lub osi głównych elipsoidy sprężystości, i t. d., można położyć pod kształtem jakiegokolwiek wyznacznika w sposób następujący :

$$f(-\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & \gamma & \epsilon \\ \gamma & b - \lambda & \alpha \\ \epsilon & \alpha & c - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Pierwiastki tego równania są rzeczywiste. To podanie, już uzasadnione przez PP. CAUCHY'EGO, KUMMERA, BORCHARDTA, JAKOBIEGO, odebrało lat temu dwadzieścia od P. SYLWESTRA (\*) nowe dowodzenie bardzo proste i eleganckie, oparte na prawie odnoszącj się do mnożenia wyznaczników.

Mnożąc pierwszy członek tegoż równania przez wyznacznik  $f(\lambda)$ ,

(\*) *Philosophical Magazine*, 1852.

otrzymuje się rzeczywiście

$$\begin{vmatrix} A - \lambda^2 & F & E \\ F & B - \lambda^2 & D \\ E & D & C - \lambda^2 \end{vmatrix}$$

gdzie się zrobiło, dla skrócenia,

$$a^2 + \varepsilon^2 + \gamma^2 = A, \quad a\varepsilon + \gamma(a + b) = F,$$

$$b^2 + \alpha^2 + \gamma^2 = B, \quad \alpha\gamma + \varepsilon(a + c) = E,$$

$$c^2 + \alpha^2 + \varepsilon^2 = C, \quad \varepsilon\gamma + \alpha(b + c) = D,$$

ma się więc

$$-f(\lambda)f(-\lambda) = \lambda^6 - L\lambda^4 + M\lambda^2 - N,$$

i zauważy się że współczynniki  $L, M, N$  są dodatne, albowiem te współczynniki mogą łatwo być położone pod kształtem

$$L = a^2 + b^2 + c^2 + 2\alpha^2 + 2\varepsilon^2 + 2\gamma^2,$$

$$M = (ab - \gamma^2)^2 + (ac - \varepsilon^2)^2 + (bc - \alpha^2)^2$$

$$+ 2(a\alpha - \varepsilon\gamma)^2 + 2(b\varepsilon - \alpha\gamma)^2 + (c\gamma - \alpha\varepsilon)^2,$$

$$N = \begin{vmatrix} a & \gamma & \varepsilon \\ \gamma & b & \alpha \\ \varepsilon & \alpha & c \end{vmatrix}^2$$

Zrobiwszy

$$a = a_1 + p, \quad b = b_1 + p, \quad c = c_1 + p, \quad \lambda = \lambda_1 + p,$$

funkcja  $f(-\lambda)$  stanie się

$$\varphi(-\lambda_1) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda_1 & \gamma & \varepsilon \\ \gamma & b_1 - \lambda_1 & \alpha \\ \varepsilon & \alpha & c_1 - \lambda_1 \end{vmatrix}$$

a równanie  $\varphi(-\lambda_1)\varphi(\lambda_1) = 0$  będzie kształtu

$$\lambda_1^6 - L_1\lambda_1^4 + M_1\lambda_1^2 - N_1 = 0,$$

spółczynniki  $L_1, M_1, N_1$ , są dodatne. Stosując do niego regułę znaków DEKARTA, rozpozna się że żadna z wartości na  $\lambda^2$ , nie może być odjemną, to jest że nie można będzie mieć  $(\lambda - p)^2 = -q^2$ , a, tém samém,  $\lambda = p + q\sqrt{-1}$ . Jest więc dowiedzioném że pierwiastki równania  $f(-\lambda) = 0$  są istotnie rzeczywistemi.

Zauważmy że to dowodzenie, zarówno jak dowodzenia PP. JAKOBIEGO i BORCHARDTA, rozciąga się do równań  $n^{\text{tego}}$  stopnia będących tegoż samego kształtu, jak to zobaczymy w jednym z rozdziałów IV<sup>tego</sup> to-mu naszej algebry.



## ROZDZIAŁ IV

### WYZNACZNIKI ODWROTNE I MNIEJSZE.

27. Widzieliśmy (16) że wyznaczniki mniejsze są połączone z elementami odpowiedniami przez związek

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + \dots = \Delta;$$

są one związane z innymi elementami przez równania jednakie

$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 + \dots = 0,$$

$$c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 + \dots = 0.$$

W rzeczy samej, wyznacznik jest równy  $a_1A_1 + a_2A_2 + \dots$ , i  $A_1, A_2, \dots$  nie zawierają w sobie  $a_1, a_2, \dots$ ; wyrażenie  $b_1A_1 + b_2A_2 + \dots$  jest tym czemby się stał wyznacznik robiąc  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots$ ; lecz miałby on wtedy dwie kolumny jednakie, a tym samym sprowadzałby się do zera (14).

28. Możemy teraz napisać pod kształtem skróconym rozwiązanie jakiegokolwiek układu równań

$$a_1x + b_1y + c_1z + \dots = \xi,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + \dots = \eta,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + \dots = \zeta,$$

gdyż, mnożąc pierwsze przez  $A_1$ , drugie przez  $A_2, \dots$ , i dodając, współczynniki  $y, z, \dots$ , zniszczą się, gdy tym czasem współczynnik  $x$  będzie równy  $a_1A_1 + a_2A_2 + \dots$ , to jest wyznacznikowi utworzonemu ze wszystkich współczynników pierwszych członków równań: nazwiemy go  $\Delta$ . Mamy więc

$$\Delta x = A_1\xi + A_2\eta + A_3\zeta + \dots,$$

$$\Delta y = B_1\xi + B_2\eta + B_3\zeta + \dots,$$

$$\Delta z = C_1\xi + C_2\eta + C_3\zeta + \dots$$

29. Wyznacznikiem *odwrotnym* jakiegokolwiek wyznacznika danego jest wyznacznik mający za elementa, mniejsze wyznacznika pierwotnego; i tak odwrotnym  $(a_1b_2c_3)$  jest

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

gdzie  $A_1, B_1, \dots$  mają znaczenie wyłożone powyżej. Gdy nazwiemy go  $\Delta'$  i pomnożymy przez wyznacznik pierwotny  $\Delta$ , przyjdzie, według prawidła nr<sup>ca</sup> 22,

$$\begin{vmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 & a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 & a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 \\ a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 & a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 \\ a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{vmatrix},$$

lecz, według nr<sup>ca</sup> 27,

$$a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = \Delta, \quad a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0, \dots,$$

wyznacznik sprowadzi się więc do

$$\begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3,$$

z kądem

$$(a_1 b_2 c_3)(A_1 B_2 C_3) = (a_1 b_2 c_3)^3 \quad \text{i} \quad (A_1 B_2 C_3) = (a_1 b_2 c_3)^2,$$

i, ogólnie,

$$\Delta' \Delta = \Delta^n, \quad \Delta' = \Delta^{n-1}.$$

30. Jeżeli weźmiemy drugi układ równań  $n^{\text{ta}}$  28, i rozwiążemy go na nowo względem  $\xi, \eta, \dots$  w funkcji  $\Delta x, \Delta y, \dots$ , mamy

$$\Delta' \xi = a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + c_1 \Delta z + \dots,$$

gdzie  $a_1, b_1, c_1, \dots$ , są Mniejszymi wyznacznika odwrotnego.

Lecz te wartości ilości  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  powinny być jednakże ze zrównaniami pierwotnymi; z kądem, zauważywszy że  $\Delta' = \Delta^{n-1}$ , otrzymamy, przez porównanie spółczynników,

$$a_1 = \Delta^{n-2} a_{11}, \quad b_1 = \Delta^{n-2} b_{11}, \quad c_1 = \Delta^{n-2} c_{11}, \dots,$$

zrównania wyrażające w funkcjach spółczynników pierwotnych, Mniejsze wyznacznika odwrotnego.

31. Widzieliśmy że, wzięwszy pod uwagę jedną kolumnę  $a$  jakiegokolwiek wyznacznika, każdy wyraz zamyka w sobie jako czynnik jeden z elementów tej kolumny; a tём samém wyznacznik może się napisać pod kształtem  $\Sigma a_p A_p$ . Podobnie, jeżeli się weźmie pod uwagę dwie kolumny jakiegokolwiek  $a$  i  $b$  wyznacznika

ka, ten wyznacznik może być położony pod kształtem  $\Sigma(a_p b_q) A_{pq}$ , gdzie summa  $\Sigma$  oznacza wszystkie wyznaczniki możebne jakie można utworzyć biorąc dwie linie poziome z dwóch kolumn danych. †

W rzeczy saméj, każdy wyraz wyznacznika zamyka w sobie jako czynnik jeden z elementów z kolumny  $a$  i inny którykolwiek z kolumny  $b$ ; a, według prawidła na znaki, każdemu wyrazowi  $a_p b_q c_r d_s \dots$  odpowiada jakikolwiek inny —  $a_p b_q c_r d_s \dots$ . Zkąd widzimy że kształt wyznacznika jest  $\Sigma(a_p b_q) A_{pq}$ , i, przez toż samo rozumowanie jak w n<sup>rze</sup> 16, widzimy także że mnożnik  $A_{pq}$  jest Mniejszy otrzymany przez zniesienie dwóch linii i dwóch kolumn w których się znajdują  $a_p$  i  $b_q$ .

W ogólności, gdy się zauważy  $p$  kolumn jakichkolwiek wyznacznika, można wyrazić go jako summę wszystkich wieloczynów jakie się otrzymuje tworząc wszystkie wyznaczniki możebne z  $p$  linii poziomych wziętych z pomiędzy tych linii, i z  $p$  kolumn, i mnożąc Mniejszy tym sposobem otrzymamy przez swój dopełniający, to jest przez Mniejszy wynikający ze zniesienia tychże samych kolumn i tychże samych linii; na przykład :

$$\begin{aligned} (a_1 b_2 c_3 d_4 e_5) &= (a_1 b_2) (c_3 d_4 e_5) - (a_1 b_3) (c_2 d_4 e_5) \\ &+ (a_1 b_4) (c_2 d_3 e_5) - (a_1 b_5) (c_3 d_4 e_2) \\ &+ (a_2 b_3) (c_1 d_4 e_5) - (a_2 b_4) (c_1 d_3 e_5) \\ &+ (a_2 b_5) (c_1 d_3 e_4) + (a_3 b_4) (c_1 d_2 e_5) \\ &- (a_3 b_5) (c_1 d_2 e_4) + (a_4 b_5) (c_1 d_2 e_3). \end{aligned}$$

Znak każdego wyrazu w wyrażeniu poprzedzającym oznacza się bez trudności przez prawidło podane na znaki (8). Jest rzeczą oczywistą, jak w n<sup>rze</sup> 27, że gdy w summie powyższej zastąpimy wszędzie literę  $b$  przez literę  $c$ , summa  $\Sigma(a_1 c_2) (c_3 d_4 e_5)$  sprowadzi się do zera, gdyż ta summa przedstawia to czémby się stał wyznacznik, jeśliby kolumna  $c$  była równą kolumnie  $b$ .



32. Twierdzenie nr 30 może być uogólnione w sposób następujący : każdy Mniejszy rzędu  $p$  jaki można utworzyć z elementów wyznacznika odwrotnego  $A_1, B_1 \dots$  równa się, Mniejszemu dopełniającemu w wyznaczniku pierwotnym, pomnożonemu przez potęgę  $\overline{p-1}$  tego wyznacznika. Na przykład, w przypadku gdzie wyznacznik pierwotny jest piątego rzędu,

$$(A_1 B_2) = \Delta(c_3 d_1 e_3), \quad (A_1 B_2 C_3) = \Delta^2(d_1 e_3), \dots$$

Sposób dowodzenia ogólnego zrozumie się dostatecznie stosując go do pierwszego przykładu; mamy

$$\Delta x = A_1 \xi + A_2 \eta + A_3 \zeta + A_4 w + A_5 v,$$

$$\Delta y = B_1 \xi + B_2 \eta + B_3 \zeta + B_4 w + B_5 v.$$

Więc

$$\Delta B_2 x - \Delta A_3 y = (A_1 B_2) \xi + (A_3 B_2) \zeta + (A_1 B_2) w + (A_5 B_2) v.$$

Lecz możemy otrzymać jakiegokolwiek inne wyrażenie na  $x$  w funkcji pięciu ilości  $y, \xi, \zeta, w, v$ ; w rzeczy samej, uważmy zrównanie pierwotne :

$$\xi = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 w + e_1 u,$$

$$\zeta = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 w + e_3 u,$$

$$\omega = a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 w + e_4 u,$$

$$v = a_5 x + b_5 y + c_5 z + d_5 w + e_5 u;$$

rugując  $z, w$  i  $u$ , przyjdzie,

$$(a_1 c_3 d_1 e_3) x + (b_1 c_3 d_1 e_3) y = (c_3 d_1 e_3) \xi - (c_1 d_3 e_1) \zeta \\ + (c_3 d_1 e_3) w - (c_1 d_3 e_1) v;$$

a ponieważ, z określenia,  $(a_1c_3d_4e_5) = B_2$ , porównyując to z równanie ze zrównaniami jakieśmy już otrzymali, mamy

$$\frac{A_1B_2}{\Delta} = c_3d_4e_5, \quad \text{albo} \quad (A_1B_2) = \Delta(c_3d_4e_5), \dots$$

PRZYKŁAD. — Gdy jakkolwiek wyznacznik sprowadzi się do zera, mniejsze  $A_1, A_2, \dots$ , są odpowiednio proporcjonalne do  $B_1, B_2, \dots$ .

W rzeczy samej, dowiedliśmy że

$$A_1B_1 - A_2B_1 = \Delta C,$$

C jest drugim mniejszym jaki się otrzymuje znosząc dwie pierwsze kolumny. Więc, gdy  $\Delta = 0$ , ma się

$$A_1 : A_2 :: B_1 : B_2 \dots$$

## ROZDZIAŁ V

### FUNKCJE SYMETRYCZNE.

33. Przypuszczać będziemy że czytelnik zna teorię funkcji symetrycznych pierwiastków zrównań, taką jaka jest zwykle przedstawiana w dziełach o teorii zrównań traktujących. Przyjmujemy przeto że zna on także wzór NEWTONA dla obrachowania summ z potęg pierwiastków zrównania

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - p_3 x^{n-3} + \dots = 0,$$

to jest

$$s_1 - p_1 = 0, \quad s_2 - p_1 s_1 + 2p_2 = 0, \quad s_3 - p_1 s_2 + p_2 s_1 - 3p_3 = 0,$$

z kąd się wyciąga

$$s_1 = p_1, \quad s_2 = p_1^2 - 2p_2, \quad s_3 = p_1^3 - 3p_1 p_2 + 3p_3, \dots$$

jakoteż inne formuły

$$\sum \alpha^m \epsilon_p = s_m s_p - s_{m+p},$$

$$\sum \alpha^m \epsilon_p \gamma_q = s_m s_p s_q - s_{m+p} s_q - s_{m+q} s_p - s_{p+q} s_m + 2s_{m+p+q}, \dots$$

Jeżeli mamy jakąkolwiek funkcją jednorodną współczynników  $p_1, p_2, \dots$ , rzęd tej funkcji będzie równym, według znaczenia najczęściej używanego, liczbie czynników zawartych w każdym wyrazie; jeżeli, na przykład,  $p_1^r p_2^s p_3^t$  jest jednym wyrazem

funkcyi, ta będzie rzędu  $r + s + t$ . Jeżeli funkcyja nie jest jednorodną, rząd będzie określony przez rząd wyrazu najwyższego. Nazwiemy *ważnością* jakiegokolwiek funkcyi summę wskaźników każdego czynnika; i tak ważnością wyrazu  $p_1^r p_2^s p_3^t$  będzie summa  $r + 2s + 3t$ . Wyraz  $p_1 p_2 p_3$  byłby trzeciego rzędu, a jego ważnością byłaby  $r + s + t$ . W przypadku funkcyj jakie mamy do zauważania, ważność będzie też sama dla wszystkich wyrazów.

34. Jeżeli rozważymy wyrażenia dane powyżej dla  $s_1, s_2, s_3, \dots$  w funkcyi współczynników, to oczywiście, ważność każdego wyrazu jest równą 2 w  $s_2$ , 3 w  $s_3$ , a przez indukcję,  $n$  w  $s_n$ . Podobnie, ważność  $\Sigma \alpha^m \epsilon^p$  jest  $m + p$ , tak samo jak ważność  $\Sigma \alpha^m \epsilon^p \gamma^q$  jest  $m + p + q$ .

Można to dowieść następującym ogólnym sposobem. Jeżeli się zastąpi pierwiastki  $\alpha, \epsilon, \gamma, \dots$  przez  $\lambda \alpha, \lambda \epsilon, \lambda \gamma, \dots$ , funkcyja  $\Sigma \alpha^m \epsilon^p \gamma^q$  jest widocznie pomnożoną przez  $\lambda^{m+p+q}$ . Lecz wiadomo że mnożąc każdy pierwiastek przez  $\lambda$ , mnoży się  $p_1$  przez  $\lambda$ ,  $p_2$  przez  $\lambda^2$ ,  $p_3$  przez  $\lambda^3, \dots$  Wyrażenie  $\Sigma \alpha^m \epsilon^p \gamma^q$  w funkcyi współczynników powinno więc być takim, że, jeżeli się zastąpi  $p_1$  przez  $\lambda p_1$ ,  $p_2$  przez  $\lambda^2 p_2, \dots$ , każdy wyraz znajdzie się pomnożonym przez  $\lambda^{m+p+q}$ ; co się wyrazi mówiąc że ważnością każdego wyrazu jest  $m + p + q$ .

35. Ponieważ mamy,

$$p_1 = \alpha + \epsilon + \gamma + \dots, \quad p_2 = \alpha(\epsilon + \gamma + \dots) + \epsilon\gamma + \dots,$$

a żaden ze współczynników  $p_3, p_4, \dots$  nie zawiera  $\alpha$  w jakiegokolwiek potęgze wyższej nad pierwszą, jest więc rzeczą oczywistą że rząd funkcyi symetrycznej jakiegokolwiek  $\Sigma \alpha^m \epsilon^p \gamma^q$  ( $m$  przypuszcza się  $> p$  i  $q$ ) musi być przynajmniej równy  $m$ ; w rzeczy samej, potrzeba przynajmniej  $m$  czynników zawierających każdy  $\alpha$  w pierwszym stopniu ażeby wieloczyn zamykał  $\alpha^m$ . Wzajemnie, wszelka funkcyja symetryczna rzędu  $m$  zawierać



będzie  $\alpha^m$  w jakimkolwiek wyrazie. Oznaczywszy bowiem przez  $q_1$  summę pierwiastków  $\epsilon, \gamma, \epsilon^2, \dots$ , przez  $q_2, \dots$  summę ich wieloczynów wziętych po dwa,  $\dots$ , będziemy mieli,

$$p_1 = \alpha + q_1, \quad p_2 = \alpha q_1 + q_2, \quad p_3 = \alpha q_2 + q_3, \dots,$$

a współczynnik najwyższej potęgi pierwiastku  $\alpha$  w jakimkolwiek wyrazie  $p_2^i p_3^j p_4^k$  będzie  $q_1^i q_2^j q_3^k$ ; i nawzajem, czynnik  $q_1^i q_2^j q_3^k$  nie może pochodzić jak tylko z wyrazu  $p_2^i p_3^j p_4^k$ . Nie może więc sprowadzić się do zera przez przydanie innych wyrazów; z kąd wypływa że rząd funkcji symetrycznej  $\Sigma \alpha^m \epsilon^p \gamma^q$  jest równy największej z liczb  $m, p, q$ : dowiedliśmy w istocie że ten rząd nie może być mniejszym i tenże nie może być także większym, ponieważ funkcja jakiegokolwiek bądź stopnia wyższego zawierałaby w sobie potęgę z pierwiastku  $\alpha$  wyższe jak  $\alpha^m$ .

Za pomocą tych dwóch zasad, można napisać bezpośrednio część wyrażoną literami jakiegokolwiek bądź funkcji symetrycznej, i pozostaną do oznaczenia same tylko współczynniki. Jeżeli chcemy utworzyć  $\Sigma \alpha^2 (\epsilon - \gamma)^2$ , widzimy bez trudności że idzie tu o funkcję której ważność jest 4 a rząd 2, to jest że każdy wyraz może mieć tylko dwa czynniki. Jedyne wyrazy mogące w niej figurować są  $p_4, p_3 p_1, p_2^2$ , i, dla uzupełnienia rachunku funkcji, pozostaje nam tylko oznaczyć współczynniki liczebne tych trzech wyrazów.

36. Funkcje symetryczne z różnic pierwiastków, są to funkcje któremi najwięcej będziemy się zatrudniali, jest więc pożytecznie dać tu poznać twierdzenie za pomocą którego summy z potęg tych różnic mogą się wyrazić w funkcji summ z potęg samychże pierwiastków. Rozwińmy  $(x - \alpha)^m$  za pomocą wzoru dwumianu, rozwińmy także  $(x - \epsilon)^m, \dots$ , i dodajmy; będzie:

$$\Sigma (x - \alpha)^m = s_0 x^m - m s_1 x^{m-1} + \frac{1}{2} m(m-1) s_2 x^{m-2} \dots -$$

Teraz, jeżeli zastąpimy  $x$  przez  $\alpha$  w tém wyrażeniu, to ono staje się

$$(\alpha - \xi)^m + (\alpha - \gamma)^m + \dots;$$

jeżeli zastąpimy  $x$  przez  $\xi$ , to ono staje się

$$(\xi - \alpha)^m + (\xi - \gamma)^m + \dots,$$

i tak dalej. Dodajmy wypadki wszystkich tych podstawień: jeżeli  $m$  jest nieparzystym, summa jest zerem, ponieważ wyrazy  $(\alpha - \xi)^m$ ,  $(\xi - \alpha)^m$  zniszczą się; jeżeli  $m$  jest parzystym, to rozwinięcie staje się, przeciwnie,  $2\Sigma(\alpha - \xi)^m$ , lecz toż samo podstawienie wykonawszy w drugim członku równania, otrzymamy dodając

$$s_0 s_m - m s_1 s_{m-1} + \frac{1}{2} m(m-1) s_2 s_{m-2} \dots$$

Jeżeli  $m$  est nieparzystym, ostatni wyraz będzie  $-s_m s_0$ , niszczący pierwszy, i wszystkie inne wyrazy zniszczą się także; lecz, jeżeli  $m$  jest parzystym, ostatni wyraz będzie jednakim z pierwszym i tak dalej, i równanie stanie się podzielnym przez 2. Mamy więc, gdy  $m$  jest parzystym,

$$\Sigma(\alpha - \xi)^m = s_0 s_m - m s_1 s_{m-1} + \frac{1}{2} m(m-1) s_2 s_{m-2} - \dots,$$

spółczynniki są współczynnikami dwumianu, oprócz współczynnika środkowego, na którym się zatrzymamy dzieląc go przez 2. Na przykład,

$$\Sigma(\alpha - \xi)^4 = s_0 s_4 - 4 s_1 s_3 + 3 s_2,$$

$$\Sigma(\alpha - \xi)^6 = s_0 s_6 - 6 s_1 s_5 + 15 s_2 s_4 - 10 s_3^2.$$

37. Wszelka funkcja z różnic pierwiastków musi oczywiście pozostać niezmienną, gdy się powiększy lub zmniejszy wszystkie te pierwiastki o tę samą ilość; jeżeli, na przykład, zastąpimy w równaniu,  $x$  przez  $x - \lambda$ , to ono staje się, w tym przypadku,

$$x^n - (p_1 + n\lambda)x^{n-1} + \left[ p_2 + (n-1)\lambda p_1 + \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2 \right] x^{n-2} \\ - [p_3 + (n-2)\lambda p_2 + \dots] x^{n-3} + \dots = 0.$$

Lecz funkcja jakakolwiek  $\varphi$  współczynników  $p_1, p_2, \dots$ , gdy zamienimy  $p_1$  na  $p_1 + \delta p_1$ ,  $p_2$  na  $p_2 + \delta p_2, \dots$  staje się

$$\varphi + \left( \frac{d\varphi}{dp_1} \delta p_1 + \frac{d\varphi}{dp_2} \delta p_2 + \dots \right) \\ + \frac{1}{1.2} \left[ \frac{d^2\varphi}{dp_1^2} (\delta p_1)^2 + \dots \right] + \dots$$

Zastąpmy więc  $p_1$  przez  $p_1 + n\lambda$ ,  $p_2$  przez

$$p_2 + (n-1)\lambda p_1 + \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2, \dots,$$

i uporządkujmy wypadek względem potęg  $\lambda$ , ten wypadek staje się

$$\varphi + \lambda \left[ n \frac{d\varphi}{dp_1} + (n-1)p_1 \frac{d\varphi}{dp_1} + (n-2)p_2 \frac{d\varphi}{dp_2} + \dots \right] + \lambda^2 \dots = 0.$$

Widzieliśmy że wszelka funkcja z różnic nie powinna się zmieniać przez podstawienie, jakkolwiek małym będzie  $\lambda$ ; też funkcja więc, gdy wyrazimy ją w funkcji współczynników, powinna zadosyć uczynić równaniu różniczkowemu

$$n \frac{d\varphi}{dp_1} + (n-1)p_1 \frac{d\varphi}{dp_1} + (n-2)p_2 \frac{d\varphi}{dp_2} + \dots = 0.$$



PRZYKŁAD I. — Utworzyć  $\Sigma(\alpha - \xi)^2$ .

Wiemy że rząd i ważność tej funkcji są równe 2; ta funkcja powinna więc być kształtu  $Ap_2 + Bp_1^2$ . Oznaczmy ją przez  $\varphi$  i zastosujmy do niej zrównanie różniczkowe, tak postępując otrzymamy

$$n \frac{d\varphi}{dp_1} + (n-1)p_1 \frac{d\varphi}{dp_1} = 0.$$

A ponieważ

$$\varphi = Ap_2 + Bp_1^2;$$

zład

$$\frac{d\varphi}{dp_1} = 2Bp_1,$$

$$\frac{d\varphi}{dp_2} = A,$$

podstawiając te wartości w zrównanie powyższe, przyjdzie

$$n \times 2Bp_1 + (n-1)p_1 \times A = 0,$$

albo, wyłączając czynnik wspólny  $p_1$  za nawias,

$$[(n-1)A + 2nB]p_1 = 0,$$

a że  $p_1$  nie jest zerem, przeto drugi czynnik  $[(n-1)A + 2nB]$  musi być koniecznym zerem; czyli, innymi słowy, B musi być stale proporcjonalnym do  $(n-1)$ , zaś A do  $2n$ ; co do funkcji, ta może się tylko różnić jakimkolwiek czynnikiem wyrażenia  $(n-1)p_1^2 - 2np_2$ .

Dostrzeżemy że ten czynnik jest równym *jedności*, przypuszczając  $\alpha = 1$ , wszystkie zaś inne pierwiastki robiąc bez wyjątku każdy odrębnie zerem, zład  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 0$ , co sprowadza wyrażenie powyższe do  $n-1$ , jak to łatwo można było przewidzieć.

PRZYKŁAD II. — Utworzyć, dla jakiegokolwiek bądź zrównania trzeciego stopnia, wieloczyn kwadratów z różnic  $(\alpha - \xi)^2(\xi - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$ .

Rząd funkcji jest 4, jej ważność jest 6, i ta funkcja musi być kształtu

$$Ap_3^2 + Bp_3p_2p_1 + Cp_3p_1^2 + Dp_2^3 + Ep_2^2p_1^2.$$



Oznaczając ją przez  $\varphi$  i stosując do niej równanie różniczkowe, mamy

$$3 \frac{d\varphi}{dp_1} + 2p_1 \frac{d\varphi}{dp_2} + p_2 \frac{d\varphi}{dp_3} = 0.$$

A że

$$\varphi = Ap_3^2 + Bp_3p_2p_1 + Cp_3p_1^2 + Dp_3^3 + Ep_2^2p_1^2;$$

zład

$$3) \quad \frac{d\varphi}{dp_1} = Bp_3p_2 + 3Cp_3p_1^2 + 2Ep_2^2p_1,$$

$$2p_1) \quad \frac{d\varphi}{dp_2} = Bp_3p_1 + 3Dp_3^2 + 2Ep_2p_1^2,$$

$$p_2) \quad \frac{d\varphi}{dp_3} = 2Ap_3 + Bp_2p_1 + Cp_1^2,$$

po podstawieniu tych wartości w równanie powyższe, wykonaniu wskazanych działań i uporządkowaniu symetrycznym uproszczonych wyrazów, przyjdzie,

$$(2A + 3B)p_3p_2 + (2B + 9C)p_3p_1^2 + (B + 6D + 6E)p_3^2p_1 + (C + 4E)p_2p_1^2,$$

to wyrażenie powinno być tożsamościowo zerem, zład

$$C = -4E, \quad B = 18E, \quad A = -27E, \quad D = -4E;$$

a więc funkcja może się różnić tylko jakimkolwiek czynnikiem wyrażenia

$$p_1^2p_2^2 + 18p_1p_2p_3 - 4p_2^3 - 4p_3p_1^2 - 27p_3^2.$$

Można dostrzedz że czynnik jest równym *jedności* gdy się przypuszcza że  $\gamma$ , a tém samém  $p_3$ , mają każdy odrębnie za swą wartość zero.

33. Będziemy używali, w dalszym ciągu, zrównań jedno-

rodnych. Pisząc  $\frac{x}{y}$  zamiast  $x$  i znosząc ułamki, zrównanie jakiegośmy użyli staje się

$$x^n - p_1 x^{n-1} y + p^2 x^{n-2} y^2 \dots \pm p_n y^n = 0.$$

Przydamy dla symetrii, jakkolwiek spółczynnik pierwszemu wyrazowi  $x^n$ : należy, nadto, dać różnym wyrazom spółczynniki rozwinięcia dwumianu  $(x + y)^{an}$ , i napisać wypadek w ten sposób rozwinięty pod kształtem

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{1}{2} n(n-1) a_2 x^{n-2} y^2 + \dots$$

$$+ n a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n \quad \text{lub} \quad a_n y^n = 0.$$

Korzyść jaką otrzymujemy przez użycie spółczynników dwumianu zależy na tém, że we wszystkich funkcyjach z różnic pierwiastków wyrażonych w funkcyj spółczynników zrównania, summa spółczynników liczebnych jest zerem. W rzeczy saméj, znajdziemy tę summę robiąc  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 1$ ; lecz, w tém przypuszczeniu, wszystkie pierwiastki stają się równymi, a tém samém ich różnice niszcą się.

Rozumieć będziemy, przez funkcyą symetryczną pierwiastków jakiegokolwiek bądź zrównania jednorodnego, funkcyą symetryczną pierwiastków zrównania w  $\frac{x}{y}$ , utworzonego po podzieleniu przez  $a_0 y^n$ , ze spółczynników  $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \dots$ , i pomnożonego przez najwyższą potęgę ilości  $a_0$  znajdującej się w mianowniku mającym posłużyć do zniesienia ułamków. Tym sposobem, wszelka funkcyą symetryczną będzie jakąkolwiek bądź funkcyą jednorodną ilości  $a_0, a_1, \dots$ ; w rzeczy saméj, przed zniesieniem ułamków, ta funkcyą była jednorodną i sto-

pnia zero, i przetrwa ona w tym stanie, jeżeli się pomnoży wszystkie jej wyrazy przez tenże sam czynnik. Możemy także ustanowić teorią funkcyj symetrycznych pierwiastków jakiegokolwiek bądź zrównania jednorodnego nie potrzebując przekształcać go poprzednio na jakiegokolwiek bądź zrównanie w  $\frac{x}{y}$ .

Niech będzie  $\alpha$  jednym z pierwiastków tego ostatniego, oczywiście że zrównaniu jednorodnemu zadosyć uczynią wszelkie wartości na  $x', y'$  dla których znajdzie się  $x' = \alpha y'$ , ponieważ nie ma tu oczywiście innego pytania jak tylko o stosunku  $\frac{x'}{y'}$ ; zrównanie podzielone przez  $y^n$  rozkładać się daje na czynniki, a tak zrównanie jednorodne da się przywieść do jakiegokolwiek wieloczynu  $(y'x - yx')(y''x - yx'')(y'''x - yx''') \dots$ . Mnożmy i porównajmy ze zrównaniem pierwotnym, przyjdzie

$$a_0 = y'y''y''' \dots, \quad na_1 = -\Sigma x'y''y''' \dots, \quad \frac{1}{2}n(n-1)a_2 = \Sigma x'x''y''' \dots,$$

$$na_{n-1} = \mp \Sigma y'x''x''' \dots, \quad a_n = \pm x'x''x''' \dots$$

Jeżeli zrobimy  $y', y'', \dots$  równemi jedności, te wyrażenia sprowadzają się do wyrażen zwykłych współczynników jakiegokolwiek bądź zrównania w funkcji pierwiastków  $x', x'', \dots$ . Nawzajem, wszelka funkcya symetryczna napisana pod kształtem zwyczajnym z pierwiastkami  $x', x'', \dots$  może przywieść się do drugiego kształtu, przypuszczając każdą wartość  $x'$  podzieloną przez jakąkolwiek wartość odpowiednią  $y'$  i ogół t. j. wszystkie wyrazy funkcji pomnożone przez jakąkolwiek bądź potęgę ilości  $y'y'' \dots$  dosyć podniesionej aby można było znieść ułamki. I tak summa kwadratów z różnic  $\Sigma(x' - x'')^2$  staje się

$$\Sigma(x'y'' - y'x'')^2 y''^2 y''^2 \dots,$$

i, ogólnie, wszelkie funkcje z różnic dadzą się sprowadzić do



jakiegokolwiek summy wieloczynów wyznaczników takich jak  $x'y'' - y''x'$ ,  $x'y''' - x'''y'$ , ..., przez potęgi z ilości  $y'$ ,  $y''$ , ...

39. Równanie różniczkowe jakieśmy podali dla funkcyj z różnic pierwiastków wymaga aby było nieco zmienionem kiedy się pisze równanie ze współczynnikami dwumianu.

Jeżeli, w równaniu

$$a_0 x^n + na_1 x^{n-1} y + \dots = 0,$$

zastąpimy  $x$  przez  $x + \lambda$ ,  $a_1$  staje się  $a_1 + \lambda a_1$ ,  $a_2$  staje się  $a_2 + 2a_1 \lambda + a_0 \lambda^2$ ,  $a_3$  staje się  $a_3 + 3\lambda a_2 + 3\lambda^2 a_1 + \lambda^3 a_0 \dots$  i wszelka funkcya  $\varphi$  współczynników przekształca się na następującą

$$\varphi + \lambda \left( a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \dots \right) + \dots$$

Wszelka funkcya z różnic pierwiastków powinna więc, ponieważ ta funkcya nie zmienia się jeżeli się zastąpi  $x$  przez  $x + \lambda$ , zadosyć uczynić równaniu

$$a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \dots = 0.$$

Podobnie, wszelka funkcya nie zmieniająca się gdy się zastąpi  $y$  przez  $y + \lambda$ , powinna zadosyć uczynić równaniu

$$na_1 \frac{d\varphi}{da_0} + (n-1)a_2 \frac{d\varphi}{da_1} + (n-2)a_3 \frac{d\varphi}{da_2} + \dots = 0.$$

Funkcye tego rodzaju są funkcjami wartości odwrotnych pierwiastków, i, w znakowaniu jednorodnem, zależą od wieloczynów kształtu  $x'y'' - x''y'$ ... pomnożonych przez potęgi ilości  $x'$ ,  $x''$ , ... Funkcye samych wyznaczników  $x'y'' - x''y'$ , ...



niepomnożone przez potęgi  $x', y', \dots$ , będą zadosyć czyniły obu równanióm różniczkowym.

40. Potrzeba zauważyć że warunek

$$a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \dots = 0$$

jest nie tylko koniecznym, ale dostatecznym ażeby  $\varphi$  nie zmieniło się przez podstawienie  $x + \lambda$  za  $x$ . Widzieliśmy że współczynnik  $\lambda$ , w równaniu przekształconém, sprowadza się do zera, i znajduje się bez trudności, za współczynnik  $\lambda^2$ ,

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_1 \frac{d\varphi}{da_3} + 6a_2 \frac{d\varphi}{da_4} + \dots \\ + \frac{1}{1.2} \left( a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots \right)^2 \varphi, \end{aligned}$$

gdzie  $a_0, a_1, \dots$ , pokazujące się wyraźnie, nie powinny być różniczkowanemi w ostatnim symbolu. Lecz ten wypadek nie jest różnym od tego jaki się otrzymuje wykonywając na funkcyi

$$\frac{1}{1.2} \left( a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + \dots \right)$$

działanie  $a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots$ , gdyż to działanie dostarczy z jednej strony, wyrazów jakie się otrzymuje różniczkując  $a_1, a_2, \dots$ , które się pokazują sposobem wyraźnym w symbolu, a z drugiej wyrazów jakie się otrzymuje zostawiając w tej funkcyi  $a_1, a_2, \dots$  stałemi: summa  $a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + \dots$  sprowadza się do zera, stanie się podobnież ze współczynnikiem  $\lambda^2$ , i ze współczynnikiemi innych potęg  $\lambda$ .

PRZYKŁAD. — *Utworzyć, dla zrównania trzeciego stopnia*

$$a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3,$$

funkcja

$$\Sigma(x_1y_2 - x_2y_1)^2(x_2y_3 - x_3y_2)^2(x_3y_1 - x_1y_3)^2.$$

Można wyprowadzić to zadanie z przykładu II, nr<sup>o</sup> 37, lub otrzymać je sposobem następującym : funkcja jest czwartego rzędu, jej ważność 6; ta funkcja powinna więc być kształtu

$$Aa_3a_3a_0a_0 + Ba_3a_2a_1a_0 + Ca_3a_1a_1a_1 + Da_2a_2a_2a_0 + Ea_2a_1a_1a_1.$$

Wykonywając działanie

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3},$$

ma się

$$(B + 6A)a_3a_2a_0a_0 + (3C + 2B)a_3a_1a_1a_0 \\ + (2E + 6D + 3B)a_2a_2a_1a_0 + (4E + 3C)a_2a_1a_1a_1 = 0;$$

równając odrębnie z zerem współczynnik każdego wyrazu i robiąc  $A = 1$ , przyjdzie

$$B = -6, \quad C = 4, \quad D = 4, \quad E = -3.$$

41. P. SERRET działanie wskazane przez  $a_0 \frac{d\phi}{da_1} + \dots$  pisze pod kształtem przedstawiającym niekiedy korzyści. Wyobraźmy sobie jakąkolwiek bądź zmienną pomocniczą  $\zeta$  której współczynniki  $a_0, a_1, \dots$ , są funkcjami takimi, żeby było

$$\frac{da_1}{d\zeta} = a_0, \quad \frac{da_2}{d\zeta} = 2a_1, \quad \frac{da_3}{d\zeta} = 3a_2, \dots;$$

mamy oczywiście

$$a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \dots = \frac{d\varphi}{d\zeta}.$$

Można podobnie napisać  $na_1 \frac{d\varphi}{da_0} + \dots$  pod kształtem skróconym  $\frac{d\varphi}{d\eta}$ ,  $\eta$  jest jakąkolwiek zmienną której współczynniki  $a_0, a_1, \dots$ , są funkcjami takimi, żeby było

$$\frac{da_0}{d\eta} = na_1, \quad \frac{da_1}{d\eta} = (n-1)a_2 \dots$$

42. Należy też dać poznać spostrzeżenie zrobione przez BRIOSKIEGO względem znaczenia pierwszego z tych działań gdy się wyraża je w funkcji pierwiastków. Uważmy jakąkolwiek funkcją współczynników  $p_1, p_2, p_3, \dots$ ; wyrażmy te współczynniki w funkcji pierwiastków i rozważmy ich pochodne względem pierwiastków.

Oznaczywszy jak powyżej przez  $q_1$  summe, przez  $q_2$  summe wieloczynów wziętych po dwa, i t. d., wszystkich pierwiastków mniej jednym z nich  $\alpha$ , mamy oczywiście

$$\frac{dp_1}{d\alpha} = 1, \quad \frac{dp_2}{d\alpha} = q_1, \quad \frac{dp_3}{d\alpha} = q_2 \dots,$$

i

$$\frac{d}{d\alpha} = \frac{d}{dp_1} + q_1 \frac{d}{dp_2} + q_2 \frac{d}{dp_3} + \dots$$

Mamy także wyrażenia odpowiednie dla pochodnych względem innych pierwiastków; dodając je do siebie, współczynnik  $\frac{d}{dp_1}$  staje się równym  $n$ . Współczynnik  $\frac{d}{dp_2}$  staje się  $(n-1)p_1$ .

W rzeczy samej, ponieważ  $q_1 = p_1 - \alpha$ , dodając, współczynnik żądany stanie się  $np_1 - (\alpha + \epsilon + \gamma + \dots) = (n-1)p_1$ . Podobnie współczynnik  $\frac{d}{dp_2}$  jest równy  $(n-2)p_2$ , i mamy

$$\left(\frac{d}{d\alpha} + \frac{d}{d\epsilon} + \dots\right) = n \frac{d}{dp_1} + (n-1)p_1 \frac{d}{dp_2} + (n-2)p_2 \frac{d}{dp_3} + \dots$$

Widzimy teraz jasno, czemu, stosując działanie wskazane przez drugi członek do jakiegokolwiek funkcji z różnic pierwiastków, wypadek sprowadza się do zera: albowiem działanie równoważne  $\frac{d}{d\alpha} + \dots$ , zastosowane do różnicy jakiegokolwiek, dostarczy wypadek tożsamościowo równy zeru.

Podobnie gdyby zrównanie było napisane ze współczynnikami dwumianu, mielibyśmy byli

$$n \frac{da_1}{d\alpha} = a_0, \quad \frac{1}{2} n(n-1) \frac{da_2}{d\alpha} = na_1, \dots,$$

z kądem, jak poprzednio,

$$\frac{d}{d\alpha} + \frac{d}{d\epsilon} + \dots = a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots$$



## ROZDZIAŁ VI

### WYZNACZNIKI ZWANE WYPADKOWYMI (RESULTANTS).

43. Jeżeli mamy  $k$  równań jednorodnych o  $k$  zmiennych, albo, co na jedno wychodzi,  $k$  równań niejednorodnych o  $k - 1$  zmiennych, jest zawsze podobna połączyć je w sposób taki aby można było z nich wydobyć jedno tylko równanie  $\Delta = 0$  niezawierające w sobie żadnej zmiennej. Mówi się wtedy że zmienne są wyrugowane a  $\Delta$  jest *wypadkowym* (le *résultant*) (\*) układu równań. Weźmy przykład najprostszy, ten jaki już przytoczyliśmy w pierwszym rozdziale, to jest dwóch równań pierwszego stopnia

$$ax + b = 0, \quad a'x + b' = 0.$$

Mnożąc pierwsze przez  $a'$ , drugie przez  $a$ , i odcinając pierwsze od drugiego, przyjdzie

$$ab' - a'b = 0,$$

i ilość  $ab' - a'b$  jest rugownikiem dwóch równań. Potrzeba teraz zauważyć że nie można zład wywieść równości  $ab' - a'b = 0$  dopóty, dopóki dwa równania dane nie staną się jednoczesnymi, to jest dopóki te równania nie zostaną sprawdzone

---

(\*) Wypadkowe odebrały także nazwisko *rugowników* (*eliminants*).

przez jedną i tęż samą wartość na  $x$ . W rzeczy samej, nie ulega wątpliwości, że gdy łączymy dwa równania

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0$$

dla wydobycia z nich równości

$$l\varphi(x) + m\psi(x) = 0,$$

przypuszczamy wyraźnie że  $x$  przedstawia tęż samą ilość w dwóch równaniach. Wynika ztąd że równość

$$a'b' - a'b = 0$$

przedstawia warunek konieczny ażeby dwa równania mogły być sprawdzone przez jedną i tęż samą wartość na  $x$ , jak można także widzieć to bezpośrednio rozwiązując oba względem  $x$  i równając między sobą wartości tak otrzymane. I, ogólnie, mając daną liczbę ilukolwiek równań

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0,$$

możemy połączyć je i wyciągnąć z nich jakąkolwiek równość taką aby było

$$lU + mV + nW = 0,$$

byleby tylko zmienne miały też same wartości we wszystkich równaniach. A jeżeli, kombinując je, przyjdziemy do jakiegokolwiek wypadku niezawierającego w sobie więcej zmiennych, sprowadzi się go do zera skoro te równania będą mogły być sprawdzone przez jakikolwiek spólny układ wartości, i tylko w tym przypadku. Rugownik, czyli raczej wypadek otrzymany z rugowania zmiennych w danym układzie równań, może

więc być określony : Funkcja jakakolwiek współczynników danego układu równań dająca się sprowadzić do zera byłaby tylko równania dane przyjmować ciągle nie przestały jakiegokolwiek bądź układu rozwiązań spólnych.

44. Mamy teraz pokazać w jaki sposób rugowanie może się wykonać i jaka jest natura wypadku do którego zostaje się przywiedzionym. Pocniemy od dwóch równań napisanych pod kształtem niejednorodnym

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots = 0 \quad \text{albo} \quad \varphi(x) = 0,$$

$$x^n - q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} + \dots = 0 \quad \text{albo} \quad \psi(x) = 0.$$

Rugownik przedstawia, jak to już widzieliśmy, warunek konieczny ażeby dwa równania miały jakikolwiek pierwiastek spólny. Jeżeli to ma miejsce, którykolwiek z pierwiastków pierwszego równania musi zadość uczynić drugiemu; niech będą więc  $\alpha, \epsilon, \gamma, \dots$  pierwiastki pierwszego równania, i podstawmy je kolejno w drugie, jeden z wypadków  $\psi(\alpha), \psi(\epsilon), \dots$ , musi stać się zerem, i ich wieloczyn jest koniecznie w tymże samym przypadku. Lecz ten wieloczyn jest jakakolwiek funkcją symetryczną pierwiastków pierwszego równania, i odtąd może się wyrazić w funkcji swych współczynników; mamy tym sposobem wypadek szukany. Prawidło postępowania dla wyrugowania według tego sposobu jest więc wzięcie  $m$  czynników

$$\psi(\alpha) = \alpha^n - q_1 \alpha^{n-1} + q_2 \alpha^{n-2} - \dots,$$

$$\psi(\epsilon) = \epsilon^n - q_1 \epsilon^{n-1} + q_2 \epsilon^{n-2} - \dots,$$

$$\psi(\gamma) = \gamma^n - q_1 \gamma^{n-1} + q_2 \gamma^{n-2} - \dots,$$

pomnożenie ich wszystkich razem, i podstawienie na miejsce funkcji symetrycznych pierwiastków  $\alpha, \epsilon, \gamma, \dots$  ich wartości w funkcji współczynników pierwszego równania.

PRZYKŁAD. — Wyrugować  $x$  między dwoma równaniami

$$x^2 - p_1x + p_2 = 0, \quad x^2 - q_1x + q_2 = 0.$$

Mnóżmy  $(x^2 - q_1x + q_2)$ , przez  $(\beta_2 - q_1\beta + q_2)$ , przyjdzie

$$\alpha^2\beta^2 - q_1\alpha\beta(\alpha + \beta) + q_2(\alpha^2 + \beta^2) + q_1^2\alpha\beta - q_1q_2(\alpha + \beta) + q_2^2;$$

zastąpmy  $\alpha + \beta$  przez  $p_1$ ,  $\alpha\beta$  przez  $p_2$ ,  $\alpha^2 + \beta^2$  przez  $p_1^2 - 2p_2$ , mamy

$$p_2^2 - p_1p_2q_1 + q_2(p_1^2 - 2p_2) + p_2q_1^2 - q_1q_2p_1 + q_2^2,$$

albo

$$(p_1 - q_1)^2 + (p_1 - q_1)(p_1q_2 - p_2q_1):$$

takim jest wypadek szukany.

45. Otrzymałoby się tenże sam wypadek (niezważając na znak) przez podstawienie pierwiastków pierwszego równania w drugie, albo przez podstawienie pierwiastków drugiego w pierwsze.

Innemi słowy, oznaczywszy przez  $\alpha', \beta', \gamma', \dots$  pierwiastki drugiego równania, wypadek może się napisać zarówno pod jednym albo drugim kształtem

$$\varphi(\alpha') \varphi(\beta') \varphi(\gamma') \dots, \quad \text{albo} \quad \psi(x) \psi(\beta) \psi(\gamma) \dots;$$

teraz, jeżeli przypomnimy że

$$\varphi(x) = (x - \alpha) (x - \beta) (x - \gamma) \dots,$$

pierwszy kształt wychodzi na

$$(\alpha' - \alpha) (\alpha' - \beta) (\alpha' - \gamma) \dots (\beta' - \alpha) (\beta' - \beta) (\beta' - \gamma) \dots,$$



a drugi na

$$(\alpha - \alpha')(\alpha - \epsilon')(\alpha - \gamma') \dots (\epsilon - \alpha')(\epsilon - \epsilon')(\epsilon - \gamma') \dots$$

W dwóch przypadkach mamy więc wieloczyn ze wszystkich różnic między jakimkolwiek pierwiastkiem pierwszego równania i jakimkolwiek pierwiastkiem drugiego, i te dwa wieloczyny nie mogą różnić się między sobą jak tylko ich znakiem.

46. Jeżeliby równania były danymi pod kształtem jednorodnym, ze współczynnikami lub bez współczynników dwumianu,

$$a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} y + \frac{1}{2} m(m-1) a_2 x^{m-2} y^2 + \dots = 0$$

$$b_0 y^n + n b_1 x^{n-1} y + \frac{1}{2} n(n-1) b_2 x^{n-2} y^2 + \dots = 0,$$

przywiodłoby się je do kształtu poprzedzającego dzieląc przez  $a_0 y^m$ ,  $b_0 y^n$ , i otrzymałoby się  $p_1 = -\frac{m a_1}{a_0}$ ,  $q_1 = -\frac{n b_1}{b_0}$ , ... Podstawiałyby się te wartości w wypadek otrzymany za pomocą sposobu poprzedzającego, i zniósłoby się ułamki mnożąc przez najwyższą potęgę  $a_0$  i  $b_0$  znajdującą się w mianownikach; rugownik dwóch funkcji

$$a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2, \quad b_0 x^2 + 2 b_1 x y + b_2 y^2$$

wyprowadzony w ten sposób z wartości otrzymanej powyżej (44) staje się

$$(a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 + 4(a_1 b_0 - a_0 b_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Rugownik jest zawsze jakąkolwiek funkcją jednorodną współczynników dwóch równań. W rzeczy samej, przed zniesie-

niem mianowników, był on oczywiście funkcją jednorodną stopnia zero, a t $\acute{e}$ m sam $\acute{e}$ m pozostanie jeszcze jednorodnym kiedy si $\acute{e}$  pomnoży wszystkie wyrazy przez jedn $\acute{a}$  i t $\acute{e}$ ż sam $\acute{a}$  ilość. Można to tak $\acute{z}$ e widzieć stosuj $\acute{a}$ c wprost do zr $\acute{o}$ wnań spos $\acute{o}$ b  $n^{\text{ta}}$  44. Niech b $\acute{e}$ d $\acute{a}$   $x', y'; x'', y'', \dots$ , wartośc*ie* zadosyć czyni $\acute{a}$ ce pi $\acute{e}$ rwszemu; je $\acute{z}$ eli dwa zr $\acute{o}$ wnania przypuszcz $\acute{a}$  jakikolwiek czynnik sp $\acute{o}$ lny, niekt $\acute{o}$ re z tych wartośc*ie* powinny zadosyć uczyni $\acute{e}$  drugiemu. Wykona si $\acute{e}$  wi $\acute{e}$ c wieloczyn

$$(b_0 x'^n + nb_1 x'^{n-1} y' + \dots) (b_0 x''^n + nb_1 x''^{n-1} y'' + \dots), \dots$$

i zast $\acute{a}$ pi si $\acute{e}$  funkcye symetryczne pierwiastk $\acute{o}$ w przez ich wartośc*ie* w funkcyi sp $\acute{o}$ lczynn $\acute{o}$ w pi $\acute{e}$ rwszego zr $\acute{o}$ wnania, jak w  $n^{\text{to}}$  38.

47. Rugownik dw $\acute{o}$ ch zr $\acute{o}$ wnań stopni  $m$  i  $n$  jest  $n^{\text{to}}$  stopnia wzgl $\acute{e}$ dem sp $\acute{o}$ lczynn $\acute{o}$ w pi $\acute{e}$ rwszego, i  $m^{\text{to}}$  wzgl $\acute{e}$ dem sp $\acute{o}$ lczynn $\acute{o}$ w drugiego.

W rzeczy sam $\acute{e}$ j, mo $\acute{z}$ e si $\acute{e}$  on napisać, b $\acute{a}$ d $\acute{z}$  to jako wieloczyn z  $m$  czynnik $\acute{o}$ w  $\psi(\alpha) \psi(\beta) \dots$  zawi $\acute{e}$ raj $\acute{a}$ cych ka $\acute{z}$ dy w pi $\acute{e}$ rwszym stopniu sp $\acute{o}$ lczynn $\acute{o}$ ki drugiego zr $\acute{o}$ wnania, b $\acute{a}$ d $\acute{z}$  to jako wieloczyn z  $n$  czynnik $\acute{o}$ w  $\varphi(\alpha') \varphi(\beta') \dots$  zawi $\acute{e}$ raj $\acute{a}$ cych ka $\acute{z}$ dy w pi $\acute{e}$ rwszym stopniu sp $\acute{o}$ lczynn $\acute{o}$ ki pi $\acute{e}$ rwszego. Bior $\acute{a}$ c pod uwag $\acute{e}$  jedynie sam kszt $\acute{a}$ łt  $\psi(\alpha) \psi(\beta), \dots$ , mo $\acute{z}$ emy zar $\acute{o}$ wno widzieć  $\acute{z}$ e ten kszt $\acute{a}$ łt, zawi $\acute{e}$ raj $\acute{a}$ cy oczywiśc*ie* sp $\acute{o}$ lczynn $\acute{o}$ ki drugiego zr $\acute{o}$ wnania w stopniu  $m$ , zamyka sp $\acute{o}$ lczynn $\acute{o}$ ki pi $\acute{e}$ rwszego w stopniu  $n$ , poniewa $\acute{z}$  funkcye symetryczne tam si $\acute{e}$  znajduj $\acute{a}$ ce zamykaj $\acute{a}$  ka $\acute{z}$ dy pierwiastek w pot $\acute{e}$ dz $\acute{e}$   $n$  i nie zamykaj $\acute{a}$  go podniesione do pot $\acute{e}$ gi jakiejkolwiek wy $\acute{z$ szej (35).

48. W $\acute{a}$ żność rugownika jest  $mn$ , to jest  $\acute{z}$ e summa wskaźnik $\acute{o}$ w w ka $\acute{z}$ dym wyrazie jest stał $\acute{a}$  i równ $\acute{a}$   $mn$ . W rzeczy sam $\acute{e}$ j, je $\acute{z}$ eli si $\acute{e}$  pomnoży ka $\acute{z}$ dy z pierwiastk $\acute{o}$ w  $\alpha, \beta, \dots; \alpha', \beta', \dots$  przez ten $\acute{z}$ e sam czynnik  $\lambda$ , ka $\acute{z}$ da z  $mn$  różnic  $\alpha - \alpha'$  (45) b $\acute{e}$ dzie

pomnożoną przez tenże sam czynnik, a rugownik przez  $\lambda^{mn}$ . Lecz, dla pomnożenia pierwiastków przez  $\lambda$ , dosyć zastąpić  $p_1, q_1$  przez  $\lambda p_1, \lambda q_1$ ;  $p_2, q_2$  przez  $\lambda^2 p_2, \lambda^2 q_2, \dots$ , i, przy wykonaniu tej zmiany w rugowniku, każdy wyraz będzie znajdował się pomnożony przez  $\lambda^{mn}$ , co znaczy że summa wskaźników każdego wyrazu jest równą  $mn$ .

Można znaleźć to samo za pomocą zasady n<sup>ra</sup> 34.

W funkcyi  $\psi(x)$ , summa wykładnika każdego wyrazu i wskaźnika spółczynnika odpowiedniego jest  $n$ , to jest że  $\psi(x)$  jest summą pewnej liczby wyrazów kształtu  $q_{n-i}x^i$ . Jeżeli weźmiemy więc pewną liczbę wyrazów w każdym z czynników  $\psi(\alpha) \psi(\beta) \dots$ , wyrazem odpowiednim wieloczynu będzie  $q_{n-i}q_{n-j}q_{n-k}\alpha^i\beta^j\gamma^k \dots$ , a jeżeli połączymy ten wieloczyn ze wszystkimi wieloczynami w których się przedstawiają też same spółczynniki, będziemy mieli  $q_{n-i}q_{n-j}q_{n-k}\Sigma\alpha^i\beta^j\gamma^k \dots$ . Summą wskaźników spółczynnika  $q$  jest

$$n - i + n - j + n - k \dots,$$

albo, ponieważ znajduje się  $m$  czynników,

$$mn - (i + j + k + \dots).$$

Lecz, podług n<sup>ra</sup> 34, summą wskaźników spółczynnika  $p$  w wyrażeniu  $\Sigma\alpha^i\beta^j\gamma^k \dots$  jest  $i + j + k + \dots$  summą dwóch szeregów wskaźników jest więc  $mn$ , czego właśnie chcieliśmy dowieść.

Wypadek do któregośmy świeżo doszli można jeszcze wysłowić tym sposobem (\*): Jeżeli  $p_1, q_1$  zamykają w sobie jakąkol-

(\*) Albo też jeszcze w sposób następujący: Jeżeli się podstawi w rugowniku, na miejsce każdego spółczynnika  $p_a$ , wyraz  $\alpha^a$  jaki ten spółczynniki mnoży w zrównaniu pierwotnem, każdy wyraz rugownika staje się podzielny przez  $\alpha^{mn}$ , albo też, pod kształtem jednorodnym, jeżeli się zastąpi każdy spółczynniki  $\alpha_a$  przez  $\alpha^a y^{m-a}$ , wszystkie wyrazy rugownika staną się podzielniemi przez  $\alpha^{mn} y^{mn}$ .



wiek nową zmienną  $z$  w pierwszym stopniu, gdy  $p_2, q_2$  zamykają tę zmienną w drugim i pierwszym,  $p_3, q_3$  w trzecim i w stopniach niższych, i tak dalej, rugownik będzie ją zawierał, ogólnie, w stopniu  $mn$ .

Jest rzeczą oczywistą, że te wypadki pozostałyby zarówno dla równań napisanych pod kształtem jednorodnym  $a_0x^m + \dots$ , ponieważ wskaźniki są sobie odpowiedniami w dwóch kształtach. Widzimy także że z powodu symetrii byłyby one jeszcze prawdziwemi gdyby równania zostały położone pod kształtem

$$a_mx^m + ma_{m-1}x^{m-1}y + \dots,$$

gdzie wskaźnik każdego współczynnika równa się wykładnikowi zmiennej  $x$  zamiast być równym wykładnikowi zmiennej  $y$ .

49. Ponieważ rugownik jest jakkolwiek funkcją z różnic między pierwiastkiem jakimkolwiek jednego ze równań i pierwiastkiem jakimkolwiek drugiego, pozostanie on niezmiennym jeżeli się powiększy o tę samą ilość pierwiastki dwóch równań, to jest jeżeli w nich zastąpimy  $x$  przez  $x + \lambda$ . Wynika ztąd, jak w nrze 37, że rugownik powinien zadosyć uczynić równaniu różniczkowemu

$$m \frac{d\Delta}{dp_1} + (m-1)p_1 \frac{d\Delta}{dp_2} + (m-2)p_2 \frac{d\Delta}{dp_3} + \dots \\ + n \frac{d\Delta}{dq_1} + (n-1)q_1 \frac{d\Delta}{dq_2} + \dots = 0,$$

albo, jak w nrze 39, pisząc równania ze współczynnikami dwumianu

$$a_0 \frac{d\Delta}{da_1} + 2a_1 \frac{d\Delta}{da_2} + \dots + b_0 \frac{d\Delta}{db_1} + 2b_1 \frac{d\Delta}{db_2} + \dots = 0.$$



50. Mając dane dwa równania jednorodne o trzech zmiennych stopni  $m$  i  $n$ , liczbą układów wartości mogących zadosyć uczynić zarazem tym dwóm równanióm jest  $mn$  (\*).

Niech będą

$$ax^m + (by + cz)x^{m-1} + (dy^2 + eyz + fz^2)x^{m-2} + \dots = 0$$

$$a'x^n + (b'y + c'z)x^{n-1} + (d'y^2 + e'yz + f'z^2)x^{n-2} + \dots = 0$$

dwa równania urządzone według potęg  $x$ ; jeżeli wyrugujemy  $x$ , współczynnik  $x^{m-1}$  jest jakkolwiek funkcją jednorodną pierwszego stopnia  $y$  i  $z$ , współczynnik  $x^{m-2}$  jakkolwiek funkcją podobną drugiego stopnia, i tak dalej, widzimy podług n<sup>ru</sup> 48 że rugownik będzie jakkolwiek funkcją jednorodną  $y$  i  $z$  stopnia  $m$ .

Można więc znaleźć  $mn$  wartości na  $y$  i  $z$  (\*\*) robiących rugownik równy zeru. Jeżeli podstawimy jedną którąkolwiek z pomiędzy nich w równania dane, będą one miały, ponieważ ich rugownik staje się zerem, jakikolwiek pierwiastek spólny jeżeli się rozwiąże je względem  $x$ : ta wartość na  $x$ , połączona z wartościami na  $y$  i  $z$  już otrzymanymi, daje układ wartości zadosyć czyniących równanióm danym; mamy więc razem  $mn$  układów podobnych wartości. Podamy dalej sposób za pomocą którego można, gdy dwa równania mają jakikolwiek pierwiastek spólny, oznaczyć go bezpośrednio.

(\*) Te równania mogą się uważać za przedstawiające dwie krzywe stopni  $m$  i  $n$ . Twierdzenie zawarte w tym numerze tłumaczy się geometrycznie mówiąc że krzywe przecinają się w  $mn$  punktach. Sprowadza się te równania do kształtu zwyczajnego robiąc  $x = 1$ .

(\*\*) Czytelnik winien sobie przypomnieć że gdy używamy równań jednorodnych, stosunek zmiennych stanowi wszystko co nas w tém miejscu najwięcej zajmować powinno. I tak, w tym przypadku,  $z'$  może być wzięte dowolnie, wartość odpowiednia na  $y$  jest oznaczona przez równanie  $\frac{y}{z}$ .

PRZYKŁAD. — Znaleźć współrzędne czterech punktów wynikających z przecięcia dwóch sekcij konicznych przedstawionych przez równania

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0.$$

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2f'yz + 2g'zx + 2h'xy = 0.$$

Uporządkujemy równania według potęg  $x$  i wyrugujemy tę zmienną : wypadkiem jest, podług nr<sup>u</sup> 46,

$$\{ (ab')y^2 + 2(af')yz + (ac')z^2 \}^2$$

$$4[(ah')y + (ag')z] \{ (bh')y^3 + [(bg') + 2(fh')]y^2z$$

$$+ [(ch') + 2(fg')yz^2 + (cg')z^3 \} = 0,$$

gdzie napisaliśmy, jak w pierwszym Rozdziale,  $(ab')$  zamiast  $ab' - a'b$ .

To równanie, rozwiązane względem  $\frac{y}{z}$ , da wartości odpowiednie dla czterech punktów stanowiących przecięcia dwóch sekcij konicznych. Znalazszy je i podstawivszy jedno z nich w dwa równania, otrzymamy, szukając ich spólnego pierwiastku, wartość odpowiednią na  $\frac{x}{z}$ . Mogliśmy byli oznaczyć od razu cztery wartości na  $\frac{x}{z}$  rugując  $y$ , lecz podstawienie jest potrzebnem dla poznania jaka jest wartość na  $y$  odpowiadająca każdej wartości na  $x$ . Robiąc  $z = 1$ , wszystko co poprzedza znajduje się wyrażonem w zwyczajnym układzie współrzędnych.

51. Wszelka funkcyja symetryczna z liczby  $mn$  wartości zadosyc czyniących jednocześnie dwóm równanióm może się wyrazić w funkcyi ich współczynników. Jest rzeczą widoczną że możemy tym sposobem wyrazić funkcyje symetryczne zamykające w sobie tylko jedną ze zmiennych. Gdyż wyrugowawszy  $y$ , mamy jakiegokolwiek równanie w  $x$ , i wszelkie funkcyje symetryczne z liczby  $mn$  wartości zadosyc czyniących dwóm równanióm danym mogą się wyrazić w funkcyi współczynników

tego zrównania : tak samo rzecz się ma dla  $y$ . Na przykład, w przypadku dwóch sekcij konicznych, oznaczywszy przez  $x_1, y_1, \dots$  spółrzedne punktów przecięcia, widzimy bezpośrednio w jaki sposób można wyrazić funkcyje symetryczne takie jak

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2,$$

i jedyny punkt wymagający niektórych objaśnień jest wiadomość jakim sposobem dadzą się wyrazić funkcyje symetryczne w które wchodzi dwie zmienne, takie jak

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Dla osiągnięcia tego, wprowadźmy jakąkolwiek nową zmienną  $t = \lambda x + \mu y$ , i za pomocą tego zrównania dowolnego, wyrugujmy  $x$  i  $y$  ze zrównań danych. I tak  $y$  ruguje się bezpośrednio podstawiając jego wartość wyciągniętą ze zrównania  $t = \lambda x + \mu y$ , i mamy wtedy dwa zrównania w  $x$  stopni  $m$  i  $n$ : ich rugownik będzie stopnia  $mn$  względem  $t$ , i jego pierwiastki będące oczywiście  $\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \dots, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ , są wartościami na  $x$  i  $y$  spółnymi dwóm zrównanióm. Spółczynniki tego zrównania w  $t$  będą zawierały w sobie  $\lambda$  i  $\mu$ . Jeżeli utworzymy summę potęg  $k$  z jego pierwiastków, która będzie  $(\lambda x_1 + \mu y_1)^k + (\lambda x_2 + \mu y_2)^k + \dots$ , spółczynnikiem  $\lambda^k$  w téj summie będzie  $\Sigma x_1^k$ , a spółczynnikiem  $\lambda^{k-1}\mu$  da  $\Sigma x_1^{k-1}y$ , i tak dalej.

Kilka słów wystarczą dla przełożenia tego co poprzedza na język zrównań jednorodnych. Widzimy bezpośrednio w jaki sposób można utworzyć funkcyje symetryczne zamykające w sobie tylko dwie zmienne, takie jak  $\Sigma y_1 z_2 z_3 z_4$ , gdyż wyciąga się je (jak w nrze 38) ze zrównania jednorodnego otrzymanego rugując drugą zmienną. Jedyny punkt pozostający do wyjaśnienia jest wiadomość w jaki sposób dadzą się utworzyć funkcyje



symetryczne obejmujące w sobie trzy zmienne, i przychodzi się do tego właśnie, jak powyżej, kładąc

$$t = \lambda x + \mu y.$$

PRZYKŁAD. — Utworzyć funkcje symetryczne współrzędnych czterech punktów stanowiących przecięcia dwóch sekcij konicznych.

Zrównanie otrzymane w ostatnim przykładzie daje bezpośrednio

$$y_1 y_2 y_3 y_4 = (ac')^2 + 4(ag')(cg'), \quad z_1 z_2 z_3 z_4 = (ab')^2 + 4(ah')(bh'),$$

i, według symetrii,

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 x_4 &= (bc')^2 + 4(bf')(cf') \\ - \Sigma(y_1 y_2 y_3 z_4) &= 4[(ac')(af') + (ah')(cg') + (ag')(ch') \\ &\quad + 2(ag')(fg')]\dots \end{aligned}$$

Dla wzięcia za przykład jakiegokolwiek funkcji zamykającej w sobie trzy zmienne, utworzmy  $\Sigma(x_1 y_1 z_1^2 z_2^2 z_3^2)$ , odpowiadającą  $\Sigma(x'y')$  gdy zrównania są napisane pod kształtem niejednorodnym.

Według teorii poprzedzającej, mamy do wykonania rugowanie między zrównaniami danymi i zrównaniem  $t = \lambda x + \mu y$ , i funkcja szukana będzie połową spółczynnika  $\lambda\mu$  w rozwinięciu  $\Sigma(t_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2)$ . Jeżeli wypadkiem rugowania jest

$$At^4 + (B\lambda + C\mu)t^3 z + (D\lambda^2 + E\lambda\mu + F\mu^2)t^2 z^2 + \dots,$$

otrzyma się

$$\Sigma(t_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2) = (B\lambda + C\mu)^2 - 2A(D\lambda^2 + E\lambda\mu + F\mu^2)$$

i

$$\Sigma(x_1 y_1 z_1^2 z_2^2 z_3^2) = BC - AE.$$

Rugowanie daje

$$A = (ab')^2 + 4(ah')(bh'),$$

$$B = 4[(ba')(bg') + (bf')(ah') + (bh')(af') + 2(bh')(gh')],$$

$$C = 4[(ab')(af') + (ag')(bh') + (ah')(bg') + 2(ah')(fh')],$$

$$E = 4[(ac')(bh') + (bc')(ah') - 2(af')(hf')$$

$$- 2(bg')hg') + 4(hf')(hg')].$$



52. Utworzyć rugownik z trzech zrównań jednorodnych o trzech zmiennych stopni  $m, n, p$ .

Równając rugownik zeru, wyraża się warunek konieczny do znalezienia jakiegokolwiek układu wartości na  $x, y, z$  zadosyć czyniących trzem zrównaniom (\*). A więc, jeżeli takim jest obecny przypadek, to rozwiązując dwa zrównania i podstawiając kolejno w trzecie wartości znalezione dla  $x, y, z$ , jeden z tych układów wartości powinien zadość uczynić temu zrównaniu. Odtąd wieloczyn wszystkich wypadków podstawienia powinien być równy zeru. Niech więc będą  $x', y', z', x'', y'', z'', \dots$  układy wartości zadosyć czyniące dwóm zrównaniom i których liczba jest  $np$  (50), podstawmy te wartości w pierwsze i zastosujmy mnożenie do wszystkich  $np$  wypadków ogólnie oznaczonych  $\varphi(x', y', z')$ ,  $\varphi(x'', y'', z''), \dots$  Wieloczyn tym sposobem otrzymany zamyka w sobie oczywiście, same tylko funkcje symetryczne (rozwiązań czyli pierwiastków spólnych dwóm ostatnim zrównaniom)  $x', y', z', \dots$ , które, podług n<sup>ru</sup> 51, mogą wszystkie wyrazić się w funkcjach spółczynników dwóch ostatnich zrównań: wyrażając je tym sposobem, otrzymuje się rugownik szukany.

53. Rugownik jest jakąkolwiek funkcją jednorodną stopnia  $np$  względem spółczynników pierwszego zrównania, stopnia  $mp$  względem spółczynników drugiego, i stopnia  $mn$  względem spółczynników trzeciego.

W rzeczy saméj, każdy z  $np$  czynników  $\varphi(x', y', z')$ ... jest funkcją jednorodną pierwszego stopnia spółczynników pierwszego zrównania, i wyrażenie funkcji symetrycznych za pomocą spółczynników zamyka w sobie same tylko spółczynniki dwóch ostatnich zrównań których rozwiązanie dało  $x', y', z', \dots$

---

(\*) Jeżeli trzy zrównania przedstawiają krzywe, warunek że rugownik jest równy zeru wskazuje że trzy krzywe powinny przejść przez jeden punkt spólny.

Rugownik jest w stopniu  $np$  względem współczynników pierwszego równania : jego stopień względem współczynników dwóch innych oznaczy się tak samo.

54. Ważnością rugownika jest  $mnp$ , to jest że jeżeli wszystkie współczynniki mnożące pierwszą potęgę jakiegokolwiek zmiennej  $z$  mają wskaźnik 1, współczynniki mnożące  $z^2$ , wskaźnik 2, i tak dalej, summa wszystkich wskaźników w każdym wyrazie rugownika będzie  $mnp$ . Innymi słowy, jeżeli wszystkie współczynniki mnożące  $z$  zawierają jakąkolwiek nową zmienną w pierwszym stopniu, jeżeli wszystkie współczynniki mnożące  $z^2$  zawierają tę zmienną w drugim stopniu i pierwszym, i t. d., rugownik zawierać będzie tę zmienną w stopniu  $mnp$ .

To twierdzenie dowodzi się jak w nrze 48. A naprzód, jest rzeczą oczywistą że, jeżeli jakimkolwiek równaniu jednorodnemu stopnia  $m$  zadamy czynią wartości  $x', y', z'$ , i jeżeli się odmieni to równanie mnożąc każdy współczynnik przez jakąkolwiek potęgę  $\lambda$  równą potędze z jaką mnoży ten współczynnik, równanie tak przekształcone będzie sprawdzonem przez wartości  $\lambda x', \lambda y', \lambda z'$ ; albo, ogólnie, że wypadek podstawienia  $\lambda x', \lambda y', \lambda z'$  w równanie przekształcone równa się wypadkowi podstawienia  $x', y', z'$  w równanie pierwotne pomnożonemu przez  $\lambda^m$ . I tak, weźmy równanie

$$x^3 + y^3 - z^3 - z^2x - zy^2,$$

równaniem przekształconem danego jest

$$x^3 + y^3 - \lambda^3 z^3 - \lambda^2 z^2 x - \lambda z y^2,$$

i wypadek podstawienia  $\lambda x', \lambda y', \lambda z'$  w to ostatnie jest oczywiście równym wypadkowi podstawienia  $x', y', z'$  w równanie dane pomnożonemu przez  $\lambda^3$ . A zatem, jeżeli się przekształci trzy równania dane mnożąc każdy współczynnik przez

jakąkolwiek potęgę  $\lambda$  równą potędze  $z$  jaka mnoży ten współczynnik, i jeżeli  $x', y', z'$  przedstawiają jakikolwiek układ wartości zadosyć czyniący dwóm ostatnim równanióm pierwotnym, zrównania przekształcone będą sprawdzone przez wartości  $\lambda x', \lambda y', z'$ , i wypadek podstawienia tych nowych wartości w pierwsze równanie będzie  $\lambda^m \varphi(x', y', z')$ . Rugownik który jest wieloczynem o  $np$  czynnikach kształtu  $\varphi(x', y', z'), \dots$  będzie pomnożonym przez  $\lambda^{mnp}$ . Niech będzie więc  $a_k b_l c_m \dots$  jakikolwiek wyraz rugownika, każdy wskaźnik jest oczywiście odpowiadającym potędze  $z$  jaka mnoży współczynnik; ponieważ zmiana  $a_k$  na  $\lambda^k a_k, b_l$  na  $\lambda^l b_l, \dots$  daje w skutku mnożenie tego wyrazu przez  $\lambda^{mnp}$ , summa  $k + l + \dots$  jest koniecznie równą  $mnp$ .

55. Dowodzi się podobnie że trzy równania są, w ogólności, sprawdzone przez  $mnp$  układów wartości; że wszelka funkcja symetryczna tych wartości może się wyrazić za pomocą współczynników, i że można utworzyć rugownik czterech równań rozwiązując trzy jakiegokolwiek z pomiędzy nich, podstawiając kolejno układy wartości tak otrzymane w czwarte, tworząc wieloczyn wypadków podstawienia, i nakoniec wyrażając ten wieloczyn za pomocą współczynników równań przez metodę funkcji symetrycznych. Utworzymy tym sposobem rugownik z liczby ilukolwiek równań, i będziemy mieli twierdzenie ogólne następujące. Rugownik  $k$  równań o  $k - 1$  zmiennych niezależnych jest jakąkolwiek funkcją jednorodną współczynników każdego równania którego stopień jest równy wieloczynowi stopni wszystkich innych równań. Jeżeli się oznaczy każdy współczynnik we wszystkich równaniach jakimkolwiek wskaźnikiem równym wykładnikowi jednej ze zmiennych jaką ten współczynnik mnoży, summa wskaźników w każdym wyrazie rugownika będzie równą wieloczynowi stopni we wszystkich równaniach. I nakoniec, jeżeli ma się  $k$  równań o  $k$  zmiennych, liczba układów wartości zadosyć czyniących wszyst-



kim tym równaniem jest równą wieloczynowi ich stopni.

56. Jeżeli rugownik ilukolwiek równań niszczy się, te równania przyjmują jakikolwiek układ rozwiązań spólnych, i pokażemy w jaki sposób można go znaleźć nie rozwiązując równań. Sposób jest tenże sam jakakolwiek bądź jest liczba zmiennych; dla większej prostoty, poczniemy od dwóch równań

$$\varphi = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots = 0,$$

$$\psi = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots = 0.$$

Przypuśćmy że jakikolwiek pierwiastek  $x = \alpha$  drugiego równania zadosyć czyni pierwszemu i że, tém samém, rugownik  $R$  staje się zerem. Możemy w  $\varphi$  zmienić współczynniki  $a_m$  na  $a_m + A_m$ ,  $a_{m-1}$  na  $a_{m-1} + A_{m-1}$ , ..., i równanie przekształcone

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots = 0$$

będzie jeszcze sprawdzoném przez wartość  $x = \alpha$ , byleby tylko ilości  $A_m, A_{m-1}, \dots$  były związane warunkiem

$$A_m \alpha^m + A_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots = 0,$$

ponieważ reszta pierwszej strony równania znika z założenia kiedy się robi  $x = \alpha$ . Równanie przekształcone ma więc jakikolwiek pierwiastek spólny z  $\psi$ , i tém samém, nowy rugownik jaki się otrzymuje łącząc go (t. j. ten pierwiastek) z  $\psi$  jest także zerem. Lecz ten rugownik wyprowadzi się z rugownika  $\varphi$  i  $\psi$  zmieniając w nim  $a_m$  na  $a_m + A_m, \dots$  tak działając przyjdzie

$$R + \left( A_m \frac{dR}{da_m} + A_{m-1} \frac{dR}{da_{m-1}} + \dots \right) + \dots = 0.$$



R jest zerem z założenia, a ilości  $A_m, \dots$  mogące być tak ma-  
łymi jak się tylko podoba, wyrazy zawierające w pierwszejj  
potędze powinny zniknąć odrębnie. Mamy więc

$$A \frac{dR}{da_m} + A_{m-1} \frac{dR}{da_{m-1}} + \dots = 0,$$

związek który powinien być jednaki z warunkiem

$$A_m \alpha^m + A_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots,$$

jedyny, jak to już widzieliśmy, któremu  $A_m, A_{m-1} \dots$  powinny  
zadość uczynić. Wynika ztąd że pochodne powinny być pro-  
porcyonalne do  $\alpha^m, \alpha^{m-1}, \dots$ , i że można znaleźć  $\alpha$  dzieląc  
jedną z nich przez następującą.

WNIOSEK I. — Niech będą  $a_p, a_q$  dwa spółczynniki jakie-  
kolwiek  $\varphi$ , powinniśmy mieć, gdy R jest zerem,

$$\frac{dR}{da_p} : \frac{dR}{da_{p-k}} :: \frac{dR}{da_q} : \frac{dR}{da_{q-k}},$$

ponieważ stosunkiem dwóch pierwszych pochodnych jest  $\alpha^k$   
i że to samo stosować się zupełnie powinno do dwóch innych ;  
wypada ztąd że różnica

$$\frac{dR}{da_p} \frac{dR}{da_{q-k}} - \frac{dR}{da_q} \frac{dR}{da_{p-k}}$$

jest zerem gdy R jest niem także, i tём samém, przyjmuje R  
jako czynnik : innemi słowy, funkcyja

$$\frac{dR}{da_p} \frac{dR}{da_q} - \frac{dR}{da_r} \frac{dR}{da_s}$$

zawiera R jako czynnik gdy mamy

$$p + q = r + s.$$

WNIOSEK II. — Podobnież, jest rzeczą oczywistą, że pochodne rugownika względem współczynników  $\psi$  są proporcjonalne do  $\alpha^n, \alpha^{n-1}, \dots$ ; wynika ztąd, jak we wniosku poprzedzającym, że

$$\frac{dR}{da_p} : \frac{dR}{da_{p-k}} :: \frac{dR}{db_q} : \frac{dR}{db_{q-k}}$$

gdy R jest zerem, i że funkcyą

$$\frac{dR}{da_p} \frac{dR}{db_q} - \frac{dR}{da_r} \frac{dR}{db_s}$$

est podzielną przez R gdy

$$p + q = r + s.$$

WNIOSEK III. — Nakoniec, jeżeli podstawimy w drugie równanie wartości  $\alpha^n, \alpha^{n-1}, \dots$  dane powyżej, gdy R jest zerem,

$$a_n \frac{dR}{da_n} + a_{n-1} \frac{dR}{da_{n-1}} + \dots = 0.$$

Pierwsza strona tego równania nie może oczywiście przypuścić czynnika R, ponieważ współczynniki  $\psi$  powyższego wyrażenia znajdują się w stopniu niższym o jedność jak w samym R. Powinno więc to wyrażenie sprowadzić się tożsamościowo do zera.

57. Wypadki numeru poprzedzającego mogą się sprawdzić obliczając wartości pochodnych R. Wiemy (44) że  $R = \varphi(\alpha) \varphi(\beta) \varphi(\gamma) \dots$ . Lecz, ponieważ  $\varphi(\alpha)$  jest równem  $a_m \alpha^m + a_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots$ , mamy

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = \alpha^p$$

a tém samém

$$\frac{dR}{da_p} = \alpha^p \varphi(\beta) \varphi(\gamma) \dots + \beta^q \varphi(\alpha) \varphi(\gamma) \dots + \dots$$

Jeżeli  $\alpha$  jest jakimkolwiek pierwiastkiem  $\varphi$ ,

$$\varphi(\alpha) = 0,$$

i  $\frac{dR}{da_p}$  sprowadza si do

$$\alpha^p \varphi(\beta) \varphi(\gamma) \dots;$$

poniewa.

$$\frac{dR}{da_q} = \alpha^q \varphi(\beta) \varphi(\gamma) \dots$$

a tm samem

$$\frac{dR}{da_p} : \frac{dR}{da_q} :: \alpha^p : \alpha^q.$$

Mnoąc, przyjdzie take

$$\frac{dR}{da_p} \frac{dR}{da_q} = \alpha^{p+q} [\varphi(\beta)]^2 [\varphi(\gamma)]^2 \dots + R \alpha^p \beta^q + \alpha \beta^p \varphi(\gamma) \dots + \dots$$

i łatwo widzieć, e funkcj mnozc R jest

$$\frac{d^2R}{da_p da_q};$$

odcignijmy teraz  $\frac{dR}{da_r} \frac{dR}{da_s}$ , wyrazy niezalene od R zniszcz si jeeli  $p + q = r + s$ , i pozostanie tylko

$$\frac{dR}{da_p} \frac{dR}{da_q} - \frac{dR}{da_r} \frac{dR}{da_s} = R \left( \frac{d^2R}{da_p da_q} - \frac{d^2R}{da_r da_s} \right).$$

Zobaczymy tak samo że  $\frac{dR}{da_p} \frac{dR}{db_q} - \frac{dR}{da_q} \frac{dR}{db_p}$  jest podzielnym przez R; lecz iloraz nie jest  $\frac{d^2R}{da_p db_q} - \frac{d^2R}{da_q db_p}$ .

58. Sposób nr<sup>ów</sup> 56 i 57 stosuje się bez trudności do liczby iluokolwiek zmiennych. Dla większej jasności, ograniczymy się na trzech zmiennych, a toż samo dowodzenie da się zastosować słowo w słowo do przypadku ogólnego.

Niech będą trzy równania

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0,$$

gdzie  $\varphi$  jest równym  $a_{m00}x^m + \dots + a_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma + \dots$ , a  $x', y', z'$  oznaczają wartości zadosyć czyniące trzem równaniom: te wartości zadosyć im czynić będą jeszcze, jeżeli zmienimy w  $\varphi$ ,  $a_{m00}$  na  $a_{m00} + A_{m00}$ ,  $a_{\alpha\beta\gamma}$  na  $a_{\alpha\beta\gamma} + A_{\alpha\beta\gamma}, \dots$ , byleby tylko było

$$A_{m00}x^m + \dots + A_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma + \dots = 0;$$

lecz, jak w nr<sup>ze</sup> 56, powinniśmy otrzymać także

$$A_{m00} \frac{dR}{dA_{m00}} + \dots + A_{\alpha\beta\gamma} \frac{dR}{dA_{\alpha\beta\gamma}} + \dots = 0,$$

i, porównywając te dwa równania, widzimy że każdy wyraz  $x^\alpha y^\beta z^\gamma$  powinien być proporcjonalnym pochodnej R względem swego współczynnika: będziemy więc mieli wartości na  $x', y', z'$  biorąc stosunki pochodnych R względem współczynników wyrazów których stosunkiem jest  $x'$  albo  $y'$  albo  $z'$ : można to sprawdzić jak w nr<sup>ze</sup> 57. Podstawmy, w rzeczy samej, w równanie  $\varphi$  pierwiastki wspólne równaniom  $\psi$  i  $\chi$ , i niech będą  $\varphi', \varphi'', \dots$  wypadki tych podstawień; wiemy że

$$R = \varphi' \varphi'' \varphi''' \dots$$

$$\frac{dR}{dA_{\alpha\beta\gamma}} = x'^\alpha y'^\beta z'^\gamma \varphi'' \varphi''' \dots + x''^\alpha y''^\beta z''^\gamma \varphi' \varphi''' \dots + \dots$$



Jeżeli przypuścimy  $\varphi' = 0$ , wartość tego wyrażenia sprowadzi się do swego pierwszego wyrazu i widzimy, jak powyżej, że pochodna względem każdego współczynnika jest proporcjonalną wyrazowi jaki ten współczynnik mnoży. Można ztąd wyprowadzić też same wnioski jak w n<sup>rze</sup> 56.

59. Jeżeli jakikolwiek układ zrównań przyjmuje dwa układy pierwiastków spólnych, nie tylko rugownik R zniszczy się, lecz dzieje się podobnie z jego pochodnymi względem wszystkich współczynników. Gdyż jest rzeczą oczywistą że wartości pochodnych danych w n<sup>rze</sup> 57 zniszczą się wszystkie jeżeli  $\varphi(\alpha)$  i  $\beta$  są zerami, albo, jak w n 58, jeżeli  $\varphi'$  i  $\varphi''$  są oba zerami. W tym przypadku, wartości pierwiastków spólnych otrzymują się za pomocą jakiegokolwiek bądź zrównania drugiego stopnia gdzie figurują drugie pochodne R. Wskazania następujące jakie, dla skrócenia, damy tylko w przypadku dwóch zrównań, zastosują się dosłownie do przypadku ogólnego.

Mamy (57)

$$\frac{d^2R}{da_p^2} = \alpha^p \beta^p \varphi(\gamma) \varphi(\delta) \dots + \beta^p \gamma^p \varphi(\alpha) \varphi(\delta) \dots + \dots,$$

wyrażenie które, gdy  $\varphi(\alpha)$  i  $\varphi(\beta)$  są zerami, sprowadzi się do jednego wyrazu

$$\alpha^p \beta^p \varphi(\gamma) (\varphi\delta) \dots$$

Otrzyma się podobnie

$$\frac{d^2R}{da_p da_q} = (\alpha^p \beta^q + \alpha^q \beta^p) \varphi(\gamma) \varphi(\delta) \dots,$$

$$\frac{d^2R}{ad_p^2} = \alpha^p \beta^q \varphi(\gamma) \varphi(\delta) \dots,$$

a jeżeli rozwiążemy względem  $\frac{\lambda}{\mu}$  równanie drugiego stopnia

$$\lambda^2 \frac{d^2 R}{da_7^2} - \lambda \mu \frac{d^2 R}{da_7 da_7} + \mu^2 \frac{d^2 R}{da_7^2} = 0,$$

jego pierwiastki dadzą stosunki  $\frac{\alpha'}{\alpha'}$ ,  $\frac{\beta'}{\beta'}$ .

Jeśliby równania przyjmowały trzy układy pierwiastków wspólnych, wszystkie drugie pochodne ilości R byłyby zerami, i pierwiastki wspólne otrzymałyby się posuwając rachunek do pochodnych trzecich i rozwiązując jakiegokolwiek bądź równanie trzeciego stopnia.

## ROZDZIAŁ VII.

### WYRAŻENIE RUGOWNIKÓW POD KSZTAŁTEM WYZNACZNIKÓW.

---

60. Metoda rugowania za pomocą funkcij symetrycznych jest, z punktu widzenia teoretycznego, nierównie lepsza niż wszelka inna, ponieważ stosuje się do jakiegokolwiek bądź liczby zmiennych; wszelako, gdy jest ona nie dosyć skorą do wykonania w praktyce i nie dostarcza wypadków pod kształtem najdogodniejszym, wskażemy, w tym rozdziale, inne metody rugowania. Następująca przedstawia się najnaturalniej: jest ona, w gruncie, jednaka z metodą zwaną *największego wspólnego dzielnika*. Widzieliśmy już że rugownikiem dwóch zrównań liniowych

$$ax + b = 0, \quad a'x + b' = 0$$

jest wyznacznik  $ab' - a'b = 0$ . Jeżeli mamy teraz dwa zrównania drugiego stopnia

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

mnóżmy pierwsze przez  $a'$ , drugie przez  $a$  i odciągnijmy, przyjdzie

$$(ab')x + (ac') = 0.$$

Mnóżmy pierwsze przez  $c'$ , drugie przez  $c$ , odciągnijmy i podzielmy przez  $x$ , przyjdzie także

$$(ac')x + (bc) = 0.$$

Zagadnienie zostaje więc przywiedzione do wyrugowania zmiennej między dwoma równaniami linijsnemi, i wypadek otrzymany z rugowania daje

$$(ac')^2 + (ba')(bc') = 0.$$

61. Jeżeli założymy sobie wyrugować  $x$  między dwoma równaniami trzeciego stopnia

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0,$$

mnóżmy pierwsze przez  $a'$ , drugie przez  $a$  i odciągnijmy; mnóżmy także pierwsze przez  $d'$ , drugie przez  $d$ , odciągnijmy i podzielmy przez  $x$ : zagadnienie sprowadza się do wyrugowania zmiennej między równaniami drugiego stopnia

$$(ab')x^2 + (ac')x + (ad') = 0, \quad (ad')x^2 + (bd')x + (cd') = 0;$$

lecz, według numeru poprzedzającego, [wypadek otrzymany z rugowania daje

$$[(ad')^2 - (ab')(cd')]^2 + [(ad')(ac') - (ab')(bd')] [(ad')(db') - (ac')(dc')] = 0.$$

Potrzeba teraz zauważyć że mamy tożsamościowo

$$(ab')(cd') + (ac')(db') + (ad')(bc') = 0;$$

a zatem, jeżeli wykonamy mnożenia, wypadek staje się podzielny przez  $(ad')$  i sprowadza się do

$$(ad')^3 - 2(ad')(ab')(cd') - (ad')(ac')(bd') + (ac')^2(cd') + (bd')^2(ab') - (ab')(bc')(cd') = 0.$$

Wprowadzenie czynnika obcego  $(ad')$  tłumaczy się tćm prostćm spostrzeżeniem że, jeżeli mamy  $ad' = a'd$ , to jest jeżeli



$a$  i  $a'$  są w tymże samym stosunku jak  $d$  i  $d'$ , wypadki jakie się otrzymuje, już to odciągając od pierwszego zrównania pomnożonego przez  $a'$  drugie pomnożone przez  $a$ , już to odciągając od pierwszego zrównania pomnożonego przez  $d'$ , drugie pomnożone przez  $d$ , nie powinny różnić się od siebie tylko jakimkolwiek bądź czynnikiem. I tak, przez założenie  $(ad^n) = 0$ , aczkolwiek dwa zrównania pierwotne trzeciego stopnia nie mają czynnika wspólnego, dwa zrównania drugiego stopnia do których sprowadziliśmy je mają zawsze jeden czynnik taki. W ogólności, ten sposób rugowania wprowadza czynniki obce, a tém samém, lepiej jest użyć innych metod.

62. METODA EULERA. — Jeżeli dwa zrównania stopni  $m$  i  $n$  mają jakikolwiek czynnik wspólny pierwszego stopnia, otrzymać będzie można wypadki jednakie, bądź to mnożąc pierwsze zrównanie przez  $n - 1$  innych czynników drugiego, bądź to mnożąc drugie przez  $m - 1$  innych czynników pierwszego. Więc, pomnożywszy pierwsze przez jakąkolwiek funkcją dowolną stopnia  $n - 1$  wprowadzającą  $n$  stałych dowolnych, drugie przez jakąkolwiek funkcją dowolną stopnia  $m - 1$  wprowadzającą  $m$  stałych, i równając, wyraz po wyrazie, w dwóch funkcjach stopnia  $m + n - 1$  tak utworzonych, znajdziemy  $m + n$  zrównań, między któremi będziemy mogli wyrugować  $m + n$  stałych wprowadzonych które w nich figurują wszystkie tylko w pierwszym stopniu; i otrzymamy tym sposobem, pod kształtem wyznacznika, rugownik, albo raczej wypadek otrzymany z rugowania zmiennych dwóch zrównań danych.

PRZYKŁAD. — Wyrugować  $x$  i  $y$  między zrównaniami

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \quad a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0.$$

Mamy zrównać, wyraz po wyrazie.

$$(Ax + By)(ax^2 + bxy + cy^2) \quad \text{i} \quad (A'x + B'y)(a'x^2 + b'xy + c'y^2);$$

cztery równania wynikające zład są

$$Aa - A'a' = 0,$$

$$Ab + Ba - A'b' - B'a' = 0,$$

$$Ac + Bb - A'c' - B'b' = 0,$$

$$+ Bc - B'c' = 0.$$

Rugując A, B, A', B', otrzyma się wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a & 0 & a' & 0 \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \\ 0 & c & 0 & c' \end{vmatrix}$$

63. Ta metoda może być uogólnioną w sposób taki aby znaleźć warunki konieczne dla którychby równania miały dwa czynniki wspólne. W tym przypadku, jest jeszcze rzeczą oczywistą że powinniśmy otrzymać tenże sam wypadek, bądź to mnożąc pierwsze przez  $n - 2$  innych czynników drugiego, bądź to mnożąc drugie przez  $m - 2$  innych czynników pierwszego. Więc, jak poprzednio, pomnożywszy pierwsze przez jakąkolwiek funkcją dowolną stopnia  $n - 2$  wprowadzającą  $n - 1$  stałych, a drugie przez jakąkolwiek funkcją dowolną stopnia  $m - 2$ , i równając, wyraz po wyrazie, dwa wielomiany stopnia  $m + n - 2$  tym sposobem otrzymane, mamy  $m + n - 1$  równań, rugując zaś między  $m + n - 2$  jakiegokolwiek z pomiędzy nich  $m + n - 2$  stałych wprowadzonych, znajdziemy  $m + n - 1$  warunków równoważnych oczywiście tylko dwóm warunkóm niezależnym.

PRZYKŁAD. — Znaleźć warunki konieczne ażeby równania

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0, \quad a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3 = 0,$$

miały dwa czynniki wspólne.

Położmy

$$\begin{aligned} & (Ax + By)(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3) \\ &= (A'x + B'y)(a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3), \end{aligned}$$

przyjdzie

$$Aa - A'a' = 0,$$

$$Ab + Ba - A'b' - B'a' = 0,$$

$$Ac + Bb - A'c' - B'b' = 0,$$

$$Ad + Bc - A'd' - B'c' = 0,$$

$$+ Bd - B'd' = 0;$$

rugując  $A, B, A', B'$ , mamy (używając znakowania nr 3) układ wyznaczników

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' & d' \end{vmatrix} = 0.$$

64. METODA P. SYLWESTRA (\*). — Ta metoda jest jednaka, co do wypadków, z metodą EULERA, lecz jest ona daleko prostsza w zastosowaniach i dającą się łatwiej uogólnić. Mnożmy równanie  $m^{\text{tego}}$  stopnia przez  $x^{n-1}, x^{n-2}y, x^{n-3}y^2, \dots$ , a równanie  $n^{\text{tego}}$  stopnia przez  $x^{m-1}, x^{m-2}y, x^{m-3}y^2, \dots$ , mamy tym sposobem  $m + n$  równań między którymi możemy wyrugować

---

(\*) P. Sylwester dał swój metodzie nazwisko metody *rozprzęgalnej* (*dialytique*), gdyż rozprzęga ona w niejaki sposób związki istniejące między potęgami zmiennych i traktuje te potęgi jako zmienne niezależne.

wać  $m + n$  ilości  $x^{m+n-1}$ ,  $x^{m+n-2}y$ ,  $x^{m+n-3}y^2$ ,... uważanych jako niewiadome niezależne. I tak, w przypadku dwóch równań drugiego stopnia, mnożmy je przez  $x$  i przez  $y$ , a otrzymamy równania

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 = 0,$$

$$ax^2y + bxy^2 + cy^3 = 0,$$

$$a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 = 0,$$

$$a'x^2y + b'xy^2 + c'y^3 = 0,$$

między którymi rugując  $x^3$ ,  $x^2y$ ,  $xy^2$ ,  $y^3$ , otrzymujemy tenże sam wyznacznik jak powyżej,

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

W ogólności, jest rzeczą oczywistą że ta metoda dostarczy rugownik pod kształtem jakiegokolwiek wyznacznika w którym  $n$  linii są utworzone ze współczynników pierwszego równania a  $m$  innych ze współczynników drugiego : znajdujemy tym sposobem prawo już otrzymane powyżej na stopień rugownika względem współczynników dwóch równań.

65. METODA BEZOUTA. — Ta metoda daje także rugownik pod kształtem jakiegokolwiek wyznacznika; lecz ten (rugownik) przedstawia się pod kształtem łatwiej obliczać się dającym jak poprzedzający.

Metoda ogólna da się pojąć lepiej stosując ją naprzód do przypadku szczególnego dwóch równań czwartego stopnia

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = 0,$$

$$a'x^4 + b'x^3y + c'x^2y^2 + d'xy^3 + e'y^4 = 0;$$



mnożąc pierwsze przez  $a'$ , drugie przez  $a$  i odciągając, pierwszy wyraz każdego z nich znajduje się wyrugowanym i wypadek, będąc podzielny przez  $y$ , daje

$$(ab')x^3 + (ac')x^2y + (ad')xy^2 + (ae')y^3 = 0;$$

mnożąc na nowo pierwsze zrównanie przez  $a'x + b'y$ , drugie przez  $ax + by$ , dwa pierwsze wyrazy z każdego są wyrugowane i wypadek, podzielony przez  $y^2$ , daje

$$(ac')x^3 + [(ad') + (be')]x^2y + [(ae') + (bd')]xy^2 + (be')y^3 = 0;$$

mnożąc teraz pierwsze przez  $a'x^2 + b'xy + c'y^2$ , drugie przez  $ax^2 + bxy + cy^2$ , odciągając i dzieląc przez  $y^3$ , ma się

$$(ad')x^3 + [(ae') + (bd')]x^2y + [(be') + (cd')]xy^2 + (ce')y^3 = 0.$$

Nakoniec, mnożąc pierwsze przez  $a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3$ , drugie przez  $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ , odciągając i dzieląc przez  $y^4$ , przyjdzie

$$(ae')x^3 + (be')x^2y + (ce')xy^2 + (de')y^3 = 0.$$

Możemy, między cztery równaniami tak utworzonymi, wyrugować jak w nrze 64,  $x^3$ ,  $x^2y$ ,  $xy^2$ ,  $y^3$ , i znajdziemy na wypadek wyznacznik

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') & (ae') \\ (ac') & (ad') + (bc') & (ae') + (bd') & [(be')] \\ (ad') & (ae') + (bd') & (be') + (cd') & (ce') \\ (ae') & (be') & (ce') & (de') \end{vmatrix}.$$

66. Sposób jakiegośmy użyli tak oczywiście stosuje się do dwóch równań jakichkolwiek  $n^{\text{tego}}$  stopnia, że jest niepotrzebnym ustalenie go za pomocą dowodu ogólnego. Po ścisłym

przejrzeniu wyznacznika otrzymanego w numerze poprzedzającym, prawo tworzenia wyraźnie się objawia, i możemy bezpośrednio napisać wyznacznik który byłby wypadkiem rugowania zmiennych między dwoma równaniami piątego stopnia, kontynuując po prostu szeregi wyrazów i pisząc  $(af')$  po  $(ae')$ ... Owoż, wypadek otrzymany z rugowania zmiennych dający się przywieść do zera nazwalibyśmy także rugownikiem (43). Na mocy przeto tego objaśnienia, rugownik szukany dwóch równań piątego stopnia sprowadza się oczywiście do formy dobrze znanej wyznacznika tychże równań. Można więc ten rugownik wyrazić pod kształtem

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') & (ae') & (af') \\ (ac') & (ad') + (bc') & (ae') + (bd') & (af') + (be') & (bf') \\ (ad') & (ae') + (bd') & (af') + (be') + (cd') & (bf') + (ce') & (cf') \\ (ae') & (af') + (be') & (bf') + (ce') & (cf') + (de') & (df') \\ (af') & (bf') & (cf') & (df') & (ef') \end{vmatrix}.$$

Widzimy że wszystkie wyrazy rugownika powinny zawierać w sobie  $a$  albo  $a'$ , co już było widoczném *a priori*, gdyż, jeżeliby te dwa spółczynniki były oba zerami, dwa równania miałyby czynnik spólny  $y = 0$ .

Widzimy również, że wyrazy zawierające w sobie  $a$  albo  $a'$  tylko w pierwszym stopniu, sprowadzają się do  $(ab')$  pomnożonego przez rugownik równań jakiego się otrzymano robiąc  $a$  i  $a' = 0$  w równaniach danych. Gdyż każdy wyraz wyznacznika poprzedzającego powinien zawierać w sobie jeden element z pierwszej linii poziomej i jeden z pierwszej kolumny; lecz, gdy wszystkie elementa pierwszej linii i pierwszej kolumny zawierają w sobie  $a$  lub  $a'$ , jedyne wyrazy które będą zamykały w sobie  $a$  i  $a'$  tylko w pierwszym stopniu sprowadzą się do  $(ab')$  pomnożonego przez wyznacznik mniejszy odpowiedni,

który nie różni się, robiąc  $a$  i  $a' = 0$ , od rugownika stopnia bezpośrednio niższego.

67. Pozostaje tylko okazać, że sposób [któregośmy użyli] da się jeszcze zastosować do równań stopni różnych, i, jak powyżej, poczniemy od przykładu szczególnego, to jest od równań,

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = 0, \quad a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0;$$

mnożąc pierwsze przez  $a'$ , drugie przez  $ax^2$  i odejmując, mamy

$$(ba')x^3 + (ca')x^2y + (da')xy^2 + (ea')y^3 = 0.$$

Podobnie, mnożąc pierwsze przez  $(a'x + b'y$ , a drugie przez  $(ax + by)x^2$ , przyjdzie

$$(ca')x^3 + [(cb') + (da')]x^2y + [(db') + (ea')]xy^2 + (eb')y^3 = 0.$$

Ten sposób nie może być dłużej kontynuowanym; lecz, jeżeli przyłączymy do dwóch ostatnich równań dwa nowe jakie się otrzymuje pomnożywszy drugie ze zrównań pierwotnych przez  $x$  i przez  $y$ , mamy cztery zrównania do wyrugowania  $x^3$ ,  $x^2y$ ,  $xy^2$ ,  $y^3$ .

I, ogólnie, kiedy stopnie zrównań są nierówne,  $m$  będąc największym, znajdzie się że sposób nr 65 daje nam  $n$  zrównań stopnia  $m - 1$ , zawierających w pierwszym stopniu współczynniki każdego z dwóch zrównań pierwotnych; potrzeba do nich przydać  $m - n$  zrównań jakie się otrzymuje mnożąc drugie przez  $x^{m-n-1}$ ,  $x^{m-n-2}y$ , ..., i można wtedy wyrugować  $m$  ilości  $x^{m-1}$ ,  $x^{m-2}y$ , ... między  $m$  zrównaniami w ten sposób otrzymanemi. Każda linia wyznacznika zawiera w sobie współczynniki drugiego zrównania, lecz nie ma w nich tylko  $n$  linii zawierających w sobie współczynniki pierwszego. Rugow-



nik jest więc, jak to być było powinno,  $n^{\text{tego}}$  stopnia względem współczynników pierwszego równania, i  $m^{\text{tego}}$  względem współczynników drugiego.

68. METODA BEZOUTA Z ZAPROWADZONĄ ZMIANĄ PRZEZ P. CAYLEY. — Jeżeli dwa równania  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  mają jakikolwiek pierwiastek spólny, można zadosyć uczynić równaniu  $\varphi + \lambda\psi = 0$ , dla jakiegokolwiek bądź wartości wziętej na  $\lambda$ . Weźmy więc równanie

$$\varphi(x, y) \psi(x', y') - \varphi(x', y') \psi(x, y) = 0,$$

które, przez założenie że  $\varphi$  i  $\psi$  mają jakikolwiek czynnik spólny, może być sprawdzone niezależnie od wszelkiej wartości szczególnej na  $x'$ ,  $y'$ : możemy, naprzód, podzielić je przez  $xy' - yx'$  który jest oczywiście jakimkolwiek czynnikiem, potem zrównać z zeru współczynniki potęg  $x'$  i  $y'$ ; nakoniec rugować potęgi  $x$  i  $y$  jak gdyby one były zmiennymi niezależnymi, i wypadek przedstawi się pod tymże samym kształtem jak przez metodę nr<sup>o</sup> 65.

PRZYKŁAD. — Wyrugować  $x$  i  $y$  między równaniami

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \quad a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0.$$

Wyrażenie

$$(ax^2 + bxy + cy^2)(a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2) - (a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2)(ax^2 + bxy + cy^2),$$

podzielone przez  $xy' - yx'$ , daje

$$[(ab')x + (ac')y]x' + [(a'c')x + (b'c')y]y' = 0;$$

równając z zeru współczynniki względem  $x'$  i  $y'$  i rugując  $x$  i  $y$ , mamy

$$(ac')^2 + (ba')(bc') = 0.$$

69. Przystąpmy teraz do teorii funkcyj trzech zmiennych których rugownik, wyjąwszy w kilku przypadkach szczególnych,



nie został jeszcze wyrażony pod kształtem wyznacznika, aczkolwiek może on zawsze istnieć jako iloraz z jednego wyznacznika przez drugi.

Pokażemy naprzód w jaki sposób tworzy się pewna funkcya mająca wielkie znaczenie w teoryi rugowania. Mając dane  $k$  zrównań o  $k$  zmiennych  $u = 0, v = 0, w = 0, \dots$ , oznaczmy przez  $u_1, u_2, u_3, \dots$  pochodne  $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \dots$ , wyznacznik

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots \\ w_1 & w_2 & w_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

będzie oznaczony, w dalszym ciągu, przez literę  $J$  (\*).

70. Jeżeli ilekolwiek zrównań sprawdzi tenże sam układ wartości, to układ ten sprawdzi także  $J$ , i będzie się działo jeszcze podobnie dla jego pochodnych względem każdej ze zmiennych, jeżeli równania będą tegoż samego stopnia.

Dowodzenie w przypadku trzech zmiennych będzie ogólném. Mamy, według teoryi funkcyj jednorodnych,

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 = nu,$$

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = nv,$$

$$xw_1 + yw_2 + zw_3 = nw.$$

Oznaczmy teraz, jak w IV rozdziale, przez  $U_1, V_1, \dots$  wyznaczniki mniejsze jakieby się otrzymało znosząc linię i kolumnę

---

(\*) Ten wyznacznik, użyty przez Jakobiego, jest niekiedy oznaczony pod nazwiskiem *Jakobiego* zrównań danych (domyśla się *wyznacznika*).

zawierające  $u, v, w, \dots$ ; otrzymamy, rozwiązując te równania (28),

$$Jx = U_1nu + V_1nv + W_1nw,$$

z kąd widzimy bezpośrednio że, jeżeli  $u, v, w, \dots$  zniszczą się, stanie się toż samo z wyznacznikiem  $J$ . Różniczkując to ostatnie równanie, przyjdzie

$$J + x \frac{dJ}{dx} = nu \frac{dU_1}{dx} + nv \frac{dV_1}{dx} + nw \frac{dW_1}{dx} + n(u_1U_1 + v_1V_1 + w_1W_1),$$

$$x \frac{dJ}{dy} = nu \frac{dU_1}{dy} + nv \frac{dV_1}{dy} + nw \frac{dW_1}{dy} + n(u_2U_1 + v_2V_1 + w_2W_1),$$

lecz, przypominając (27) że

$$u_1U_1 + v_1V_1 + w_1W_1 = J, \quad u_2U_1 + v_2V_1 + w_2W_1 = 0,$$

widzimy że, jeżeli  $u, v, w, \dots$ , a t $\acute{e}$ m sam $\acute{e}$ m  $J$  zniszczą się, dzieje się toż samo z pochodnemi  $\frac{dJ}{dx}, \frac{dJ}{dy}, \dots$

71. Możemy teraz wyrazić, pod kształtem wyznacznika, rurownik trzech równań drugiego stopnia, gdyż  $J$  jest trzeciego stopnia, a t $\acute{e}$ m sam $\acute{e}$ m, jego pochodne są drugiego. Mamy t $\acute{y}$ m sposobem trzy nowe równania drugiego stopnia które będą sprawdzone przez układ jakikolwiek wartości spólne równań danym.

Z sześciu równań  $u, v, w, \frac{dJ}{dx}, \frac{dJ}{dy}, \frac{dJ}{dz}$ , możemy więc wyrugować sześć ilości  $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$ , i utworzyć t $\acute{y}$ m sposobem wyznacznik szukany.

Jeżeli wszystkie trzy równania są trzeciego stopnia,  $J$  jest szóstego a jego pochodne piątego. I jeżeli pomnożymy każde z trzech równań danych przez  $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$ , mamy

osnaście zrównań które, połączone z trzema pochodnymi J, pozwolą nam wyrugować za pomocą metody P. Sylwestra dwadzieścia jeden ilości  $x^5, x^4y, \dots$  wchodzących do jakiegokolwiek zrównania piątego stopnia. Ten sposób wszelako nie może być posunięty dalej bez zaprowadzenia pierwój potrzebnej w nim zmiany.

72. P. Sylwester dostrzegł że rugownik trzech zrównań tego samego stopnia, daje się wyrazić jako ich wyznacznik. Weźmy, na przykład trzy zrównania czwartego stopnia, i pomnóżmy każde z nich przez sześć wyrazów ( $x^2, xy, y^2, \dots$ ) zrównania drugiego stopnia, (albo w ogóle, przez  $\frac{1}{2}n(n-1)$  wyrazów zrównania stopnia  $n-1$ ). Utworzymy w ten sposób 18 [w ogóle  $n(2n-1)$  zrównań]. Zrównania te, jako będące stopnia szóstego (a w ogóle stopnia  $2n-2$ ), zawierają 28 [w ogóle  $n(2n-1)$  wyrazów]. Użyjemy 10 [w ogóle  $\frac{1}{2}n(n+1)$ ] zrównań pomocniczych do wyrugowania wszystkich potęg ilości zmiennych. Zrównania pomocnicze otrzymują się w następujący sposób: trzy zrównania dane, można napisać pod kształtem

$$Ax^4 + By + Cz, A'x^4 + B'y + C'z, A''x^4 + B''y + C''z;$$

a wyznacznik  $(AB'C'')$ , szóstego stopnia względem zmiennych, musi być sprawdzonym przez wszelką wartość sprawdzającą zrównania dane. Otrzymamy zaś dwa wyznaczniki podobnej natury, nadając zrównaniom danym kształt  $Ay^4 + Bx + Cz$ , albo  $Az^4 + Bx + Cy$ . Możemy nadto położyć zrównania dane pod kształtem

$$Ax^3 + By^2 + Cz, A'x^3 + B'y^2 + C'z, A''x^3 + B''y^2 + C''z,$$

(gdyż każdy wyraz niepodzielny przez  $x^3$  lub  $y^2$ , musi być podzielny przez  $z$ ), a tak otrzymamy nowy wyznacznik  $(AB'C'')$  który sprawdzają ilości sprawdzające zrównania dane.



Widoczna że zmieniając miejsce zmiennych  $x, y$  i  $z$  przy rozkładaniu równań danych, otrzymamy sześć wyznaczników ostatniego kształtu. Wreszcie, rozkład równań danych na równania kształtu  $Ax^2 + By^2 + Cz^2$ , da nam dziesiąty i ostatni wyznacznik szukany. W ogólności rozkładamy równania dane na równania kształtu  $A^\alpha + B^\beta + C^\gamma$ , gdzie  $\alpha + \beta + \gamma = n + 2$ , i tworzymy wyznacznik  $AB^\beta C^\gamma$ ; łatwo zaś dowieść że zupełna liczba rozwiązań równania  $\alpha + \beta + \gamma = n + 2$  jest  $\frac{1}{2}(n + 1)$ , czyli taka jakąśmy powyżej założyli.

73. Jeżeli równania dane są stopni różnych, to nie można tą drogą otrzymać wyznacznika dającego rugownik wolny od obcych czynników. Następną teorią p. Cayley pokazuje dla czego pojawiają się te czynniki, i jakim sposobem pozbyć się takowych można. Dla ułatwienia dowodzenia, weźmy trzy równania,  $u, v$  i  $w$ , drugiego stopnia. Mnożąc je przez  $x, y$  i  $z$ , dla wyrugowania zmiennych w ich różnych potęgach, otrzymamy dziewięć równań niezdolnych wyrugować dziesięciu ilości  $x^3, x^2y$ , etc. Jeżeli zaś pomnożymy każde równanie przez sześć ilości,  $x^2, xy, y^2$ , etc., otrzymamy osmnaście równań, która to liczba jest więcej aniżeli dostateczną do wyrugowania piętnastu ilości  $x^3, x^2y$ , etc. Jeżeli weźmiemy dowolnie piętnaście z tych osmnaście równań i utworzymy ich wyznacznik, to otrzymamy tém samém rugownik pomnożony przez obcy czynnik. Gdyż wyznacznik jest piętnastego stopnia w swych czynnikach, a rugownik tylko dwunastego (Art. 53). A pochodzi to ztąd że osmnaście naszych równań nie są niezależnemi, owszem, zależą od trzech liniowych równań. Jeżeli bowiem napiszemy tożsamość  $uv = vu$ , i zastąpimy w niej, naprzód pierwsze  $u$  przez jego wartość  $ax^2 + by^2 + \text{etc.}$ , powtóre, drugie  $v$  przez wartość podobną, to otrzymamy :

$$ax^2v + by^2v + cz^2v + 2fyzv + \text{etc.} = a'x^2u + b'y^2u \\ + c'z^2u + 2f''yuz + \text{etc.}$$



Podobnież, tożsamości  $vw = wv$ ,  $wu = uw$ , dadzą dwa inne związki zawierające ilości  $x^2u$ ,  $y^2u$ ,  $x^2v$ ,  $x^2w$ , etc. Kwestya więc sprowadza się do następującego pytania: « Jak wyrazić najprostszy warunek czyniący równemi zeru,  $m + p$  liniowych zrównań między  $m$  zmiennymi, gdy równania te połączone są przez  $p$  liniowych związków, sprowadzających je do  $m$  zrównań niezależnych? » W obecnym przypadku,  $m = 15$ ,  $p = 3$ .

74. Dajmy  $m = 3$ ,  $p = 1$ , czyli weźmy cztery zrównania  $s, t, u, v$ , w których  $s = a_1x + b_1y + c_1z$ ,  $t = a_2x + b_2y + c_2z$ , etc., związane warunkiem  $D_1s + D_2t + D_3u + D_4v = 0$ .

Otóż mówię naprzód, że wyznacznik  $(a_1b_2c_3)$  trzech zrównań  $s, t, u$ , zawiera  $D_4$  jako czynnik. Bo jeżeli  $D_4 = 0$ , to  $s, t, u$ , musi łączyć taki liniowy związek, iżby takowy w razie zadosyc uczynienia zrównaniom  $s$  i  $t$ , czynił zarazem zadosć zrównaniu  $u$ ; tak więc przypuszczenie  $D_4 = 0$ , uczyni zerem wyznacznik  $(a_1b_2c_3)$ .

Mówię powtóre, że dzieląc  $(a_1b_2c_3)$  przez  $D_4$ , albo  $(a_1b_2c_4)$  przez  $D_3$ , otrzymamy wypadki równe, lub różniące się znakami tylko. Gdyż (Art. 15)  $D_4(a_1b_2c_4)$  równa się wyznacznikowi którego pierwsza linia jest  $a_1, b_1, c_1$ , druga  $a_2, b_2, c_2$ , trzecia  $D_4a_4, D_4b_4, D_4c_4$ ; wiemy zaś że  $D_4a_4 = -D_1a_1 - D_2a_2 - D_3a_3$ , więc wartość tę, jako i wartości na  $D_4b_4$  i  $D_4c_4$  podstawmy w trzecią linię. Wyznacznik zamieni się (Art. 18) na sumnę trzech innych, z których dwa, jako mające jedną linię wspólną, są równe zeru; zostanie  $D_4(a_1b_2c_4) = -D_3(a_1b_2c_3)$ . Wynika ztąd że rugownik danego układu otrzymuje się biorąc którekolwiek z równoważnych kształtów danych przez tworzenie wyznacznika  $(a_1b_2c_3)$  trzech którychkolwiek zrównań, i podzielenia go przez pozostającą stałą  $D_4$ .

Dajmy teraz że mamy pięć zrównań,  $s, t, u, v, w$ , połączonych dwoma liniowymi warunkami,  $D_1s + D_2t + D_3u + D_4v + D_5w = 0$ , i  $E_1s + E_2t + E_3u + E_4v + E_5w = 0$ . Rugując

w otrzymamy  $(D_1E_5)s + (D_2E_5)t + (D_3E_5)u + D_4E_5v = 0$ , gdzie (jak poprzednio), przypuszczenie  $D_4E_5 = 0$ , znieśie wyznacznik  $(a_1b_2c_3)$ , tak że do tego samego dochodzimy wypadku, dzieląc  $(a_1b_2c_3)$  przez  $(D_4E_5)$ , lub też dzieląc wyznacznik trzech jakichkolwiek zrównań danych przez wyznacznik uzupełniający i odpowiedni  $(D_4E_5)$ . Rozumowanie to rozciągnięciem być może do jakiegokolwiek liczby zrównań połączonych z jakąkolwiek liczbą warunków, i daje następujące ogólne prawo tworzenia rugownika: Napisz, jedno pod drugimi, stałe  $m + p$  zrównań danych, i uzupełnij je (do formy kwadratu) pisząc obok stałe zawarte w  $p$  warunkowych zrównaniach.

$s$ ;	$a_1, b_1, c_1$	$D_1, E_1$ .
$t$ ;	$a_2, b_2, c_2$	$D_2, E_2$ .
$u$ ;	$a_3, b_3, c_3$	$D_3, E_3$ .
$v$ ;	$a_4, b_4, c_4$	$D_4, E_4$ .
$w$ ;	$a_5, b_5, c_5$	$D_5, E_5$ .

A rugownik, w najprostszy swym kształcie, jest wyznacznikiem którejkolwiek  $m$  linii lewego oddziału zrównań (a więc linii znajdujących się po lewej stronie przedziału), podzielonym przez wyznacznik otrzymany przez wykreślenie, odpowiednich linii położonych po lewej stronie przedziału, a więc przez wyznacznik z pozostałych tamże linii po prawej stronie przedziału.

Tak, w przykładzie Art. 73 bierzemy wyznacznik piętnastu którejkolwiek z pomiędzy osmnastu zrównań, i dzielimy go przez wyznacznik trzech pozostałych warunków; otrzymany rugownik powinien być, i będzie dwunastego stopnia.

75. W ogóle, mając trzy zrównania stopni  $m$ ,  $n$  i  $p$ , otrzymamy zrównania stopnia  $m + n + p - 2$ , mnożąc pierwsze z danych przez  $x^{n+p-2}$ ,  $x^{n+p-3}y$  i t. d. Ilość zrównań tych

będzie :

$$\frac{1}{2}(n+p-1)(n+p) + \frac{1}{2}(p+m-1)(p+m) + \frac{1}{2}(m+n-1)(m+n).$$

Lecz liczba wyrazów  $x^{m+n+p-2}$ , etc., które z tych równań wyrugować należy jest  $\frac{1}{2}(m+n+p-1)(m+n+p)$ , a więc mniejszą od liczby równań samych. Jeżeli zaś weźmiemy tosamność  $uv = vu$ , która jest stopnia  $m+n$ , i pomnożymy ją przez wyrazy  $x^{p-2}$ , etc., to będziemy mieli  $\frac{1}{2}(p-1)p$  związków identycznych między otrzymanymi równaniami; podobnież, inne tosamności kształtu  $uv = vu$ , dadzą  $\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}(m-1)m$  związków identycznych. Liczba tych związków odciągnięta od liczby równań, daje na resztę liczbę zmiennych którą wyrugować należy, i oznacza stopień rugownika.

76. W ten sam sposób postąpimy z czterema równaniami o czterech zmiennych, i wpadniemy na przypadek  $m+n$  równań liniowych, mających  $m$  zmiennych, i to równań zależnych od  $n+p$  związków (warunków) połączonych przez  $p$  nowych związków. Aby znaleźć rugownik uproszczony tego układu, podzielimy wyznacznik którychkolwiek  $m$  równań przez ilość będącą ilorzem dwóch wyznaczników.

Większe szczegóły byłyby zbyt cieżkimi, to co poprzedza, dostatecznie wyjaśnia podaną powyżej, jedyną ogólną metodę wyrażania rugowników jako wyznaczników.



## ROZDZIAŁ VIII

### OZNACZENIE PIERWIĄTKÓW SPÓLNYCH.

77. Jeżeli rugownik pewnej liczby równań staje się zerem, to równaniom tym zadosyć czyni pewien spólny układ wartości, a w tym rozdziale okażemy że można oznaczyć układ ten bez właściwego rozwiązywania równań. Metoda postępowania niezależną jest od ilości zmiennych, dla ułatwienia jednak pojęcia zaczniemy od układu dwóch równań.

$$\varphi = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots \approx 0,$$

$$\psi = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots = 0.$$

Przypuśćmy że pewien pierwiastek drugiego równania, na przykład:  $x = \alpha$ , zadosyć czyni pierwszemu, a więc zamienia na zero rugownik układu. Lecz możemy zmienić czynniki równania  $\varphi$ , ( $a_m$  na  $a_m + A_m$ ,  $a_{m-1}$  na  $a_{m-1} + A_{m-1}$ , etc.); zmienionemu w ten sposób równaniu

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots = 0,$$

zadosyć czyni widocznie  $x = \alpha$ , jeżeli tylko przyrosty  $A_m$ ,  $A_{m-1}$ , etc., połączone są jedynym związkiem

$$A_m \alpha^m + A_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots = 0,$$



gdyż przypuściliśmy że  $x = \alpha$  czyni zerem pozostałą część równania. Równanie przeobrażone ma spólny pierwiastek z  $\psi$ , a więc rugownik tych dwóch równań staje się zerem. Rugownik ten otrzymuje się przez zamianę  $a_m$  na  $a_m + A_m$ , etc., w  $R$  (rugownika  $\varphi$  i  $\psi$ ). Rugownik przeobrażony jest :

$$R + \left\{ A_m \frac{dR}{dA_m} + A_{m-1} \frac{dR}{dA_{m-1}} + \dots \right\} + \dots = 0.$$

Przypuściliśmy  $R = 0$ ; więc przyrosty  $A_m$ , etc., mogą być tak małe jak się tylko podoba, a wyrazy zawierające ich pierwsze potęgi, stają się pojedynczo równymi zeru. Mamy przeto

$$A_m \frac{dR}{dA_m} + A_{m-1} \frac{dR}{dA_{m-1}} + \dots = 0.$$

Ta wartość musi być równoważną wartości

$$A_m \alpha^m + A_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots = 0,$$

gdyż widzieliśmy że ta ostatnia stanowi jedyny warunek któremu przyrosty koniecznie zadosyć czynić powinny. Wynika ztąd że współczynniki różniczkowe są proporcjonalnymi do  $\alpha^m$ ,  $\alpha^{m-1}$ , etc., a więc że otrzymamy  $\alpha$ , biorąc iloraz dwóch tuż po sobie następujących współczynników tych.

WNIOSEK I. Jeżeli  $a_p$ ,  $a_q$ , są współczynnikami w równaniu  $\psi$ , to dla  $R = 0$  będzie

$$\frac{dR}{da_p} \cdot \frac{dR}{da_{p-k}} = \frac{dR}{da_q} \cdot \frac{dR}{da_{q-k}};$$

a iloraz pierwszego wyrazu przez drugi, lub trzeciego przez czwarty będzie  $= \alpha^k$ . A więc

$$\frac{dR}{da_p} \times \frac{dR}{da_{q-k}} = \frac{dR}{da_q} \times \frac{dR}{da_{p-k}}$$

stanie się zerem gdy  $R = 0$ , czyli zawierać musi  $R$  jako czynnik. Czyli innymi wyrazami,

$$\frac{dR}{da_p} \times \frac{dR}{da_q} - \frac{dR}{da_r} \times \frac{dR}{da_s}$$

zawiera  $R$  jako czynnik, jeżeli tylko mamy  $p + q = r + s$ .

**WNIOSEK II.** Podobnie rozumowanie przekona że współczynniki różniczkowe rugownika, będą do współczynników  $\psi$  w stosunku  $\alpha^n$ ,  $\alpha^{n-1}$ , etc.; z tąd dla  $R = 0$ , będzie:

$$\frac{dR}{da_p} \cdot \frac{dR}{da_{p-k}} = \frac{dR}{db_q} \cdot \frac{dR}{db_{q-k}};$$

że wreszcie wyrażenie

$$\frac{dR}{da_p} \times \frac{dR}{db_q} - \frac{dR}{da_r} \times \frac{dR}{db_s}$$

zawiera  $R$  jako czynnik gdy  $p + q = r + s$ .

**WNIOSEK III.** Jeżeli zaś, dane powyżej na  $\alpha^n$ ,  $\alpha^{n-1}$ , etc., wartości, podstawimy w drugie równanie, to dla  $R = 0$ , otrzymamy

$$b_n \frac{dR}{da_n} + b_{n-1} \frac{dR}{da_{n-1}} + \dots = 0.$$

$R$  nie może być współczynnikiem pierwszej strony tego równania, gdyż ta, zawiera widocznie współczynniki  $\varphi$  w stopniu niższym o jedność od stopnia w jakim wchodzi do  $R$ . Ta strona musi być tożsamościowo  $= 0$ .

78. Wypadki Art. 77 sprawdzić możemy obliczając istotne wartości współczynników różniczkowych rugownika  $R$ . Wiemy

(Art. 44) że

$$R = \varphi(\alpha) \varphi(\beta) \varphi(\gamma) \dots$$

Lecz mamy

$$\varphi(\alpha) = a_m \alpha^m + a_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots$$

z kądem

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha_p} = \alpha^p,$$

a więc

$$\frac{dR}{d\alpha_p} = \alpha^p \cdot \varphi(\beta) \cdot \varphi(\gamma) + \beta^p \cdot \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\gamma) + \dots$$

Jeżeli  $\alpha$  sprawdza  $\varphi$ , będzie  $\varphi(\alpha) = 0$ ,

$$\frac{dR}{d\alpha_p} = \alpha^p \cdot \varphi(\beta) \cdot \varphi(\gamma) \dots$$

Podobnież

$$\frac{dR}{d\alpha_q} = \alpha^q \cdot \varphi(\beta) \cdot \varphi(\gamma) \dots$$

A ztąd jak poprzednio

$$\frac{dR}{d\alpha_p} \cdot \frac{dR}{d\alpha_q} = \alpha^{p+q} \cdot \varphi(\beta) \cdot \varphi(\gamma) \dots$$

Mnożąc zaś wartości, które dopiero dzieliliśmy przez siebie, przyjdzie :

$$\frac{dR}{d\alpha_p} \cdot \frac{dR}{d\alpha_q} = \alpha^{p+q} \{ \varphi(\beta) \}^2 \{ \varphi(\gamma) \}^2 \dots + R(\alpha^p \beta^q + \alpha^q \beta^p) \varphi(\gamma) \dots + \dots = 0,$$

gdzie widoczna że szereg mnożący  $R$  jest  $\frac{d^2 R}{d\alpha_p \cdot d\alpha_q}$ .

Jeżeli zaś odejmiemy  $\frac{dR \cdot dR}{da \cdot da}$ , to wyrazy nie mające R za czynnik, zniósą się nawzajem jeżeli  $p + q = r + s$ ; pozostanie

$$\frac{dR \cdot dR}{da_p \cdot da_q} - \frac{dR \cdot dR}{da_r \cdot da_s} = R \left( \frac{d^2R}{da_p da_q} - \frac{d^2R}{da_r da_s} \right).$$

W podobny sposób przekonać się możemy że

$$\frac{dR \cdot dR}{da_p \cdot dh_q} - \frac{dR \cdot dR}{da_r \cdot db_p}$$

jest podzielny przez R, lecz że iloraz różnić się musi od

$$\frac{dR \cdot dR}{da_p \cdot db_q} - \frac{dR \cdot dR}{da_q \cdot db_p}.$$

79. To co dopiero powiedzieliśmy, stosuje się do układu równań o ilukolwiek zmiennych, jak to zobaczymy poniżej. Obecnie podamy metodę prostszą, lecz tylko do układu dwóch równań zastosować się dającą. Widzieliśmy (Aryt. 65) że rurownik może być wyrażonym w kształcie wyznacznika wynikającego z wyrugowania  $x^{-1}$ ,  $x^{m-2}$ , etc., z układu równań liniowych względem tych ilości. Jeżeli wyznacznik ten stanie się zerem, równania będą wchodziły jedno w drugie; opuścimy jedno, a z drugiego wyciągniemy wartości na  $x$ . Jeżeli więc  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{12}$ , etc., wyrażają Mniejsze w mowie będącego wyznacznika, to  $x^{m-1}$ ,  $x^{m-2}$ , etc., będą proporcjonalnemi do  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_{13}$ , etc., albo do  $\epsilon_{21}$ ,  $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{23}$ , etc., etc. Wartości te są prostszemi od znalezionych za pomocą metody poprzedniej, gdyż są o jeden stopień niższemi od spółczynników dyskryminanta któregokolwiek ze równań; przeciwnie wartości znalezione przez różniczkowanie dyskryminanta (\*) są niższemi, jedynie od spółczynników

---

(\*) Zobacz Rozdział następny.



jednego ze równań. I tak weźmy równania

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Postępując według ostatniej metody, przekonamy się że sprawdza je wartość

$$-\left(\frac{bc'}{ac'}\right) = -\left(\frac{ac'}{ab'}\right),$$

gdy metoda poprzedzająca wymagała

$$\frac{2c'(ac') - b'(bc')}{a'(bc') - c'(ab')} = \frac{a'(bc') - c'(ab')}{-2a'(ac') + b'(ab')}.$$

Obie zaś wartości te, są równymi w skutek warunku  $(ac')^2 = (ab')(bc')$ , któremu zadasyć czynią wedle przypuszczenia.

80. Jeżeli w którekolwiek ze równań użytych w Art. 79, podstawimy  $\frac{dR}{da_{m-1}}$  za  $x^{m-1}$ , etc., to wartości czyniące  $R = 0$ , sprawdzą muszą równanie to, a wypadek podstawienia będzie podzielny przez  $R$ . Innemi słowy

$$\alpha_{r_1} \frac{dR}{da_{m-1}} + \alpha_{r_2} \frac{dR}{da_{m-2}} + \dots,$$

będzie podzielonem przez  $R$ , jeżeli  $\alpha_{r_1}, \alpha_{r_2}$ , i t. d., są elementami jednej linii wyznacznika z artykułu 65. Zastanawiając się zaś nad  $\alpha_{r_1}, \alpha_{r_2}$ , etc., spostrzeżemy że  $\alpha_{r_1}$  jest wyznacznikiem  $(a_m b_{n-r})$ , etc., a więc że funkcyja  $\alpha_{r_1} \frac{dr}{da_{m-1}} + \dots$ , maswe spółczynniki w ilości  $b$ , stopniem o jedność wyższe od  $R$ , gdyż

ich ważność przewyższa ważność  $R$  o ilość  $= n - r + 1$ . Wynika stąd że pozostały po podzieleniu czynnik musi być  $b_{n-r+1}$  pomnożony przez jakiś czynnik liczebny. Dla obliczenia czynnika tego przypuścemy że wszystkie czynniki  $\psi$  stały się zerami, z wyjątkiem  $b_{n-r+1}$ . Wynika zarazem, (według metody rugowania za pomocą funkcj symetrycznych), że jeżeli  $\psi$  składa się z czynników  $V, W, \text{etc.}$ , to rugownik  $\varphi$  i  $\psi$  jest wieloczynem rugowników  $\varphi, V; \varphi, W, \text{etc.}$  Gdyż jeżeli

$$V = (x - \alpha)(x - \epsilon) \dots, \quad \text{a} \quad W = (x - \alpha')(x - \epsilon') \dots,$$

to rugownik  $\varphi$  i  $V$  jest  $\varphi(\alpha) \cdot \varphi(\epsilon) \dots$ , a rugownik  $\varphi$  i  $W$ ,  $\varphi(\alpha') \cdot \varphi(\epsilon') \dots$ ; iloczyn zaś tych rugowników będzie rugownikiem  $\varphi$  i  $\psi$ .

Jeżeli znowu  $\psi$  redukuje się do pojedynczego wyrazu  $b_\alpha x^\alpha y^\beta$ , z powodu że rugownik  $\varphi$  i  $x$  jest  $a_0$ , a rugownik  $\varphi$  i  $y$  jest  $= a_m$ , to rugownik  $\varphi$  i  $\psi$  będzie  $b_\alpha^m a_0^\alpha a_m^\beta$ . Tylko jeden z pomiędzy szeregów złożonych z wyrazów  $\frac{dR}{da_{m-1}}$ , etc., nie zniknie, wtedy gdy wszystkie współczynniki  $\psi$  (z wyjątkiem  $b$ ) zniosą się; jest nim  $\frac{dR}{da_0}$ , współczynnik zaś o którym mowa  $\alpha b_\alpha^m a_0^{\alpha-1} a_m^\beta$ . Lecz w rozważanym przypadku  $\frac{dR}{da_0}$  mnożone jest przez  $b_\alpha a_0$ ; zkad w ogóle dla  $\alpha = n - r + 1$  będzie

$$\alpha_{r1} \frac{dR}{da_{n-1}} + \alpha_{r2} \frac{dR}{da_{n-2}} + \dots = (n - r + 1) R b_{n-r+1}.$$

PRZYKŁAD. Dla uczynienia zrozumiałszym tego co powiedzieliśmy, weźmiemy dwa sześciany

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

$$b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Wyniknie (Art. 65) układ równań

$$(a_3 b_2) x^2 + (a_3 b_1) x + (a_3 b_0) = 0,$$

$$(a_2 b_1) x^2 + \{ (a_3 b_0) + (a_2 b_1) \} x + (a_2 b_0) = 0,$$

$$(a_3 b_0) x^2 + (a_2 b_0) x + (a_1 b_0) = 0.$$

Podstawivszy w drugie na przykład równanie, to otrzymana ilość

$$(a_3 b_1) \frac{dR}{da_2} + \{ (a_3 b_0) + (a_2 b_1) \} \frac{dR}{da_1} + (a_2 b_0) \frac{dR}{da_0}$$

będzie podzieloną przez R. Lecz rząd i ważność funkcji téj przekonywa że pozostający czynnik musi być  $b_2$  pomnożone przez pewien liczebny współczynnik. Dla wyznaczenia takowego, dajmy że  $b_0$ ,  $b_1$  i  $b_3$  znikły zarazem, co obchodząc nas ilość zamienia na

$$-b_2 \left( a_1 \frac{dR}{da_1} + a_0 \frac{dR}{da_0} \right).$$

Lecz uczynione przypuszczenie czyni  $R = b_2^3 a_1 a_0^2$ , a więc funkcya, którą obliczamy, znakiem jedynie różnić się może od  $2b_2 R$ .

81. Zastosowanie metody artykułów 77 i 78 do ilukolwiek zmiennych, żadnej nie przedstawi trudności. Dla jasności ograniczymy się do trzech zmiennych, zwracając jednak uwagę na to, że ich ilość w niczem postępowania nie zmienia.

Niech  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 0$ ,  $\chi = 0$ , będą równaniami danemi, w których  $\varphi = a_{m00} x^m + \dots + a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma + \dots$ , a którym zadamy wartości  $x', y', z'$ . Jeżeliby te ostatnie tylko  $\varphi$  sprawdzać miały, toby zamieniły  $a_{m00}$ ,  $a_{\alpha\beta\gamma}$ , na  $a_{m00} + \Lambda_{m00}$ ,  $a_{\alpha\beta\gamma} + \Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ , etc., byle tylko było

$$\Lambda_{m00} x'^m + \dots + \Lambda_{\alpha\beta\gamma} x'^\alpha y'^\beta z'^\gamma + \dots = 0;$$

lecz (Art. 77) zrównanie

$$A_{m00} \frac{dR}{dA_{m00}} + A_{a6y} \frac{dR}{dA_{a6y}} + \dots = 0,$$

współcześnie sprawdzoném być powinno; a więc wartość wyrazów zawierających  $x'^{\alpha}y'^{\beta}z'^{\gamma}$ , proporcjonalną będzie do różniczki rugownika w odniesieniu do mnożącego ją współczynnika. Otrzymujemy wartości  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , biorąc stosunki różniczek  $R$  ze względu na współczynniki wyrazów będących w stosunku do  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Daje się to sprawdzić jak w Art. 78; gdyż wspólne pierwiastki  $\psi$  i  $\chi$  podstawione w  $\varphi$  dadzą  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ , etc. Tak więc  $R = \varphi' \varphi'' \varphi''' \dots a$

$$\frac{dR}{da_{a6y}} = x'^{\alpha}y'^{\beta}z'^{\gamma}\varphi'\varphi''\varphi''' \dots + x'^{\alpha}y'^{\beta}z'^{\gamma}\varphi'\varphi'' \dots + \dots$$

Jeżeli  $\varphi'$  zniknie, to wartość tego współczynnika różniczkowego zredukuje się do pierwszego wyrazu, a zatem, widzimy jak poprzednio że współczynniki są proporcjonalnemi do mnożących je wyrazów.

82. Ogólniej: jeżeli współczynniki  $\varphi$  są funkcyami  $a, b, c, \dots$  które nie wchodzi do  $\psi$  i  $\chi$ , to będziemy mieli

$$\frac{dR}{da} \cdot \frac{dR}{db} = \frac{d\varphi}{da} \cdot \frac{d\varphi}{db},$$

byle  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , różniczki  $x, y, z$ , sprawdzały wszystkie trzy zrównania. Gdyż, albo jak w Art 78, mamy  $\varphi' = 0$ , i

$$\frac{dR}{da} = \frac{d\varphi}{da} \varphi'' \varphi''' \dots; \quad \frac{dR}{db} = \frac{d\varphi}{db} \varphi'' \varphi''';$$



albo, jeżeli jak w Art. 77,  $a, b, c$ , takie przybrały wartości, że ten sam układ wartości zmiennych sprawdza  $\varphi$ , to będziemy mieli

$$\frac{d\varphi}{da} \delta a + \frac{d\varphi}{db} \delta b + \frac{d\varphi}{dc} \delta c + \dots = 0;$$

a że w tym przypadku rugownik przeobrażonego  $\varphi$  i innych zrównań, nie przestaje być zerem, przeto będzie

$$\frac{dR}{da} \delta a + \frac{dR}{db} \delta b + \frac{dR}{dc} \delta c + \dots = 0;$$

a dwa te zrównania powinny być identycznymi.

83. Formuły stają się zawilszymi, jeżeli weźmiemy różniczki rugownika w odniesieniu do  $a, b, \dots$  które wchodzi do wszystkich zrównań. Ilościom tym nadawać będziemy jak poprzednio zmiany zgodne z przypuszczeniem według którego rugownik zerem być nie przestaje; będzie przeto

$$\frac{dR}{da} \delta a + \frac{dR}{db} \delta b + \frac{dR}{dc} \delta c + \dots = 0.$$

W przypadku, gdy  $a, b, c, \dots$  wchodzi tylko w jedno ze zrównań, zmiana ich wartości nie wpływa na zmianę wspólnych pierwiastków, gdyż współczynniki są stałymi w innych zrównaniach, których układ wspólnych pierwiastków zostaje przez to ściśle oznaczonym. Lecz to się nie stosuje do zrównań przeobrażonych, których pierwiastki wspólne różnić się mogą od takichże pierwiastków zrównań danych. Niech  $x' + \delta x', y' + \delta y', z' + \delta z', \dots$  będzie nowym układem pierwiastków wspólnych; ich zmiany zadosyćczynić powinny warunkom :

$$\frac{d\varphi}{da} \delta a + \frac{d\varphi}{db} \delta b + \dots + \frac{d\varphi}{dx} \delta x' + \frac{d\varphi}{dy} \delta y' + \dots = 0,$$

$$\frac{d\psi}{da} \delta a + \frac{d\psi}{db} \delta b + \dots + \frac{d\psi}{dx} \delta x' + \frac{d\psi}{dy} \delta y' + \dots = 0,$$

etc. . . . . etc. . . . .

Jeżeli jest  $k$  zrównań warunkowych, to zawierają one  $k - 1$  zmiennych które wyrugować możemy; pozbywszy się w ten sposób  $\delta x', \delta y', \dots$ , pozostanie zrównanie warunkowe między  $\delta a, \delta b, \dots$ , którego współczynniki są proporcjonalnymi do  $\frac{dR}{da}, \frac{dR}{db}, \dots$

PRZYKŁAD I. Weźmy dwa zrównania o jednej zmiennej. Ostateczny związek będzie :

$$\left( \frac{d\varphi}{da} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\psi}{da} \frac{d\varphi}{dx} \right) \delta a + \left( \frac{d\varphi}{db} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\psi}{db} \frac{d\varphi}{dx} \right) \delta b + \dots = 0;$$

w nim zaś współczynniki proporcjonalne do  $\frac{dR}{da}, \frac{dR}{db}, \dots$ . Jeżeli dane zrównania są jednorodnymi, możemy uważać  $x$  za stałą, i w poprzedzającej formule,  $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\psi}{dx}$ , zastąpić przez  $\frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\psi}{dy}$ . Nic to nie zmienia rzeczy, gdyż dowiedliśmy (Art. 70) że spólny pierwiastek zadosyć czyni Jakobiowemu wyznacznikowi, czyli daje

$$\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} = \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx}.$$

PRZYKŁAD II. W razie trzech zrównań,  $\delta a$  ma za współczynnik

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{da} & \frac{d\psi}{da} & \frac{d\chi}{da} \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 \end{vmatrix}.$$

W tym współczynniku  $\varphi_1, \varphi_2$ , oznaczają współczynniki różniczkowe  $\varphi$  w o niesieniu do  $x$  i  $y$ , etc.

84. Jeżeli układowi równań danych, zadosyćczynią dwa układy spólnych wartości, natenczas nietylko rugownik R, lecz i jego różniczka w odniesieniu do każdego z czynników obu równań, staje się zerem; gdyż widocznie, wartości wszystkich tych różniczek nikną, jeżeli (Art. 78) mamy zarazem  $\varphi(\alpha) = 0$ , i  $\varphi(\beta) = 0$ , albo też (Art. 81)  $\varphi' = 0$ , i  $\varphi'' = 0$ . W tym przypadku wartości obu spólnych pierwiastków wyrazić się dadzą za pomocą drugich różniczek R w postaci równania kwadratowego (quadratic). To co następuje, chociaż odnosi się do przypadku dwóch równań, najogólniej jednak da się zastosować. Mamy (Art. 78),

$$\frac{d^2R}{da^2} = \alpha^p \epsilon^p \varphi(\gamma) \cdot \varphi(\delta) \dots + \epsilon^p \gamma^p \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\delta) \dots,$$

kóre to wyrażenia,  $\varphi(\alpha) = 0$ , i  $\varphi(\beta) = 0$ , zamienia na jedyny wyraz

$$\alpha^p \epsilon^p \varphi(\gamma) \cdot \varphi(\delta) \dots$$

Podobnież

$$\frac{d^2R}{da_p da_q} = (\alpha^p \epsilon^p + \alpha^q \epsilon^q \varphi(\gamma) \cdot \varphi(\delta) \dots,$$

$$\frac{d^2R}{da^2} = \alpha^q \epsilon^q \varphi(\gamma) \varphi(\delta) \dots$$

Rozwiązując zaś kwadratowe równania względem  $\lambda \cdot \mu$ , przyjdzie:

$$\lambda^2 \frac{d^2R}{da^2} - \lambda \mu \frac{d^2R}{da_p da_q} + \mu^2 \frac{d^2R}{da^2} = 0,$$

pierwiastki dadzą nam stosunki  $\alpha^p : \alpha^q, \epsilon^p : \epsilon^q$ .

Jeżeli równania dane mają trzy układy pierwiastków spólnych, natenczas znikną wszystkie drugie różniczki R, pierwiastki zaś te znajdziemy biorąc trzecie różniczkowe współczynniki i rozwiązując równanie kubiczne (cubic).

## ROZDZIAŁ IX

### DYSKRYMINANTY (DISCRIMINANTS).

85. Przed zajęciem się dyskryminantami, damy poznać niektóre wyrazy i symbole nowe które będą często używanemi nadal. W Algebrze zwyczajnej zajmujemy się tylko równaniami, cel jaki sobie zakładamy zwykle jest znalezienie wartości na  $x$  robiących jakąkolwiek funkcją daną równą zeru. Przeciwnie w tem co następuje, rzadko tylko będziemy traktowali o równaniach, przedmiotem poszukiwań najczęstszym, którym zajmujemy się począwszy od rozdziału następującego, będzie odkrycie własności jakiejkolwiek funkcji niezmiennających się przez przekształcenia linijne. Należy więc znaleźć jakikolwiek wyraz specjalny na oznaczenie funkcji samój, nie będąc zmuszonym mówić o równaniu jakie się otrzymuje robiąc ją równą zeru jakikolwiek wyraz, na przykład, na oznaczenie

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

nie potrzebując mówić o równaniu drugiego stopnia

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0.$$

Nazwiemy *kształtem* (\*), w ogólności, jakąkolwiek bądź funk-

---

(\*) P. CAYLEY daje funkcjom jednorodnym w ogólności nazwisko *ilostek* (quantic), oznaczając wyrazami *kwadratów* (quadric), *sześcianów* (cubic), *czwórek* (quartic), *piątek* (quintic), i t. d., kształty drugiego, trzeciego, czwartego, piątego, i t. d., stopni.



cyą jednorodną która będzie mogła być drugiego, trzeciego, czwartego, ... stopnia. Rozróżniać będziemy kształty na *podwójne*, *potrójne*, *podwójne*, *podwójne*, i t. d., podług tego jak te kształty zawierają dwie, trzy, cztery, i t. d., zmienne. I tak, przez kształt sześcienny podwójny, rozumiemy jakąkolwiek funkcją taką jak

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3;$$

przez kształt kwadratowy potrójny, jakąkolwiek funkcją taką jak

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

P. CAYLEY używa skrócenia  $(a, b, c, d)(x, y)^3$  na oznaczenie kształtu

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

w którym, jak to ogólnie jest więcej odpowiedniem do zrobienia, wyrazy przyjmują też same współczynniki liczebne jak w rozwinięciu  $(x + y)^3$ . Kształt kwadratowy potrójny powyższy napisałby się, według tego znakowania,  $(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2$ . Jeżeli wyrazy nie przyjmują tych współczynników liczebnych, P. CAYLEY przydaje strzałę do nawiasu, pisząc na przykład  $(a, b, c, d)(x, y)^3$  za

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

Nakoniec, jeżeli nie jest potrzebnem oznaczenie współczynników, kształt n-tego stopnia pisze się  $(x, y)^n$ ,  $(x, y, z)^n$ .

86. Jeżeli się różniczkuje jakikolwiek kształt o  $k$  zmiennych względem każdej z tych zmiennych, resztek t. j. wypadek otrzymany z rugowania tych  $k$  pochodnych zowie się *dyskryminantem* kształtu danego.

Jeżeli kształt jest stopnia  $n$ , dyskryminant jest jakkolwiek bądź funkcją jednorodną współczynników  $k(n-1)^{k-1}$ ; w rzeczy samej, dyskryminant jest rugownikiem  $k$  zrównań stopnia  $n-1$  i (55) powinien zawierać współczynniki każdego z tych zrównań w stopniu równym wieloczynowi ze wszystkich innych stopni, to jest  $(n-1)^{k-1}$ . Te równania zawierają wszystkie współczynniki kształtu pierwotnego w pierwszym stopniu, więc dyskryminant zawierać je będzie w stopniu  $k(n-1)^{k-1}$ . Dyskryminant kształtu podwójnego będzie więc stopnia  $2(n-1)$ , dyskryminant kształtu potrójnego stopnia  $3(n-1)^2$ , i t. d.

87. Jeżeli, w kształcie pierwotnym, daje się współczynnikiom mnożącym pierwszą potęgę jakiegokolwiek zmiennej  $x$  wskaźnik 1, współczynnikiom mnożącym drugą potęgę wskaźnik 2, i tak dalej, summa wskaźników w każdym wyrazie dyskryminanta będzie stałą i równą  $n(n-1)^{k-1}$ . Było już dowiedzionem (55) że, jeżeli każdy współczynnik w jakimkolwiek układzie zrównań jest oznaczony wskaźnikiem odpowiednim potędze  $x$  który on mnoży, summa wskaźników w każdym wyrazie rugownika jest równą wieloczynowi  $mnp\dots$  stopni zrównań. Przypuśćmy teraz że, w pierwszym z tych zrównań, wskaźnik  $x^0$  zamiast być 0 jest  $l$ ; że wskaźnik  $x'$  jest  $l+1$ , i tak dalej, jest rzeczą oczywistą że ta zmiana będzie przedstawiała w skutku powiększenie summy wskaźników o tyle razy  $l$  ile się znajduje współczynników pierwszego zrównania w każdym wyrazie rugownika, a, ponieważ (55) każdy wyraz zawiera ich  $np\dots$ , summa całkowita wskaźników stanie się

$$mnp\dots + lp\dots = (m+l)np\dots$$

Teraz, w przykładzie zajmującym nas, oczywista jest że każdy współczynnik w  $k-1$  pochodnych  $U_1, U_2, \dots$  (\*) mnoży

---

(\*) Oznaczmy jak powyżej przez  $U_1, U_2, U_3, \dots$  pochodne względem  $x, y, \dots$

też samą potęgę  $x$  jak w kształcie pierwotnym  $U$ ; lecz, w pochodnej  $U_1$ , każdy współczynnik mnoży jakąkolwiek bądź potęgę  $x$  mniejszą o jedność niż w  $U$ , i współczynnik mnożący jakikolwiek wyraz  $x^l$  w tej pochodnej powinien być oznaczony wskaźnikiem  $l + 1$ , ponieważ pochodzi on z wyrazu  $x^{l-1}$  w kształcie pierwotnym. Wynika ztąd że summa wskaźników dyskryminanta powinna być

$$(n - 1)^k + (n - 1)^{k-1} \quad \text{albo} \quad n(n - 1)^{k-1}.$$

Wyrażać będziemy zbiorowo wypadki otrzymane w dwóch numerach poprzedzających, mówiąc że *porządkiem* dyskryminanta jest  $k(n - 1)^{k-1}$  a jego *ważnością*  $n(n - 1)^{k-1}$ . Tak więc, dla jakiegokolwiek kształtu podwójnego, ważnością dyskryminanta jest  $n(n - 1)$ .

88. Jeżeli jakikolwiek kształt podwójny zawiera którykolwiek czynnik kwadratowy, dyskryminant sprowadza się, jak wiadomo, do zera, gdyż dwie pochodne zawierają każda ten czynnik w pierwszym stopniu, i ponieważ mają one odtąd czynnik wspólny, ich różnica jest zerem. Podobnie, jeżeli jakikolwiek kształt potrójny może się rozłożyć w sposób następujący

$$X^2\varphi + XY\psi + Y^2\chi,$$

gdzie  $X$  jest równem  $ax + by + cz$ ,  $Y$  zaś  $a'x + b'y + c'z$ , dyskryminant musi także sprowadzić się do zera, ponieważ każdy wyraz pochodnych zawiera jako czynnik  $X$  albo  $Y$ , i że, odtąd, te pochodne mają wspólnie pierwiastki zrównań

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Dzieje się jeszcze podobnie z dyskryminantem jakiegokolwiek kształtu poczwórnego, jeżeli ten kształt może być wyrażonym



jak jakakolwiek bądź funkcya drugiego stopnia trzech funkcyj liniijnych  $X, Y, Z$  zmiennych (\*). Nazwiemy pierwiastkami *szczególne* kształtu te wartości robiące pochodne równemi zeru.

89. Rozbierzemy teraz własności dyskryminanta kształtu podwójnego

$$U = a_0 x^n + na_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 x^{n-2} y^2 + \dots$$

Rugownik  $U$  i  $U_1$  jest równy dyskryminantowi pomnożonemu przez  $a_0$ , a rugownik  $U$  i  $U_2$  jest równy dyskryminantowi pomnożonemu przez  $a_n$  (\*\*). W rzeczy samej, ponieważ

$$nU = xU_1 + yU_2,$$

wypadkiem z podstawienia jakiegokolwiek pierwiastku  $U_1$  w  $nU$  jest  $y'U_2$ ; mnożąc wypadki ze wszystkich podstawień podobnych, wieloczynem będzie  $y'y''y''' \dots$ , czyli  $a_0$  (38) pomnożone przez wypadki jakie się otrzymuje podstawiając te same pierwiastki w  $U_2$ , i ten wieloczyn nie jest czém inném jak dyskryminantem.

90. Wyrazić dyskryminant za pomocą wartości  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$  robiących kształt równy zeru.

Niech będzie

$$U = (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2)(xy_3 - yx_3) \dots \quad (38);$$

(\*) Innemi słowy, sprowadzenie do zera dyskryminanta jakiegokolwiek bądź zrównania algebraicznego wyraża warunek konieczny ażeby to zrównanie miało pierwiastki równe, a sprowadzenie do zera dyskryminanta jakiegokolwiek krzywej lub jakiegokolwiek powierzchni, ażeby ta krzywa lub ta powierzchnia miała punkt podwójny.

(\*\*) Nie zważając na czynniki czysto liczebne.



mamy

$$U_1 = y_1(xy_2 - yx_2)(xy_3 - yx_3) \dots \\ + y_2(xy_1 - yx_1)(xy_3 - yx_3) \dots + \dots ;$$

wypadkiem z podstawienia jakiegokolwiek pierwiastku  $x_1, y_1$  kształtu U w  $U_1$  jest

$$y_1(x_1y_2 - y_1x_2)(x_1y_3 - y_1x_3) \dots ;$$

wypadkiem z podstawienia wartości  $x_2, y_2$  jest, podobnież,

$$y_2(x_2y_1 - y_2x_1)(x_2y_3 - y_2x_3) \dots ;$$

jeżeli więc pomnożymy wszystkie te wypadki, wieloczynem jest

$$\pm y_1y_2y_3 \dots (x_1y_2 - y_1x_2)^2 (x_1y_3 - y_1x_3)^2 (x_2y_3 - y_2x_3)^2 \dots$$

Co daje właśnie rugownik U i  $U_1$ , a jeżeli podzielimy go przez  $a_0$  które jest równem  $y_1y_2y_3 \dots$ , znajdziemy, na wartość dyskryminanta,

$$(x_1y_2 - y_1x_2)^2 (x_1y_3 - y_1x_3)^2 \dots$$

Jeżeli przypuścimy wszystkie  $y$  równemi jednościami, otrzymamy twierdzenie pod kształtem dobrze znanym : *Dyskryminant jest równy wieloczynowi kwadratów z różnic pierwiastków zrównania.* Dla większej prostoty, zachowamy twierdzenie pod tym ostatnim kształtem.

91. Dyskryminant wieloczynu dwóch funkcji jest równy wieloczynowi z ich dyskryminantów pomnożonemu przez kwadrat z ich rugownika. Gdyż wieloczyn kwadratów z różnic wszystkich pierwiastków składa się oczywiście z wieloczynu

kwadratów z różnic obu pierwiastków należących do tegoż samego równania, pomnożonego przez kwadrat wieloczynu ze wszystkich różnic między jakimkolwiek pierwiastkiem jednego i jakimkolwiek pierwiastkiem drugiego, i ten ostatni wieloczyn est rugownikiem (45). Jako przypadek szczególny, dyskryminant wieloczynu dwóch funkcji  $(x - \alpha) \varphi(x)$  jest równy dyskryminantowi funkcji  $\varphi(x)$  pomnożonemu przez kwadrat funkcji  $\varphi(\alpha)$ . Gdyż jeżeli  $\xi, \gamma, \dots$  są pierwiastkami równania  $\varphi(x)$ ,  $(\alpha - \xi)^2 (\alpha - \gamma)^2 (\xi - \gamma)^2 \dots$  równa się kwadratowi wieloczynu utworzonego z różnic pierwiastków  $(\alpha - \xi)(\alpha - \gamma) \dots$  który nie jest czem innym jak  $\varphi(\alpha)$  pomnożone przez wieloczyn kwadratów z różnic niezawierających  $\alpha$ .

## 92. Dyskryminant funkcji

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)(x, y)^n$$

jest kształtu

$$a_n \varphi + a_{n-1}^2 \psi,$$

$\psi$  jest dyskryminantem funkcji stopnia  $n - 1$ ,

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})(x, y)^{n-1}.$$

Gdyż wiinniśmy oczywiście otrzymać tenże sam wypadek, bądź to przypuszczając  $a_n = 0$  w dyskryminancie, bądź to robiąc  $a_n = 0$  w kształcie samym i obliczając potem dyskryminant. Lecz jeżeli zrobimy  $a_n = 0$  w kształcie, sprowadzi się on do kształtu stopnia  $n - 1$  napisanego powyżej, pomnożonego przez  $x$ , i (91) jego dyskryminant jest równy dyskryminantowi tego ostatniego kształtu pomnożonemu przez kwadrat z wypadku jaki się otrzymuje robiąc w nim  $x = 0$ , to jest  $a_{n-1}^2$ . Zobaczymy tak samo że dyskryminant jest kształtu  $a_n \varphi + a_{n-1}^2 \psi$  (\*).

93. Dyskryminant jako będący jakąkolwiek funkcją wyznaczników  $x_1y_2 - x_2y_1, \dots$ , powinien zadość czynić równaniom różniczkowym numeru 37.

$$na_0 \frac{d\Delta}{da_1} + (n-1)a_1 \frac{d\Delta}{da_2} + (n-2)a_2 \frac{d\Delta}{da_3} + \dots = 0.$$

$$a_1 \frac{d\Delta}{da_0} + 2a_2 \frac{d\Delta}{da_1} + 3a_3 \frac{d\Delta}{da_2} + \dots = 0,$$

albo też, jak w numerze 39, jeżeli równania pierwotne były napisane ze współczynnikami dwumianu,

$$na_1 \frac{d\Delta}{da_0} + (n-1)a_2 \frac{d\Delta}{da_1} + \dots = 0,$$

$$a_0 \frac{d\Delta}{da_1} + 2a_1 \frac{d\Delta}{da_2} + \dots = 0.$$

PRZYKŁAD. Utworzyć dyskryminant funkcji  $(a_0, a_1, a_2, \dots)(x, y)^n$  którą przypuścimy urządzoną według potęg  $a_0$ .

Wiemy (92) że wyraz niezależny od  $a_0$  jest  $a_1^2 D$ , gdzie  $D$  jest dyskryminantem funkcji stopnia  $n-1$ ,  $(a_1, a_2, \dots)(x, y)^{n-1}$ . Dyskryminan jakiego szukamy jest więc kształtu

$$a_1^2 D + a_0 \varphi + a_0^2 \psi + \dots!$$

(\*) Twierdzenie to było podane po raz pierwszy przez JOACHIMSTHALA. P. SALMON przecież został przywiedziony poprzednio przez proste rozważania geometryczne do twierdzenia następującego w którym jest ono zawartém: Jeżeli  $a_1$  zawiera jakikolwiek czynnik  $z$  i gdy  $a_0$  zawiera czynnik  $z^2$ , dyskryminant będzie podzielny przez  $z^2$ . Jeżeli  $a_2$  zawiera  $z$  jako czynnik, gdy  $a_1$  zawiera  $z^2$ , i  $a_0, z^3$ , dyskryminant będzie ogólnie podzielny przez  $z^3$ . I tak dalej, jeżeli  $a_3$  zawiera  $z$ ;  $a_2, z^2$ ;  $a_1, z^3$  i  $a_0, z^4$ , dyskryminant będzie podzielny przez  $z^4$ , i t. d.

Wykonywając na nim działanie

$$a_1 \frac{d}{da_0} + 2a_2 \frac{d}{da_1} + 3a_3 \frac{d}{da_2} + \dots,$$

będziemy mogli zrobić równym zeru współczynnik każdej potęgi  $a_0$ . Wyrazami niezależnymi od  $a_0$  są

$$a_1 \varphi + 4a_1 a_2 D + a_1^2 \left( 2a_2 \frac{d}{da_1} + 3a_3 \frac{d}{da_2} + \dots \right) D,$$

albo, zauważywszy że  $\left( a_2 \frac{d}{da_1} + 2a_3 \frac{d}{da_2} + \dots \right) D = 0$ ,

$$\varphi = -4a_2 D + a_1 \left( a_3 \frac{d}{da_2} + 2a_4 \frac{d}{da_3} + \dots \right) D,$$

otrzymamy na wartość dyskriminanta

$$(a_1^2 - 4a_0 a_2) D + a_1 a_0 \left( a_3 \frac{d}{da_2} + 2a_4 \frac{d}{da_3} + \dots \right) D + a_0^2 \psi + \dots$$

Można tak samo oznaczyć  $\psi$  za pomocą współczynnika  $a_1$ ; lecz wypadek nie jest dosyć prostym ażeby go można było tu przedstawić.

94. Jeżeli dyskriminant jakiegokolwiek kształtu podwójnego sprowadza się do zera, ten kształt ma dwa pierwiastki równe, i wartości tych pierwiastków mogą być otrzymane przez sposób odpowiedny temu, jakiegośmy użyli w VI rozdziale. Niech będzie

$$U = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots$$

jakimkolwiek kształtem którego dyskriminant jest zerem i który przyjmuje przeto jakikolwiek czynnik kwadratowy  $(x - \alpha)^2$ . Funkcja

$$V = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots$$



będzie także podzielną przez  $x - \alpha$ , byleby tylko  $A_0, A_1, A_2, \dots$  zadosyć czyniły warunkowi

$$A_0\alpha^n + A_1\alpha^{n-1} + A_2\alpha^{n-2} + \dots = 0.$$

I w tym przypadku  $U + \lambda V$  będzie podzielnym przez  $x - \alpha$ . Niech więc będzie

$$U + \lambda V = (x - \alpha) [(x - \alpha)\varphi(x) + \lambda\psi(x)].$$

Wynika z nr<sup>o</sup> 91 że dyskryminant  $U + \lambda V$  jest równy dyskryminantowi funkcji między nawiasami, pomnożonemu przez kwadrat z wypadku jaki się otrzymuje podstawiając  $\alpha$  na miejsce  $x$  w téjże samej funkcji. Ten wypadek jest nie innym jak  $\lambda\psi(\alpha)$ . Dyskryminant  $U + \lambda V$  jest więc podzielnym, w tym przypadku, przez  $\lambda^2$ . Lecz, ponieważ  $U + \lambda V$  wywodzi się z  $U$  zmieniając  $a_0$  na  $a^0 + \lambda A_0, \dots$ , dyskryminant  $U + \lambda V$  powinien się wywieść z dyskryminanta  $U$  przez toż same podstawienie, a tém samém, jest

$$\Delta + \lambda \left( A_0 \frac{d\Delta}{da_0} + A_1 \frac{d\Delta}{da_1} + A_2 \frac{d\Delta}{da_2} + \dots \right) + \lambda^2(\dots).$$

Przez założenie  $\Delta = 0$  :• potrzeba jeszcze, aby dyskryminant był podzielnym przez  $\lambda^2$ , żeby współczynnik  $\lambda$  zniknął. Związek tym sposobem otrzymany powinien być identycznym ze związkiem  $A_0\alpha^n + A_1\alpha^{n-1} + \dots = 0$ , który jest, jak to już widzieliśmy, jedynym warunkiem któremu powinny zadosyć czynić  $A_0, A_1, \dots$  ażeby dyskryminant  $U + \lambda V$  był podzielny przez  $\lambda^2$ . Ilości  $\alpha^n, \alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \dots$  są więc proporcjonalnymi do  $\frac{d\Delta}{da_0}, \frac{d\Delta}{da_1}, \frac{d\Delta}{da_2}, \dots$ , dzieląc jedną z tych ostatnich przez ilość która po niej następuje, otrzymamy wartość na  $\alpha$ ; tak więc możemy uważać za dowiedzione twierdzenie następujące :

kiedy dyskryminant sprowadza się do zera, jego pochodne względem  $a_0, a_1, \dots$  są proporcjonalnemi do pochodnych kształtu względem tychże samych współczynników.

95. Ten wypadek dowiedzie się również tworząc wartości na  $\frac{d\Delta}{da_0}, \dots$  w funkcji pierwiastków, co się daje wykonać rozwiązując  $n$  zrównań

$$\frac{d\Delta}{d\alpha} = \frac{d\Delta}{da_1} \frac{da_1}{d\alpha} + \frac{d\Delta}{da_2} \frac{da_2}{d\alpha} + \dots$$

Znamy wyrażenia na  $\Delta, a_1, a_2, \dots$  w funkcji pierwiastków (42, 90); możemy więc wyciągnąć z tych  $n$  zrównań,  $n$  ilości  $\frac{d\Delta}{da_1}, \dots$ ; tak działając przyjdzie,

$$\frac{d\Delta}{d\alpha} = \Sigma(\xi - \gamma)^2 (\gamma - \delta)^2 (\delta - \epsilon)^2 \dots, \\ \times [(\alpha - \xi)(\alpha - \gamma) \dots, + (\alpha - \xi)(\alpha - \delta) \dots, + \dots],$$

wyrażenie, w którym wieloczyn kwadratów z różnic niezawierających  $\alpha$  jest pomnożony przez sumę wieloczynów wziętych po  $n - 2$  z różnic zawierających  $\alpha$ ,

$$\frac{d\Delta}{da_{n-1}} = \Sigma \alpha (\xi - \gamma)^2 (\gamma - \delta)^2 (\delta - \epsilon)^2 \dots, [(\alpha - \xi)(\alpha - \gamma) \dots],$$

$$\frac{d\Delta}{da_{n-2}} = \Sigma \alpha^2 (\xi - \gamma)^2 (\gamma - \delta)^2 (\delta - \epsilon)^2 \dots, [(\alpha - \xi)(\alpha - \gamma) \dots].$$

Przez przypuszczenie  $\alpha = \xi$ , te wyrażenia stają się proporcjonalne czynnikom  $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, i$ , jak w nrze 56, widzimy że, podług twierdzenia numeru poprzedzającego,

$$\frac{d\Delta}{da_p} \frac{d\Delta}{da_q} = \frac{d\Delta}{da_r} \frac{d\Delta}{da_s}$$

jest podzielnym przez  $\Delta$  gdy  $p + q = r + s$ . Jeżeli się znajduje więcej jak dwa pierwiastki równe, wszystkie te pochodne znikną, i otrzymamy pierwiastki równe uważając pochodne drugie dyskryminanta.

96. Dowodzenie następujące twierdzenia nr<sup>o</sup> 94 stosuje się do przypadku jakiegokolwiek bądź kształtu o liczbie iluokolwiek zmiennych. Dla większej prostoty, ograniczymy się na przypadku dwóch zmiennych niezależnych, metoda jest ogólną. Przypuśćmy że współczynniki  $U$  są funkcjami pewnych ilości  $a, b, \dots$ , i że można zmienić te ilości tak ażeby dyskryminant był jeszcze zerem, co daje warunek

$$\frac{d\Delta}{da} \delta a + \frac{d\Delta}{db} \delta b + \dots = 0.$$

Jeżeli zmiana wykonana na  $a, b, \dots$  zmienia  $x$  na  $x + \delta x$ ,  $y$  na  $y + \delta y, \dots$ , nowe wartości pierwiastków powinny zároveň zrobić zerami pochodne  $U_1, U_2, U_3$ , mamy więc :

$$\frac{dU_1}{da} \delta a + \frac{dU_1}{db} \delta b + \dots + \frac{dU_1}{dx} \delta x + \frac{dU_1}{dy} \delta y + \dots = 0,$$

$$\frac{dU_2}{da} \delta a + \frac{dU_2}{db} \delta b + \dots + \frac{dU_2}{dx} \delta x + \frac{dU_2}{dy} \delta y + \dots = 0,$$

$$\frac{dU_3}{da} \delta a + \frac{dU_3}{db} \delta b + \dots + \frac{dU_3}{dx} \delta x + \frac{dU_3}{dy} \delta y + \dots = 0.$$

Mnóżmy te zrównania przez  $x, y, z$ , i dodajmy; ponieważ mamy  $nU = xU_1 + yU_2 + zU_3$ , współczynnik  $\delta a$  sprowadzi się do  $n \frac{dU}{da}$ , a ponieważ  $\frac{dU_2}{dx} = \frac{dU_1}{dy}$ ,  $\frac{dU_3}{dx} = \frac{dU_1}{dz}$ , współczynnik  $\delta x$  będzie  $(n - 1)U_1$ , ten zaś znika, ponieważ  $U_1$

przyjmuje pierwiastki szczególne. Dzieje się podobnie z innymi współczynnikami; mamy więc

$$\frac{dU}{da} \delta a + \frac{dU}{db} \delta b + \dots = 0,$$

i pochodne  $\Delta$  względem  $a, b, \dots$  są proporcjonalne do pochodnych  $U$  względem tychże samych ilości, przypuszczając że litery  $x, y, z$ , w tych ostatnich, oznaczają pierwiastki szczególne.

97. Twierdzenie dowiedzione dla kształtów podwójnych (92), może się rozciągnąć do wszystkich kształtów. Niech będzie  $a$  współczynnikiem najwyższej potęgi jednej ze zmiennych;  $b, c, d, \dots$  współczynnikami wyrazów gdzie figuruje potęga bezpośrednio niższa; dyskryminant będzie

$$a\theta + (\varphi, \psi, \chi, \dots)b, c, d, \dots)^2.$$

I tak, w przypadku jakiegokolwiek bądź kształtu potrójnego, na którym ograniczymy się dla większej prostoty, jeżeli  $a$  jest współczynnikiem  $z^n$ ,  $b, c$  współczynnikami  $z^{n-1}x, z^{n-2}y$ , i jeżeli zrobimy  $a = 0$  w dyskryminancie, reszta z jego wyrażenia będzie kształtu

$$b^2\varphi + bc\psi + c^2\chi.$$

Dla dowiedzenia tego, niech będzie  $U$  jakikolwiek kształt którego dyskryminant jest zerem,  $V$  jakakolwiek inna funkcja przyjmująca pierwiastki szczególne kształtu  $U$ , dyskryminant  $U + \lambda V$  będzie podzielny przez  $\lambda^2$ . Niech będą, w rzeczy samej,

$$U = az^n + bz^{n-1} + \dots, \quad V = Az^n + Bz^{n-1} + \dots,$$



spółczynnik  $\lambda$  w dyskryminancie  $U + \lambda V$  będzie

$$A \frac{d\Delta}{da} + B \frac{d\Delta}{db} + \dots,$$

i, podług n<sup>ru</sup> 96,  $\frac{d\Delta}{da}$ ,  $\frac{d\Delta}{db}$ , ... będą proporcjonalnemi do  $z^n$ ,  $z^{n-1}x$ , ... Spółczynnik  $\lambda$  jest więc proporcjonalnym do wypadku z podstawienia pierwiastków szczególnych kształtu  $U$  w funkcję  $V$ , a tém samym, zerem.

Teraz, w przypadku który nas zajmuje, dyskryminant musi być zerem jeżeli  $a$ ,  $b$  i  $c$  są zerami, ponieważ wtedy wszystkie pochodne zniszczą się dla pierwiastków szczególnych  $x=0, y=0$ . Wszelki inny kształt  $V$  zniszczy się dla tychże samych wartości, byle tylko było  $\Delta = 0$ . Kształt ogólny dyskryminanta powinien więc być takim aby po zastąpieniu  $b$  przez  $b + \lambda B$ ,  $c$  przez  $c + \lambda C$ , ..., i zrobieniu potem

$$a = b = c = 0,$$

wypadek był podzielonym przez  $\lambda^2$ ; innemi słowy, jeżeli zastąpimy  $b$  przez  $\lambda B$ ,  $c$  przez  $\lambda C$  i  $a$  przez zero, wypadek będzie podzielny przez  $\lambda^2$ ; co było do dowodzenia.

98. Pozostaje nam jeszcze, względem dyskryminantów w ogólności, pokazać że dyskryminant jakiegokolwiek bądź kształtu poczwórnego o liczbie iluokolwiek zmiennych wyraża się bezpośrednio pod kształtem jakiegokolwiek wyznacznika symetrycznego. I odwrotnie, mając dany wyznacznik symetryczny jakikolwiek, można oznaczyć kształt poczwórny którego ten wyznacznik jest dyskryminantem. Znakowanie najprostsze dla jakiegokolwiek kształtu poczwórnego zależy na użyciu podwójnych wskaźników, oznaczając przez  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$  spółczynniki kwadratów  $x^2, y^2, z^2, \dots$ , a przez  $a_{12}, a_{13}, \dots$  spół-

czynniki wieloczynów  $xy, xz, \dots; a_{12}$  i  $a_{21}$ , są uważane za równoważne w tym układzie znakowania. Dyskryminant jest oczywiście wyznacznikiem symetrycznym

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

## ROZDZIAŁ X

### PRZEKSZTAŁCENIA LINIJNE.

99. NIEZMIENNIKI. — Dyskryminant jakiegokolwiek formy podwójnej, jako będący jakąkolwiek bądź funkcją różnic pierwiastków, nie zmieni się oczywiście gdy te różnice powiększymy lub zmniejszymy wszystkie o tę samą ilość. Podstawienie  $x + \lambda$  za  $x$  jest tylko przypadkiem szczególnym *przekształcenia liniowego* ogólnego, które zależy na zastąpieniu, w jakiegokolwiek bądź funkcji jednorodnej, każdej zmiennej przez jakąkolwiek funkcją liniową nowych zmiennych; na zastąpieniu, na przykład, w jakiegokolwiek formie podwójnej,  $x$  przez  $\lambda x + \mu y$ , a  $y$  przez  $\lambda'x + \mu'y$ .

Na wyjaśnienie uwag w które wejść winniśmy, rozbierzemy naprzód jaki jest skutek podobnego podstawienia na dyskryminancie jakiegokolwiek formy kwadratowej o dwóch zmiennych

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Przekształcając zmienne, ta forma staje się

$$a(\lambda x + \mu y)^2 + 2b(\lambda x + \mu y)(\lambda'x + \mu'y) + c(\lambda'x + \mu'y)^2,$$

a jeżeli oznaczymy funkcją przekształconą przez

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2,$$

będzie

$$a' = a_{\lambda}^2 + 2b_{\lambda\lambda'} + c_{\lambda}{}^{\prime 2},$$

$$b' = a_{\lambda\mu} + b(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + c_{\mu\lambda'},$$

$$c' = a_{\mu}^2 + 2b_{\mu\mu'} + c_{\mu}{}^{\prime 2},$$

i sprawdza się bez trudności że

$$(a'c' - b'^2) = (ac - b^2)(\lambda\mu' + \lambda'\mu)^2,$$

to jest że dyskryminant przekształconej jest równy dyskryminantowi formy pierwotnej pomnożonemu przez kwadrat z wyznacznika  $(\lambda\mu' - \lambda'\mu)$ , jaki się zowie *modułem przekształcenia*.

100. Istnieje twierdzenie podobne dla dyskryminanta formy podwójnej jakiegokolwiek. Można wiedzieć *a priori* że tak się dzieć powinno, gdyż jeżeli jakakolwiek forma dana przyjmuje jakikolwiek czynnik kwadratowy, jej przekształcona przyjmie zarówno jakikolwiek czynnik kwadratowy, tak dalece że, jeżeli dyskryminant jakiegokolwiek formy danej jest zerem, dyskryminant jej przekształconej jest zarówno zerem. Ten ostatni zawiera więc pierwszy jako czynnik. Twierdzenie to może się ściśle dowieść w sposób następujący. Niech będzie

$$(xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2) \dots$$

forma pierwotna, jej dyskryminant (90) jest

$$(x_1y_2 - y_1x_2)^2(x_1y_3 - y_1x_3)^2 \dots$$

Czynnik liniowy  $xy_1 - yx_1$  formy pierwotnej staje się, przez przekształcenie,

$$y_1(\lambda X + \mu Y) - x_1(\lambda' X + \mu' Y),$$



a jeżeli położymy go pod kształtem  $Y_1X - X_1Y$ , mamy

$$Y_1 = \lambda y_1 - \lambda' x_1, \quad X_1 = -\mu y_1 + \mu' x_1;$$

przeto, jeżeli się napisze przekształconą jako wieloczyn z czynników liniowych  $(Y_1X - X_1Y)(Y_2X - X_2Y)\dots$ , będzie się miało wyrażenie podobne dla  $Y_1, X_1; Y_2, X_2, \dots$  w funkcji  $y_1, x_1; y_2, x_2, \dots$ . Możemy, bez trudności, rozpoznać że znajduje się

$$(Y_1X_2 - X_1Y_2) = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)y_1x_2 - x_1y_2,$$

a, tém samém, że wyrażenie  $(Y_1X_2 - X_1Y_2)^2(Y_1X_3 - X_1Y_3)^2\dots$ , jest równe wyrażeniu  $(y_1x_2 - x_1y_2)^2(y_1x_3 - x_1y_3)^2\dots$  pomnożonemu przez potęgę czynnika  $\lambda\mu' - \lambda'\mu$  równą liczbie czynników zawartych w wyrażeniu dyskryminanta w funkcji pierwiastków. Twierdzenie podobne jest prawdziwem dla dyskryminanta jakiegokolwiek bądź kształtu o liczbie iluokolwiek zmiennych.

Ogłoszenie, w *Dzienniku matematycznym* Kembrydzkim (Cambridge, listopad 1841), pamiętnika w którym P. BOOL przedstawił zasady powyższe i zrobił z nich ważne zastosowania, było poniekąd stanowiskiem z którego utworzyła się algebra nowa. P. CAYLEY założył sobie oznaczyć *a priori* jakie są funkcye współczynników jakiegokolwiek zrównania danego posiadające tę własność *niezmiennosci*; własność zależącą na tem że, jeżeli się przekształci zrównanie przez jakiekolwiek podstawienie linijne, funkcya współczynników w zrównaniu przekształconém jest równą funkcji pierwotnej pomnożonej przez jakąkolwiek ilość niezależną od współczynników. Wypadkiem jego poszukiwań było odkrycie, że ta własność nie jest szczególną dla dyskryminantów, i poznanie innych funkcji ważnych posiadających ją zarówno; niektóre z nich zawierają nie tylko współczynniki, lecz i zmienne same, zachowując ze zrównaniem

pierwotnem związku których podstawienie jakiegokolwiek linijne nie zmienia wcale. Przy wykładzie téj teoryi, dla większej zwięzłości będziemy brali trzy tylko zmienne, lecz czytelnik powinien rozumieć że te same sposoby stosują się do ilukolwiek zmiennych.

101. Przypuśćmy więc że zmienne funkcyi jednorodnej jakiegokolwiek o  $k$  zmiennych zostały przekształcone przez podstawienia

$$x = \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z + \dots,$$

$$y = \lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z + \dots,$$

$$z = \lambda_3 X + \mu_3 Y + \nu_3 Z + \dots,$$

i oznaczmy przez  $\Delta$  *moduł przekształcenia*, to jest wyznacznik mający za elementa spółczynniki przekształcenia  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \dots, \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \dots$

Oczywiście że jest niepodobna, w ogólności, oznaczyć spółczynniki  $\lambda_1, \mu_1, \dots$  w ten sposób aby jakakolwiek funkcya dana  $ax^n + \dots$  przybierała, przez przekształcenie, inną jakakolwiek formę równie daną  $a'X^n + \dots$ . W rzeczy saméj, jeżeli wykonamy podstawienie w  $ax^n + \dots$  i jeżeli zrównamy spółczynniki tym sposobem otrzymane ze spółczynnikami  $a'X^n + \dots$ , będziemy mieli jak w numerze 99, szereg zrównań  $a' = a\lambda_1^n + \dots$  których liczba będzie równą liczbie wyrazów jakie zamyka jakakolwiek funkcya ogólna  $n$ tego stopnia o  $k$  zmiennych. Lecz, dla zadosyc uczynienia tym zrównaniom, mamy tylko do rozporządzenia liczbą  $k^2$  stałych  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , i ta liczba będzie, ogólnie, niższą od liczby zrównań którym należy zadosyc uczynić (\*). Wypada z tego że, jeżeli jakakol-

(\*) Liczbą wyrazów kształtu ogólnego  $n$ tego stopnia o  $k$  zmiennych jest

wiek funkcyą  $ax^n + \dots$  może być przekształcona na inną jakąkolwiek funkcyą  $a'X^n + \dots$ , powinny istnieć związki między współczynnikami  $a, b, \dots, a', b', \dots$ . W rzeczy samej, potrzebujemy tylko wyrugować liczbę  $k^2$  stałych nieznanych między równaniami  $a' = a\lambda_1^n + \dots$ , i otrzymamy jakikolwiek szereg związków między  $a, a', \dots$ , których liczba będzie oczywiście równą różnicy znajdującej się między liczbą równań a  $k^2$ . I tak, w przypadku jakiegokolwiek formy podwójnej, liczbą wyrazów jakiegokolwiek funkcyi jednorodnej stopnia  $n$  jest  $n + 1$ . Więc, jeżeli w jakiegokolwiek formie  $ax^n + \dots$  zastąpimy  $x$  przez  $\lambda_1 X + \mu_1 Y$ ,  $y$  przez  $\lambda_2 X + \mu_2 Y$ , i jeżeli zrównamy współczynniki przekształconej ze współczynnikami  $a'X^n + \dots$ , będziemy mieli  $n + 1$  równań zamykających  $a, a', \dots, \lambda_1, \mu_1, \dots$ , i rugując cztery ilości  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ , otrzymamy pewien układ warunków równoważnych dla  $n - 3$  związków niezależnych między  $a, b, \dots, a', b', \dots$ . Zobaczmy później że te związki mogą się napisać tym sposobem :

$$\varphi(a, b, \dots) = \varphi(a', b', \dots);$$

innemi słowy, że znajduje się funkcyą współczynników  $a, b, \dots$  zachowujących tę samą wartość przy przejściu z formy

$\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k-1}$ , a łatwo spostrzedz że jedynemi przypadkami w których ta liczba nie przewyższa  $k^2$  są : 1° gdy  $n = 2$  (w tym przypadku, liczba ta sprowadza się do  $\frac{1}{2} k(k+1)$ , wartość mniejsza jak  $k^2$ , gdyż  $k$  jest całkowitem); 2° gdy  $k = 2, n = 3$ , (dwie liczby mają wtedy tę samą wartość 4); to jest że jedyne przypadki w których jakkolwiek funkcyą dana jest zdolną przybrać przez przekształcenie kształt jakikolwiek, są : 1° przypadek kształtu kwadratowego o liczbie iluokolwiek zmiennych, 2° przypadek kształtu sześciennego o dwóch zmiennych.



pierwotnej do jej przekształconej. Sposób jaki wskazaliśmy nie jest ten jakiego użyjemy dla znalezienia tych funkcji lecz daje on zrozumieć *a priori* ich istnienie, i pokazuje kiedy należy rachować na znalezienie tych funkcji które są niezależne jedne od drugich.

102. Nazywa się *niezmiennikiem* wszelka funkcya spółczynników jakiegokolwiek formy takiej że, jeżeli się wykona na kształcie jakiegokolwiek podstawienie linijne, funkcya podobna spółczynników przekształconej jest równą funkcji pierwotnej pomnożonej przez jakąkolwiek potęgę modułu przekształcenia, to jest że mamy

$$\varphi(a', b', c', \dots) = \Delta \varphi(a, b, c, \dots).$$

Gdy  $p = 0$ , funkcya jest jakimkolwiek *niezmiennikiem bezwzględnym*, to jest nie zmienia się przez przekształcenie, wtedy, nawet gdy  $\Delta$  jest różnym od jedności. Jeżeli jakikolwiek kształt ma dwa niezmienniki zwyczajne, jest łatwo wyprowadzić z nich jakikolwiek niezmiennik bezwzględny. W rzeczy samej, jeżeli mamy jakikolwiek niezmiennik  $\varphi$  który, w przekształceniu, znajduje się pomnożony przez  $\Delta^p$ , i inny jakikolwiek niezmiennik  $\psi$  który znajduje się także pomnożony przez  $\Delta$ , jest rzeczą oczywistą że iloraz z podzielenia ilości  $\varphi^q$  przez  $\psi^p$  będzie jakąkolwiek funkcją która pozostanie niezmienną pomimo przekształcenia.

Wynika z tego co poprzedza, że jakikolwiek kształt podwójny kwadratowy albo sześcienny nie ma innego niezmiennika tylko swój własny dyskryminant (100). Gdyż, gdyby był inny jakikolwiek, możnaby było wyprowadzić z połączenia dwóch niezmienników jakikolwiek związek

$$\varphi(a, b, \dots) = \varphi(a', b', \dots).$$

Lecz widzieliśmy (101) że nie można wtedy otrzymać zróż-



wnania warunkowego między  $a, b, \dots, a', b', \dots$ , ponieważ za pomocą czterech stałych  $\lambda_1, \dots$  ktorými rozporządzamy, możemy przekształcić jakąkolwiek funkcją kwadratową albo sześcienną w ten sposób że współczynniki przyjmą wartości, jakie się tylko podoba. Zobaczymy, tymże samym sposobem, że jakikolwiek kształt kwadratowy o ilukolwiek zmiennych nie ma innego niezmiennika tylko swój własny dyskryminant.

103. Tak samo jak jakikolwiek kształt jedyny, tak i jakikolwiek układ kształtów może mieć niezmienniki. Przypuśćmy pewną liczbę funkcj  $ax^n + \dots, a'x^n + \dots$ . Jeżeli się wykona we wszystkich toż samo podstawienie linijne, to funkcje te staną się  $AX^n + \dots, A'X^n + \dots$ : jakakolwiek funkcja współczynników będzie jakimkolwiek niezmiennikiem jeżeli funkcja podobna, złożona z nowych współczynników, jest równą funkcji pierwotnej pomnożonej przez jakąkolwiek potęgę modułu przekształcenia, to jest jeżeli mamy

$$\begin{aligned} \varphi(A, B, \dots, A', B', \dots, A'', B'', \dots) \\ = \Delta^p \varphi(a, b, \dots, a', b', \dots, a'', b'', \dots). \end{aligned}$$

Przykład najprostszy niezmienników tego rodzaju napotyka się w przypadku jakiegokolwiek układu zrównań liniijnych: wyznacznik podobnego układu jest niezmiennikiem; widzimy to bezpośrednio odnosząc się do definicyi niezmiennika i do dowodzenia twierdzenia na mnożenie wyznaczników (23).

Jeżeli mamy niezmiennik jakiegokolwiek kształtu jedynego, można z niego wyprowadzić jakikolwiek szereg niezmienników dla układów kształtów tegoż samego stopnia. Aby dać poznać ducha metody zastosujemy ją naprzód do przykładu bardzo prostego. Widzieliśmy (99) że  $ac - b^2$  jest niezmiennikiem kształtu kwadratowego  $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ; wyprowadzimy z niego jakikolwiek niezmiennik dla jakiegokolwiek układu

dwóch kształtów podobnych. Przypuśćmy że, przez jakiegokolwiek przekształcenie linijne,  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  staje się  $AX^2 + 2BXY + CY^2$ , i że  $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$  staje się podobnie  $A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2$ , oczywiście, przez toż same przekształcenie, kształt

$$(a + ka')x^2 + 2(b + kb')xy + (c + kc')y^2$$

( $k$  jest stałą jakąkolwiek) stanie się

$$(A + kA')X^2 + 2(B + kB')XY + (C + kC')Y^2.$$

Tworząc niezmiennik tego ostatniego (99), przyjdzie

$$(A + kA')(C + kC') - (B + kB')^2$$

$$= \Delta^2[(a + ka')(c + kc') - (b + kb')^2].$$

Lecz  $k$  jest dowolnym, a współczynniki różnych potęg  $k$  powinny być równymi po obu stronach, mamy przeto tym sposobem, nie tylko dwa związki już znane,

$$(AC - B^2) = \Delta^2(ac - b^2), \quad (A'C' - B'^2) = \Delta^2(a'c' - b'^2),$$

lecz jeszcze

$$(AC' + A'C - 2BB') = \Delta^2(ac' + a'c - 2bb'),$$

zrównanie jakie można także sprawdzić za pomocą wartości  $A, B, \dots$  danych w numerze 99. Ilość  $ac' + a'c - 2bb'$  jest więc również niezmiennikiem.

Idąc zupełnie tą samą drogą, jeżeli mamy niezmiennik jakiegokolwiek kształtu  $ax^n + \dots$  i żądamy wyprowadzić z niego niezmienniki dla jakiegokolwiek układu dwóch kształtów

$ax^n + \dots, a'x^n + \dots$ , to zastąpimy tylko w niezmienniku danym,  $a$  przez  $a + ka'$ ,  $b$  przez  $b + kb'$ ... a współczynnik każdej potęgi  $k$  w rozwiązaniu będzie niezmiennikiem. Wykonując to rozwinięcie za pomocą wzoru TAYLORA, twierdzenie do którego już byliśmy przywiedzeni może się wystawić tym sposobem : Jeżeli mamy niezmiennik jakiegokolwiek bądź kształtu  $ax^n + \dots$ , i jeżeli wykonamy na tym niezmienniku działanie  $a' \frac{d}{da} + b' \frac{d}{db} + \dots$ , otrzymamy jakikolwiek niezmiennik układu dwóch kształtów  $ax^n + \dots, a'x^n + \dots$ . Można powtórzyć też samo działanie, i będziemy mieli inny jakikolwiek niezmiennik układu, lub też jeszcze można wykonać działanie  $a'' \frac{d}{da} + b'' \frac{d}{db} + \dots$ , co da niezmiennik jakiegokolwiek układu trzech kształtów, i tak dalej. Ten ostatni sposób daje niezmienniki jakie się otrzymuje zastępując  $a$  przez  $a + ka' + la''$  i biorąc współczynniki różnych potęg  $k$  i  $l$ . Otrzymamy tak samo niezmienniki dla liczby iluokolwiek kształtów.

104. *Spółzmienniki*. — Jakikolwiek spółzmiennik jest jakąkolwiek bądź funkcją obejmującą nie tylko współczynniki, lecz także zmienne jakiegokolwiek kształtu ; i taką że, jeżeli wykonamy w kształcie jakiegokolwiek podstawienie linijne, nowa funkcya współczynników i zmiennych w przekształconym kształcie jest równą funkcji pierwotnej pomnożonej przez jakąkolwiek potęgę modułu przekształcenia, to jest że jeżeli wyrażenie  $ax^n + \dots$  staje się, przez przekształcenie,  $Ax^n + \dots$  niezmiennik (\*) musi zadosyć uczynić równaniu

$$\varphi(A, B, \dots, X, Y, \dots) = \Delta^p \varphi(a, b, \dots, x, y, \dots).$$

---

(\*) W geometrii linii krzywych i powierzchni, wszelkie przekształcenia spółrzędnych odbywają się przez podstawienia linijne. Niezmiennik jakiegokolwiek kształtu potrójnego lub poczwórnego jest więc jakikolwiek funkcją współczynników, której sprowadzenie do zera wyraża jakąkolwiek



Wszelki niezmiennik jakiegokolwiek spółzmiennika jest jakimkolwiek niezmiennikiem kształtu pierwotnego. To wynika bezpośrednio z definicyi. Niech będą  $ax^n + \dots$  kształt dany,  $a'x^n + \dots$  jego spółzmiennik,  $AX^n + \dots$ ,  $A'X^n + \dots$  to czem się stają te funkcye przez jakiegokolwiek podsjawienie linijne. Niezmiennik spółzmiennika jest jakąkolwiek bądź funkcyą swych spółczynników, taką że

$$\varphi(A', B', \dots) = \Delta^p \varphi(a', b', \dots).$$

Lecz, przez definicyą,  $A', B', \dots$  są mniej niż o jakąkolwiek potęgę modułu złożone z  $A, B, \dots$ ; tak samo jak  $a', b', \dots$  złożonemi są z  $a, b, \dots$ . Przeto, jeżeli wyrazimy te funkcye za pomocą spółczynników formy pierwotnej i jej przekształconej, będziemy mieli

$$\psi(A, B, \dots) = \Delta^p \psi(a, b, \dots),$$

to jest że funkcyą  $\psi$  jest jakimkolwiek niezmiennikiem. Tak samo wszelki spółzmiennik jakiegokolwiek spółzmiennika jest jakimkolwiek spółzmiennikiem kształtu pierwotnego.

105. Położymy, w dwóch numerach następujących, nowe zasady prowadzące do ważnego szeregu spółzmienników.

Jeżeli, w jakimkolwiek kształcie  $u$ , zastąpimy  $x$  przez  $x + kx'$ ,  $y$  przez  $y + ky'$ , i t. d., ponieważ  $x', y', z'$ , powinny być przekształcone przez toż same podstawienie jak  $x, y, z$ ,

własność krzywój lub powierzchni niezależnej od wyboru osi, taką jest istnienie punktu podwójnego; spółzmiennik przedstawia jakąkolwiek inną krzywą lub jakąkolwiek inną powierzchnią, której wszystkie punkta mają z krzywą lub powierzchnią daną jakiegokolwiek związek niezależny od wyboru osi. Zład wynika ważność geometryczna teoryi niezmienników i spółzmienników.



więc współczynniki różnych potęg  $k$ , które są wszystkie kształtu  $(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy} + \dots)^p u$ , będą pierwszymi, drugimi, trzecimi, i t. d., *emanantami* (*émanants*) (\*) t. j. wpływami i pewnego rodzaju pochodnymi kształtu. Każdy z nich jest jakimkolwiek spółmiennikiem. Otrzymamy, w rzeczy samej, tenże sam wypadek, bądź to zastępując  $x$  przez  $x + kx' \dots$  i przekształcając potem  $x, x', \dots$  przez podstawienia linijne, bądź to wykonywając naprzód to podstawienie i zastępując potem  $X$  przez  $X + kX', \dots$  Gdyż mamy oczywiście

$$\begin{aligned} \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z + k(\lambda_1 X' + \mu_1 Y' + \nu_1 Z') \\ = \lambda_1 (X + kX') + \mu_1 (Y + kY') + \nu_1 (Z + kZ'). \end{aligned}$$

Więc, jeżeli przez przekształcenie  $u$  staje się  $U$ , znajdziemy tenże sam wypadek bądź to zastępując w  $u, x$  przez  $x + kx' \dots$  i wykonywając potem podstawienia, bądź to zastępując w  $U, X$  przez  $X + kX' \dots$ , a ponieważ  $k$  jest nieoznaczonym, współczynniki  $k$  będą równymi po obu stronach, co prowadzi wprost do związku

$$x' \frac{du}{dx} + y' \frac{du}{dy} + \dots = X' \frac{dU}{dX} + Y' \frac{dU}{dY} + \dots$$

106. Jeżeli się weźmie pod rozwagę emanant dając że jest funkcją samych zmiennych  $x', y', \dots$ , uważając na chwilę  $x, y, \dots$  jako stałe, i jeśli się obliczy jego niezmienniki w tém założeniu, każdy z nich, uważany jako funkcya zmiennych  $x, y, \dots$ , będzie spółmiennikiem kształtu pierwotnego.

---

(\*) W geometryi, emananty przedstawiają krzywe i powierzchnie biegunowe jakiegokolwiek punktu względem jakiej krzywej lub powierzchni danej.

Widzieliśmy że emanant  $x'^p \frac{d^p u}{dx^p} + \dots$  staje się  $X'^p \frac{d^p U}{dX^p} + \dots$  kiedy się zastąpi  $x'$  przez  $\lambda_1 X' + \mu_1 Y' + \dots$  a  $x$  przez  $\lambda_1 X + \mu_1 Y + \dots$ . Jest oczywiście obojętnym czy dwa podstawienia są jednoczesne lub po sobie następujące. Więc, jeżeli przekształcając  $x', y', \dots$  same, wyrażenie  $x'^p \frac{d^p u}{dx^p} + \dots$  staje się  $aX'^p + \dots$ , współczynniki  $a, \dots$  będą funkcjami  $x, y, \dots$  które, gdy się przekształci  $x, y, \dots$ , staną się  $\frac{d^p U}{dX^p}, \dots$ . Lecz niezmiennik emananta danego, uważany jako funkcja  $x', y', \dots$ , jest z definicyi funkcją jakąkolwiek swych współczynników, różniącą się od funkcyi odpowiedniej współczynników przekształconych  $a, \dots$  tylko potęgą jakąkolwiek modułu. Ponieważ, tak jak to widzieliśmy, współczynniki  $a, \dots$  stają się  $\frac{d^p U}{dX^p}, \dots$  kiedy się przekształci  $x, y, \dots$ , niezmiennik dany będzie jakąkolwiek funkcją  $\frac{d^p u}{dx^p}, \dots$ , który, gdy się przekształci  $x, y, \dots$ , będzie się różnił tylko jakąkolwiek potęgą modułu funkcyi odpowiedniej  $\frac{d^p U}{dX^p}, \dots$ . Ten będzie więc właśnie jakimkolwiek współzmiennikiem kształtu pierwotnego.

I tak, na przykład, było już dowiedzionym (99) że, jeżeli kształt podwójny  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  ma za swój przekształcony

$$AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

znajduje się

$$(AC - B^2) = \Delta^2(ac - b^2);$$

wynika ztąd że uważając drugi emanant

$$\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy}\right)^2 u$$

kształtu i stopnia jakiegokolwiek, ma się także

$$\frac{d^2U}{dX^2} \frac{d^2U}{dY^2} - \left( \frac{d^2U}{dXdY} \right)^2 = \Delta^2 \left[ \frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2u}{dy^2} - \left( \frac{d^2u}{dxdy} \right)^2 \right],$$

twierdzenie którego podamy jeszcze inne dowodzenia.

107. W ogólności, jeżeli się weźmie drugi emanant jakiegokolwiek kształtu o liczbie ilukolwiek zmiennych i jeśli się obliczy jego dyskryminant, otrzyma się spółzmiennik nazwany funkcją Hess'ego, albo wyznacznikiem Hess'ego, albo po prostu HESS'OWYM (*Hessian*).

Zauważyliśmy (98) że dyskryminant wszelkiej funkcji kwadratowej może się napisać pod kształtem wyznacznika. I tak, używając, jak to już zrobiliśmy gdzieindziej, wskaźników 1, 2, ... na oznaczenie różniczkowania względem  $x, y, \dots$ , w ten sposób że  $u_{11}$  przedstawia  $\frac{d^2u}{dx^2}$ , emanant drugiego stopnia będzie  $u_{12}x'^2 + 2u_{12}x'y' + \dots$ , a jego dyskryminant napisze się

$$H = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \dots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \dots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

108. Widzieliśmy (103) że wyznacznik jakiegokolwiek układu równań liniowych jest jakimkolwiek niezmiennikiem układu. Jeżeli więc, mając kształty  $u, v, w, \dots$ , utworzy się ich pierwsze emananty  $x'u_1 + y'u_2 + z'u_3 + \dots$ , wyznacznik

$$J = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \dots \\ v_1 & v_2 & v_3 \dots \\ w_1 & w_2 & w_3 \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

będzie jakimkolwiek spółzmiennikiem. Jest to właśnie wyznacznik *Jakobiego* wzmiankowany już powyżej (69): wyznacznik *Hessego* jest nie innym jak funkcją  $J$  obliczoną dla układu pochodnych  $u_1, u_2, u_3, \dots$  tegoż samego kształtu.

109. PRZECIWSZMIENNIKI. — Jeżeli się przekształci linijnie jakąkolwiek grupę zmiennych  $x, y, \dots$ , zdarza się często że inne zmienne związane ze zmiennymi  $x, y, \dots$  są także przekształcone linijnie, lecz za pomocą jakiegokolwiek podstawienia innego. Jeżeli, jak powyżej, równania wiążące  $x, y, z$ , nowymi zmiennymi są

$$\begin{aligned}x &= \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z, & y &= \lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z, \\z &= \lambda_3 X + \mu_3 Y + \nu_3 Z,\end{aligned}$$

wtedy to jakiegokolwiek zmienne  $\xi, \eta, \zeta$  są nazwane przekształconemi przez podstawienie *odwrotne*, jeżeli nowe zmienne  $X_1, Y_1, Z_1$  wyrażają się w funkcji dawnych przez równania

$$\begin{aligned}X_1 &= \lambda_1 \xi + \lambda_{2\eta} + \lambda_3 \zeta, & Y_1 &= \mu_1 \xi + \mu_{2\eta} + \mu_3 \zeta, \\Z_1 &= \nu_1 \xi + \nu_{2\eta} + \nu_3 \zeta;\end{aligned}$$

w których współczynniki są elementami wyznacznika ( $\lambda_1 \mu_{2\nu_3}$ ) czytaniem pionowo, podczas gdy w podstawieniu *wprost* były one czytaniem poziomo: w pierwszym podstawieniu, dawne zmienne są wyrażone w funkcji nowych, a w drugim, nowe w funkcji dawnych. Tak ustalony, związek jest widocznie odwrotnym. Wyciągając w rzeczy samej wartości  $\xi, \eta, \zeta$  z funkcji  $X_1, Y_1, Z_1$ , przyjdzie (28)

$$\Delta \xi = L_1 X_1 + M_1 Y_1 + N_1 Z_1, \quad \Delta \eta = L_2 X_1 + M_2 Y_1 + N_2 Z_1,$$

$$\Delta \zeta = L_3 X_1 + M_3 Y_1 + N_3 Z_1.$$



$L_1, M_1, \dots$  są wyznacznikami mniejszemi wyprowadzonymi z  $(\lambda_1 \mu_2 \nu_3)$  przez zniesienie linii i kolumny zawierających  $\lambda_1$  albo  $\mu_1, \dots$

Jeżeli dwie grupy zmiennych  $x, y, z; \xi, \eta, \zeta$  będą przekształcone, jak powyżej, przez podstawienia odwrotne, jedną z nich będziemy oznaczać nadal przez litery greckie, a zwyczajnie przez litery  $\alpha, \epsilon, \gamma$ . Wyłożymy naprzód dwa przypadki najważniejsze w których się używa podstawienia odwrotnego.

110. Kiedy się przekształci linijnie jakąkolwiek funkcją  $x, y, z$  na inną funkcją  $X, Y, Z$ , pochodne względem nowych zmiennych wyrażają się linijnie za pomocą pochodnych względem dawnych, lecz przez podstawienie odwrotne. Ma się, w rzeczy saméj,

$$\frac{d}{dX} = \frac{d}{dx} \frac{dx}{dX} + \frac{d}{dy} \frac{dy}{dX} + \frac{d}{dz} \frac{dz}{dX} + \dots$$

Lecz, z wyrażeń  $x, y$ , w funkcji  $X, Y, \dots$ , wyciąga się

$$\frac{dx}{dX} = \lambda_1, \quad \frac{dy}{dX} = \lambda_2, \quad \frac{dz}{dX} = \lambda_3,$$

z kąd

$$\frac{d}{dX} = \lambda_1 \frac{d}{dx} + \lambda_2 \frac{d}{dy} + \lambda_3 \frac{d}{dz} + \dots;$$

podobnież

$$\frac{d}{dY} = \mu_1 \frac{d}{dx} + \mu_2 \frac{d}{dy} + \mu_3 \frac{d}{dz} + \dots$$

Jeżeli się więc przekształci linijnie  $x, y, z$ , to symbole  $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$  znajdują się przekształconemi linijnie przez pod-

stawienie odwrotne, według prawidła numeru poprzedniego.

Owoż oznaczywszy, jak powyżej, przez  $u_1, u_2, \dots$  pochodne jakiegokolwiek funkcji  $u$ , a przez  $U_1, U_2, \dots$  pochodne jej przekształconej  $U$ , dowiedliśmy że się otrzymuje

$$U_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3, \quad U_2 = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3, \dots$$

A więc, jeżeli  $u_1, u_2, u_3$  sprowadzą się do zera, stanie się podobnie z pochodnymi  $U_1, U_2, U_3$ ; lecz wiemy że  $u_1, u_2, u_3$  nie sprowadzą się wszystkie do zera tylko gdy dyskryminant układu jest zerem, a w tym przypadku, widzimy że dyskryminant układu przekształconego będzie także zerem i zawierać tem samem musi pierwszy jako czynnik, jak to jużśmy udowodnili (87).

141. W geometryi płaskiej, jeżeli  $x, y, z$  przedstawiają współrzędne *trzylinijne* (*trilinéaires*) jakiegokolwiek punktu, a  $x\xi + y\eta + z\zeta = 0$  równanie jakiegokolwiek prostej,  $\xi, \eta, \zeta$  mogą być nazwane współrzędnymi  *stycznymi*, lub właściwiej  *styczneczkowemi* (*tangentielles*) tój prostej. Jeżeli się odniesie do nowych osi robiąc  $x = \lambda_1 X + \dots$ , równanie prostej staje się

$$\xi(\lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z) + \eta(\lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z) + \zeta(\lambda_3 X + \mu_3 Y + \nu_3 Z),$$

jakie można napisać pod kształtem

$$XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 0,$$

robiąc

$$X_1 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta, \quad Y_1 = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \mu_3 \zeta,$$

$$Z_1 = \nu_1 \xi + \nu_2 \eta + \nu_3 \zeta.$$

Innemi słowy, jeżeli współrzędne jakiegokolwiek punktu są

przekształcone przez jakiekolwiek podstawienie linijne, współrzędne styczneczkowe jakiejkolwiek prostej są przekształcone przez podstawienie odwrotne. Podobnie, w geometrii o trzech wymiarach, współrzędne styczneczkowe jakiejkolwiek płaszczyzny, i współrzędne jakiegokolwiek punktu są przekształcone przez podstawienia odwrotne. Gdy się odniesie do nowych osi, wszystkie współrzędne  $x, y, z, w; x', y', z', w'$ , przedstawiające punkta, są przekształcone przez toż samo podstawienie  $x = \lambda_1 X + \dots, x' = \lambda_1 X' + \dots$ ; gdy tymczasem współrzędne styczneczkowe stają się nimi przez podstawienie odwrotne.

Będziemy się posługiwali często zasadą wyłożoną powyżej, że funkcyą

$$x\xi + y\eta + z\zeta = XX_1 + YY_1 + ZZ_1,$$

w której  $x, y, z$  powinny być przekształcone przez podstawienie wprost  $x = \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z$ , a  $\xi, \eta, \zeta$  przez podstawienie odwrotne  $X_1 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta$ , pozostaje niezmienną przez to podwójne przekształcenie.

112. Jeżeli jakikolwiek kształt  $ax^n + \dots$  staje się przez przekształcenie  $AX^n + \dots$ , nazwiemy *przeciwzmiennikiem* (*contre-variant*) (\*) jakąkolwiek funkcyą zawierającą współczynniki kształtu i zmiennych  $\xi, \eta, \dots$ , które są uważane jak istotnie przekształcone przez podstawienie odwrotne, jeżeli ta funkcyą różni się tylko jakąkolwiek potęgą modułu od funkcyi odpowiedniej współczynników i zmiennych przekształconej, to jest jeżeli mamy

$$\varphi(A, B, \dots, X_1, Y_1, \dots) = \Delta \varphi(a, b, \dots, \xi, \eta, \dots).$$

(\*) Pierwszy przykład przeciwzmiennika był podanym przez GAUSSA w jego *Disq. arithm.* Oznacza on pod nazwiskiem *formy przybranęj* przeciwzmiennik kształtu kwadratowego potrójnego. Geometrowie niemieccy przechowali całkowicie nazwanie podobne, *zugehörige forme*. Nazwanie przeciwzmiennika jest lepsze.



Funkcye tego rodzaju przedstawiają się często w geometryi. Jeżeli mamy, na przykład, jakiegokolwiek zrównanie wyrażające warunek konieczny aby jakakolwiek prosta lub jakakolwiek płaszczyzna miała z jaką krzywą lub z jakakolwiek powierzchnią daną jakiegokolwiek związek niezależny od wyboru osi, jak na przykład, jakiegokolwiek warunek zetknięcia się, i jeżeli odniesiemy wszystko do nowych osi, jest oczywiście rzeczą obojętną czy przekształcimy związek o którym tu mowa zastępując dawne współczynniki przez ich wartości w funkcyi nowych, albo też wyprowadzając ten związek ze zrównania przekształconego krzywej tymże samym sposobem jak to było wydobytém ze zrównania pierwotnego. Dwa wyrażenia tego warunku

$$\varphi(a, b, \xi, \dots), \quad \varphi(A, B, X, \dots)$$

różnią się więc tylko jakimkolwiek czynnikiem.

113. Oprócz spółzmienników i przeciwszmienników można jeszcze wystawić sobie funkcyje zawierające dwa szeregi zmiennych i różniące się tylko jakakolwiek potęgą modułu od funkcyj przekształconych odpowiednich, to jest funkcyje takie żeby było

$$\varphi(A, B, \dots, X, Y, \dots, X_1, Y_1, \dots) = \Delta \varphi(a, b, \dots, x, y, \dots, \xi, \eta, \dots).$$

Nazwiemy je *spółzmiennikami mieszanemi* (*covariants mixtes*) (\*). Funkcyą najprostszą tego rodzaju jest  $x\xi + y\eta + z\xi$ ;

---

(\*) Te funkcyje, jakie możnaby było, jak to proponował p. SALMON nazwać poprostu *zmiennikami* (*divariants*), są oznaczone w pracach pp. ARONHOLDA i CLEBSCH'A pod nazwiskiem *międzykształtów* (*zwischenformen*). P. SYLWESTER, który używa wyrazu ogólnego *niezmiennika* (*concomitant*) na oznaczenie ogółu wszystkich funkcyj których związki z kształtem pierwotnym nie są zmienione przez jakiegokolwiek przekształcenie liniowe, przyjmuje nazwanie *niezmienników mieszanych* (*concomitants mixtes*).



funkcja ta jest niezmienną, przez przekształcenie (111), a tem samem, jest jakimkolwiek spółzmiennikiem mogącym być przydanym do kształtu jakiegokolwiek.

114. Niech będzie  $I$  jakimkolwiek niezmiennik jakiegokolwiek bądź kształtu

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + n b_1 x^{n-1} z + \frac{1}{2} n(n-1) a_2 x^{n-2} y^2 + \dots;$$

można ztąd wyprowadzić jakimkolwiek przeciwzmiennik według metody użytej w numerze 103. Jeżeli kształt dany staje się przez przekształcenie,  $A_0 X^n + \dots$ , funkcja  $x\xi + y\eta + z\zeta$  staje się sama przez się  $XX_1 + YY_1 + ZZ_1$ , wynika ztąd że

$$\begin{aligned} a_0 x^n + \dots + k(x\xi + y\eta + z\zeta)^n \\ = A_0 X^n + \dots + k(XX_1 + YY_1 + ZZ_1)^n. \end{aligned}$$

Lecz jakimkolwiek niezmiennik kształtu pierwotnego dopełnia warunku

$$\varphi(A_0, A_1, B_1, \dots) = \Delta^v \varphi(a_0, a_1, b_1, \dots).$$

Obliczając podobnyż niezmiennik dla nowego kształtu, otrzymamy

$$\varphi(A_0 + kX_1^n, A_1 + kX_1^{n-1}Y_1, \dots) = \Delta^v \varphi(a_0 + k\xi^n, a_1 + k\xi^{n-1}\eta, \dots);$$

a ponieważ  $k$  jest dowolnem, możemy więc zrównać spółczynniki tychże samych potęg  $k$  po obu stronach : te spółczynniki, wedle twierdzenia TAYLORA, są wszystkie kształtu

$$\left( \xi^n \frac{d}{da_0} + \xi^{n-1}\eta \frac{d}{da_1} + \xi^{n-1}\zeta \frac{d}{db_1} + \xi^{n-2}\eta^2 \frac{d}{da_2} + \dots \right)^q I.$$

Dowiedliśmy że powyższe współczynniki różnią się tylko jakąkolwiek potęgą modułu od funkcji odpowiedniej wyprowadzonej ze zrównania przekształconego. Są to więc właśnie przeciwzmienniki, ponieważ było stale przyjętem że  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  powinny być przekształcone przez podstawienie odwrotne. P. SYLWESTER daje nazwisko *przewoźników* (*évectans*) przeciwzmiennikom wyprowadzonym z jakiegokolwiek niezmiennika, według prawidła powyższego. I tak  $\xi^n \frac{dI}{da_0} + \xi^{n-1} \eta \frac{dI}{da_1} + \dots$  jest pierwszym przewoźnikiem. Należy zauważyć że przypuszcza się że współczynniki, w kształcie pierwotnym, przybierają też same czynniki liczebne jak współczynniki rozwinięcia  $(x + y + z)^n$ , gdy tymczasem tak nie jest w przewoźniku.

Porównyując z *nerm* 103, widzimy że funkcja  $\xi^n \frac{dI}{da_0} + \dots$  może być uważaną, bądź to jak jakikolwiek przeciwzmiennik kształtu danego, bądź to jak jakikolwiek niezmiennik układu jaki się otrzymuje przez połączenie jej (t. j. funkcji danej) z funkcją liniową  $x\xi + y\eta + z\zeta$ . Teorya przeciwzmienników może być zamkniętą w teoryi niezmienników.

Wykonywając działanie  $\xi^n \frac{d}{da_0} + \dots$  na jakimkolwiek współzmienniku, otrzymuje się jakikolwiek współzmiennik mieszany, gdyż dowiodłoby się, tymże samym sposobem, że wypadek, będący oczywiście jakąkolwiek funkcją zawierającą w sobie dwie grupy zmiennych, przekształci się na jakąkolwiek funkcją podobną.

PRZYKŁAD I. — Jeżeli wyrażenie  $abc - 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$  jest dyskriminantem, a tém samém, jakimkolwiek niezmiennikiem kształtu potrójnego

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxy + 2hxy,$$

to funkcya

$$(bc - f^2)\xi^2 + (ca - g^2)\eta^2 + (ab - h^2)\zeta^2 \\ + 2ah - af)\eta\zeta + 2(hf - bg)\zeta\xi + 2(fg - ch)\xi\eta.$$

będzie jakimkolwiek przeciwziennikiem. Geometrycznie, jest to zrównanie styczniowe sekcji konicznej przedstawionej pod kształtem danym.

PRZYKŁAD II. — Mając dane dwa kształty kwadratowe potrójne  $ax^2 + \dots, a'x^2 + \dots$ , wiemy że wyrażenie  $a'(bc - f^2) + \dots$  jest jakimkolwiek niezmiennikiem spólnym (103); wykonywając działanie

$\xi^2 \frac{d}{da} + \dots$ , przyjdzie

$$\begin{aligned} & (bc' + b'c - 2ff')\xi^2 + (ca' + c'a - 2gg')\eta^2 + (ab' + a'b + 2hh)\zeta^2 \\ & + 2(gh' + g'h - af' - a'f)\eta\zeta + 2(hf' + h'f - bg' - b'g)\xi\zeta \\ & + 2(fg' + f'g - ch' - c'h)\xi\eta. \end{aligned}$$

Ten przeciwziennik mógłby się jeszcze otrzymać wykonywając działanie

$a' \frac{d}{da} + \dots$  na przeciwzienniku przykładu poprzedniego.

Geometrycznie, wyraża on warunek który musi być sprawdzony, ażeby jakakolwiek prosta była przeciętą *harmonicznie* przez dwie sekcje koniczne

115. Jeżeli dyskryminant jakiegokolwiek kształtu zniszczy się, istnieje jakakolwiek grupa pierwiastków szczególnych  $x', y', z'$  (geometrycznie są to spórzędne punktu podwójnego, krzywej lub powierzchni przedstawionej pod tym kształtem), i w tym przypadku, pierwszy przewoźnik dyskryminanta będzie potęgą  $ntq$  wyrażenia

$$x'\xi + y'\eta + z'\zeta.$$

W rzeczy samej, ponieważ przewoźnik nie zmienia się przez przekształcenie, dosyć wiedzieć co się zdarzy w jakimkolwiek przypadku szczególnym. Lecz, jeżeli dyskryminant jest równy zeru, forma może być przekształconą w taki sposób że nowe



spółczynniki zmiennych  $x^n$ ,  $x^{n-1}y$ ,  $x^{n-1}z$  staną się zerami, i że pierwiastkiem szczególnym będzie  $y = 0$ ,  $z = 0$  (co znaczy geometrycznie że przypuszczamy początek spólrzędnych w punkcie podwójnym); lecz było dowiedzionem (97) że dyskryminant jest kształtu

$$a_0\varphi + a_1^2\varphi + a_1b_1\psi + b_1^2\chi.$$

Jeżeli  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  zniszczą się, nie tylko dyskryminant, lecz wszystkie jego pochodne zniszczą się także, wyjąwszy  $\frac{dI}{da_0}$ .

Przewoźnik sprowadzi się więc do  $\frac{dI}{da_0}$  pomnożonego przez  $\xi^n$ , wyraz jedyny do którego się sprowadzi wyrażenie  $(x'\xi + y'\eta + z'\zeta)^n$  gdy się zrobi  $x' = 1$ ,  $y' = 0$ ,  $z' = 0$ .

Tak więc, jeżeli dyskryminant jakiegokolwiek kształtu kwadratowego potrójnego jest zerem, zrównanie przedstawia dwie linie proste; przeciwnie

$$(bc - f^2)\xi^2 + (ca - g^2)\eta^2 + \dots$$

staje się kwadratem zupełnym, i otrzyma się spólrzędne  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , punktu przecięcia, identyfikując go z wyrażeniem

$$[(x'\xi + y'\eta + z'\zeta)^2].$$

Jeżeli kształt przyjmuje dwie grupy pierwiastków szczególnych, wszystkie pierwsze pochodne dyskryminanta sprowadzą się do zera, i jego drugi przewoźnik staje się jakąkolwiek potęgą dokładną wyrażenia

$$(x'\xi + y'\eta + z'\zeta)(x''\xi + y''\eta + z''\zeta),$$

gdym  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ;  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  oznaczają dwie grupy pierwiastków szczególnych, i tak dalej.



## ROZDZIAŁ VI

### TWORZENIE SIĘ NIEZMIENNIKÓW I SPÓŁZIENNIKÓW.

116. Poznawszy dokładnie co rozumieć należy przez niezmienniki, spółzienniki, etc., wskażemy metody za pomocą których można tworzyć te funkcje : trzy metody będą wyłożone w tym Rozdziale, a czwarta w Rozdziale następnym.

FUNKCJE SYMETRYCZNE. — Ta metoda stosuje się tylko do kształtów podwójnych. Wszelka funkcja symetryczna z różnic pierwiastków jest jakimkolwiek niezmiennikiem, byle tylko każdy pierwiastek w nim figurował też samą liczbę razy (\*). Oczywiście że jakimkolwiek niezmiennik musi być jakąkolwiek funkcją z różnic pierwiastków, ponieważ ten niezmiennik nie zmienia się kiedy się w nim zastąpi  $x$  przez  $x + \lambda$ . Przekształcenie liniowe najogólniejsze prowadzi do zmiany każdego pierwiastku  $\alpha$  na  $\frac{\lambda\alpha + \mu}{\lambda\alpha + \mu}$ , i, w tém działaniu, różnica dwóch

---

(\*) Oznaczywszy w równaniu przez  $a_0$  spółczynnik najwyższy potęgi  $x$ , potrzeba podzielić przez ten spółczynnik dla otrzymania wyrażenia summy, wieloczynów, etc., pierwiastków, i wszelkie funkcje symetryczne są ułamkami zawierającymi w mianowniku potęgę ilości  $a_0$ . Gdy mówimy że jakąkolwiek funkcja symetryczna pierwiastków jest jakimkolwiek niezmiennikiem, rozumiemy przez to że ta funkcja została zrobiona całkowitą mnożąc ją przez jakąkolwiek potęgę dostatecznie podniesioną ilości  $a_0$ , lub, co na jedno wychodzi, że utworzywszy funkcję symetryczną przypuszczając spółczynnik  $x^n$  równy jedności, robi się ją potem jednorodną mnożąc każdy wyraz przez jakąkolwiek potęgę odpowiednią ilości  $a_0$ .

pierwiastków  $\alpha - \epsilon$  staje się  $\frac{(\lambda\mu' + \lambda'\mu)(\alpha - \epsilon)}{(\lambda'\alpha + \mu')(\lambda'\epsilon + \mu')}$ ; ażeby jakakolwiek bądź funkcyja z różnic mogła, po swém przekształceniu, nie różnić się od swęj wartości pierwotnej tylko przez jakikolwiek czynnik, potrzebném jest żeby mianownik pozostał tenże sam dla wszystkich wyrazów: funkcyja musi więc być jakimkolwiek wieloczynem z różnic w którym każdy pierwiastek przedstawia się też samą liczbę razy. I tak, dla jakiegokolwiek kształtu dwukwadratowego, funkcyja

$$\Sigma(\alpha - \epsilon)^2 (\gamma - \delta)^2$$

jest jakimkolwiek bądź niezmiennikiem, gdyż po przekształceniu, wszystkie wyrazy summy mają tenże sam mianownik. Lecz nie dzieje się podobnie z wyrażeniem  $\Sigma(\alpha - \epsilon)^2$ , ponieważ mianownikiem wyrazu  $(\alpha - \epsilon)^2$  jest

$$(\lambda'\alpha + \mu')^2 (\lambda'\delta + \mu')^2,$$

a mianownikiem wyrazu  $(\gamma - \delta)^2$

$$(\lambda'\gamma + \mu')^2 (\lambda'\delta + \mu')^2.$$

117. Można by jeszcze wyprowadzić to twierdzenie sposobem być może nieco prostszym, pisząc zrównanie pod kształtem jednorodnym. Widzieliśmy (87) że zmieniając  $x$  na  $\lambda x + \mu y$ ,  $y$  na  $\lambda'x + \mu'y$ , ilość  $x_1y_2 - x_2y_1$  staje się

$$(\lambda\mu' - \lambda'\mu)(x_1y_2 - x_2y_1),$$

i że, tęp samém, wszelka funkcyja wyznaczników  $x_1y_2 - x_2y_1$  jest jakimkolwiek niezmiennikiem. Lecz (38) wszelka funkcyja pierwiastków wyrażona sposobem zwyczajnym sprowadza się

do kształtu jednorodnego, zastępując  $\alpha, \beta, \dots$  przez  $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}$  i mnożąc potem przez jakąkolwiek potęgę wieloczynu ze wszystkich czynników  $y$  dostatecznie podniesioną dla zniesienia ułamków. Jeżeli się działa w ten sposób na jakiegokolwiek funkcji z różnic w której pierwiastki nie przedstawiają się wszystkie tymże samym sposobem, to po wykonaniu mnożenia, pozostaną czynniki  $y$  na widoku, i funkcja nie będzie mogła być jakimkolwiek niezmiennikiem. I tak, dla jakiegokolwiek funkcji czwartego stopnia,  $\Sigma(\alpha - \beta)^2$  staje się

$$\Sigma y_1^2 y_2^2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2,$$

gdy tymczasem funkcja  $\Sigma(\alpha - \beta)^2 (\gamma - \delta)^2$ , w której figurują wszystkie pierwiastki, staje się

$$\Sigma (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 (x_3 y_4 - x_4 y_3)^2;$$

ta funkcja zawiera w sobie same tylko wyznaczniki, a tém samém jest jakimkolwiek niezmiennikiem.

Dowiedzie się, podobnie, że wszelka funkcja symetryczna utworzona z różnic pierwiastków między sobą, i z różnic między  $x$  a jednym lub wielu pierwiastkami, jest jakimkolwiek spółzmiennikiem, byle tylko każdy pierwiastek nie zaprzestat figurować też samą liczbę razy. I tak, dla jakiegokolwiek kształtu trzeciego stopnia,  $\Sigma(\alpha - \beta)^2 (x - \gamma)^2$  jest jakimkolwiek spółzmiennikiem.

118. Możemy, za pomocą metody poprzedniej, utworzyć niezmienniki i spółzmienniki sprowadzające się do zera w założeniu jakiego warunku równości między pierwiastkami. Przypuśćmy zatem że chcemy mieć jakikolwiek niezmiennik niszczący się gdy trzy pierwiastki stają się równymi: jest rzeczą widoczną że każdy wyraz musi zawierać jedną z trzech różnic  $\alpha - \beta$ ,



$\delta - \gamma$ ,  $\gamma - \alpha$ , i, tak samo, dla wszelkiej innej grupy jaką można utworzyć z trzech pierwiastków. W jakimkolwiek równaniu czwartego stopnia, znajduje się cztery grupy tego rodzaju: różnica  $\alpha - \delta$  należy do dwóch grup, różnica  $\gamma - \delta$  do dwóch innych; przeto,  $\Sigma(\alpha - \delta)^2(\gamma - \delta)^2$  (\*) będzie jakimkolwiek niezmiennikiem przywodzącym się do zera gdy trzy pierwiastki będą równymi. Podobnie, dla jakiegokolwiek równania piątego stopnia, jest dziesięć grup z trzech pierwiastków;  $\alpha - \delta$  należy do trzech grup,  $\gamma - \delta$  do trzech innych; czterema ostatnimi grupami są  $\alpha\gamma\epsilon$ ,  $\alpha\delta\epsilon$ ,  $\delta\gamma\epsilon$ ,  $\delta\delta\epsilon$ , pomiędzy którymi dwie zawierają  $\gamma - \epsilon$  a dwie inne  $\delta - \epsilon$ . Funkcja  $\Sigma(\alpha - \delta)^4(\gamma - \delta)^2(\delta - \epsilon)^2(\gamma - \epsilon)^2$  będzie więc jakimkolwiek niezmiennikiem przywodzącym się do zera kiedy trzy pierwiastki będą równymi. Ten niezmiennik (34, 35) jest czwartego rzędu, a jego *ważnością* jest 10.

Jeżeli chcemy utworzyć jakikolwiek spółzmiennik jakiegokolwiek kształtu dwukwadratowego który sprowadza się do zera gdy istnieją dwie pary pierwiastków równych, jego wyrażenie zawierać będzie jakąkolwiek różnicę każdej z grup

$\alpha - \delta$ ,  $\gamma - \delta$ ;  $\alpha - \gamma$ ,  $\delta - \delta$ ;  $\alpha - \delta$ ,  $\delta - \gamma$ : będzie więc ono

$$\Sigma(\alpha - \delta)^2(\delta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2(x - \delta)^4,$$

albo

$$\Sigma(\alpha - \delta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(x - \delta)^2(x - \gamma)^2(x - \delta)^2;$$

e spółzmienniki są czwartego i szóstego stopnia względem zmiennych, czwartego i trzeciego względem współczynników,

---

(\*) Wyrażenie  $\Sigma(\alpha - \delta)(\gamma - \delta)$  przywiódłoby się tosamociowo do zera.



a każdy z ich wyrazów sprowadza się do zera kiedy zrównanie przyjmuje dwie pary pierwiastków równych.

119. RÓŻNICZKOWANIE WZAJEMNE SPÓŁZMIENNIKÓW I PRZECIWMZIENNIKÓW. — Kiedy się mówi że funkcyja  $\varphi(a, b, \dots, \xi, \eta, \dots)$  jest jakimkolwiek niezmiennikiem, oczywiście że  $\xi, \eta, \dots$  są ilościami jakimikolwiek jakie się przypuszcza tylko przekształcone przez podstawienie odwrotne. Lecz pokazaliśmy (110) że symbole  $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \dots$  istnieją w tym przypadku. Możemy więc podstawić, w jakimkolwiek przeciwzmienniku, te symbole na miejsce  $\xi, \eta, \dots$ , a otrzymamy jakikolwiek symbol działania nie zmieniający się przez podstawienie, i który, zastosowany do kształtu pierwotnego lub do jednego z jego spółzmienników, da jakikolwiek spółzmiennik, jeżeli zmienne przechowają się jeszcze po różniczkowaniu, lub jakikolwiek niezmiennik jeżeli one znikną. Stosując ten symbol działania do jakiegokolwiek spółzmiennika mieszanego, da on jakikolwiek przeciwzmiennik lub jakikolwiek spółzmiennik mieszany, według tego jak zmienne znikną lub nie znikną przez różniczkowanie. Zamiast zastąpienia  $\xi, \eta, \dots$ , w jakimkolwiek przeciwzmienniku, przez  $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \dots$  na utworzenie jakiegokolwiek bądź symbolu działania, możemy jeszcze zastąpić je przez  $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \dots$  (U jest kształtem pierwotnym albo jednym z jego spółzmienników), i otrzymać tym sposobem jakikolwiek nowy spółzmiennik. Związek między dwoma szeregami zmiennych  $x, y, z, \dots$  i  $\xi, \eta, \zeta, \dots$  jest odwrotnym, więc możemy również zastąpić, w jakimkolwiek spółzmienniku,  $x, y, z, \dots$ , przez  $\frac{d}{d\xi}, \frac{d}{d\eta}, \frac{d}{d\zeta}, \dots$  i otrzymamy jakikolwiek symbol działania który, zastosowany do jakiegokolwiek przeciwzmiennika, da jakikolwiek nowy przeciwzmiennik lub jakikolwiek niezmiennik.

Tak więc, mając dane jakikolwiek spółzmiennik i jakikolwiek przeciwwzmiennik, można, podstawiając w jednym z nich symbole różniczkowe i wykonywając potem działanie na drugim, otrzymać jakikolwiek nowy przeciwwzmiennik lub spółzmiennik, jaki można również połączyć z pierwszymi, dla wydobycia z nich innych, i tak dalej.

120. W przypadku kształtów podwójnych, ta metoda się upraszcza. Wzorami przekształcenia prostego są

$$x = \lambda_1 X + \mu_1 Y, \quad y = \lambda_2 X + \mu_2 Y,$$

wzorami przekształcenia odwrotnego są (109)

$$X_1 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta, \quad Y_1 = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta,$$

z kądem

$$\Delta \xi = \mu_2 X_1 - \lambda_2 Y_1, \quad \Delta \eta = -\mu_1 X_1 + \lambda_1 Y_1,$$

wrażenia mogące się napisać

$$\Delta \eta = \lambda_1 Y_1 + \mu_1 (-X_1), \quad \Delta(-\xi) = \lambda_2 Y_1 + \mu_2 (-X_1).$$

Widzimy że niezważając na czynnik  $\Delta$ , zmienne  $\eta$  i  $\xi$  przekształcają się zupełnie według tegoż samego prawidła jak  $x$  i  $y$ , imożna powiedzieć że  $y$  i  $x$ , z jednej strony,  $x$  i  $y$ , z drugiej, przekształcają się przez podstawienia odwrotne. Tak więc, w kształtach podwójnych, spółzmienniki i przeciwwzmienniki rzeczywiście nie dają się odróżnić, i dosyć jest zastąpić, w jakimkolwiek spółzmienniku,  $x$  i  $y$  przez  $\eta$  i  $-\xi$  dla utworzenia jakiegokolwiek przeciwwzmiennika, i *vice versa*. W rzeczy samej, przypuśćmy że, przez przekształcenie, jakakolwiek funkcya jednorodna  $\varphi(x, y)$  staje się  $\Phi(X, Y)$ , wzory powyższe pokazują że  $\eta$ ,  $-\xi$  stanie się  $\frac{1}{\Delta^p} \Phi(Y_1, -X_1)$ ,  $p$  jest stopniem funkcyi na  $x$  i  $y$ .

Więc, jeżeli  $\varphi(x, y)$  jest jakimkolwiek spółzmiennikiem, to jest jakąkolwiek funkcją która, po przekształceniu, różni się tylko jakąkolwiek potęgą czynnika  $\Delta$  od jakiejkolwiek podobnej funkcji co do  $X$  i  $Y$ ; oczywiście  $\varphi(\eta, -\xi)$  będzie się różnić podobnie, po przekształceniu, tylko jakąkolwiek potęgą czynnika  $\Delta$  od jakiejkolwiek funkcji podobnej co do  $X_1$  i  $Y_1$ . To będzie więc właśnie jakimkolwiek przeciwzmiennikiem.

Zamiast mówić że symbole różniczkowe przekształcają się przez podstawienie odwrotne względem  $x, y$ , możemy więc powiedzieć że te symbole przekształcają się przez toż same podstawienie jak  $y$  i  $-x$ ; a jeżeli, w kształcie pierwotnym lub w jednym z jego spółzmienników, zastąpimy  $x$  i  $y$  przez  $\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx}$ , otrzymamy jakikolwiek symbol który będzie mógł być użytym dla dania początku nowym spółzmiennikom, jak to wyłożyliśmy powyżej. Możemy także podstawić  $\frac{du}{dy}, -\frac{du}{dx}$  na miejsce  $x$  i  $y$ , i otrzymać tym sposobem jakikolwiek nowy spółzmiennik. Przykłady następujące dadzą dostatecznie zrozumieć ducha tój metody.

**PRZYKŁAD I.** — Znaleźć jakikolwiek niezmiennik jakiegokolwiek kształtu kwadratowego lub jakiegokolwiek układu dwóch kształtów kwadratowych.

Przypuśćmy że, przez przekształcenie,  $ax^2 + 2bxy + cy^2$ , stanie się

$$AX^2 + 2BXY + CY^2;$$

ponieważ  $\Delta \frac{d}{dy}, -\Delta \frac{d}{dx}$  przekształcają się według tegoż samego prawa jak  $x$  i  $y$ , symbol

$$\Delta^2 \left( a \frac{d^2}{dy^2} - 2b \frac{d^2}{dxdy} + c \frac{d^2}{dx^2} \right)$$



stanie się, przez przekształcenie,

$$\left( A \frac{d^2}{dY^2} - 2B \frac{d^2}{dXdY} + C \frac{d^2}{dX^2} \right).$$

Stosując go do kształtu samego, mamy

$$4\Delta^2(ac - b^2) = 4(AC - B^2),$$

co daje widzieć że  $ac - b^2$  jest jakimkolwiek niezmiennikiem; stosując go do

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$$

i do jego przekształconego, mamy

$$2\Delta^2(ac' + a'c - 2bb') = 2(AC' + A'C - 2BB'),$$

i widzimy że  $ac' + a'c - 2bb'$  jest jakimkolwiek niezmiennikiem. Można widzieć także że funkcja

$$a(bx + cy)^2 + 2b(bx + cy)(ax + by) + c(ax + by)^2$$

jest jakimkolwiek spółzmiennikiem, lecz to jest po prostu kształt sam pomnożony przez  $ac - b^2$ .

**RZYKLAD II.** — *Wszelki kształt podwójny stopnia parzystego ma iakikolwiek niezmiennik drugiego rzędu względem spółczynników.*

Mamy tylko podstawić  $\frac{d}{dy}$ ,  $-\frac{d}{dx}$  na miejsce  $x$  i  $y$  i wykonać potem działanie na kształcie. I tak, dla kształtu dwukwadratowego  $(a, b, c, d, e \mathcal{X}, y)$  <sup>4</sup> znajdujemy że  $ae - 4bd + 3c^2$  jest jakimkolwiek niezmiennikiem; podobnie dla kształtu ogólnego

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \mathcal{X} x, y)^n, \text{ funkcja}$$

$$a_0 a_n - n a_1 a_{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) a_2 a_{n-2} - \dots$$



jest jakimkolwiek niezmiennikiem; współczynniki liczebne są współczynnikami dwumianu, lecz wyraz środkowy jest podzielonym przez 2.

Jeżeli zastosujemy tę metodę do jakiegokolwiek kształtu stopnia nieparzystego, na przykład do kształtu sześciennego

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

i jeżeli wykonamy działanie

$$d \frac{d^3}{dx^3} - 3c \frac{d^3}{dx^2dy} + 3b \frac{d^3}{dxdy^2} - a \frac{d^3}{dy^3},$$

wypadek jest identycznie zerem. Znajdujemy przecież że jakimkolwiek układ dwóch kształtów sześciennych ma jakimkolwiek niezmiennik  $(ad' - a'd) - 3(bc' - b'c)$ , i, ogólnie, że jakimkolwiek układ dwóch kształtów stopnia nieparzystego ma za niezmiennik wyrażenie

$$(a_0b_n - a_nb_0) - n(a_1b_{n-1} - a_{n-1}b_1) + \frac{1}{2}n(n-1)(a_2b_{n-2} - a_{n-2}b_2) - \dots,$$

które sprowadza się do zera gdy dwa kształty są identyczne.

121. Kiedy się otrzymało, za pomocą metody powyższej, jakimkolwiek bądź niezmiennik dla kształtu stopnia jakiegokolwiek, wyciąga się ztąd bezpośrednio, przez metodę nr<sup>tu</sup> 106, jakimkolwiek spółzmiennik dla kształtu jakiegokolwiek stopnia więcj podniesionego. I tak, wiedząc że  $ac - b^2$  jest niezmiennikiem jakiegokolwiek kształtu kwadratowego, utworzmy niezmiennik emananta kwadratowego funkcji jakiejkolwiek; wyrażenie  $\frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2$  będzie jakimkolwiek spółczynnikiem dla wszelkiej funkcji stopnia wyższego nad drugi. Podobnież

$$ae - 4bd + 3c^2$$

jest niezmiennikiem jakiegokolwiek kształtu czwartego stopnia; wyciągniemy ztąd że wyrażenie

$$\frac{d^4u}{dx^4} \frac{d^4u}{dy^4} - 4 \frac{d^4u}{dx^3dy} \frac{d^4u}{dx dy^3} + 3 \left( \frac{d^2u}{dx^2 dy^2} \right)^2$$

będzie jakimkolwiek spółzmiennikiem dla wszelkiego kształtu stopnia wyższego nad czwarty. Widzimy tym sposobem że wszelki kształt ma, ogólnie, jakkolwiek szereg spółzmienników, drugiego rzędu względem spółczynników, a stopni  $2(n-2)$ ,  $2(n-4)$ ,  $2(n-6)$ ,... względem zmiennych. Te spółzmienniki mogą się połączyć potem, bądź to z kształtem pierwotnym, bądź to między sobą, dla przywiedzenia do nowych spółzmienników albo niezmienników.

**PRZYKŁAD I.** — *Jakikolwiek kształt czwartego stopnia ma jakikolwiek niezmiennik trzeciego rzędu względem spółczynników.*

Wiemy, w rzeczy saméj, że wyznacznik Hessowy

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)(cx^2 + 2dxy + ey^2) - (bx^2 + 2cxy + dy^2)^2,$$

iub

$$(ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3y + (ae + 2bd - 3c^2)x^2y^2 + 2(be - cd)xy^3 + (ce - d^2)y^4$$

jest jakimkolwiek spółzmiennikiem. Wykonywając na nim działanie

$$(a, b, c, d, e) \left( \frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx} \right)^4,$$

i dzieląc przez 72, otrzymujemy ilość

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

która, tém samém, jest jakimkolwiek niezmiennikiem.

PRZYKŁAD II. — *Wszelki kształt stopnia nieparzystego ma jakikolwiek niezmiennik czwartego rzędu względem spółczynników.*

W rzeczy samej, ma on jakikolwiek spółziennik kwadratowy  $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \cdot \frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}} - \dots$  drugiego rzędu względem spółczynników. Dyskryminantem tego kształtu kwadratowego będzie jakikolwiek niezmiennik kształtu pierwotnego (104) i będzie czwartego rzędu względem spółczynników. Wreszcie, to dowodzenie wykazuje że *wszelki* kształt ma jakikolwiek niezmiennik czwartego rzędu; gdyż, jeżeli weźmiemy jeden ze spółzienników stopnia parzystego otrzymanych powyżej, jego niezmiennik drugiego rzędu będzie czwartego stopnia względem spółczynników kształtu pierwotnego. Lecz, jeżeli kształt jest stopnia parzystego, może się zdarzyć że niezmiennik tym sposobem otrzymany jest po prostu kwadratem z jakiegokolwiek niezmiennika drugiego rzędu.

RZYKŁAD III. — *Znaleźć niezmiennik czwartego rzędu jakiegokolwiek kształtu sześciennego.*

Wyznacznikiem Hessowym jest

$$(ax + by)(cx + dy) - (bx + cy)^2,$$

albo

$$(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2.$$

Wyrażenie

$$(ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2)$$

jest jakimkolwiek niezmiennikiem kształtu sześciennego; w rzeczy samej, ten niezmiennik jest, właściwie mówiąc, jakiegokolwiek kształtu sześciennego dyskryminantem

$$a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd,$$

122. Wszelki niezmiennik jakiegokolwiek kształtu podwójnego może dać początek jakimukolwiek spółziennikowi.

Możemy, w rzeczy samej (114), złąd wyciągnąć przewoźnik  $\xi^n \frac{dI}{da_0} + \dots$ , który jest jakimkolwiek przeciwzmiennikiem, i, zastępując w nim  $\xi$  i  $\eta$  przez  $y$  i  $-x$ , mamy jakikolwiek spółzmiennik. I tak, dyskryminanta powyższego jakiegokolwiek kształtu sześciennego, wyciągniemy przewoźnik

$$\begin{aligned} & \xi^3(ad^2 - 3bcd + 2c^3) - 3\xi^2\eta(acd + bc^2 - 2b^2d) \\ & - 3\xi\eta^2(abd + b^2c - 2ac^2) + \eta^3(a^2d - 3abc + 2b^3), \end{aligned}$$

a t $\acute{e}$ m sam $\acute{e}$ m, kształt sześcienny przyjmuje spółzmiennik

$$\begin{aligned} & (a^2d - 3abc + 2b^3, \quad abd + b^2c - 2ac^2 \\ & 2b^2d - acd - bc^2, \quad 3bcd - ad^2 - 2c^3)(x, y)^3. \end{aligned}$$

123. ZRÓWNANIE RÓŻNICZKOWE. — Niech będzie,  $n$  stopień jakiegokolwiek kształtu podwójnego,  $\theta$  stopień jednego z jego niezmienników względem spółczynników; *ważność* (33) każdego wyrazu niezmiennika jest stałą i równą  $\frac{1}{2} n\theta$ . Jeżeli zmienimy  $x$  na  $\lambda x$  nie zmieniając  $y$ , co jest jakimkolwiek przekształceniem liniowym, niezmiennik powinien, przez definicyą, pozostać tymże samym lub przynajmniej być po prostu pomnożonym przez jakąkolwiek potęgę ilości  $\lambda$  która, w tym przypadku, jest modułem przekształcenia. Dowiedzie się, jak w n<sup>o</sup> 34, że summa wskaźników każdego wyrazu jest stałą.

Niezmiennik musi także pozostać tymże samym jeżeli się zmieni  $x$  na  $y$  a  $y$  na  $x$ , przekształcenie liniowe którego modułem jest  $-1$ . To podstawienie prowadzi do zamiany każdego spółczynnika  $a_\alpha$  na  $a_{n-\alpha}$ . Mamy więc, na summę wskaźników,

$$\alpha + \epsilon + \gamma + \dots = (n - \alpha) + (n - \epsilon) + (n - \gamma) + \dots,$$



zkałd

$$2(\alpha + \epsilon + \gamma + \dots) = n\theta.$$

WNIOSEK.  $n$  i  $\theta$  nie mogą być oba nieparzystymi, ponieważ ich wieloczyn jest parzystym, to jest że jakikolwiek kształt podwójny stopnia nieparzystego nie może mieć niezmiennika nieparzystego stopnia.

124. Zasady powyższe pozwolą nam napisać bezpośrednio część literalną jakiegokolwiek niezmiennika którego rząd jest znanym; gdyż, rząd mając dany, ważność jest zarówno znaną. Jeżeliby się żądało, na przykład obliczyć dla jakiegokolwiek kształtu czwartego stopnia jakikolwiek niezmiennik trzeciego rzędu, jego ważność byłaby 6, a jego wyrazy

$$Aa_1a_3a_0 + Ba_1a_1a_1 + Ca_3a_3a_0 + Da_3a_2a_1 + Ea_2a_2a_2,$$

gdzie współczynniki  $A, B, \dots$  pozostają do oznaczenia. Czytelnik zauważy że jest tyle wyrazów w niezmienniku ile się znajduje sposobów różnych złożenia liczby 6 z trzech liczb zawartych między 0 i 4; i, ogólnie, że jakikolwiek niezmiennik zamyka tyle wyrazów ile jest sposobów złożenia liczby  $\frac{1}{2}n\theta$ , przedstawiającej ważność, z  $\theta$  liczb zawartych między 0 i  $n$ .

Oznaczmy współczynniki według tej uwagi, że jakikolwiek niezmiennik nie mogąc się zmienić jeżeli się zastąpi  $x$  przez  $x + \lambda$  albo  $y$  przez  $y + \lambda$ ; powinien jak w n<sup>o</sup> 39, zadosyć uczynić dwóm zrównaniom różniczkowym :

$$a_0 \frac{dI}{da_1} + 2a_1 \frac{dI}{da_2} + 3a_2 \frac{dI}{da_3} + \dots = 0,$$

$$na_1 \frac{dI}{da_1} + (n-1)a_2 \frac{dI}{da_2} + \dots = 0,$$

(zrównanie pierwotne jest za uważane napisane ze współczynnikami dwumianu). W praktyce, którekolwiek z tych równań wystarczy, gdyż drugie wyciąga się zmieniając każdy współczynnik  $a_x$  na  $a_{n-x}$ . Dostyć więc zrobić użytek z jednego z nich, byleby tylko miało się staranie uczynić z góry funkcją symetryczną względem  $x$  i  $y$ ; to jest byleby tylko ta funkcja nie zmieniła się lub najwięcej zmieniła znak (\*) kiedy się w niej zastąpi  $a_x$  przez  $a_{n-x}$ , i ten warunek będzie zawsze dopełnionym jeżeli się na to pilnie zwróci baczenie żeby ważność niezmiennika była ważnością jaką dopiero wskazaliśmy. I tak, w przykładzie poprzedzającym, jeżeli wykonamy na wyrażeniu  $\Lambda a_1 a_2 a_0 + \dots$  działanie  $a_0 \frac{d}{da_1} + \dots$ , przyjdzie

$$(2B + 2A)a_4 a_1 a_0 + (D + 6C + 4A)a_3 a_2 a_0$$

$$+ (2D + 4B)a_3 a_1 a_1 + (6E + 3D)a_2 a_2 a_1 = 0;$$

owoż, biorąc  $A = 1$ , ma się dla innych współczynników  $B = -1$ ,  $D = 2$ ,  $C = -1$ ,  $E = -1$ , i dla zmiennika samego

$$a_4 a_2 a_0 + 2a_3 a_2 a_1 - a_1 a_1 a_1 - a_3 a_3 a_0 - a_2 a_2 a_2.$$

125. Chcąc tą metodą oznaczyć jakikolwiek bądź niezmiennik

(\*) Zmiana  $x$  na  $y$  a  $y$  na  $x$  prowadzi do jakiegokolwiek przekształcenia liniowego mającego za moduł

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Wszelki niezmiennik który, w przekształceniu, znajduje się pomnożony przez jakąkolwiek potęgę nieparzystą modułu, zmienia więc znak gdy się robi zamianę  $x$  i  $y$ ; niezmienniki tego rodzaju są nazwane *niezmiennikami skośnemi* (*invariants gauches*).

nik rzędu danego, należy obliczyć współczynniki nieznanne  $A, B, C, \dots$ , i przychodzimy do tego za pomocą pewnej liczby warunków wyciągniętych ze zrównania różniczkowego. Jeżeli liczba tych warunków przewyższa liczbę współczynników nieznanych, tworzenie się niezmiennika będzie niepodobnym w ogólności; jeżeli jest jęj równą, znajdzie się tylko jeden niezmiennik; jeżeli jest niższą, otrzyma się ich wiele. Lecz widzieliśmy że liczba wyrazów niezmiennika, przewyższająca o jedność liczbę współczynników, jest równa liczbie rozłożeń możebnych ważności  $\frac{1}{2} n\theta$  na  $\theta$  liczb zawartych między 0 i  $n$ . Skutkiem działania  $a_0 \frac{d}{da_1} + \dots$  następuje oczywiście zmniejszenie ważności o jedność; liczba warunków do spełnienia jest więc równa liczbie rozłożeń  $\frac{1}{2} n\theta - 1$  na  $\theta$  liczb zawartych między 0 i  $n$ . I tak, w przykładzie nr<sup>o</sup> 124, liczba warunków użytych przy znalezieniu  $A, B, \dots$  jest równa liczbie rozłożeń możebnych liczby 5 na jakąkolwiek sumę z trzech liczb zawartych między 0 i 4 włącznie. Przeto, aby rozpoznać w ogólności czy można znaleźć, dla jakiegokolwiek kształtu podwójnego, jakiegokolwiek niezmiennik rzędu  $\theta$ , i czy jest ich więcej jak jeden, należy rozebrać iloma sposobami dwie liczby  $\frac{1}{2} n\theta$ ,  $\frac{1}{2} n\theta - 1$  mogą być rozłożone na  $\theta$  liczb zawartych między 0 i  $n$ : na tej zasadzie P. CAYLEY oparł swe poszukiwania o liczbie niezmienników kształtów podwójnych

126. Też same rozumowania stosują się do spółzmienników. Jakiegokolwiek spółzmiennik, równie jak i samże kształt pierwotny, powinien pozostać niezmiennym jeżeli się zmieni  $x$  na  $\rho x$ , i, jednocześnie, każdy współczynnik  $a_\alpha$  na  $\rho^\alpha a_\alpha$ . Jeżeli współczynnik jakiegokolwiek potęgi  $x^\alpha$  z ilości  $x$ , w spółzmienniku, jest  $a, b, c, \dots$ , to jest rzeczą widoczną że, jak powyżej,



summa  $\mu + \alpha + \epsilon + \dots$  musi być stałą dla wszystkich wyrazów, i możemy nazwać ją *ważnością* spółzmiennika.

Nadto aby się spółzmiennik nie zmienił gdy się robi zamianę  $x$   $y$ , potrzeba mieć

$\mu + \alpha + \epsilon + \gamma + \dots = (p - \mu) + (n - \alpha) + (n - \epsilon) + \dots$ ,  
 $p$  jest stopniem spółzmiennika w  $x$  i  $y$ ; przeto, ponieważ  $\theta$  jest rzędem spółzmiennika względem spółczynników, ma się bezpośrednio za jego ważność  $\frac{1}{2}(n\theta + p)$ . Jeżeli żądamy otrzy-

mać, na przykład, jakikolwiek spółzmiennik kwadratowy jakiegokolwiek kształtu sześciennego któryby był zarazem drugiego rzędu względem spółczynników, ma się  $n = 3$ ,  $\theta = 2$ ,  $p = 2$ , a ważnością jest 4. Ma się więc, dla wyrazów które mnożą  $x^2$ ,  $\alpha + \epsilon = 2$ , a temi wyrazami będą  $a_2a_0$  i  $a_2a_1$ ; podobnież, wyrazami które mnożą  $xy$  będą  $a_3a_0$ ,  $a_1a_1$ , a wyrazami które mnożą  $y^2$ ,  $a_3a_1$ ,  $a_2a_2$ ; oznaczy się tym sposobem część literalną jakiegokolwiek spółzmiennika: spółczynniki znajdują się jak to zobaczymy poniżej.

127. Wynika z definicyi spółzmiennika że powinno się dojść do tegoż samego wypadku, bądź to zmieniając w nim  $x$  na  $x + \lambda y$ , bądź to wykonywając naprzód to podstawienie w kształcie pierwotnym, i obliczając potem spółzmiennik formy przekształconej. Lecz ta zmiana w kształcie pierwotnym przywodzi (39) do zamiany  $a_1$  na  $a_1 + \lambda a_0$ ,  $a_2$  na  $a_2 + 2a_1\lambda + a_0\lambda^2$ ,... Podstawienie  $x + \lambda y$  zamiast  $x$  w spółzmienniku przywiedzie więc także do zastąpienia w nim  $a_1$  przez  $a_1 + \lambda a_0$ ,... Niech będzie spółzmiennik

$$A_0x^p + pA_1x^{p-1}y + \frac{1}{2}p(p-1)A_2x^{p-2}y^2 + \dots;$$

wyrażmy że te dwa sposoby działania są równoważnemi, i ograniczmy się tylko do wyrazów mnożących  $\lambda$ . Oznaczywszy, jak



w nr<sup>ze</sup> 41, przez skrócenie  $\frac{d}{d\zeta}$  działanie

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots$$

przyjdzie

$$\frac{dA_0}{d\zeta} = 0, \quad \frac{dA_1}{d\zeta} = A_0, \quad \frac{dA_2}{d\zeta} = 2A_1, \dots,$$

$$\frac{dA_{p-1}}{d\zeta} = (p-1)A_{p-2}, \quad \frac{dA_p}{d\zeta} = pA_{p-1}.$$

Oznaczywszy podobnie przez  $\frac{d}{d\eta}$  działanie

$$na_1 \frac{d}{da_0} + (n-1)a_2 \frac{d}{da_1} + \dots,$$

otrzymamy także

$$\frac{dA_0}{d\eta} = pA_1, \quad \frac{dA_1}{d\eta} = (p-1)A_2, \dots$$

Widzimy tym sposobem że przypuściwszy  $A_0$  oznaczone w sposób zadosyć czyniący równaniu  $\frac{dA_0}{d\zeta} = 0$  [innemi słowy, przypuściwszy że  $A_0$  powinno być jakąkolwiek funkcją z różnic pierwiastków (39)], wszystkie inne wyrazy spółzmiennika będą znane. Spółzmiennikiem będzie, w rzeczy samej,

$$A_0 x^p + \frac{dA_0}{d\eta} x^{p-1} y + \frac{1}{1.2} \frac{d^2 A_0}{d\eta^2} x^{p-2} y^2 + \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3 A_0}{d\eta^3} x^{p-3} y^3 + \dots$$

Potrzeba zauważyć że gdy ważnością spółzmiennika jest

$\frac{1}{2}(n\theta + p)$ , ważnością wyrazu  $A_0$  będzie  $\frac{1}{2}(n\theta - p)$ , ponieważ dodając do niego  $p$  musi się odzyskać wyraz spółzmiennika. Ten wyraz  $A_0$ , z którego wszystkie inne pochodzą, został nazwanym przez P. ROBERTS'A źródłem spółzmiennika. P. ROBERTS dostrzegł także że źródło wieloczynu dwóch spółzmienników jest niczem innym tylko wieloczynem ich źródeł bezwzględnych. Gdyż, jeżeli pomnożymy spółzmiennik powyższy przez

$$B_0 x^q + \frac{dB_0}{d\eta} x^{q-1} y + \frac{1}{1.2} \frac{d^2 B_0}{d\eta^2} x^{q-2} y^2 + \dots,$$

mamy, jak to jest łatwo sprawdzić,

$$A_0 B_0 x^{p+q} + \frac{d(A_0 B_0)}{d\eta} x^{p+q-1} y + \frac{1}{1.2} \frac{d^2(A_0 B_0)}{d\eta^2} x^{p+q-2} y^2 + \dots$$

Przeto, jeżeli mamy jaki związek między ilukolwiek funkcjami  $A_0, B_0, C_0, \dots$  z różnic pierwiastków, tenże sam związek przechowa się jeszcze między spółzmiennikami zład pochodzącami.

**PRZYKŁAD I.** — Znaleźć spółzmiennik kwadratowy jakiegokolwiek kształtu sześciennego.

Widzieliśmy, numer 126, że  $A_0$  jest kształtu  $a_2 a_0 + B a_1 a_1$ . Wykonajmy działanie

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2};$$

przyjdzie

$$(2 + 2B)a_0 a_1 = 0,$$

zład

$$B = -1 \quad A_0 = a_2 a_0 - a_1 a_1.$$

Wykonajmy teraz na  $A_0$  działanie

$$3a_1 \frac{d}{da_0} + 2a_2 \frac{d}{da_1} + a_3 \frac{d}{da_2},$$

mamy

$$2A_1 = a_3a_0 - a_2a_1.$$

Wykonajmy na nowo też samo działanie na  $A_1$ , ztąd przyjdzie

$$A_2 = a_1a_3 - a_2a_2.$$

Spółzmiennikiem szukany jest więc

$$(a_3a_0 - a_1a_1)x_2 + (a_0a_3 - a_2a_1)xy + (a_1a_3 - a_2a_2)y^2.$$

**PRZYKŁAD II.** — Znaleźć, dla jakiegokolwiek kształtu sześciennego, jakikolwiek spółzmiennik trzeciego rzędu względem zmiennych i spółczynników.

W tym przypadku, mamy  $n = 3$ ,  $\theta = 3$ ,  $\frac{1}{2}(n\theta + \nu) = 6$ . Summą wskaźników w spółczynniku mnożącym  $x^3$  jest 3, i ten spółczynnik będzie kształtu

$$Aa_3a_0a_0 + Ba_2a_1a_0 + Ca_1a_1a_1.$$

Wykonajmy działanie

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3}.$$

przyjdzie

$$(3A + B)a_2a_0a_0 + (2B + 3C)a_1a_1a_0.$$

Biorąc  $A = 1$ , otrzymamy

$$B = -3, \quad C = 2, \quad \Lambda_0 = a_3a_0a_0 - 3a_2a_1a_0 + 2a_1a_1a_1.$$

Wykonywając na  $A_0$  trzy razy jedno po drugim działanie

$$3a_1 \frac{d}{da_0} + 2a_2 \frac{d}{da_1} + a_2 \frac{d}{da_2},$$

otrzymamy inne współczynniki i spółzmiennikiem będzie (122)

$$\begin{aligned} & (a_3 a_0 a_0 - 3a_2 a_1 a_0 + 2a_1 a_1 a_1) x^3 + 3(a_3 a_1 a_0 - 2a_2 a_2 a_0 + a_2 a_1 a_1) x^2 y \\ & + 3(2a_3 a_1 a_1 - a_2 a_2 a_1 - a_3 a_2 a_0) x y^2 \\ & + (3a_3 a_2 a_1 - 2a_2 a_2 a_2 - a_3 a_3 a_1) y^3. \end{aligned}$$

128. Widzieliśmy że jakkolwiek kształt ma tyle spółzmienników stopnia  $p$  względem zmiennych, i rzędu  $\theta$  względem współczynników, ile się w nim znajduje funkcji  $A_0$  których ważnością jest  $\frac{1}{2}(n\theta - p)$ , i które zadosyć czynią równaniu  $\frac{dA_0}{d\xi} = 0$ ; i, tak samo jak w rze 125, spostrzegamy że liczba tych funkcji jest równą różnicy między liczbami rozłożeń

$$\frac{1}{2}(n\theta - p) \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}(n\theta - p) - 1$$

na  $\theta$  liczb zawartych między 0 i  $n$  włącznie. Można zauważyć że  $p$  nie może być nieparzystym tylko gdy  $n$  i  $\theta$  są oba nieparzystymi. Kształty stopnia nieparzystego mają więc same spółzmienniki stopnia nieparzystego względem współczynników, i te spółzmienniki są także stopnia nieparzystego względem zmiennych.

129. Wypadki nr 127 mogą być przedstawione nieco inaczej. Działanie  $y \frac{d}{dx}$ , wykonane na kształcie jakimkolwiek, jest równoważnym pewnemu działaniu wykonanemu przez różniczkowanie na współczynnikach. I tak, dla kształtu

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, x, y)^n,$$



otrzymuje się tenże sam wypadek, wykonywając jedno lub drugie z dwóch działań  $y \frac{d}{dx}$ ,  $a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots$ . Oznaczmy to ostatnie przez znakowanie  $\left(y \frac{d}{dx}\right)$ : własność dowiedziona powyżej dla współzmienników może być przedstawioną przez równość  $y \frac{d}{dx} = \left(y \frac{d}{dx}\right)$ . Innemi słowy dwa działania  $y \frac{d}{dx}$  albo  $a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots$ , wykonane na jakimkolwiek spółzmienniku, prowadzą do tegoż samego wypadku. P. CAYLEY wyszedł z tej własności przyjmując ją za definicyą spółzmienników (\*); ta własność zawiera w sobie także niezmiennik, ponieważ ma się, dla jakiegokolwiek niezmiennika I,  $y \frac{dI}{du} = 0$ , a tém samym także,  $\left(y \frac{dI}{dx}\right) = 0$ .

130. Można dowieść tak samo że kształty o ilukolwiek zmiennych zadość uczynią zrównanióm różniczkowym mogącym się napisać

$$y \frac{d}{dx} = \left(g \frac{d}{dx}\right), \quad z \frac{d}{dx} = \left(z \frac{d}{dx}\right), \dots$$

I tak, dla kształtu  $(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2$  mamy

$$y \frac{d}{dx} = a \frac{d}{dh} + g \frac{d}{df} + 2h \frac{d}{db}, \quad z \frac{d}{dx} = a \frac{d}{dg} + h \frac{d}{df} + 2g \frac{d}{dc},$$

i każdy spółzmiennik musi zadość uczynić tym dwóm zrówna-

(\*) Zob. Pamiętniki P. CAYLEY, *on Quantics*, *Philosophical Transactions*, ogłoszone w roku 1854 i następnym.

nióm : każdy niezmiennik zadość uczyni także równanióm

$$a \frac{dI}{dh} + g \frac{dI}{df} + 2h \frac{dI}{db} = 0, \quad a \frac{dI}{dg} + h \frac{dI}{df} + 2g \frac{dI}{dc} = 0,$$

jak to można łatwo dowieść uważając że niezmiennik musi pozostać tymże samym jeżeli się zastąpi  $x$  przez  $x + \lambda$  lub przez  $x + \mu z$ .

## ROZDZIAŁ XII.

### PRZEDSTAWIENIE SYMBOLICZNE NIEZMIENNIKÓW I SPÓŁZMIENNIKÓW.

---

131. Pozostaje nam jeszcze dać poznać czwartą metodę znajdowania niezmienników i spółzmienników; ta metoda, podana przez p. CAYLEY w roku 1846 (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. I, str. 104, i w *Dzienniku p. Crelle*, t. XXX), nie tylko przyczyni się skutecznie do otrzymania tych funkcyj, lecz jeszcze dostarczy w jakimkolwiek układzie zasad rachunku regularnego za pomocą którego te funkcje mogą być między sobą porównane i zidentyfikowane.

Niech będą  $x_1, y_1; x_2, y_2$  dwa układy zmiennych mogących być przekształconemi przez jedno i toż same podstawienie; było dowiedzionem że pochodne  $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dy_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dy_2}$  są przekształcone przez podstawienie odwrotne (110); że symbol

$$\frac{d}{dx_1} \frac{d}{dy_1} - \frac{d}{dx_2} \frac{d}{dy_1}$$

nie zmienia się przez podstawienie (90); nakoniec, że jeżeli się wykona na funkcji jakiegokolwiek względem  $x_1, y_1; x_2, y_2$  działanie wskazane przez jakąkolwiek potęgę tego symbolu, otrzymuje się jakokolwiek spółzmiennik (119). Oznaczmy wyrażenie  $\frac{d}{dx_1} \frac{d}{dy_1} - \frac{d}{dx_2} \frac{d}{dy_1}$  przez znakowanie skrócone  $\overline{12}$ .

Przypuśćmy teraz że się daje dwa kształty podwójne U, V, możemy bezpośrednio ustalić spółmienniki tego układu kształtów. Mamy tylko napisać zmienne w kształcie U z wskaźnikiem 1, a w kształcie V z wskaźnikiem 2, i wykonać potem działanie wskazane przez potęgę jakąkolwiek symbolu  $\overline{12}$ : wypadek będzie jakimkolwiek niezmiennikiem lub jakimkolwiek spółmiennikiem.

Niech będą na przykład,

$$U = ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2, \quad V = a'x_2^2 + 2b'x_2y_2 + c'y_2^2,$$

zastosujmy do tych kształtów symbol  $\overline{12}^{-2}$  który, rozwinięty, daje

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \frac{d^2}{dy_2^2} + \frac{d^2}{dx_2^2} \frac{d^2}{dy_1^2} - 2 \frac{d^2}{dx_1 dy_1} \frac{d^2}{dx_2 dy_2},$$

wypadek  $ac' + ca' - 2bb'$  będzie jakimkolwiek niezmiennikiem spółnym dwóm kształtóm. Ogólnie, jest rzeczą widoczną że różniczkowe oznaczone wskaźnikiem 1 stosują się tylko do kształtu U, a różniczkowe oznaczające się wskaźnikiem 2 tylko do kształtu V, i jest niepotrzebném zachowanie wskaźników po różniczkowaniu (\*); tak że symbol  $\overline{12}^{-2}$ , zastosowany do dwóch

(\*) Jeżeli W jest jakąkolwiek funkcją zawierającą  $x_1, y_1, x_2, y_2$ , otrzymamy tenże sam wypadek bądź to przekształcając linijnie te zmienne i znosząc potem wszystkie wskaźniki w funkcyi przekształconej, bądź to znosząc naprzód wskaźniki i wykonywając potem przekształcenie co do  $x$  i  $y$ . To wynika bezpośrednio z tego że  $x_1, y_1, x_2, y_2, x, y$  są przekształconemi przez toż same podstawienie. Wynika ztąd że jeżeli W napisane jako funkcya względem  $x_1, y_1, x_2, y_2$  jest jakimkolwiek spół-



kształtów stopnia jakiegokolwiek, daje spółzmiennik

$$\frac{d^2U}{dx^2} \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2U}{dy^2} \frac{d^2V}{dx^2} - 2 \frac{d^2U}{dxdy} \frac{d^2V}{dxdy}.$$

Jeżeliby został po prostu zastosowanym symbol  $\overline{12}$ , otrzymano by się wyznacznik Jakobiego  $\frac{dU}{dx} \frac{dV}{dy} - \frac{dU}{dy} \frac{dV}{dx}$ , który jest jakimkolwiek spółzmiennikiem dwóch kształtów (408).

Stosując symbol  $\overline{12}^{-3}$  do dwóch kształtów sześciennych, otrzymuje się niezmiennik

$$(ad' - a'd) - 3(bc' - b'c),$$

a, stosując go do dwóch kształtów jakichkolwiek, spółzmiennik

$$\frac{d^3U}{dx^3} \frac{d^3V}{dy^3} - 3 \frac{d^3U}{dx^2dy} \frac{d^3V}{dxdy^2} + 3 \frac{d^3U}{dxdy^2} \frac{d^3V}{dx^2dy} - \frac{d^3U}{dy^3} \frac{d^3V}{dx^3},$$

i tak dalej dla innych potęg z  $\overline{12}$ .

132. Możemy także, za pomocą téj metody, otrzymać niezmienniki i spółzmienniki jakiegokolwiek funkcji jedynéj U. Dosyć, w rzeczy saméj, przypuścić U i V identycznymi. Tym sposobem, zrobmy, w przykładzie dwóch kształtów kwadratowych danym w numerze poprzedzającym,  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $c = c'$ , niezmiennik staje się  $2(ac - b^2)$ . Tak samo, wyrażenie dane

zmiennikiem kształtów U i V, to jest jeżeli wyrażenie spółczynników W w funkcji spółczynników kształtu U i V nie zmienia się przez przekształcenie, W jest zarówno jakimkolwiek spółzmiennikiem kiedy się zupełnie usunie z rachunku wskaźniki.

za spółmiennik  $\overline{12}^2$  jakiegokolwiek układu dwóch kształtów  $U, V$  staje się, robiąc  $U = V$ , spółmiennikiem jakiegokolwiek kształtu jedynego

$$\frac{d^2U}{dx^2} \frac{d^2V}{dy^2} - \left( \frac{d^2U}{dxdy} \right)^2.$$

Ogólnie, jeżeli chcemy, za pomocą tej metody, ustanowić spółmienniki jakiegokolwiek funkcji jedynę, uciekamy się do podejścia następnego : ustanowimy naprzód spółmiennik jakiegokolwiek układu kształtów odrębnych, potem przypuścimy że wszystkie te kształty stają się identycznymi. Jeżeli użyjemy, nadal, symboli takich jak  $\overline{12}^n$  nie wskazując do jakich funkcji one się stosują, rozumieć będziemy po prostu że rzecz idzie o jakąkolwiek funkcję jedyną  $U$ . Wykonamy działanie na iluokolwiek kształtach podobnych  $U_1, U_2, \dots$ , w których zmienne będą oznaczone przez  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ , zamiast  $x, y$ , i będziemy przypuszczali że po różniczkowaniu opuści się wszystkie wskaźniki i że wszystkie zmienne, jeśliby te jeszcze pozostały, są zastąpione przez  $x$  i  $y$ .

133. Ponieważ opuszcza się wszystkie wskaźniki po różniczkowaniu, widzimy bezpośrednio że wypadek jest tenże sam, jakimikolwiek by były litery pierwotnie użyte, i że  $\overline{12}^n$  i  $\overline{31}^n$  oznaczają jakąkolwiek jedyną i toż [samą] rzecz. Przy zastosowaniu tej metody, będziemy stale robili użycie z przekształceń opartych na tej zasadzie. I tak, możemy wykazać że, jeżeli  $n$  jest nieparzystym, wypadek działania  $\overline{12}^n$ , zastosowany do jakiegokolwiek kształtu jedynego, sprowadzi się do zera. Gdyż, według tego cośmy powiedzieli,  $\overline{12}^n = \overline{21}^n$ , lecz  $\overline{12}$  i  $\overline{21}$  mają znaki przeciwne, jak to widzimy bezpośrednio pisząc wyraźnie wyrazy jakie przedstawia symbol skrócony  $\overline{12}$ ; wy-

nika ztąd że  $\overline{12}^n$  musi się sprowadzić do zera gdy  $n$  jest nieparzystym. Tym sposobem, rozwinięcie  $\overline{12}^3$  dane na końcu numeru 131 sprowadzi się oczywiście do zera jeżeli się zrobi  $U = V$ . Szereg  $\overline{12}^{-2}, \overline{12}^{-4}, \overline{12}^{-6}, \dots$ , wydaje niezmienniki i spółzmienniki już otrzymane (120, 121). Łatwo dostrzedz że działanie  $\overline{12}^n$ , zastosowane do funkcji  $(a_0, a_1, a_2, \dots, \zeta(x, y))^n$ , daje, gdy  $n$  jest parzystym,

$$a_0 a_n - n a_1 a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a_2 a_{n-2} - \dots,$$

ostatni spółczynnik powinien być podzielonym przez 2, jak to pokazuje sposób tworzenia się.

134. Wypadki poprzednie rozciągną się, bez trudności, do liczby jakiegokolwiek funkcyj. Możemy wziąć ilekolwiek kształtów  $U, V, W, \dots$ , i dając zmiennym w pierwszym wskaźnik 1, w drugim wskaźnik 2, w trzecim 3, i tak dalej, wykonać na nich działanie wskazane przez wieloczyn z liczby jakiegokolwiek symboli  $\overline{21}, \overline{23}, \overline{31}, \overline{14}, \dots, \overline{23}$  jest, jak powyżej, przedstawieniem skróconem wyrażenia

$$\frac{d}{dx_2} \frac{d}{dy_3} - \frac{d}{dx_3} \frac{d}{dy_2} \dots$$

Zniesiemy wskaźniki po różniczkowaniu, i otrzymamy tym sposobem jakikolwiek spółzmiennik układu kształtów danych sprowadzający się do jakiegokolwiek niezmiennika, jeżeli się zdarzy że nie pozostanie więcej żadnej potęgi co do  $x$  i  $y$  po różniczkowaniu; te kształty o liczbie jakiegokolwiek,  $U, V, W, \dots$ , mogą być identycznymi, i, w przypadku jaki uważamy najczęściej, to jest jeżeli rzecz idzie o jakikolwiek jedyny kształt,



funkcye  $U_1, U_2, U_3, \dots$ , na których się wykonywa działanie, będą się tylko między sobą różniły przez wskaźniki zmiennych.

Rzecz jasna że, w tej metodzie, stopień wypadku względem współczynników będzie zawsze równym liczbie figur znajdujących się w symbolu. Gdyż, jeżeliby wszystkie funkcje były odrębnymi, funkcja tym sposobem otrzymana zawierałaby widocznie w pierwszym stopniu współczynniki każdego ze kształtów  $U, V, W, \dots$ , a, kiedy te ostatnie dadzą się przypuścić identycznymi, stopień względem współczynników będzie równym liczbie funkcji  $U_1, U_2, U_3, \dots$ , na których wykonywamy działanie. I tak, wyrażenia takie jak  $\overline{12}^p$ , uważane powyżej, będą wszystkie drugiego stopnia względem współczynników.

Przypuśćmy teraz że rzecz idzie o znalezienie stopnia względem  $x$  i  $y$ , i że kształty są naprzód odrębnymi,  $U$  jest stopnia  $n$ ,  $V$  stopnia  $n'$ ,  $W$  stopnia  $n''$ , i tak dalej; przypuśćmy jeszcze że, w symbolu, figura 1 napotyka się  $\alpha$  razy, figura 2  $\epsilon$  razy, etc.; ponieważ  $U$  jest różniczkowaniem  $\alpha$  razy,  $V$   $\epsilon$  razy, etc., wypadek będzie stopnia

$$(n - \alpha) + (n' - \epsilon) + (n'' - \gamma) + \dots$$

Kiedy kształty są identycznymi, znajduje się  $p$  figur w symbolu na którym wykonywamy działanie, stopień wypadku w  $x$  i  $y$  będzie

$$np - (\alpha + \epsilon + \gamma + \dots),$$

a jeżeli  $r$  oznacza liczbę czynników takich jak  $\overline{12}$  składających symbol, widocznie że

$$\alpha + \epsilon + \gamma + \dots = 2r.$$

Nakoniec, jeżeli chcemy otrzymać jakikolwiek niezmiennik,



powinno się mieć

$$\alpha = \epsilon = \gamma = n.$$

135. Aby rzucić więcej światła na zasady poprzednie, rozpocznijmy poszukiwać jakimi są wszystkie niezmienniki możliwe trzeciego stopnia względem współczynników. Ponieważ ich symbol nie może zawierać w sobie tylko trzy figury, jego kształtem najogólniejszym  $\overline{12}^{\alpha} \cdot \overline{23}^{\epsilon} \cdot \overline{31}^{\gamma}$ , i, aby otrzymać jakikolwiek niezmiennik, potrzeba żeby było

$$\alpha + \gamma = \alpha + \epsilon = \epsilon + \gamma = n, \quad \text{z kąd} \quad \alpha = \epsilon = \gamma.$$

Kształt ogólny jaki mamy rozebrać jest więc  $(\overline{12} \cdot \overline{23} \cdot \overline{31})^{\alpha}$ . Jeżeli  $\alpha$  jest nieparzystym, wypadek sprowadzi się tożsamiście do zera; gdyż robiąc zamianę, jak w numerze 133, figur 1 i 2, mamy

$$(\overline{12} \cdot \overline{23} \cdot \overline{31})^{\alpha} = (\overline{21} \cdot \overline{13} \cdot \overline{32})^{\alpha};$$

lecz te dwa wyrażenia mają znaki przeciwne. Wynika stąd że wszystkie niezmienniki trzeciego rzędu są zawarte we wzorze

$$(\overline{12} \cdot \overline{23} \cdot \overline{31})^{\alpha} \quad \text{gdzie } \alpha \text{ jest parzystym. Tak więc } \overline{12}^2 \cdot \overline{23}^2 \cdot \overline{31}^2$$

jest niezmiennikiem jakiegokolwiek kształtu czwartego stopnia, ponieważ różniczkowania podnoszą się do czwartego rzędu,

$$\overline{12}^4 \cdot \overline{23}^4 \cdot \overline{31}^4 \quad \text{jest niezmiennikiem jakiegokolwiek kształtu ósmego}$$

$$\overline{12}^6 \cdot \overline{23}^6 \cdot \overline{31}^6 \quad \text{jakiegokolwiek kształtu dwunastego, i tak dalej,}$$

kształty stopnia  $4m$  mają same niezmienniki trzeciego rzędu względem współczynników. Jeżeli żądamy teraz obliczyć jeden

$$\overline{12}^2 \cdot \overline{23}^2 \cdot \overline{31}^2, \quad \text{napiszemy, dla większej pro-$$

stoty,  $\xi_1, \eta_1, \dots$ , zamiast  $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dy_1}, \dots$ , i będziemy mieli do wykonania wieloczynu

$$(\xi_1 \eta_1 - \xi_2 \eta_2)^2 (\xi_2 \eta_2 - \xi_3 \eta_3)^2 (\xi_3 \eta_3 - \xi_4 \eta_4)^2.$$

W wypadku, nie będziemy liczyli wskaźników i zastąpimy  $\xi^4$  przez  $\frac{d^4 U}{dx^4}, \dots$ ; albo, jeżeli będziemy wykonywali działanie na jakimkolwiek kształcie czwartego stopnia, przez  $a_0$  spółczynnik potęgi  $x^4$ . Rozwinięcie może być skróconem przez różne podejścia, jakie cokolwiek praktyki natchnie bez trudności, lecz nie myślimy aby było potrzebnem przytaczać je tutaj, i przestaniemy na podaniu rozwinięcia z trzech niezmienników o których rzecz idzie.  $12 \cdot 23 \cdot 31$  jest niezmiennikiem jakiegokolwiek kształtu czwartego stopnia (124, Przykład I, i 124):

$$a_4 a_2 a_0 + 2 a_3 a_2 a_1 - a_1 a_1^2 - a_0 a_3^2 - a_2^3;$$

$12 \cdot 23 \cdot 31$  daje

$$\begin{aligned} & a_8(a_1 a_0 - 4 a_2 a_1 + 3 a_2^2) + a_7(-4 a_5 a_0 + 12 a_4 a_1 - 8 a_3 a_2) \\ & + a_6(3 a_6 a_0 - 8 a_5 a_1 - 22 a_4 a_2 + 24 a_3^2) \\ & + a_5(24 a_5 a_2 - 36 a_4 a_3) + 15 a_4^3; \end{aligned}$$

a  $12 \cdot 23 \cdot 31$

$$\begin{aligned} & a_{12}(a_6 a_0 - 6 a_5 a_1 + 15 a_4 a_2 - 10 a_3^2) \\ & + a_{11}(-6 a_7 a_0 + 30 a_6 a_1 + 54 a_5 a_2 + 30 a_4 a_3) \\ & + a_{10}(15 a_6 a_0 + 54 a_7 a_1 + 24 a_6 a_2 + 150 a_5 a_3 - 135 a_4^2) \end{aligned}$$

$$+ a_9(-10a_9a_0 + 30a_8a_1 + 150a_7a_2 - 430a_6a_3 + 270a_5a_4)$$

$$+ a_8(-135a_8a_2 + 270a_7a_3 + 495a_6a_4 - 540a_5^2)$$

$$+ a_7(-540a_7a_4 + 720a_6a_5) - 280a_6^2.$$

136. Lubo nie ma innego typu niezmiennika trzeciego rzędu jak ten jakiśmy świeżo wskazali, istnieje przecież liczba nieograniczona spółzmienników; najprostszym jest  $\overline{12.13}$ , którego rozwinięcie ma za swe wyrażenie

$$\begin{aligned} & \frac{d^3U}{dx^3} \frac{d^2U}{dy^2} \frac{dU}{dy} - \frac{d^3U}{dx^2dy} \left( 2 \frac{d^2U}{dx dy} \frac{dU}{dy} + \frac{d^2U}{dy^2} \frac{dU}{dx} \right) \\ & + \frac{d^3U}{dx dy^2} \left( \frac{d^2U}{dx^2} \frac{dU}{dy} + 2 \frac{d^2U}{dx dy} \frac{dU}{dx} \right) - \frac{d^3U}{dy^3} \frac{d^2U}{dx^2} \frac{dU}{dx}. \end{aligned}$$

Kiedy zastosuje się go do jakiegokolwiek kształtu trzeciego stopnia, daje on przewoźnik już otrzymany (122).

Typem ogólnym niezmienników czwartego rzędu, względem spółczynników jest  $(\overline{12.34})^2 (\overline{13.24})^2 (\overline{14.23})^2$ . Tym sposobem dyskrymant jakiegokolwiek kształtu sześciennego jest przedstawiony przez znakowanie  $(\overline{12.34})^2 (\overline{13.24})$ ; lecz nie możemy wejść tu w większe szczegóły o tym przedmiocie.

137. Zasady jakieśmy świeżo położyli posłużą za dowód łatwy twierdzenia znakomitego, należnego p. HERMITE'OWI, i jakie oznaczymy pod nazwiskiem *prawa wzajemności*: *Liczba niezmienników n-tego rzędu względem spółczynników jaką posiada jakikolwiek kształt podwójny stopnia p jest równa liczbie niezmienników rzędu p jaką posiada jakikolwiek kształt stopnia n.* Już widzieliśmy że jeżeli jakikolwiek symbol  $\overline{12.23.34} \dots$ ,



przedstawia, jakikolwiek niezmiennik rzędu  $p$  względem współczynników jakiegokolwiek kształtu stopnia  $n$ , liczbą figur 1, 2, 3, ..., jest  $p$ , i każda z nich znajduje się w nim (to jest w niezmienniku) powtórzoną  $n$  razy. Lecz możemy obliczyć przez metodę numeru 116 jakikolwiek niezmiennik  $\Sigma(\alpha - \epsilon)^a (\epsilon - \gamma)^b (\gamma - \delta)^c \dots$ , zastąpić każdy symbol taki jak  $\overline{34}$ , przez różnicę z dwóch pierwiastków  $(\gamma - \delta)$ . Ten ostatni jest niezmiennikiem jakiegokolwiek kształtu stopnia  $p$ , ponieważ znajduje się w nim  $p$  pierwiastków, i jest on rzędu  $n$  względem współczynników tego kształtu (35).

I tak, na przykład, jakikolwiek kształt kwadratowy ma tylko jeden niezmiennik niezależny  $(\alpha - \epsilon)^2$ , lecz wszystkie jego potęgi są widocznie niezmiennikami których typem ogólnym jest  $(\alpha - \epsilon)^m$ . Przeto, kształty stopnia parzystego mają same niezmienniki drugiego rzędu względem współczynników, a ich symbolem jest  $12^{\overline{-2m}}$ . Podobnie, kształty sześciennie nie mają innego niezmiennika jak dyskryminant  $(\alpha - \epsilon)^2 (\epsilon - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2$  i jego potęgi; ten dyskryminant jest czwartego rzędu względem współczynników. Przeto, kształty stopnia  $4m$  mają same niezmienniki sześciennie których typem ogólnym jest  $12^{\overline{-2m}} \cdot 23^{\overline{-2m}} \cdot 31^{\overline{-2m}}$ . Dowiedziemy że kształty czwartego stopnia mają dwa niezmienniki niezależne, jeden drugiego, drugi trzeciego rzędu względem współczynników, a tym samym wszelka potęga jednego pomnożona przez jakąkolwiek potęgę drugiego jest jakimkolwiek bądź niezmiennikiem. Wywodzi się ztąd że kształty czwartego stopnia mają tyle niezmienników rzędu  $p$  ile równanie  $2x + 3y = p$  przybierze rozwiązań całkowitych. Jest to przeto zarówno liczbą niezmienników czwartego rzędu jakie może mieć jakikolwiek kształt stopnia  $p$ .

138. P. HERMITE dowiódł że jego twierdzenie stosuje się zarówno do współmienników jakiegokolwiek stopnia danego w  $x$  i  $y$ ; to jest że jakikolwiek kształt stopnia  $n$  posiada tyle



spółziemienników rzędu  $p$  względem spółczynników ile jakikolwiek kształt stopnia  $p$  posiada spółziemienników rzędu  $n$ . W rzeczy samej, zauważmy jakikolwiek symbol  $12^{-\lambda} \cdot 23^{-\mu} \cdot 34^{-\nu} \dots$ , zawierający  $p$  figur, figura 1 wchodzi weni  $a$  razy, figura 2  $b$  razy, i tak dalej. Dowiedliśmy że stopniem tego spółziemiennika w  $x$  i  $y$  jest  $(n - a) + (n - b) + \dots$ ; lecz możemy utworzyć funkcją symetryczną

$$\Sigma(\alpha \cdot \xi)^{\lambda} (\xi - \gamma)^{\mu} (\gamma - \delta)^{\nu} \dots (x - \alpha)^{n-a} (x - \xi)^{n-b} \dots$$

ta funkcja będzie (117) jakimkolwiek spółziemiennikiem kształtu stopnia  $p$ , mającym za pierwiastki  $\alpha, \xi, \dots$ ; każdy pierwiastek wchodząc do tego wyrażenia w stopniu  $n$ , ten spółziemiennik będzie  $n^{\text{teso}}$  rzędu względem spółczynników, i zawierać będzie widocznie  $x$  i  $y$  w tymże samym stopniu jak poprzednio, to jest  $(n - a) + (n - b) + \dots$  I tak, na przykład, jedyne spółziemienniki jakie posiada jakikolwiek kształt kwadratowy otrzymują się mnożąc jakąkolwiek potęgę kształtu przez jakąkolwiek potęgę swego dyskryminanta, a ich typem ogólnym jest

$$(\alpha - \xi)^{2p} (x - \alpha)^q (x - \xi)^q.$$

Ich stopień względem spółczynników jest  $2p + q$ , a względem  $x$  i  $y$ ,  $2q$ . Wnieśmy ztąd że wszelki kształt stopnia  $2p + q$  ma jakikolwiek spółziemiennik drugiego rzędu względem spółczynników, a stopnia  $2q$  względem  $x$  i  $y$ , symbolem tych spółczynników jest  $12^{-2p}$ . Gdy  $q = 1$ , wracamy do twierdzenia numeru 121: *wszelki kształt stopnia nieparzystego ma jakikolwiek spółziemiennik kwadratowy.*

139. Znakowanie symboliczne poprzednie dostarczy jakikolwiek układ rachunku zupełnego za pomocą którego można przekształcić niezmienniki i spółziemienniki, i rozpoznać tosamose

pewnych przekształceń. Damy poniżej kilka przykładów tych przekształceń; pokażemy naprzód w jaki sposób można, z wyrażenia symbolicznego jakiegokolwiek funkcji, wyprowadzić wyrażenie jakiegokolwiek innej funkcji wypływającej z pierwszej przez nowe działania. Widocznie że jeżeli mamy jakąkolwiek funkcją względem  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , przyjdziemy do tegoż samego wypadku, bądź to znosząc wszystkie wskaźniki i różniczkując potem względem  $x$ , bądź to tworząc sumę pochodnych częściowych względem  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , i znosząc potem wskaźniki. Pochodna względem  $x$  z jakiegokolwiek wyrażenia symbolicznego zawiera figury 1, 2, 3, ..., otrzyma się więc wykonywając na tem wyrażeniu działanie  $\frac{d}{dx_1} + \frac{d}{dx_2} + \frac{d}{dx_3} + \dots$ . Metoda pojmie się łatwiej stosując ją do jakiegokolwiek przypadku szczególnego. Załóżmy sobie na przykład obliczyć wyznacznik Hessowy wyznacznika Hessewskiego jakiegokolwiek kształtu danego. Wiemy że Hessowy  $\overline{12}$  otrzymuje się wykonywając na dwóch kształtach identycznych  $U_1, U_2$  działanie wskazane przez symbol  $(\xi_{1\eta_2} - \xi_{2\eta_1})^2$  w którym  $\xi$  i  $\eta$  oznaczają, jak powyżej, różniczkowania względem  $x$  i  $y$ . Dla utworzenia Hessowego  $\overline{12}$ , będziemy mieli do wykonania to działanie na dwóch funkcjach podobnych  $\overline{12}, \overline{34}$ , litera  $\xi_1$  przedstawia tą razą nie już  $\frac{d}{dx_1}$  lecz  $\frac{d}{dx_1} + \frac{d}{dx_2}$ , litera  $\xi_2$  przedstawia podobnie  $\frac{d}{dx_3} + \frac{d}{dx_4}, \dots$  Widzimy tym sposobem bez trudu że wyrażeniem szukanem jest

$$(\overline{13} + \overline{14} + \overline{23} + \overline{24})^2 \overline{12} \cdot \overline{34},$$

lub, rozwijając,

$$4(\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13}) + 4(\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24}) + 8(\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} \cdot \overline{14}).$$

Dla wzięcia jakiegokolwiek przykładu więcej zawikłanego, wyznaczmy jeszcze wyrażenie symboliczne wypadku jaki otrzymałoby się wykonywając działanie  $\overline{12} \cdot \overline{23} \cdot \overline{31}$  na trzech funkcjach H, T i U, H jest Hessowym  $\overline{12}$ , T spółziemnikiem  $\overline{12} \cdot \overline{23} \cdot \overline{31}$ , a U kształtem pierwotnym.

Będziemy musieli naprzód użyć figur różnych dla H i T, i, w tym celu, napisać

$$T = 34 \cdot 45 \cdot 53;$$

będziemy mieli potem do wykonywania na trzech funkcjach działanie wskazane przez symbol

$$(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2(\xi_3\eta_2 - \xi_2\eta_3)^2(\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)^2,$$

w którym  $\xi_1$  musi być zastąpionem przez  $\frac{d}{dx_1} + \frac{d}{dx_2}$ ,  $\xi_2$  przez  $\frac{d}{dx_3} + \frac{d}{dx_4} + \frac{d}{dx_5}$ ; a  $\xi_3$  przez  $\frac{d}{dx_6}$ . Znajduje się tym sposobem, rozwijając, wyrażenie

$$\begin{aligned} & (\overline{13} + \overline{14} + \overline{15} + \overline{23} + \overline{24} + \overline{25})^2 \\ & \times (\overline{36} + \overline{46} + \overline{56})^2 (\overline{16} + \overline{26})^2 \cdot \overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{45} \cdot \overline{53}. \end{aligned}$$

140. Metody poprzednie rozciągną się do liczby jakiegokolwiek zmiennych. Niech będą  $x_1, y_1, z_1$ ;  $x_2, y_2, z_2$ ;  $x_3, y_3, z_3$  trzy układy zmiennych mogących być przekształconemi przez jakiegokolwiek też samo podstawienie. Według prawidła na mnożenie wyznaczników, wyznacznik

$$x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)$$



jest jakimkolwiek niezmiennikiem który, przez przekształcenie, wydaje jakąkolwiek bądź funkcją podobną pomnożoną przez moduł przekształcenia. Otoż, jeżeli zastąpimy  $x$  przez  $\frac{d}{dx_1}$ ,  $y_2$  przez  $\frac{d}{dy_2}, \dots$ , otrzymujemy jakimkolwiek bądź symbol jaki napiszemy  $\overline{123}$ . Kiedy chcemy mieć niezmienniki lub spótzmienniki jakiejkolwiek bądź funkcji danej  $U$ , mamy tylko wykonać na ilukolwiek funkcjach  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_p$  działanie wskazane przez wieloczyn ilukolwiek symboli, takich jak  $\overline{123} \cdot \overline{124} \cdot \overline{235} \dots$ , znosząc wszystkie wskaźniki po różniczkowaniu. Na przykład, jeżeli  $U_1, U_2, U_3$  są kształtami kwadratowymi potrójnemi, i gdy  $a, b, c, 2f, 2g, 2h$  oznaczają, jak w numerach 85 i 114, spótzczynniki kształtu  $U_1$ , symbol  $\overline{123}^2$  rozwinięty daje

$$\begin{aligned} & a(b'c'' + b''c' - 2f'f'') + b(c'a'' + c''a' - 2g'g'') \\ & + c(a'b'' + a''b' - 2h'h'') + 2f(g'h'' + g''h' - a'f'' - a''f') \\ & + 2g(k'f'' + k''f' - b'g'' - b''g') \\ & + 2h(f'g'' + f''g' - c'h'' - c''h'), \end{aligned}$$

wyrazenie sprowadzające się, przypuszczając trzy kształty identycznymi i dzieląc przez 6, do

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$$

Zastępując  $a$ , spótzczynnik potęgi  $x^2$ , przez  $\frac{d^2U}{dx^2}, \dots$ , otrzymamy rozwinięcie ze  $\overline{123}^2$  zastosowane do funkcji potrójnej jakiejkolwiek. Ten spótzmiennik jest *wyznacznikiem Hessowym* funkcji.



Łatwo dostrzedz, jak w numerze 133, że potęgi nieparzyste, symbolu  $\overline{123}$  sprowadzają się do zera kiedy ten symbol stosuje się do jakiegokolwiek jedynej funkcyi. Weźmy za drugi przykład rozwinięcie ze  $\overline{123}$  zastosowane do kształtu czwartego stopnia

$$\begin{aligned}
 & ax^4 + by^4 + cz^4 \\
 & + 4(a_2x^3y + a_3x^3z + b_3y^3z + b_1y^3x + c_1z^3x + a_2z^3y) \\
 & + 6(dy^2z^2 + ez^2x^2 + fx^2y^2) + 12xyz(lx + my + nz).
 \end{aligned}$$

Wartością ze  $\overline{123}$  jest

$$\begin{aligned}
 abc & - 4(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) \\
 & + 4(a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) \\
 & - 12(a_2nd + a_3md + b_1ne + b_3le + c_1mf + c_3lf) \\
 & + 12(lb_1c_1 + mc_3a_2 + na_3b_3) + 12(dl^2 + em^2 + fn^2) \\
 & + 6def - 12lmn.
 \end{aligned}$$

141. Możemy wyrazić tak samo funkcyje zawierające zmienne  $\alpha$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$ , przekształcające się przez podstawienie odwrotne; w rzeczy samej, ponieważ te funkcyje przekształcają się przez toż same podstawienie jak pochodne  $\frac{d}{dx}$ ,  $\frac{d}{dy}$ ,  $\frac{d}{dz}$ , wyznacznik symboliczny

$$\begin{aligned}
 & \alpha \left( \frac{d}{dy_1} \frac{d}{dz_2} - \frac{d}{dy_2} \frac{d}{dz_1} \right) + \epsilon \left( \frac{d}{dz_1} \frac{d}{dx_2} - \frac{d}{dz_2} \frac{d}{dx_1} \right) \\
 & + \gamma \left( \frac{d}{dx_1} \frac{d}{dy_2} + \frac{d}{dx_2} \frac{d}{dy_1} \right),
 \end{aligned}$$

jaki oznaczymy, dla skrócenia, przez  $\alpha 12$ , będzie nam mógł posłużyć do utworzenia przeciwzmienników lub spółzmienników mieszanych. Tak więc gdy  $U_1, U_2$  przedstawiają kształty kwadratowe potrójne,  $\alpha 12$  rozwinięty daje

$$\begin{aligned} & \alpha^2(b'c'' + b''c' - 2f'f'') + \beta^2(c'a'' + c''a' - 2g'g'') \\ & + \gamma^2(a'b'' + a''b' - 2h'h'') \\ & + 2\beta\gamma(g'h'' + g''h' - a'f'' - a''f') \\ & + 2\gamma\alpha(h'f'' + h''f' - b'g'' - b''g') \\ & + 2\alpha\beta(f'g'' + f''g' - c'h'' - c''h'), \end{aligned}$$

i znajdujemy przeciwzmiennik obliczony w numerze 114 (Prz. II).

Otrzyma się tak samo przeciwzmiennik kształtu czwartego stopnia powyższy, rozwijając symbol  $\alpha 12$ .

Mamy tylko zastąpić, w tych dwóch funkcjach, spółczynnik każdej potęgi  $x^n$  zmiennej  $x$  przez  $\frac{d^n}{dx^n}$  dla otrzymania symbolu dostarczającego jakikolwiek spółzmiennik mieszany kiedy ten symbol zastosowanym być może do jakiegokolwiek kształtu więcej podniesionego. Tym sposobem  $\alpha 12$  rozwinięty daje

$$\alpha^2 \left[ \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{d^2 U}{dz^2} - \left( \frac{d^2 U}{dydz} \right)^2 \right] + \dots,$$

wyrażenie które, zastosowane do jakiegokolwiek kształtu kwadratowego, daje po prostu jakikolwiek przeciwzmiennik, lecz które, dla jakiegokolwiek kształtu stopnia wyższego, zawiera  $x, y, z$  jak  $\alpha, \beta, \gamma$ , a tém samém, jest jakimkolwiek spółzmiennikiem mieszanim,

Ogólnie, jeżeli mamy wyrażenie symboliczne niezmiennika jakiegokolwiek kształtu podwójnego, dosyć tylko położyć przed każdym wyrazem symbol przeciwzmiennika  $\alpha$ , aby otrzymać przeciwzmiennik jakiegokolwiek kształtu potrójnego tegoż samego stopnia.

142. Jeżeli, w przeciwzmienniku, zastąpi się  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  przez  $\frac{d}{dx}$ ,  $\frac{d}{dy}$ ,  $\frac{d}{dz}$ , i gdy wykona się potem działanie na U, otrzymuje się jakikolwiek spółzmiennik (149) którego symbol wyprowadzi się z symbolu przeciwzmiennika pisząc w nim nową figurę na miejsce  $\alpha$ . I tak z  $\overline{\alpha 23}$  wyciąga się  $\overline{123}$ ; z  $\overline{\alpha 23} \cdot \overline{\alpha 24}$ ,  $\overline{123} \cdot \overline{124}$ ,... Odwrotnie, jeżeli, w symbolu jakiegokolwiek niezmiennika, zastąpi się jakakolwiek bądź figurę przez symbol  $\alpha$  przeciwzmienników, otrzymuje się przewoźnik tego niezmiennika. I tak wyrażenie

$$\overline{123} \cdot \overline{124} \cdot \overline{234} \cdot \overline{314}$$

będąc niezmiennikiem jakiegokolwiek bądź kształtu sześciennego, jego przewoźnikiem będzie

$$\overline{123} \cdot \overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 23} \cdot \overline{\alpha 31}.$$

W przypadku jakiegokolwiek kształtu podwójnego, to prawidło się upraszcza: jeżeli zastąpi się figurę 1 w  $\overline{12}$  przez symbol przeciwzmienników, to wyrażenie staje się rozwijając  $\xi \frac{d}{dy} + \eta \frac{d}{dx}$ ; lecz  $\xi$  i  $\eta$  będąc przekształcone przez toż same podstawienie jak  $-y$  i  $x$ , powyższe wyrażenie przywodzi się do  $x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy}$ , i może wtedy być zupełnie zniesioném gdyż ono tylko wprowadza do wypadku jakikolwiek czynnik liczebny.



Przeto, jeżeli ma się symbol niezmiennika w jakimkolwiek kształcie podwójnym, symbol jego przewoźnika ztąd się wyciąga znosząc czynniki zawierające jakąkolwiek toż samą figurę. I tak symbol

$$\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24}$$

przedstawiając dyskryminant w jakimkolwiek kształcie sześciennym, jego przewoźnikiem, znosząc czynniki zawierające 4, będzie

$$\overline{12} \cdot \overline{13}.$$

Jeżeli w przeciwzmienniku zastąpi się  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , przez  $\frac{dU}{dx}$ ,  $\frac{dU}{dy}$ ,  $\frac{dU}{dz}$ , ma się jakikolwiek spółzmiennik którego symbol wyciąga się z symbolu przeciwzmiennika pisząc na miejsce każdej litery  $\alpha$  nową figurę różną: i tak z  $\overline{\alpha 34}^2$  wyciąga się  $\overline{134} \cdot \overline{234}$ , i tak dalej.

143. Sposób postępowania użyty w numerze 139 dla kształtów podwójnych stosuje się bez trudności do liczby jakiejkolwiek zmiennych. Przypuśćmy na przykład że się żąda, dla jakiegokolwiek kształtu sześciennego potrójnego, wyrażenie niezmiennika jaki się otrzymuje wykonywając działanie na wyznaczniku Hessowym z przewoźnikiem

$$\overline{123} \cdot \overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 23} \cdot \overline{\alpha 31}$$

numeru 142: otrzymamy je zastępując w tym ostatnim symbolu  $\alpha$  przez  $4 + 5 + 6$  i wykonywając potem działanie na funkcji



—<sup>2</sup>  
456. Rozwijając i znosząc wszystkie wyrazy zawierające więcej niż trzy razy figury 4, 5, 6, znajduje się dla wyrażenia szukanego

$$\overline{123} \cdot \overline{124} \cdot \overline{235} \cdot \overline{316} \cdot \overline{456}.$$

144. Pokażemy teraz na niektórych przykładach w jaki sposób znakowania symboliczne pozwolą przekształcić wyrażenie niezmienników i spółzienników. Zasadą tych przekształceń jest, dla kształtów podwójnych, tożsamość następująca

$$D_1\overline{23} + D_2\overline{31} + D_3\overline{12} = 0,$$

w której  $D_1$  przedstawia, przez skrócenie,  $x \frac{d}{dx_1} + y \frac{d}{dy_1}$ .

Łatwo jest dojrzeć w rzeczy samej że rozwijając, współczynniki co do  $x$  i  $y$  sprowadzają się do zera. Aby dać lepiej zrozumieć użycie tej tożsamości, wskażemy jej pierwsze zastosowanie więcej po szczególe rozwinięte jak będzie to potrzebnem do dalszych przytoczonej powyżej zasady zastosowań.

Kładąc zrównanie pod kształtem

$$D_1\overline{23} = D_2\overline{13} - D_3\overline{12}$$

i podnosząc do kwadratu, przyjdzie

$$D_2^2\overline{13} + D_3^2\overline{12} - D_1^2\overline{23} = 2D_2D_3\overline{12} \cdot \overline{13},$$

związek który jest prawdziwym wtedy nawet gdy trzy kształty  $U_1, U_2, U_3$  na których jesteśmy obowiązani wykonywać działanie są różnemi. Lecz będziemy uważali tu tylko przypadek

jakiegokolwiek jedynego kształtu i przypuścimy że  $U_1, U_2, U_3$  stają się identycznymi kiedy się znieśie wskaźniki zmiennych; w tym przypadku widzieliśmy (133) że trzy wyrażenia  $\overline{D_1^2 23}, \overline{D_2^2 31}, \overline{D_3^2 12}$  oznaczają jedyną i toż samą rzecz. Działanie poprzednie sprowadzi się do

$$\overline{D_3^2 12} = 2\overline{D_2 D_3 12} \cdot \overline{13}.$$

Lecz na mocy twierdzenia znanego o funkcjach jednorodnych, działanie  $D$  wykonane na jakiegokolwiek bądź funkcji nie ma innego skutku jak pomnożenie jej przez jakikolwiek czynnik liczebny: w pierwszej stronie równania,  $\overline{D_3^2}$  przybierając tylko  $U_2$ , które nie jest różniczkowanym, tym czynnikiem będzie  $n(n-1)$ ; w drugiej stronie,  $\overline{D_2}, \overline{D_3}$  przyjmując funkcje już różniczkowane raz jeden, wprowadzają czynnik  $n-1$ . Przeto, rozwijając, znosząc wskaźniki i dzieląc przez  $2(n-1)$ , mamy

$$\begin{aligned} nU \left[ \frac{d^2 U}{dx^2} \frac{d^2 U}{dy^2} - \left( \frac{d^2 U}{dx dy} \right)^2 \right] \\ = (n-1) \left[ \frac{d^2 U}{dx^2} \left( \frac{dU}{dy} \right)^2 - 2 \frac{d^2 U}{dx dy} \frac{dU}{dx} \frac{dU}{dy} + \frac{d^2 U}{dy^2} \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

145. Potrzeba zauważyć że w każdym razie gdy przekształcenie ma za skutek zmniejszenie liczby figur w symbolu, kształt pierwotny  $U$  musi pokazać się jako czynnik w wyrażeniu funkcji. W rzeczy samej, widzimy za pomocą przykładu powyższego że  $\overline{12.13}$  i  $\overline{12}$  różnią się tylko między sobą jakimkolwiek czynnikiem liczebnym; lecz gdy wykonamy działanie na trzech funkcjach  $U_1, U_2, U_3$  i gdy symbol  $\overline{12}$  nie przyjmuje  $U_2$  funkcja  $U$  musi pozostać jako czynnik, kiedy się znieśie wskaźniki.

146. Ogólnie, wszelki symbol może być przekształconym tak ażeby potęga najwyższa czynnika jakiegokolwiek  $\overline{12}$  była parzystą; w rzeczy samej, kierunek nie będąc zmienionym przez zrobienie zamiany figur 1 i 2, mamy

$$\overline{12}^{-2m+1} \varphi_1 = - \overline{12}^{-2m+1} \varphi_2 = \frac{1}{2} \overline{12}^{-2m+1} (\varphi_1 - \varphi_2),$$

a, za pomocą tożsamości numeru 144, funkcya  $\varphi_1 - \varphi_2$  może być przekształconą w sposób taki aby się stała podzielną przez  $\overline{12}$ . Tak więc, gdy  $m$  jest nieparzystym, dwa wyrażenia  $\overline{12}^{-m} \cdot 13$  i  $\overline{12}^{-m+1}$  różnią się tylko między sobą jakimkolwiek czynnikiem; gdyż ma się

$$2D_2 \overline{12}^{-m} \cdot 13 = \overline{12}^{-m} (D_2 13 - D_1 23) = D_3 \overline{12}^{-m+1}$$

lub też,  $n$  będąc stopniem funkcji  $U$  na której wykonywa się działanie,

$$2(n - m) \overline{12}^{-m} \cdot 13 = n \cdot \overline{12}^{-m+1}.$$

147. Możemy przydać do tożsamości numeru 144 związek następujący, jaki jest łatwo sprawdzić.

$$\overline{12} \cdot \overline{34} + \overline{13} \cdot \overline{42} + \overline{14} \cdot \overline{23} = 0,$$

i, za pomocą tych dwóch równań, sprowadzić wszystkie symbole do pewnej liczby kształtów typowych jakie wskażemy przez litery szczególne. Dla dwóch czynników, przyjmiemy jako typ wyznacznik Hessowy

$$H = \overline{12}^{-3};$$



dla trzech czynników

$$G = 12 \cdot 13 \quad (136);$$

dla czterech czynników,

$$S = 12 \quad (121) \quad \text{lub} \quad H^2 = 12 \cdot 34;$$

dla pięciu czynników,

$$F = 12 \cdot 13 \quad \text{lub} \quad GH = 12 \cdot 13 \cdot 45;$$

dla sześciu czynników,

$$A = 12 \quad (133) \quad \text{lub} \quad T = 12 \cdot 23 \cdot 34 \quad (135)$$

$$\text{lub też} \quad H^3 = 12 \cdot 34 \cdot 56,$$

tak dalej. Przykłady następujące dadzą zrozumieć sposób postępowania dla otrzymania tych uproszczeń.

PRZYKŁAD I. — *Dowieść że jeżeli się zastąpi w funkcji U, x przez  $\frac{dU}{dy}$ , a y przez  $-\frac{dU}{dx}$ , spółzmiennik tym sposobem otrzymany jest podzielny przez U.*

Oznaczmy naprzód wyrażenie symboliczne tego spółzmiennika. Funkcja dana U może się napisać pod kształtem  $\left(x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy}\right)^n U$ . Gdy się zrobi w niej podstawienie wskazane, każdy z  $n$  czynników przyjmuje kształt  $\frac{d}{dx} \frac{d}{dy} - \frac{d}{dy} \frac{d}{dx}$ . Spółzmiennik  $\frac{d^n U}{dx^n} \left(\frac{dU}{dy}\right)^n - \dots$  wyrazi się więc symbolicznie jako wieloczyn z  $n$  czynników  $12.13.14\dots$ , jeden z symboli (ten który w rozwinięciu daje pochodne rzędu  $n$ ) pozostaje tymże samym we wszystkich czynnikach, gdy tymczasem drugi musi być



różnym dla każdego czynnika, ażeby po rozmnózeniu miało się tylko potęgi pochodnych pierwszego rzędu. Oznaczywszy więc 12.13 przez  $Q_2$ , 12.13.14 przez  $Q_3$ , 12.13.14.15 przez  $Q_4$ , etc., mamy wyrazić  $Q_2, Q_3, Q_4, \dots$ , w funkcyi kształtów wybranych jako typy.

1° Wartość  $Q_2$  była już daną (144); obliczymy  $Q_3$ . Mnóżymy zrównanie

$$2D_2D_3\overline{12.13} = D_2^2\overline{13}^2 + D_3^2\overline{12}^2 + D_1^2\overline{23}^2$$

numeru 144 przez 14; dwa pierwsze wyrazy drugiej strony stają się identycznymi, trzeci zniszczy się, i przyjdzie

$$D_2D_3\overline{12.13.14} = D_2^2\overline{13.14} \quad \text{lub też} \quad (n-1)Q_3 = nGU.$$

Ogólnie, wszelki symbol może być skupiony zastępując każdą parę czynników prostych mających jakąkolwiek figurę spólną takich jak  $\overline{12.13}$ , przez jakikolwiek jedyny czynnik kwadratowy za pomocą zrównania poprzedniego.

2° Obliczymy teraz  $Q_4$ . Pomnóżymy dwa zrównania

$$2D_2D_3\overline{12.13} = D_3^2\overline{12}^2 + D_2^2\overline{13}^2 - D_1^2\overline{23}^2,$$

$$2D_1D_5\overline{14.15} = D_5^2\overline{14}^2 + D_4^2\overline{15}^2 - D_1^2\overline{45}^2;$$

przyjdzie, zbierając wyrazy podobne,

$$4(n-1)Q_4 = D_1^2\overline{23.45} - 4D_1^2D_2^2\overline{12.45} + 4D_1^2D_3^2\overline{12.14}$$

$$= -3n(n-1)(n-2)(n-3)H^2U$$

$$+ 4n^2(n-1)^2U^2\overline{12.13}.$$

Pozostaje nam tylko wyrazić  $\overline{12} \cdot \overline{13}$  w funkcji kształtów typów. Podnieśmy do czwartej potęgi zrównanie

$$D_1 \overline{23} = D_2 \overline{13} - D_3 \overline{12};$$

mamy, grupując wyrazy podobne,

$$6D_3^2 \overline{12} \cdot \overline{13} = 8D_3^2 D_2 \overline{12} \cdot \overline{13} - D_3^4 \overline{12};$$

lecz, jak w numerze 146 ma się

$$8D_3^3 D_1 \overline{12} \cdot \overline{13} = 4D_3^4 \overline{12},$$

przeto podstawiając

$$2(n-2)(n-3) \overline{12} \cdot \overline{13} = n(n-1)S U;$$

więc na koniec

$$\begin{aligned} & 4(n-1)^4 (n-2)(n-3) Q_4 \\ &= -3n(n-1)(n-2)^2 (n-3)^2 H^2 U + 2n^3 (n-1)^3 S U^3. \end{aligned}$$

Znajdzie się wartości  $Q_5$  i  $Q_6$  obliczone, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, t. IX, str. 23.

PRZYKŁAD II. — Dowieść że wyznacznik Hessiany Hessowego jest jakąkolwiek funkcją liniową co do SH i TU.

Znaleźliśmy (139) że wyrażeniem tej funkcji jest

$$4(\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13}) + 4(\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24}) + 8(\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} \cdot \overline{14}),$$

i potrzeba dowieść że każdy z tych trzech wyrazów jest przywiedlnym do kształtów  $\alpha SH + \epsilon TU$ .

1° Zaczniemy od  $\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13}$ . Pomnóżmy przez  $\overline{14}$  wieloczyn dwóch zrównań

$$2D_2D_3 \overline{12} \cdot \overline{13} = D_8^2 \overline{12} + D_2^2 \overline{13} - D_1^2 \overline{23},$$

$$2D_2D_3 \overline{24} \cdot \overline{34} = D_5^2 \overline{24} + D_2^2 \overline{34} - D_1^2 \overline{23},$$

przyjdzie

$$\begin{aligned} 4D_2^2 D_3^2 \overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24} \cdot \overline{34} \cdot \overline{14} \\ = 2D_3^2 \overline{12} \cdot \overline{24} + D_1^2 D_2^2 \overline{23} \cdot \overline{14} - 2D_2^2 D_4^2 \overline{13} \cdot \overline{23} \cdot \overline{14}; \end{aligned}$$

lecz podnosząc do kwadratu tosamotę numeru 147, mamy

$$2 \cdot \overline{14} \cdot \overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24} \cdot \overline{34} = \overline{14} (\overline{12} \cdot \overline{34} + \overline{13} \cdot \overline{24} - \overline{14} \cdot \overline{23}),$$

a tём samém, pierwsza strona zrównania poprzedniego staje się

$$4D_2^2 D_3^2 \overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{14} - 2D_2^2 D_3^2 \overline{14} \cdot \overline{23};$$

zkąd, sprowadzając,

$$6D_2^2 D_3^2 \overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{14} = 3D_2^2 D_3^2 \overline{14} \cdot \overline{23} + 2D_1^2 \overline{12} \cdot \overline{24} \cdot \overline{14}$$

albo też

$$6(n-2)(n-3) \overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} = 3(n-2)(n-3)SH + 2n(n-1)TU.$$

2° Przejdźmy do wyrazu  $\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24}$ . Pomnóżmy przez  $\overline{12}$  wieloczyn dwóch zrównań

$$-2D_1D_3 \overline{13} \cdot \overline{34} = D_1^2 \overline{34} + D_2^2 \overline{13} - D_3^2 \overline{14},$$

$$2D_2D_3 \overline{24} \cdot \overline{34} = D_2^2 \overline{34} + D_2^2 \overline{24} - D_1^2 \overline{23}$$

mamy

$$\begin{aligned} & -4\overline{D_1 D_2 D_3 D_1} \overline{12 \cdot 34 \cdot 13 \cdot 24} \\ & = D_1^2 \overline{D_2^2} \overline{12 \cdot 34} + 2D_2^2 \overline{D_1^2} \overline{12 \cdot 13 \cdot 24} - 2D_1^2 \overline{12 \cdot 23 \cdot 31} ; \end{aligned}$$

z kądem, zastępując  $\overline{12 \cdot 13 \cdot 24}$  przez wartość znaną powyżej,

$$\begin{aligned} & -12(n-3)^2 \overline{12 \cdot 34 \cdot 13 \cdot 24} \\ & = 6(n-2)^2(n-3)SH - 4n(n-1)(n-2)TU. \end{aligned}$$

3° Uważmy na koniec wyraz  $\overline{12 \cdot 34 \cdot 13 \cdot 14}$ . Mamy tylko zastąpić  $\overline{13 \cdot 14}$  przez wartość wyciągniętą z tożsamości numeru 144, toż przyjdzie

$$2D_3 \overline{D_1} \overline{12 \cdot 34 \cdot 13 \cdot 14} = 2D_1 \overline{12 \cdot 34 \cdot 13} - D_1^2 \overline{12 \cdot 34},$$

a, podstawiając jak powyżej,

$$6(n-3)^2 \overline{12 \cdot 34 \cdot 13 \cdot 14} = 2n(n-1)TU.$$

Zbierając trzy wyrazy, ma się więc dla wyrażenia szukanego jakąkolwiek funkcją liniową co do SH i TU.

148. Metody poprzednie stosują się do kształtów zawierających liczbę jakąkolwiek zmiennych. Dla kształtów potrójnych, użyje się tożsamości

$$\begin{aligned} D_1 \overline{123} & = D_1 \overline{234} + D_2 \overline{341} + D_3 \overline{124}, \\ \overline{123 \cdot 145} + \overline{124 \cdot 153} + \overline{125 \cdot 134} & = 0, \end{aligned}$$

do których przyda się związki odpowiednie dla spólmien-



ników

$$P_{123} = D_1 \overline{\alpha 23} + D_2 \overline{\alpha 31} + D_3 \overline{\alpha 12},$$

$$\overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 34} + \overline{\alpha 23} \cdot \overline{\alpha 14} + \overline{\alpha 31} \cdot \overline{\alpha 24} = 0,$$

P oznaczając, dla skrócenia, funkcją  $\alpha x + \epsilon y + \gamma z$ .

PRZYKŁAD I. — Znaleźć jakikolwiek związek między spółzmiennikami czwartego rzędu jakiegokolwiek kształtu potrójnego czwartego stopnia.

Niech będą  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$  ilości jakiegokolwiek połączone związkiem

$$\alpha + \epsilon + \gamma + \delta = 0.$$

Podnosząc dwa razy do kwadratu, jest łatwo dostrzedz że ma się

$$8\alpha\epsilon\gamma\delta = 2\Sigma\alpha^2\epsilon^2 - \Sigma\alpha^4.$$

Stosując ten wzór do zrównania identycznego

$$D_1 \overline{123} = D_1 \overline{234} + D_2 \overline{314} + D_3 \overline{124},$$

mamy

$$8D_1 D_2 D_3 D_4 \overline{123} \cdot \overline{124} \cdot \overline{234} \cdot \overline{314} = 4D_1^2 \overline{123}^2 - 12D_2^2 D_3^2 \overline{123} \cdot \overline{124},$$

jest to właśnie związek szukany.

PRZYKŁAD II. — Dowieść że jeżeli się zastąpi w emanantach jakiego-

bądź kształtu potrójnego,  $x, y, z$  przez  $\gamma \frac{dU}{dy} - \epsilon \frac{dU}{dz}$ ,  $\alpha \frac{dU}{dz} - \gamma \frac{dU}{dx}$ ,

$\epsilon \frac{dU}{dx} - \alpha \frac{dU}{dy}$ , związki otrzymane są kształtu

$$P_n U + Q_n (\alpha x + \epsilon y + \gamma z)^2.$$

Łatwo dostrzedz że wyrażeniem symboliczném tych wypadków jest  $\overline{\alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{14} \alpha_{15} \dots}$ . Obliczmy wartości  $P_2, Q_2, P_3, Q_3$  (\*).

1° Dla otrzymania wartości  $\overline{\alpha_{12} \alpha_{13}}$ , mamy tylko podnieść do kwadratu zrównanie

$$P_1 \overline{123} = D_1 \overline{\alpha_{23}} + D_2 \overline{\alpha_{31}} = D_3 \overline{\alpha_{12}},$$

tek działając przyjdzie

$$P_2 \overline{123} = 3D_3^2 \overline{\alpha_{12}^2} - 6D_2 D_3 \overline{\alpha_{12} \alpha_{13}},$$

lub też, oznaczywszy przez  $H$  wyznacznik Hessowy  $\overline{123}^2$  a przez  $G$  Hessowy z funkcją  $\alpha$  zespolony  $\overline{\alpha_{12}^2}$ ,

$$6(n-1)^2 \overline{\alpha_{12} \alpha_{13}} = 3n(n-1)GU - P_2 H.$$

2° Obliczmy teraz  $\overline{\alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{14}}$ . Z tożsamości poprzedniej, wyciągamy również

$$\begin{aligned} & -2D_2 D_3 \overline{\alpha_{12} \alpha_{13}} \\ & = P_2 \overline{123}^2 - 2PD_1 \overline{123 \alpha_{23}} + D_2^2 \overline{\alpha_{23}^2} - D_3^2 \overline{\alpha_{31}^2} - D_2^2 \overline{\alpha_{12}^2}; \end{aligned}$$

mnożąc przez  $\overline{\alpha_{14}}$ , dwa wyrazy sprowadzają się do zera i pozostaje

$$-2(n-1)^2 \overline{\alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{14}} = P_2 \overline{123} \cdot \overline{\alpha_{14}} - 2n(n-1)U \overline{\alpha_{12} \alpha_{13}}.$$

by dowieść że  $\overline{123 \alpha_{23} \alpha_{14}}$  sprowadzi się do zera, mamy tylko po-

(\*) Ta kwestya przedstawia się przy poszukiwaniu podwójnych stycznych do linii krzywych płaskich (zobacz dzieło p. SALMONA, *Higher plane Curves*, str. 81).

mnożyć przez  $\overline{123}$  zrównanie identyczne

$$\overline{a12} \cdot \overline{x34} + \overline{a23} \cdot \overline{x14} + \overline{a31} \cdot \overline{x24} = 0,$$

i jego trzy wyrazy, różniące się tylko przemianami figur 1, 2, 3, muszą się sprowadzić odrębnie do zera.

149. Przy wyłożeniu poprzedniem metod symbolicznych wskazaliśmy znakowanie i sposoby pierwotnie użyte przez P. CAYLEY. Damy teraz poznać niektóre zmiany wprowadzone przez PP. ARONHOLD'A i CLEBSCH'A, którzy władali metodami symbolicznymi z wielkiem powodzeniem, lecz być może nie zdając sobie zupełnie sprawy z tożsamości ich sposobów z temi jakie utworzył poprzednio P. CAYLEY. Oznaczają oni zmienne przez  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , a współczynniki przez wskaźniki odpowiednie zmiennym jakie te wskaźniki mnożą. Tym sposobem kształty potrójne trzeciego i czwartego stopnia, są oznaczone przez znakowania  $\Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l$ ,  $\Sigma a_{iklm} x_i x_k x_l x_m$ , gdzie liczby  $i, k, l, m$ , mogą przyjąć wartości 1, 2, 3, 4. Potrzeba zauważyć że w tém znakowaniu  $a_{ikl} = a_{ilk} = a_{kli}$ , tak dalece że wykonywając summy wskazane otrzymuje się jakikolwiek kształt napisany ze współczynnikami dwumianu. Tak więc robiąc summę  $\Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l$ , trzy wyrazy  $a_{112} x_1 x_1 x_2$ ,  $a_{121} x_1 x_2 x_1$ ,  $a_{211} x_2 x_1 x_1$  są identycznymi: dzieje się podobnie z sześciu wyrazami  $a_{123} x_1 x_2 x_3$ ,  $a_{132} x_1 x_3 x_2$ ,  $a_{213} x_2 x_1 x_3$ ,  $a_{231} x_2 x_3 x_1$ ,  $a_{312} x_3 x_1 x_2$ ,  $a_{321} x_3 x_2 x_1$ , tak dalece że summą rozwiniętą jest

$$a_{111} x_1 x_1 x_1 + a_{222} x_2 x_2 x_2 + a_{333} x_3 x_3 x_3 + 3a_{112} x_1 x_1 x_2 + \dots + 6a_{123} x_1 x_2 x_3.$$

I tak dalej ogólnie. P. ARONHOLD używa nadto, dla oznaczenia sposobem skróconym kształtu jakiegokolwiek bądź, wyrażenia symbolicznego

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots)^n,$$

w którym powinno się, po rozwinięciu, zastąpić wieloczyny takie jak  $a_1 a_1 a_1$  przez współczynniki odpowiednie  $a_{111}$ . Tym sposobem kształt sześcienny potrójny powyższy napisze się

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^3;$$

wyrazy  $a_1 a_1 a_1 x_1 x_1 x_1$ ,  $3 a_1 a_1 a_2 x_1 x_1 x_2 + \dots$ , w rozwinięciu sześcienu mogą być zastąpionemi przez  $a_{111} x_1 v_1 x_1$ ,  $3 a_{112} x_1 x_1 x_2 \dots$  kształt mógłby się zarówno napisać

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^3, \quad (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)^3,$$

wieloczyny  $b_1 b_1 b_1$ ,  $c_1 c_1 c_2 \dots$ , mogą także być zastąpionemi przez współczynniki  $a_{111}$ ,  $a_{112}, \dots$ . Prawidło podane przez P. ARNHOLDA dla utworzenia niezmienników zależy na utworzeniu z  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \dots$ , pewnej liczby wyznaczników, na pomnożeniu ich i na zastąpieniu po odbytem mnożeniu wieloczynów  $a_1 a_1 a_1$ ,  $b_1 b_1 b_1, \dots$ , przez współczynniki  $a_{111}, a_{112}, \dots$ . Tak to właśnie postępując P. ARNHOLD pierwszy odkrył niezmiennik główny kształtu sześciennego potrójnego tworząc wieloczyn z czterech wyznaczników  $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$ ,  $\Sigma \pm b_1 c_2 d_3$ ,  $\Sigma \pm c_1 d_2 a_3$ ,  $\Sigma \pm d_1 a_2 b_3$ , i wykonywając potem podstawienia jakie poprzednio wskazaliśmy. Tenże sam niezmiennik w znakowaniu P. CAYLEY napisałby się (142)

$$\overline{123} \cdot \overline{234} \cdot \overline{341} \cdot \overline{412}.$$

150. Dla pokazania że dwie te metody są w gruncie identycznymi, dosyć zauważyć że, według twierdzenia znanego o funkcjach jednorodnych, funkcya jakakolwiek  $u$  stopnia  $n$  różni się tylko jakimkolwiek czynnikiem liczebnym od

$$\left( x_1 \frac{d}{dx_1} + x_2 \frac{d}{dx_2} + x_3 \frac{d}{dx_3} \right)^n u,$$



tak dalece że pisząc ją pod kształtem

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^n,$$

symbole  $a_1, a_2, a_3, \dots$  różnią się tylko jakimkolwiek czynnikiem liczebnym od symboli różniczkowych  $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dx_3}, \dots$

Przyjdziemy więc widocznie do tegoż samego wypadku, bądź to tworząc, jak P. CAYLEY, wyznaczniki z symboli różniczkowych  $\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dx_3}, \dots$ , bądź to tworząc, jak P. ARONHOLD, z symboli  $a_1, a_2, a_3, \dots$

Obadwa nadto używają tegoż samego podejścia. Jeżeli się pomnoży pewną liczbę symboli różniczkowych

$$\left(\frac{d}{dx} + \lambda \frac{d}{dy}\right) \left(\frac{d}{dx} + \mu \frac{d}{dy}\right) \dots$$

i wykona potem działanie na U, wypadek będzie jakkolwiek funkcją liniową pochodnych z U jakiegokolwiek rzędu równego liczbie czynników symbolu, i w ten sposób postępując nie otrzymałoby się nigdy spółczynnika różniczkowego podniesionego do jakiegokolwiek potęgi wyższej nad pierwszą. Wtedy więc gdy się żąda złożyć symbol z jakiegokolwiek bądź funkcji zawierającej potęgę tych pochodnych, podejście do którego udałby się P. CAYLEY zawisło na napisaniu ze zmiennymi różnemi, czynników wieloczynu

$$\left(\frac{d}{dx_1} + \lambda \frac{d}{dy_1}\right) \left(\frac{d}{dx_2} + \mu \frac{d}{dy_2}\right) \dots,$$

dla wykonania działania na iluokolwiek funkcjach  $U_1, U_2, \dots$ , potem na zidentyfikowaniu tych zmiennych po odbytem mnożeniu. Podobnie, P. ARONHOLD używa w swych wieloczynach symbolicznych symboli odrębnych odzyskujących też same

znaczenie byleby tylko raz mnożenie zostało wykonanem. Mnożąc symbole  $a_i, a_k, a_l, \dots$ , mogłoby się otrzymać tylko wyrazy zawierające współczynniki  $a_{ikl}$  w pierwszej potędze. Aby wyrazić symbolicznie funkcje zawierające współczynniki w stopniu więcej podniesionym, podejście zależy więc na zrobieniu użytku z ilu kolwiek szeregów symboli  $a_i, a_k, a_l; b_i, b_k, b_l, \dots$ , iloczynów  $a_i a_k a_l, b_i b_k b_l, c_i c_k c_l, \dots$ , oznaczających wszystkie tenże sam współczynnik  $a_{ikl}$ .

151. Po wyłożeniu we wszystkich szczegółach metody P. CAYLEY, niepotrzebnem rozciągać się dłużej nad rozwinięciem innej metody różniącej się od pierwszej samem jedynie znakowaniem. Damy tu tylko poznać w jaki sposób P. CLEBSCH udowodnił że wszelki niezmiennik może się wyrazić za pomocą wieloczynów symbolicznych. Niech będzie  $\varphi(a, b, c, \dots)$  niezmiennik jakiegokolwiek kształtu jedynego; było dowiedzionem (103) że wykonywając na nim działanie  $a' \frac{d}{da} + b' \frac{d}{db} + \dots$ , otrzyma się jakikolwiek niezmiennik spólny dwóch kształtów mających jeden  $a, b, c, \dots$ , drugi  $a', b', c', \dots$  za współczynniki odpowiednio. Wykonywając podobnież na tym nowym niezmienniku działanie  $a'' \frac{d}{da} + b'' \frac{d}{db} + \dots$ , otrzymamy niezmiennik trzech kształtów i będziemy mogli to działanie powtórzyć tyle razy ile razy współczynniki  $a, b, c, \dots$ , będą figurowały w niezmienniku. Można więc, jeżeli ma się niezmiennik jakiegokolwiek kształtu jedynego zawierający współczynniki stopnia  $p$ , wyciągnąć zńąd niezmiennik jakiegokolwiek układu o  $p$  kształtach który będzie zawierał współczynniki każdego z nich w pierwszym stopniu, i przychodzi się wreszcie do niezmiennika pierwotnego, przypuszczając że  $p$  kształtów stają się identycznymi; gdyż działanie  $a \frac{d}{da} + b \frac{d}{db} + \dots$  wprowadza tylko do nich jakikolwiek czynnik liczebny. Jeżeli przypuścimy, nadto,

że wszystkie kształty nowe tym sposobem wprowadzone są potęgami  $n^{\text{tomi}}$  doskonałemi, przychodzimy do tego wypadku że z niezmiennika danego jakiegokolwiek kształtu jedyne, można wyciągnąć niezmiennik jakiegokolwiek układu o  $p$  kształtach

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots)^n, (b_1x_1 + b_2x_2 + \dots)^n, (c_1x_1 + \dots)^n,$$

i jak to już powiedzieliśmy, przychodzi się do niezmiennika pierwotnego zastępując każdy spółczynnik nowych kształtów przez jego odpowiedni w kształcie pierwotnym, zastępując na przykład  $a_1^n, b_1^n, c_1^n, \dots$ , przez spółczynnik  $x_1^n$  w kształcie pierwotnym. Niezmienniki funkcyj

$$(a_1x_1 + \dots)^n, (b_1x_1 + \dots)^n,$$

są widocznie niezmiennikami funkcyj liniowych

$$a_1x_1 + \dots, b_1x_1 + \dots$$

Jest więc dowiedzionem że wszelki niezmiennik rzędu  $p$  jakiegokolwiek kształtu jedyne może być wyrażonym symbolicznie jak niezmiennik jakiegokolwiek układu o  $p$  kształtach liniowych : jeden punkt który nam pozostaje teraz do dowiedzenia jest że ten ostatni niezmiennik musi być koniecznie jakąkolwiek bądź funkcją wyznaczników utworzonych ze spółczynników tych funkcyj liniowych. Odeszliśmy czytelników chcących poznać dowodzenie P. CLEBSCH'A, do *Dziennika* P. CRELLE, t. LIX, str. 7 ; to dowodzenie, nie przedstawiające prawdziwych trudności, wymaga dosyć długich rozwinięć i wiele przestrzeni. Można jeszcze z tego zdać sobie sprawę uważając pilnie zrównania różniczkowe niezmienników. I tak, dla jakiegokolwiek układu kształtów liniowych  $ax + by + \dots$ , wszelki niezmiennik

musi zadosyć czynić równaniu

$$b \frac{dI}{da} + b' \frac{dI}{da'} + b'' \frac{dI}{da''} + \dots = 0,$$

które, zcałkowane jak równanie zwyczajne względem różnic częściowych, daje dla  $I$  jakąkolwiek funkcją wyznaczników  $ab' - a'b$ ,  $ab'' - a''b$ ,... i tak samo w ogólności.



## ROZDZIAŁ XIII.

### KSZTAŁTY KANONICZNE.

---

152. Ponieważ niezmienniki i spółzmienniki zachowują ich związki wzajemne jakimikolwiek byłyby przekształcenia linijne jakim się zwykle poddaje wzięta pod uwagę funkcyja, widoczna że, dla zbadania tych związków, wystarczy roztrząsnąć ją pod kształtem najprostszym do którego ona może być przywiedziona. Rozciągnięciem się tym sposobem do funkcyj zawierających liczbę jakąkolwiek zmiennych metodę z którą czytelnik jest już oswojony dla kształtów o trzech i czterech zmiennych; kiedy chcemy, w rzeczy samej, uczyć się własności jakiegokolwiek krzywej lub jakiegokolwiek powierzchni, wszyscy geometrowie wiedzą jakie korzyści dostarcza jakikolwiek wybór osi spółrzędnych pozwalający przywieść równanie krzywej lub powierzchni do swego kształtu najprostszego (\*). Ten kształt najprostszy do którego jakąkolwiek funkcyja może być przywiedziona nie tracąc swej ogólności, jest to co się właśnie nazywa jej *kształtem kanonicznym*. Możemy, licząc po prostu stałe, rozpoznać czy jakąkolwiek funkcyja przedstawiona, jest dosyć ogólna aby była wziętą jako kształt kanoniczny jakiegokolwiek innej funkcyi da-

---

(\*) Potrzeba przecież przyznać że postępy analizy pozwalające traktować łatwiej funkcyje pod ich kształtem ogólnym, dążą do ściśnienia korzyści ich przywiedzenia do jakiegokolwiek kształtu najprostszego.

nej; gdyż, jeżeli nie zawiera ona domyślnie lub wyraźnie tyle stałych jak ta ostatnia wzięta pod jej kształtem najogólniejszym, uproszczenie nie będzie zawsze możebnym (\*). I tak, jakikolwiek kształt sześcienny podwójny może być przywiedzionym do kształtu  $X^3 + Y^3$ , gdyż ten ostatni, będąc równoważnym wyrażeniu

$$(lx + my)^3 + (lx + m'y)^3,$$

zawiera rzeczywiście cztery stałe, a tem samym, jest również

(\*) Nie jest wszelako prawdziwem aby odwrotnie jakikolwiek kształt zawierający liczbę odpowiednią stałych był koniecznie jednym z tych do których może się przywieść funkcya ogólna. Gdyż jeżeli szukamy, przez porównanie współczynników, zidentyfikowania jej z tą ostatnią, pomimo że liczba zrównań jest równą liczbie ilości do oznaczenia, może się zdarzyć że stałe figurują w nich w ten sposób aby zrównania nie mogły być wszystkie sprawdzonemi. I tak kształt

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = lx + my + n$$

zawiera pięć stałych, a przecież nie jest on jednym z tych do którego mógłby się przywieść kształt kwadratowy potrójny wzięty w całej swój ogólności. W rzeczy samej stałe figurują w nim w ten sposób że, pomimo że ich liczba jest więcej jak dostateczna dla zidentyfikowania współczynników względem  $x$ ,  $y$  i wyrazu niezależnego od zmiennych w kształcie jakikolwiek, nie mamy jednak żadnego sposobu do zidentyfikowania tak samo współczynników względem  $x^2$ ,  $xy$  i  $y^2$ .

Przykład więcęj ważny jest następujący :

$$x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4,$$

$z$ ,  $u$ ,  $v$  są funkcjami liniowymi. W przypadku jakiegokolwiek kształtu potrójnego, ten kształt zawiera domyślnie czternaście stałych niezależnych, i odtąd zdaje się być jednym z tych do których można przywieść kształt ogólny czwartego stopnia. P. CLEBSCH jednak wykazał że istnieje warunek który musi być spełnionym ażeby uproszczenie było możebnym i że ten warunek zależy na tem że pewien niezmiennik musi się sprowadzić do zera.

ogólnym jak

$$(a, b, c, d \sqrt{x, y})^3.$$

Podobnie, jakikolwiek kształt sześcienny potrójny zawiera, ogólnie, dziesięć stałych, lecz kształt

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + 6MXYZ$$

zawiera ich również dziesięć, ponieważ, niezależnie od stałej  $M$  pokazującej się wyraźnie, każda z ilości  $X, Y, Z$  zawiera domyślnie trzy inne. Ten ostatni może więc być wziętym jako kształt kanoniczny jakiegokolwiek kształtu sześciennego potrójnego, i, w rzeczy samej, postępy najważniejsze które zostały zrobionemi świeżo w teorii linii krzywych trzeciego stopnia, są należne użyciu tego wyrażenia prostego i dogodnego.

153. Funkcya kwadratowa  $(a, b, c \sqrt{x, y})^2$  może być przywiedziona niezliczonem mnóstwem sposobów do kształtu  $x^2 + y^2$ , ponieważ ten ostatni zawiera cztery stałe a pierwszy tylko trzy. Kształt kwadratowy potrójny, zawierający sześć stałych, może tak samo być przywiedzionym niezliczonem mnóstwem sposobów do kształtu  $x^2 + y^2 + z^2$ , który zawiera ich dziesięć, i ogólnie, jakikolwiek kształt kwadratowy o liczbie zmiennych jakiegokolwiek może być przywiedzionym niezliczonem mnóstwem sposobów do jakiegokolwiek summy kwadratów. Potrzeba jednak zauważyć że, pomimo że to uproszczenie do jakiegokolwiek summy kwadratów mogłoby się wykonać niezliczonem mnóstwem sposobów, a przecież liczba kwadratów dodatnich i odjemnych jest oznaczona. I tak, jakikolwiek kształt podwójny który może być przywiedziony do kształtu  $x^2 + y^2$ , odrzuciłby przez to samo kształt  $u^2 + v^2$ ; dwa wyrażenia  $x^2 + y^2, u^2 - v^2$  nie mogą być identycznymi, ponieważ czynniki jednego z nich są urojone, podczas gdy czynniki drugiego są rzeczywiste. Podobnie, dla kształtów potrójnych,

nie możemy znaleźć

$$x^2 + y^2 - z^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

gdyż otrzymałoby się t $\acute{e}$ m sam $\acute{e}$ m

$$x^2 + y^2 = z^2 + u^2 + v^2 + w^2,$$

lub, innemi s $\acute{l}$ owy,

$$x^2 + y^2 = z^2 + (lx + my + uz)^2 + (l'x + m'y + u'z)^2 \\ + (l''x + m''y + u''z)^2,$$

a je $\acute{z}$ eli zrobimy  $x = 0$  i  $y = 0$ , jedna strona tosamoci nie-  
w $\acute{a}$ tpliwie si $\acute{e}$  zniszczy, podczas gdy druga, sprowadzaj $\acute{a}$ c si $\acute{e}$   
istotnie do summy czterech kwadrat $\acute{o}$ w dodatnich, nie mo-  
g $\acute{l}$ aby z tego powodu w  $\acute{z}$ aden spos $\acute{o}$ b by $\acute{c}$  zerem; to $\acute{z}$  same  
rozumowanie stosuje si $\acute{e}$  og $\acute{o}$ lnie.

154. Poczniemy od pokazania  $\acute{z}$ e jakikolwiek kszt $\acute{a}$ łt sze-  
ścienny potr $\acute{o}$ jny mo $\acute{z}$ e zawsze, jak to ju $\acute{z}$  zapowiedzieli $\acute{s}$ my,  
sprowadzi $\acute{c}$  si $\acute{e}$  do jakiejkolwiek summy dw $\acute{o$ ch sześcian $\acute{o}$ w.  
To uproszczenie stanowi istotnie rozwi $\acute{a}$ zanie zr $\acute{o$ wnania trze-  
ciego stopnia, poniewa $\acute{z}$  kszt $\acute{a}$ łt przywiedziony do summy  
 $X^3 + Y^3$  rozł $\acute{o}$ ży si $\acute{e}$  bezpo $\acute{s}$ rednio na czynniki linijne. Je $\acute{z}$ eli  
kszt $\acute{a}$ łt dany

$$(a, b, c, d \overline{X} x, y)^3$$

staje si $\acute{e}$ , przez jakikolwiek przekszta $\acute{l}$ cenie,

$$(A, B, C, D \overline{X} X, Y)^3,$$

wyznacznik Hessowy (106)

$$(ax + by)(cx + dy) - (bx + cy)^2$$



będąc jakimkolwiek spółmiennikiem, winien, przez definicyą, przekształcić się na jakąkolwiek podobną funkcycą z  $A, B, C, D, X, Y$ , to jest że powinno się otrzymać

$$(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2 \\ = (AC - B^2)X^2 + (AD - BC)XY + (BD - C^2)Y^2.$$

Jeżeli, w formie przekształconej,  $B$  i  $C$  zniszczą się, spółmiennik sprowadzi się do  $ADXY$ , i widzimy bezpośrednio że się musi wziąć dla  $X$  i  $Y$  dwa czynniki linijne wyznacznika Hessowego;  $X$  i  $Y$  będąc znane, wystarczy zidentyfikować kształt dany z wyrażeniem

$$AX^3 + DY^3$$

dla oznaczenia  $A$  i  $D$ .

PRZYKŁAD. — Sprowadzić  $4x^3 + 9x^2 + 18x + 17$  do kształtu  $AX^3 + DY^3$ .

Wyznacznikiem Hessowym jest

$$(4x + 3)(6x + 17) - (3x + 6)^2,$$

albo

$$15x^2 + 50x + 15;$$

jego czynnikami linijnemi są  $x + 3, 3x + 1$ . Identyfikując kształt dany z wyrażeniem

$$A(x + 3)^3 + D(3x + 1)^3,$$

mamy

$$A + 27D = 4, \quad 27A + D = 17,$$

z kąd

$$728D = 91, \quad 728A = 455.$$

A i D są więc w stosunku 5 do 1, a zaś kształt sześcienny dany różni się tylko jakimkolwiek czynnikiem (tym czynnikiem jest 8) od

$$5(x+3)^3 + (3x+1)^3;$$

widoczna że pierwiastki będą dane za pomocą równania

$$3x+1 + (x+3)\sqrt[3]{5} = 0.$$

155. Oczywiście że jakikolwiek kształt sześcienny nie może zawsze być przywiezionym do kształtu  $AX^3 + DY^3$  przez jakiegokolwiek przekształcenie *rzeczywiste*, ponieważ to ostatnie ma jeden czynnik rzeczywisty a dwa czynniki urojone, a temu samemu, nie może się zidentyfikować z jakimkolwiek kształtem któregooby trzy czynniki były rzeczywistymi. Dyskryminant Hessowy

$$4(ac - b^2)(bd - c^2) - (ad - bc)^2$$

jest, ze znakiem przeciwnym, tenże sam jak dyskryminant kształtu sześciennego. Kiedy ten ostatni jest dodatnym, Hessowy przyjmuje dwa czynniki rzeczywiste, a kształt sześcienny jeden czynnik rzeczywisty i dwa urojone; kiedy jest on odjemnym, dwa czynniki Hessowego są urojonemi, a kształt sześcienny ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Kiedy dyskryminant sprowadzi się do zera, Hessowy i kształt samże mają dwa czynniki równe, i można sprawdzić wprost że Hessowym funkcji  $X^2 Y$  jest  $X^2$  (\*).

Dobrze jest zauważyć że jakikolwiek kształt nie może zawsze być przywiezionym do swego kształtu kanonicznego. Niepo-

---

(\*) Ogólnie, kiedy jakikolwiek kształt podwójny przyjmuje jeden czynnik kwadratowy, istnieje także jeden (tegoż rodzaju czynnik) w Hessowym, jak to można sprawdzić obliczając wprost czynnik z funkcji  $x^2 y$ .

dobieństwo uproszczenia wskazuje wtedy istnienie jakiegóś szczególnej własności w funkcji. I tak, jakikolwiek kształt sześcienny mający czynnik kwadratowy nie może być przywiedzionym do jakiegokolwiek summy z dwóch sześciaków, jego kształtem najprostszym jest  $x^2y$ .

156. Tak samo jak jakikolwiek kształt sześcienny może być przywiedzionym do jakiegokolwiek summy z dwóch sześciaków, wszelki kształt podwójny stopnia nieparzystego  $2n - 1$  może się sprowadzić do jakiegokolwiek summy z  $n$  potęg stopnia  $2n - 1$ , twierdzenie należne p. SYLWESTROWI. W rzeczy samej, liczbą stałych w jakimkolwiek kształcie podwójnym jest zawsze przewyższająca o jedność stopieni; w przypadku który nas zajmuje, tą liczbą jest  $2n$ , i mamy właśnie jak potrzeba też samą liczbę stałych biorąc  $n$  wyrazów kształtu  $(lx + my)^{2n-1}$ . Przekształcenie może się wykonać przez jakąkolwiek metodę będącą uogólnieniem metody numeru 154. Dla większej prostoty, zastosujemy ją do piątego stopnia, lecz jest ona ogólną. Kwestya sprowadza się do oznaczenia  $u, v, w$ , w ten sposób że

$$(a, b, c, d, e, f \chi x, y)^5 = u^5 + v^5 + w^5.$$

Dowiedzimy że, jeżeli się utworzy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} ax + by & bx + cy & cx + dy \\ bx + cy & cx + dy & dx + ey \\ cx + dy & dx + cy & ex + fy \end{vmatrix}$$

trzema czynnikami tej funkcji trzeciego stopnia będą  $u, v, w$ . Niech będą, w rzeczy samej,

$$u = lx + my, \quad v = l'x + m'y, \quad w = l''x + m''y;$$

różniczkując tożsamość

$$(a, b, c, d, e, f \mathcal{Q} x, y)^5 = u^5 + v^5 + w^5$$

cztery razy kolejno względem  $x$  i dzieląc przez 120, mamy

$$ax + by = l^4u + l^4v + l^4w;$$

różniczkując podobnie trzy razy względem  $x$  a raz tylko względem  $y$ , przyjdzie

$$bx + cy = l^3mu + l^3m'v + l^3m''w,$$

i tak dalej.

Wyznacznik poprzedzający może więc się napisać

$$\begin{vmatrix} l^4u + l^4v + l^4w & l^3mu + l^3m'v + l^3m''w & l^2m^2u + l^2m'^2v + l^2m''^2w \\ l^3mu + l^3m'v + l^3m''w & l^2m^2u + l^2m'^2v + l^2m''^2w & lm^3u + lm'^3v + lm''^3w \\ l^2m^2u + l^2m'^2v + l^2m''^2w & lm^3u + lm'^3v + lm''^3w & m^4u + m^4v + m^4w \end{vmatrix}.$$

Zauważmy teraz że współczynniki  $u$ , w każdej kolumnie, są proporcjonalnymi do  $l^2$ ,  $lm$ ,  $m^2$ ; przeto, jeżeli rozłożymy ten wyznacznik na wyznaczniki częściowe, jak w numerze 22, wszystkie wyznaczniki z tych wyznaczników które będą zawierały dwie kolumny gdzie wchodzi  $u$  znikną jako mające dwie kolumny identyczne; dzieć się będzie podobnie z wyznacznikami które będą zawierały dwie kolumny gdzie wchodzi  $v$  albo  $w$ . Wyznacznik sprowadzi się więc do wieloczynu  $uvw$ , pomnożonego przez jakikolwiek czynnik liczebny (\*).

Rozłożmy wyznacznik napisany na początku tego numeru na

(\*) Tym czynnikiem jest  $(lm' - l'm)^2(l''m'' - l''m'')^2(l''m - lm'')^2$ .



trzy czynniki

$$(x + \lambda y)(x + \mu y)(x + \nu y);$$

wiemy że rozwiązując jakiegokolwiek równanie trzeciego stopnia,  $u, v, w$  mogą się różnić od tych czynników tylko spółczynnikami liczebnymi; położy się

$$(a, b, c, d, e, f \overline{Q} x, y)^5 \\ = A(x + \lambda y)^5 + B(x + \mu y)^5 + C(x + \nu y)^5,$$

i oznaczy się  $A, B, C$  rozwiązując jeden z układów równań jaki się otrzymuje porównywając trzy spółczynniki wzięte w dwóch stronach tej tożsamości.

Wyznacznik z którego zrobiliśmy użytek jest jakimkolwiek spółzmiennikiem; nazwiemy go *spółzmiennikiem kanonicznym* kształtu danego.

157. Ten spółzmiennik może się napisać pod innym kształtem, być może nieco prostszym, to jest :

$$\begin{vmatrix} y^3 & -y^2x & yx^2 & -x^3 \\ a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \end{vmatrix}.$$

Bylibyśmy przywiedzeni do tego ostatniego kształtu jeżeli byśmy poszli drogą przedstawiającą się jak najnaturalniej starając się o wyznaczenie wprost sześciu ilości  $A, B, C, \lambda, \mu, \nu$ , za pomocą sześciu równań jakie dostarczy porównanie spółczynników w tożsamości numeru 156. Nie możemy poświęcić tu dosyć miejsca dla rozwinięcia rozwiązania pod tym kształ-

tem, i odsyłamy czytelnika do Pamiętnika P. SYLWESTRA (*Philosophical Magazine*, listop. 1851). Tosamość ostatniego wyznacznika z wyznacznikiem numeru poprzedzającego była dowiedziona przez P. CAYLEY w sposób następujący. Mamy, na mocy prawidła mnożenia wyznaczników (22),

$$\begin{vmatrix} y^3 & -y^2x & yx^2 & -x \\ a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ax + by & bx + cy & cx + dy \\ 0 & bx + cy & cx + dy & dx + ey \\ 0 & cx + dy & dx + ey & ex + fy \end{vmatrix};$$

dzieląc obie strony przez  $y^3$ , otrzymuje się tosamość żadaną.

158. Mamy jeszcze wymienić inną metodę dla znalezienia spółzmiennika kanonicznego. Niech będzie  $(A, B, C, D \mathcal{D} x, y)^3$  tym spółzmiennikiem, gdzie musi się oznaczyć  $A, B, C, D$ ; widzieliśmy (120) że symbol  $(A, B, C, D \left(\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx}\right)^3$  dostarczy także jakikolwiek spółzmiennik. Lecz, jeżeli zastosuje się to działanie do  $(x + \lambda y)^n$ ,  $x + \lambda y$  będąc jakimkolwiek czynnikiem z  $(A, B, C, D \mathcal{D} x, y)^3$ , wypadek sprowadzi się do zera, ponieważ jednym z czynników symbolu jest  $\frac{d}{dy} - \lambda \frac{d}{dx}$ . Więc, ponieważ kształt dany jest, przez założenie, summą trzech wyrazów takich jak  $(x + \lambda y)^5$ , wypadek jaki się otrzymuje stosując do niego to działanie będzie zerem. Mamy tym

sposobem

$$A(d, e, f\zeta x, y)^2 - B(c, d, e, \zeta x, y)^2 \\ + C(b, c, d\zeta x, y)^2 - D(a, b, c\zeta x, y)^2 = 0.$$

Równając odrębnie zeru współczynniki względem  $x^2, xy, y^2$ , przyjdzie

$$Ad - Bc + Cb - Da = 0,$$

$$Ae - Bd + Cc - Db = 0,$$

$$Af - Be + Cd - Dc = 0.$$

Przeto (28), A jest proporcjonalnym do wyznacznika jaki się otrzymuje znosząc kolumnę A, to jest do

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix};$$

podobnie, dla B, C, D; tak więc otrzymuje się spójniennik pod kształtem danym w numerze poprzedzającym.

159. Przejdźmy teraz do kształtów stopnia parzystego  $2n$ . Ponieważ kształt zawiera  $2n + 1$  wyrazów, jeżeli porównamy go do jakiegokolwiek summy z  $n$  potęg stopnia  $2n$ , znajdujemy jedno zrównanie więcej aniżeli mamy stałych do oznaczenia. Z drugiej strony, jeżeli przydamy potęgę  $2n^{ent}$  więcej, mamy jedną stałą za nadto, i kształt dany może być [przywiedzionym niezliczonym mnóstwem sposobów. Jest przecież łatwo oznaczyć warunek który musi być spełnionym aby kształt był przywiedlnym do jakiegokolwiek summy z  $n$  potęg stopnia  $2n$ . I tak,

warunki konieczne aby jakikolwiek kształt czwartego stopnia i jakikolwiek kształt szósteo były przywiedlnemi, pierwszy do summy z dwóch czwartych potęg, drugi do summy z trzech szóstych potęg, wyrażają się robiąc równemi zeru wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & f \\ d & e & f & g \end{vmatrix},$$

i tak dalej. W rzeczy saméj, w przypadku czwartego stopnia, elementami wyznacznika są pochodne czwartego kształtu, i, wyrażając je w funkcyi  $u$  i  $v$ , jak w numerze 156, łatwo jest dostrzedz że wyznacznik sprowadzi się do zera jeżeli kształt może być przywiedzionym do summy dwóch wyrazów  $u^4 + v^4$ . Podobnież dla innych przypadków. Wyznacznik rozwinięty dla przypadku czwartego stopnia jest niezmiennik już dany (121, PRZYKŁAD I).

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

160. Kiedy ten warunek nie jest spełnionym, kształt jest przywiedlnym do summy z  $n$  potęg, z jakimkolwiek wyrazem dodatkowym. I tak, kształtem kanonicznym jest, dla czwartego stopnia,  $u^4 + v^4 + 6\lambda u^2v^2$ . Poczniemy od tego ostatniego przypadku; metoda jakiej użyjemy nie jest najłatwiejszą w tym przypadku szczególnym, lecz jest ta która pokazuje najlepiej w jaki sposób uproszczenie musi się odbyć ogólnie. Niech więc będzie  $(A, B, C)(x, y)^2$  wieloczyn z  $u$  i  $v$  jaki staramy się oznaczyć, wykonajmy działanie

$$(A, B, C) \left( \frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx} \right)^2$$



po obu stronach tożsamości

$$(a, b, c, d, e \mathcal{Q} x, y)^1 = u^4 + v^4 + 6\lambda u^2 v^2.$$

Tak samo jak powyżej (158), działanie wykonane na  $u^4$  i  $v^4$  da wypadek równy zeru; na  $6\lambda u^2 v^2$ , to działanie prowadzi do  $12\lambda' uv$ ,  $\lambda'$  jest równym  $2(AC - B^2)\lambda$ . Równając współczynniki względem  $x^2$ ,  $xy$ ,  $y^2$  po wykonaniu działań, mamy trzy równania

$$Ac - 2Bb + Ca = \lambda'A,$$

$$Ad - 2Bc + Cb = \lambda'B,$$

$$Ae - 2Bd + Cc = \lambda'C.$$

Rugując A, B, C, ma się dla obliczenia  $\lambda'$ , wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a & b & c - \lambda' \\ b & c + \frac{1}{2}\lambda' & d \\ c - \lambda' & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

który rozwinięty, daje równanie trzeciego stopnia

$$\lambda'^3 - \lambda'(ae - 4bd + 3c^2)$$

$$- 2(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3) = 0 \quad (*),$$

którego współczynniki są niezmiennikami. Istnieje więc znaczna

(\*) Dyskryminant tego równania jest tenże sam jak dyskryminant kształtu czwartego stopnia.

różnica w przywiedzeniu kształtów podwójnych do ich kształtu kanonicznego, według tego jak stopień jest parzystym lub nieparzystym. W tym ostatnim przypadku, uproszczenie jest jedynym, i układ  $u, v, w, \dots$  nie może być oznaczony tylko jednym sposobem. Kiedy stopień jest parzystym, otrzymuje się ilukolwiek układów rozwiązań. I tak, w przypadku który nas zajmuje, jakkolwiek kształt czwartego stopnia może być przywiedzionym trzema sposobami do swego kształtu kanonicznego, a jeżeli weźmiemy za  $\lambda'$  jeden z pierwiastków trzeciego stopnia, podstawiając jego wartość w układ zrównań poprzedni, będziemy mogli oznaczyć A, B, C.

161. Jeżeli teraz przejdziemy do uproszczenia kształtu ogólnego  $(a_0, a_1, a_2, \dots)(x, y)^{2n}$ , kształt kanoniczny który zdaje się najnaturalniejszym jest  $u^{2n} + v^{2n} + w^{2n} + \dots + \lambda u^2 v^2 w^2 \dots$ , liczbą ilości  $u, v, w, \dots$  jest  $n$ . Lecz uproszczenie jest połączone z trudnościami które jeszcze nie zostały przezwyciężonymi tylko w przypadku gdy  $n = 2$  i  $n = 4$ . Ponieważ metoda poprzednia może być jeszcze zastosowaną jeżeli weźmiemy za kształt kanoniczny funkcją

$$u^{2n} + v^{2n} + \dots + \lambda u v w \dots,$$

w której  $uvw \dots$  jest wielocznym równym

$$(A_0, A_1, A_2, \dots)(x, y)^n,$$

V jest jakimkolwiek spółmiennikiem tej ostatniej funkcji takim, że, jeżeli się wykona na  $Vuvw \dots$  działanie

$$(A_0, A_1, \dots) \left( \frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx} \right)^n,$$

wypadek jest proporcjonalnym do wielocznym  $uvw \dots$ . Przypuśćmy na chwilę że znaleźliśmy jakąkolwiek funkcją V

spełniająca te warunki, postępując jak w numerze poprzedzającym, i wykonywając z symbolem wskazanym powyżej działanie na tożsamości jaką się znajduje równając kształt dany ze swym kształtem kanonicznym, mamy układ równań

$$A_0 a_n - n A_1 a_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2} A_2 a_{n+2} - \dots = \lambda A_0,$$

$$A_0 a_{n-1} - n A_1 a_n + \frac{n(n-1)}{2} A_2 a_{n+1} - \dots = \lambda A_1,$$

$$A_0 a_{n-2} - n A_1 a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} A_2 a_n - \dots = \lambda A_2,$$

.....

zkład, rugując  $A_0, A_1, A_2, \dots$ , wyciąga się wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_n - \lambda & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \\ a_{n-1} & a_n + \frac{1}{n} \lambda & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n - \frac{2}{n(n-1)} \lambda & \dots & a_{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \pm \lambda (*) \end{vmatrix}$$

(\*) Ten wyznacznik może jeszcze być otrzymanym sposobem następującym. Niech będą  $x', y'$  dwie zmienne przekształcające się przez toż same podstawienie jak  $x, y$ ; utwórzmy funkcją

$$\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy}\right)^n U + \lambda(xy' - yx')^n,$$

zmieniającą się przez jakiekolwiek podstawienie linijne na jakąkolwiek funkcją podobną (105 i 111); weźmy  $n + 1$  współczynników potęg  $x^n, x^{n-1}y, \dots$ , i wyrugujmy liniźnie  $n + 1$  ilości  $x^n, x^{n-1}y, \dots$ , otrzymamy wyznacznik szukany.

Znalazłszy  $\lambda$  równając ten wyznacznik zeru (zrównanie znakomite, którego wszystkie współczynniki są niezmiennikami), równania poprzednie pozwolą oznaczyć wartości  $A_0, A_1, \dots$  odpowiednie  $n + 1$  wartościom na  $\lambda$ .

162. Przy stosowaniu téj teoryi do przypadku jakiegokolwiek kształtu szóstego stopnia, kształtem kanonicznym jest

$$u^6 + v^6 + w^6 + Vuvw,$$

gdzie  $uvw$  będąc wieloczynem równym

$$(A_0, A_1, A_2, A_3 \mathcal{Q}x, y)^3,$$

$V$  jest przewoźnikiem dyskryminanta téj ostatniej funkcyi, której podaliśmy wyrażenie rozwinięte (122). Damy poznać wyborny przykład użycia kształtów kanonicznych pokazując że, dla kształtu sześciennego jakiegokolwiek, wypadek działania

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \left( \frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx} \right)^3,$$

wykonanego na wieloczynie kształtu samegoż przez przewoźnik jaki dopiero co wymieniliśmy, jest proporcjonalnym do kształtu pierwotnego. Gdyż dosyć dowieść to dla przypadku w którym kształt sześcienny jest przywiedziony do swego kształtu kanonicznego  $x^3 + y^3$ , a przewoźnik do  $x^3 - y^3$ , jak widzi się to robiąc  $b = c = 0$  a przytém  $a = d = 1$  w wyrażeniu daném (122). Wieloczynem z kształtu przez swój przewoźnik będzie  $x^6 - y^6$ , a, odbywając działanie z symbolem

$$\frac{d^3}{dy^3} - \frac{d^3}{dx^3},$$

otrzymuje się widocznie wypadek proporcjonalny do  $x^3 + y^3$ .



To twierdzenie będąc niezależnym od przekształceń liniowych, jest prawdziwie ogólnem jeżeli jest prawdziwem dla jakiegokolwiek kształtu szczególnego. Wziąwszy więc jak powyżej kształt kanoniczny, postępować będziemy jak w numerze poprzedzającym, i wyciągniemy  $\lambda$  ze równania

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 - \lambda \\ a_1 & a_2 & a_3 + \frac{1}{3}\lambda & a_4 \\ a_2 & a_3 - \frac{1}{3}\lambda & a_4 & a_5 \\ a_3 + \lambda & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = 0,$$

które, rozwinięte, zawiera tylko potęgi parzyste z nieznaną  $\lambda$ . Jeżeli przypuścimy wieloczyn  $uvw$  przywiedziony do swego kształtu kanonicznego  $x^3 + y^3$ , którego trzema czynnikami są

$$x + y, \quad x + wy, \quad x + w^2y,$$

$w$  będąc jakimkolwiek pierwiastkiem sześciennym z jednościami, widoczna, wedle tego co poprzedza, że kształt kanoniczny odpowiedni dla funkcji szóstego stopnia będzie

$$A(x + y)^6 + B(x + wy)^6 + C(x + w^2y)^6 + D(x^6 - y^6).$$

Można dowieść że, jeżeli  $u, v, w$  są czynnikami wyrażenia sześciennego, czynnikami przewoźnika, z których zrobimy użytek poniżej, są  $u - v, v - w, w - u$ , w ten sposób że kształt kanoniczny powyższy może się także napisać

$$u^6 + v^6 + w^6 + \lambda uvw(u - v)(v - w)(w - u).$$

163. W przypadku ósmego stopnia, kształtem kanonicznym

jest

$$u^8 + v^8 + w^8 + z^8 + \lambda u^2 v^2 w^2 z^2;$$

gdyż, jeżeli wykonamy działanie na  $u^2 v^2 w^2 z^2$  z jakimkolwiek symbolem utworzonym według metody numerów poprzedzających, wypadek będzie proporcjonalnym do  $uvwz$ .

Co do kształtów kanonicznych więcej podniesionych, przedstawimy na wzmiankowaniu kształtu kanonicznego otrzymanego z kształtu sześciennego potrójnego należnego p. HESSOWI

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz,$$

i kształtu kanonicznego jaki p. SYLWESTER dał dla kształtu sześciennego poczwórnego

$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + v^3.$$

164. Kiedy się przyjmuje, jak zrobiliśmy to (156, 163), dla kształtu kanonicznego jakiejkolwiek funkcji o  $n$  zmiennych, nową funkcją o  $n + 1$  zmiennych (te ostatnie są związane jakimkolwiek równaniem liniowym), można starać się dowiedzieć jaki kształt wezmą wtedy przeciwzmienniki, i w jaki sposób można wywieść spółzmienniki i przeciwzmienniki jedne z drugich przez różniczkowanie wzajemne (119) nie potrzebując przechodzić na nowo przez kształt ogólny o  $n$  zmiennych.

Przypuśćmy że mamy przeciwzmiennik jakiegokolwiek bądź kształtu potrójnego, możemy (114) uważać go jak jakikolwiek niezmiennik spólny tego kształtu i funkcji liniowej  $x\xi + y\eta + z\zeta$ . Jeżeli się wprowadzi w wyrażenie kształtu jakąkolwiek nową zmienną  $v$  przywiązaną do  $x, y, z$  związkiem identycznym

$$x + y + z + v = 0,$$

i gdy się napisze przez analogią (wnosząc o rzeczach nieznanych ze znanych a im pokrewnych) funkcją liniową ze zmienną  $\theta$  więcéj, ta się staje

$$x\xi + y\eta + z\zeta + v\theta;$$

albo, zastępując w niej  $v$  przez  $-(x + y + z)$ ,

$$x(\xi - \theta) + y(\eta - \theta) + z(\zeta - \theta).$$

Wyrażenie przeciwzmiennika o czterech literach  $\xi, \eta, \zeta, \theta$  wyciągnie się więc z wyrażenia pierwotnego o trzech literach, zastępując  $\xi, \eta, \zeta$  przez  $\xi - \theta, \eta - \theta, \zeta - \theta$ , i, pod tym kształtem, przeciwzmiennik będzie funkcją z różnic między temi czterema ilościami.

PRZYKŁAD. — Uważmy kształt kwadratowy potrójny

$$(a, b, c, f, g, h)(x, y, z);^2$$

położmy go pod kształtem  $ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2$ , który przychodzi, zastępując  $v$  przez  $-(x + y + z)$ , do  $(a + d, b + d, c + d, d, d, d)(x, y, z)^2$  i starajmy się wyszukać, pod tym nowym kształtem, czém się staje przeciwzmiennik  $(bc - f^2)\xi^2 + \dots$  (114). Według tego cośmy dopiero powiedzieli, mamy zastąpić w wyrażeniu  $(bc - f^2)\xi^2 + \dots$ ,  $a, b, c$ , przez  $a + d, b + d, c + d$ ;  $f, g, h$  przed  $d$ ; nakoniec  $\xi, \eta, \zeta$  przez  $\xi - \theta, \eta - \theta, \zeta - \theta$ , a po odbytém działaniu przyjdzie

$$\begin{aligned} & (bc + cd + bd)(\xi - \theta)^2 + (ca + cd + ad)(\eta - \theta)^2 \\ & + (ab + ad + bd)(\zeta - \theta)^2 - 2ad(\eta - \theta)(\zeta - \theta) \\ & - 2bd(\zeta - \theta)(\xi - \theta) - 2cd(\xi - \theta)(\eta - \theta), \end{aligned}$$

albo upraszczając

$$\begin{aligned} & bc(\xi - \theta)^2 + ca(\eta - \theta)^2 + ab(\zeta - \theta)^2 \\ & + cd(\xi - \eta)^2 + bd(\xi - \zeta)^2 + ad(\eta - \zeta)^2 \end{aligned}$$

albo, wreszcie pod kształtem skróconym,

$$\Sigma cd(\xi - \eta)^2.$$

165. Wiadomo że możemy zastąpić w przeciwzmiennikach,  $\xi, \eta, \zeta$  przez  $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$  dla wykonania działania na jakimkolwiek spółzmienniku; jeżeli ten ostatni jest wyrażony z czterema zmiennymi  $x, y, z, v$ , zmienna  $x$  wchodząc zarazem wyraźnie i domyślnie jako zawarta w ilości  $v$ , pochodną względem  $x$  jest  $\frac{d}{dx} + \frac{d}{dv} \frac{dv}{dx}$  albo, na mocy związku łączącego  $v$  do  $x, y, z$ ,  $\frac{d}{dx} - \frac{d}{dv}$ ; podobnie dla  $\frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$ . Przeciwzmiennik stanie się więc symbolem właściwym do wykonania działania na jakiegokolwiek funkcji o czterech literach, zastępując w nim  $\xi, \eta, \zeta$  przez  $\frac{d}{dx} - \frac{d}{dv}, \frac{d}{dy} - \frac{d}{dv}, \frac{d}{dz} - \frac{d}{dv}$ ; lecz niedawno widzieliśmy że zastępując  $\xi, \eta, \zeta$  przez  $\xi - \theta, \eta - \theta, \zeta - \theta$ , dawało się przeciwzmiennikowi kształt o czterech literach. Wystarczy więc zastąpić, w tym ostatnim kształcie,  $\xi, \eta, \zeta, \theta$  przez  $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}, \frac{d}{dv}$ ; mamy tym sposobem sposobność, gdy raz znajdziemy jakiegokolwiek bądź przeciwzmiennik o czterech literach, wywieść z niego inny spółzmiennik bez uciekania się niepotrzebnego do rachunków mozolnych jakieby wymagały powrotu do kształtu o trzech literach.

PRZYKŁAD. — Przeciwzmiennikiem kształtu potrójnego  $ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2$  jest  $\Sigma cd(\xi - \eta)^2$ ; jeżeli się zastąpi w nim  $\xi$  przez  $\frac{d}{dx}, \dots$ , i gdy się wykona działanie z symbolem  $\Sigma cd\left(\frac{d}{dx} - \frac{d}{dv}\right)^2$  na kształcie



samymże, przyjdzie, usunąwszy jakikolwiek czynnik liczebny,

$$bcd + abd + acd + abc.$$

Jest to właśnie, pod tym nowym kształtem, wyrażeniem dyskriminanta, jak to można sprawdzić bez trudności zastępując w ogólnej wartości téj ilości  $a, b, c$  przez  $a + d, b + d, c + d$ , a zaś  $f, g, h$  przez  $d$ .

Dowiedziemy podobnie że możemy zastąpić w jakimkolwiek spółmienniku  $x, y, z, v$  przez  $\frac{d}{d\xi}, \frac{d}{d\eta}, \frac{d}{d\zeta}, \frac{d}{d\theta}$  dla wykonania potem działania na jakimkolwiek przeciwnienniku; w rzeczy samej, widoczna że możemy naprzód zastąpić  $x, y, z$  przez  $\frac{d}{d\xi}, \frac{d}{d\eta}, \frac{d}{d\zeta}$ , a zaś  $v$  przez  $-\left(\frac{d}{d\xi} + \frac{d}{d\eta} + \frac{d}{d\zeta}\right)$ : lecz przeciwniennik o czterech literach wywodzi się z przeciwniennika o trzech literach zastępując  $\xi, \eta, \zeta$  przez  $\xi - \theta, \eta - \theta, \zeta - \theta$ , i pochodne względem  $\xi, \eta, \zeta$  są też same pod jednym i drugim z tych dwóch kształtów, podczas gdy pochodna pierwszego względem  $\theta$  jest równą summie wziętej ze znakiem — pochodnych drugiego względem  $\xi, \eta, \zeta$ .

Zobaczymy, w rozdziałach następnych, liczne zastosowania tego twierdzenia.

## ROZDZIAŁ XIV.

### UKŁADY CZYLI SYSTEMATA KSZTAŁTÓW.

166. Pozostają nam do zbadania niektóre własności układów kształtów. Poświęcamy temu niniejszy rozdział. Niezmiennik układu nazywa się kombinantem, jeżeli nie tylko linijne przeobrażenie zmiennych, ale nawet podstawienie za niektóre kształty ich linijnych funkcji, nie zmienia go wcale, a najwięcej stały czynnik wprowadza. Ztąd rugownik układu kształtów  $u, v, w$ , jest kombinantem; widoczna bowiem że wypadek podstawienia wspólnych pierwiastków z  $uw$ , czy to w  $u + \lambda v + \mu w$ , czy też w  $u$ , będzie ten sam, a dalej że  $u + \lambda v + \mu w, v, w$ , mieć muszą nie inny rugownik jak  $uvw$ . Nadto w równaniach różniczkowych, którym zadosyć czynią zwyczajne niezmienniki, kombinanty muszą widocznie zadosyć czynić równaniu

$$\frac{a'dl}{da} + \frac{b'dl}{db} + \frac{c'dl}{dc} + \dots = 0.$$

Ztąd wynika że dla dwóch kształtów czwartego stopnia kombinant jest funkcją wyznaczników  $(ab'), (ac'), (bd')$ , etc., dla trzech takichże kształtów, funkcją wyznaczników  $(ab'c'')$ , etc., a w każdym razie niknie to samościowo, jeżeli dwa kształty staną się równymi. Jeżeli  $\lambda u + \mu v, \lambda' u + \mu' v$ , podstawimy za  $u, v$ , to każdy z wyznaczników  $(ab')$  zostanie pomnożonym przez  $(\lambda\mu' - \lambda'\mu)$ , a więc kombinant pomnożonym przez potęgę  $\lambda\mu - \lambda'\mu'$ , równą rzędowi kombinanta w spółczynnikach kształtów. Stosuje się to do jakiegokolwiek liczby kształtów. Ztąd mo-

zna mieć w podobny sposób kombinantowe spółzienniki, które się nie zmieniają gdy zamiast niektórych kształtów weźmiemy ich linijne funkcy. I tak w Jakobiowy (69),

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3 \\ V_1, & V_2, & V_3 \\ W_1, & W_2, & W_3 \end{vmatrix},$$

podstawmy  $lU + mV + nW$ , za  $U$ ,  $l'U + m'V + n'W$ , za  $V$ , etc. Wedle własności wyznaczników, iloczyn wyznaczników ( $lm'n$ ) stanie się  $(U_1V_2W_3)$ . A więc spółczynniki kombinantowego spółziennika są funkcyami wyznaczników ( $ab'$ ), ( $ac'$ ), ( $ab'c'$ ), etc.

167. Jeżeli  $U = (a, b, c, \sqrt{x}, y)^n$ ,  $V = (a', b', c', \sqrt{x}, y)^n$ , są kształtami podwójnemi tego samego stopnia, to  $U + kV$ , albo  $(a + ka', b + kb', \dots, \sqrt{x}, y)^n$ , w razie nadawania rozmaitych wartości ilości  $k$ , stanowiąc będą układ kształtów tworzących *inwolucyę* z  $U, V$ . W ogóle układ ma  $2(n - 1)$  kształtów, z których każdy posiada kwadrat za spółczynnik. Gdyż dyskryminant kształtu stopnia  $n$ , ma spółczynniki rzędu  $2(n - 1)$ . Jeżeli teraz podstawimy  $a + ka'$  za  $a$ ,  $b + kb'$  za  $b$ , etc., to  $k$  mieć będzie widocznie  $2(n - 1)$  wartości czyniących dyskryminant zerem.

Przyppuszczenie  $y = 1$  we wszystkich kształtach tych, oznacza  $n$  punktów na osi  $x$ . Dowiedliśmy że w  $2(n - 1)$  przypadkach, dwa z  $n$  punktów oznaczonych przez  $U + kV$  w jedno przypadają miejsce; czyli, innemi słowy, znajduje się w inwolucyi  $2(n - 1)$  *punktów podwójnych*.

Jeżeli  $U + kV$  ma czynnik kwadratowy  $x - \alpha$ , to wiemy że  $\alpha$  zadosyć czyni dwom ze zrównań otrzymanych przez różniczkowanie, to jest  $U_1 + kV_1 = 0$ ,  $U_2 + kV_2 = 0$ , a więc zadosyć czyni zrównaniu otrzymanemu przez wyrugowanie  $k$  między



niemi. To równanie  $U_1V_2 - U_2V_1 = 0$  stopnia  $2(m-1)$  jest Jakobiowym dla  $U, V$ ; równając go zeru otrzymamy  $2(n-1)$  podwójnych punktów inwelucyi, danych przez  $U, V$ .

168. Czynniki wspólne  $u$  i  $v$ , zamienia się na czynniki kwadratowe w ich Jakobiowym. Zauważmy że jeżeli  $nu = xu_1 + yu_2$ ,  $nv = xv_1 + yv_2$ , to uczyniwszy  $u_1v_2 - u_2v_1 = J$ , przyjdzie  $n(uv_2 - vu_2) = xJ$ ,  $n(uv_1 - vu_1) = -yJ$ . Różniczkując te równania, 1° względem  $x$ , 2° względem  $y$ , otrzymamy

$$n(uv_{22} - vu_{22}) = xJ_2, \quad n(uv_{11} - vu_{11}) = -yJ_1$$

Wynika stąd że każda wartość  $\alpha$  na  $x$ , czyniąca  $u$  i  $v$  zerami, sprowadzi do zeru nie tylko  $J$  lecz i różniczki  $J_1, J_2$ , a więc że  $x - \alpha$  musi wchodzić do  $J$  jako czynnik kwadratowy. Da się to daleko prościej dowieść. Dajmy  $u = \epsilon\varphi$ ,  $v = \epsilon\psi$ , a nadto  $\epsilon = lx + my$ , więc

$$u_1 = l\varphi + \epsilon\varphi_1, \quad u_2 = m\varphi + \epsilon\varphi_2, \quad v_1 = l\psi + \epsilon\psi_1, \quad v_2 = m\psi + \epsilon\psi_2;$$

$$u_1v_2 - u_2v_1 = \epsilon^2(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) + \epsilon l(\varphi\psi_2 - \varphi_2\psi) + \epsilon m(\varphi_1\psi - \varphi\psi_1),$$

z kąd

$$(n-1)(u_1v_2 - u_2v_1) = (n-1)\epsilon^2(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) + \epsilon(lx + my)(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) = n\epsilon^2(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1).$$

Wynika z tego co powiedziano, że dyskryminant ilości  $u$  i  $v$ , zawiera jako czynnik ich wyznacznik wypadkowy (résultant)  $R$ , gdyż jeżeli  $R$  nienie, Jakobiowy musi mieć dwa pierwiastki równe. Weźmy dwa kształty drugiego stopnia,

$$(a, u, c\mathcal{Q}x, y)^2, \quad (a', h', c'\mathcal{Q}x, y)^2$$



ich Jakobiowy  $(ab')x^2 + (ac')xy + (bc')y^2$ ,

ma za dyskryminant  $(ab')(bc') - 4(ac')^2$ ;

a ten jest rugownikiem danych kształtów kwadratowych. W przypadku kształtów stopni wyższych, dyskryminant Jakobiego zawierać będzie inny czynnik, którego naturę poniżej wykażemy.

169. Widzieliśmy, że można nadać dla  $k$  taką wartość, aby  $u + kv$  zawierało czynnik kwadratowy. Lecz jeżeli  $k$  ma być takim aby wprowadzało do  $u + kv$  czynnik trzeciego stopnia, to jego wartość musi być zależną od współczynników  $u$  i  $v$ . Warunek zależności tej będzie stopnia  $3(n - 2)$  względem danych i drugich współczynników.

Jeżeli  $(x - \alpha)^3$  jest czynnikiem  $u + kv + lw$ , to  $x - \alpha$  będzie czynnikiem trzech drugich różniczkowych współczynników, czyli sprawdzi zróównania

$$u_{11} + kv_{11} + lw_{11} = 0, \quad u_{12} + kv_{12} + lw_{12} = 0, \quad u_{22} + kv_{22} + lw_{22} = 0,$$

a po wyrugowaniu  $k$  i  $l$ , toż  $x - \alpha$  sprawdzi zróównanie

$$\begin{vmatrix} u_{11} & v_{11} & w_{11} \\ u_{12} & v_{12} & w_{12} \\ u_{22} & v_{22} & w_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Widoczna że zróównanie to daje punkta potrójne układu  $u + kv + lw$ , a że jest stopnia  $3(n - 2)$ , tyleż więc będzie tych punktów. Liczbę ich inaczej znaleźć możemy: dajmy warunek wedle którego  $u + kv$  daje punkt potrójny jest rzędu  $p$  względem współczynników  $a$ . Podstawivszy  $a + la''$  za  $a$  w każdym współczynniku  $u$ , otrzymamy zróównanie stopnia  $p$  względem  $l$ , któremu zadosyć czynić będą  $p$  wartości

na  $l$ ; innymi słowy,  $p$  kształtów układu  $u + kv + lw$  posiadają punkta potrójne. Wynika ztąd że  $p = 3(n - 2)$ , i że warunek którym się zajmujemy jest rzędu  $3(n - 2)$  względem współczynników  $v$ .

Warunek ten jest kombinantem, gdyż jeżeli  $k$  może przybrać wartość  $u + kv$  mającą czynnik trzeciego stopnia, może też przybrać wartość taką aby  $(u + av) + kv$  także zawierało czynnik.

170. Jeżeli  $u + kv$  ma  $(x - \alpha)^3$  za czynnik, to czynnikiem Jakobiowego ilości  $u$  i  $v$  będzie  $(x - \alpha)^2$ . Gdyż różniczki  $u_1 + kv_1$ ,  $u_2 + kv_2$ , zawierają widocznie ten kwadrat za czynnik, a więc Jakobiowy da się wyrazić przez  $(u_1 + kv_1)v_2 - (u_2 + kv_2)v_1 = 0$ . Jeżeli  $S = 0$  wyraża warunek niezbędny aby  $u = kv$  posiadało czynnik sześcienny,  $S$  będzie czynnikiem w dryskryminancie Jakobiowego, gdyż dla  $S = 0$ , Jakobiowy ma dwa pierwiastki równe, a jego dyskryminant staje się równy zeru.

Jeżeli  $R$  jest wyznacznikiem wypadkowym, to dyskryminant Jakobiowego, tylko o czynnik liczebny różnić się może od  $RS$ . Jeżeli bowiem Jakobiowy jest stopnia  $2(n - 1)$ , jego dyskryminant będzie stopnia  $2\{2(n - 1) - 1\}$  w współczynnikach swych, które będą pierwszego rzędu względem współczynników  $u$  i  $v$ . Lecz każdy współczynnik  $R$  jest rzędu  $n$ , współczynnik  $S$  rzędu  $2(n - 1)$ , dyskryminant ma  $R$  i  $S$  za swe czynniki, a więc za rząd

$$n + 3(n - 2) = 2\{2(n - 1) - 1\}.$$

171. Dyskryminant ilości  $u + kv$  uważanej jako funkcya  $k$ , posiada czynnik kwadratowy, jeżeli w skład  $u$  i  $v$  wchodzi jaki czynnik spólny. Jakoż (88), dyskryminant ten jest postaci  $(a + ka')^2 + (b + kb')^2$ ; lecz spólny czynnik  $u$  i  $v$ , pozwala

je przeobrazić w ten sposób aby czynnikiem tym było  $y$ , co wymaga  $a = 0$ ,  $a' = 0$ . Zład czynnikiem kwadratowym dyskryminanta będzie  $(b + kb')^2$ ; a w tym razie dyskryminant pozostaje niezmiennym mimo liniowych przeobrażeń jego zmian nych.

A zatem jeżeli dyskryminant ilości  $u + kv$ , uważać będziemy za funkcją  $k$ , to czynnikiem tego  $k$  będzie  $R$ , czyli wyznacznik wypadkowy  $u$  i  $v$ . Dowiedliśmy bowiem że w razie  $R = 0$ , funkcya  $k$  przyjmuje dwa pierwiastki równe, a więc jej dyskryminanty znikają. I tak w kształcie drugiego stopnia  $ac - b^2$  zamieniając  $a$  na  $a + ka'$ , etc., przyjdzie :

$$(ac - b^2) + k(ac' + ca' - 2bb') + k^2(a'c' - b'^2),$$

która to ilość ma za dyskryminant

$$(ac - b^2)(a'c' - b'^2) - 4(ac' + ca' - 2bb')^2.$$

W tej to jedynie postaci powinien być pisanym według D<sup>ra</sup> Boole, wyznacznik wypadkowy kształtu drugiego stopnia  $(a, b, c \mathcal{Q}x, y)^2$ ,  $(a', b', c' \mathcal{Q}x, y)^2$ , gdyż składowe części tej postaci są niezmiennikami w działaniach bardzo dogodnemi. W kształtach wyższych stopni dyskryminant dyskryminanta ma  $R$  za czynnik (inne czynniki już znikły).

172. Jeżeli mamy czynnik trzeciego stopnia lub dwa oddzielne czynniki stopnia drugiego, dyskryminant ilości  $u + kv$  będzie podzielny przez  $k^2$ . Bo jeżeli  $u$  ma  $\Delta$  za dyskryminant,  $u + kv$  będzie miało za takowy

$$\Delta + k\left(a' \frac{d\Delta}{da} + b' \frac{d\Delta}{db} + \dots\right) + \dots$$

Jeżeli  $u$  posiada czynnik drugiego stopnia,  $\Delta$  zniknie, i albo



trzy pierwiastki  $\alpha, \beta, \gamma$  będą równe, albo istnieje będą dwie pary pierwiastków równych (94); więc znikną różniczki  $\Delta, \frac{d\Delta}{da}, \dots$ , a zatem cały współczynnik mnożący  $k$  w dyskryminancie ilości  $u + kv$ , a  $k^2$  będzie czynnikiem dyskryminanta. Widoczna że jeżeli  $u + av$  ma czynnik sześcienny lub dwa kwadratowe, jego dyskryminant będzie podzielny przez  $(k - a)^2$  gdyż  $u + kv = u + av + (k - a)v$ . Dajmy że  $S = 0$  i  $T = 0$ , wyrażają warunki podzielności  $u + kv$ , pierwszy przez czynnik sześcienny, drugi przez dwa czynniki kwadratowe, tak  $T$  jak  $S$  będą czynnikiem dyskryminanta ilości  $u + kv$  ze względu na  $k$ , gdyż  $S = 0$  lub  $T = 0$  są oznaką podzielności dyskryminanta przez czynnik kwadratowy. Dowiedliśmy (171) że  $R$  jest czynnikiem dyskryminanta, który (według P. Cayley) nie może być innym jak  $RS^3T^2$ .

W ogóle nie istnieje inny przypadek w którymby dyskryminant  $u + kv$ , posiadał czynnik kwadratowy. Znaleźliśmy że w rasie trzeciego i czwartego stopnia  $S$  i  $T$  stają się  $S^3$  i  $T^2$ , a to daje się w ogóle stosować ze względu na rzędy. Gdyż dyskryminant  $u + kv$  rzędu  $2(n - 1)$  co do  $k$ , ma czynniki rzędu  $0, 1, \dots, 2(n - 1)$  względem współczynników kształtów danych; współczynniki dyskryminanta będą przeto względem tychże rzędu  $2(n - 1)(2n - 3)$ . Wiemy zaś że  $R$  jest rzędu  $n$ ,  $S$  rzędu  $3(n - 2)$ , a  $T$ , jak dowiedzimy poniżej, rzędu  $2(n - 2)(n - 3)$ , i

$$2(n - 1)(2n - 3) = n + 9(n - 2) + 4(n - 2)(n - 3).$$

173. Wiemy (166) że każdy kombinant  $u, v$ , przybiera czynnik będący potęgą  $(\lambda\mu' - \lambda'\mu)$ , w razie gdy  $u, v$ , zamienimy na  $\lambda u + \mu v, \lambda' u + \mu' v$ . Dowiedzimy obecnie że rugownik tę samą własność posiada. Zauważmy że jeżeli w pewnej liczbie kształtów danych, jeden jest iloczynem kilku innych, na przed-



kład :  $u, v, w, w', w''$ , ich wyznacznik wypadkowy jest iloczynem wyznaczników wypadkowych  $(uvw)$ ,  $(uvw')$ ,  $(uvw'')$ . Wprowadźmy weń wspólne pierwiastki  $u, v$ , i pomnóżmy otrzymane wypadki, nowy iloczyn będzie równym iloczynowi wynikłemu z pomnożenia  $w, w', w''$ , po podstawieniu w nie rzeczonych pierwiastków. Nadto wyznacznik wypadkowy  $u, v, kw$ , jest takimże wyznacznikiem  $u, v, v$ , rozmnożonym przez  $k^{mn}$ , gdyż wchodzi weń współczynnik  $w$  w stopniu  $mn$ . Niech  $R(u, v)$  będzie wyznacznikiem wypadkowym  $u, v$ , ilości stopnia  $n$ ,  $\mu^m R(\lambda u + \mu v, \lambda' u + \mu' v) = R(\lambda \mu^m u + \mu \mu^m v, \lambda' u + \mu' v)$  (\*)

$$= R \{ (\lambda \mu^m - \lambda' \mu) u, \lambda' u + \mu' v \} = (\lambda \mu^m - \lambda' \mu)^n R(u, \lambda' u + \mu' v)$$

$$= (\lambda \mu^m - \lambda' \mu)^n \mu^m R(u, v);$$

zkaż

$$R(\lambda u + \mu v, \lambda' u + \mu' v) = (\lambda \mu^m - \lambda' \mu)^n R(u, v).$$

W tenże sam sposób dowiedziemy że  $u, v, w$ , ma za rugownik, rugownik  $\lambda u + \mu v + \nu w$ ,  $\lambda' u + \mu' v + \nu' w$ ,  $\lambda'' u + \mu'' v + \nu'' w$  wzięte razy  $(\lambda \mu \nu)^{n^2}$ .

174. Dajmy że  $U, V$ , są funkcjami rzędu  $m$  i  $n$  względem  $u$  i  $v$ , te zaś funkcjami rzędu  $p$  względem  $x, y$ , i że wypadkiem wyrugowania  $u, v$ , pomiędzy  $U, V$ , jest  $D$ ; rugując  $x, y$ , między  $U, V$ , otrzymamy  $D^p$  pomnożone przez wyznacznik wypadkowy  $u, v$ , wyniesiony do potęgi  $mn$ . Gdyż  $U$  da się rozłożyć na czynniki,  $u - \alpha v, u - \beta v, \dots$ ,  $V$  zaś na  $v - \alpha' v, u - \beta' v, \dots$ , (173), wyznacznik wypadkowy  $U, V$ , jest iloczynem wszystkich pojedynczych wyznaczników wypadkowych

(\*)  $u + kv, v$ , i taż ilość po odjęciu od niej  $u, v$ , wzięte razy  $\mu$ , mają ten sam wyznacznik wypadkowy (166).

$u - \alpha v, u - \alpha'v, \dots$  Jednym z nich jest  $(\alpha - \alpha')^p R(u, v)$ , a ich liczba równa się  $mn$ , jeżeli je zatem pomnożymy, otrzymamy  $R(u, v)$  do potęgi  $mn$ , pomnożone przez  $(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha''), \dots$ , wyniesione do potęgi  $p$ , jest to zaś rugownik  $U, V$ , względem  $u, v$ .

175. Szukajmy dyskryminanta  $U$  względem  $x, y$ , gdy to  $U$  jest funkcją  $u, v$ . Dyskryminant wieloczynu dwóch kształtów podwójnych  $u, v$ , równa się (96) iloczynowi dyskryminantów ilości  $u$  i  $v$  rozmnożonemu przez ich wyznacznik wypadkowy wyniesiony do kwadratu.

Jeżeli  $U = (u - \alpha v)(u - \beta v) \dots$ , dyskryminant  $U$  równa się iloczynowi dyskryminantów  $u - \alpha v, u - \beta v, \dots$ , rozmnożonemu przez kwadrat pojedynczych wyznaczników wypadkowych  $u - \alpha v, u - \beta v, \dots$  Lecz, jak powiedziano, niektóre z nich są  $(\alpha - \beta)^p R(u, v)$ . Jeżeli  $U$  uważane za funkcją  $u, v$ , jest stopnia  $m$ , będzie  $\frac{m}{2}(m-1)$  pojedynczych wyznaczników wypadkowych, kwadrat ich iloczynu stanie się :

$$(\alpha - \beta)^{2p} (\alpha - \gamma)^{2p} \dots \times R^{m(m-1)}(u, v);$$

lecz  $(\alpha - \beta)^2 (\alpha - \gamma)^2 \dots$  jest dyskryminantem  $U$  uważanego za funkcją  $u, v$ . Oznaczmy go przez  $\Delta$ , a wiemy że iloczyn kwadratów pojedynczych wyznaczników wypadkowych będzie  $\Delta^p R^{m(m-1)}$ . Weźmiemy teraz iloczyn dyskryminantów  $u - \alpha v, u - \beta v, \dots$ , który jest wypadkiem wyrugowania  $\alpha$  między dyskryminantem  $u - \alpha v$  (będącym kształtem rzędu  $2(p-1)$  względem  $\alpha$ ), a kształtem rzędu  $m$  wynikającym z podstawienia  $u - \alpha v$  w  $U$ . Ten to iloczyn p. Sylwester w inny przedstawił sposób : niech  $a_0, b_0$ , będą współczynnikami  $x^p$  w  $u, v$ , wyznacznik wypadkowy  $u - \alpha v, u - \alpha'v$ , będzie  $(a_0 - \alpha b_0)$  razy wziętym  $u - \alpha v$  dyskryminantem (89). Lecz

$$\begin{aligned} R(u, v) R(u - \alpha v, u_1 - \alpha v_1) &= R(u - \alpha v, u_1 v - \alpha v v_1) \\ &= R(u - \alpha v, u_1 v - u v_1). \end{aligned}$$

Wedle 168,  $J = u_1v_2 - u_2v_1$  daje  $yJ = p(u, v - uv_1)$ ,  $a_0 - ab_0 = R(u - av, y)$ , a dyskryminant  $u - av$  różni się tylko o czynnik liczebny od wyznacznika wypadkowego  $(u - av, J)$  podzielonego przez  $R(u, v)$ . Przeto iloczyn wszystkich dyskryminantów będzie wyznacznikiem wypadkowym  $J$  przez iloczyn  $u - av, u - bv, \dots$ , albo wyznacznikiem wypadkowym  $U, J$ , podzielonym przez  $R(u, v)$  do potęgi  $m^m$ . Przychodzimy do wypadku p. Sylwestra (*Comptes Rendus*, tom. LVIII, str. 1078), że dyskryminant  $U$  względem  $xy$  jest  $\Delta PR(u, v)^{m^2-2m} R(U, J)$ , wyrażenie dające się skrócić z powodu że  $R(U, J)$  ma  $R(u, v)^m$  za czynnik

176. Rzecz o potrójnych i poczwórnych kształtach, jako w geometrii ważna, do dzieł geometrycznych, odesłaną być powinna. Wskażemy jednak w tem miejscu co w przypadku tych kształtów odpowiada dopiero co wyłożonym teoryom (\*).

Niech  $u$  i  $v$  będą dwoma potrójnymi kształtami, i dajmy że napisaliśmy dyskryminant ilości  $u + kv$ ; ten uważany jako funkcyja ma czynnik kwadratowy; najprzód, jeżeli krzywe przedstawione przez  $u$  i  $v$  są do siebie stycznymi. Gdyż widzieliśmy (97) że zrównanie  $az^n + nbz^{n-1}x + ncz^{n-1}y + \dots = 0$ , przedstawiające pewną krzywą ma dyskryminant formy  $a\theta + b^2\varphi + bc\psi + c^2\chi$ ; a więc dyskryminant ilości  $u + kv$  przybierze postać  $(a + ka')\theta + (b + kb')\varphi + \dots$ . Biorąc za

---

(\*) Pierwsza edycja wyższej algebry p. Salmona, tłumaczona na język francuzki przez p. Bazin (*Leçons d'algebre supérieure par G. Salmon, professeur au Collège de la Trinité à Dublin. Traduit de l'anglais par M. Bazin, ingénieur des Ponts-et-Chaussées. Paris, 1866, chez Gauthier Villars*), traktuje w dwóch ostatnich lekcjach o kształtach potrójnych i poczwórnych. Druga, angielska edycja tegoż dzieła (*Lessons introductory to the modern higher algebra, by the rev George Salmon. Dublin, 1866*), przedmiot ten do geometrii odsyła. Jakoż autor traktował go obszernie w dziele: *Geometry of three dimensions*. W niniejszem tłumaczeniu poszedłem za drugim, to jest angielskiem wydaniem.

(Przyp. tłumacza.)



punkt  $xy$  spólny  $u$  i  $v$ ,  $a$  i  $a'$  znikną; a jeżeli przyjmiemy  $y$ , za spólną styczną,  $b$  i  $b'$  znikną także, pozostanie dyskryminant formy  $(c + kc')^2x$ , w którym widocznie występuje czynnik drugiego stopnia.

177. Dyskryminant ma powtórnie wyznacznik drugiego stopnia, jeżeli  $u$  posiada punkt zwrotu, albo punkt podwójny. Dyskryminant  $\Delta$  potrójnego kształtu zamyka w sobie warunek nadający dla  $u_1, u_2, u_3$ , jeden spólny układ wartości; lecz w obchodzącym nas przypadku, dwa takie układy (równe lub różne) istnieć muszą, a więc zniknie (85) nie tylko  $\Delta$ , lecz jego różniczki w odniesieniu do współczynników  $u$ . Dyskryminant ilości  $u + kv$  ma formę  $\Delta + k\left(\frac{a'd\Delta}{da} + \frac{b'd\Delta}{db} + \dots\right) + \dots$  i da się w tym razie podzielić przez  $k^2$ ; a nadto (172) jest podzielny przez  $(k-a)^2$ , jeżeli krzywa  $u + av$  ma punkt podwójny lub zwrotu. Dajmy że  $R=0$  wyraża warunek styczności  $u$  i  $v$ ;  $S=0$ , warunek aby pomiędzy krzywami danymi przez  $u + kv$ , znajdowała się jedna mająca punkt zwrotu; wreszcie  $T=0$ , warunek aby między temiż była jedna o punkcie potrójnym; wiemy zaś że  $R, S, T$ , są czynnikami dyskryminanta dyskryminanta ilości  $u + kv$  uważanej jako czynnik  $k$ , a którym jest  $RS^3T^2$ .

Można tego dowieść biorąc pod uwagę rząd dyskryminanta (172), który dla kształtu potrójnego  $u + kv$  jest rzędu  $3(n-1)^2$  w  $k$ , a którego wyrazy skrajne mają współczynniki tego samego rzędu jak  $u$  i  $v$ . Tego dyskryminanta utworzymy dyskryminant uważany jako funkcja  $k$ ; przykład wyrazów tego ostatniego dostarczy iloczyn skrajnych wyniesiony do potęgi  $3(n-1)^2 - 1$ . Ztąd rząd dyskryminanta tego w współczynnikach  $u$  i  $v$  jest  $3(n-1)^2(3n^2 - 6n + 2)$ . Będzie zaś dowiedzionem że  $R$  jest rzędu  $3n(n-1)$ ,  $S$  rzędu  $12(n-1)(n-2)$ ,  $T$  rzędu  $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2 - 3n - 11)$ .



$$\text{Lecz : } 3(n-1)^2(3n^2 - 6n + 2)$$

$$= 3n(n-1) + 36(n-1)(n-2) + 3(n-1)(n-2)(3n^2 - 3n - 11).$$

178. Podamy tu jedynie dowód na rząd  $R$ , którą to ilość jako wyrażającą styczność krzywych danych przez  $u$  i  $v$ , nazwał P. Cayley *niezmiennikiem styczności*. P. Salmon podał, w r. 1836, (*Quarterly Journal*, t. 1, str. 339) następujący sposób obliczania go. Znajdźmy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \alpha & \epsilon & \gamma \end{vmatrix},$$

a otrzymamy miejsce punktów, których polarne względem  $u$  i  $v$ , przecinają się wedle linii dowolnej  $\alpha x + \epsilon y + \gamma z$ . Jeżeli między temi punktami znajduje się jeden spólny obu krzywym, ich polarne będą stycznymi w tym punkcie; a każda z nich może mieć punkt spólny z  $\alpha x + \epsilon y + \gamma z$ , tylko w przypuszczeniu przechodzenia przez punkt spólny dwom krzywym, lub gdy obie styczne na jedną prostą się zamienią. Wyrugujmy zmienne między  $u$ ,  $v$ , i wyznacznikiem powyżej napisanym (rzędu  $m + n - 2$  w swych zmiennych, a rzędu pierwszego w współczynnikach każdej z krzywych), a wypadek będzie  $R$  rozmnożone przez wypadek wyrugowania zmiennych między  $u$ ,  $v$  i  $\alpha x + \epsilon y + \gamma z$ . Całkowity wyznacznik wypadkowy jest rzędu  $mn$  w  $\alpha$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$ , a zawiera współczynniki  $u$  w rządzie  $n(m + n - 2) + mn = n(2m + n - 2)$ , współczynniki zaś  $v$  w rządzie  $m(2n + m - 2)$ . Wyznacznik wypadkowy  $u$ ,  $v$ ,  $\alpha x + \epsilon y + \gamma z$ , zawiera  $\alpha$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$  w stopniu  $mn$ , współczynniki  $u$  w stopniu  $n$ , a współczynniki  $v$  w stopniu  $m$ . Więc współczynniki  $u$  i  $v$  wchodzą do  $R$ , pierwsze w stopniu  $n(2m + n - 3)$ , drugie w stopniu  $m(2n + m - 3)$ . W razie  $m = n$  wpadamy na znaną ilość  $3n(n - 1)$ .

Wypadek ten inaczej otrzymać można : rząd niezmiennika styczności w spółczynnikach  $v$ , jest widocznie równym liczbie krzywych kształtu  $u + \lambda v + \mu w$  mogących być stycznymi do  $u$ , gdy  $w$  i  $v$  są krzywymi jednego rzędu. Lecz punkta styczności,  $u$  są widocznie punktami Jakobiowego ilości  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , który jako będący krzywą rzędu  $m + 2n - 3$  da  $m(m + 2n - 3)$  punktów styczności z  $u$ .

179. Twierdzenie o dyskryminancie iloczynu dwóch kształtów podwójnych (91), do potrójnych zastosować się nie da ; gdyż ich dyskryminant zniesie się tosamociowo. W rzeczy samej, dyskryminant jest warunkiem aby jedna z krzywych miała punkt podwójny, krzywa zaś wynika z dwóch innych, ma punkta podwójne w miejscach przecięć krzywych składowych. A pomijając geometryczne względy, dyskryminant  $uv$ , jest warunkiem pozwalającym znaleźć zmienne sprawdzające zarazem różniczki :  $uv_1 + vu_1$ ,  $uv_2 + vu_2$ ,... Odpowiadają zadaniu temu wszelkie wartości zadosyć czyniące spółcześnie  $u$  i  $v$ , a znajdziemy je zawsze, jeżeli tylko więcej niżeli dwie zmienne wchodzą w skład zrównań.

Nadto twierdzenie paragrafu 91 da się bezpośrednio zastosować do niezmienników styczności. Warunek, aby linia  $u$  była styczną do  $vw$  zostanie spełnionym, jeżeli  $u$  dotyka tak  $w$  jak  $v$ , lub przechodzi przez ich przecięcie ; gdyż to przecięcie oznacza punkt podwójny, a linia przez takowy przechodząca uważa się podwójnie za styczną. Jeżeli więc  $T(u, v)$  jest niezmiennikiem styczności dla  $u$ ,  $v$ , przyjdzie :

$$T(u, vw) = T(u, v)T(v, w) \{ R(u, v, w) \}^2,$$

gdzie  $R(u, v, w)$  jest wyznacznikiem wypadkowym  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Ten wypadek da się sprawdzić przez porównanie rządów  $w$  jakich doń wchodzą spółczynniki  $u$ ,  $v$  lub  $w$ , i tak co do  $u$

mamy :

$$(n+p)(n+p+2m-3) = n(n+2m-3) + p(p+2m-3) + 2np.$$

180. To cośmy powiedzieli (178) stosuje się do układu trzech poczwórnych, lub  $k-1$  kształtów po  $k$  branych. Niezmiennik styczności trzech poczwórnych kształtów oznacza warunek, że dwa z pomiędzy  $mnp$  punktów powierzchni przez te kształty danych, przypadają razem, czyli że płaszczyzny styczne w nich do powierzchni danych mają wspólną linię przecięcia. Przychodzimy do tego dzieląc (178) wyznacznik wypadkowy  $u, v, w$ , oraz

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \end{vmatrix},$$

przez wyznacznik wypadkowy  $u, v, w, \alpha x + \beta y + \dots$  Tak postępując przekonywamy się że wyznacznik styczności zawiera współczynnik  $u$  w stopniu  $np(2m+n+p-4)$ , wypadek potwierdzony uwagą że takąż jest liczba punktów w których Jakobowy  $u, u', v, w$ , spotyka przecięcie  $vw$ . Podobnie niezmiennik styczności  $k-1$  kształtów ( $u, v, w, \dots$ ) po  $k$  branych, zawiera współczynniki  $n$  w stopniu równym iloczynowi  $n, p, \dots$  rozmnożonemu przez  $2m+n+p+..-k$ .

181. Dla uzupełnienia przedmiotu podamy teorią niezmiennika styczności dwóch poczwórnych kształtów, do czego użyć musimy prawd, które nieco później udowodnimy. Dowodzenie poprzednio użyte przekonywa, że rząd współczynników  $U$  w niezmienniku styczności  $U, W$ , jest równy liczbie kształtów układu  $U + \lambda V$  dających punkta styczności z  $W$ , przypuściwszy że  $U$  i  $V$  są jedynego rzędu. Lecz porównywając współczynniki płaszczyzn



stycznych do  $U + \lambda V$  i  $W$ , spostrzeżemy że punkt styczności musi zadosyć czynić układowi równoważnemu dwom warunkom

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3, & U_4 \\ V_1, & V_2, & V_3, & V_4 \\ W_1, & W_2, & W_3, & W_4 \end{vmatrix} = 0.$$

W rozdziale o rzędzie układów zrównań, zobaczymy że układ nasz jest rzędu

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu,$$

gdzie  $\lambda, \mu, \nu$ , są rzędami  $U_1, V_1, W_1$ , a temi są w naszym przypadku  $m - 1, m - 1, n - 1$ . Rząd układu jest więc

$$n^2 + 2mn + 3m^2 - 4n - 8m + 6,$$

a rząd niezmiennika styczności równa się tej cyfrze wziętej razy  $n$ ; wypadek ostatni kombinując z  $W = 0$ , które sprawdzić się musi, otrzymamy punkt styczności.

182. Po tych szczegółach, przedstawienie ogólnej teorii obchodzących nas obecnie niezmienników nie ulega żadnej trudności. P. Sylwester zowie je osculants, wyraz równoważny użytemu, *niezmienniki styczności*. Weźmy  $i$  kształtów  $U, V, W, \dots$  o  $k$  zmiennych; oskulant zawiera warunek aby układ wartości który sprawdza  $U, V, W, \dots$ , i kształty styczności  $xU'_1 + yU'_2 + \dots$  były związane tosamociowo przez

$$\lambda(xU'_1 + \dots) + \mu(xV'_1 + \dots) + \nu(xW'_1 + \dots) + \dots = 0,$$

innemi słowy, warunek że zrównania  $U = 0, V = 0, \dots$ , i układ,

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3, & \dots \\ V_1, & V_2, & V_3, & \dots \\ W_1, & W_2, & W_3, & \dots \end{vmatrix} = 0,$$



mogą być spólcześnie sprawdzonemi. Ostatni układ jako mający  $k$  kolumn, oraz  $i$  linii, odpowiada  $k - i + 1$  równaniom, a więc porównany z liczbą  $i$  równań danych jest równoważnym  $k + 1$  równaniom o  $k$  zmiennych. W istocie jednak nie odpowiada on jak  $k$  równaniom, gdyż jeżeli napiszemy  $U, V, \dots$  w postaci  $xU_1 + yU_2 + \dots = 0, xV_1 + yV_2 + \dots = 0, \text{ etc.}$ , to wartość zadosyć czyniąca wyznacznikowi i kształtom danym  $U, V, W, \dots$ , prócz jednego, i temu ostatniemu zadosyć czynić musi. Układ równoważny  $k$  równaniom o  $k$  zmiennych, ulega pewnemu warunkowi w razie sprawdzenia; rząd tego warunku w współczynnikach  $U$ , znajdziemy jak w paragrafie 181. Za  $U$  napiszemy  $U + \lambda u$ , a przekonamy się ile z pomiędzy wartości zmiennych zadosyć czynią  $i - 1$  równaniom  $V, W, \dots$ , i układowi

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3, & \dots \\ u_1, & u_2, & u_3, & \dots \\ V_1, & V_2, & V_3, & \dots \\ W_1, & W_2, & W_3, & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

równoważnemu  $k - 1$  równaniom. Rząd  $i - 1$  równań  $V, W, \dots$ , jest iloczynem ich stopni,  $n, p, \dots$ , a rząd oskulanta w współczynnikach  $U$  jest iloczynem tej liczby przez rząd układu wyznaczników, do znalezienia którego podamy pravidło w rozdziale traktującym o rzędzie układów równań.

Dla jednego kształtu danego, oskulant jest dyskryminantem, dla  $k$  kształtów o  $k$  zmiennych jest on wyznacznikiem wypadkowym. Twierdzenie paragrafu 91 stosuje się do nich; dajmy że szukamy oskulanta  $k - 1$  kształtów o  $k$  zmiennych, i że ostatni z tych kształtów równa się iloczynowi dwóch kształtów  $U, V$ ; widoczna że oskulant całego układu będzie iloczynem oskulanta  $U$  i  $k - 2$  pozostałych kształtów, oskulanta  $V$  i tychże  $k - 2$  kształtów, oraz kwadratu wyznacznika wypadkowego wszystkich kształtów danych.

Należałoby zająć się formą dyskryminanta Jakobiowego ilości  $\lambda U + \mu V + \nu W$ , w razie gdy  $U, V, W$ , są kształtami potrójnymi, oraz formą dyskryminanta ze względu na  $\lambda, \mu, \nu$ . Przypadek gdy  $U, V, W$ , są poczwórnymi w rozdziale XVI traktowanym będzie; w innych razach ostatni dyskryminant znosi się to samościowo.

$$\Delta = \begin{vmatrix} U & V & W \\ V & W & U \\ W & U & V \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} U & V & W \\ V & W & U \\ W & U & V \end{vmatrix}$$

## ROZDZIAŁ XV.

### ZASTOSOWANIA DO KSZTAŁTÓW PODWÓJNYCH.

183. Wyłożywszy główne punkta teoryi ogólnej, objaśnimy je w rozdziale niniejszym najprostszymi przykładami niezmienników i spółmienników rozmaitych zrównań. Metoda paragrafu 101 pokazuje że kształt podwójny posiada w ogóle  $n - 2$  niezależnych niezmienników; gdyż tamże dowiedzionem zostało że w tym razie mamy  $n - 3$  niezmienników bezwzględnych, a ponieważ (101) jeden taki niezmiennik wywodzi się z dwóch zwyczajnych, więc ilość tych ostatnich jest  $n - 2$ . Jeżeli  $S$  i  $T$  są dwoma niezmiennikami tego samego stopnia, to  $S + aT$ , gdzie  $a$  jest czynnikiem liczebnym, będzie także niezmiennikiem, którego jednakże uważać nie możemy za nowy, niezależny od  $S$  i  $T$  niezmiennik. Podobnie względem  $S$  drugiego, i  $T$  trzeciego stopnia,  $S^3 + aT^3$  w tymże samym znajduje się przypadku. Lecz niezmiennik nie dający się wymiernie wyrazić w funkcyi  $S$  i  $T$ , na przykład  $R$  dany przez zrównanie  $R^2 = S^3 + aT^3$ , jest różnym od  $S$  i  $T$ , lecz zależnym od nich niezmiennikiem. Tak że gdy  $n - 2$  wyraża liczbę niezmienników niezależnych kształtu danego, liczba niezmienników odrębnych (przeszedłszy 62 stopień) będzie nieograniczoną.

Weźmy układ złożony z dwóch kształtów stopni  $m$  i  $n$ ; postępując wedle paragrafu 101, przyjdziemy do  $m + n + 2$  zrównań które sprawdzonemi być powinny, a że tylko cztery



stałe ulegają naszemu rozporządzeniu, układ przeto posiada  $m + n - 2$  bezwzględnych, a  $m + n - 1$  zwyczajnych niezależnych niezmienników czyli że układ z dwóch kształtów złożony, posiada trzy niezmienniki niezależne więcej, aniżeli ich posiadały kształty pojedynczo wzięte, mające  $m - 2$  i  $n - 2$  niezmienniki takie. Gdyby jednak jeden z kształtów był pierwszego lub drugiego stopnia, toby tylko dwa nowe niezmienniki niezależne przybyć mogły; a to dla tego że w tym razie nie  $n - 2$  lecz  $n - 1$  wyraża ich ilość, która jest 0 dla kształtu liniowego, a 1 dla kształtu drugiego stopnia. Przeto liczba innych niezmienników będzie o 1 mniejszą od ilości wskazanej prawidłem ogólnym.

Niezmienniki pewnego kształtu i układu liniowego  $x\xi + y\eta + \dots$  (114), mogą być uważane za przeciwniezmienniki kształtu danego, a te znowu w kształtach podwójnych zamieniają się na spółzmienniki przez zamianę  $\xi$  i  $\eta$  na  $\eta$  i  $-x$ . Widzieliśmy że kształty podwójne prócz niezmienników dwa tylko niezależne spółzmienniki posiadają; a że kształt sam może być uważany za jeden ze swoich spółzmienników, więc wszystkie spółzmienniki dadzą się wyrazić w funkcji kształtu, jego niezmienników i jednego spółzmiennika; wyrażenie to nie zawsze jest wymiernem.

Przystępujemy do wymienienia niezmienników i spółzmienników zasadniczych dla najprostszycych kształtów.

184. Kształt drugiego stopnia. Podaliśmy już główne punkta odnoszące się do teoryi kształtu

$$(a, b, c \overline{Q} x, y)^2;$$

ma on jeden tylko niezależny niezmiennik (102), będący zarazem dyskriminantem  $ac - b^2$ . Każdy inny niezmiennik musi być potęgą  $(ac - b^2)^m$ . Widzieliśmy także (137) że według prawa wzajemności p. Hermita, tylko kształty stopni parzy-



stych mają niezmienniki drugiego rzędu których formułą symboliczną jest  $\Delta^2$ . Uczyniwszy  $y = 1$  w kształcie danym, będzie on oznaczał dwa punkta na osi  $x$ , które razem przypadną gdy dyskryminant stanie się  $= 0$  (167).

W podobny sposób układ dwóch kształtów

$$(a, b, c \mathcal{Q} x, y)^2, \quad (a', b', c' \mathcal{Q} x, y)^2,$$

ma za niezmiennik  $\Delta^2 = ac' + a'c - 2bb'$ . Jeżeli każdy z danych kształtów wzięty osobno oznacza dwa punkta na osi  $x$ , to zniknięcie niezmiennika będzie poznaką że mamy cztery punkta w stosunku harmonicznym, i to takie że dwa odpowiadające jednemu kształtowi, są sprzężeniami dwóch innych odpowiadających kształtowi drugiemu. Dowiedliśmy również że spółzmiennik  $\Delta^2$  (czyli wyznacznik Jakobiowy układu) przedstawia ogniska układu *inwolucyjnego* danego przez cztery punkta (167).

Rugownik układu może być napisany pod jedną z postaci:

$$(ac' - c'a)^2 + 4(ba' - b'a)(bc' - b'c),$$

albo

$$(ac' + ca' - 2bb') - 4(ac - b^2)(a'c' - b'^2).$$

W razie trzech kształtów drugiego stopnia

$$(a, b, c \mathcal{Q} x, y)^2, \quad (a', b', c' \mathcal{Q} x, y)^2, \quad (a'', b'', c'' \mathcal{Q} x, y)^2,$$

srowadzenie do 0 wyznacznika

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix}$$

wyraża warunek że trzy pary punktów danych przez trzy kształty są w inwolucyi (\*).

185. KSZTAŁT TRZECIEGO STOPNIA. Weźmy

$$(a, b, c, d \overline{Q} x, y)^3;$$

jedyny niezmiennik tego kształtu jest jego dyskryminantem :

$$a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd.$$

Hessowy  $\overline{12}^2$  jest :

$$(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2,$$

można go napisać jako wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ b, & c, & d \\ y^2, & -xy, & x^2 \end{vmatrix},$$

który ma jednaki z kształtem samym dyskryminant. Jeżeli kształt trzeciego stopnia ma  $\alpha, \beta, \gamma$  za pierwiastki, natenczas jego Hessowy będzie (117) :

$$\Sigma(x - \alpha)^2(\beta - \gamma)^2.$$

Spółziennik trzeciego stopnia, czyli przewoźnik dyskrymi-

(\*) Wszystkie szczegóły geometryczne w tym paragrafie przytoczone, wyjęte są z dzieła p. Salmona o stożkowych (*The conics*), str. 291-296.

nanta (122) jest :

$$(a^2d - 3abc + 2b^3, \quad abd + b^2c - 2ac^2, \quad 2b^2d - acd - bc^2, \\ - 3bcd - ad^2 - 2c^3) \chi(x, y)^3.$$

Możemy go przedstawić geometrycznie w sposób następujący : weźmy trzy punkta oznaczone przez kształt dany, i znajdziemy punkt harmoniczny odpowiedni każdemu z nich w odniesieniu do dwóch pozostałych, a otrzymamy trzy nowe punkta będące przedstawieniem geometrycznym w mowie będącego spółzmiennika. Bo jeżeli kształt dany zamieni się na  $xy(x+y)$ , to przypuszczenie  $a = d = 0$ , i  $b = c = 1$  pokaże że  $x - y$  będzie czynnikiem spółzmiennika. Lecz  $x + y$ ,  $x - y$  są sprzężonemi harmonicznemi względem  $x$  i  $y$ , a oznaczywszy przez  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  odległości tych czterech punktów od początku, mierzone na osi  $x$ , przekonamy się że wszelki między niemi, harmoniczny stosunek, wyrażający się przez stosunek iloczynów  $(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)$  i  $(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)$  nie będzie naruszony przez przeobrażenie linijne zależące na podstawieniu  $\frac{\lambda\alpha + \mu}{\lambda'\alpha + \mu'}$ , za  $\alpha$ .

A jeżeli dowiedzimy że dla jednego przypadku istnieją stosunki których przeobrażenia linijne bynajmniej nie zmieniają, to tem samem dowiedzimy że ta własność jest ogólną. Inne czynniki przewoźnika ilości  $xy(x+y)$  są  $x + 2y$ ,  $2x + y$ , tak że nasz wypadek może być napisany symetrycznie jako przewoźnik ilości  $xyz$  (w której  $x, y, z$  połączone są związkiem liniowym  $x + y + z = 0$ ); przewoźnik ten jest

$$(x - y)(y - z)(z - x).$$

Uwagi powyższe prowadzą nas do wyrażenia czynników spółzmiennika w funkcji pierwiastków kształtu danego; bo dawszy że  $\delta$  przedstawia odległość od początku punktu sprzężonego



z  $\alpha$  względem  $\xi$  i  $\gamma$ , wyciągnijmy wartość na  $\delta$  ze zrównania

$$\frac{2}{(\alpha - \delta)} = \frac{1}{(\alpha - \xi)} + \frac{1}{(\alpha - \gamma)}$$

przyjdzie

$$\delta = \frac{\alpha\xi + \alpha\gamma - 2\xi\gamma}{2\alpha - \xi - \gamma};$$

zkład otrzymamy na wartość spółzmiennik

$$\{(2\alpha - \xi - \gamma)x + (2\xi\gamma - \alpha\xi - \alpha\gamma)y\}$$

$$\{(2\xi - \alpha - \gamma)x + (2\gamma\alpha - \xi\alpha - \gamma\xi)y\}$$

$$\{(2\gamma - \alpha - \xi)x + (2\alpha\xi - \gamma\alpha - \xi\gamma)y\}.$$

Wartość tę sprawdzić można skutecznie mnożeniem i podstawieniem w funkcji wyrazów zrównania.

186. Usiłować teraz będziemy znaleźć związek między poprzednimi spółzmiennikami i niezmiennikami za pomocą kanonicznych form które dla  $U = ax^3 + dy^3$  są: dyskryminant  $D = a^2d^2$ , Hessowy  $H = adxy$ , i spółzmiennik trzeciego stopnia  $J = ad(ax^3 - dy^3)$ . Dyskryminant ilości  $J$  jest trzecią potęgą dyskryminanta ilości  $U$ , gdyż dla kształtu kanonicznego staje się on  $a^6d^6$ . W paragrafie 183 przewidywaliśmy że  $J$  nie jest niezależnem od  $U$  i  $H$ , za pomocą zaś kanonicznego kształtu łatwo przyjść możemy do zrównania otrzymanego przez p. Cayley, a wykazującego związek między nimi zachodzący:

$$J^2 - DU^2 = -4H^3.$$

Pan Cayley użył tego zrównania do rozwiązania  $U$  przez rozłożenie na linijne czynniki. Bo gdy  $J^2 - DU^2$  jest sześcią-



niem zupełnym, wnosić możemy że czynniki  $J \pm U\sqrt{D}$  takimiż sześciianami będą; i w rzeczy samej, są one dla formy kanonicznej  $2a^2dx^2$  i  $2ad^2y^3$ .

Ponieważ zaś  $x\sqrt[3]{a} - y\sqrt[3]{d}$  jest jednym z czynników formy kanonicznej, widoczna przeto że czynnik ogólny jest proporcjonalny do

$$(U\sqrt{D} + J)^{\frac{1}{3}} + (U\sqrt{D} - J)^{\frac{1}{3}},$$

funkeya stająca się zerem dla  $U = \alpha$ .

PRZYKŁAD. — Powróćmy do zrównania paragrafu 125

$$U = 4x^3 + 9x^2 + 18x + 17;$$

mamy

$$D = 1600, \quad J = 110x^3 - 90x^2y - 630xy^2 - 670y^3;$$

zkađ

$$U\sqrt{D} + J = 10(3x + y)^3, \quad U\sqrt{D} - J = 50(x + 3y)^3,$$

a czynniki są

$$3x + y + (x + 3y)\sqrt[3]{5}.$$

187. UKŁAD ZŁOŻONY Z KSZTAŁTU DRUGIEGO I TRZECIEGO STOPNIA.

Dajmy

$$(a, b, c, d\sqrt{x, y})^3, \quad (A, B, C\sqrt{x, y})^2.$$

Najprostszy niezmiennik otrzymuje się kombinując kształt drugiego stopnia z Hessowym kształtu trzeciego stopnia, i obliczając pośredni niezmiennik dwóch kształtów kwadratowych; otrzymamy

$$J = A(bd - c^2) - B(ad - bc) + C(ac - b^2).$$

Wyznacznik wypadkowy obliczony wedle paragrafów 44 i 67 będzie

$$\begin{aligned} R = & a^2C^3 - 6abBC^2 + 6acC(2B^2 - AC) + ad(6ABC - 8B^3) \\ & + 9b^2AC^2 - 18bcABC + 6bdA(2B^2 - AC) \\ & + 9c^2A^2C - 6cdBA^2 + d^2A^3. \end{aligned}$$

J i R uważać możemy za zasadnicze niezmienniki układu; dla łatwiejszego porównania z niemi innych spółzmienników przypuszczamy  $A = C = 0$ , czyli bierzemy za  $x$  i  $y$  dwa czynniki kształtu drugiego stopnia. W tym razie mamy

$$J = (bc - ad)B, \quad R = -8adb^3.$$

Wyznacznik Jakobiego jest

$$\begin{aligned} (Ab - Ba)x^3 + (2Ac - Bb - Ca)x^2y + (Ad + Bc - 2Cb)xy^2 \\ + (Bd - Cc)y^3. \end{aligned}$$

Prócz tego istnieją spółzmienniki linijne; wprowadźmy symbole różniczkowe w stopień drugi i wykonajmy na stopniu trzecim działania wskazane, a otrzymamy

$$L_1 = (aC - 2bB + cA)x + (bC - 2cB + dA)y;$$

działając podobnie przez  $L_1$  na kształt stopnia drugiego przyjdzie

$$\begin{aligned} L_2 = \{ aBC - b(2B^2 + AC) + 3cAB - dA^2 \} x \\ + \{ aC^2 - 3bBC + c(AC + 2B^2) - dAB \} y. \end{aligned}$$

Wartości na  $L_1$  i  $L_2$  wyrażone w funkcji  $\alpha, \epsilon, \gamma$ , pierwiastków równania trzeciego stopnia, oraz  $\alpha', \epsilon'$ , pierwiastków równania drugiego stopnia, zamieniają się na

$$\Sigma(\alpha' - \alpha)(\beta' - \beta)(x - \gamma), \quad \Sigma(\alpha' - \alpha)(\beta' - \beta)(\alpha' - \gamma)(x - \beta').$$

Wyznacznik wypadkowy ilości  $L_1$  i  $L_2$  w razie  $A = C = 0$  jest proporcjonalny do  $B^3bc$ . Oznaczywszy przez  $\Delta$  dyskryminant  $AC - B^2$  kształtu drugiego stopnia, przekonamy się że wyznacznik wypadkowy ilości  $L_1$  i  $L_2$  wyrażony w funkcji niezmienników zasadniczych jest  $R + 8\Delta$ .

Otrzymamy inne liniowe spółziemienniki, zastępując w  $L_1$  i  $L_2$  spółczynniki kształtu trzeciego stopnia przez spółczynniki odpowiednio spółziemiennika tego kształtu (122).

Rugując między  $L_1$  i kształtem drugiego stopnia, lub między  $L_1$  i  $L_2$ , do jednego dochodzimy wypadku; lecz rugując między  $L_1$  i kształtem trzeciego stopnia, nowy otrzymujemy niezmiennik, po uczynieniu  $A = C = 0$ , a będzie on  $B^3(ac^3 - db^3)$ , ilość nie dająca się przywieść do żadnej z form poprzednich. Kwadrat jednak z tej ilości łatwo się do nich sprowadzić daje. Albowiem dyskryminant kształtu trzeciego stopnia jest

$$D = a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 18abcd;$$

kwadrat zaś z naszego niezmiennika pomnożony przez 16.

$$B^6(D - a^2d^2 + 3b^2c^2 + 18abcd)^2 - 64B^6adb^3c^3,$$

uczyniwszy w nim  $Bbc = I + Bad$ ,  $B^3ad = \frac{1}{8}R$ ,  $B^2 = -\Delta$ , otrzymamy wyrażenie w funkcji niezmienników zasadniczych.

188. UKŁAD DWÓCH SZEŚCIANÓW. Układ taki  $(a, b, c, d\sqrt{x}, y)^3$ ,  $(a', b', c', d'\sqrt{x}, y)^3$ , ma za najprostszy niezmiennik  $(ad') - 3(bc')$ ,



(120, przykład 2), który jest kombinantem, i który uważać należy jako niezmiennik P. Właściwości układu najlepiej się rozpoznają gdy go przywiedziemy do formy  $Au^3 + Bv^3 + Cw^3$ ,  $A'u^3 + B'v^3 + C'w^3$ , która wieloma sposobami otrzymać się daje, gdyż każdy z układów trzeciego stopnia zawiera cztery stałe, a układ cały zawiera ich ośm; kształt przeto dopiero napisany zawiera sześć stałych wyraźnych, wreszcie  $u, v, w$ , po jednej domyślnej, gdyż  $u$  zastępuje  $x + \lambda y + \dots$ . Drugi kształt równoważny jest kształtowi z dziewięcioma stałami, a więc ma jedną stałą więcej aniżeli potrzeba do zamienienia go na kształt ogólny.

Trzy zaś podwójne kształty pierwszego stopnia, połączone są związkiem tosamociowym kształtu  $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ . Stałe  $\alpha, \beta, \gamma$ , tak zostały oznaczone aby dla  $Au^3 + Bv^3 + Cw^3$ ,  $A'u^3 + B'v^3 + C'w^3$ , było  $u + v + w = 0$ .

Podstawiając za  $w$  jego wartość, i pisząc sześciiany, przyjdzie

$$(A, -C, -C, -C, B - C\sqrt[3]{u, v}^3, (A' - C', -C', -C', B' - C'\sqrt[3]{u, v}^3);$$

niezmiennik P układu będzie  $(AB') + (BC') + (CA')$ .

Dla znalezienia wyznacznika wypadkowego układu, rozwiążemy równania  $Au^3 + Bv^3 + Cw^3 = 0$ ,  $A'u^3 + B'v^3 + C'w^3 = 0$ , co nam da  $u^3 = (BC')$ ,  $v^3 = (CA')$ ,  $w^3 = (AB')$ ; i podstawimy w tosamoc  $u + v + w = 0$ , zkaąd

$$(AB')^{\frac{1}{3}} + (BC')^{\frac{1}{3}} + (CA')^{\frac{1}{3}} = 0,$$

$$\{(AB') + (BC') + (CA')\}^3 = 27(AB')(BC')(CA').$$

\*Oznaczmy przez U, V, dwa kształty trzeciego stopnia; wie-



my (169), że istnieje niezmiennik trzeciego rzędu we względzie współczynników obu kształtów trzeciego stopnia, wyrażający warunek możności oznaczenia  $\lambda$  w taki sposób aby  $U + \lambda V$  było sześcianem zupełnym. Oznaczmy przez  $Q$  ten niezmiennik, będzie on równym iloczynowi  $(AB')(BC')(CA')$ , i będzie miał współczynniki tego co ten iloczyn stopnia. Bo jeżeli jaki czynnik  $(AB')$  zniknie w iloczynie, to  $AV - A'U$ , zamieni się widocznie na sześcian zupełny  $(AC')w^3$ , a wyznacznik wypadkowy przybierze formę  $P^3 - 27Q$ .

189. Dla bezpośredniego znalezienia niezmiennika  $Q$  kształtów  $(a, b, c, d\sqrt{x}, y)^3, (a', b', c', d'\sqrt{x}, y)^3$ , postąpimy jak następuje. Jeżeli  $U + \lambda V$  ma być doskonałym sześcianem, to spółcześnie zadosyć czynimy trzem drugim różniczkom; będzie więc

$$ax + by + \lambda(a'x + b'y) = 0,$$

$$bx + cy + \lambda(b'x + c'y) = 0,$$

$$cx + dy + \lambda(c'x + d'y) = 0.$$

Rozwiążmy liniźnie te równania względem  $x, y, \lambda x, \lambda y$ , i zróbmy  $x \times \lambda y = y \times \lambda x$ , otrzymany na żądany warunek

$$\begin{vmatrix} a, & b, & a' \\ b, & c, & b' \\ c, & d, & c' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a', & b', & b \\ b', & c', & c \\ c', & d', & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & b' \\ b, & c, & c' \\ c, & d, & d' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a', & b', & a \\ b', & c', & b \\ c', & d', & c \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned} \text{albo : } & \{ b(bc') + c(ca') + d(ab') \} \times \{ a'(cd') + b'(db') + c'(bc') \} \\ & = \{ b'(bc') + c'(ca') + d'(ab') \} \times \{ a(cd') + b(db') + c(bc') \}, \\ & = (b'e)^3 + (ca')^2(cd') + (db')^2(ab') - 3(ab')(bc')(cd') \\ & \quad - (ad')(bc')^2 - (ad')(ab')(cd'). \end{aligned}$$

Nadajmy na  $a, b, \dots$ , wartości  $A, -C, -C, \dots$  a otrzymamy (188),  $-(AB')(BC')(CA')$ ; rozmnożywszy przez 27 wypadek ten, i dodawszy doń  $\{(ad') - 3(bc')\}^3$ , otrzymamy wyznacznik wypadkowy w formie

$$(ad')^3 - 9(ad')^2(bc') + 27(ca')^2(cd') + 27(db')^2(ab') - 81(ab')(bc')(cd') - 27(ad')(ab')(cd'),$$

wypadek zgodny z wypadkiem paragrafu 61, rozebrawszy go na trzecie potęgi napisane bez dwumianowych współczynników.

190. Otrzymaliśmy niezmiennik  $P$  układu  $Ax^3 + By^3 + Cz^3$ ,  $A'x^3 + B'y^3 + C'z^3$ , przywodząc równania do dwóch zmiennych i obliczając wartość  $ad' - 3(bc')$ , (188). Dla podania ogólnej zasady, innym sposobem obliczenie to wykonamy.

Wiemy że podstawiając  $\frac{d}{dy} - \frac{d}{dx}$ , za  $x$  i  $y$  w jakikolwiek kształt podwójny, otrzymamy niezmienny a dogodny w działaniach symbol. Jeżeli ta zmiana uczyniona jest w funkcji złożonej z wyrazów zależnych od  $x, y, z$ , a gdzie  $z = -(x+y)$ , to  $z$  stanie się  $\frac{d}{dx} - \frac{d}{dy}$ ; jeżeli zaś działania wykonywać będziemy na funkcji podobnież wyrażonej, to ponieważ różniczka ze względu na  $x$  jest,  $\frac{d}{dx} + \frac{d}{dz} \frac{dz}{dx}$ , albo  $\frac{d}{dx} - \frac{d}{dz}$  (w skutek związku łączącego  $x, y, z$ ), prosto we wszelkim spótzmienniku zastąpić możemy

$$x \text{ przez } \frac{d}{dy} - \frac{d}{dz}, \quad y \text{ przez } \frac{d}{dz} - \frac{d}{dx}, \quad z \text{ przez } \frac{d}{dx} - \frac{d}{dy},$$

a otrzymamy symbol w działaniach dogodny, dający się zastosować do każdego spótzmiennika, w którego skład wchodzi wyrazy zawierające  $x, y, z$ , i to bez uprzedniej zamiany

spółmiennika tego na funkcją dwóch zmiennych. W przypadku obecnym działamy na  $A'x^3 + B'y^3 + C'z^3$ , oraz na

$$A\left(\frac{d}{dy} - \frac{d}{dz}\right)^3 + B\left(\frac{d}{dz} - \frac{d}{dx}\right)^3 + C\left(\frac{d}{dx} - \frac{d}{dy}\right)^3$$

a wypadek tylko o liczebnny czynnik różnić się będzie od otrzymanego powyżej  $(AB') + (BC') + (CA')$ .

W podobny sposób znajdziemy, że w symbolicznym znakovaniu,  $\frac{1}{2}$  zastosowane do funkcji w wyrazach  $x, y, z$  wyrażonej, oznacza

$$\left(\frac{d}{dx_1} \frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2} \frac{d}{dy_1}\right) + \left(\frac{d}{dy_1} \frac{d}{dz_2} - \frac{d}{dy_2} \frac{d}{dz_1}\right) + \left(\frac{d}{dz_1} \frac{d}{dx_2} - \frac{d}{dz_2} \frac{d}{dx_1}\right).$$

#### 191. Jakobiowy układu

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3, \quad A'x^3 + B'y^3 + C'z^3,$$

może być znalezionym za pomocą ostatniej formuły, albo bezpośrednio. Co do drugiego sposobu; związki łączące  $z$  z  $x$  i  $y$ , sprawiają że różniczki  $U$  ze względu na  $x$  i  $y$  są proporcjonalne do  $Ax^2 - Cz^2$ ,  $By^2 - Cz^2$ ; a

$$U_1V_2 - U_2V_1 = (AB')x^2y^2 + (BC')y^2z^2 + (CA')z^2x^2.$$

Jest to kształt dwukwadratowy, dla którego łatwo obliczyć dwa niezmienniki paragrafu 97, to jest

$$S = ae - 4bd + 3c^2, \quad T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3$$

Wstawiwszy  $z^2$ ,  $(x + y)^2$ , i pomnożywszy Jakobiowy przez



6 (dla uniknięcia ułamków), otrzymamy

$$a = 6(CA'), \quad b = 3(CA'), \quad e = 6(BC'), \quad d = 3(BC'),$$

$$c = (BC') + (CA') + (AB') = P,$$

z kąd  $S = 3P^2$ ,  $T = 54Q - P^3$ . Więc dyskryminant kształtu dwukwadratowego jest  $S^3 - 27T^2$ , a dyskryminant Jakobiego proporcjonalny do  $Q(P^3 - 27Q)$ , wypadek zgodny z paragrafem 169.

192. Utworzywszy niezmiennik ilości  $U + \lambda V$ , a potem niezmiennik tegoż uważanego za funkcją  $\lambda$ , wypadek będzie kombinantem układu  $U, V$ , a więc nie zmieni się przez podstawienie  $lU + mV, l'U + m'V$ , za  $U, V$ . Gdyż to podstawienie daje nam niezmiennik odpowiedni ilości  $(l + \lambda l')U + (m + \lambda m')V$ , równoważny linijnemu przekształceniu  $\lambda$ , w którym niezmienniki funkcji zależnej od  $\lambda$  nie uległy zmianie. Dajmy, w razie dwóch kształtów trzeciego stopnia, że  $U + \lambda V$  ma za dyskryminant  $A + 4B\lambda + 6C\lambda^2 + 4D\lambda^3 + E\lambda^4$ , i że mamy obliczyć niezmienniki tego kształtu dwukwadratowego; możemy za  $U$  i  $V$  wziąć dwa kształty układu  $U + \lambda V$  mające czynniki kwadratowe, i wstawić  $x$  i  $y$  za te czynniki. Przyjdzie  $U = ax^3 + 3bx^2y, V = 3cxy^2 + dy^3$ , dalej  $P = ad - 3bc, Q = b^2c^2(ad - bc)$ , a wyznacznik wypadkowy  $P^3 - 27Q = a^2d^2(ad - 9bc)$ . Lecz dla tej formy kształt dwukwadratowy jest :

$$4ac^3\lambda + (a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2)\lambda^2 + 4db^3\lambda^3,$$

a mnożąc przez 6 dla uniknięcia ułamków, będzie

$$\begin{aligned} A = E = 0, \quad B = 6ac^3, \quad D = 6db^3, \quad C = a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2 \\ = P^2 - 12b^2c^2, \end{aligned}$$



zład

$$S = 3C^2 - 4BD = 3P(P^3 - 24Q);$$

$$T = 2BCD - C^3 = -(P^6 - 36P^3Q + 216Q^2);$$

a więc dyskryminant dwukwadratu  $S^3 - 27T^2$  jest proporcjonalny do  $Q^3(P^3 - 27Q)$  (172). Paragraf 101 przekonał nas (przy obliczaniu stałych) że układ dwóch kształtów trzeciego stopnia nie może mieć więcej jak pięć niezmienników niezależnych, a widzimy teraz że  $P$  i  $Q$  dają się oznaczyć chociaż niewymiernie w wyrazach  $A, B, C, D, E$ .

193. Możemy przeto przy badaniu niezmienników nie będących kombinantami używać kształtu  $ax^3 + 3bx^2y, 3cxy^2 + dy^3$ ; potrzeba jednak okazać że stosunki znalezione w szczególnym przypadku są ogólnymi. Wszystkie niezmienniki są tego samego rzędu względem współczynników układu, tylko kombinant  $P$  nie ulega temu prawu. Znajdziemy kilka niezmienników czwartego rzędu. Hessowym ilości  $U + \lambda V$  jest

$$(\alpha, \xi, \gamma \chi(x, y))^2 + \lambda(\alpha', \xi', \gamma' \chi(x, y))^2 + \lambda^2(\alpha'', \xi'', \gamma'' \chi(x, y))^2$$

gdzie wyraz ogólny jako współczynnik  $\lambda^2$  jest Hessowym, pierwszy ilości  $U$ , drugi ilości  $V$ ; współczynnik zaś  $\lambda$  jest współzmiennikiem pośrednim. Możemy utworzyć niezmiennik drugiego stopnia którejkolwiek ilości  $4\alpha\gamma - \xi^2, 2(\alpha\gamma' + (\alpha'\gamma - \xi\xi'), \dots$ , lub którejkolwiek pary tych ilości, a będą one niezmiennikami układu. Jeżeli przypomnimy sobie że dyskryminant Hessowego, równa się dyskryminantowi samegoż kształtu, i w skutek tego zrobimy równemi ilości

$$(\xi + \lambda\xi' + \lambda^2\xi'')^2 - 4(\alpha + \lambda\alpha' + \lambda^2\alpha'')(\gamma + \lambda\gamma' + \lambda^2\gamma'')$$

i  $(A, B, C, D, E \chi(1, \lambda))^4$ , zrównamy tem samym wszystkie nie-

zmienniki z A, B, D, E, wyjąwszy dwa  $\xi'' - 2(\alpha\gamma'' + \gamma\alpha'')$ , i  $\xi'^2 - 4\alpha'\gamma'$ , zwane J, K, które łączy związek z  $2J + K = 6C$ .

Dla kształtu  $ax^3 + 3bx^2y + \lambda(3cxy^2 + dy^3)$  Hessowy jest

$$(-b^2 + \lambda ac)x^2 + \lambda(ad - bc)xy + (\lambda hd - \lambda^2 c^2)y^2;$$

znajdziemy nadto  $J = -2b^2c^2$ ,  $K = a^2d^2 - 6abcd + b^2c^2$ ; posilkując się zaś wartością  $6C = a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2$ , otrzymamy  $6C = P^2 + 6J$ ,  $K = P^2 + 4J$ , wartości łatwe w ogóle do sprawdzenia.

Utwórzmy wreszcie spółzmiennik trzeciego stopnia kształtu  $U + \lambda V$  (wedle paragrafu 122); nadto spółczynniki  $\lambda$  dostarczą czterech spółzmienników tego gatunku co U i V, i dwóch spółzmienników pośrednich. Utworzywszy kombinant każdej pary tych kształtów trzeciego stopnia, znajdziemy sześć niezmienników szóstego rzędu w spółczynnikach, cztery z nich są, PA, PB, PD, PE, dwa zaś pozostałe utworzone z dwóch skrajnych i dwóch pośrednich spółzmienników będą

$$L = b^3c^3 = 2Q + PJ, \quad M = -P^3 + 24Q.$$

194. KSZTAŁT CZWARTEGO STOPNIA. Ma on (97) dwa niezmienniki.

$$S = ae - 4bd + 3c^2, \quad T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Widzieliśmy że kształt ten przywieść można do formy kanonicznej  $x^4 + 6mx^2y^2 + y^4$ , dla której  $S = 1 + 3m^2$ ,  $T = m - m^3$ . Niezmienniki te wyrażone jako funkcje symetryczne pierwiastków, staną się

$$S = \Sigma(\alpha - \xi)^2(\gamma - \delta)^2,$$

$$T = \Sigma(\alpha - \xi)^2(\gamma - \delta)^2(\alpha - \gamma)(\xi - \delta),$$

albo

$$T = \{(\alpha - \epsilon)(\gamma - \delta) - (\alpha - \gamma)(\epsilon - \delta)\} \\ \times \{(\alpha - \gamma)(\delta - \epsilon) - (\alpha - \delta)(\epsilon - \gamma)\} \\ \times \{(\alpha - \delta)(\epsilon - \gamma) - (\alpha - \epsilon)(\gamma - \delta)\};$$

ostatnie wyrażenie pokazuje że gdy  $T = 0$ , cztery punkta dane przez kształt będą w stosunku harmonicznym. Widzieliśmy zaś że gdy  $T = 0$  kształt da się wyrazić jako summa dwóch czwartych potęg (\*), i że  $T$  można napisać jako niezmiennik

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ b, & c, & d \\ c, & d, & e \end{vmatrix}.$$

Oznaczmy przez  $M$  moduł podstawienia,  $S$  i  $T$  staną się po uskuteczeniu przeobrażenia  $M^4S$ ,  $M^6T$  (102); przeobrażenie to nie zmienia ich stosunku  $S^3 : T^2$ .

195. Każdy niezmiennik kształtu dwukwadratowego daje się wyrazić jako funkcja wymierna ilości  $S$  i  $T$ . Bo gdy kształt dany przez stosowne podstawienie zamienia się na formę kanoniczną  $x^4 + 6mx^2y^2 + y^4$ , i to bez zmiany niezmienników, wystarczy przeto gdy podane twierdzenie dla tej dowiedzimy formy. Zauważmy że niezmiennik stający się zerem dla  $m = 0$ , będzie zerem i dla  $m = \pm 1$ . Bo  $x^4 + y^4$  dla  $x = x + y$  i  $y = x - y$  staje się  $x^4 + 6x^2y^2 + y^4$ , a dla  $x = x + y\sqrt{-1}$  i  $y = x - y\sqrt{-1}$  będzie  $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ ; a zatem niezmiennik

(\*) P. Sylwester nazywa *katalektykantem* niezmiennik sprawiający że kształt stopnia  $2n$  da się wyrazić jako summa  $n$  ilości stopnia  $2n$ .

podzielny przez  $m$ , ma także  $m^3 - m$  za czynnik, więc i przez  $m - m^3$  czyli przez  $T$  podzielny będzie.

Niezmiennik wyrażony w funkcji  $a, b, c, d, e$ , współczynników kształtu ogólnego, niezmieniający się na zero dla  $b = 0, c = 0, d = 0$ , ma część która nie znikła przez podstawienie tych wartości, podzielną przez  $ae$ ; w rzeczy samej część ta musi być symetryczną względem  $a$  i  $e$ , nie może zaś być kształtu  $a^k + e^k$  z powodu że wszystkie wyrazy jedną ważność mieć powinny. Dajmy że część niktąca jest  $a^k e^k$ ; odciągamy ją od niezmiennika danego

$$(ae - 4bd + 3c^2)^k, \quad \text{czyli od } S^k,$$

a reszta stanie się zerem dla  $b = c = d = 0$ ; nadto będzie ona zerem dla formy kanonicznej w której  $b = d = 0$ , gdy przyścinimy  $m = 0$ . Podług tego co powiedzieliśmy wyżej, część ta będzie podzielna przez  $T$ , czyli że niezmiennik przybiera postać  $S^k + T\varphi$ ; w podobny sposób dowiedzimy że  $\varphi$  jest kształtu  $S^k + T\psi$ , i tak dalej, tak iż ostatecznie otrzymamy niezmiennik w postaci funkcji wymiernej ilości  $S$  i  $T$ .

196. Wyraźmy dyskryminant w funkcji ilości  $S$  i  $T$ . Wiemy że dyskryminant kształtu danego niknie (92) gdy  $a = b = 0$  bo w tym razie kształt, jako podzielny przez  $y^2$ , posiada czynnik kwadratowy. Zkądinąd niezmiennik równy 0 dla  $a = b = 0$  ma dyskryminant za czynnik. W rzeczy samej ten niezmiennik musi się stać zerem, jeżeli kształt jest podzielny przez kwadrat  $(x - ay)^2$ , gdyż za pomocą liniowego przeobrażenia możemy ten czynnik wziąć za  $y$ , co uczyni  $a = b = 0$ ; lecz niezmiennik stający się zerem dla dwóch pierwiastków równych, zawierać musi, gdy go wyrazimy w funkcji pierwiastków zawierających różnicę dwóch pierwiastków jakichkolwiek jako czynnik, a więc jest podzielny przez dyskryminanta.

Znając  $S$  i  $T$ , łatwo z nich wyprowadzić niezmiennik który



przez przypuszczenie  $a = b = 0$ , stanie się także zerem; bo w razie tym mamy  $S = 3c^3$ ,  $T = -c^3$ , a w następstwie  $S^3 - 27T^3 = 0$ . Niezmiennik ten w odniesieniu do współczynników jest szóstego rzędu, a więc rzędu dyskryminanta (86), Jest to więc dyskryminant, a nie iloczyn jego przez inny czynnik; otrzymujemy przeto na wartość szukaną

$$(ae - bcd + 3c^3)^3 - 27(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3)^3.$$

Różnemi sposobami sprawdzić możemy ten wypadek, a mianowicie biorąc ogólniejszą formę kanoniczną to jest biorąc

$$Ax^4 + By^4 + Cz^4,$$

i przypuszczając w niej  $x + y + z = 0$ . Otrzymamy bez najmniejszej trudności rachunkowej

$$a = A + C, \quad b = c = d = C, \quad e = B + C,$$

a niezmienniki S i T staną się :

$$S = BC + CA + AB, \quad T = ABC.$$

Dyskryminant jest po prostu wyznacznikiem wypadkowym dwóch pochodnych  $Ax^3 - Cz^3$ ,  $By^3 - Cz^3$ ; równając je zeru możemy przypuścić że  $x^3$ ,  $y^3$ ,  $z^3$  są proporcjonalne do BC, CA, AB. Podstawiając te wartości w zrównanie

$$x + y + z = 0,$$

przyjdzie

$$\sqrt[3]{BC} + \sqrt[3]{CA} + \sqrt[3]{AB} = 0,$$

z kądem

$$(BC + CA + AB)^3 - 27A^2B^2C^2 = 0$$

i ostatecznie otrzymujemy dyskryminant pod postacią  $S^3 - 27T^2$ .

197. Możemy jeszcze ten wypadek wyprowadzić od kształtu  $P^3 - 27Q$  wyznacznika wypadkowego układu złożonego z dwóch zrównań trzeciego stopnia (188). Kombinant  $P$  układu  $U_1, U_2$ , czyli zrównań

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3, \quad bx^3 + 3cx^2y + 3dxy^2 + cy^4,$$

będzie  $(ae - bd) - 3(bd - c^2)$ , a więc nie różni się od niezmiennika  $S$  dwukwadratowego kształtu.  $Q$  musi być doskonałym kwadratem niezmiennika  $T$ . Można dowieść to *a priori*, gdyż  $Q = 0$  wyraża warunek że między wartościami na  $\mu$ ,  $U_1 + \mu U_2$  znajduje się sześcián zupełny. A skoro tak jest, możemy (110) go przeobrazić linijnie w ten sposób aby był względem  $x$  różniczką zupełnie sześcienną, na przykład,  $(x + \lambda y)^3$ . A zatem samże kształt będzie formy  $(x + \lambda y)^4 + cy^4$ , dla której  $U_2 - \lambda U_1$ , być musi sześciánem zupełnym. Więc  $Q = 0$  wyraża warunek aby kształt czwartego stopnia był summą dwóch czwartych potęg, w którym to przypadku  $\lambda U_1 + \mu U_2$  w dwojaki sposób być może sześciánem zupełnym.

Możemy łatwo zastosować teorię układu dwóch kształtów trzeciego stopnia, pisząc kształt czwartego stopnia pod formą ogólniejszą od kanonicznej  $Ax^4 + By^4 + Cz^4$ , gdy  $x + y + z = 0$ . W tym przypadku,  $a = A + C$ ,  $e = B + C$ ,  $b = c = d = C$ , a łatwo obliczyć  $S = BC + CA + AB$ ,  $T = ABC$ . Lecz jeżeli dwie różniczki  $Ax^3 - Cz^3$ ,  $By^3 - Cz^3$ , uczynimy równemi otrzymamy na  $x^3, y^3, z^3$  wartości proporcjonalne do  $BC, CA, AB$ , a wprowadzając w  $x + y + z = 0$ , otrzymamy dyskryminant pod formą

$$(BC)^{\frac{1}{3}} + (CA)^{\frac{1}{3}} + (AB)^{\frac{1}{3}} = 0,$$

albo  $(BC + CA + AB)^3 - 27A^2B^2C^2 = 0,$

albo  $S^3 - 27T^2 = 0.$

198. Z wyrażenia dopiero co danego na dyskryminant kształtu czwartego stopnia w wyrazach S i T, możemy wyprowadzić związek łączący spółmienniki kształtu trzeciego stopnia (186).

Jeżeli pomnożymy razem dwa kształty, niezmienniki nowego kształtu będą niezmiennikami układu zawierającego dwa kształty pierwotne. Jeżeli jeden z nich tylko pomnożymy przez  $x\xi + y\eta$ , to niezmienniki nowego kształtu będą przeciwnymi kształtu danego (114); a zamiana w nich  $\eta$  i  $\xi$  na  $-x$  i  $y$  uczyni z nich spółmienniki tegoż kształtu. Zastosujemy to postępowanie do kształtu trzeciego stopnia, a spółczynniki kształtu czwartego stopnia w ten sposób otrzymanego będą :

$$ay, \quad \frac{1}{4}(3by - ax), \quad \frac{1}{2}(cy - bx), \quad \frac{1}{4}(dy - 3cx), \quad -dx,$$

dalej niezmienniki S i T tego kształtu, będą spółmiennikami  $-\frac{3}{4}H, \frac{1}{16}J$ , kształtu trzeciego stopnia. Lecz dyskryminant pewnego kształtu rozmnożonego przez  $x\xi + y\eta$ , staje się (91) dyskryminantem U rozmnożonym przez  $U^2$ . Wyrażając przeto dyskryminant kształtu danego czwartego stopnia, w wyrazach w skład S i T wchodzących, otrzymamy związek łączący H, J, i dyskryminant kształtu trzeciego stopnia.

199. Wyznacznik Hessowy kształtu dwukwadratowego jest przewoźnikiem ilości T; będzie to :

$$(ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3y + (ae + 2bd - 3c^2)x^2y^2 \\ + 2(be - cd)xy^3 + (ce - d^2)y^4.$$

a dla formy kanonicznej zamieni się na

$$m(x^4 + y^4) + (1 - 3m^2)x^2y^2.$$

Jeżeli kształt zawiera czynnik kwadratowy z  $x^2$ , znajdziemy go w Hessowym. Gdyż druga pochodna  $U_{22}$  zawiera czynnik  $x^2$ , pochodna  $U_{12}$  zawiera  $x$ , a w skutek tego wyrażenie  $U_{22}U_{12} - U_{12}^2$  zawiera czynnik  $x^2$ . A zatem jeżeli kształt dwukwadratowy jest podzielny przez dwa czynniki drugiego stopnia, odnajdą się one w Hessowym, który jako będący czwartego stopnia, tylko o czynnik liczebny od kształtu różnić się może. W rzeczy samej, weźmy za  $x^2$  i  $y^2$  dwa czynniki, a kształt dwukwadratowy da się napisać  $cx^2a^2$ ; czyniąc zaś w Hessowym  $a = b = d = e = 0$ , stanie się on  $-3c^2x^2y^2$ .

Jeżeli więc kształt dwukwadratowy różni się od Hessowego tylko o czynnik liczebny, następujący układ warunków jest koniecznym aby tenże kształt był podzielny przez dwa czynniki kwadratowe; mianowicie

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{6c} = \frac{be - cd}{2d} = \frac{ce - d^2}{e};$$

który to układ dwa odrębne zawiera warunki, jak tego rozmaitemi sposobami dowieść możemy.

W paragrafie 118 innemi sposobami do tego samego przyszliliśmy wypadku. Jeden z nich zasada się na utworzeniu spółzmiennika

$$\Sigma(\alpha - \delta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(x - \delta)^2(x - \gamma)^2(x - \delta)^2,$$

którego wszystkie wyrazy zamieniają się na zera, w razie gdy dwie pary pierwiastków są sobie równymi. Ten spółzmiennik zwany J jest :

$$\begin{aligned} & (a^2d + 2b^3 - 3abc, a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2c, 5abe - 15acd \\ & + 10b^2d, 10b^2e - 10ad^2, -5ade + 15bec - 10bd^2, \\ & -ae^2 - 2bde + 9c^2e - 6cd^2, 3cde - 2c^3 - bc^2)(x, y)^6. \end{aligned}$$



Spółzmiennik  $J$  jest Jakobiowym kształtu albo jego Hessewego, i zamieni się na zero, gdy te dwie funkcje o czynnik tylko różnić się od siebie będą; tak więc spółczynniki  $J$  dają nam, w innej wprawdzie formie warunki otrzymane powyżej. Widzieliśmy także że w tym razie (118), spółzmiennik

$$\Sigma(\alpha - \xi)^2(\xi - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2(\alpha - \delta)^2$$

staje się zerem. Lecz ten spółzmiennik jest  $3TU - 2SH$ , i łatwo spostrzegamy że zamienia się na zero w razie gdy kształt dany przyjmuje dwa czynniki kwadratowe. Gdyż czyniąc  $a = b = d = e = 0$ , kształt stanie się  $6cx^2y^2$ , a nadto przyjdzie  $H = 3c^2y^2x^2$ ,  $T = -c^3$ ,  $S = 3c^2$ , i przekonujemy się że w danym powyżej układzie warunków, spółna wartość ułameków jest  $\frac{3T}{2S}$ .

200. Widzieliśmy (172) jak kształt dwukwadratowy do kanonicznego sprowadzić, zagadnienie to zawiera w sobie rozwiązanie równania danego, gdyż to przywiedzione do formy  $ax^4 + bcx^2y^2 + ey^4$ , rozwiązuje się jak proste równanie stopnia drugiego. Sprowadzenie to może się wykonać za pomocą  $S$  i  $T$ . Dajmy że zmienne zostały przeobrażone przez podstawienie linijne modułu 1, w ten sposób że spółczynniki  $b$  i  $d$  znikły w równaniu przeobrażonym, będziemy mieli  $S = ae + 3c^2$ ,  $T = ace - c^3$ , a nowej wartości  $c$  dostarczy równanie  $4c^3 - Sc + T = 0$ . Równania

$$U = ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4, \quad H = acx^4 + (ae - 3c^2)x^2y^2 + ce y^4,$$

dostarczą wartości na nowe zmienne  $x$  i  $y$  wchodzące do formy kanonicznej. Równania te dają

$$cU - H = (9c^2 - ac)x^2y^2.$$

Metoda nasza zasadza się na wyciągnięciu wartości na  $c$  z da-

nego powyżej zrównania stopnia trzeciego, i na utworzeniu, za pomocą jednej z wartości  $c$ , wyrażenia na  $cU - H$ , które musi być kwadratem zupełnym. Wyciągając pierwiastek i rozkładając go na czynniki, otrzymamy nowe wartości na  $x$  i  $y$ , a tem samym poznamy zrównanie przeobrażone, zdolne zamienić zrównanie dane na formę kanoniczną. Nadawszy zaś zrównaniu danemu postać  $ax^3 + 6cx^2y^2 + ey^4$ , możemy, (jeżeli przekładamy postępowanie takie), uczynić współczynniki  $x^4$  i  $y^4$  równymi jedności pisząc  $x^2$  i  $y^2$  za  $x^2\sqrt{a}$  i  $y^2\sqrt{e}$ .

PRZYKŁAD. — Rozwiązać zrównanie

$$x^4 + 8x^3y - 12x^2y^2 + 104xy^3 - 20y^4 = 0.$$

Otrzymamy  $S = -216$ ,  $T = -756$ , a za zrównanie stopnia trzeciego

$$4c^3 + 216c - 756 = 0,$$

mające trzy za jeden z pierwiastków. Hessowy jest

$$H = -6x^4 + 60x^3y + 72x^2y^2 + 24xy^3 - 636y^4,$$

z kąd

$$3U - H = 9(x^4 - 4x^3y - 12x^2y^2 + 32xy^3 + 64y^4)$$

$$= 9(x^2 - 2xy - 8y^2)^2.$$

Zmienne formy kanonicznej będą

$$X = x + 2y, \quad Y = x - 4y,$$

$$6x = 4X + 2Y, \quad 6y = X - Y,$$

które to wartości wstawiając w kształt dany, otrzymamy na formę kanoniczną

$$3X^4 + 2X^2Y^2 - Y^4.$$

Wartości pierwiastków dostarczą równania

$$(x + 2y)\sqrt{3} = x - 4y, \quad (x + 2y)\sqrt{-1} = x - 4y.$$

201. P. Cayley podaje pierwiastki równania stopnia czwartego pod inną, bardziej symetryczną formą. Niech  $c_1, c_2, c_3$  będą pierwiastkami równania stopnia trzeciego o którym mowa w paragrafie 200; dowiedliśmy że  $H - c_1U, H - c_2U, H - c_3U$  są kwadratami zupełnymi, mającemi  $x$  i  $y$  za pierwiastki drugiego stopnia. Lecz wyrażenie

$$(c_2 - c_3)(\sqrt{H - c_1U}) + (c_3 - c_1)(\sqrt{H - c_2U}) + (c_1 - c_2)(\sqrt{H - c_3U})$$

jest także kwadratem zupełnym mającym za pierwiastek czynnik dwukwadratowego kształtu. Wystarczy gdy dowiedzimy że ta ilość jest kwadratem, gdyż staje się ona widocznie zerem gdy  $U = 0$ . Weźmy formę kanoniczną czyniąc dla uproszczenia  $a = e = 1$ . Rozwiążmy równanie

$$4z^3 - z(1 + 3c^2) + c - c^3 = 0;$$

jego trzy pierwiastki będą

$$c_1 = \frac{1}{2}(c + 1), \quad c_2 = \frac{1}{2}(c - 1),$$

a trzy wartości na  $H - cU$  będą

$$(1 - 9c^2)x^2y^2, \quad \frac{1}{2}(3c + 1)(x^2 + y^2)^2, \quad \frac{1}{2}(3c - 1)(x^2 - y^2)^2.$$

Wiemy że aby ilość formy

$$\alpha xy + \beta(x^2 + y^2) + \gamma(x^2 - y^2)$$

była kwadratem zupełnym, potrzeba mieć

$$\alpha^2 = 4(\delta^2 - \gamma^2),$$

warunek mający rzeczywiście miejsce, ponieważ jest

$$\alpha^2 = 4 - 9c^2, \quad \delta^2 = \frac{1}{8}(3c-1)^2(3c+1), \quad \gamma^2 = \frac{1}{8}(3c+1)^2(3c-1).$$

PRZYKŁAD. — Stosując tę metodę do poprzedzającego przykładu (200), znajdziemy że inne wartości  $c$  są :

$$\frac{1}{2}(-3 \pm 9\sqrt{-3}),$$

kwadraty zaś z czynników liniowych kształtu dwukwadratowego będą

$$\begin{aligned} & -2\sqrt{3}(x^2 - 2xy - 8y^2) \\ & \pm \frac{1}{2}(1-\sqrt{-3}) \{ (1+\sqrt{-3})x^2 + (10+2\sqrt{-3})xy - (2-10\sqrt{-3})y^2 \} \\ & \pm \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3}) \{ (1-\sqrt{-3})x^2 + (10+2\sqrt{-3})xy - (2+10\sqrt{-3})y^2 \}. \end{aligned}$$

202. Zbadać należy w jakich razach zamiana na formę kanoniczną uskuteczni się pomocą rzeczywistego, a w jakich za pomocą urojonego podstawienia. Dyskryminant tej formy jest :  $ae(ae - 9c^2)^2$ , a że przemiana liniowa nie zmienia jego znaku, przeto gdy będzie dodatnym, spółzienniki  $a$  i  $e$  formy kanonicznej jeden znak mieć będą, gdy zaś będzie ujemnym też spółczynniki będą znaków przeciwnych. W pierwszym razie forma  $ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4$  rozkłada się na dwa czynniki :

$$(x^2 + \lambda y^2)(x^2 + \mu y^2), \quad \text{albo,} \quad (x^2 - \lambda y^2)(x^2 - \mu y^2),$$

a więc pierwiastki są, albo wszystkie rzeczywiste, albo wszyst-



kie urojonymi. W drugim razie czynniki te będą

$$(x^2 + \lambda y^2)(x^2 - \mu y^2),$$

a kształt dwukwadratowy ma dwa pierwiastki rzeczywiste i dwa urojone. Więc gdy dyskryminant jest ujemnym, czyli  $S^3 < 27T^2$  dwa pierwiastki są rzeczywiste a dwa urojone; gdy zaś jest dodatnym, wszystkie cztery są rzeczywiste, albo wszystkie cztery urojone (\*). Lecz dyskryminant równania

$$4c^3 - Sc + T = 0$$

jest  $27T^2 - S^3$ , a więc (155), gdy  $S^3 < 27T^2$  równanie na  $c$  posiada jeden pierwiastek rzeczywisty obok dwóch urojonych; przeobrażenie zaś tylko w jeden rzeczywisty sposób skutecznie się daje gdy równaniu odpowiadają dwa pierwiastki rzeczywiste i dwa urojone. Gdy  $a$  i  $e$  są poprzedzone temi samemi znakami, możemy wziąć za formę kanoniczną  $x^4 + 6mx^2y^2 + y^4$ , a łatwo postrzegamy że do tego kształtu na dwoistej drodze przyjść możemy. Zastępując bowiem  $x$  i  $y$  przez  $x + y$  i  $x - y$ , przyjdzie

$$(1 + 3m)x^4 + 6(1 - m)x^2y^2 + (1 + 3m)y^4,$$

zastępując przez  $x + y\sqrt{-1}$  i  $x - y\sqrt{-1}$  przyjdzie także

$$(1 + 3m)x^4 + 6(m - 1)x^2y^2 + (1 + 3m)y^4.$$

---

(\*) Znaki niezmienników nie pozwalają odróżnić przypadku czterech pierwiastków rzeczywistych od przypadku czterech urojonych; lecz twierdzenie Sturma pokazuje że, przy dyskryminancie dodatnym, dwie ilości  $b^2 - ac$ ,  $3aT - 2(b^2 - ac)S$  są dodatnimi gdy wszystkie pierwiastki mają być rzeczywistemi; dla wszystkich zaś pierwiastków urojonych, jedna z tych ilości staje się odjemną (Cayley, *Quarterly Journal*, tom IV, str. 10).

Więc gdy forma dwukwadratowa ma cztery pierwiastki rzeczywiste lub cztery urojone, chociaż przyjmuje trzy wartości rzeczywiste na  $c$ , jednak tylko jedna z nich odpowiada wartościom urojonym na  $x$  i na  $y$ , i nie więcej nad dwa podstawienia rzeczywiste istnieje.

Inaczej jeszcze przekonać się o tem można. Bo rozłożmy kształt dwukwadratowy na dwa czynniki rzeczywiste drugiego stopnia  $(a, b, c \mathcal{X} x, y)^2, (a', b', c' \mathcal{X} x, y)^2$ . Te dwa czynniki  $U$  i  $V$ , mogą przez spólczesne przeobrażenie, być przywiedzionemi do  $AX^2 + BY^2$  i  $A'X^2 + B'Y^2$ , gdzie  $X^2$  i  $Y^2$  są wartościami  $\lambda U + V$  odpowiadającemi dwom wartościom  $\lambda$  danym przez zrównanie

$$(ac - b^2)\lambda^2 + (ac' + ca' - 2bb')\lambda + (a^3e' - b'^2) = 0.$$

Aby wartości  $\lambda$  były rzeczywistemi potrzeba aby wyznacznik wypadkowy dwóch funkcji drugiego stopnia

$$(\alpha - \alpha')(\alpha - \epsilon')(\epsilon - \alpha)(\epsilon - \epsilon')$$

był dodatnym. Gdy kształt dwukwadratowy ma cztery pierwiastki rzeczywiste, z których  $\alpha$  i  $\epsilon$  są dwoma większemi,  $\alpha'$  i  $\epsilon'$  dwoma mniejszemi, albo  $\alpha$  i  $\epsilon$  dwoma skrajnemi,  $\alpha'$  i  $\epsilon'$  dwoma średniemi,  $\lambda$  przybiera wartości rzeczywiste; w innych razach będzie urojonym. Jeżeli jedno z wyrażeń drugiego stopnia ma pierwiastki urojone, ich wyznacznik wypadkowy jest dodatnym a  $\lambda$  przyjmuje wartości rzeczywiste.

203. Widzieliśmy (199) że kształty dwukwadratowe posiadają inny spólzmiennik  $J$  mający za formułę symboliczną  $\overline{12^2. 13}$ . Jest on trzeciego stopnia co do spólzmienników, a szóstego co do zmiennych. Dla formy kanonicznej  $x^4 + 6mx^2y + y^4$  zamienia się on na  $(1 - 9m^2)xy(x^4 - y^4)$ : jest to Jakobiowy kształtu pierwotnego lub jego Hessowego. W ogóle czyniąc

dyskryminant  $U + \lambda V = 0$ , jeżeli  $U$  i  $V$  są kształtami dwukwadratowymi,  $\lambda$  posiadać będzie sześć wartości takich aby  $U + \lambda V$  posiadało czynnik kwadratowy. Będzie więc sześć czynników takich, istniejących także w pochodnych ilości  $U + \lambda V$ , jako i w Jakobiowym. Gdy  $V$  jest Hessowym dla  $U$ ,  $\lambda$  tylko trzy wartości przybrać może; dane są przez zrównania

$$4\lambda^3 - \lambda S + T = 0,$$

i są takimi że  $\lambda U - H = 0$  przybiera dwa czynniki kwadratowe. Lecz podług tego co powiedzieliśmy nieco wyżej, te sześć czynników są czynnikami Jakobiowego, a więc spółzmiennik  $J$  ma za czynniki wartości z formy kanonicznej dla  $x$  i  $y$  wypływające. Wytlumaczymy geometrycznie wypadek ten. Cztery punkta wyrażone przez kształt dany, oznaczają trzy różne układy w involucyi (jeden z punktów  $\epsilon$ ,  $\gamma$  i  $\delta$  możemy uważać za sprzężony punktu  $\alpha$ ), a ogniska trzech układów daje spółzmiennik  $J$ .

Ponieważ (200) kwadrat z iloczynu pary wartości dostarczonej przez formę kanoniczną dla  $x$  i  $y$  jest nam dany przez wyrażenie  $C_1 U - H$ , przeto  $J^3$  jest proporcjonalne do

$$(C_1 U - H) (C_2 U - H) (C_3 U - H)$$

albo c dnosząc się do zrównania w  $c$ , przyjdzie

$$4H^3 - SHU^2 + TU^3.$$

Uskuteczniając rachunek na formie kanonicznej otrzymamy —  $J^2$  na wartość ostatniego wyrażenia.

204. Ponieważ  $H$  jest spółzmiennikiem  $U$ , więc  $\alpha$  i  $\epsilon$



oznaczają dwie stałe,  $\alpha U + 6\epsilon H$  (\*) będzie spółmiennikiem dla  $U$ , a niezmienniki tej ilości będą także niezmiennikami tegoż  $U$ . Wreszcie  $S, T$  i dyskryminant  $R$  dane są przez następujące zrównania :

$$S(\alpha U + 6\epsilon H) = Sz^2 + 18T\alpha\epsilon + 3S^2\epsilon^2$$

$$T(\alpha U + 6\epsilon H) = T\alpha^3 + S^2\alpha^2\epsilon + 9ST\alpha\epsilon^2 + (54T^2 - S^3)\epsilon^3,$$

$$R(\alpha U + 6\epsilon H) = R(\alpha^3 - 9S\alpha\epsilon^2 - 54T\epsilon^3)^2.$$

Ostatnia z tych wartości jest kwadratem zupełnym, gdyż, jak to zauważyliśmy, zamiast sześciu przypadków w których funkcya  $\alpha U + 6\epsilon H$  zawiera czynnik kwadratowy, mamy obecnie trzy przypadki w których jest podzielna przez dwa czynniki takie.

P. Hermite dostrzegł, oznaczwszy przez  $G$  ilość  $\alpha^3 - 9S\alpha\epsilon^2 - 54T\epsilon^3$ , będącą funkcją  $\alpha$  i  $\epsilon$ , że wartości dane powyżej na niezmienniki  $S$  i  $T$  kształtu  $\alpha U + 6\epsilon H$ , są Hessowym i spółmiennikiem trzeciego stopnia ilości  $G$  : dyskryminant ilości  $G$  tylko liczebnym czynnikiem różni się od dyskryminanta ilości  $U$ .

Funkcya  $\alpha U + 6\epsilon H$  ma te same co  $U$  spółmienniki. Jej Hessowy jest :

$$(\alpha\epsilon S + 9\epsilon^2 T)U + (\alpha^2 - 3\epsilon^2 S)H.$$

Jest to Jakobiowy dwóch wyrażeń  $G$  i  $\alpha U + 6\epsilon H$  uważanych za funkcyę  $\alpha$  i  $\epsilon$ .  $J$  dla  $\alpha U + 6\epsilon H$  jest to samo co  $J$  dla  $U$ , lecz pomnożone przez czynnik liczebnny  $G$ . Hessowy

---

(\*) Spółczynnik liczebnny 6 ma na celu uniknięcie ułamków w następujących formułach.



ilości J jest

$$S^2U^2 - 36TUH + 12SH^2.$$

jest to wyznacznik wypadkowy dwóch ilości,  $\alpha U + 66H$  i Hessowego ilości G. P. Cayley nadał mu formę

$$\left(SU - \frac{18TH}{S}\right)^2 + \frac{12}{S^2}(S^3 - 27T^2)H^2,$$

która pokazuje że wyznacznik ten staje się kwadratem zupełnym gdy dyskryminant jest zerem.

205. W tem miejscu należy zrobić uwagę że wedle zasady w paragrafie 121 podanej, twierdzenia dotyczące niezmienników i spółzmienników pewnego kształtu, dają początek twierdzeniom odnoszącym się do niezmienników kształtów wyższych stopni. I tak, dowiodłszy (204) że Hessowy Hessowego kształtu dwukwadratowego przybiera postać  $\alpha TU + 6SH$ , wnieść nam ztąd wolno że to samo ma miejsce dla jakiegokolwiek kształtu. Bo Hessowy wyrażenia  $u_{11}u_{22} - u_{12}^2$  zawiera drugie, trzecie i czwarte pochodne  $u$ . Wiemy zaś że za pomocą zrównań

$$(n-3)u_{111} = xu_{1111} + yu_{1112} \dots$$

można wyrazić pochodne drugiego i trzeciego rzędu w funkcji pochodnych rzędu czwartego, i napisać Hessowy w funkcji tych ostatnich i zmiennych  $x$  i  $y$  które w rachunek wprowadziliśmy a które znajdować się muszą i w pochodnych czwartorzędnych. Będzie to więc spółzmiennik emananta czwartego rzędu. Lecz każdy spółzmiennik kształtu dwukwadratowego jest funkcją  $U$  i  $H$  (183), a gdy jest czwartego stopnia ta funkcją liniową być musi; spółzmiennik przybiera przeto postać  $\alpha TU + 6SH$ , gdzie  $S$  i  $T$  są niezmiennikami emananta czwartego rzędu i, jak w paragrafie 121, spółzmiennikami kształtów stopni wyższych.

206. UKŁAD DWÓCH KSZTAŁTÓW CZWARTEGO STOPNIA. Zamierzamy wyliczyć *kombinanty* tego rodzaju kształtów. Utwórzmy S i T dla  $\lambda U + \mu V$ ; można je napisać.

$$S\lambda^2 + \Sigma\lambda\mu + S'\mu^2, \quad T\lambda^3 + T'\lambda^2\mu + T''\lambda\mu^2 + T'''\mu^3,$$

a niezmienniki tych kształtów trzeciego i czwartego stopnia, będą kombinantami U, V (192) (\*).

Łatwo znaleźć dyskryminant kształtu czwartego stopnia, jest on :

$$(ae')^2 + 16(bd')^2 + 12(ac')(ce') - 48(bc')(cd') \\ - 8(ab')(de') - 8(ad')(be'),$$

i ma związek z kombinantem A.

Kombinanty o spódczynnikach jednego rzędu, w inny sposób znaleźć można; i tak Jakobiowy dla U i V jest :

$$(ab')x^6 + 3(ac')x^5y + \{3(ad') + 6(bc')\}x^4y^2 + \{(ae') + 8(bd')\}x^3y^3 \\ + \{3(be') + 6(cd')\}x^2y^4 + 3(ce')xy^5 + (de')y^6,$$

(\*) Wspomnieliśmy że wyznacznik dwóch kształtów czwartego stopnia, może być napisanym jako dyskryminant, czy to ilości

$$(ac - b^2)\lambda^2 + (ac' + ca' - 2bb')\lambda\mu + (a'c' - b'^2)\mu^2,$$

czy też Jakobiowego

$$[(ab')x^2 + (ac')xy + (bc')y^2;$$

dość należy że pierwsza ilość zamienia się linijnie na drugą biorąc  $\lambda b + \mu b'$ ,  $\lambda a + \mu a'$  za  $x$  i  $y$ .

a tego spółziennik kombinantowy  $\frac{-3}{12}$ ,

$$\{(ad') - 3(bc')\}x^2 + \{(ae') - 2(bd')\}xy + \{(be') - 3(cd')\}y^2.$$

Dyskryminant zaś tej ilości, i niezmiennik kształtu czwartego stopnia (105), będą kombinantami tego rzędu co A, lecz nierównemi temuż A. Napiszmy nowy kombinant B,

$$(bd')^2 + (ac')(ce') - (bc')(cd') - (ab')(de') - (ad')(cd') - (bc')(be'),$$

a znajdziemy że niezmiennik czwartego stopnia Jakobiowego będzie  $A + 48B$ , dyskryminant zaś drugiego spółziennika  $A - 12B$ .

207. Wyrażając te kombinanty w wyrazach wyznaczników  $(ab'), \dots$ , użyjemy skrótów

$$(ab') = \alpha, \quad (de') = \alpha', \quad (ad') = \beta, \quad (be') = \beta', \quad (ac') = \lambda, \\ (ce') = \lambda', \quad (bc') = \mu, \quad (cd') = \mu', \quad (ae') = \gamma, \quad (bd') = \delta,$$

a otrzymamy

$$A = 12\lambda\lambda' - 48\mu\mu' + \gamma^2 + 16\delta^2 - 8\alpha\alpha' - 8\beta\beta',$$

$$B = \lambda\lambda' - \mu\mu' - \beta\mu' - \beta'\mu + \delta^2 - \alpha\alpha'.$$

Wyznacznik wypadkowy dla U V otrzymany przez rozwinięcie wyznaczników (48) będzie :

$$R = 1296\lambda^2\lambda'^2 - 3456(\alpha\mu'^2 + \alpha'\mu^2) - 1152(\alpha\beta\lambda'^2 + \alpha'\beta'\lambda^2) \\ - 72\gamma^2\lambda\lambda' - 576\gamma\delta\lambda' + 9216\alpha\alpha'\mu\mu' + 96\gamma(\beta^2\lambda' + \beta'^2\lambda)$$

$$\begin{aligned}
& + 288\gamma(\alpha\delta'\lambda' + \alpha'\delta\lambda) + 1536\delta\alpha\delta'\mu' + \alpha'\delta\mu) + 3072\alpha\alpha'(\delta\mu' + \delta'\mu) \\
& + \gamma^4 - 48\alpha\alpha'\gamma^2 - 16\delta\delta'\gamma^2 - 256\alpha\alpha'\gamma\delta + 512\alpha'^2\alpha^2 \\
& - 256(\alpha\delta'^3 + \alpha'\delta^3) - 4096\alpha\alpha'\delta^2.
\end{aligned}$$

Wyrazy kombinanta dawniej T przez nas zwanego, a który odłąd dla uniknięcia pomyłek przez C oznaczać będziemy dają się napisać w wyrazach dopiero co otrzymanych kombinantów: C oznacza warunek że kształt czwartego stopnia układu  $U + \lambda V$  może mieć dwa czynniki kwadratowe, znika zatem gdy  $V = c'x^2y^2$ . W takim razie  $\alpha, \alpha', \delta, \delta', \gamma, \delta$ , znikają także, i będzie

$$A = 12\lambda\lambda' - 48\mu\mu', \quad B = \lambda\lambda' - \mu\mu',$$

$$R = 1296\lambda^2\lambda'^2;$$

a ztąd widoczna że  $(A - 48B)^2 - R$ , jest kombinantem niknącym w przypuszczeniu naszym. A że jest tego rzędu (172) co T, więc jest mu równym. Używając wartości w tym paragrafie na A, B, R otrzymanych, przyjdzie

$$128C = (A - 48B)^2 - R,$$

$$\begin{aligned}
C = & - 27\gamma(\lambda\mu'^2 + \lambda'\mu^2) + 18(\delta^2\mu'^2 + \delta'^2\mu^2) + 18\delta^2\lambda\lambda' + 36\gamma\delta\mu\mu' \\
& - 36\alpha\alpha'\mu\mu' + 18\gamma\delta\lambda\lambda' - 9\gamma^2\mu\mu' - 3\gamma(\alpha\delta'\lambda' + \alpha'\delta\lambda) - 24\delta^2(\delta\mu' \\
& + \delta'\mu) - 6\delta(\delta^2\lambda' + \delta'^2\lambda) - 6\delta(\alpha\delta'\lambda' + \alpha'\delta\lambda) + 2(\alpha\delta'^3 + \alpha'\delta^3) \\
& + \alpha\alpha'\gamma^2 + 4\alpha^2\alpha'^2 - 2\alpha\alpha'\gamma\delta + 4\gamma\delta^3 + 16\alpha\alpha'\delta^2 + 8\delta^4.
\end{aligned}$$

Jeżeli zaś chcemy napisać niezmiennik zwany I (187) kształtów trzeciego i czwartego stopnia, to znajdziemy

$$(A + 48B)(A - 16B) - R = - 128I.$$



208. Inne kombinanty układu o których wspomnieć wypada są : D, wyznacznik wypadkowy kształtów trzeciego i czwartego stopnia i E, dyskryminant trzeciego stopnia. D jest niezmiennikiem zwanym S (133); do metod podanych do znalezienia go, nową dodamy. Idzie o naznaczenie na  $\lambda$  takiej wartości aby niweczyła spólcześnie  $u_{11} + \lambda v_{11}$ ,  $u_{12} + \lambda v_{12}$ ,  $u_{22} + \lambda v_{22}$ . Mnożąc każdą z tych trzech ilości przez każdy z  $2(n-2)$  wyrazów kształtu  $x^{2n-5}$ ....., stopnia  $2n-5$ , otrzymamy  $6(n-2)$  równań z których możemy wyrugować  $6(n-2)$  ilości  $x^{3n-7}$ .....,  $\lambda x^{3n-7}$ ..., a więc otrzymać S w kształcie wyznacznika, czyli D. Przyjdzie :

$$\begin{aligned}
 D = & -16\lambda^3\lambda'^3 + 48\lambda\lambda'^2\mu\mu' + 6\lambda\lambda'\mu^2\mu'^2 + 16\mu^3\mu'^3 + 27\lambda^2\mu^4 \\
 & + 27\lambda'^2\mu'^4 + 36\alpha\lambda\mu\lambda'^2 + 36\alpha'\lambda'\mu'\lambda'^3 + 12\lambda^2\lambda'^2(\xi\mu' + \xi'\mu) \\
 & - 96\alpha\mu^2\lambda'^2\mu' - 96\alpha'\mu'^2\lambda^2\mu - 6\gamma\xi\mu\mu'^3 - 6\gamma\mu^3\lambda'\mu' - 36\delta\lambda^2\lambda'\mu'^2 \\
 & - 36\delta\lambda\mu^2\lambda'^2 - 48\alpha\mu\mu'^4 - 48\alpha'\mu'^4\mu' - 24\delta\lambda\mu\mu'^3 - 24\delta\lambda'\mu'\mu'^3 \\
 & + 24\alpha\delta\lambda\lambda'^3 + 24\alpha'\delta\lambda'^3\lambda' - 18\alpha\delta\lambda'^2\mu^2 - 18\alpha'\delta\lambda^2\mu'^2 - 6\delta^2\lambda^2\lambda'^2 \\
 & + 87\gamma^2\mu^2\mu'^2 - \lambda\lambda'\mu\mu'(162\alpha\alpha' + 90\xi\xi') - 36\alpha\delta\mu'^4 - 36\alpha'\delta\mu^4 \\
 & + 96\delta^2\lambda'\mu\mu' + (228\alpha\alpha' - 60\xi\xi')\mu^2\mu'^2 - 4\alpha^2\gamma\lambda'^3 - 4\alpha'^2\gamma\lambda^3 \\
 & - 16\alpha\delta^2\mu' - 16\alpha'\delta'^2\mu - 30\alpha\alpha'\lambda^2\lambda'^2\mu' - 30\alpha'^2\lambda'^2\lambda^2\mu \\
 & - 50\alpha\alpha'\lambda\lambda'(\xi\mu' + \xi'\mu) - 20\delta\lambda\lambda'(\delta\alpha' + \lambda'\alpha\xi') + 2\gamma\mu\mu'(\lambda\delta\alpha' + \lambda'\alpha\delta) \\
 & + 48\delta^2\alpha\mu\lambda'^2 + 48\delta^2\alpha'\mu'\lambda^2 + 24\alpha\delta^2\mu\mu'^2 + 24\alpha'\delta^2\mu'\mu^2 + 56\alpha\delta^2\mu' \\
 & + 56\alpha'\delta^2\mu^3 + 240\alpha\alpha'\xi\mu\mu'^2 + 240\alpha\alpha'\mu^2\mu'\xi' + 32\alpha\delta^2\mu'^3 + 32\alpha'\delta^2\mu^3 \\
 & + 3\lambda^2\xi^2\alpha^2 + 3\lambda'^2\alpha'^2\xi'^2 + 24\alpha\alpha'(\xi^2\mu'^2 + \xi'^2\mu^2) - 6\alpha\alpha'\gamma^2\mu\mu' \\
 & - 12\alpha^2\alpha'^2\lambda\lambda' - 30\alpha\alpha'\xi\xi'\lambda\lambda' + 60\alpha\alpha'\lambda\lambda'\delta^2 + 12\xi\xi'\lambda\lambda'\delta^2 \\
 & + (54\alpha^2\alpha'^2 + 120\alpha\alpha'\xi\xi')\mu\mu' - 192\alpha\alpha'\delta^2\mu\mu' \\
 & + 48\gamma\delta^3\mu\mu' - 48\delta^3\lambda\lambda' + 6\gamma\alpha\alpha'^2\delta\lambda + 6\gamma\alpha\alpha'\delta\lambda' + 48\alpha^2\alpha'^2(\xi\mu' + \xi'\mu) \\
 & + 24\alpha\alpha'\delta(\xi^2\mu' + \xi'^2\mu) - 96\alpha\alpha'\delta^2\xi\mu' + \xi'\mu - \alpha^2\alpha'^2\gamma^2 - 4\alpha\alpha'^2\xi^2 \\
 & - 4\alpha^2\alpha'\xi'^2 + 8\alpha^3\alpha'^3 - 4\gamma\delta^2\alpha^2\lambda^2 - 48\alpha^2\alpha'^2\delta^2 - 16\delta^2\alpha\alpha'\xi\xi' \\
 & + 64\alpha\alpha'\delta^4.
 \end{aligned}$$

209. W rozpatrywaniu związków zachodzących między temi kombinantami, przypuścimy (192) iż pierwszy z danych kształtów niema dwóch pierwszych wyrazów, a drugi dwóch ostatnich, czyli że mamy

$$U = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2,$$

$$V = 6c'x^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4.$$

Uczynimy  $ae = l$ ,  $bd = m$ ,  $cc' = n$ ,  $cad^2 + c'eb^2 = p^2$ , a otrzymamy

$$A = (l - 4m)^2 + 12n(l - 4m),$$

$$B = m^2 - p^2 + n(l - m),$$

$$R = l^3(l - 16m) + 96l^2p^2 - 72nl^2(l + 8m) + 1296l^2n^2,$$

wreszcie I, D, E

$$I = -l^2m^2 + 4lm^3 + p^2(l^2 - 2lm - 8m^2) + 6p^4$$

$$- n(l^3 + 6lm^2 - 16m^3) - 9nlp^2 + 12n^2(l^2 + lm - 2m^2),$$

$$D = -n^2\{9lm^2(l - 4m) - 6p^2(2l^2 - 7lm - 4m^2) - 27p^4$$

$$+ 16n(l - m)^2\}^3.$$

$$E = -l^2m^4 + 2lm^2p^2(l + 2m) - (l + 2m)^2p^4 - 2nlm^2(l + 2m)^2$$

$$+ 4p^6 + 2np^2(l + 2m)^3 - 18np^2lm^2 - n^2(l + 2m)^4$$

$$+ 36n^2lm^2(l + 2m) - 6np^4(l + 2m) - 6n^2p^2(l + 2m)^2$$

$$+ 27n^2p^4 + 4n^3(l + 2m)^3 - 108n^3lm^2.$$

Te wartości pozwolą nam sprawdzić równanie

$$16B^3 - AB^2 - 2IB + E = D.$$

Teraz, jeżeli za zasadnicze niezmienniki układu, weźmiemy współczynniki kształtów trzeciego i czwartego stopnia (206), to kombinanty A, D, E, I przedstawia się jako funkcye wyraźne tychże ilości; terażniejsze zaś zrównanie daje B w tychże wyrazach, i pokazuje że wszystkie przez nas użyte kombinanty mogą być wyrażone w tychże samych niezmiennikach.

Jakobiowemu, nie dostaje pod tą formą wyrazów ostatnich; nie ulega jednak trudności obliczenie jego dyskryminanta, co służy do sprawdzenia twierdzenia paragrafu 170.

210. Przypuszczenie, że kształt czwartego stopnia jest summą dwóch czwartych potęg, tak że dla każdej niknie niezmiennik T dogodnym nieraz bywa. Weźmy kształty  $au^4 + bv^4$ ,  $a'w^4 + b'z^4$ , z kąd  $u = \alpha_1x + \epsilon_1y$ . Użyjemy znaku (12) za  $\alpha_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1$ , i skróć

$$(12) (34) = L, \quad (13) (42) = M, \quad (14) (23) = N;$$

gdzie mamy  $L + M + N = 0$ . Otrzymamy niezmiennik S podstawiając  $\frac{d}{dy}$ ,  $-\frac{d}{dx}$  za  $x$  i  $y$  w czwartą potęgę i na niej działając. Działając z  $u$  na  $u$  otrzymujemy wypadek 0; lecz działając na  $V$  znajdziemy że S dla  $\lambda U + \mu V$  jest:

$$\lambda^2 ab(12)^4 + \lambda\mu \{ aa'(13)^4 + ab'(14)^4 + ba'(23)^4 + bb'(24)^4 \} \\ + \mu^2 a'b'(34)^4.$$

Kombinant zwany A będzie

$$\{ aa'(13)^4 + ab'(14)^4 + ba'(23)^4 + bb'(24)^4 \}^2 - 4aba'b'L^4;$$

$$B = -aba'b'L^2MN.$$

Niezmiennik T wyniknie z kształtu i jego Hessowego. U ma

za Hessowy  $ab(12)^2u^2v^2$ , a dla  $\lambda U + \mu V$ ,

$$T = \lambda^2 u \{ aba'(12)^2(13)^2(23)^2 + abb'(12)^2(14)^2(24)^2 \} \\ + \lambda \mu^2 \{ a'b'a(13)^2(14)^2(34)^2 + a'b'b(23)^2(24)^2(34)^2 \}.$$

Ztąd otrzymamy bezpośrednio E, D, I:

$$E = -a^2b^2a'^2b'^2L^4 \{ aa'N^2(13)^4 + ab'M^2(14)^4 + ba'M^2(23)^4 \\ + bb'N^2(24)^4 \}^2,$$

$$D = -a^2b^2a'^2b'^2L^6 \{ a^2a'^2N^2(13)^8 + a^2b'^2M^2(14)^8 + b^2a'^2M^2(23)^8 \\ + b^2b'^2N^2(24)^8 - 2MNa^2a'b'(13)^4(14)^4 - 2MNb^2a'b'(23)^4(24)^4 \\ - 2MNa'^2ab(13)^4(23)^4 - 2MNb'^2ab(14)^4(24)^4 \\ + 2M^2N^2aba'b'(M^2 + N^2 - 2L^2) \},$$

$$I = -aba'b'L^2 \{ a^2a'^2N^2(13)^8 + a^2b'^2M^2(14)^8 + b^2a'^2M^2(23)^8 \\ + b^2b'^2N^2(24)^8 + (M^2 + N^2 - 2L^2)[a^2a'b'(13)^4(14)^4 \\ + b^2a'b'(23)^4(24)^4 + a'^2ab(13)^4(23)^4 + b'^2ab(14)^4(24)^4] \\ + 2M^2N^2(M^2 + N^2 - 4L^2)aba'b' \},$$

za pomocą których sprawdzimy wartości otrzymane powyżej.

211. Kształt piątego stopnia. Przy badaniu kształtu tego używać będziemy formy kanonicznej

$$ax^5 + by^5 + cz^5,$$

do której, jak to dowiedliśmy (162) da się zawsze przywieść



kształt ogólny, ( $x + y + z$  uważamy jako równy zeru). Różniczkując kolejno względem  $x$  i  $y$  mamy

$$u_1 = ax^4 - cz^4,$$

$$u_2 = by^4 - cz^4.$$

Wyznacznik wypadkowy  $u_1$  i  $u_2$  jest dyskriminantem kształtu piątego stopnia, a ich kombinanty niezmiennikami tegoż. To ostatnie wyprowadza się bezpośrednio z wyrażeń paragrafu 210, zastępując w nich  $a$  i  $c$  przez  $a$  i  $b$ ,  $b$  i  $-c$  przez  $x'$  i  $b'$ . Mamy (24)=0, zkład  $M=0$ , (13)=1, (12)=-1, (34)=-1, (14)=-1, (23)=1. Spostrzegamy że  $B$  znika, a obliczając stałe, widzimy że każde dwa sześciiany dają się przez linijne przekształcenia przywieść do dwóch różniczek pojedynczego kształtu czwartego stopnia, z których dwie nie dadzą się zmienić na różniczki kształtu piątego stopnia, chyba że  $B=0$ . Kombinant  $A$  będzie

$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - 2abc(a + b + c).$$

Ten najprostszy niezmiennik kształtu piątego stopnia, zwany  $J$ , inną drogą otrzymać możemy. Kształt taki, ma (jak widzieliśmy) dwa spółzmienniki o spółczynnikach drugiego rzędu: Hessowy  $\overset{-2}{12}$ , będący dla formy kanonicznej

$$bcy^3z^3 + caz^3x^3 + abx^3y^3,$$

i spółzmiennik czwartego stopnia  $\overset{-4}{12}$  ( $S$  emananta czwartego stopnia) będący dla tejże formy

$$bcyz + cazx + abxy.$$

Dla formy ogólnej  $(a, b, c, d, e, f) \chi(x, y)^5$ , te spółmienniki są :

$$\begin{aligned} & (ac - b^2)x^6 + 3(ad - bc)x^5y + 3(ae + bd - 2c^2)x^4y^2 \\ & + (af + 7be - 8cd)x^3y^3 + 3(bf + ce - 2d^2)x^2y^4 \\ & + 3(cf - de)xy^5 + (df - e^2)y^6; \end{aligned}$$

$$(ae - 4bd + 3c^2)x^2 + (af - 3be + 2cd)xy + (bf - 4ce + 3d^2)y^2.$$

Otrzymujemy niezmienniki różniące się od najprostszego tylko o czynnik liczebny, formując albo dyskryminant z ostatniego spółmiennika, albo niezmiennik drugiego stopnia  $\overline{12}^6$  z Hessewego. W obu razach mamy

$$\begin{aligned} J = & a^2f^2 - 10abef + 4acdf + 16ace^2 - 12ad^2e + 16b^2df \\ & + 9b^2e^2 - 12bc^2f - 76bcde + 48bd^3 + 48c^3e - 32c^2d^2. \end{aligned}$$

212. Dyskryminant kształtu piątego stopnia otrzymuje się, albo tak jak przy czwartym stopniu, albo przez bezpośrednie rugowanie między różniczkami  $ax^4 - cz^4$ ,  $by^4 - cz^4$ . Jeżeli te znikają razem, to bierzemy  $abc$  za spólną wartość  $ax^4$ ,  $by^4$ ,  $cz^4$ ; zład

$$(bc)^{\frac{1}{4}} + (ca)^{\frac{1}{4}} + (ab)^{\frac{1}{4}} = 0$$

$$\begin{aligned} \{ & b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - 2abc(a + b + c) \}^2 - 128a^2b^2c^2(bc + ca \\ & + ab) = 0. \end{aligned}$$

Wartość ta równoważna jest  $J^2 - 128K$ , gdzie  $K$  jest niezmiennikiem o spółczynnikach osmego rzędu. Dla formy kanonicznej mamy

$$K = a^2b^2c^2(bc + ca + ab).$$

Ten nowy niezmiennik inaczej określić można: podaliśmy (121 i 122) wyrażenie na spółmiennik trzeciego stopnia, którego pierwiastki  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , wchodzą w skład formy kanonicznej. Spółmiennik ten, będący  $T$  emananta czwartego stopnia, ma na wyrażenie ogólne

$$\begin{aligned} & (ace - ad^2 - eb^2 + 2bcd - c^3)x^2 + (acf - ade - b^2f + bce \\ & + bd^2 - c^2d)x^2y + (adf - ae^2 - bcf + bde + c^2e - cd^2)xy^2 \\ & + (bdf - be^2 - c^2f + 2cde - d^2)y^3. \end{aligned}$$

Wartość ta zmienia się dla formy kanonicznej na  $abcxyz$ . Podstawiając, jak zwykle, symbole różniczkowe, i działając kwadratem kanonizanta na Hessowy, otrzymujemy niezmiennik  $K$ , jak to sprawdzić łatwo na formie kanonicznej. Można jeszcze toż  $K$  otrzymać, tworząc niezmiennik  $I$  (187) ze spółmiennika  $bxyz + cazx + abxy$ , i  $z$  kanonizanta. Znajdziemy:

$$\begin{aligned} K = & a^3cdf^3 - a^3f^2ce^2 - a^2f^3b^2d - 3a^3f^2d^2e - 3a^2f^3bc^2 + 5a^3fde^3 \\ & + 5af^3b^3c - 2a^3e^5 - 2b^5f^3 + a^2f^2b^2e^2 + 11a^2f^2bcde - 5a^2fbce^3 \\ & - 5af^2b^2de + 12a^2f^2bd^3 + 12a^2f^2c^3e - 30a^2fbd^2e^2 - 30af^2b^2c^2e \\ & + 15a^2bde^4 + 15b^4cef^2 - 21a^2f^2c^2d^2 - 34a^2f^2de^2 - 34af^2b^2cd^3 \\ & + 22a^2c^2e^4 + 22b^4d^2f^2 + 78a^2fcd^3e + 78af^2bc^3d - 48a^2cd^2e^3 \\ & - 48b^3c^2df^2 - 27a^2fd^5 - 27af^2c^5 + 18a^2d^4e^2 + 18b^2c^4f^2 \\ & + 133afb^2e^2cd - 54ab^2ce^4 - 54b^4de^2f - 18afb^2d^3e - 18afbc^3e^2 \\ & + 3ab^2d^2e^3 + 3b^3c^2e^2f - 220afbec^2d^2 + 106abc^2de^3 + 106b^3cd^2ef \\ & + 93afbcd^4 + 93afc^4de - 30abe^2cd^3 - 30b^2ec^3df - 9abed^5 \\ & - 9bec^5f - 38ac^4e^3 - 38b^3d^4f - 42afc^3d^2 + 8ac^3d^2e^2 + 8b^2c^2d^3f \\ & + 6ac^2d^4e + 6bc^4d^3f + 27b^4e^4 + 38b^3c^2d^3 + 38b^2e^3c^3 - 81b^3e^3cd \\ & + 25b^2e^3c^2d - 57b^2ecd^4 - 57be^2c^4d + 18b^3d^5 + 18c^6e^2 \\ & + 74bec^3d^3 - 24bc^2d^5 - 24c^5d^2e + 8c^4d^4. \end{aligned}$$

Dyskryminant wyprowadza się albo z  $K$ , albo z formuł na wyznacznik wypadkowy dwóch kształtów czwartego stopnia. Otrzymamy :

$$\begin{aligned}
 R = & a^4f^4 - 20a^3f^3be - 120a^3f^3cd + 160(a^3f^2ce^2 + a^2f^3b^2d) \\
 & + 360(a^3f^2d^2e + a^2f^3bc^2) - 640(a^3fde^3 + af^3b^3e) + 256(a^3e^5 \\
 & + b^5f^3) - 10a^2f^2b^2e^2 - 1640a^2f^2becd + 320(a^2fbc^3c + ofdb^3ed) \\
 & - 1440a^2f^2(bd^3 + c^3e) + 4080(a^2fbe^2d^2 + af^2b^2ec^2) \\
 & + 1920(a^2be^4d + b^4ecf^2) + 2640a^2f^2c^2d^2 + 4480(a^2fc^2de^2 \\
 & + af^2b^2cd^2) - 2560(a^2c^2e^4 + b^4d^2f^2) - 10080(a^2fcd^3e + af^2bc^3d) \\
 & + 5760(a^2cd^2e^3 + b^3c^2df^2) + 3456(a^2d^5f + af^2c^5) \\
 & - 2160(a^2d^4e^2 + b^2c^4f^2) - 180afb^3c^3 - 14920afb^2e^2cd \\
 & + 7200(ab^2e^4c + b^4e^2df) + 960af(b^2ed^3 + be^2c^5) \\
 & - 600(ab^2e^3d^2 + b^3e^2c^2f) + 28480afbec^2d^2 - 16000(abc^3c^2d \\
 & + b^3ecd^2f) - 11520af(bcd^4 + c^4de) + 7200(abe^2cd^3 + b^2ec^3df) \\
 & + 6400(ac^4e^3 + b^3d^4f) + 5120afc^3d^3 - 3200(ae^2c^3d^2 + b^2c^3d^3f) \\
 & - 3375b^2e^4 + 9000b^3c^3c^2 - 4000(b^3e^2d^3 + b^2e^3c^3) + 2000b^2e^2c^2d^2.
 \end{aligned}$$

Dyskryminant może przeto być wyrażony jak następuje. Dajmy :

$$\begin{aligned}
 A = & a^2f^2 - 3hafbe + 65afed - 32ace^2 - 32b^2df - 12aed^2 \\
 & - 12bc^2f + 225b^2e^2 - 820becd + 480(bd^3 + c^3e) - 320c^2d^2; \\
 B = & 3a^2f^2 - 22afbe - 12afcd + 64(ace^2 + b^2df) + 36(aed^2 - bc^2f) \\
 & - 45b^2e^2 + 20becd; \\
 C = & a^2fe + 2afbd - 9abe^2 - 9abc^2 + 32acde - 18ad^3 + 6b^2ef \\
 & - 15bec^2 + 10bcd^2; \\
 D = & 3a^2df - 2a^2e^2 - 9afbc + abed + 18ac^2e - 12acd^2 + 6b^3f \\
 & - 15b^2ec + 10b^2d^2;
 \end{aligned}$$



Dajmy nadto że  $C'$  i  $D'$  są funkcjami dopełniającymi  $C$  i  $D$  (które stają się zerami gdy trzy pierwiastki będą równymi), a dyskryminant będzie równy trzy razy wziętej ilości :

$$AB + 64CC' - 64DD'.$$

213. Kształty piątego stopnia mają nadto niezmiennik dwónastego stopnia który jest dyskryminantem kanonizanta. Forma kanoniczna kanonizanta jest :  $abcxyz$ , dyskryminanta zaś  $-a^4b^4c^4$ . Oznaczmy go przez  $L$ . Pan Fua de Bruno obliczył dla przypadku ogólnego :

$$\begin{aligned} L = & a^4c^2d^2f^4 - 2(a^4c^2de^2f^3) + (a^4c^2e^4f^2) - 6(a^4cd^3ef^3) \\ & + 16(a^4cd^2e^3f^2) - 14(a^4cde^5f) + 4(a^4ce^7) + 4(a^4d^5f^3) \\ & - 11(a^4d^4e^2f^2) + 10(a^4d^3e^4f) - 3(a^4d^2e^6) + 4a^3b^2cde^2f^3 \\ & - 2(a^3b^2ce^4f^2) + 6(a^3b^2d^3ef^3) - 16(a^3b^2d^2e^3f^2) + 14(a^3b^2de^5f) \\ & - 4(a^3b^2e^7) + 50a^3bc^2d^2ef^3 - 82(a^3bc^2de^3f^2) + 32(a^3bc^2e^5f) \\ & - 36(a^3bcd^4f^3) + 30a^3bcd^3e^2f^2 + 30(a^3bc^2de^4f) - 24(a^3bcde^6) \\ & + 28(a^3bd^5ef^2) - 50(a^3bd^4e^3f) + 22(a^3bd^3e^5) + 16(a^3c^4e^5) \\ & + 22a^3c^3d^3f^3 + 50(a^3c^3d^2e^2f^2) - 16(a^3c^3de^4f) - 16(a^3c^3e^6) \\ & - 54(a^3c^2d^4ef^2) - 46(a^3c^2d^3e^3f) + 60(a^3c^2d^2e^5) + 6(a^3cd^6f^2) \\ & + 70(a^3cd^5ef^2) - 56a^3cd^4e^4 - 18(a^3d^7ef) + 14(a^3d^6e^3) \\ & + a^2b^4e^4f^2 + 132a^2b^3cde^3f^2 - 50(a^2b^3ce^5f) + 14(a^2b^3d^3e^2f^2) \\ & - 60(a^2b^3d^2e^4f) + 30(a^2b^3de^5) - 168a^2b^2c^2d^2e^2f^2 \\ & + 48(a^2b^2cd^2e^4f) + 4(a^2b^2c^2e^6) + 48(a^2b^2cd^4ef^2) + 2(a^2b^2cd^3e^3f) \\ & - 6(a^2b^2cd^2e^5) - 62(a^2b^2d^6f^2) + 90(a^2b^2d^5e^2f) - 39(a^2b^2d^4e^4) \\ & - 112(a^2bc^4e^4f) - 82a^2bc^3d^3ef^2 + 170a^2bc^3d^2e^3f + 104a^2bc^3de^5 \\ & + 108(a^2bc^2cd^5f^2) + 42(a^2bc^2d^4e^2f) - 298(a^2bc^2d^3e^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 242(a^2bcd^8ef) + 294(a^2bcd^5e^3) + 62(a^2bd^8f) - 78(a^2bd^7e^2) \\
& + 164(a^2c^5de^3f) + 24(a^2c^5e^5) - 63a^2c^4d^4f^2 - 394(a^2c^4d^3e^2f) \\
& - 194(a^2c^4d^2e^4) + 324(a^2c^3d^5ef) + 440(a^2c^3d^4e^3) - 78(a^2c^2d^7f) \\
& - 428(a^2c^2d^6e^2) + 180(a^2cd^8e) - 27(a^2d^{10}) + 18ab^5c^5f \\
& - 38ab^4cde^4f + 36(ab^4ce^5) + 204(ab^4d^3e^3f) - 102(ab^4d^2e^5) \\
& - 308(ab^3c^2de^5) - 42ab^3c^2d^2e^3f - 674(ab^3cd^4e^2f) + 590(ab^3cd^3e^4) \\
& + 128(ab^3d^5ef) - 138(ab^3d^3e^5) + 4(ab^3c^4e^5) + 652(ab^2c^3d^2e^4) \\
& + 714ab^2c^3d^3e^2f + 498(ab^2c^2d^5ef) - 1246(ab^2c^5d^4e^3) \\
& - 224(ab^2cd^7f) + 516(ab^2cd^6e^2) - 48(ab^2d^8e) - 136(abc^3de^4) \\
& - 1078abc^4d^4ef - 206(abc^4d^3e^3) + 342(abc^3d^6f) \\
& + 804(abc^3d^5e^2) - 506(abc^2d^7e) + 90(abcd^9) - 16(ac^7e^4) \\
& + 220(ac^6d^2e^3) - 106ac^5d^5f - 392(ac^5d^4e^2) + 222(ac^4d^6e) \\
& - 40(ac^3d^8) - 27b^6e^6 + 234b^5cde^5 - 32(b^5d^3e^4) \\
& - 713b^4c^2d^2e^4 + 246(b^4cd^4e^3) - 4(b^4d^6e^2) + 866b^3c^3d^3e^3 \\
& - 550(b^3c^2d^5e^2) + 56(b^3cd^7e) + 4(b^3d^9) - 139b^2c^4d^4e^2 \\
& + 354(b^2c^3d^6e) - 83(b^2c^2d^8) - 330bc^5d^5e + 72(bc^4d^7) \\
& - 16c^6d^6.
\end{aligned}$$

Ten niezmiennik staje się zerem gdy  $b = c = d = 0$ .

Wynika ztąd że formuła  $ax^5 + 5ex^4y + fy^5$ , do której pan Jerrard sprowadził formę ogólną przez nielinijne przekształcenia, nie może mieć miejsca jak tylko dla  $L = 0$ .

214. Weźmy J, K, L, za niezmienniki zasadnicze kształtu, i zobaczymy czy inne niezmienniki w ich wyrazach napisać się dadzą. Zauważyć naprzód należy że zamiana  $x$  na  $y$ , lub  $x$  na  $z$ , stanowi przeobrażenie linijne mające  $-1$  za moduł. Ztąd

jeżeli mamy taki niezmiennik, że po przeobrażeniu znajduje się pomnożonym przez potęgę parzystą modułu przeobrażenia, to dla formy kanonicznej nie ulegnie zmianie przez przemianę między sobą  $a, b, c$ ; a więc jest ich funkcją symetryczną. Jeżeli zaś niezmiennik rozmnożony jest przez potęgę nieparzystą modułu dla formy kanonicznej, zmieni on znak, gdy przemienimy między sobą dwie z trzech ilości  $a, b, c$ ; czyli będzie iloczynem różnic  $(a - b)(b - c)(c - a)$  przez funkcją symetryczną z  $a, b, c$ . Zauważmy nadto że w przeobrażeniu niezmiennik znajduje się pomnożonym przez potęgę modułu mającą wykładnik równy jego ważności, czyli  $\frac{5}{2}n$  (123) dla niezmiennika rzędu  $n$ , kształtu piątego stopnia : kształt ten nie może mieć niezmiennika rzędu nieparzystego; jeżeli rząd  $n$  pomnożymy jest przez 4, ważność będzie liczbą parzystą, a przemiana między  $x$  i  $y$  w niezmienniku nie zmieni jego znaku; przeciwnie zaś, jeżeli rząd niezmiennika nie jest podzielny przez 4, niezmiennik będzie skośnym, czyli zmieni znak w skutek przemiany między  $x$  i  $y$ . Zbadajmy najprzód niezmienniki pierwszego gatunku, które jak wiemy są, dla formy kanonicznej funkcjami symetrycznymi  $a, b, c$ . Mamy :

$$J = (bc + ca + ab)^2 - 4abc(a + b + c),$$

$$K = a^2b^2c^2(bc + ca + ab),$$

$$L = a^4b^4c^4.$$

Zrównania te dają :

$$H = \frac{1}{4} (K^2 - JL) = a^5b^5c^5(a + b + c) (*);$$

---

(\*) Czytelnik pilnie baczyć powinien, że chociaż w przypadku kanonicznej formy,  $a^5b^5c^5(a + b + c)$  jest podzielne przez  $a^4b^4c^4$ , nie mamy prawa wnosić że  $H$  jest w ogóle podzielne przez  $L$ , wyjąwszy przypadku dla któregoby dowiedziono że  $abc(a + b + c)$  jest także niezmiennikiem.



wynika ztąd, że jeżeli kształt piątego stopnia sprowadzimy do formy kanonicznej przez podstawienie mające jedność za moduł, nowe wartości dla  $a, b, c$  będą pierwiastkami równania trzeciego stopnia

$$\alpha^3 - \frac{H}{L^{\frac{1}{3}}}\alpha^2 + \frac{K}{L^{\frac{2}{3}}}\alpha - L^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Ponieważ rząd funkcji symetrycznej z  $a, b, c$ , jest ze względu na współczynniki równym jej ważności, podzielnej przez cztery, więc funkcja sama będzie wymierną względem  $J, K, L$ .

Jeżeli więc mamy niezmiennik ze współczynnikami rzędu podzielnego przez cztery, to dowiedliśmy, że dla formy kanonicznej, możemy napisać funkcją wymierną  $J, K, L$ , mającą tą samą wartość co pierwsza, a więc równą jej tożsamościowo. Byłoby niedorzecznością przypuszczać że funkcja całkowita współczynników może być równą ułamkowi nie dającemu się uprościć; wynika ztąd że każdy niezmiennik, prócz skośnych jest funkcją całkowitą  $J, K, L$ .

Uczymy  $a = b = c = 0$ ,  $J, K, L$  znikną. Więc jeżeli trzy pierwiastki kształtu piątego stopnia są równymi, trzy jego niezmienniki niktą (\*). Jeżeli  $a, b, e, f$  są równe 0, będzie  $J = -32c^2d^2$ ,  $L = -16c^6d^6$ , a więc  $J^3 - 2048L = 0$ . Ztąd kształty piątego stopnia mające dwie pary pierwiastków równych, mają dyskryminant równy 0, oraz  $J^3 = 2048L$ .

215. Najprostszy skośny niezmiennik otrzymuje się tworząc

---

(\*) W ogóle wszystkie niezmienniki kształtu danego niktą, jeżeli jest więcej jak  $\frac{1}{2}n$  pierwiastków równych między sobą; łatwo bowiem dostrzedz, że w razie zniknięcia więcej niż połowy współczynników, licząc takowe od jednego końca, nie pozostaną one w liczbie dostatecznej do utworzenia wyrazu ważności żądanej (123).



wyznacznik wypadkowy kształtu  $ax^5 + by^5 + cz^5$ , i jego kanonizanta  $abcxyz$ . Podstawiając trzy pierwiastki ostatniego w kształt dany, i mnożąc te dwie ilości przez siebie, otrzymany niezmiennik osmnastego rzędu:

$$a^5b^5c^5(b-c)(c-a)(a-b).$$

Przed tem odkryciem P. Hermita (\*), możliwość istnienia niezmienników skośnych nie była dowiedziona. *Philosophical Transactions* (1858, str. 455) zawierają ten niezmiennik o dziewięciuset wyrazach obliczony przez P. Salmona. Pierwsze wyrazy są:  $a^7d^5f^6 - a^5c^6f^7$ ; a jest to istotny skośny niezmiennik, bo wyrazy dopełniające się są znaków przeciwnych, a wyrazy symetryczne znoszą się. Dowodzenie użyte w paragrafie 214 pokazuje że każdy niezmiennik skośny kształtu piątego stopnia, jest iloczynem jego niezmiennika J przez funkcję wymierną J, K, L.

216. Kwadrat I jako będący trzydziestego szóstego stopnia da się wymiennie wyrazić w funkcji J, K, L (214). Łatwo go napisać.

Formując dyskryminant ilości (214),

$$\alpha^3 - \frac{K}{L^{\frac{1}{2}}}\alpha^2 + \frac{K}{L^{\frac{1}{2}}}\alpha - L^{\frac{1}{2}},$$

(\*) (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, tom IX, str. 472). P. Hermite działa na nowej formie kanonicznej, której  $x$  i  $y$  są dwoma czynnikiemami spółzmiennika czwartego stopnia, a jest on taki że:  $ae - 4bd + 3c^2$  i  $bf - 4ce + 3d^2$  nikią razem, a spółzmiennik czwartego stopnia, staje się  $xy$ . Metoda ta przedstawia to ułatwienie że symbol  $z$  niej wynikający jest  $\frac{d^2}{dxdy}$ , i że wiele spółzmienników jakim daje początek są nadzwyczaj prostymi. Mimo to P. Salmon użył metody P. Sylwestra do obliczenia niezmiennika skośnego kształtu piątego stopnia.

otrzymujemy iloczyn z kwadratów różnic  $a, b, c$ , w funkcji  $J, K, L$ , czyli

$$J^3L = H^2K^2 + 18HKL^2 - 27L^4 - 4K^3L^2 - 4H^3;$$

a wstawivszy  $\frac{1}{4}(K^2 - JL)$  za  $H$ , i podzieliwszy przez  $L$  przyjdzie

$$16I = JK^4 + 8LK^3 - 2J^2LK^2 - 72JKL^2 - 432L^3 + J^2L^2.$$

217. Nie mam zamiaru wchodzenia w szczegóły dotyczące niezmienników kształtów piątego stopnia. Najciekawszymi po wzmiankowanych są linijne spółzmienniki. Działając dwa razy spółzmiennikiem czwartego stopnia  $bcyz + cazx + abxy$  na kształt dany, otrzymamy wypadek pierwszego stopnia, który dla formy kanonicznej będzie

$$abc(bcx + cay + abz).$$

Rugownik między tym niezmiennikiem a kanonizantem daje niezmiennik  $I$  p. Hermite; rugowanie zaś między tymże niezmiennikiem a kształtem danym da  $I(J^2 - 3K)$ . Tak więc jeżeli  $I$  zniknie, zrównanie piątego stopnia rozwiąże się natychmiast, bo spółzmiennik linijny wydaje jeden pierwiastek; toż samo ma miejsce dla  $J^2 - 3K = 0$ .

Działając spółzmiennikiem linijnym na spółzmiennik czwartego stopnia, otrzymamy inny linijny spółzmiennik siódmego rzędu

$$\begin{aligned} abc \{ & x(a^2c^2 - a^2b^2 + ab^2c - abc^2) \\ & + y(a^2b^2 - b^2c^2 + abc^2 - a^2bc) \\ & + z(b^2c^2 - c^2a^2 + a^2bc - ab^2c) \}. \end{aligned}$$

Dowiedliśmy że wszystkie spółzmienniki wyrazić można w funkcji dwóch z pomiędzy nich i niezmienników. P. Hermitę wykonywa przeobrażenie biorąc za  $x$  i  $y$  dwa linijne spółzmienniki, a spółzmienniki przeobrażonego kształtu będą niezmiennikami. Ich wartość jednak nie jest prostą, a otrzymanie wypadku niepodobnem w razie gdyby dwa spółzmienniki były równemi sobie, co ma miejsce gdy ich wyznacznik wypadkowy  $JK + 9L = 0$ . Formując wyznacznik Jakobiowy dwóch spółzmienników, z których jeden czwartego stopnia a drugi jakiegokolwiek, otrzymamy spółzmiennik tego samego co ostatni co do zmiennych stopnia, a wyższego o dwa co do spółzmienników. W ten to sposób wywodzi się ze spółzmiennika kanonicznego, inny spółzmiennik trzeciego stopnia

$$abc \{ bc(y^2z - yz^2) + ca(z^2x - zx^2) + ab(x^2y - xy^2) \},$$

łatwy także do otrzymania, działając spółzmiennikiem kanonicznym na Hessowy. Kształty piątego stopnia mają spółzmienniki linijne wszelkich stopni nieparzystych wyższych nad trzeci; wynika ztąd, prawem wzajemności, że kształty stopni nieparzystych, wyższych nad trzeci, posiadają spółzmienniki linijne za spółzmienniki piątego stopnia.

218. Wiemy że znak dyskryminanta daje bezpośrednio poznać, czy kształt z którego pochodzi, przyjmuje parzystą czy też nieparzystą liczbę pierwiastków urojonych. Rozłóżmy kształt dany na rzeczywiste czynniki drugiego stopnia, a jego dyskryminant (91) równy jest iloczynowi dyskryminantów wszystkich czynników drugiego stopnia, rozmnożonemu przez kwadrat z iloczynu wyznaczników wypadkowych wszelkich par czynników. Te wyznaczniki są rzeczywistemi, a dodatnimi ich kwadraty, więc znak dyskryminanta zależy jedynie od dyskryminantów czynników drugiego stopnia. Lecz kwadrat różnicy dwóch pierwiastków równania drugiego stopnia, jest dodatnym



lub odjemnym, w miarę jak pierwiastki są rzeczywistymi lub urojonymi, a iloczyn kwadratów z różnic pierwiastków równania jakiegokolwiek, jest dodatnym gdy równanie przyjmuje parzystą liczbę par pierwiastków urojonych, odjemnym zaś gdy liczba tych par jest nieparzystą. Piszemy dyskryminant dając znak więcej iloczynowi dwóch skrajnych wyrazów; będzie on miał ten sam znak co iloczyn kwadratów z różnic pierwiastków, kiedy kształt będzie stopnia  $4m$  lub  $4m + 1$ , znak zaś przeciwny gdy stopień ten równy  $4m + 2$  lub  $4m + 3$ . A zatem dla kształtu piątego stopnia, jeżeli dyskryminant jest dodatni, istnieją cztery pierwiastki urojone lub żaden; gdy zaś dwa takie pierwiastki istnieją dyskryminant jest odjemnym.

Pozostają nam dwa przypadki do zbadania: gdy wszystkie pierwiastki są rzeczywistymi, lub gdy jeden tylko jest takim.

219. Dla rozróżnienia tych przypadków rozmaicie postępować można. Następujący sposób jest najprostszym (\*); opiera on się na twierdzeniu Sturma. Weźmy jak zwykle  $J$  za niezmiennik; mamy

$$H = b^2 - ac,$$

$$S = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

$$M = a^2e^2 - adf + 3abcf - 3abde + 4acd^2 - 4ac^2e \\ - 2b^3f + 5b^2ce + 2b^2d^2 - 8bc^2d + 3c^4.$$

Pierwsze wyrazy Sturma są proporcjonalne do ilości

$$a, a, H, 5HS + 9aT, -HJ + 12SM + 4S^3 - 216T^2,$$

---

(\*) Wartości te obliczył P. Roberts (*Quarterly Journal*, tom IV, str. 173). Tablica funkcji Sturma obliczona przez P. Cayley (*Philosophical Transactions*, tom CXLVII, str. 735), zawiera w odniesieniu do czwartej i piątej funkcji, błędy w znakach na które czytelnik baczyć powinien.



z których ostatnia jest dyskryminantem, a warunki podane przez twierdzenie Sturma w celu odróżnienia przypadku dającego cztery pierwiastki urojone, od przypadku w którym mamy same pierwiastki rzeczywiste, zależą na tem że w drugim razie, tak dyskryminant jak i ilości

$$H, SHS + 9aT, - HJ + \dots$$

są dodatnimi.

220. Zastosujmy te warunki do formy kanonicznej

$$(c - a)^5 + 5cx^4y + 10cx^3y^2 + 10cx^2y^3 + 5cxy^4 + (c - b)y^5,$$

w której równość współczynników, z wyjątkiem dwóch, czyni łatwym rachunek bezpośredni. Znajdujemy współczynniki  $e - a$ ,  $c - a$ ,  $ac - a^2c^2$ ; a że ostatni jest widocznie ujemnym, nie potrzebujemy postępować dalej i widzimy że równanie dane posiadać musi pierwiastki urojone. Widzimy nadto że kiedy niezmiennik  $L$  równania piątego stopnia jest dodatnim, równanie nie może mieć samych tylko rzeczywistych pierwiastków.

Jeżeli zaś  $L$  jest ujemnym, czynniki kanonizanta będą urojonemi, a forma kanoniczna zamieni się na

$$a(-2x)^5 + \{c - d\sqrt{(-1)}\} \{x + y\sqrt{(-1)}\}^5 \\ + \{c + d\sqrt{(-1)}\} \{x - y\sqrt{(-1)}\}^5,$$

czyli na

$$dy^5 + 5cy^4x - 10dy^3x^2 - 10cy^2x^3 + 5dyx^4 + (c - 16a)x^5.$$

Dajmy, dla skrócenia  $c^2 + d^2 = r$ , a stałemi funkcji Sturma będą

$$d, d, r^2, r^4, r^2(-4a^2d^2 + 20acr^2 + 5r^4),$$

a ponieważ dyskryminant jest dodatnym, pierwiastki będą rzeczywistymi jeżeli  $d$  i  $-4a^2d^2 + 20acr^2 + 5r^4$  są dodatne (\*).

221. W praktyce, poznaki istnienia pierwiastków urojonych, wynikające z twierdzenia Sturm są dogodniejszymi od innych (\*\*), bo funkcy które obliczyć wypada mają współczynniki czyli *criteria* dane w wyrazach niezmienników; dokonali tego PP. Hermite i Sylwester. Zaczniemy od przedstawienia nadzwyczaj dowcipnej metody tego ostatniego.

Wiemy że mając dane niezmienniki  $J, K, L$ , możemy oznaczyć  $a, b, c$  formy kanonicznej przez zrównanie trzeciego stopnia, i że niezmiennikom danym odpowiada pewien kształt piątego stopnia, który jednak nie zawsze jest rzeczywistym. Widzieliśmy bowiem (216) że, aby to miało miejsce  $J, K, L$  powinny być takie aby  $G$  było dodatnem, z kądem

$$G = JK^4 + 8LK^3 - 2J^2LK^2 - 72JL^2K - 432L^3 + J^3L^2.$$

Dowiedzieliśmy że  $G$  jest kwadratem zupełnym funkcy rzeczywistej współczynników kształtu ogólnego  $a^7d^5f^6 + \dots$ , będącej rugownikiem a zarazem kanonizantem kształtu danego, przeto

(\*) Dając ten wypadek, podejrzewam jego prawdziwość, gdyż zdaje mi się być w sprzeczności z wypadkami innych metod.

(Przyp. P. Salmon.)

(\*\*) *Criteria* te są liczne, gdyż każda symetryczna funkcy kwadratów z różnic pierwiastków  $\Sigma(a - \epsilon)^2$  musi być dodatną gdy wszystkie pierwiastki są rzeczywistymi. Napiszmy funkcyą będącą niezmiennikiem, a jeżeli ta jest odjemną, zrównanie przyjmuje pierwiastki urojone. Ale dla pierwiastków takich funkcy mogą być dodatnemi; idzie więc o znalezienie jednego *criterium* lub ich układu, któryby się sprawdzał w razie gdy nie wszystkie pierwiastki są rzeczywistymi,

koniecznie dodatniej. Możemy zastąpić  $K$  przez jego wartość wyciągniętą z  $J^2 - 128K = D$ . Przyjdzie

$$\begin{aligned} G &= JD^{\frac{1}{2}} - 4(J^3 + 2^8L)D^{\frac{3}{2}} + (6J^3 - 29 \cdot 2^{10}L)J^2D^{\frac{5}{2}} \\ &- (4J^6 - 61 \cdot 2^8J^3L - 9 \cdot 2^{22}L^2)JD^{\frac{7}{2}} \\ &+ (J^3 \cdot 2^{14}L)^2(J^3 - 27 \cdot 2^{10}L). \end{aligned}$$

Weźmy  $J, K, L$  za spółrzedne punktu w przestrzeni (\*);  $G$  będzie powierzchnią. Punkta położone z jednej strony jako czyniące  $G$  dodatnem, odpowiadają kształtom rzeczywistym piątego stopnia, punkta zaś przeciwne, czyniąc  $G$  odjemnem, odpowiadają kształtom piątego stopnia o spółczynnikach urojonych (\*\*).

222 Teraz zamierzamy dowieść, że jeżeli spółczynniki równania zmieniają się w sposób ciągły, to na przejściu z pierwiastków rzeczywistych do urojonych znaleźć musimy pierwiastki równe. Dajmy że  $\varphi(x)$  przez bardzo małą zmianę spółczynników staje się  $\varphi(x) + \epsilon\psi(x)$ ;  $\epsilon$  jest nieskończenie małym przyrostem,  $\alpha$  przyrostkiem pierwszego równania,  $\alpha + h$  drugiego. Będzie przeto  $\varphi(\alpha + h) + \epsilon\psi(\alpha) = 0$ , a jeżeli  $\varphi(\alpha) = 0$ , to  $h\varphi'(\alpha) + \epsilon\psi(\alpha) = 0$ , da wartość rzeczywistą na  $h$ . Następny pierwiastek  $\alpha + h$  musi być rzeczywistym. Lecz jeżeli  $\varphi'(\alpha)$  znika wraz z  $\varphi(\alpha)$ , to najmniejszy wyraz w rozwinięciu  $\varphi(\alpha + h)$  jest  $h^2$ , a  $h$  może być urojonym. Czyli że gdy kształt ma pierwiastki równe, kształt pochodny może mieć pierwiastki urojone.

(\*) P. Sylwester bierze  $L$  za  $x$ ,  $J$  za  $y$ ,  $D$  za  $z$ .

(\*\*) Punkta dla których  $G = 0$ , odpowiadają kształtom rzeczywistym; w razie tym, równanie będzie rozbieżnem. Dowiedliśmy bowiem że dla  $G = 0$ , dwa ze spółczynników kształtu kanonicznego są równemi między sobą, a ztąd równanie przybiera kształt  $ax^5 + ay^5 + b(x+y)^5 = 0$ .



Wynika stąd że przedstawiając, jak w paragrafie 221, układy wartości na  $J, D, L$ , przez punkta w przestrzeni, odpowiadać one będą kształtom piątego stopnia mającym też samą liczbę pierwiastków rzeczywistych, byleśmy od jednego do drugiego przejść mogli bez napotkania płaszczyzny  $D$  i powierzchni  $G$ . Jeżeli punkta leżą z obu stron  $D$ , to na przejściu z jednych do drugich może leżeć punkt  $D = 0$ , w którym zmiana charakteru pierwiastków zajść może. Dwa punkta czyniące  $G$  dodatnem, przedzielone przez płachty powierzchni  $G$ , nie pozwalają abyśmy w kształcie samym przeszli z jednego do drugiego bez naruszenia ciągłości, gdyż jeżeli w punkcie spotkania powierzchni mamy  $G$  ujemne, to odpowiedni kształt przypuszcza pierwiastki urojone. Dla dwóch zaś punktów nie przedzielonych wzmiankowanym sposobem, możliwe jest zawsze (w sposób ciągły) przejście z jednego do drugiego, bez spotkania zmiany w odpowiednim kształcie.

Ostatnia metoda P. Sylwestra polega na przeprowadzeniu dyskusji nad  $G$ , pokazującej że punkta dla których  $G$  jest dodatnem (\*), dadzą się podzielić na trzy części poprzedzielane przez  $D$  i  $G$ . Widocznie przeto kształty piątego stopnia rozpadają się na trzy gatunki, (to jest mająć cztery, dwa lub zero pierwiastków urojonych), a punkta trzech części odpowiadają tym trzem gatunkom. Nie mamy czasu wdawania się w rozbiór powierzchni  $G$  za pomocą której P. Sylwester prawd tych dowodzi, lecz następane rozumowanie przekona czytelnika że są one niezbitemi.

223. Jedna z trzech części posiadająca punkta na stronie odjemnej  $D$ , odpowiada kształtowi mającemu dwa pierwiastki urojone. Weźmy naprzód  $D$  dodatne : widzieliśmy (222) że zmiana charakteru pierwiastków ma miejsce tylko dla  $D = 0$ ,

---

(\*) P. Sylwester nazywa je punktami ułatwiającemi.



co zwraca naszą uwagę na przecięcie  $G$  przez  $D$ . Czyniąc  $D=0$  w  $G$  wyprowadzamy na jaw czynnik kwadratowy (221), i okaże się że  $G$  dotyka  $D$  wzdłuż krzywej  $7^3 - 2L''$ , przecina zaś też  $D$  wzdłuż  $J^3 - 27.2^{10}L$ . Jeżeli powierzchnia przecina tylko płaszczyznę, linia przecięcia nie będzie linią przedziału między punktami leżącymi z jednej strony powierzchni. Przeźnijmy na przykład stół, a punkta leżące z jednej strony przecięcia, wolny między sobą zachowują związek. Toż samo dzieć się będzie z punktami leżącymi z drugiej strony przecięcia. Lecz jeżeli płaszczyzna dotyka powierzchni, jeżeli na przykład walec postawimy na stole, to tylko punkta zewnątrz walca znajdujące się, wolny związek między sobą mają, linia zetknięcia stanowi linią graniczną, przecinającą związek między punktami zewnętrznymi względem walca, a położonemi z jednej lub z drugiej strony linii granicznej.

P. Sylwester twierdzi, że nakreśliwszy w ćwiartce dla której  $J$  i  $L$  są odjemnemi, na płaszczyźnie  $xy$  krzywą  $J^3 - 2^{10}L$ , wszystkie punkta ułatwiające leżące po za przestrzenią oznaczoną przez tę krzywą i oś  $L=0$ , tworzą część oddzielną od innych, a odpowiadającą pięciu pierwiastkom rzeczywistym.

224. Dla bliższego rozpatrzenia się w tej powierzchni, tworzę dyskryminant  $G$  uważany za funkcją  $K$ ; będzie

$$K = -L^7(J + 27L)^3.$$

Jeżeli  $J$  i  $L$  są odjemne dyskryminant takimże będzie, a dla zrównania w  $K$  znajdziemy dwa tylko pierwiastki rzeczywiste. Każdemu przeto układowi wartości na  $J$  i  $L$ , odpowiadają dwie wartości na  $K$  i dwie na  $D$ , a powierzchnia stanowi jedną z dwóch płacht. Mówię że między płachtami znajduje się przestrzeń dla której  $G$  dodatnem. Bo jeżeli  $G = JD^4 + \dots$  to rozłożywszy na czynniki przyjdzie

$$G = J(D - \alpha)(D - \beta_1\{D - \gamma\}^2 + \delta^2);$$

a  $J$  odjemne, pociąga dla  $D$  w obchodzącej nas przestrzeni, wartość pośrednią między  $\alpha$  i  $\beta$ , jako jedynie zdolną uczynić  $G$  dodatnem. Ostatni wyraz równania będący

$$(J^3 - 2^{11}L)^3(J^2 - 27 \cdot 2^{10}L),$$

przybierze znak przeciwny  $L$ , w razie zbliżania się  $J^3$  do  $2^{11}L$ , a więc stanie się dodatnym. A ponieważ współczynnik  $D^4$  jest odjemnym, z jednej przeto strony linii  $J^3 = 2^{11}L$  wartości będą dodatne, a odjemne z drugiej, czyli że jedna z płacht powierzchni leży nad, a druga pod  $D$ . Lecz górna płachta dotyka  $D$  wzdłuż  $J^3 = 2^{11}L$ , gdyż znak przedostatniego wyrazu równania dla  $D$  przekonywa że gdy ostatni wyraz równy zeru, dwa pierwiastki stają się  $0$  lub odjemne. Więc wyłożona teoria pokazuje że krzywa  $J^3 = 2^{11}L$  tworzy linią graniczną przecinającą połączenie punktów ułatwiających na górnej stronie  $D$ .  $L = 0$  toż samo czyni w drugim kierunku, gdyż  $L$  dodatne dyskryminant dodatnym czyni, i sprawia że  $D$  ma cztery pierwiastki rzeczywiste lub cztery urojone. Że zaś pierwsza stała funkcyja Sturma jest proporcjonalna do  $L(J^3 + 12L)$ , więc dla  $-J$  a  $+L$  bardzo małego, ta stała będzie odjemną. Tuż za  $L$ , równanie dla  $D$  przyjmuje cztery pierwiastki urojone, a więc powierzchnia przestaje istnieć. Ułatwiające przeto punkta leżące wewnątrz powierzchni czyli między jej płachtami, przecina płaszczyzna  $L$ , na której łączą się dwie płachty, i odosobnia je od punktów po za nią leżących, jak to powyżej widzieliśmy.

Wypadałoby w podobne wejść szczegóły dla dowiedzenia że wszystkie inne ułatwiające punkta mają wolny między sobą związek. Linia styczności  $2^{11}L - J^3$  nie stanowi linii przedziału w ćwiartce w której  $J$  i  $L$  są dodatnemi, gdyż widoczna że punkta ułatwiające leżą po za płachtami, a nie między powierzchnią a płaszczyzną do niej styczną.

Wypadek ostateczny poszukiwań naszych jest więc, że aby wszystkie pierwiastki były rzeczywistemi, ilość  $2^{11}L - J^3$  musi

być dodatną (\*); L zaś, a więc i J odjemnem. Jeżeli nie istnieje żaden z tych warunków, pierwiastki stają się urojonymi, D, w obu razach jest dodatnem.

225. Walec równoległy do osi z a stojącyna krzywej  $2^{11}L - J^3$ , nie spotka G po za D, gdyż dwie wartości na z są, jedna równa 0, druga odjemna. Inna powierzchnia stojąca na tej samej krzywej i nie dotykająca G może zarówno służyć za wał dzielący dwa rodzaje punktów ułatwiających. Gdyż wszystkie punkta leżące między walcem a powierzchnią jako nieułatwiający nie należą do kwestyi. P. Sylwester postrzegł że  $2^{11}L - J^3$  możemy zastąpić przez  $2^{11}L - J^3 + \mu JD$ , byle to ostatnie zrównanie nie wyobrażało powierzchni spotykającej G po za D. Aby  $\mu$  mogło zadosyć czynić temuwarunkowi, musi być zawartem między 1 a - 2.

Używa on skutecznie *criteryów* wyrażonych jako symetryczne funkcye pierwiastków. Naprzód

$$\Sigma(\alpha - \delta)^2(\delta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2(\delta - \epsilon)^4$$

jest niezmiennikiem (116), a że jest tego samego rzędu i ważności co J, więc tylko czynnikiem liczebnym różnić się od niego może, i to czynnikiem odjemnym, ponieważ funkcyja jest dodatną z natury a J odjemnem w razie gdy wszystkie pierwiastki są rzeczywistemi. Powtóre, funkcyja symetryczna

$$\Sigma(\alpha - \delta)^2(\delta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2(\epsilon - \alpha)^4(\epsilon - \delta)^4$$

$$(\epsilon - \gamma)^4(\delta - \alpha)^4(\delta - \delta)^4(\delta - \gamma)^4,$$

---

(\*) P. Sylwester twierdzi że tym warunkiem jest odjemność ( $2^{11}L - J^3$ ). Widoczna to pomyłka. Wyrażnym jego dowodzeń wynikiem jest dodatność tej ilości. Gdyż plachta którą się zajmuje, leży z tej strony krzywej  $2^{11}L - J^3$  w pobliżu osi  $L = 0$ . A gdy  $L = 0$ , i J odjemne, ( $2^{11}L - J^3$ ) będzie dodatnem.



(której związek z pierwszą jasno się pokazuje gdy tamtę napiszemy pod formą

$$D^2\Sigma(\alpha - \xi)^{-2}(\xi - \gamma)^{-2}(\gamma - \alpha)^{-2}(\xi - \epsilon)^{-4},$$

w której D jest dyskriminantem), jest niezmiennikiem dwunastego rzędu. Toż samo więc ma miejsce względem

$$\alpha J^3 + \xi J D + \gamma L.$$

Biorąc w pomoc kształt piątego stopnia (\*),

$$x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2),$$

obliczymy łatwo funkcją symetryczną i wykazemy jej tożsamość z niezmiennikami, będzie ona proporcjonalną do  $2^{11}L - J^3 + \frac{4}{5}JD$ . A że czynnik liczebny ilości JD zawarty jest w granicach wyżej oznaczonych, więc może służyć za *critorium*; P. Sylwester znalazł, że dwie wzmiankowane funkcje symetryczne, nie tylko są razem dodatnimi dla pierwiastków rzeczywistych (co widoczna), lecz nadto że jeżeli te funkcje i D są dodatnie, pierwiastki rzeczywistymi być muszą. Można to sprawdzić bezpośrednio w razie gdy jedno zrównanie da cztery pierwiastki urojone.

226. P. Salmon usiłował sprawdzić wypadki, badając nie-

(\*) Formuła w tym razie bezpiecznie użyta być może, często jednak wystrzegać się jej należy. Bo gdy czynnik linijny kształtu piątego stopnia, jest zarazem czynnikiem Jakobiowego dla pozostałego kształtu czwartego stopnia, to niezmienniki związek ścisły łączyć musi. Lecz obliczenie go jest nadzwyczaj trudne, daje bowiem na J, D, L ilości bardzo wysokich stopni.



zmienniki iloczynu liniowego czynnika i kształtu czwartego stopnia

$$(\alpha x + \epsilon y)(x^4 + 6m\epsilon^2 y^2 + y^4);$$

niezmienniki te są koniecznie spółzmiennikami czwartego stopnia (198). Spółczynniki piątego stopnia są

$$5\alpha, \delta, 3m\alpha, 3m\epsilon, \alpha, 5\epsilon;$$

$$J = 48(8SH - 3TU),$$

$$J = 48 \left\{ (5m + 27m^3)(\alpha^4 + \epsilon^4) + (8 - 18m^2 - 54m^4)\alpha^2\epsilon^2 \right\}.$$

Wszystkie zaś pierwiastki będą rzeczywistymi dla  $m$ , wraz z  $9m^2 > 1$ . Lecz  $m$  odjemnemu odpowiadają wszystkie wyrazy odjemne prócz jednego. Granicą odjemnych na  $m$  wartości jest  $\frac{1}{3}$ ; wartość ta, a tem bardziej wszelka wyższa odjemna wartość czyni  $J$  odjemnem. Przypuszczenie  $\epsilon = 0$  to samo pokaże, biorąc pod uwagę sam spółczynnik najwyższej potęgi  $\alpha$  w  $8SH - 3TU$ , który jest  $8(b^2 - ac)S - 3Ta$ . Nazwijmy  $A, B, C$ , trzy stałe funkcji Sturma, to jest

$$A = b^2 - ac, \quad B = 2SA + 3Ta, \quad C = S^3 - 27T^2,$$

będzie  $J = 6AS - B$ , wartość odjemna w razie pierwiastków rzeczywistych.

W obrachunku tym wypada

$$\begin{aligned} L = & 54(8SH - 3TU)^3 - 6400(S^3 - 27T^2)(4H^3 - SHU + TU^3) \\ & + 150(S^3 - 27T^2)U^2(8SH + 15TU) \\ & - 4050U^3S^2(2SH - 3TU), \end{aligned}$$

zkład  $2^{11}L - J^3$  różnić się tylko będzie czynnikiem stałym mnożącym ilość

$$- 128(S^3 - 27T^2)(4H^3 - 3HU + TU^3)$$

$$+ 3(S^3 - 27T^2)U^2(8SH + 15TU)$$

$$- 8tU^2S^3(2SH - 3TU).$$

Czyniąc  $\theta = a^2d - 3abc + 2b^3$ , współczynnik najwyższej potęgi  $a$  będzie

$$128C\theta^2 + 81a^2S^3 + 45a^2CB - 54a^2CSA.$$

Dla pierwiastków rzeczywistych, wszystkie wyrazy są dodatne, prócz jednego, lecz gdy jeden jest ujemnym zbyteczną formułę przyoblekać w formę prawa. Dostyc powiedzieć że gdy formuła jest dodatnią a  $J$  ujemnym pierwiastki muszą być rzeczywistymi. Nie ma więc wątpliwości że roztrząsania powyższe są niejako dowodem na prawo P. Sylwestra, a ściślejzego podać niepodobna (\*).

(\*) Sprawdzenie jest jednak łatwem w szczególnym przypadku

$$x(x^2 + 6mx^2y^2 + y^4).$$

Mamy bowiem

$$J = 48m(5 + 27m^2),$$

$$L = 12m(5 - 9m^2)^4;$$

wreszcie  $2^{11}L - J^3$  proporcjonalne do

$$m(1 - 9m^2)(50 + 45m^2 + 648m^4 + 729m^6).$$

Więc jeżeli mamy mniej  $m$  i  $9m^2 > 1$ , będzie  $J$  i  $L$ , ujemne a  $2^{11}L - J^3$  dodatne. Ostatnia ilość jest dodatnią i dla pierwiastków urojono-

227. Nie może wchodzić w zakres niniejszego dzieła opowiadanie poszukiwań którym dało początek zagadnienie rozwiązania kształtów piątego stopnia (\*). Następujące poszukiwanie zamieszczamy tu jednak z powodu związku jaki ma z teorią niezmienników. Wiadomo że Lagrange czyni zależnem rozwiązanie równań piątego od rozwiązania równań szóstego stopnia, łatwo bowiem dowieść że funkcyje o pięciu literach, mogą przybierać sześć wartości przez przeobrażenie liter. I tak niech 12345 będzie funkcją cykliczną pierwiastków piątego stopnia, taką na przykład jak iloczyn

$$(\alpha - \epsilon)^2(\epsilon - \gamma)^2(\gamma - \delta)^2(\delta - \epsilon)^2(\epsilon - \alpha)^2;$$

widoczna że 23451 jak 15432 oznaczają to samo co 12345, że zatem możemy napisać naszą funkcją dwunastoma sposobami. Te dwanaście funkcyj dzielą się na pary, a między niemi znajdziemy funkcyje tylko sześć wartości przybrać zdolne. Na przykład: 12345 + 13524, 12435 + 14523, 13245 + 12534, 13425 + 14532, 14235 + 12543, 14325 + 13542. Takie użycowanie kształtu szóstego stopnia mającego wartości swych

nych, lecz w tym razie J zostanie dodatnem. Każda więc z metod użytych wykaże istnienie tych pierwiastków.

Dyskusją o charakterach rzeczywistości pierwiastków równań, zasadzającą się na niezmiennikach, rozpoczął P. Hermite roku 1854 w *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. Streścił ją tegoż roku w znakomitej pracy przedstawionej Akademii francuskiej. Wyraziwszy ją w naszym sposobie znakowania wypadnie że gdy wszystkie pierwiastki są rzeczywiste, a dyskryminant dodatny, dodatnemi też będą

$$K, 2^{11}L - J^3 + D, \quad K(JL + K^2) - 18L^2.$$

Criteria P. Sylwestra prostotą swoją mają pierwszeństwo przed tym wypadkiem.

(\*) Do najznakomitszych nowych odkryć, tego przedmiotu dotyczących należy zastosowanie do niego przez P. Hermite i Kronecker teorii funkcji cliptycznych.

pierwiastków, jest niesłychanie trudnem. Jednakoważ P. Hermite uważa że jeżeli funkcyą 12345 jest iloczynem z różnic kwadratów pierwiastków  $(\alpha - \xi)^2 \dots$  to wszystkie współczynniki kształtu będą niezmiennikami, a przeto ich obliczenie podobnem (\*). Jest stosownem utworzyć to zrównanie w chwili przejścia do kształtów szóstego stopnia, aby jasno wykazać cechy oparte na niezmiennikach kształtu szóstego stopnia, których rozwiązanie opiera się na rozwiązaniu zrównań piątego stopnia, i nieraz dogodnym być może posiadanie pewnej liczby pierwszych wynikłych z dyskusyi nad drugimi (\*\*). Biorę prosty przykład

$$x^5 + 2mx^3y^2 + xy^4,$$

gdyż jeżeli to zrównanie da dwie pary pierwiastków równych, a znakami przeciwnych, funkcyą różnic łatwo napisać przyjdzie. Znajdujemy że kształt szóstego stopnia jest iloczynem

$$t^2 + 2^6(m + m^3)t + 2^{10}(m^6 - 2m^4 + 5m^2),$$

przez kwadrat z ilości,

$$t^2 + 2^4(m^3 + 3m)t + 2^6(m^6 + 5m^4 + 19m^2 - 25).$$

(\*) W metodzie PP. Harley i Cockle, 12345 jest

$$x\xi + \xi\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon x,$$

a dany kształt szóstego stopnia ma za pierwiastki 12345 — 13524.... Wypadek ten obliczył P. Cayley (*Philosophical Transactions*, 1861, str. 263). Staje się on bardzo prostym, gdy w kształcie nie dostaje dwóch wyrazów, lecz współczynniki nie są niezmiennikami.

(\*\*) Kształt otrzymany przez PP. Kronecker i Brioschi jest

$$(x - a)^5(x - 5a) + 10b(x - a)^3 - c(x - a) + 5b^2 - ac = 0.$$

Przy pomocy formuł danych wyżej, obliczają się niezmienniki tego zrównania, a rugują ilości  $a, b, c$ .



Lecz pomnóżmy pierwszy kształt piątego stopnia przez 5, a jego niezmienniki są

$$J = 2^4 m(5 + 3m^2),$$

$$D = 2^8 5^3 (1 - m^2)^2,$$

$$L = 4m(5 - m^2)^4.$$

Dla uniknięcia ułamków, dajemy

$$J = 2A, \quad D = 250B, \quad J^3 - 2^{11}L = 50C.$$

Utwórzmy kształt szóstego stopnia i wyrażmy jego spółczynniki w wyrazach niezmienników, a otrzymamy

$$t^6 + 4At^5 + (6A^2 - 25B)t^4 + (4A^3 + 2C - 30AB)t^3 + t^2(A^4 + 4AC - 17A^2B + \frac{625}{4}B^2)$$

$$+ t(2A^2C - 4A^3B - 7BC + 110AB^2) + C^2 - 4ABC + 20A^2B^2.$$

Ilość ta jest kwadratem doskonałym i musi nim być z powodu  $D = 0$  (\*).

228. P. Hermite szczegółowo rozbiierał niezmienniki wyrażone w równaniach pierwiastków. Przekształca on równanie tak, aby pierwszy i ostatni wyraz zniknął, to jest tak aby jeden pierwiastek był 0, a drugi  $\infty$ . Rachunek taki zasada się na utworzeniu funkcji symetrycznej z pierwiastków równania stopnia trzeciego. Dyskusya zagadnienia z parag. 227 doprowa-

(\*) Chociaż kształt na który działaliśmy nie jest ogólny, wypadek jednak ogólnym się zdaje, gdyż sądzić należy że jedynie przyjęte spółczynniki w jednaki sposób powstają z wyrazów niezmienników.

dziła P. Salmon'a do tego samego przekształcenia, lecz otrzymał on je w taki sposób że nie upraszczało zagadnienia. Potrzeba przekształcić zagadnienie trzeciego stopnia na takie równanie szóstego stopnia, aby jego pierwiastki były sześcioma wartościami ilości

$$\alpha^2(\epsilon - \gamma)^2(\alpha - \gamma)^2 + \epsilon^2\gamma^2(\alpha - \epsilon)^2,$$

a wypadek zrównać z kombinacjami kształtów jakie przybierają niezmienniki równania piątego stopnia, gdy  $a$  i  $f$  staną się zerami. Z wypadków P. Hermite podamy tylko wartości jego własnego niezmiennika L. Weźmy

$$F = (\alpha - \epsilon)(\alpha - \epsilon)(\delta - \gamma) + (\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\epsilon - \epsilon),$$

$$G = (\alpha - \epsilon)(\alpha - \gamma)(\epsilon - \delta) + (\alpha - \delta)(\alpha - \epsilon)(\epsilon - \gamma),$$

$$H = (\alpha - \epsilon)(\alpha - \delta)(\epsilon - \gamma) + (\alpha - \gamma)(\alpha - \epsilon)(\delta - \epsilon);$$

ich iloczyn jest symetrycznym względem wszystkich pierwiastków prócz  $\alpha$ , a jeśli go pomnożymy przez iloczyny podobne, otrzymane dla czterech innych pierwiastków, będziemy mieli L.

229. KSZTAŁTY SZÓSTEGO STOPNIA. Mało dotąd nad niemi robiono postrzeżeń. Mają one cztery niezmienniki niezależne oznaczone przez A, B, C, D, rzędów 2, 4, 6, 10; i piąty niezmiennik skośny E, piętnastego rzędu, u którego kwadrat jest całkowitą i wymierną funkcją czterech innych.

Pierwsza A, jest niezmiennikiem <sup>—6</sup>12 otrzymanym wedle artykułu 96; forma jego ogólna

$$ag - 6bf + 15ce - 10d^2.$$

Podaliśmy (262 i 163) kanoniczną formę kształtu szóstego

stopnia, lecz użyjemy tu (210) formy równie dogodnej

$$au^6 + bv^6 + cw^6 + dz^6;$$

proceedzi nas do niej teoria kształtów piątego stopnia, które nie dają się prościej wyrazić jak tylko jako summa czterech piątych potęg. Dla formy tej mamy (210)

$$\begin{aligned} A &= ab(12)^6 + ac(13)^6 + ad(14)^6 + bc(23)^6 + bd(24)^6 \\ &\quad + cd(34)^6 \\ &= \Sigma ab(12)^6. \end{aligned}$$

Hessowy <sup>—6</sup>12 kształtu szóstego stopnia jest osmego stopnia, a ogólne jego współczynniki są

$$\begin{aligned} ac - b^2, \quad 4(ad - be), \quad 6ae + 4bd - 10c^2, \\ 4af + 16be - 20cd, \quad ag + 14bf + 5ce - 20d^2, \dots, \end{aligned}$$

Hessowy zaś formy nowo podanej będzie

$$\Sigma abu^4v^4(12)^2.$$

Kształt szóstego stopnia posiada inny współmiennik, będący J emananta czwartego stopnia, o współczynnikach drugiego rzędu, ze współczynnikami

$$ae - 4bd + 3c^2, \quad 2af - 6be + 4cd, \quad ag - 9ce + 8d^2, \dots;$$

a który dla formy kanonicznej jest

$$\Sigma abu^2v^2(12)^4.$$

Wspomniemy jeszcze współmiennik trzeciego rzędu, (jest to T emananta czwartego stopnia) mający za współczynniki

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

$$2acf - 2ade - 2b^2f + 2bce + 2bd^2 - 2c^2d,$$

$$acg + 2adf - 3ae^2 - b^2g - 2bcf - 4bde + 2c^2e - 3cd^2,$$

$$2adg - 2aef - 2bcg + 4bdf - 2be^2 - 2c^2f + 6cde - 4a^3, \dots,$$

a który jest dla formy kanonicznej

$$\Sigma abc(12)^2(23)^2(31)^2u^2v^2w^2.$$

230. Niezmiennik B (P. Sylwester zowie go *catalectic*), który wyraża warunek aby kształt szóstego stopnia mógł być sprowadzonym do summy trzech szóstych potęg; jest on wyznacznikiem

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ b, & c, & d, & e \\ c, & d, & e, & f \\ d, & e, & f, & g \end{vmatrix},$$

który rozwinięty da

$$\begin{aligned} B = & aceg - acf^2 - ad^2g + 2adef - ae^3 - b^2eg + b^2f^2 \\ & + 2bcdg - 2bcfe - 2bd^2f + 2bde^2 - c^3g + 2c^2df \\ & + c^2e^2 - 3cd^2e + d^4. \end{aligned}$$

Utworzywszy niezmiennik drugiego stopnia wyznacznika Hessego, znajdziemy go proporcjonalnym do  $A^2 + 300B$ ; dla



spółmiennika  $S$  znajdziemy  $A^2 - 36B$ , a działając za pomocą  $T$  na kształcie danym wrócimy do  $B$ . Zastosowawszy to działanie do formy kanonicznej znajdziemy

$$B = adcd(12)^2(23)^2(34)^2(41)^2(13)^2(24)^2,$$

ilość równą 0, jeżeli niektóre z ilości  $a, b, c, d$ , staną się zerami, lub jeżeli którekolwiek z funkcyj  $u, v, w, z$  będą sobie równymi.

231. Weźmiemy za niezmiennik zasadniczy szóstego stopnia  $C$ , ten który nie zawiera potęgi pierwszego spółczynnika a wyższej nad drugą.

$$\begin{aligned} C = & a^2d^2g^2 - ba^2defg + 4a^2df^3 + 4a^2e^3g - 3a^2e^2f^2 - 6abcdg^2 \\ & + 18abcefg - 12abcf^3 + 12abd^2fg - 18abde^2g + 6abe^3f \\ & + 4ac^3g^2 - 24ac^2e^2g - 18ac^2dfg + 30ac^2ef^2 + 54acd^2eg \\ & - 12acd^2f^2 - 42acde^2f + 12ace^4 - 20ad^4g + 24ad^3ef \\ & - 8ad^2e^3 + 4b^3dg^2 - 12b^3efg + 8b^3f^3 - 3b^2c^2g^2 + 30b^2ce^2g \\ & - 24b^2cef^2 - 12b^2d^2eg - 24b^2d^2f^2 + 60b^2def^2 - 27b^3e^4 \\ & + 6be^3fg - 42bc^2deg + 60bc^2df^2 - 30bc^2e^2f + 24bcd^3g \\ & - 84bcd^2ef + 66bcde^3 + 24bd^4f - 24bd^3e^2 + 12c^4eg \\ & - 27c^4f^2 - 8c^3d^2g + 6bc^3def - 8c^3e^3 - 24c^2d^3f - 39c^2d^2e^2 \\ & + 36cd^4e - 8d^6. \end{aligned}$$

Inne niezmienniki szóstego stopnia dadzą się wyrazić w funkcji poprzednich. I tak niezmiennik trzeciego stopnia spółmien-

nika czwartego stopnia jest

$$A^3 - 108AB - 54C;$$

a niezmiennik trzeciego stopnia Hessowego

$$3A^3 - 100AB + 2750C;$$

niezmiennik wreszcie czwartego stopnia dla spółzmiennika stopnia szóstego będzie

$$2AB - C.$$

Ten ostatni łatwo obliczonym być może za pomocą formy kanonicznej. Mamy działać przez

$$\Sigma abc(12)^2(23)^2(31)^2 u^2 v^2 w^2$$

na tejże samej ilości. Jeżeli działamy przez  $u^2 v^2 z^2$  na  $u^2 v^2 w^2$  wypadek będzie proporcjonalny do  $(12)^2 MN$ , gdzie M i N mają to samo znaczenie jak w paragrafie 210. Otrzymamy w ten sposób —  $(12)^2(23)^2(31)^2$ ; a niezmiennik szukany będzie

$$\Sigma a^2 b^2 c^2 (12)^6 (23)^6 (31)^6 - 2abcd \Sigma ab (12)^6 M^3 N^3.$$

232. Gdy  $a, b, c$  stają się zerami, będzie  $A = -10d^2$ ,  $B = d^4$ ,  $C = -8d^6$ . A więc jeżeli kształt dany ma za czynnik sześcián zupełny, powinno być

$$A^2 = 100B, \quad 4AB = 5C, \quad AC = 80B^2.$$

Jeżeli uczynimy  $a = b = f = g = 0$ , niezmienniki staną się

$$15ce - 10d^2, \quad c^2 e^2 - 3cde + d^4,$$

$$-8c^3 e^3 - 39c^2 d^2 e^2 + 36cd^4 e - 8d^6;$$

a następnie jeżeli kształt szóstego stopnia przyjmuje za czynniki dwa zupełne kwadraty, to niezależnie od warunku dostarczonego przez dyskryminant, być musi

$$(A^3 - 300AB + 250C)^2 = 5(A^2 - 100B)^3.$$

233. Jeżeli  $b = d = f = 0$  w równaniu danem, dyskryminant będzie  $ag$  rozmnożone przez kwadrat z dyskryminanta ilości

$$(a, 5c, 5e, g\mathcal{X}x, y)^3;$$

a jeżeli znikną wszystkie wyrazy prócz  $a, d, g$ , dyskryminant będzie  $a^2g^2$  rozmnożone przez sześćian dyskryminanta ilości

$$(a, 10d, g\mathcal{X}x, y)^2.$$

Znając te wyraz y dyskryminanta, obliczymy resztę za pomocą zrównania różniczkowego i znajdziemy wartość na  $\Delta$  {P. Salmon (*Lessons introductive to the modern higher Algebra*, Dublin, 1866, rozdz. XVII, str. 205-207), podaje wypadek obliczania  $\Delta$  z 246 wyrazów złożony}.

234. Zamiast dyskryminanta  $\Delta$  możemy szukać, niezmiennika D, do którego skrajne współczynniki  $a$  i  $g$  nie wchodzi w potęgach wyższych nad czwartą i który nadto nie zawiera iloczynu  $a^4g^4$ . Ilość mnożąca  $a^4$  w D jest  $(eg - f^2)^3$ ;  $\Delta$  zaś i D łączy związek

$$\Delta = A^5 - 375A^3B - 625A^2C + 3125D.$$

(P. Salmon w dziele zacytowanym w poprzednim paragrafie, na stronach 207-209, podaje wypadek obliczania D z 298 wy-



razów złożony. Sądziłiśmy zbytecznem przytaczać w niniejszem tłumaczeniu odnośnego rozdziału P. Salmon'a, wartości przez niego na  $\Delta$  i  $D$  otrzymanych.)

235. Teorya P. Cayley o liczbie niezmienników kształtu szóstego stopnia pokazuje że kształty te posiadają prócz czterech niezmienników wskazanych, niezmiennik skośny piętnastego stopnia zwany E. Niezmiennik piątego stopnia jest wyznacznikiem wypadkowym dwóch spółzmienników, lecz nie wiemy czy E da się w podobny sposób wyprowadzić z dwóch spółzmienników szóstego stopnia. Możemy je wyrachować za pomocą zrównania różniczkowego. Czynniki  $a$  nie wchodzi w potęgę wyższej nad szóstą; toż  $a$  ma za czynnik

$$(dg^2 - 3efg + 2f^3)(eg - f^2)^3. \quad (1)$$

Wyrażenie E w funkcji innych niezmienników daje się otrzymać za pomocą następujących uwag. Jeżeli  $b, d, f$  są zerami, mamy  $E=0$ ; gdyż ważność jego jest 45 (123) a więc ważność jednego przynajmniej z czynników każdego wyrazu musi być nieparzystą, ztąd gdy czynniki z ważnością nieparzystą staną się zerami, będzie  $E=0$ . Wynika ztąd że  $E=0$  jest warunkiem aby pierwiastki równania szóstego stopnia stanowiły układ w inwolucyi. Dajemy przeto  $b=d=f=0$  w wyrażeniach A, B, C, D, i wyrugujemy  $a, c, e, g$ , a związek jaki otrzymamy między A, B, C, D będzie sprowadzonym przez  $E=0$ , które przeto jako czynnik zawierać musi (\*).

Uczyńmy  $ag = \lambda, ce = \mu, ae^2 + gc^2 = \nu$ , a zarazem

---

(\*) P. Salmon w dziele swem tyle razy wspomnianem podaje wypadek obliczenia E, w dodatku na str. 253-265. Wypadek ten zawiera 1241 wyrazów.



$b = d = f = 0$ , otrzymamy

$$A = \lambda + 15\mu, \quad B = \lambda\mu + \mu^2 - \nu,$$

$$C = -24\lambda\mu^2 - 8\mu^3 + 4(\lambda + 3\mu)\nu,$$

$$\Delta = \lambda(\lambda^2 - 150\lambda\mu - 1875\mu^2 + 500\nu)^2.$$

Wyrugujmy  $\nu$ , a dwa ostatnie równania staną się :

$$C = 4\mu(\lambda - \mu)^2 + 4(\lambda + 3\mu)B,$$

$$\Delta = \lambda(\lambda^2 + 350\lambda\mu - 1375\mu^2 - 500B)^2.$$

Wyrugujmy następnie  $\mu$  za pomocą pierwszego równania przyjdzie :

$$1024\lambda^3 - 1152\lambda^2A + (132A^2 - 10800B)\lambda$$

$$+ 3375C + 2700AB - 4A^3 = 0,$$

$$\lambda(256\lambda^2 - 320A\lambda + 55A^2 - 4000B)^2 - \Delta = 0.$$

Rugownik tych dwóch równań będzie miał współczynniki trzydziestego stopnia, i, jak wiemy, tylko współczynnikiem liczebnym różnić się może od  $E^2$ .

136. Paragraf 218 uczy, że w razie dyskryminanta dodatniego kształt szóstego stopnia ma sześć albo dwa pierwiastki rzeczywiste, cztery zaś lub zero gdy dyskryminant jest ujemnym. Możemy z góry twierdzić że rozbiór E prowadzi nas do tych samych wypadków odnośnie do przypadków rzeczywistości pierwiastków, jak rozbiór G przy piątym stopniu. Przez analogią sądzimy także, że przypuszczenie  $\Delta = 0$  E może być obfitem w następstwa ważne; a chociaż obliczenie E jest nader pracowitem, jego część niezależna od  $\Delta$  łatwo się otrzymuje,

jest ona iloczynem

$$3375C + 2700AB - 4A^3,$$

przez kwadrat wyznacznika wypadkowego kształtów trzeciego i czwartego stopnia

$$256\lambda^2 - 320A\lambda - 55A^2 + 4500B.$$

Analogia także sądzić każe że tylko drugi z tych dwóch czynników jest ważnym w poszukiwaniu rzeczywistości pierwiastków.

Czyniąc  $100B = B'$ ,  $125C = C'$ , znalazłem (to jest P. Salmon) że czynnik kwadratowy różni się od  $4A^6 - 19A^4B' - 49A^2B'^2 - 4A^3C' - 80B'^3 + 52AB'C' - 4C'^2$  tylko o czynnik stały.

Analogia też pozwala wnosić że *criteria* dające poznać liczbę pierwiastków rzeczywistych zależą od znaku tej ostatniej ilości, jako też od ilości,

$$A^3 - 100B^2, \quad A^3 - 125C,$$

$$(A^3 - 300AB + 250C^2)^2 - 5(A^2 - 100B)^3,$$

które, jak widzimy, stają się zerami w razie równości pierwiastków.

## ROZDZIAŁ XVI.

### O RZĘDZIE RESTRYKCYJNYCH UKŁADÓW ZRÓWNAŃ (\*).

237. Zagadnienia które w tym rozdziale nas zajmą są czysto algebraiczne, i nie wymagają pomocy prawd geometrycznych. Dla uniknięcia jednakomówień, i dla pokazania w jaki sposób znane twierdzenia o potrójnych i poczwórnych kształtach, do wszelkich w ogóle kształtów zastosować się dadzą, zapożyczym od geometryi kilku wyrazów.

Wiemy (59) że dla  $k$  równań o  $k$  zmiennych niezależnych (\*\*), liczba układów spólnych wartości zmiennych, sprawdzających je spólcznie, jest równą iloczynowi rzędów równań.

W geometryi dwa lub trzywymiarowej układ wartości  $x = a$ ,  $y = b$ , lub  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $z = c$ , oznacza punkt zamiast więc wyrażenia *układ wartości ilości zmiennych*, użyjemy wyrazu

---

(\*) W pierwszym wydaniu Wyższej Algebra p. Salmona (*Lessons introductory to the modern higher Algebra*), i w jego francuzkiem tłumaczeniu przez p. Bazin, rozdział ten zastąpiony jest rozdziałem *O kształtach potrójnych*; lecz ponieważ przedmiot ten wymaga obszernych rozwinięć, a wszystkie jego wypadki znajdują zastosowanie w geometryi, przeto p. Salmon wyrzucił go z drugiej edycyi a do dzieł geometrycznych włączył, z których jednak, a mianowicie swej Geometryi o trzech wymiarach (*Geometry of Three Dimensions*), wyjął i wcielił do Wyższej Algebra to wszystko co jest w związku z przedmiotem traktowanym w tem dziele.

(\*\*) Używa się zwykle równań jednorodnych, mających  $k + 1$  zmiennych.



*punkt*; i tak twierdzenie o którym mowa wysłowi się jak następuje: «Układ  $k$  zrównań o  $k$  zmiennych stopni  $l, m, n, p, q, \dots$ , oznacza  $lmnpq\dots$  punktów,» co znaczy że « $lmnpq\dots$  układów wartości ilości zmiennych» zadosyć czyni zrównaniom. Liczbę  $lmnpq\dots$  *rzędem układu zrównań*.

238. Dla  $k - 1$  zrównań o  $k$  zmiennych nie podobna oznaczyć spólnego układu wartości tych zmiennych, zrównania dane oznaczają nieskończoną liczbę punktów, czyli *krzywą*. Jeżeli do układu  $k - 1$  zrównań dołączymy dowolne zrównanie stopnia pierwszego, otrzymamy liczbę punktów równą iloczynowi stopni zrównań. A zatem *rzędem krzywej* będzie liczba punktów oznaczonych przez układ dany, w połączeniu z jednym dowolnym zrównaniem stopnia pierwszego.

Układ  $k - 2$  zrównań o  $k$  zmiennych wyobraża dwa nieskończone szeregi punktów, i bez przybrania dwóch zrównań pomocniczych żadnego punktu ściśle nie oznacza. Mówimy że oznacza *powierzchnią*. Układ dany z pomocą jednego dowolnego zrównania stopnia pierwszego da *krzywą* rzędu równego iloczynowi stopni  $k - 2$  zrównań. W ogóle *rząd powierzchni* równy jest albo *rzędowi krzywej* danej przez układ po przybraniu jednego zrównania stopnia pierwszego, albo liczbie punktów danych przez układ uzupełniony dwoma dowolnymi zrównaniami stopnia pierwszego.

Rząd układu zrównań w liczbie  $k - n$  o  $k$  zmiennych, oznaczony jest przez liczbę punktów danych przez układ napełniony  $n$  dowolnymi zrównaniami stopnia pierwszego. W obchodzącym nas przypadku jest on iloczynem stopni zrównań do układu wchodzących.

239. Możemy wyrugować  $k$  zmiennych stopni  $l, m, n, \dots$ , wchodzących do układu złożonego z  $k + 1$  zrównań, i wiemy że rząd w jakim spółczynniki każdego zrównania wchodzą do wyznacznika wypadkowego jest iloczynem stopni zrównań



pozostałych (57-59). Weźmy przypadek czwartego stopnia; dajmy że rzędy zrównań są  $l, m, n, r$ , i że pewna ilość wchodzi w skład współczynników zrównań w stopniach  $\lambda, \mu, \nu, \rho$ , ta ilość będzie miała w wyznaczniku wypadkowym stopień

$$\lambda mn r + \mu n r l + \nu r l m + \rho l m n.$$

Przez *rzęd* rozumieć będziemy stopnie  $l, m, n, r$ , w których zrównania zawierają zmienne przeznaczone do wyrugowania, przez *ważność* zaś stopnie  $\lambda, \mu, \nu, \rho$  w których wchodzi ilość nie wyrugowana; wypadek zaś dopiero co napisany pokazuje że ważność czy to wyznacznika wypadkowego, czy układu, równa się summie ważności każdego ze zrównań rozmnożonej przez rzęd układu pozostałych po wyrugowaniu zrównań.

Pozostaje to prawdziwem dla układów na które rozdzielimy układ dany. I tak, dwa pierwsze tworzą układ rzędu  $lm$  a ważności  $\lambda m + \mu l$ , dwa drugie układ rzędu  $nr$  a ważności  $\nu r + \mu n$ ; ważność zaś układu całego dopiero co napisana, czyli

$$nr(\lambda m + \mu l) + lm(\nu r + \mu n)$$

jest summą ważności układów cząstkowych pomnożonych przez odpowiednie rzędy. Korzyść ostatniego uważania rzeczy zaraz się pokaże.

240. To co dotąd w niniejszym powiedzieliśmy rozdziale znamem jest, chociaż innemi wyrazy, z rozdziału o rugowaniu; lecz dla łatwiejszego zrozumienia następnych poszukiwań dotyczących rzędu i ważności, ten sam przedmiot w odmienny przedstawimy sposób.

Wiemy że  $k$  zrównań o  $k$  zmiennych oznacza  $lmnp\dots$  punktów; dodajmy do układu zrównanie nowe któremu zadosyć czynią niektóre tylko z pomiędzy  $lmnp\dots$  punktów. Układ nowy złożony z  $k + 1$  zrównań wyobraża punkta w liczbie

mniejszej od iloczynu stopni  $k$  równań pierwotnych. Że przypadek ten zdarza się zawsze, gdy żądanej liczby punktów nie możemy oznaczyć na innej drodze prócz dopiero opisanej, prosty geometryczny przykład łatwo da zrozumieć. Weźmy punkta leżące na płaszczyźnie; niech liczba pierwotna  $p$  oznacza ich ilość; dajmy że punkta te nie są położone na linii prostej, gdyż nie są one przecięciem dwóch krzywych, i że wzięwszy dwie krzywe przecinające się we wszystkich punktach danych, to krzywe te w innych jeszcze punktach przecinać się będą. Dla ścisłego oznaczenia punktów danych, musimy przybrać trzecią krzywą przez nie przechodzącą, lecz omijającą inne punkta przecięcia dwóch pierwszych krzywych. Nasze więc punkta są przecięciem trzech krzywych; zamierzamy zaś wykryć, dla ważnych przypadków, rząd układu punktów danych przez liczbę równań  $k$ , wyższą od liczby równań też punkta oznaczających, czyli chcemy wykryć wszystkie układy wartości zadosyć czyniące równaniom danym.

Podobnież układ  $k - 1$  równań sprawdza się przez nieskończoną ilość wartości, czyli oznacza krzywą; lecz zdarzyć się może że przybrane równanie ogranicza liczbę wartości sprawdzających nowy układ z  $k$  równań. W niniejszym rozdziale zamierzamy obliczyć rząd i ważność układu równań który nazwiemy *restrykcyjnym* (ograniczonym), jako odpowiadający wartościom nieznanym zadosyć czyniącym równaniom przybranym, które sprawdzają niektóre wartości sprawdzających równania dane oznaczające punkta, krzywe lub powierzchnie, lecz wyłączają inne wartości zadosyć czyniące układowi pierwotnemu.

241. Najprostszymi przykładem takiego układu dostarczy wyznaczników.

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} = 0.$$

czyli, opuszczając zawsze jedną kolumnę,

$$vw' - v'w = 0, \quad wu' - w'u = 0, \quad uw' - u'v = 0.$$

Te równania napiszemy pod kształtem

$$\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'},$$

a jasno zobaczymy że pierwiastki dwóch pierwszych równań sprawdzą trzecie. Wyjątek w tym razie stanowią wartości czyniące zarazem,  $u$  i  $u'$ , lub  $v$  i  $v'$ , lub  $w$  i  $w' = 0$ , bo w obu razach tylko dwa pierwsze równania sprawdzonemi będą. Łatwo potrafimy obliczyć rząd układu trzech równań. Niech rzędy  $u$  i  $u'$ ,  $v$  i  $v'$ ,  $w$  i  $w'$  będą  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ; dwa pierwsze równania mają za rząd  $m + n$ ,  $n + l$ , a ich układ  $(m + n)(n + l)$ . Lecz do układu tego wchodzi wartości zadosyc czyniące  $w$  i  $w'$ , lecz nie zadosyc czyniące trzeciemu równaniu, którego rząd równy  $n^2$ ; wyłączając je z wypadku  $(m + n)(n + l)$ , otrzymamy za rząd układu spólnego trzem wyznacznikom ilość

$$mn + nl + lm.$$

Weźmy układ złożony z trzech linii i czterech kolumnu

$$\begin{vmatrix} u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \\ w & w' & w'' & w''' \end{vmatrix} = 0,$$

i napiszmy wyznaczniki dane przez opuszczenie trzeciej i czwartej kolumny:

$$u''(vw' - v'w) + v''(wu' - w'u) + w''(uv' - u'v) = 0,$$

$$u'''(vw' - v'w) + v'''(wu' - w'u) + w'''(uv' - u'v) = 0.$$



Te dwa równania sprawdzone będą przez wartości sprawdzające trzy równania

$$vw' = v'w, \quad wu' = w'u, \quad uv' = u'v.$$

Lecz wartości nie sprawdzają innych wyznaczników układu danego. Od rzędu  $(l + m + n)^2$  dwóch równań napisanych jedno wciąż drugiego, odciągamy  $mn + nl + lm$ , rząd układu tych dwóch równań, a otrzymamy  $l^2 + m^2 + n^2 + lm + mn + nl$  na rząd układu wspólnego wszystkim wyznacznikom. Sposób obliczenia rzędu układu o trzech liniach i czterech kolumnach, stosuje się do układu o czterech liniach i pięciu kolumnach. Postępując coraz dalej przekonamy się że kiedy jest prawdziwym dla układu o  $k$  liniach, i dla układu o  $k + 1$  liniach prawdziwym być musi.

242. Otrzymane formuły prościej i ogólniej wyrazić się dadzą. Niech rzędy funkcij przedstawione będą przez odpowiednie litery,

$$\begin{vmatrix} a + \alpha, & b + \alpha, & c + \alpha, & d + \alpha, & \dots \\ a + \beta, & b + \beta, & c + \beta, & d + \beta, & \dots \\ a + \gamma, & b + \gamma, & c + \gamma, & d + \gamma, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix};$$

Niech  $p$  oznacza summę ilości  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, q$  summę ich iloczynów po dwa branych,  $P$  zaś i  $Q$  odpowiednie summy ilości  $a, b, c, \dots$ , a rząd układu będzie  $Q + pP + p^2 - q$ . Bo jeżeli uważać będziemy wyznaczniki otrzymane przez kolejne opuszczenie pierwszej i drugiej kolumny, będą one rządów  $p + P - a$ ,  $p + P - b$ , a ich układ rzędu  $(p + P - a)(p + P - b)$ . Lecz dwa te wyznaczniki sprawdzonemi będą przez wszystkie wartości które sprawdzają wszystkie wyznaczniki *Mniejsze* układu



niższego utworzone wymazaniem dwóch pierwszych kolumn, chociaż wartości te nie sprawdzają innych wyznaczników układu danego. Aby więc znaleźć rząd układu spólnego wszystkim należy od  $(p + P - a)(p + P - b)$  odjąć rząd układu niższego, który obliczyć możemy, jeżeli formułę daną prawdziwą przyjmiemy. Ponieważ w układzie niższym liczba linii jest większą od liczby kolumn, musimy dla zastosowania formuły, napisać linie jako kolumny, a kolumny jako linie, tak że dawne  $p$  i  $q$  zamienią się na  $P$  i  $Q$ . Nowe  $p$  widocznie równe  $P - a - b$ , a  $q$  będąc sumą iloczynów ilości  $c, d, \dots$ , parami branych, będzie

$$Q - (a + b)P + a^2 + ab + b^2.$$

Tak, rząd niższego układu formuł jest

$$P^2 - Q - P(a + b) + ab + p(P - a - b) + q.$$

Odciągając tę liczbę od  $(p + P - a)(p + P - b)$  otrzymamy  $Q - pP + p^2 - q$ . A więc jeżeli formuły są prawdziwemi dla układu niższego, prawdziwemi też pozostaną dla układu bezpośrednio po naddanym stojącego, i sprawdzić go łatwo dla układu o trzech liniach i trzech kolumnach. Stosując to mamy w ogóle  $\alpha$  lub  $\alpha = 0$ . Jeżeli wszystkie linie są jednego rzędu, przyjdzie  $\alpha = \epsilon = \dots = 0$ , a więc  $p = q = 0$ ; rząd zaś układu być musi  $Q$ .

243. W ten sam sposób obliczymy ważność układu wyznaczników uważanych w paragrafie 242. A zaczynając od najprostszego przypadku

$$\begin{vmatrix} u, & v, & w \\ u', & v', & w' \end{vmatrix}$$

zskombinujemy go z jednym lub więcej zrównań i wyrugujemy

zmienne. Wypadek rugowania między  $uv' - u'v$ ,  $uw' - u'w$  i innymi zrównaniami, zawierać musi jako czynnik wyznacznik wypadkowy  $u$ ,  $u'$  i innych zrównań. Odrzuciwszy ten czynnik przychodzimy do wypadku rugowania między  $uv' - u'v$ ,  $vw' - v'w$  i innymi zrównaniami, i odrzucenia czynnika otrzymanego przez rugowanie między  $v$  i  $v'$  i innymi zrównaniami. Dla objaśnienia użytej metody dajmy że  $u$ ,  $u'$ ,  $v$ ,  $v'$ ,  $w$ ,  $w'$  zawierają pewną ilość niewyrugowaną stopni  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , w każdym z powyższych układów; i że mamy zkombinować z wyznacznikami układu danego, inne zrównanie  $R = 0$ , rzędu  $v$ , a stopnia  $p$  dla niewyrugowanej ilości. Ta ilość przeto, wejdzie w wyznacznik wypadkowy ilości  $R$ ,  $uv' - u'v$ ,  $uw' - u'w$  w stopniu

$$\rho(l+m)(l+n) + r\{(l+m)(\lambda+\nu) + (l+n)(\lambda+\mu)\}.$$

Wyznacznik zaś wypadkowy ilości  $R$ ,  $u$ ,  $u'$  zawiera tę samą ilość w stopniu

$$\rho l^2 + 2r\lambda.$$

Odrzuciwszy ten czynnik z pierwszego wypadku pozostanie

$$\rho(mn + nl + lm) + r\{\lambda(m+n) + \mu(n+l) + \nu(l+m)\}.$$

Rzędem układu trzech wyznaczników jest ilość mnożąca  $\rho$ , a ich ważnością ilość mnożąca  $r$ .

244. Znalazłszy na tej drodze ważność układu o dwóch liniach i trzech kolumnach, podwyższać stopniowo będziemy o jedność liczbę linii i kolumn, aż dojdziemy do układu o  $k$  liniach i  $k+1$  kolumnach. Wypadek będzie ten sam jak gdybyśmy rzędy wielu funkcyj raz pisali jak w paragrafie 242, ich zaś

ważności (to jest stopnie w jakich zawierają zmienną niewyrugowaną) będą  $a' + \alpha'$ ,  $b' + \alpha'$ , ...,  $a' + \epsilon' + \dots$ ; gdyż formuła na ważności pochodzi od formuły na rzędy, po wykonaniu na niej działania

$$a' \frac{d}{da} + b' \frac{d}{db} + \dots + \alpha' \frac{d}{d\alpha} + \epsilon' \frac{d}{d\epsilon} + \dots$$

więc ważność

$$\Sigma(ab') + pP' + p'P + 2\Sigma(\alpha\alpha') + \Sigma(\alpha\epsilon'),$$

daje się napisać

$$(P + p)(P' + p') + \Sigma(\alpha\alpha') - \Sigma(\alpha\alpha'),$$

wypadek otrzymany przez wykonanie działania  $a' \frac{d}{da} + \dots$  na

$$Q + pP + p^2 - q.$$

#### 245. Warunek aby dwa równania

$$at^m + bt^{m-1} + ct^{m-2} + \dots = 0, \quad a't^n + b't^{n-1} + c't^{n-2} + \dots = 0,$$

miały pierwiastek spólny, otrzymujemy za pomocą jednego równania, a jest nim wyznacznik wypadkowy dwóch równań danych. Dwa pierwiastki równe, nie dwóch równań (63) lecz całego układu równań warunkowych wymagają układu równoważnego dwom warunkom, skoro ich dwa równania dane objąć nie mogą. Dajmy że  $p$  jest wyrugowanym parametrem, i że  $a, b, \dots$ , zawierają zmienne; zamierzamy wynaleźć rząd układu zawierającego w mowie będące warunki. Objęte one są



w wyznacznikach układu

$$\begin{vmatrix} a, b, c, d, \dots \\ a, b, c, \dots \\ a, b, \dots \\ \dots \\ a', b', c', d' \dots \\ a', b', c' \dots \\ \dots \end{vmatrix}$$

gdzie pierwsza linia  $n - 1$ , druga zaś  $m - 1$  razy jest powtórzoną, tak że mamy  $m + n - 2$  linii i  $m + n - 1$  kolumn; jest to szczególny przypadek zagadnienia paragrafu 242. Przyпускаmy że stopnie wprowadzonych zrównań o równej ilości różnią się między sobą, to jest że jeżeli  $\lambda, \mu$  są stopniami  $a, a'$ , stopniami  $b, b'$ , będą  $\lambda + \alpha, \mu + \alpha$ , a  $\lambda + 2\alpha, \mu + 2\alpha$  stopniami  $c$  i  $c'$ . Możemy napisać formułę paragrafu 242 w dogodniejszym kształcie, mianowicie

$$Q + pP - \frac{1}{2}(p^2 + s_2),$$

gdzie  $s_2$  jest summą kwadratów z  $\alpha, \epsilon, \dots$ . Aby te formuły zastosować do obecnego przypadku weźmiemy  $0, \alpha, 2\alpha, \dots$ , za  $a, b, c, \dots$ ,  $\lambda, \lambda - \alpha, \lambda - 2\alpha, \dots$  za  $a', b', c', \dots$ ;  $P$  jest więc summą  $m + n - 2$  wyrazów szeregow  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$ , a dla  $m + n = k$  jest ono  $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)\alpha$ .  $Q$  jest summą iloczynów tychże ilości po dwie branych, więc

$$Q = \frac{(k-3)(k-2)(k-1)(3k-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^2.$$



Zaś  $p$  jest summą  $n - 1$  wyrazów szeregow  $\lambda, \lambda - \alpha, \lambda - 2\alpha, \dots$ , i  $m - 1$  wyrazów szeregow  $\mu, \mu - \alpha, \mu - 2\alpha, \dots$   
Ztąd

$$p = (n-1)\lambda + (m-1)\mu - \frac{1}{2}\alpha \{ (m-1)(m-2) + (n-1)(n-2) \}.$$

Podobnież  $s_2$  jest summą kwadratów tych samych ilości, a więc

$$s_2 = (n-1)\lambda^2 + (m-1)\mu^2 - \lambda\alpha(n-1)(n-2) - \mu\alpha(m-1)(m-2) + \alpha^2 \left\{ \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(m-1)(m-2)(2m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right\}.$$

Zbierając te wszystkie wyrazy, znajdziemy za rząd żądanego układu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2 + \frac{1}{2}m(m-1)\mu^2 + (m-1)(n-1)\lambda\mu \\ & + \frac{1}{2}n(n-1)(2m-1)\lambda\alpha + \frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)\mu\alpha \\ & + \frac{1}{2}mn(m-1)(n-1)\alpha^2. \end{aligned}$$

Jeżeli dwa te równania są jednego stopnia, czyli jeżeli  $m = n$ , możemy napisać  $\lambda + \mu = p, \lambda\mu = q$ , a rząd będzie

$$\frac{1}{2}n(n-1)(p + n\alpha) \{ p(n-1)\alpha \} - (n-1)q.$$

Jeżeli wszystkie funkcje  $a, b, \dots$  są pierwszego stopnia, czyli  $\lambda = \mu = 1, \alpha = 0$ , to wstawiszmy te wartości w ostatnie zróż-

wnanie otrzymamy

$$\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2).$$

246. Jeżeli stopnie w których zmienne niewyrugowane napotyka się w niektórych wyrazach oznaczmy akcentowanymi literami odpowiednimi tym które wyrażają ich stopnie w zmiennych mających być wyrugowanymi, natenczas formuła ważności układu wywodzi się z formuły rzędu, przez poddanie jej działaniu :

$$\lambda' \frac{d}{d\lambda} + \mu' \frac{d}{d\mu} + \alpha' \frac{d}{d\alpha}.$$

Ważność będzie

$$\begin{aligned} & n(n-1)\lambda\lambda' + m(m-1)\mu\mu' + (m-1)(n-1)(\lambda\mu' + \lambda'\mu) \\ & + \frac{1}{2}n(n-1)(2m-1)(\lambda\alpha' + \lambda'\alpha) + \frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)(\mu\alpha' + \mu'\alpha) \\ & + mn(m-1)(n-1)\alpha\alpha'. \end{aligned}$$

247. Przejdźmy do dyskusji układu zawierającego warunek aby trzy równania  $at^l + bt^{l-1} + \dots = 0$ ,  $a't^m + b't^{m-1} + \dots = 0$ ,  $a''t^n + b''t^{n-1} + \dots = 0$  posiadały czynnik spólny. Układ ten wyraża się przez trzy równania otrzymane kolejnem wyrugowaniem  $t$  między równaniami danymi branymi po dwa; jest on równoważny dwom warunkom. Rząd układu otrzymany rugując ze równań zmienne wchodzące domyślnie w  $a, b, c, \dots$ , gdyż rząd równania wypadkowego na  $t$  będzie rzędem układu.

Dajmy że  $a, a', a''$ , są funkcyami jednorodnemi  $x, y, z$ , stopni  $\lambda, \mu, \nu$ , że  $b, b', b''$ , są stopni  $\lambda-1, \mu-1, \nu-1$ ,

i weźmy wzajemną względem  $t$  za czwartą zmienną, a zrównania będą odnośnie rzędów  $\lambda, \mu, \nu$ , ich zaś układ rzędu  $\lambda\mu\nu$ . Lecz układ wartości  $x = 0, y = 0, z = 0$ , jest punktem wielokrotnym w trzech zrównaniach rzędów  $\lambda - l, \mu - m, \nu - n$ ; rząd przeto układu podzielić trzeba przez  $(\lambda - l)(\mu - m)(\nu - n)$ ; otrzymamy rząd układu szukanego,

$$l\mu\nu + m\nu\lambda + m\lambda\mu - \lambda mn - \mu ln - \nu lm + lmn.$$

Jeżeli rzędy ilości  $b, b', c, c'$ , są  $\lambda + \alpha, \mu + \alpha, \lambda + 2\alpha, \mu + 2\alpha$ , rząd układu będzie

$$l\mu\nu + m\nu\lambda + n\lambda\mu + \alpha(mn\lambda + n\mu + lm\nu) + \alpha^2 lmn.$$

Na tej ilości działając przez  $\lambda' \frac{d}{d\lambda} + \dots$  otrzymamy ważność

$$\begin{aligned} & l(\mu\nu' + \mu'\nu) + m(\nu\lambda' + \nu'\lambda) + n(\lambda\mu' + \lambda'\mu) \\ & + mn(\alpha'\lambda + \alpha\lambda') + nl(\alpha\mu' + \alpha'\mu) + lm(\alpha\nu' + \alpha'\nu) \\ & + 2lmn\alpha\alpha'. \end{aligned}$$

248. Znalezienie rzędu i ważności układu warunków pozwalających aby zrównanie  $at^n + bt^{n-1} + \dots$  mogło mieć trzy pierwiastki równe jest, szczególnym przypadkiem poprzedzającego, bo te warunki znajdują się wyrażając że trzy drugie różniczki mogą mieć czynnik spólny. W wartości na rząd układu jest

$$3(n - 2)\lambda(\lambda + n\alpha) + n(n - 1)(n - 2)\alpha^2.$$

W podobny sposób otrzymamy na wartość ważności

$$6(n - 2)\lambda\lambda' + 3n(n - 2)(\alpha'\lambda - \alpha\lambda') + 2n(n - 1)(n - 2)\alpha\alpha'.$$



Dla znalezienia rzędu i ważności warunków nieodzownych w celu aby jedno równanie miało dwie pary pierwiastków równych, trzeba znaleźć rząd i ważność układu pozwalającego aby pierwsze różniczki zrównań  $at^{n-1} + \dots, bt^{n-1} + \dots$ , miały dwa czynniki wspólne, i odciągnąć te ilości od rzędu i ważności układu, znalezionych nieco wyżej. Rzęd będzie

$$2(n-2)(n-3)\lambda(\lambda + na) + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)\alpha^2,$$

ważność zaś

$$4(n-2)(n-3)\lambda\lambda' + 2n(n-2)(n-3)(\alpha'\lambda + \alpha\lambda')$$

$$+ n(n-1)(n-2)(n-3)\alpha\alpha'.$$

Nim postąpimy dalej w poszukiwaniu rzędów i ważności różnych układów, przedyskutować musimy rozmaite zagadnienia, a przedtem jeszcze wytłumaczyć dwa wyrazy które zapożyczamy od geometrii.

249. *Przecięcie kształtów mających wspólne krzywe.* Mówić będziemy że dwa układy kształtów *przecinać* się będą jeżeli mają jeden lub więcej punktów wspólnych, czyli jeżeli je sprawdza tenże sam układ wartości zmiennych. Mówić będziemy że *powierzchnia* zawiera *krzywą*, jeżeli każdy układ wartości sprawdzających  $k-1$  zrównań krzywej, sprawdzi  $k-2$  zrównań powierzchni. I tak w przypadku czterech zmiennych, trzy równania  $U=0, V=0, W=0$ , oznaczają będą krzywą, dwa zaś równania  $U=0, V=0$  powierzchnią na której leży krzywa dana.

Widzieliśmy że układ złożony z  $k$  kształtów o  $k$  zmiennych przecina powierzchnią w liczbie punktów równej iloczynowi rzędów kształtów danych. Zdarzyć się może że liczba punktów



spólnych jest nieskończoną i że one tworzą krzywą w znaczeniu jakie przywiązujemy do tego wyrazu. Oprócz tej krzywej mieć jeszcze zwykle będziemy pewną punktów wspólnych których ściśłem oznaczeniem zajmujemy się obecnie. Weźmy na przykład przykład czterech zmiennych niezależnych, niech będą cztery równania

$$U = Au + Bv + Cw = 0$$

$$V = A'u + B'v + C'w = 0$$

$$W = A''u + B''v + C''w = 0$$

$$Z = A'''u + B'''v + C'''w = 0,$$

$U, V, W, Z$  są stopni  $l, m, n, p$ ;  $u, v, w$  stopni  $\lambda, \mu, \nu$ ; nadto  $A, B, A', B', \dots$  muszą widocznie być funkcjami stopni  $l - \lambda, l - \mu, m - \lambda, m - \mu, \dots$ . Równaniom danym zadamy czyni wszelki układ wartości robiący  $u = 0, v = 0, w = 0$ , a ponieważ te równania nie są w ilości dostatecznej do oznaczenia punktów, więc sprawdzi je nieskończona ilość wartości zmiennych; a cztery kształty  $U, V, W, Z$ , determinują wspólną krzywą. Lecz jeżeli  $U, V, W, Z$  sprawdzanymi będą przez pewną liczbę wartości które nie wszystkie ilości  $u, v, w$ , czynią razem równymi zeru, to tę liczbę oznaczy wypada. Przedsięwzięmy przeto rozwiązać zagadnienie: gdy pewien układ kształtów oznacza wspólną krzywą, idzie o wykrycie ile z punktów przecięcia  $lmnp \dots$  należy do krzywej, a ile po za nią leży.

250. Weźmy na samprzód pod uwagę krzywą utworzoną przez  $k - 1$  kształtów, na przykład krzywą  $UVW$  dla czterech równań paragrafu 249. Widocznie że jej część stanowi krzywa  $uvw$ , i że po za tą ostatnią leży nieskończenie wiele punktów sprawdzających  $UVW$ , a nie sprawdzających  $u, v, w$ .  $UVW$

jest przeto *krzywą złożoną*; w skład jej wchodzi dwie krzywe: jedna  $uvw$ , druga uzupełniająca. Rzęd krzywej złożonej jest summą rzędów dwóch składowych; gdyż według określenia rzęd ten stanowi liczba punktów otrzymanych ze zrównań układu danego połączonych ze zrównaniem stopnia pierwszego; w obecnym razie rzęd ten równa się  $lmn$ . Widoczna że jeżeli z pomiędzy  $lmn$  punktów,  $\lambda\mu\nu$  punktów leży na  $uvw$ , będzie ich leżało  $lmn - \lambda\mu\nu$  na krzywej uzupełniającej.

Liczbę  $i$  punktów przecięcia dwóch krzywych otrzymać łatwo. Gdyż punkta sprawdzające trzy zrównania

$$Au + Bv + Cw = 0, \quad A'u + B'v + C'w = 0, \quad A''u + B''v + C''w = 0,$$

a nie sprawdzające  $u, v, w$ , muszą sprawdzić wyznacznik

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{vmatrix} = 0,$$

będący stopnia  $l + m + n - \lambda - \mu - \nu$ . Przecięcie tego nowego kształtu z  $uvw$ , daje wszystkie punkta w których  $uvw$  spotyka krzywą dodatkową. Mamy

$$i = \lambda\mu\nu(l + m + n - \lambda - \mu - \nu).$$

251. Dla wynalezienia liczby punktów spólnych UVWZ wziąć trzeba pod uwagę punkta w których krzywa UVW spotyka Z; a wtedy dopiero szukać będziemy ile z nich nie leży na  $uvw$ . Lecz gdy  $uvw$  jest częścią UVW, więc punkta szukane zawarte są pomiędzy  $p(lmn - \lambda\mu\nu)$  punktami w których krzywa dodatkowa spotyka Z; od tej liczby odjąć należy  $i$  punktów w których też krzywa spotyka  $uvw$ , a pozostała reszta będzie ilością szukaną. Ilość zaś tę, używszy wartości na  $i$

z paragrafu 250, da nam formuła

$$lmn - \lambda\mu\nu(l + m + n + \nu) + \lambda\mu\nu(\lambda + \mu + \nu).$$

Czyli, jeżeli  $k$  kształtów których rzędy są  $l, m, n, p, \dots$ , mają spólną krzywą rzędu  $\alpha$ , to liczba spólnych  $im$  po za tą krzywą punktów, jest mniejszą od iloczynu rzędów kształtów danych przez  $\alpha(l + m + n + \dots) - \epsilon$ , gdzie  $\epsilon$  jest stałą zależną tylko od natury krzywej, a bynajmniej od rzędów kształtów. Tę stałą nazwiemy *rangą* krzywej. Widzieliśmy że krzywa dana jako przecięcie  $u, v, w$ , jest rzędu  $\lambda\mu\nu$ ; znajdziemy zaś że jej ranga równa się  $\lambda\mu\nu(l + \mu + \nu)$ .

Wiemy podług ostatniego paragrafu że dla przecięcia UVW mającego dwa przecięcia uzupełniające rzędów  $\alpha, \alpha'$  i rang  $\epsilon, \epsilon'$ , liczba punktów przecięć tych krzywych jest  $\alpha(l + m + n) - \epsilon$ ; będzie ona także  $\alpha'(l + m + n) - \epsilon'$ , tak że rzędy i rangi dwóch krzywych uzupełniających łączą zrównania

$$\alpha + \alpha' = lmn, \quad \epsilon - \epsilon' = (\alpha - \alpha')(l + m + n).$$

252. Teraz, rozważymy przypadek w którym kształty dane posiadają dwie lub więcej krzywych przecięcia, oznaczonych jak zwykle przez  $uvw, u'v'w' \dots$ . Dajmy na przykład że przecięcie UVW składa się z dwóch krzywych  $uvw, u'v'w'$ , i z krzywej uzupełniającej  $\alpha''$ . Otrzymamy: 1° że rząd  $\alpha = lmn - \lambda\mu\nu - \lambda'\mu'\nu'$ ; 2° widzieliśmy że  $uvw$  spotyka pozostałe przecięcia UVW w punktach których liczba jest

$$\lambda\mu\nu(l + m + n - \lambda - \mu - \nu).$$

Jeżeli ilość  $i$  z pomiędzy nich leży na  $u'v'w'$ , (czyli jeżeli  $uvw$  spotyka  $u'v'w'$  w  $i$  punktach) natenczas krzywa dodatkowa  $\alpha''$  ma na sobie

$$\lambda\mu\nu(l + m + n - \lambda - \mu - \nu) - i$$



punktów tych. Podobnie  $\alpha''$  spotyka  $u'v'w'$  w punktach których liczba jest

$$\lambda'\mu'\nu'(l + m + n - \lambda' - \mu' - \nu') - i.$$

Liczbą zaś punktów nie leżących na krzywych  $uvw$ ,  $u'v'w'$ , a w których  $\alpha''$  spotyka  $Z$ , będzie

$$\begin{aligned} & (lmn - \lambda\mu\nu - \lambda'\mu'\nu')p - \lambda\mu\nu(l + m + n - \lambda - \mu - \nu) \\ & - \lambda'\mu'\nu'(l + m + n - \lambda' - \mu' - \nu') + 2i \\ & = lmn - (\lambda\mu\nu + \lambda'\mu'\nu')(l + m + n + p) \\ & + \lambda\mu(\lambda + \mu + \nu) + \lambda'\mu'\nu'(\lambda' + \mu' + \nu') + 2i. \end{aligned}$$

A więc zmniejszenie ilości  $lmnp$  spowodowane przez krzywą złożoną, jest równem summie zmniejszeń sprawdzanych przez pojedyncze krzywe, mniej podwójną ilością punktów przecięć tych krzywych. Prawo to jest niezależnem od ilości krzywych wspólnych kształtom danym, i powiedzieć możemy że krzywa złożona z kilku pojedynczych, ma rząd równy summie rządów krzywych składowych, a rangę równą summie ich rang, zwiększonej podwójną liczbą punktów wspólnych krzywom dwie po dwie branym.

253. Dla objaśnienia powyższych zasad rozwiążemy zagadnienie : ile powierzchni drugiego stopnia poprowadzić można przez pięć punktów, tak aby one do czterech płaszczyzn stycznymi były. Niech  $S$ ,  $T$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$  będą pięcioma powierzchniami przechodzącymi przez pięć punktów; każda inna powierzchnia oznaczoną będzie przez równanie  $\alpha S + \epsilon T + \gamma U + \delta V + \epsilon W$ , a warunek by takowa dotykała płaszczyzny będzie funkcją trzeciego stopnia pięciu ilości  $\alpha$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ . Mamy cztery równania takie, a chcemy wiedzieć ile jest układów



wartości mogących je sprawdzić. Jeżeli cztery zrównania nie przyjmują spólnych krzywych, ta liczba spólnych im punktów będzie  $3^4 = 81$ . Lecz o istnieniu spólnych krzywych możemy się przekonać. Warunek aby powierzchnia drugiego rzędu dotykała płaszczyzny staje się zerem, jeżeli powierzchnia zamieni się na dwie płaszczyzny. Niech S i T będą temi płaszczyznami przechodzącymi przez pięć punktów danych;  $S = (123)(145)$ ,  $T = (123)(245)$ ;  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 0$ ,  $\epsilon = 0$ , sprawdzą  $\alpha S + \beta T + \gamma U + \delta V + \epsilon W$ , jeżeli powierzchnia ta ma dotykać płaszczyzny. Krzywa pierwszego stopnia będzie spólną czterem kształtom; nazwijmy  $(123)(45)$ , i powtarzajmy powyższe rozumowanie, a przekonamy się że kształty nasze posiadają dziesięć takich linii, jako to  $(124)(35)$ ...

Teraz, jeżeli S i T uważać będziemy jak poprzednio za układ dwóch płaszczyzn, układ  $S = (123)(145)$ ,  $T = (123)(245)$ , i jeżeli dodamy  $U = (145)(234)$ , to ponieważ linia  $(123)(45)$  oznaczona jest przez  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 0$ ,  $\epsilon = 0$ , a linia  $(145)(23)$  przez  $\delta = 0$ ,  $\delta = 0$ ,  $\epsilon = 0$ , wynika że te dwie linie, jako sprawdzone każda osobno przez układ spólnych wartości  $\delta = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 0$ ,  $\epsilon = 0$ , przeciąć się z sobą muszą. Podobnie,  $(123)(45)$  przeciętem będzie przez  $(245)(13)$  i  $(345)(12)$ . Tak więc dziesięć linii posiadają piętnaście punktów przecięć. Ranga każdej z krzywych pierwszego stopnia, otrzymuje się z formuły  $\lambda\mu\nu(\lambda + \mu + \nu)$  czyniąc w niej  $\lambda = \mu = \nu = 0$ ; ranga zaś układu równa się  $10 \cdot 3 + 2 \cdot 15 = 60$ , wreszcie liczba punktów zadosyć czyniących czterem zrównaniom jest  $81 - 10(3 + 3 + 3 + 3) + 60 = 21$ .

254. Umiemy oznaczyć (242) rząd układu wyznaczników, w których liczba kolumn różni się o jedność od liczby linii. Zobaczymy jak się znajduje ranga krzywej wyrażonej przez układ dany. Weźmy na początek przykład najprostszy

$$\begin{vmatrix} (q+1)q + a & v_1 + w \\ a' & v' + w' \end{vmatrix} = (q+1)q^2 + aq - a'q - (q+1)q^2 + a'q + wv_1 - w'v' - wv' + w'v_1$$

a przekonamy się że przecięcie  $uv' - u'v$ ,  $uw' - u'w$  jest krzywą złożoną z  $uu'$  i z krzywej która nas zajmuje; znając rząd i rangę krzywej, łatwo je znajdziemy dla tej ostatniej. W podobny sposób znajdziemy rząd i rangę układu o czterech kolumnach i trzech liniach, a wznosząc się kolejno coraz wyżej, przyjdziemy przez indukcję do ogólnego wyrażenia rangi

$$(p^2 - q + pP + Q)(P - 2p) - q(p + P) + R + r,$$

gdzie  $p, q, P, Q$ , mają to samo znaczenie jak w paragrafie 242,  $R$  zaś i  $r$  są summami iloczynów trójek  $a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots$ . Gdyż widzieliśmy (251) że rangi dwóch krzywych uzupełniających, które kompletują przecięcia dwóch kształtów mających  $\mu, \nu$  za swe rzędy, związane są równaniem

$$\xi - \xi' = (\alpha - \alpha')(\mu + \nu).$$

Wiemy nadto (242), że przecięcie dwóch kształtów rzędów  $p + P - a, p + P - b$ , uzupełniają krzywe rzędów

$$\alpha = p^2 - q + pP + Q, \alpha' = P^2 - Q + pP + q - p'(p + P) + q',$$

gdzie uczyniliśmy  $p' = a + b, q' = ab$ .

Dla znalezienia rangi niższego układu, w przypuszczeniu prawdziwości powyższych formuł, musimy napisać  $r$  dawne za  $R$  nowe,  $a$  za nowe  $r$

$$R - p'Q + (p'^2 - q')P - (p'^3 - 2p'q').$$

Po małym uproszczeniu przyjdzie

$$\begin{aligned} \xi &= (P^2 + pP + q)(2P + p) - Q(3P + 2p) + R + r \\ &\quad - p'(P + p)(3P + p) + 2p'(Q - q) + p'^2(P + p) \\ &\quad + 2q'(P + p) - p'q'. \end{aligned}$$

Dodawszy  $(\alpha - \alpha)(\alpha + \nu)$  do tej wartości, otrzymamy

$$\{p^2 - P^2 - 2(Q - q) + p'(P + p) - q'\}(2P + 2p - p'),$$

wartość znana na  $\epsilon$ . A że te formuły łatwo się sprawdzają w przypadku dwóch linii, więc uogólnienia są prawdziwemi.

155. Przejdźmy do układu

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d, & e, & f \\ a', & b', & c', & d', & e', & f' \\ a'', & b'', & c'', & d'', & e'', & f'' \\ a''', & b''', & c''', & d''', & e''', & f''' \end{vmatrix},$$

w którym ilość kolumn przewyższa o dwie ilość linii, i obliczymy rząd układu ograniczonego, spólnego wszystkim tym wyznacznikom. Którekolwiek trzy z pomiędzy nich,  $(ad'e''f''')$ ,  $(bd'e''f''')$ ,  $(c, d', e'', f''')$ , mają spólną krzywą

$$\begin{vmatrix} d, & d', & d'', & d''' \\ e, & e', & e'', & e''' \\ f, & f', & f'', & f''' \end{vmatrix}.$$

Niech  $l, m, n$ , będą rzędami trzech naszych wyznaczników,  $\alpha, \epsilon$ , rzędem i ważnością krzywej, a wyznaczniki przetną się po za krzywą w punktach będących w liczbie]

$$lmn - \alpha(l + m + n) + \epsilon.$$

Przedstawmy rzędy niektórych funkcj sposobem używanym w paragrafie 242, a łatwo ujrzymy że stopnie trzech wyznaczników być muszą

$$P + p - b - c, \quad P + p - c - a, \quad P + p - a - b;$$



uczyniwszy zaś

$$a + b + c = p', \quad bc + ca + ab = q', \quad abc = r',$$

będziemy musieli podstawić

$$(P + p)^3 - 2p'(P + p)^2 + (P + p)(p'^2 + q') - (p'q' - r')$$

za  $lmn$ , a  $3P + 3p - 2p'$  za  $l + m + n$ .

$\alpha$  i  $\xi$ , rząd i rangę krzywej, znajdziemy wedle formuł paragrafów 242 i 254, podstawiając  $p, q, r$ , za  $P, Q, R$ , a

$$P - p', \quad Q - Pp' + p'^2 - q', \quad R - p'Q + (p'^2 - q')P - (p'^3 - 2p'q' + r')$$

za  $p, q, r$ . Znajdziemy jak poprzednio

$$\alpha = P^2 - Q + pP + q - p'(P + p) + q',$$

$$\xi = (P^2 + pP + q)(2P + p) - Q(3P + 2p) + R + r$$

$$- p'(P + p)(3P + p) + 2p'(Q - q) + p'^2(P + p)$$

$$+ 2q'(P + p) - p'q' - r'.$$

Do tej wartości znalezionej dołączmy wartość daną

$$\xi = lmn + \alpha(l + m + n),$$

a otrzymamy na szukany wypadek

$$R + pQ + (p^2 - q)P + p^3 - 2pq + r.$$



Jeżeli niektóre linie są tego samego stopnia, czyli jeżeli mamy  $\alpha = \epsilon = \dots = 0$ , natenczas rząd układu będzie R.

Zgodność tego wypadku z wypadkiem paragrafu 242 uwydatni się pisząc symetryczną funkcją

$$\alpha^2 + \alpha\epsilon + \epsilon^2 + \dots p_2, \quad \alpha^3 + \alpha^2\epsilon + \alpha\epsilon^2 + \epsilon^3 + \dots p^3,$$

gdyż wedle paragrafu 242 przyjdzie  $Q + Pp + p_2$ , a wedle obecnego  $R + pQ + p_2P + p^3$ . Indukcyja poprowadzi nas do prawa, że rząd układu w którym ilość kolumn przewyższa o trzy ilość linii, będzie

$$S + pR + p_2Q + p_3P + p_4.$$

Nie posuniemy obecnie tego rachunku dalej, lecz paragrafy następne przekonają nas jak łatwo stosować się on daje do układów o większej liczbie kolumn i linii.

We wszystkich przypadkach tych, ważność układu wyprowadza się z jego rzędu, wedle podanego powyżej prawidła.

256. Zastosujemy formuły paragrafu poprzedzającego do obliczenia rzędu układu warunków potrzebnych aby równania  $at^m + \dots, a't^n + \dots$ , miały trzy pierwiastki wspólne. Warunki te zawiera układ wyznaczników, których sposób tworzenia widzieliśmy w paragrafie 245; podany tam jest pierwowzór tworzenia się tego. Niech w niej linia  $a, b, c$ , powtórzy się razy  $m - 2$ , linia zaś  $a', b', c'$ , razy  $n - 2$ , i niech będzie  $m + n - 2$  kolumn,  $m + n - 4$  linii.

Rząd układu (255) będzie :

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \lambda^3 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \mu$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)(m-2)\lambda^2\mu + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)(n-2)\lambda\mu^2 \\
& + \frac{1}{2}(m-1)n(n-1)(n-2)\lambda^2\alpha + \frac{1}{2}(n-1)m(m-1)(m-2)\mu^2\alpha \\
& + \frac{1}{2}(m-2)(n-2)\{m(n-1) + n(m-1)\}\lambda\mu\alpha \\
& + \left\{ \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)m(m-2) + \frac{1}{3}m(n-1)(n-2) \right\} \alpha^2\lambda \\
& + \left\{ \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)n(n-2) + \frac{1}{3}n(m-1)(m-2) \right\} \alpha^2\mu \\
& + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)n(n-1)(n-2)\alpha^3.
\end{aligned}$$

A w razie  $\alpha = 0$ ,  $\lambda = \mu = 1$  zamieni się na

$$+ \frac{1}{6}(m+n-2)(m+n-3)(m+n-4).$$

Na ważność układu otrzymamy

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)\lambda^2\lambda' + \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)\mu^2\mu' \\
& + (n-1)(n-2)(m-2)(\lambda\mu\lambda' + \frac{1}{2}\lambda^2\mu') \\
& + (m-1)(m-2)(n-2)(\lambda\mu\mu' + \frac{1}{2}\mu^2\lambda') \\
& + (m-1)n(n-1)(n-2)(\lambda\lambda'\alpha + \frac{1}{2}\lambda^2\alpha') \\
& + (n-1)m(m-1)(m-2)(\mu\mu'\alpha + \frac{1}{2}\mu^2\alpha')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2}(m-2)(n-2)(2mn-m-n)(\lambda\mu'\alpha + \lambda'\mu\alpha + \lambda\mu\alpha') \\
 & + \left\{ \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)m(m-2) + \frac{1}{3}n(n-1)(n-2) \right\} (\alpha^2\lambda' + 2\alpha\lambda) \\
 & + \left\{ \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)n(n-2) + \frac{1}{3}m(m-1)(m-2) \right\} (\alpha^2\mu' + 2\alpha\mu) \\
 & + \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)n(n-1)(n-2)\alpha^2\alpha'.
 \end{aligned}$$

257. W następującem zagadnieniu zamierzamy dojść, ile punktów przecięcia spólnego kilku kształtów zawiera ich linia spólnego przecięcia, jeżeli takowa istnieje. Nazywamy rzędem i rangą powierzchni, rząd i rangę krzywej wynikającej z przecięcia powierzchni danej z kształtem pierwszego stopnia. Weźmy przypadek pięciu zmiennych niezależnych; układ trzech z pomiędzy nich stanowi powierzchnią; rzędy pojedynczych zrównań są  $\lambda, \mu, \nu$ , rząd zaś powierzchni  $\lambda\mu\nu$ , a jej ranga  $\lambda\mu\nu(\lambda + \mu + \nu)$ , i są to ilości otrzymane przez połączenie zrównań danych ze zrównaniem dodatkowem pierwszego stopnia.

Kształty w liczbie  $k - 1$  mają spólną powierzchnią rzędu  $\alpha$  i rangi  $\epsilon$ , i zwykle po za nią krzywą uzupełniającą dopiero co znalezionego rzędu. Gdy dołączywszy do kształtu danego inne ilości stopnia pierwszego, otrzymujemy  $k$  kształtów mających krzywą spólną, a przecinających się po za nią w  $lmnr - \alpha(l + m + n + r) = \epsilon$  punktach. Lecz są to właśnie punkta w których kształt pierwszego stopnia przecina krzywą uzupełniającą, a więc jest to rząd tej krzywej.

258. Szukajmy z kolei liczby punktów przecięć powierzchni danej z uzupełniającą krzywą. Niech U, V, W, Y,



będą formy

$$Au + Bv + Cw = 0,$$

$$A'u + B'v + C'w = 0,$$

$$A''u + B''v + C''w = 0,$$

$$A'''u + B'''v + C'''w = 0.$$

Punkta ogólne  $U, V, W, Y$ , a nie czyniące  $u = v = w = 0$ , sprawdzą układ wyznaczników

$$\begin{vmatrix} A, & A', & A'', & A''' \\ B, & B', & B'', & B''' \\ C, & C', & C'', & C''' \end{vmatrix} = 0.$$

$A$  jest rzędu  $l - \lambda$ ,  $B$  rzędu  $l - \mu$ ,  $A'$  rzędu  $m - \lambda, \dots$ ; rząd warstwy wyznaczników (242) będzie  $Q - pP + p_2$ , gdzie  $P$  jest summą ilości  $l, m, n, r$ ,  $Q$  summą iloczynów tych ilości po dwie branych,  $p = \lambda + \mu + \nu$ ,  $p_2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda$ . Kombinując układ wyznaczników równoważny dwom warunkom, z  $k - 2$  warunkami stanowiącemi powierzchnią, otrzymamy punkta wspólne teje z krzywą uzupełniającą; ich liczba równa się rzędowi układu wyznaczników rozmnożonemu przez  $\lambda\mu\nu$ . Pisząc więc  $\lambda\mu\nu$  za  $\alpha$ ,  $\lambda\mu\nu(\lambda + \mu + \nu)$  za  $\beta$  i uczyniwszy

$$\lambda\mu\nu(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) = \gamma,$$

otrzymamy

$$i = \alpha Q - \beta P + \gamma.$$

Ilość tę nazwiemy *klasą* powierzchni.

259. Przybierzmy kształt uzupełniający  $Z$ , zawierający także powierzchnią daną, i szukajmy ile punktów nie leżących na



niej są spólnemi wszystkim  $k$  kształtom. Będą to widocznie punkta przecięcia  $Z$  z uzupełniającą krzywą, zmniejszone liczbą punktów przecięcia tej ostatniej z powierzchnią. Oznaczmy przez  $l, m, n, r, s$ , rzędy kształtów, a otrzymamy liczbę szukaną biorąc

$$s\{lmnr - \alpha(l + m + n + r) + \epsilon\},$$

i odciągając

$$\alpha(lm + ln + mn + lr + mr + nr) - \epsilon(l + m + n + r) + \gamma.$$

Wypadek szukany będzie ostatecznie

$$lmnrs - \alpha Q + \epsilon P - \gamma.$$

260. Rozważmy jeszcze przypadek w którym układ kształtów danych posiada nie tylko spólną powierzchnią oznaczoną przez  $\alpha, \epsilon, \gamma$ , lecz i spólną krzywą oznaczoną przez  $\alpha', \epsilon'$ , a przecinającą powierzchnię w  $i$  punktach. Weźmy jak poprzednio  $k - 1$  kształtów. Ich przecięcie składa się z powierzchni i z krzywej uzupełniającej rzędu

$$lmnr - \alpha(l + m + n + r) + \epsilon.$$

Krzywa uzupełniająca może jeszcze być złożoną, na przykład z krzywej  $\alpha'$ , i z innej rzędu  $\alpha''$ , a dla której

$$\alpha'' = lmnr - \alpha(l + m + n + r) + \epsilon - \alpha'.$$

Punkta przeto, których szukamy otrzymują się odciągając od  $\alpha''$ s punktów przecięcia krzywej  $\alpha''$  z jednym z pozostałych kształtów układu o  $k$  kształtach, ilość  $\delta + \delta'$ , w której  $\delta$  oznacza liczbę punktów spotkania krzywej  $\alpha''$  z powierzchnią ( $\alpha\epsilon\gamma$ ),  $\delta'$

zań liczbę punktów spotkania krzywej  $\alpha''$  z krzywą  $\alpha'$ . Lecz mamy  $\delta$  znając (258) liczbę punktów spotkania powierzchni z całą krzywą uzupełniającą; mamy przeto

$$\delta + i = \alpha(lm + ln + \dots) - \epsilon(l + m + n + r) + \gamma;$$

znamy zaś  $\delta'$  znając (250) liczbę punktów spotkania krzywej  $\alpha'$  z całą krzywą uzupełniającą; mamy znowu

$$\delta' + 2i = \alpha'(l + m + n + r) - \epsilon'.$$

Te wartości na  $\delta$  i  $\delta'$  wstawiając w  $\alpha''s - \delta - \delta'$  przyjdzie

$$lmnr - \alpha Q + \epsilon P - \gamma - \alpha' P + \epsilon' + 3i;$$

innemi słowy, zmniejszenie liczby  $lmnr$ s pochodzące tak od krzywej jak od powierzchni, będzie równe summie zmniejszeń osobno przez krzywą i przez powierzchnią spowodowanych, po dodaniu do tej ilości  $3i$ , to jest liczby wspólnych krzywej i powierzchni punktów.

261. Wypadek ten stwierdzić można przypuszczając że jeden z kształtów danych na przykład  $Z'Z''$  jest złożonym, tak że  $Z'$  (potęgi  $s'$ ) zawiera wspólną powierzchnią, a  $Z''$  (potęgi  $s''$ ) wspólną krzywą. Kształty  $U, V, W, Y, Z'$ , mają (259) po za powierzchnią wspólną punkta w ilości

$$lmnr - \alpha \{ s'(l + m + \dots) + lm + mn + \dots \} + \epsilon(s' + l + m + \dots) - \gamma.$$

Między niemi znajduje się  $\alpha's'$  punktów spotkania wspólnej krzywej z  $Z'$ , po odrzuceniu jednakże  $i$  punktów wspólnych krzywej z powierzchnią. Liczba przeto punktów spotkania się  $UVWYZ'$  nie leżących ani na krzywej ani na powierzchni wywodzi się z ilości  $\alpha's' - i$ .

Weźmy przecięcia U, V, W, Y, Z'; tworzą one układ kształtów mających dwie wspólne krzywe przecinające się w  $i$  punktach; krzywe te są:  $\alpha'$  i krzywa przecięcia wspólnej powierzchni z Z'', będącą rzędu  $\alpha s''$ , i rangi  $\alpha s''(\lambda + \mu + \nu + s'')$ . Liczba punktów UYWYZ'' nie leżących ani na krzywej ani na powierzchni będzie:

$$lmnrs'' - (\alpha' + \alpha s'')(l + m + n + r + s') + \mathcal{E}' + \alpha s''(\lambda + \mu + \nu + s'') + 2i.$$

Dodajmy i uczynimy  $s' + s'' = s$ , a przyjdzie jak w ostatnim paragrafie

$$lmnrs - \alpha Q + \mathcal{E}P - \gamma - \alpha' P + \mathcal{E} + 3i.$$

262. Przypuśćmy jeszcze że kształty dane mają dwie powierzchnie wspólne, przecinające się w  $i$  punktach. Metoda której użyjemy i do większej liczby powierzchni da się zastosować. Niech kształt ostatni składa się z Z' i Z'', z których Z' przechodzi przez pierwszą, a Z'' przez drugą powierzchnię. Układ U, V, W, Y, Z' posiada wspólną powierzchnię  $\lambda_{\mu\nu}$  i krzywą  $\lambda'\mu'\nu's'$ , mające  $i$  wspólnych punktów, a przecina się w następującej liczbie punktów nie leżących na żadnej z nich:

$$lmnrs' - \lambda_{\mu\nu} \{ (l + m + n + r)s' + lm + \dots \} + \mathcal{E}(l + m + n + r + s') - \gamma - \lambda'\mu'\nu's'(l + m + n + r + s') + \lambda'\mu'\nu's'(\lambda' + \mu' + \nu' + s') + 3i.$$

Podobnież punkta wspólne U, V, W, Y, Z'', są w liczbie

$$lmnrs'' - \lambda_{\mu\nu}s''(l + m + n + r + s'') + \lambda_{\mu\nu}s''(\lambda + \mu + \nu + s'') - \lambda'\mu'\nu'\{ (l + m + n + r)s'' + lm + \dots \} + \mathcal{E}'(l + m + n + r + s'') + 3i.$$



Co dodawszy przyjdzie

$$lmnr(s' + s'') - (\lambda_{\mu\nu} + \lambda'\mu'\nu') \{ (l + m + n + r)(s' + s'') + lm + \dots \} \\ + (\xi + \xi')(l + m + n + r + s' + s'') - \gamma - \gamma' + 6i.$$

Innemi słowy, wpływ dwóch powierzchni razem wziętych, równa się summie wpływów tychże powierzchni pojedynczo uważanych, a zmniejszonej sześć razy wziętą liczbą ich wspólnych punktów. Chociaż tylko cztery zmienne mamy, powierzchnie posiadają jednak punkta przecięcia.

203. Przypuśćmy nareszcie że dwie wspólne układowi powierzchni mają wspólną krzywą rzędu  $\alpha''$ , a rangi  $\xi''$ . Postępując jak w poprzedzającym paragrafie, znajdziemy że układ UVWYZ' posiada wspólną powierzchnię  $\lambda_{\mu\nu}$  i wspólną krzywą  $\lambda'\mu'\nu's'$ . Lecz że krzywa jest złożoną i że jej część  $\alpha''$ ,  $\xi''$ , leży na powierzchni, więc tylko powinniśmy zwracać uwagę na krzywą uzupełniającą rzędu  $\lambda'\mu'\nu's'$ , rangi

$$\xi'' + (\lambda'\mu'\nu's' - 2\alpha'')(\lambda' + \mu' + \nu' + s'),$$

a przecinającą  $\alpha''$ ,  $\xi''$  w punktach których liczba,

$$\alpha''(\lambda' + \mu' + \nu' + s') - \xi''.$$

Liczba przecięć jest więc

$$lmnr s' - \lambda_{\mu\nu} \{ (l + m + n + r)\nu'' + lm + \dots \} \\ + \xi(l + m + n + r + s'') - \gamma - (\lambda'\mu'\nu's' - \alpha'')(l + m + n + r + s') \\ + \xi'' + (\lambda'\mu'\nu's' - 2\alpha'')(\lambda' + \mu' + \nu' + s') \\ + 3\alpha''(\lambda' + \mu' + \nu' + s') - 3\xi''.$$



Podobnież liczba przecięć UVWYZ' jest

$$\begin{aligned}
 &lmnr s'' - \lambda' \mu' \nu' \{ (l + m + n + r) s'' + lm + \dots \} \\
 &+ \mathcal{E}' (l + m + n + r + s'') - \gamma' - (\lambda \mu \nu s'' - \alpha'') (l + m + n + r + s'') \\
 &+ \mathcal{E}'' + (\lambda \mu \nu s'' - 2\alpha'') (\lambda + \mu + \nu + s'') \\
 &+ 3\alpha'' (\lambda + \mu + \nu + s'') - 3\mathcal{E}'' .
 \end{aligned}$$

Dodawszy przyjdzie

$$\begin{aligned}
 &lmnr (s' + s'') - (\lambda \mu \nu + \lambda' \mu' \nu') \{ (l + m + n + r) (s' + s'') + lm + \dots \} \\
 &+ (\mathcal{E} + \mathcal{E}' + 2\alpha'') (l + m + n + r + s' + s'') \\
 &- \gamma - \gamma' + \alpha'' (\lambda + \mu + \nu) (\lambda' + \mu' + \nu') - 4\mathcal{E}'' .
 \end{aligned}$$

Czyli innymi wyrazami, dwie powierzchnie stanowią powierzchnię złożoną, rzędu równego summie rzędów powierzchni składowych, rangi równej summie ich rang zwiększonej dwa razy wziętym rzędem wspólnej krzywej, a klasy równej summie ich rang zwiększonej cztery razy wziętą rangą wspólnej krzywej, a zmniejszonej ilością  $\alpha'' (\lambda + \mu + \nu + \lambda' + \mu' + \nu')$ .

Pominęliśmy wiele przypadków, mianowicie ten w którym powierzchnie dotykają się w punktach lub wzdłuż krzywej. Przypadki rozebrane pozwalają nam obliczyć rząd kategorii wyznaczników w których liczba kolumn jest większą o trzy od liczby linii. Biorąc cztery wyznaczniki tego układu znajdujemy wspólną powierzchnię, której rząd, ranga i klasa, dadzą rząd układu.

264. Rozwiążmy teraz zagadnienie : jak znaleźć rząd układu warunków potrzebnych aby trzy potrójne kształty miały dwa punkta wspólne. Metoda której użyjemy podana została przez

p. Cayley do rugowania trzech ze trzech zrównań o trzech zmiennych (75). Weźmy trzy zrównania stopni  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ; rozmnożmy pierwsze przez wszystkie wyrazy  $x^{m+n-3}$ ,  $yx^{m+n-4}$ , ... zrównania stopnia  $m+n-3$ , drugie przez wszystkie wyrazy zrównania stopnia  $n+l-3$ , a trzecie przez wszystkie wyrazy zrównania stopnia  $l+m-3$ . Otrzymamy

$$\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2) + \frac{1}{2}(n+l-1)(n+l-2) + \frac{1}{2}(l+m-1)(l+m-2)$$

zrównań stopnia  $l+m+n-3$ , z których wyrugować trzeba

$$\frac{1}{2}(l+m+n-1)(l+m+n-2)$$

wyrazów  $x^{l+m+n-3}$ , ... Widzieliśmy na właściwem miejscu, że zrównania te nie są niezależne, lecz że je łączy

$$\frac{1}{2}(l-1)(l-2) + \frac{1}{2}(m-1)(m-2) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

związków. Odciągnijmy tę liczbę, a ilość zrównań niezależnych będzie o jedność mniejszą od liczby wielkości które rugować mamy; odnosi się to do przypadku (242) w którym liczba kolumn przewyższa o jedność liczbę linii. Lecz widzieliśmy (74) że w razie pewnej liczby zrównań połączonych danemi związkami, wyznaczniki utworzone z dostatecznej liczby zrównań, powinny być zmniejszone podzieleniem przez obce czynniki, będące wyznacznikami utworzonymi ze spółczynników związków danych. Jeżeliśmy w obecnym razie, wzięli dostateczną ilość zrównań i oznaczyli rząd wedle prawa w paragrafie 242

podanego, to wypadek otrzymany należy zmniejszyć przez liczbę, której wyznaczenie zajmie nas obecnie.

265. Zaczniemy od najprostszego przypadku, biorąc  $k$  równań połączonych jednym związkiem, a mających  $k$  zmiennych; w szczególności napiszmy układ o trzech liniach

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} a, & b, & c & \lambda \\ a', & b', & c' & \lambda' \\ a'', & b'', & c'' & \lambda'' \end{array} \right\|,$$

którego ilości łączą związki

$$\lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'' = 0, \quad \lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'' = 0$$

$$\lambda c + \lambda' c' + \lambda'' c'' = 0.$$

Przypuszczamy nadto że  $\lambda a$ ,  $\lambda' a'$ ,  $\lambda'' a''$ , są jednego rzędu, czyli

$$\lambda + a = \lambda' + a' = \lambda'' + a''.$$

Przypuśćmy teraz że dwa pierwsze równania są najprostszej formy i że  $\lambda'' = -1$ . Prawdziwy rząd dadzą dwa pierwsze równania, czyli oznaczając rzędy jak w paragrafie 242 otrzymamy

$$Q + P(\alpha + \epsilon) + \alpha^2 + \epsilon^2 + \alpha\epsilon.$$

Opuśćmy teraz pierwszą linię, a druga i trzecia dadzą

$$Q + P(\epsilon + \gamma) + \epsilon^2 + \gamma^2 + \epsilon\gamma.$$

Ilość ta dla dania rzeczywistego rzędu powinna być zmniejszoną przez

$$(\gamma - \alpha)(P + \alpha + \epsilon + \gamma),$$



czyli przez rząd iluści  $\lambda$  rozmnożony przez rząd wyznacznika otrzymanego ze trzech zrównań danych.

Przychodzimy ztąd do ogólnego prawidła: opuść jedną z linii, znajdź według paragrafu 242 wyznacznik pozostałego układu, a od tak otrzymanej liczby odejmiemy rząd wyznacznika utworzonego ze wszystkich zrównań a pomnożonego przez rząd wyrazu kolumny, należącego w związku danym do opuszczonej linii. Łatwo sprawdzić, że ten sam otrzymamy wypadek, jakąkolwiekbyśmy opuścili linię. Ponieważ  $\lambda - \lambda''\gamma = \alpha$ , przeto

$$\begin{aligned} Q + P(\alpha + \epsilon) + \alpha^2 + \epsilon^2 + \alpha\epsilon - \lambda'(P + \alpha + \epsilon + \gamma) \\ = Q + P(\epsilon + \gamma) + \epsilon^2 + \gamma^2 + \epsilon\gamma - \lambda(P + \alpha + \epsilon + \gamma). \end{aligned}$$

Gdzie uczyniwszy  $\lambda + \alpha$ ,  $\lambda' + \epsilon$  i  $\lambda'' + \gamma = 0$ , otrzymamy wypadek symetryczny

$$\begin{aligned} Q + P(\alpha + \epsilon + \gamma) + \alpha^2 + \epsilon^2 + \gamma^2 + \epsilon\gamma + \gamma\alpha + \alpha\epsilon \\ - A(P + \alpha + \epsilon + \gamma), \end{aligned}$$

albo :

$$Q + Pp + p^2 - q - A(P + p).$$

266. A w ogóle jeżeli istnieje pewna liczba kolumn wyrażających związku, to przez postępowanie podobne przyjdziemy łatwo do prawidła: niech wyrazy kolumn tych będą  $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots, \mu, \mu', \mu'', \dots, \nu, \nu', \nu'', \dots$ , przyjść musi

$$\lambda + \alpha = \lambda' + \epsilon', \dots, \mu + \alpha = \mu' + \epsilon', \dots, \nu + \alpha = \nu' + \epsilon', \dots$$

Niech dalej A, B, C, oznaczają wspólne wartości tych summ, P' i Q', 1° summę ilości, 2° summy iloczynów parami bra-



nych z ilości A, B, C; rząd układu będzie

$$Q + Pp + p^2 - q - P'(P + p) + Q.$$

Wypadek ten może być stwierdzonym drugą którą może prowadzić do odpowiedzi na pytania dotyczące rzędu układu zrównań. W naszym przykładzie, całkowita liczba kolumn, wraz z kolumnami zawierającymi związki, przenosi o jedność liczbę linii, a rzędu układu dostarczy nam prawidło paragrafu 242, jeżeli rzędom kolumn zawierającym związki, nadamy znak mniej. Podobnie, jeżeli liczba jednych i drugich kolumn, równą jest liczbie rzędów, układ, wedle twierdzenia P. Cayley, wyobraża wyznacznik tego samego rzędu, jakibyśmy otrzymali przy obliczaniu rzędu całego układu uważanego za wyznacznik w którymby rzędy kolumn wyrażających związki, miały znak mniej. Nie ulega wątpliwości że w układzie mającym ilość kolumn większą o dwa od ilości linii, rząd układu znajdziemy przez podaną modyfikację prawidła paragrafu 257.

267. Zastosujmy wreszcie dopiero co otrzymane prawidło, do zagadnienia paragrafu 264. Przypuszczamy że w trzech potrójnych kształtach, współczynniki najwyższych potęg  $x$ , czyli  $x^l, x^m, x^n$  są  $\lambda, \mu, \nu$ ; współczynniki  $x^{l-1}y, x^{l-1}z, \dots$ , rzędów  $\lambda + \alpha, \lambda + \alpha', \dots$  i tak dalej, tak że dla potęg  $y$  o jedność wzrastających rząd rośnie o  $\alpha$ , a dla takichże potęg  $z$  o ilość  $\alpha'$ . Gdyż wyrazy pierwszej kolumny składają się z :

1°  $\frac{1}{2}(m + n - 1)(m + n - 2)$  wyrazów mających rzędy :

$\lambda; \lambda - \alpha, \lambda - \alpha'; \lambda - 2\alpha, \lambda - \alpha - \alpha', \lambda - 2\alpha'; \dots$ ;

2°  $\frac{1}{2}(n + l - 1)(n + l - 2)$  wyrazów mających rzędy,

$\mu, \mu - \alpha, \mu - \alpha', \dots$ ; i

3°  $\frac{1}{2}(l+m-1)(l+m-2)$  podobnych wyrazów w  $v$ .

A mogą być one wzięte za liczby  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  (242). Liczby  $a, b, c, \dots$ , zacytowanego paragrafu są obecnie:  $0, \alpha, \alpha', 2\alpha, \alpha + \alpha', 2\alpha' \dots$ ; a będzie  $\frac{1}{2}(l+m+n-1)(l+m+n-2)$ , podobnych wyrazów. Wreszcie znaleźliśmy że liczby  $A, B, C, \dots$  ostatniego paragrafu składają się z  $\frac{1}{2}(l-1)(l-2)$  wyrazów

$\mu + \nu, \mu + \nu - \alpha, \mu + \nu - \alpha', z \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$  i

$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  odpowiednimi wyrazami w  $v + \lambda$  i  $\lambda + \mu$ .

Przy obliczaniu uznałem za stosowne zamienić formę paragrafu 266 na

$$\frac{1}{2} \{ (P + p - P')^2 - (S_2 + S'_2 - s_2) \},$$

gdzie  $S_2$  oznacza summę kwadratów z wyrazów  $a, b, c, \dots$

Jeżeli.

$$\varphi(\lambda) = A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E,$$

to przyjdzie

$$\varphi(l+m+n) + \varphi(l) + \varphi(m) + \varphi(n) - \varphi(l+m) -$$

$$- \varphi(m+n) - \varphi(n+l)$$

$$= 12A\lambda mn(l+m+n) + 6B\lambda mn + E.$$

Przyszlśmy przeto do wypadku że rząd układu jest

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} mn(mn - 1)\lambda^2 + \frac{1}{2} nl(nl - 1)\mu^2 + \frac{1}{2} lm(lm - 1)\nu^2 \\
 & + \left\{ (nl - 1)(lm - 1) - \frac{1}{2}(l - 1)(l - 2) \right\} \lambda\mu \\
 & + \left\{ (lm - 1)(mn - 1) - \frac{1}{2}(m - 1)(m - 2) \right\} \nu\lambda \\
 & + \left\{ (nl - 1)(nm - 1) - \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) \right\} \lambda\nu \\
 & + mn\lambda \left\{ lmn - l + 1 - \frac{1}{2}(m + n) \right\} (\alpha + \alpha') \\
 & + nl\mu \left\{ lmn - m + 1 - \frac{1}{2}(n + l) \right\} (\alpha + \alpha') \\
 & + lm\nu \left\{ lmn - n + 1 - \frac{1}{2}(l + m) \right\} (\alpha + \alpha') \\
 & + \frac{1}{2} lmn(lmn - l - m - n + 2)(\alpha^2 + \alpha'^2) \\
 & + \frac{1}{2} lmn(2lmn - l - m - n + 1)\alpha\alpha'.
 \end{aligned}$$

Jeżeli rząd wszystkich tych wyrazów w pierwszym zrównaniu jest  $\lambda$ , w drugim  $\mu$ , w trzecim  $\nu$ , to należy uczynić  $\alpha = \alpha' = 0$  w poprzedzającej formule. Przypuściwszy nadto  $\lambda = \mu = \nu = 1$  i  $l = m = n$ , da ona na rząd szukany

$$\frac{9}{2}n(n-1)(n^2+n-1).$$

## ROZDZIAŁ XVII

### ZASTOSOWANIA SYMBOLICZNYCH METOD.

268. Rozdział ten będzie uzupełnieniem dwunastego. Pragniemy zbadać, o ile wyłożone tamże symboliczne znakowanie dostarcza metody rachunku, za pomocą którego niezmienniki i spółzmienniki przeobrażone być mogą, a tożsamość różnych wyrażeni udowodnioną. Podstawą naszych poszukiwań w odniesieniu do kształtów podwójnych jest zrównanie które w tej chwili podamy. Dajmy że

$$D_1 = x \frac{d}{dx_1} + y \frac{d}{dy_1},$$

i jak poprzednio

$$\overline{12} = \frac{d}{dx_1} \frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2} \frac{d}{dy_1}$$

a łatwo sprawdzimy formułę

$$\overline{D_1 23} + \overline{D_2 31} + \overline{D_3 12} = 0, \dots (A),$$

gdź w razie rozwinięcia spółczynniki  $x$  i  $y$  spółcześnie stają się zerami. Dla wykazania użyteczności tego zasadniczego zrównania, przy pierwszym jego zastosowaniu wejdziemy w szczególności, które byłyby zbyt czynnymi przy dalszych przykładach.



Zrównanie A da się napisać

$$D_1 \overline{23} = D_2 \overline{13} - D_3 \overline{12};$$

podnosząc je do kwadratu przyjdzie

$$2D_2 D_3 \overline{12} \cdot \overline{13} = D_2^2 \overline{13}^2 + D_3^2 \overline{12}^2 - D_1^2 \overline{23}^2; \dots (B).$$

W tej formie, zrównanie jest prawdziwem nawet gdy funkcje  $U_1, U_2, U_3$ , na których działamy, zupełnie są między sobą co do formy różnemi. Lecz przypadek który nas wyłącznie w obecnym zajmuje rozdziale, zasada się na tworzeniu pochodnych pojedynczej funkcji  $U$ , względem której  $U_1, U_2, U_3$ , stają się równemi przez proste zmazanie wskaźników. A w tym przypadku widzieliśmy (133), że

$$D_1^2 \cdot \overline{23}, \quad D_2^2 \cdot \overline{31}, \quad D_3^2 \cdot \overline{12},$$

są różnemi tej samej rzeczy wyrażeniami. Ztąd zrównanie B staje się

$$D_3^2 \cdot \overline{12} = 2D_2 D_3 \overline{12} \cdot \overline{13}.$$

Podług twierdzenia o funkcjach jednorodnych, działanie jakieśmy na  $D$  odbyli, zastosowane do innych funkcji, tylko na ich liczby wpłynie czynnik. Po lewej stronie zrównania, ponieważ  $D_3^2$  wywiera wpływ tylko na  $\overline{U}_3$  i przeto nie było gdzie indziej różniczkowaniem,  $n(n-1)$  będzie mnożnikiem; po prawej zaś stronie, każda z ilości  $D_2, D_3$ , wpływa na funkcje które raz różniczkowanemi były, a ztąd wprowadzają czynnik  $(n-1)$ . W następstwie jeżeli rozwiemy zrównanie

$$2D_2 D_3 \overline{12} \cdot \overline{13} = D_3^2 \overline{12}^2,$$

opuszczając wskaźniki i dzieląc obie strony przez  $2(n-1)$ , to otrzymamy

$$(n-1) \left\{ \frac{d^2U}{dx^2} \left( \frac{dU}{dy} \right)^2 - 2 \frac{d^2U}{dxdy} \frac{dU}{dx} \frac{dU}{dy} + \frac{d^2U}{dy^2} \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 \right\} \\ = nU \left\{ \frac{d^2U}{dx^2} \frac{d^2U}{dy^2} - \left( \frac{d^2U}{dxdy} \right)^2 \right\}.$$

269. Zauważyć należy, że jeżeli przy przeobrażeniu, ilość znaków symbolicznych zmniejszy się w symbolu, będzie to dowodem że sam kształt  $U$  wchodzi do pochodnych jako czynnik. I tak w obranym przykładzie dowiedliśmy że  $\overline{12.13}$  tylko liczebnym czynnikiem różni się od  $\overline{12}^2$ . Lecz że działamy na iloczynie  $U_1U_2U_3$  i że  $\overline{12}^2$  nie wchodzi wcale do  $U_3$ , przeto mimo zmazania wskaźników,  $U$  nie przestanie być czynnikiem.

270. W ogóle są symbole tak się przeobrażać dające że najwyższa potęga czynników niektórych jak  $\overline{12}$  parzysta zostanie. Gdyż znaczenie symbolu nie ulega zmianie przez wzajemną między sobą zmianę figur 1 i 2. Ztąd

$$\overline{12}^{-2m+1} \varphi_1 = - \overline{12}^{-2m+1} \varphi_2 = \frac{1}{2} \overline{12}^{-2m+1} (\varphi_1 - \varphi_2),$$

a przy pomocy zrównania A, ilość  $\varphi_1 - \varphi_2$ , tak przeobrażoną być może, aby się stała podzielną przez  $\overline{12}$ . Na przykład, pochodna parzysta  $\overline{12}^m$  tylko o liczebnym czynnikiem różni się od  $\overline{12}^{-m+1}$ . Gdyż

$$2D_2\overline{12}^m . 13 = \overline{12}^{-m} \{ D_2\overline{13} - D_1\overline{23} \} = D_3\overline{12}^{-m+1},$$

a jeżeli  $n$  jest stopniem  $U$ , na którym odbywaliśmy działanie, przyjdzie

$$2(n - m)12^m \cdot 13 = n(12)^{m+1}.$$

271. Prócz równania tożsamości i owego podanego wyżej, używamy jeszcze zrównania łatwego do sprawdzenia :

$$12 \cdot 34 + 13 \cdot 42 + 14 \cdot 23 = 0 \dots \dots (C).$$

Za pomocą tych zrównań, możemy przywieść wszystkie symbole do pewnej liczby chorągwi kształtu; dla dwóch czynników formą taką będzie Hessowy  $12^2$ , który nazwiemy  $H$ ; dla trzech  $12^2 \cdot 13$ , oddawna  $(13^6)$  oznaczone przez  $G$ ; dla trzech czynników  $12^4 = S(195)$ ; dla pięciu  $12^4 \cdot 13 = F$  albo  $12^2 \cdot 13 \cdot 45 = GH$ ; dla sześciu  $12^6 = A$ , (229), albo  $12^2 \cdot 34 \cdot 56 = H^3$ , etc. Następujące przykłady pokażą jak się wykonywają skrócenia te.

272. Pierwsze przykłady dane, objaśnić mają następujące twierdzenie : « Wypadek podstawienia w funkcję  $U$ , i  $\frac{dU}{dy}$  za  $x$ , i  $-\frac{dU}{dx}$  za  $y$ , jest spółzmiennikiem, zawsze przez  $U$  podzielnym. » A nasamprzód wyrażmy symbolicznie w mo-  
wie będący spółzmiennik. Funkcja dana da się napisać  $\left(x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy}\right)^n U$ . Jeżeli uczynimy zamierzoną zmianę, każdy z  $n$  czynników działających na  $U$  przybierze postać  $\frac{d}{dx} \frac{d}{dy}$   $-\frac{d}{dy} \frac{d}{dx}$ , a spółzmiennik nasz  $\frac{d^n U}{dx^n} \left(\frac{dU}{dy}\right)^n - \dots$  wyrazi się



symbolicznie jako iloczyn  $n$  czynników  $\overline{12.13.14} \dots$ . Jeden symbol (ten który daje  $n$  różniczką w razie rozwinięcia iloczynu) pozostaje niezmiennym dla każdego czynnika; inny znowu symbol zmienia się w każdym czynniku, a to dla tego, abyśmy po dokonaniu mnożenia, mogli mieć same potęgi pierwszych różniczek. Napiszmy  $\overline{12.13} = Q_2$ ,  $\overline{12.13.14} = Q_3$ , i wyrażmy  $Q_3$  w chorągwi kształtu;  $Q_2$  już było obliczonym.

PRZYKŁAD I. — Obliczyć  $Q^3 = \overline{12.13.14}$ . Pomnóżmy zrównanie B przez  $\overline{14}$ ; pierwsze dwa wyrazy po prawej ręce, stają się równymi, ponieważ ostatni równy zeru, i mamy

$$D_2 D_3 \overline{12.13.14} = D_2^2 \overline{13.14},$$

albo:  $(n-1)Q_3 = nGU$ .

W ogóle każdy symbol może być sprowadzonym do formy bardziej skupionej przez podstawienie za każdą parę pojedynczych czynników mających spólną figurę, jak na przykład  $\overline{12.13}$ , ich wartości ze zrównania B, i tym sposobem wyrażając symbol dany w funkcji innych symbolów, w którym ta para czynników jest zastąpioną przez pojedynczy kwadratowy czynnik.

PRZYKŁAD II. — Obliczmy  $Q_4 = \overline{12.13.14.15}$ . Pomnóżmy spólnie

$$2D_2 D_3 \overline{12.13} = D_2^2 \overline{12} + D_2^2 \overline{13} - D_1^2 \overline{23},$$

$$2D_4 D_5 \overline{14.15} = D_4^2 \overline{14} + D_4^2 \overline{15} - D_1^2 \overline{45},$$

skrótmy wyrazy podobne, będzie

$$\begin{aligned} 4(n-1)^2 Q_4 &= D_1^2 \overline{23} \cdot \overline{45} - 4D_1^2 D_3^2 \overline{12} \cdot \overline{45} + 4D_2^2 D_5^2 \overline{12} \cdot \overline{14} \\ &= -3n(n-1)(n-2)(n-3)H^2U + 4n^2(n-1)^2U^2 \overline{12.13}. \end{aligned}$$



Pozostaje przywieść do chorągwi kształtu. Podniemy do czwartej potęgi  $D_1 \overline{23} = D_2 \overline{13} - D_3 \overline{12}$  i zbierzmy wyrazy podobne, a otrzymamy :

$$6D_2^2 D_3^2 \overline{12} \cdot \overline{13} = 8D_3^3 D_2 \overline{13} \cdot \overline{13} - D_1^4 \overline{12} \cdot \overline{13}$$

Lecz w paragrafie 270

$$8D_3^3 D_2 \overline{12} \cdot \overline{13} = 4D_3^4 \overline{12}$$

złąd

$$2(n-2)(n-3)(\overline{12} \cdot \overline{13}) = n(n-1)SU.$$

Zkąd inąd, Algebra elementarna uczy nas że równanie  $a + b + c = 0$  pociąga za sobą

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0.$$

Złąd równanie daje :

$$\begin{aligned} D_1^4 \overline{23} + D_2^4 \overline{31} + D_3^4 \overline{12} - 2D_1^2 D_2^2 \overline{31} \cdot \overline{23} - 2D_2^2 D_3^2 \overline{31} \cdot \overline{12} \\ - 2D_3^2 D_1^2 \overline{12} \cdot \overline{23} = 0; \dots (D) \end{aligned}$$

a więc jak poprzednio

$$2D_2^2 D_3^2 \overline{12} \cdot \overline{13} = D_1^4 \overline{12}.$$

Będzie przeto

$$\begin{aligned} 4(n-1)^4(n-2)(n-3)Q_1 \\ = -3n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2UH^2 + 2n^3(n-1)^3U^3S. \end{aligned}$$

Łatwo spostrzedz że jeżeli w symbol  $\overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{14} \cdot \overline{15} \dots$  podstawimy za każdą parę czynników  $\overline{12} \cdot \overline{13}$  wartości ze równania B, to zmniejszy się

liczba figur wchodzących w symbol, a więc okaże się że  $U$  jest czynnikiem. Wartości  $Q_5$  i  $Q_6$  obliczone zostały w *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* (Tom 9, str. 23).

PRZYKŁAD III. — Skróćmy  $\overline{12} \cdot \overline{13}$ . Pomnóżmy równanie  $D$  przez  $\overline{12}$ ; przyjdzie

$$2D_1^4 \overline{13} \cdot \overline{12} + D_1^4 \overline{12} = 2D_1^2 D_2^2 \overline{12} \cdot \overline{23} \cdot \overline{31} + 4D_2^2 D_1^2 \overline{12} \cdot \overline{13},$$

albo

$$2(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(\overline{12} \cdot \overline{13}) = n(n-1)(n-2)(n-3)AU \\ - 2(n-4)^2(n-5)2T.$$

PRZYKŁAD IV. — Skróćmy  $\overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{14}$ . Pomnóżmy trzy równania

$$2D_3 D_1 \overline{12} \cdot \overline{13} = D_1^2 \overline{12} + D_1^2 \overline{13} - D_1^2 \overline{23},$$

$$2D_3 D_1 \overline{13} \cdot \overline{14} = D_1^2 \overline{13} + D_1^2 \overline{14} - D_1^2 \overline{34},$$

$$2D_1 D_2 \overline{14} \cdot \overline{12} = D_1^2 \overline{14} + D_1^2 \overline{12} - D_1^2 \overline{24};$$

zbierzmy wyrazy podobne i skróćmy

$$6D_1^2 D_2^2 D_1^2 \overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{14} = -4D_1^2 \overline{12} \cdot \overline{23} \cdot \overline{31} - 3D_1^2 D_2^2 \overline{14} \cdot \overline{23} \\ + 6D_1^2 D_1^2 \overline{12} \cdot \overline{13}.$$

Zrównanie to daje nam  $\overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{14}$ , ponieważ obliczyliśmy  $\overline{12} \cdot \overline{13}$ .

PRZYKŁAD V. — Skróćmy  $\overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{34}$ . Możemy, albo mnożąc zrów-

nanie  $D^2$  przez  $34^2$  otrzymać wyrażenie na obchodzącą nas pochodną funkcji  $\overline{12} \cdot \overline{13}$  i  $\overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{14}$ , wyrażenie które już obliczyliśmy, albo postępować jak następuje: pomnożmy przez  $\overline{14}$  iloczyn ilości

$$2D_1D_3\overline{12} \cdot \overline{13} = D_3^2\overline{12} + D_2^2\overline{13} - D_1^2\overline{23};$$

$$2D_2D_4\overline{24} \cdot \overline{34} = D_3^2\overline{24} + D_2^2\overline{34} - D_4^2\overline{23};$$

a otrzymamy

$$4D_2^2D_3^2\overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24} \cdot \overline{34} \cdot \overline{14} = 2D_3^2\overline{12} \cdot \overline{24} \cdot \overline{41} + D_1^2D_2^2\overline{23} \cdot \overline{14} \\ - 2D_2^2D_4^2\overline{14} \cdot \overline{13} \cdot \overline{23}.$$

Zrównanie C daje

$$2 \cdot \overline{14} (\overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24} \cdot \overline{34}) = \overline{14}^2 (\overline{12} \cdot \overline{34} + \overline{13} \cdot \overline{24} - \overline{14} \cdot \overline{23}),$$

przeto lewa strona poprzedniego równania staje się

$$4D_2^2D_3^2\overline{12} \cdot \overline{14} \cdot \overline{34} - 2D_2^2D_4^2\overline{14} \cdot \overline{23},$$

skracając przyjdzie

$$6D_2^2D_3^2\overline{12} \cdot \overline{14} \cdot \overline{34} = 3D_2^2D_3^2\overline{14} \cdot \overline{23} + 2D_3^2\overline{12} \cdot \overline{24} \cdot \overline{41},$$

albo

$$6(n-2)(n-3)\overline{12} \cdot \overline{14} \cdot \overline{34} = 3(n-2)(n-3)SH + 2n(n-4)TU.$$

273. Zastanowimy się teraz nad sposobem utworzenia symbolu wyrażającego pochodną pochodnej. Mając daną funkcją

ilości  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , widoczna że do tego samego przyjdziemy wypadku, czy to przemazując wskaźniki i różniczkując względem  $x$  czy to różniczkując względem  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , a potem dopiero przemazując wskaźniki. Różniczka względem  $x$  symbolu pochodnego, zawierającego figury 1, 2, 3, ... (np.  $\overline{12}, \overline{13}$ ) otrzymuje się działając na symbol za pośrednictwem  $\frac{d}{dx_1}$  +  $\frac{d}{dx_2}$  +  $\frac{d}{dx_3}$  + ... Sposób wyrażania innych pochodnych, na szczegółowym przypadku objaśnimy, np. przy symbolicznem przedstawianiu Hessowego Hessowego. Przypomnieć należy że Hessowy powstaje z iloczynu  $U_1$  przez tę samą funkcją  $U_2$  z innych liter złożoną, na który działamy za pośrednictwem

$$(\xi_{12} - \xi_{21})^2, \quad \text{z kąd} \quad \xi_1 = \frac{d}{dx_1} + \frac{d}{dx_2}, \quad \xi_2 = \frac{d}{dx_3} + \frac{d}{dx_1}, \dots$$

A tak jasno widzimy że Hessowy Hessowego jest

$$\left( \overline{13} \cdot \overline{14} \cdot \overline{23} \cdot \overline{24} \right)^2 \cdot \overline{12} \cdot \overline{34},$$

i że po rozwinięciu staje się

$$4 \left( \overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{34} \right) + 4 \left( \overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} \cdot \overline{34} \right) + 8 \left( \overline{13} \cdot \overline{14} \cdot \overline{12} \cdot \overline{34} \right).$$

Za przykład zawilży weźmiemy szukanie wyrażenia symbolicznego, oznaczającego uskutecznienie działania  $\overline{12} \cdot \overline{23} \cdot \overline{31}$  na trzech funkcjach, z których pierwsza Hessowy  $\overline{12}$ , druga  $T$  albo  $\overline{12} \cdot \overline{23} \cdot \overline{31}$ , a trzecia samaż funkcya  $U$ . Gdyż szukać należy rozmaitych figur dla dwóch pochodnych, i dla tego to



utworzyliśmy iloczyn  $\overline{12}$  przez  $\overline{34} \cdot \overline{45} \cdot \overline{53}$ , i działaliśmy nań przez

$$(\xi_{1m_2} - \xi_{2m_1})^2 (\xi_{2m_3} - \xi_{3m_2})^2 (\xi_{3m_1} - \xi_{1m_3})^2,$$

gdzie włożywszy  $\frac{d}{dx_1} + \frac{d}{dx_2}$  za  $\xi_1$ ;  $\frac{d}{dx_3} + \frac{d}{dx_4} + \frac{d}{dx_5}$  za  $\xi_2$ ;

a  $\frac{d}{dx_6}$  za  $\xi_3$  otrzymamy po rozwiązaniu symbol szukany

$$\begin{aligned} & (\overline{13} + \overline{14} + \overline{15} + \overline{23} + \overline{24} + \overline{25})^2 (\overline{36} + \overline{46} + \overline{56})^2 (\overline{16} \cdot \overline{26})^2 \\ & \cdot \overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{45} \cdot \overline{53}. \end{aligned}$$

PRZYKŁAD. — Sprowadzić Hessowy Hessowego do formy  $\alpha SH + \epsilon TU$  (207). Widzieliśmy (172, przykład 5) że  $\overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{34}$ , dają się wyrazić w tej formie, idzie tylko o dowodzenie że to samo ma miejsce dla innych wyrazów danego w tym paragrafie wyrażenia Hessowego Hessowego. Pomnóżmy przez  $\overline{12}$  iloczyn dwóch równań

$$2D_1 D_1 \overline{13} \cdot \overline{34} = D_1^2 \overline{34} + D_1^2 \overline{13} - D_1^2 \overline{44},$$

$$2D_2 D_2 \overline{24} \cdot \overline{34} = D_2^2 \overline{34} + D_2^2 \overline{24} - D_2^2 \overline{24};$$

a dalej

$$-4D_1 D_2 D_3 D_1 \overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24} = D_1^2 D_2^2 \overline{12} \cdot \overline{34} + 2D_1^2 D_2^2 \overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24}$$

$$- 2D_1^2 \overline{12} \cdot \overline{23} \cdot \overline{31};$$

biorąc zaś za  $\overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24}$ , znalezionej jego wartość

$$-12(n-3)^2 (\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} \cdot \overline{24}) = 6(n-2)^2 (n-3)SH$$

$$-4n(n-1)(n-2)TU.$$

Wzajemnie  $\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} \cdot \overline{14}$  obliczyć łatwo przyjdzie; idzie o wstawienie ze zrównania B, wartości za  $\overline{13} \cdot \overline{14}$ , aby otrzymać

$$2D_3D_1(\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} \cdot \overline{14}) = 2D_3^2\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} - D_1^2\overline{12} \cdot \overline{34}.$$

Podstawiając zaś jak poprzednio przyjdzie

$$6(n-3)^2(\overline{12} \cdot \overline{34} \cdot \overline{13} \cdot \overline{14}) = 2n(n-1)TU,$$

wartość która pomoże do wynalezienia Hessowego Hessowego w żądanej formie

274. Dogodną w ogóle być powinna możność dania ogólnego symbolicznego wyrażenia na wypadek rugowania między dwoma zrównaniami. Nie trudno spostrzedz że wypadek rugowania między prostem w swej formie równaniem (272) a zrównaniem stopnia  $n$  jest  $\overline{12} \cdot \overline{13} \cdot \overline{14} \cdot \overline{15} \dots$ , gdzie zawarte są symbole odnoszące się do zrównania stopnia  $n$  i symbol prostego zrównania pierwszego stopnia. Szukajmy czy podobna ogólna formuła da się wyprowadzić na przypadek gdy jedno ze zrównań jest stopnia drugiego (\*). Wypadek będzie tegoż stopnia względem współczynników zrównania ogólnego, a stopnia  $n$  względem współczynników zrównania kwadratowego i w swem symbolicznem wyrażeniu zawierać musi dwa symbole odnoszące się do zrównania stopnia  $n$ , a  $n$  powtórzone razy  $n$ , i  $n$  symbo-

---

(\*) P. Salmon podał w *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* (tom IX, str. 32, r. 1853), formułę ogólną na wyznacznik wypadkowy zrównania stopnia  $n$ , i stopnia drugiego. P. Clebsch, w roku 1860, na nowo to twierdzenie podał i zastosował je do układu zrównania złożonego, z jednego zrównania stopnia  $n$ , z jednego stopnia drugiego, i z pewnej liczby zrównań stopnia pierwszego (*Crelle*, tom LVIII). Twierdzenie podane według notacji P. Cayley, my zaś w paragrafie 278 podaliśmy wypadki otrzymane przez P. Clebsch.

łów powtórzonych razy dwa, a odnośnych do zrównania stopnia drugiego. Pierwsze symbole oznaczymy przez 1, 2, drugie zaś przez A, B, ... L, M, N. Czynniki te na rozmaite warstwy podzielić możemy, tak aby każda warstwa zawierała  $n$  czynników pierwszego rodzaju, a dwa drugiego. Napiszmy warstwy :

$$(1A)(2A)(1B)(2B)\dots(1M)(2M)(1N)(2N)$$

$$(1A)^2(2A)^2(1B)(2B)\dots(1M)(2M)$$

$$(1A)^2(1B)^2(2M)^2(2N)^2(1C)(2C)\dots(1L)(2L),\dots$$

W pierwszej warstwie każdy symbol A, połączony jest z obydwojma symbolami 1 i 2 drugiego rodzaju; w drugiej, jeden symbol A jest tylko z 1 połączony w  $(1A)^2$ ; w trzeciej, dwa symbole A i B połączone są z 1,  $(1A)^2$  i  $(1B)^2$ , i t. d., i t. d. Następujące uwagi posłużą do takiego ułożenia warstw tych, iżby tworzyły symbol będący rugownikiem szukanym. Rozłożmy zrównanie stopnia drugiego na jego czynniki, i odeślijmy  $a$  i  $a'$  do różniczek tych czynników. Wypadek rugowania będzie

$$(1a)(1b)(1c)\dots(1n)(2a')(2b')(2c')\dots(2n').$$

Lecz

$$A = a + a', \quad (1A) = (1a) + (1a'), \quad (1B) = (1b) + (1b'),\dots$$

Mnożąc i pamiętając że  $(1a)^2$ ,  $(1a)(2a)$  stają się zerami z powodu że symbol  $a$  napotykamy razy dwa, a zatem że nasze proste pierwszego stopnia zrównanie dwa razy różniczkowanem było, przyjdzie

$$(1A)^2 = 2(1a)(1a'), \quad (1A)(2A) = (1a)(2a') + (1a')(2a),$$



ostatnie zrównanie należy napisać

$$(1A)(2A) = (1, 0) + (0, 1),$$

gdzie pierwsza figura oznacza ilość nieakcentowanych liter połączonych z 1, druga zaś ilość tychże liter połączonych z 2. W tym znakowaniu sposobie, będzie

$$\begin{aligned} & (1A)(2A)(1B)(2B)\dots(1N)(2N) \\ &= (n, 0) + n(n-1, 1) + \frac{1}{2}n(n-1)(n-2, 2) + \dots \end{aligned}$$

Podobnież

$$\begin{aligned} & (1A)^2(2N)^2(1B)(2B)\dots(1M)(2M) \\ &= 4\{(n-1, 1) + (n-2)(n-2, 2) + \dots\}. \\ & (1A)^2(1B)^2(2M)^2(2N^2)(1C)(2C)\dots \\ &= 16\{(n-2, 2) + (n-4) + \dots\}. \end{aligned}$$

Rugownikiem wedle znakowania  $(n, 0)$  będzie

$$\begin{aligned} & (1A)(2A)\dots - n \frac{(1A)^2(2N)^2\dots}{4} \\ & + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} \frac{(1A)^2(1B)^2(4M)^2(2N)^2\dots}{16} - \dots + \dots = A \end{aligned}$$

a spółczynniki otrzymamy te same jakie napotykamy przy rozwinięciu summy odwrotnych  $n^{vch}$  potęg pierwiastków równania stopnia drugiego, na przykład

$$\frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots$$



275. Poprzedzające szeregi, przeobrazić można, tak iżby postępowały według potęg dyskryminanta równania stopnia drugiego. Bo jeżeli

$$(1A)(2B) - (1B)(2A) = (12)(AB),$$

to przyjdzie

$$\begin{aligned} 2(1A)(2A)(1B)(2B) &= (1A)^2(2B)^2 + (2A)^2(1B)^2 - (12)^2(AB)^2 \\ &= 2(1A)^2(2B)^2 - (12)^2(AB)^2 \end{aligned}$$

gdzie  $(AB)^2$  będąc dyskryminantem stopnia drugiego wprowadzone zostało. Dla dwóch równań stopnia drugiego, formuła podana w ostatnim paragrafie staje się

$$2(1A)(2A)(1B)(2B) - (1A)^2(2B)^2,$$

a przez podstawienie

$$(1A)^2(2B)^2 - (12)^2(AB)^2.$$

Jest to formuła p. *Boole* (184). W razie równań, z których jedno stopnia drugiego, a drugie stopnia trzeciego formuła paragrafu 274 staje się

$$4(1a)(2a)(1b)(2b)(1c)(2c) - 3(1a)^2(2b)^2(1c)(2c),$$

i w podobny sposób

$$(1a)^2(1b)^2(1c)(2c) - (ab)^2(12)^2(1c)(2c).$$

276. W podobny sposób dochodzić możemy czy podobna otrzymać ogólną formułę na dyskryminanta równania danego. Łatwo napisać formuły na niezmienniki tego równania. Dy-

s kryminant będzie stopnia  $2(n - 1)$ . Podzielmy więc symbole na dwie warstwy 1, 3, 5 ... 2, 4, 6, ... zawierające po  $(n - 1)$  symbolów, i utwórzmy iloczyn z  $(n - 1)$  takich czynników aby każdy z nich zawierał jeden czynnik z każdej warstwy. Jeżeli  $n = 4$ , to będzie  $A = (12)(34)(56)$ . Gdyż przemieniając cyklicznie jedną z warstw symbolów, tworzymy  $(n - 1)$  iloczynów; a tak dla  $n = 4$  mamy

$$B = (14)(36)(52), \quad C = (16)(32)(54).$$

Funkcja stopnia  $n$  ilości  $A, B, \dots$  oznacza niezmiennik, tego samego co i dyskryminant stopnia. Dwie trudności teorii ogólnej będą: 1° oznaczyć z pewnością która z tych funkcji jest dyskryminantem; 2° wynaleźć związki istniejące między niezmiennikami w ten sposób utworzyć się mogącemi, jak niemniej wskazać najprostszą formę, do jakiej takowe przywieść się dają. I tak, jeżeli  $n$  jest parzystem,  $k + 1$  będzie liczbą czynników w  $A$ , samo zaś

$$A^n = 2^k A^{n-1} B.$$

W przypadku jednego zrównania stopnia czwartego, różne niezmienniki które utworzyć można są:  $A^4, A^2B, A^2BC$ , opuszczając  $A^3B$ , które jak wiemy nie jest czem innym jak  $\frac{1}{4} A^4$ .

Pierwszem zagadnieniem do rozwiązania jest utworzenie z tych niezmienników kombinacji stającej się tosamościowo zerem, gdy funkcja dana jest  $u^2v$ ,  $u$  zaś stopnia pierwszego. Dla osiągnięcia tego wypadku przypuśćmy że funkcja jest formy żądanej, podstawmy 1,  $a + \alpha$  ( $a$  odnosi się do  $v$ ,  $\alpha$  do  $u^2$ ) za 2,  $b + \epsilon$ , i śledźmy skutków tego podstawienia na każdy z niezmienników obecnie nas obchodzących. Widoczna że wyrazy stopnia wyższego nad drugi, a zawierające  $a$  lub  $\alpha$  zniknąć muszą. Oznaczając przez  $M$  warunek  $(a\alpha)^2$ , wskazujący że  $u$  powinno być

czynnikami  $v$ , znajdziemy bez innych rachunków, prócz tego podstawienia

$$A^4 = 216M^6, \quad A^2B^2 = 66M^6, \quad A^2BC = 42M^6;$$

dyskryminant przeto wyraża się przez jedno z trzech zrównań

$$\frac{A^4}{36} = \frac{A^2B^2}{4} = \frac{A^2BC}{7} \quad (*).$$

277. użytą obecnie metodę zastosować można do kształtów o ilukolwiek zmiennych. Zrównania tosamociowe używane głównie przy kształtach potrójnych są :

$$D_1\overline{123} = D_1\overline{234} - D_2\overline{134} + D_3\overline{124}, \dots \quad (E)$$

$$\overline{123} \cdot \overline{145} + \overline{124} \cdot \overline{153} + \overline{125} \cdot \overline{134} = 0, \dots \quad (F)$$

do których dodać należy zrównania odpowiednie na symbole przeciwzienników (140)

$$P\overline{123} = D_1\overline{\alpha 23} + D_2\overline{\alpha 31} + D_3\overline{\alpha 12}, \dots \quad (G)$$

$$\overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 34} + \overline{\alpha 23} \cdot \overline{\alpha 41} + \overline{\alpha 31} \cdot \overline{\alpha 24} = 0, \dots \quad (H)$$

gdzie  $P = \alpha x + \beta y + \gamma z$ . Dla powodów wyłożonych powyżej, z lekka tylko dotykamy w tym tomie geometrycznych poszukiwań; parę więc tylko dodając przykładów, odsyłamy czytelnika

(\*) O sprawozdaniu tych zrównań do sztandaru kształtu, w następstwie o wyprowadzeniu z kształtu zwykłego dyskryminanta stopnia czwartego, zobacz *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, tom IX, str. 33.



po szersze rozwinięcia do *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, tom. IX, str. 27.

PRZYKŁAD I. — Wiemy (113) że kształt potrójny trzeciego stopnia posiada niezmiennik czwartego rzędu  $\overline{123.124.234.314}$ . Idzie o wyznaczenie wyrażenia symbolicznego na wypadek działania na Hessiany za pomocą przewoźnika niezmiennika tego. Przewoźnik jest  $\overline{123.a12.a23.a31}$ . a metoda paragrafu 273, wymaga z kombinowania z nią czynnika  $\overline{456}$  podstawienia  $4 + 5 + 6$  za  $a$ . Ponieważ opuścić należy każdy wyraz zawierający którykolwiek z symbolów 4, 5, 6, więcej jak trzy razy, przeto żądany symbol sprowadza się do

$$\overline{123.124.235.316.456}.$$

PRZYKŁAD II. — W teorii podwójnych stycznych do krzywych płaskich, wyłożonej w *Higher Plane Curves* str. 81 (krzywe płaskie wyższych stopni), potrzeba obliczyć wypadek podstawienia w kolejne emananty ilości

$$\gamma \frac{dU}{dy} - \epsilon \frac{dU}{dz}, \quad \alpha \frac{dU}{dz} - \gamma \frac{dU}{dx}, \quad \epsilon \frac{dU}{dx} - \alpha \frac{dU}{dy},$$

za  $x, y, z$ , i pokazania że wypadek przybiera postać

$$P_n U + Q_n (\alpha x + \epsilon y + \gamma z)^2.$$

W tym i następnym przykładzie należy obliczyć  $Q_2, Q_3, Q_4$ . Łatwo dochodzimy do symbolicznego wyrażenia podstawienia tego. Będzie to

$$\overline{\alpha 12. \alpha 13. \alpha 14. \alpha 15. \dots}$$

Do obliczenia  $\alpha 12. \alpha 13$ , posiadamy jedno tylko zrównanie stopnia drugiego (G); z kąd wyciągamy

$$P^2 123 = 3D_3^2 \alpha 12 - 6D_2 D_3 \alpha 12. \alpha 13.$$



Oznaczywszy zaś Hessowy  $\overline{123}$  i Hessowy zespolony z  $\overline{\alpha 12}$  przez G i H, przyjdzie

$$6(n-1)\overline{2\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 13} = 3n(n-1)GU - P^2H.$$

PRZYKŁAD III. — Obliczmy  $\overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 13} \cdot \overline{\alpha 14}$ . Zrównanie (G) daje

$$\begin{aligned} -2D_2D_3\overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 13} &= P^2\overline{123} - 2PD_1\overline{123} \cdot \overline{\alpha 23} \\ &+ D_1^2\overline{\alpha 23} - D_2^2\overline{\alpha 31} - D_3^2\overline{\alpha 12}. \end{aligned}$$

Pomnóżmy przez  $\overline{\alpha 14}$ , znikną dwa wyrazy i pozostanie

$$-2(n-1)\overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 13} = P^2\overline{\alpha 123} \cdot \overline{\alpha 14} - 2n(n-1)U\overline{\alpha 12} \cdot \overline{\alpha 13}.$$

Dla dowiedzenia że  $\overline{123} \cdot \overline{\alpha 23} \cdot \overline{\alpha 14}$  znika tosamociowo, pomnóżmy zrównanie (H) przez  $\overline{123}$ ; ponieważ wyrazy o których mowa, różnią się tylko przemianą figur 1, 2, 3, przeto stają się zerami. W podobny sposób dowieść można że  $\overline{123} \cdot \overline{\alpha 23} \cdot \overline{\alpha 14} \cdot \overline{\alpha 15} = 0$ .

278. W paragrafach poprzednich używaliśmy wyłącznie metody znakowania p. *Cayley*. Znamy znakowanie p. *Arnhold* (149), dla lepszego jednak obeznania się z niem, podam *Clebscha* poszukiwania nad zagadnieniem (274) rugowania z układu zrównań, z których jedno jest stopnia  $n$ , drugie stopnia drugiego, a wszystkie inne stopnia pierwszego. Weźmiemy tylko cztery zrównania o czterech zmiennych, zastrzegając jednak z góry że metoda podana w razie obecnym, daje się zastosować do ilu-kolwiek zmiennych. Weźmy zrównania

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0,$$

$$\xi = \xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 + \xi_4x_4 = 0,$$

$$U = u_{11}x_1^2 + 2u_{12}x_1x_2 + \dots = 0,$$

i  $\varphi = 0$ , gdzie  $\varphi$  jest równaniem rzędu  $n$  w  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , mogącym się napisać symbolicznie

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4).$$

Znamy zaś znaczenie z tej notacyi (142). Metoda rugowania przez nas używana zasadza się na rozwiązaniu równania drugiego stopnia, wraz z linijnymi, na podstawienie w  $\varphi$ , dwóch znalezionych układów wartości, i na pomnożeniu obydwu wypadków. Możemy zaś nieskończoną liczbą sposobów kombinować równania kwadratowe z linijnymi pomnożonymi przez dowolne czynniki; w końcu przeto dojść musimy do wypadku na czynniki rozłożyć się dającego, jak na przykład :

$$U + (\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \dots)(\alpha_1x_1 + \dots) + (\mu_1x_1 + \dots)(\xi_1, x_1 + \dots) \\ = (p_1x_1 + \dots)(q_1x_1 + \dots).$$

Przypuścić należy że przeobrażenie dokonane zostało, lecz zbyteczna szukać w tym celu wartości  $\lambda, \mu, \dots$ , gdyż pokaże się że ilości. te niktą z wypadku. Weźmy współczynnik wyrazu  $x_1x_k$  w równaniu stopnia drugiego, a napisane nieco wyżej równanie wymaga aby było

$$2\alpha\lambda\mu + (\alpha^2\lambda_k + \alpha\lambda^2_k) + (\xi_1\mu_k + \xi_k\mu_1) = p_kq_k + p_kq_1 + \dots \quad (A).$$

Zamiast rozwiązywania równania stopnia drugiego i liniowych, otrzymamy obydwie układy wartości kombinując też równania liniowe z

$$p_1x_1 + \dots = 0, \quad q_1x_1 + \dots = 0.$$

Podług teorii równań liniowych wartości na  $x_1, x_2, \dots$  będą wyznacznikami układów.

$$\left\| \begin{array}{cccc} p_1, & p_2, & p_3, & p_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccc} q_1, & q_2, & q_3, & q_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \end{array} \right\|.$$

Jeżeli podstawimy w  $a_1 x_1 + \dots$ , pierwszą warstwę wartości, otrzymamy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \epsilon_4 \end{vmatrix},$$

który możemy napisać  $(a_1 p_2 \alpha_3 \epsilon_4)$ . Wypadek rugowania wyrazi się symbolicznie

$$R = (a_1 p_2 \alpha_3 \epsilon_4)^n (b_1 q_2 \alpha_3 \epsilon_4)^n.$$

W drugim czynniku użyliśmy symbolu  $b$  w miejsce  $a$  dla przyczyn wyłożonych w paragrafie 150, to jest dla otrzymania potęg ze współczynników w  $\varphi$ , lecz wiedzieć należy że to  $b$  nie ma odmiennego od  $a$  znaczenia, gdyż po rozwinięciu możemy jako rzeczy równe zastąpić iloczyny  $a_1 a_2 a_3 a_4$ ,  $b_1 b_2 b_3 b_4$ , przez odpowiedni czynnik z  $\varphi$ , to jest przez  $a^{klm}$ . Wypadkowi rugowania możemy nadać bardziej symetryczną formę

$$2R = (a_1 p_2 \alpha_3 \epsilon_4)^n (b_1 q_2 \alpha_3 \epsilon_4)^n + (a_1 q_2 \alpha_3 \epsilon_4)^n (b_1 p_2 \alpha_3 \epsilon_4)^n,$$

która jest podwójną tylko względem pierwszej wartości,

Napiszmy :

$$(a_1 p_2 \alpha_3 \epsilon_4) (a_1 q_2 \alpha_3 \epsilon_4) = A,$$

$$(b_1 p_2 \alpha_3 \epsilon_4) (b_1 q_2 \alpha_3 \epsilon_4) = B,$$

$$(a_1 p_2 \alpha_3 \epsilon_4) (b_1 q_2 \alpha_3 \epsilon_4) + (a_1 q_2 \alpha_3 \epsilon_4) (b_1 p_2 \alpha_3 \epsilon_4) = 2C.$$

Łatwo wyrazimy  $R$  w funkcji  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , gdyż mamy

$$2R = \{C + \sqrt{C^2 - AB}\}^n + \{C - \sqrt{C^2 - AB}\}^n;$$



$$R = C^n + \frac{n(n-1)}{1.2} C^{n-2} (C^2 - AB) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} C^{n-4} (C^2 - AB)^2 + \dots$$

279. Pozostaje nam jeszcze oznaczyć ściślej wyrażenia A, B, C, oraz pozbyć się ilości  $p$  i  $q$ , aby ostatecznie wypadek był wyrażony w samych tylko czynnikach danego równania stopnia drugiego.

A, będące czynnikiem dwóch wyznaczników napisać się daje jako wyznacznik pojedynczy :

$p_1q_1$	$, \frac{1}{2}(p_1q_2 + p_2q_1),$	$\frac{1}{2}(p_1q_3 + p_3q_1),$	$\frac{1}{2}(p_1q_4 + p_4q_1),$	$a_1, \epsilon_1, a_1$
$\frac{1}{2}(p_1q_2 + p_2q_1),$	$p_2q_2$	$, \frac{1}{2}(p_2q_3 + p_3q_2),$	$\frac{1}{2}(p_2q_4 + p_4q_2),$	$a_2, \epsilon_2, a_2$
$\frac{1}{2}(p_1q_3 + p_3q_1),$	$\frac{1}{2}(p_2q_3 + p_3q_2),$	$p_3q_3$	$, \frac{1}{2}(p_3q_4 + p_4q_3),$	$a_3, \epsilon_3, a_3$
$\frac{1}{2}(p_1q_4 + p_4q_1),$	$\frac{1}{2}(p_2q_4 + p_4q_2),$	$\frac{1}{2}(p_3q_4 + p_4q_3),$	$p_4q_4$	$, a_4, \epsilon_4, a_4$
$a_1$	$, a_2$	$, a_3$	$, a_4$	$, \dots$
$\epsilon_1$	$, \epsilon_2$	$, \epsilon_3$	$, \epsilon_4$	$, \dots$
$a_1$	$, a_2$	$, a_3$	$, a_4$	$, \dots$

pomnóżmy przez  $(-1)^{m-1}$ , gdzie  $m$  oznacza liczbę zmiennych, a więc cztery w obecnym razie.

Gdyż każdy składowy wyraz tego wyznacznika zawierać musi jeden takiż wyraz z każdej z trzech ostatnich linii i kolumn; jest



więc pierwszego stopnia w wyrazach  $p_1q_1, \frac{1}{2}(p_1q_2 + p_2q_1), \dots$ , a jeżeli współczynnik jednego z tych wyrazów weźmiemy pod rozbiór, to znajdziemy, że liczba zmiennych będzie ta sama, z tym samym lub z przeciwnym znakiem, jak w iloczynie dwóch wyznaczników. W wyznacznik ten podstawmy ze równania (A):

$$p_1q_1 = u_{11} + \alpha_1\lambda_1 + \epsilon_1\mu_1,$$

$$\frac{1}{2}(p_1q_2 + p_2q_1) = u_{12} + (\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_1) + \frac{1}{2}(\epsilon_1\mu_2 + \epsilon_2\mu_1) + \dots$$

Uskuteczniwszy to podstawienie odciągniemy od każdej z czterech pierwszych kolumn i linii, kolumnę i linię  $\alpha$  pomnożoną przez  $\frac{1}{2}\lambda_1$ , oraz kolumnę i linię  $\epsilon$  pomnożonemu przez  $\frac{1}{2}\mu_1$ , a dodatkowe wyrazy znikną i wyznacznik stanie się :

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & u_{14}, & \alpha_1, & \epsilon_1, & a_1 \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & u_{24}, & \alpha_2, & \epsilon_2, & a_2 \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33}, & u_{34}, & \alpha_3, & \epsilon_3, & a_3 \\ u_{41}, & u_{42}, & u_{43}, & u_{44}, & \alpha_4, & \epsilon_4, & a_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 & \dots & \dots & \dots \\ \epsilon_1, & \epsilon_2, & \epsilon_3, & \epsilon_4 & \dots & \dots & \dots \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

*Clebsch* oznacza powyższy wyznacznik w którym pierwowzór dyskryminanta funkcji drugiego stopnia jest otoczony liniami i kolumnami  $\alpha, \epsilon, \dots$ , które przez skrócenie napiszemy

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \epsilon, & a \\ \alpha, & \epsilon, & a \end{vmatrix}$$

bacząc że wyższa linia oznacza kolumny, niższe zaś linie otaczające pierwowzór. Znajdziemy dla jakiegokolwiek ilości zmiennych

$$A = (-1)^{m-1} \begin{pmatrix} \alpha, & \epsilon, & \dots & a \\ \alpha, & \epsilon, & \dots & a \end{pmatrix};$$

$$B = (-1)^{m-1} \begin{pmatrix} \alpha, & \epsilon, & \dots & b \\ \alpha, & \epsilon, & \dots & b \end{pmatrix};$$

$$C = (-1)^{m-1} \begin{pmatrix} \alpha, & \epsilon, & \dots & a \\ \alpha, & \epsilon, & \dots & b \end{pmatrix}.$$

Dowiedliśmy zaś (26, przykład drugi), że

$$\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^2 = \Delta \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix},$$

gdzie  $\Delta$  jest dyskriminantem funkcji drugiego stopnia. Dowiedliśmy w podobny sposób że w ogóle mamy

$$\begin{pmatrix} \alpha, \epsilon, \dots, a \\ \alpha, \epsilon, \dots, a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \epsilon, \dots, b \\ \alpha, \epsilon, \dots, b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha, \epsilon, \dots, a \\ \alpha, \epsilon, \dots, a \end{pmatrix}^2 = \Delta \begin{pmatrix} \alpha, \epsilon, \dots, a, b \\ \alpha, \epsilon, \dots, a, b \end{pmatrix}.$$

Jeżeli przeto oznaczymy przez  $D$  dopiero co napisaną funkcją, przyjdzie

$$C^2 - AB = -\Delta D,$$

a formuła paragrafu 278, stanie się :

$$R = C^n - \frac{n(n-1)}{1.2} C^{n-2} \Delta D$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} C^{n-4} \Delta^2 D^2 + \dots (*)$$

(\*) Czytelnik znajdzie niektóre zastosowania prawd powyższych do geometrycznych zagadnień w *Clebsch'a* rozprawie umieszczonej w *Crelle'a* tomie LVIII. Aby wypadek otrzymany, przenieść dla kształtów podwójnych drugiego stopnia, w używane przez nas znakowanie, trzeba wziąć za  $C^n$  iloczyn z  $n$  par czynników  $1A, 2A, 1B, 2B, \dots, 12$  za  $D$ . Odnoszą się do pracy *Clebsch'a* (*Crelle*, tom LIX) *Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen* (o symbolicznem przedstawieniu algebraicznych form), by wskazać tamże ogólne prawidło otrzymania formuły na wyznacznik wypadkowy dwóch kształtów podwójnych, lub na dyskryminanta jednego kształtu takiego. Metoda postępowania zasada się na zastosowaniu formy P. Cayley, do sposobu rugowania używanego przez Bézont; rzecz którąśmy rozegrali (71) w razie dwóch kształtów napisanych symbolicznie

$$(a_1x_1 + a_2x_2)^n, \quad (a_1x_1 + a_2x_2)^n.$$

Prawidło ostateczne, jest, jak to przewidzieć łatwo, bardzo skomplikowanym.





# NOTY

NOTA PIERWZA.

O RÓZNICZKOWANIU UŻYTEM PRZY ROZWIJANIU FUNKCYJ  
NA SZEREGI BURMANNA, LAGRANGE'ŃA, I WROŃSKIEGO;

PRZEZ M. A.

byłego ucznia Szkoły Politechnicznej.

Niech będą dwa zrównania

$$z = F(y), \quad y = \varphi(x);$$

załóżymy sobie wyrachować  $\frac{d^n z}{dx^n}$  nie przechodząc przez  $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \dots$ ,

$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$ . Mamy

$$\frac{dz}{dx} = F'(y) \cdot \varphi'(x),$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = F''(y) \varphi''(x) + F''(y) \varphi'(x)^2,$$

$$\frac{d^n z}{dx^n} = A_1 F'(y) + A_2 F''(y) + \dots + A_n F^{(n)}(y),$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$  sę spółczynnikiemi zależnemi jedynie od  $\varphi(x)$  a nie bynaj-

mniej od funkcji  $F(y)$ , jak jest łatwo pokazać to dowodząc że prawo, przypuszczono prawdziwem dla pochodnej  $n^{ej}$ , pozostanie niem jeszcze dla pochodnej  $(n+1)^{ej}$ .

Można więc wziąć dla  $F(y)$  funkcją jakąkolwiek względem  $y$ ,  $e^{py}$  na przykład, a  $A_1, A_2, \dots, A_n$  będą współczynniki mnożącami  $pe^{py}, p^2e^{py}, \dots, p^n e^{py}$  w wyrażeniu  $\frac{d^n \cdot e^{py}}{dx^n}$  jakie należy w skutku czego znaleźć.

Uważmy, w rzeczy samej, że  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^n \cdot e^{p\varphi(x)}}{dx^n}$  jest współczynnikiem potęgi  $h^n$  w rozwinięciu  $e^{p\varphi(x+h)}$  podług potęg ilości  $h$ . Otóż

$$e^{p\varphi(x+h)} = e^{p[\varphi(x) + \varphi'(x)h + \frac{h^2}{2} + \dots]}$$

$$= e^{p\varphi(x)} e^{p\varphi'(x)h} e^{p\varphi''(x) \frac{h^2}{2}}$$

Rozwijając  $e^{p\varphi'(x)h}$ ,  $e^{p\varphi''(x) \frac{h^2}{2}}$ , ..., i wykonywając iloczyn, otrzyma się na wyraz ogólny

$$e^{p\varphi(x)} \sum p^{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \frac{[\varphi'(x)]^{m_1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m_1} \cdot \frac{[\varphi''(x)]^{m_2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m_2} \times \dots$$

$$\times \frac{[\varphi^{(n)}(x)]^{m_n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m_n} \cdot h^{m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n};$$

przeto, jeżeli się położy

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + nm_n = n,$$

współczynnikiem potęgi  $h^n$  będzie

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^n \cdot e^{py}}{dx^n} = e^{p\varphi(x)} \sum p^{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \frac{[\varphi'(x)]^{m_1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m_1} \times \dots$$

$$\times \frac{[\varphi^{(n)}(x)]^{m_n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m_n}.$$

Aby otrzymać w tém równaniu współczynnik ilości  $p^m e^{py}$  albo  $\Lambda_m$ ,  
potrzeba wziąć widocznie tylko wyrazy dla których znajdzie się

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = m.$$

Więc, ostatecznie, otrzyma się

$$\Lambda_m = 1.2.3\dots n \Sigma \frac{\left[ \frac{\varphi'(x)}{1} \right]^{m_1}}{1.2.3\dots m_1} \cdot \frac{\left[ \frac{\varphi''(x)}{1} \right]^{m_2}}{1.2.3\dots m_2} \dots \frac{\left[ \frac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2.3\dots n} \right]^{m_n}}{1.2.3\dots m_n},$$

$m_1, m_2, \dots, m_n$  są liczbami całkowitemi i dodatnimi (licząc w to zero)  
które muszą zadosyć uczynić równaniom

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + nm_n = n,$$

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = m.$$

W tém rozwiązaniu, szukano naprzód w rozwinięciu  $e^{p[\varphi(x+h) + \varphi(x)] \frac{\Delta x}{2} + \dots}$   
 $= e^{p[\varphi(x+h) - \varphi(x)]}$  wyrazu w  $h^n$ ; i w tym wyrazie, wzięto tylko to co było  
pomnożonem przez  $p^m$ . Można widocznie rozwiązać to zadanie odwrotnie,  
szukać w rozwinięciu  $e^{p[\varphi(x+h) - \varphi(x)]}$  wyrazu w  $p^m$ , którym jest

$$\frac{[\varphi(x+h) - \varphi(x)]^m}{1.2.3\dots m},$$

a potem wziąć w tym wyrazie to co jest pomnożonem przez  $h^n$ , to jest,  
ponieważ różnica  $\varphi(x+h) - \varphi(x)$  jest podzielną przez  $h$ , współczynnik

potęgi  $h^{n-m}$  w funkcji  $\frac{[\varphi(x+h) - \varphi(x)]^m}{1.2.3\dots m}$ . Otóż tym współczynni-  
kiem jest, podług twierdzenia TAYLORA,

$$\frac{d^{n-m}}{dh^{n-m}} \left[ \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right]_0^m \frac{1}{1.2.3\dots(n-m)}$$

(zero wskazuje że powinno się zrobić  $h=0$  po różniczkowaniach).

Otrzyma się więc

$$\Lambda_m = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \frac{d^{n-m} \left[ \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right]_0^m}{dh^{n-m}}$$

$$= \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \frac{d^{n-m} \left[ \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right]_0^m}{dh^{n-m}}$$

Inaczej: niech będzie  $i$  przyrostek względem  $y$  odpowiedni przyrostkowi  $h$  względem  $x$ , tak aby

$$i = \varphi(x+h) - \varphi(x),$$

otrzyma się]

$$F(y+i) = F(y) + F'(y)i + \dots + \frac{F^{(n)}(y)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} i^n + \dots$$

$$= F(y) + \frac{dF(y)}{dx} h + \dots + \frac{d^n F(y)}{dx^n} \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \dots$$

przypuściwszy że w  $F(y)$ , zostało zastąpionem  $y$  przez  $\varphi(x)$  i zamienionem potem  $x$  na  $x+h$ .

Zastępując  $i$  przez swą wartość, w tém równaniu, zauważywszy że  $\varphi(x+h) - \varphi(x)$  jest podzielną przez  $h$ , i że, tém samem, wyrazem potęgi  $h^n$  w  $i^m$  jest

$$\frac{d^{n-m} \left[ \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \right]_0^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m) \cdot dh^{n-m}}$$

otrzyma się, kładąc

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \theta.$$



i identyfikując wyrazy w  $h^n$ ,

$$\frac{d^n F(y)}{dx^n} = \frac{F'(y) \frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \frac{F''(y) \frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)} + \dots$$

$$+ \frac{F^{(m)}(y) \frac{d^{n-m}(\theta^m)_0}{dh^{n-m}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m)} + \dots + \frac{F^{(n)}(y)(\theta^n)_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

albo też

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n z}{dx^n} &= \frac{n}{1} F'(y) \frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} F''(y) \frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} F'''(y) \frac{d^{n-3}(\theta^3)_0}{dh^{n-3}} + \dots \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Gdyby się miało trzy zrównania

$$z = F(y), \quad y = \varphi(x), \quad x = f(u),$$

albo

$$z = \Psi(x) = \Pi(u);$$

położywszy

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \theta,$$

otrzymaloby się, przez to poprzedza,

$$\begin{aligned} \frac{d^n z}{dx^n} &= \Psi^{(n)}(x) = \frac{n}{1} F'(y) \frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}} \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} F''(y) \frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}} + \dots = Un, \end{aligned}$$

potém, robiąc  $\frac{f(u+\varepsilon) - f(u)}{\varepsilon} = \omega$ ,

$$\frac{d^n \Psi(x)}{du^n} = \frac{d^n z}{du^n} \frac{1}{2} = U_1 \frac{d^{n-1}(\omega)_0}{d\varepsilon^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} U_2 \frac{d^{n-2}(\omega^2)_0}{d\varepsilon^{n-2}} + \dots$$

Pozostawałoby więc tylko zastąpić  $U_1, U_2, \dots, U_n$  przez ich wartość aby wyjaśnić (wystawić na widok) prawo pochodzenia dla funkcji funkcji; i tak dalej jakakolwiek by nie była liczba funkcji położonych jedne na drugich.

Wróćmy do zrównania (a) jakie można jeszcze napisać

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n z}{dx^n} &= (\theta^n)_0 \frac{d^n z}{dy^n} + \frac{n}{1} \frac{d(\theta^{n-1})_0}{dh} \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^2(\theta^{n-2})_0}{dh^2} \frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2}} + \dots \end{aligned} \right. \quad (a)$$

przezo, przypuściwszy że mamy  $z = F(x)$ ,  $y = \varphi(x)$ , szukajmy  $\frac{d^n z}{dy^n}$ .  
z mogąc widocznie być uważanem jak jakakolwiek funkcya niewyraźna względem  $y$ , otrzyma się, podług zrównania (1),

$$\frac{d^n z}{dx^n} = (\theta^n)_0 \frac{d^n z}{dy^n} + \frac{n}{1} \frac{d(\theta^{n-1})_0}{dh} \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^2(\theta^{n-2})_0}{dh^2} \frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2}} + \dots,$$

$$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = (\theta^{n-1})_0 \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} + \frac{n-1}{1} \frac{d(\theta^{n-2})_0}{dh} \frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2}} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d^{n-m} z}{dx^{n-m}} = (\theta^{n-m})_0 \frac{d^{n-m} z}{dy^{n-m}} + \frac{n-m}{1} \frac{d(\theta^{n-m-1})_0}{dh} \frac{d^{n-m-1} z}{dy^{n-m-1}} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\left[ \begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx^2} &= (\theta^2)_0 \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{2}{1} \frac{d(\theta)_0}{dy} \frac{dz}{dy}, \\ \frac{dz}{dx} &= (\theta)_0 \frac{dz}{dy}. \end{aligned} \right]$$

Gdy się pomnoży te równania, zaczawszy od pierwszego, względnie przez

$$\begin{aligned} &(\theta^{-n})_0, \quad \frac{n-1}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}, \quad - \left[ \frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2} \right] n = \\ &\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2}, \dots, \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}}, \end{aligned}$$

i gdy się doda wypadki, otrzyma się

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n z}{dy^n} &= (\theta^{-n})_0 \frac{d^n z}{dx^n} + \frac{n-1}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} \\ &+ \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2} \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \dots \end{aligned} \right.$$

W rzeczy samej, oznaczywszy przez  $\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} C$

spółczynnik  $\frac{d^{n-m} z}{dy^{n-m}}$  w summie iloczynów powyższych, będzie

$$\begin{aligned} C &= n(\theta^{-n})_0 \frac{d^m(\theta^{n-m})_0}{dh^m} + (n-1) \frac{m}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} + \dots \\ &+ (n-m+1) \frac{m}{1} \frac{d^{m-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{m-1}} \frac{d(\theta^{n-m})_0}{dh} + (n-m) \frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m} (\theta^{n-m})_0, \end{aligned}$$

albo też

$$C = n \left[ \begin{aligned} &(\theta^{-n})_0 \frac{d^m(\theta^{n-m})_0}{dh^m} + \frac{m}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} + \dots \\ &+ \frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m} (\theta^{n-m})_0 \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & - m \left[ \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} + \frac{(m-1)}{1} \frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2} \frac{d^{m-2}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-2}} + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m} (\theta^{n-m})_0 \right] \\
 & = n \left[ \frac{d^m(\theta^{-n}, \theta^{n-m})_0}{dh^m} \right] - m \left[ \frac{d^{m-1}}{dh^{m-1}} \left( \frac{d(\theta^{-n})}{dh} \cdot \theta^{n-m} \right)_0 \right] \\
 & = n \left[ \frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m} \right] - m \left[ -n \frac{d^{m-1}}{dh^{m-1}} \left( \theta^{-m-1} \frac{d\theta}{dh} \right)_0 \right],
 \end{aligned}$$

lub nakoniec

$$C = n \left[ \frac{d^m(\theta^{-m})_0}{dh^m} \right] - m \left[ \frac{n}{m} \frac{d^m(\theta^{-m})_0}{dh^m} \right] = 0;$$

to co czyni widoczną dokładność zrównania (2).

Jeżeli się zauważy że mamy, ogólnie,

$$\frac{d^m F(x)}{dx^m} = \frac{d^m F(x+h)_0}{dh^m},$$

i gdy się poloży

$$z = F(x),$$

zrównanie (2) będzie się mogło napisać, zwięzłej,

$$(3) \quad \frac{d^n F(x)}{dy^n} = \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} [\theta^{-n} F(x+h)]_0.$$

Wyciągając się z tego zrównania dowodzenie proste i bezpośrednie szeregu BURMANNA.

Niech będzie, w rzeczy samej,  $x$  jakakolwiek funkcya względem  $y$  dana przez zrównanie  $y = \varphi(x)$ . Zastępując, w funkcyi  $F(x)$ ,  $x$  przez swą wartość uważaną jako wyciągniętą z tego zrównania, i przypusciwszy



że  $F(x)$  staje się wtedy funkcją ciągłą względem  $y$ , twierdzenie Taylora da jakiegokolwiek rozwinięcie kształtu

$$F(x) = A_0 + A_1y + A_2y^2 + \dots$$

Różniczkując  $n$  razy ten szereg i bacząc pilnie zrobić  $y = 0$  po różniczkowaniach, znajdzie się, pod tym ostatnim warunkiem,

$$A_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^n F(x)}{dy^n},$$

albo też, mając wzgląd na zrównanie (3) i oznaczywszy przez  $a$  wartość na  $x$ , odpowiadającą wartości  $y = 0$ ,

$$A_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} \left\{ \left[ \frac{\varphi(a+h)}{h} \right]^{-n} F'(a+h) \right\}_0,$$

powyższe zrównanie przekształćne i należyście uproszczone daje,

$$(4) \quad A_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ \left[ \frac{x-a}{\varphi(x)} \right]^{-n} F'(x) \right\}_{(x=a)}. \quad (A)$$

Nie będziemy tu zajmować się wcale roztrząsaniem kwestyi pod jakimi warunkami ten szereg BURMANNA może istnieć.

Gdy się zrobi

$$\varphi x = \frac{x-a}{\psi(x)},$$

zrównanie (4) staje się

$$A_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\psi(a)^n F'(a)],$$

i znajduje się szereg LAGRANGE'A

$$F(x) = F(a) + [\psi(a)F'(a)]y + \frac{d}{da} [\psi(a)^2 F''(a)]y^2 + \dots,$$

właściwy do przedstawienia w jakiegokolwiek funkcji  $F(x)$  pierwiastku równania

$$x = a + y\psi(x),$$

który się sprowadza do  $a$  dla  $y = 0$ .

W równaniu (2), zróbmy kolejno  $z = y, y^2, \dots, y^n$ , i oznaczmy,

dla skrótienia,  $\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}$  przez  $D^n \varphi(x)$ , otrzymamy tożsamości

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = (\theta^{-n})_0 D^n \varphi(x) + \frac{n-1}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1} \varphi(x) + \dots \\ \quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D \varphi(x), \\ 0 = (\theta^{-n})_0 D^n \varphi(x)^2 + \frac{n-1}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1} \varphi(x)^2 + \dots \\ \quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D \varphi(x)^2, \\ \dots \\ 0 = (\theta^{-n})_0 D^n \varphi(x)^{n-1} + \frac{n-1}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1} \varphi(x)^{n-1} + \dots \\ \quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D \varphi(x)^{n-1}, \\ 1.2.3 \dots n = (\theta^{-n})_0 D^n \varphi(x)^n \\ \quad + \frac{n-1}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1} \varphi(x)^n + \dots \\ \quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D \varphi(x)^n. \end{array} \right.$$

Te tożsamości dają widzieć że jeżeli ma się równania

$$D \varphi(x) \cdot y_1 + D \varphi(x)^2 \cdot y_2 + \dots + D \varphi(x)^n \cdot y_n = D F(x),$$

$$D^2 \varphi(x) \cdot y_1 + D^2 \varphi(x)^2 \cdot y_2 + \dots + D^2 \varphi(x)^n \cdot y_n = D^2 F(x),$$

.....

$$D^{n-1}.\varphi(x).y_1 + D^{n-1}.\varphi(x)^2.y_2 + \dots + D^{n-1}.\varphi(x)^n.y_n = D^{n-1}.F(x),$$

$$D^n.\varphi(x).y_1 + D^n.\varphi(x)^2.y_2 + \dots + D^n.\varphi(x)^n.y_n = D^n.F(x),$$

i gdy się pomnoży je względnie przez

$$\frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}}, \quad \frac{n-1}{1} \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-2}}, \dots, (\theta^{-n})_0,$$

otrzyma się

$$1.2.3 \dots n y_n = (\theta^{-n})_0 D^n.F(x) + \frac{n-1}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} . D^{n-1}.F(x) + \dots$$

$$= \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} [\theta^{-n} F'(x+h)]_0.$$

Lecz zrównania (A), rozwiązane sposobem zwyczajnym, dają

$$y_n = \frac{\Sigma [\pm D^1.\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2 \dots D^{n-1}.\varphi(x)^{n-1}.D^n.F(x)]}{\Sigma [\pm D^1.\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2 \dots D^{n-1}.\varphi(x)^{n-1}.D^n.\varphi(x)]},$$

wyznaczniki są utworzone względem wskaźników różniczkowania. Równając te dwie wartości na  $y_n$ , znajdzie się

$$(a) \quad \frac{\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} [\theta^{-n} F'(x+h)]_0}{1.2.3 \dots n} = \frac{\Sigma [\pm D^1.\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2 \dots D^n.F(x)]}{\Sigma [\pm D^1.\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2 \dots D^n.\varphi(x)]},$$

Rozwijając dwie strony tego zrównania podług pochodnych funkcji  $F(x)$  i zauważywszy że współczynniki tychże samych pochodnych muszą być identycznymi, z powodu nieoznaczoności funkcji  $F(x)$ , znajdzie się, równając współczynniki względem  $D^n.F(x)$ ,

$$\frac{1}{1.2.3 \dots n} (\theta^{-n})_0 = \frac{\Sigma [\pm D^1.\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2 \dots D^{n-1}.\varphi(x)^{n-1}]}{\Sigma [\pm D^1.\varphi(x)D^2.\varphi(x)^2 \dots D^{n-1}.\varphi(x)^{n-1}.D^n.\varphi(x)^n]};$$

zkąd wyciągnie się

$$(B) \quad \begin{cases} \Sigma[\pm D^1 \varphi(x) D^2 \varphi(x)^2 \dots D^n \varphi(x)^n] \\ = 1! \cdot 2! \dots n! \cdot \left[ \theta^{-\frac{n(n+1)}{2}} \right]_0 1! \cdot 2! \dots n! \cdot [D^n \varphi(x)]^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{cases}$$

a więc, tém samym, zrównanie (α) stanie się

$$(C) \quad \begin{cases} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} [\theta^{-n} F'(x+h)] \\ = \frac{\Sigma[\pm D^1 \varphi(x) D^2 \varphi(x)^2 \dots D^{n-1} \cdot D \varphi(x)^{n-1} D^n F(x)]}{1! \cdot 2! \cdot 3! \dots n! [D^n \varphi(x)]^{\frac{n(n+1)}{2}}} \end{cases}$$

(symbol  $r!$ . przedstawia, według zwyczaju, iloczyn ciągły  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r$ ).

To piękne twierdzenie, tak jak zrównanie (3), są należne p. WROŃSKIEMU (*Philosophie de la Technie*, 2<sup>o</sup> sect., p. 110). P. PROUBET dał, przez inne rozważania, świetne dowodzenie zrównania (3).

(Wyciąg z *Nowych Roczników P. TERQUEM*, tomów IX i XI.)



NOTA DRUGA.

O TWIERDZENIU WROŃSKIEGO

PRZEZ PROFESSORA CAYLEY'A

(TŁUMACZENIE Z «QUARTERY JOURNAL OF PURE APPLIED MATHEMATICS» N° 47, ZESZYT KWIETNIOWY, 1873 R.)

Wyciąg z *Pamiętników Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*.  
Tom IV, rok 1874 (\*).

To twierdzenie, uważane przez autora jako odpowiedź na pytanie «En quoi consistent les Mathématiques? N'y aurait-il pas moyen d'embrasser par un seul problème tous les problèmes de ces sciences et de résoudre généralement ce problème universel?» jest podane bez dowodzenia w jego *Réfutation de la Théorie de Fonctions Analitiques de Lagrange*, Paryż, r. 1812, str. 30, i znów powtórzoném (z dowodzeniem, jak sądzię) w *Philosophie de la Technie*, Paryż, r. 1815; również jest podane i dowiedzione w *Supplément à la Réforme de la Philosophie*, Paryż, r. 1847, str. CIX i nast.; toż twierdzenie, lecz bez dowodzenia, znajduje się w *Encyclopédie Mathématique de Montferrier* (Paryż, bez daty), t. III, str. 398.

Twierdzenie to daje rozwinięcie funkcji  $Fx$  pierwastku równania

$$0 = fx + x_1fx + x_2fx + \text{etc.},$$

(\*) Artykuł ten jednego z najznakomitszych dzisiejszych angielskich matematyków, podajemy w tłumaczeniu najwierniejszém, bez żadnych zmian w znakowaniu i w formie: posłuży on za dowód że w zawitych i zaciemnionych często utworach Wrońskiego, znajdują się rzeczy mogące zwrócić na siebie uwagę pierwszorzędných uczonych i nie pozwalające wydawać zbyt pospiesznego potępiającego sądu o pracach matematycznych naszego współziomka.

(Przyp. tłumacza.)

lecz w rzeczywistości ogólność jego nie przechodzi po za szczególny przypadek  $0 = fx + x_1 f_1 x$ ; to jest kiedy równanie jest  $0 = \varphi x + \lambda f x$  (\*).  
Wziąwszy więc pod uwagę to równanie

$$\varphi x + \lambda f x = 0,$$

niech  $a$  będzie pierwiastkiem równania  $\varphi x = 0$ ; twierdzenie jest następujące

$$F x = F$$

$$-\frac{\lambda}{1} \frac{1}{\varphi'} \left| \left( \int f F' \right)' \right|$$

$$+\frac{\lambda^2}{1.2} \frac{1}{\varphi^3} \left| \left( \varphi', \int f^2 F' \right)' \right| \frac{1}{1}$$

$$\left| \left( \varphi'', \int f^2 F' \right)'' \right|$$

$$-\frac{\lambda^3}{1.2.3} \frac{1}{\varphi^6} \left| \varphi', (\varphi^2), \left( \int f^3 F' \right)' \right| \frac{1}{1.1.2}$$

$$\left| \varphi'', (\varphi^2)'', \left( \int f^3 F' \right)'' \right|$$

$$\left| \varphi''', (\varphi^2)''', \left( \int f^3 F' \right)''' \right|$$

+ i t. d.

gdzie  $F, f, F'$ , etc. oznaczają  $F a, f a, F' a$ , etc. a kreski oznaczają różniczkowanie względem  $a$ ; znak całkowy  $\int$  jest napisanym zamiast  $\int_a$ ;

(\*) W samej rzeczy, w wypadku danym w tekście, zamiast  $\lambda f x$  napisawszy  $x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \text{etc.}$ , następnie rozwinąwszy różne potęgi tej ilości, każdy wyznacznik będzie zastąpionym przez sumę wyznaczników tego samego rzędu i będziemy mieli rozwinięcie  $F x$  podług potęg  $x_1, x_2, \dots$

(Przyp. CAYLEY'A.)

wprowadzonym jest zresztą jedynie dla symetrii i widocznie znika; w samej rzeczy możemy równie dobrze napisać :

$$\begin{aligned}
 Fx = F & \left[ \begin{array}{l} \frac{\lambda^2}{1} \frac{1}{\varphi^3} f F' \\ + \frac{\lambda^2}{1.2} \frac{1}{\varphi^3} \left| \begin{array}{l} \varphi', \quad f^2 F' \\ \varphi'', \quad (f^2 F')' \end{array} \right| \frac{1}{1} \\ - \frac{\lambda^3}{1.2.3} \frac{1}{\varphi^6} \left| \begin{array}{l} \varphi', \quad (\varphi^2)', \quad f^3 F' \\ \varphi'', \quad (\varphi^2)'', \quad (f^3 F')' \\ \varphi''', \quad (\varphi^2)''', \quad (f^3 F')'' \end{array} \right| \frac{1}{1.1.2} \end{array} \right] \\
 & + \text{i t. d.}
 \end{aligned}$$

Zatrzymuję się na chwilę, by zauważyć że twierdzenie Laplace'a jest w rzeczywistości równoważnym z twierdzeniem Lagrange'a; mamy bowiem w pierwszym z tych twierdzeń  $x = \varphi(a + \lambda f x)$ , to jest  $\varphi^{-1}x = a + \lambda f \varphi \cdot \varphi^{-1}x$ , zaś  $Fx = F\varphi \cdot \varphi^{-1}x$ , według twierdzenia Lagrange'a

$$Fx = F\varphi + \frac{\lambda}{1} F\varphi' \cdot f\varphi + \frac{\lambda^2}{1.2} [F\varphi' \cdot (f\varphi)'] + \text{etc.}$$

gdzie po prawej stronie  $F\varphi$  i  $f\varphi$  są oboje uważane za symbol, argumentem jest zawsze  $a$  i kreski oznaczają różniczkowanie względem  $a$ , tak, że  $F\varphi'$  jest

$$d_a.F\varphi a = F'\varphi a \cdot \varphi a', \text{ etc.}$$

co znaczy twierdzenie Laplace'a.

Przypuśćmy w twierdzeniu Wronskiego  $\varphi x = x - a$ ; to jest niech równanie będzie następujące

$$x - a + \lambda \varphi x = 0,$$

wtedy każdy wyznacznik zostaje sprowadzonym do pojedynczego wyrazu: tak, wyznacznik trzeciego rzędu będzie

$$\begin{vmatrix} (x-a)', & [(x-a)^2]', & f^3F' \\ (x-a)'' & [(x-a)^2]'' & (f^3F')' \\ (x-a)''' & [(x-a)^2]''' & (f^3F')'' \end{vmatrix}$$

gdzie w pierwszej i drugiej kolumnie kreski oznaczają różniczkowanie względem  $x$ , która to zmienna później zakłada się  $=a$ ; wyznacznik staje się

$$\begin{vmatrix} 1, & *, & * \\ 0, & 1.2, & * \\ 0, & 0, & (f^3F')'' \end{vmatrix}$$

to jest mamy go  $= 1.1.2 (f^3F')''$ ,

i podobnie w innych przypadkach; wzór staje się zatem

$$F_x = F - \frac{\lambda}{1} fF' + \frac{\lambda^2}{1.2} (f^2F')' - \frac{\lambda^3}{1.2.3} (f^3F')'' + \text{etc.}$$

zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a.

Przypuśćmy w ogólności  $\varphi x = (x-a)\psi x$ , czyli załóżmy równanie

$$(x-a)\psi x + \lambda f x = 0,$$

czyli

$$x - a + \lambda \frac{f x}{\psi x} = 0,$$

mamy wtedy za pomocą twierdzenia Lagrange'a

$$F_x = F - \frac{\lambda}{1} F' \frac{f}{\psi} + \frac{\lambda^2}{1.2} \left\{ F'' \left( \frac{f}{\psi} \right)^2 \right\}' - \frac{\lambda^3}{1.2.3} \left\{ F''' \left( \frac{f}{\psi} \right)^3 \right\}'' + \text{etc.}$$



Weźmy na przykład pod uwagę wyraz  $\left\{ F' \left( \frac{1}{\Lambda} \right) \right\}^n$ ; to jest

$$= \left\{ F' x \cdot \frac{(x-a)^3 (fx)^3}{(\varphi x)^3} \right\}^n,$$

kréski oznaczają różniczkowanie względem  $x$ , a  $x$  ostatecznie ma być założoném  $= a$ ; lub, co na jedno wychodzi,

$$= \left( \frac{d}{d\theta} \right)^2 \left[ F'(a+\theta) \frac{\theta^3 [f(a+\theta)]^3}{[\varphi(a+\theta)]^3} \right],$$

gdzie kréski oznaczają już różniczkowanie względem  $\theta$ , które to  $\theta$  ma być ostatecznie założoném  $= 0$ . To jest

$$\left( \frac{d}{d\theta} \right)^2 \left[ F'(a+\theta) \frac{[f(a+\theta)]^3}{\left( \varphi^a + \frac{1}{1.2} \theta^2 \varphi'' + \dots \right)^3} \right]^n.$$

Co może być napisaném  $\left( F' f^3 \frac{1}{\Lambda^3} \right)^n$ , gdzie

$$A = \varphi' + \frac{1}{2} \theta \varphi'' + \frac{1}{6} \theta^2 \varphi''' + \dots,$$

gdzie rozumie się że co się tyczy  $F' f^3$ , które jest wyrażoném jako funkcya samego  $a$  ( $\theta$  tymczasem zostało założoném  $= 0$ ), kréski zewnętrzne oznaczają różniczkowanie względem  $a$ , co się zaś tyczy  $A$ ,  $= \varphi' + \frac{1}{2} \theta \varphi'' + \text{etc.}$  oznaczają one różniczkowanie względem  $\theta$ , które później ma być założoném  $= 0$ . Twierdzenie zaś będzie teraz

$$F x = F - \frac{\lambda}{1} \left( F' f \cdot \frac{1}{\Lambda} \right) + \frac{\lambda^2}{1.2} \left( F' f^2 \cdot \frac{1}{\Lambda^2} \right) - \frac{\lambda^3}{1.2.3} \left( F' f^3 \cdot \frac{1}{\Lambda^3} \right)^n + \text{etc.}$$

To musi być równoważném z twierdzeniem Wrońskiego, choć przedstawia się w bardzo odmiennym i, jak sądzę, dogodniejszym kształcie; lecz

wypadki otrzymane z porównania są bardzo godne uwagi: zajmiemy się teraz tym porównaniem.

Wziąwszy pod uwagę powyższy współczynnik  $\left(F/f^3 \frac{1}{\Lambda^3}\right)^u$ , współczynnik ten musi być równym wyrazowi Wronskiego

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4.1.2} \frac{1}{\varphi^6} & \varphi', & (\varphi^2)', & f^3 F' \\ & \varphi'', & (\varphi^2)'', & (f^3 F')' \\ & \varphi''', & (\varphi^2)''', & (f^3 F')'' \end{vmatrix};$$

lub, co wychodzi na to samo, wyznacznik ma być

$$\begin{aligned} &= 1.1.2\varphi^6 \left(\frac{1}{\Lambda^3} f^3 F'\right)^u \\ &= 1.1.2\varphi^6 \left\{ f^3 F' \left(\frac{1}{\Lambda^3}\right)^u + 2(f^3 F')' \left(\frac{1}{\Lambda^3}\right)' + (f^3 F'') \frac{1}{\Lambda^3} \right\}, \end{aligned}$$

to jest wartości

$$1.1.2\varphi^6 \frac{1}{\Lambda^3}, \quad 1.1.2\varphi^6 2 \left(\frac{1}{\Lambda^3}\right)', \quad 1.1.2\varphi^6 2 \left(\frac{1}{\Lambda^3}\right)''$$

muszą być odpowiednio

$$= \varphi'(\varphi^2)'' - \varphi''(\varphi^2)', \quad \varphi''(\varphi^2)' - \varphi'(\varphi^2)''', \quad \varphi''(\varphi^2)''' - \varphi'''(\varphi^2)''.$$

Lecz, co wychodzi na jedno, jeżeli

$$\left( \varphi' + \frac{6}{2} \varphi'' + \frac{6^2}{2 \cdot 3} \varphi''' + \dots \right)^3 = A_0 + \frac{1}{1} A_1 \theta + \frac{1}{1.2} A_2 \theta^2 + \dots,$$

te powyższe funkcje muszą być

$$1.1.2\varphi^6 A_0, \quad 1.1.2\varphi^6 2 A_1, \quad 1.1.2\varphi^6 A_2,$$

mamy

$$\Lambda_0 = \frac{1}{\varphi^3}, \quad \Lambda_1 = -\frac{3}{2} \frac{\varphi''}{\varphi^4}, \quad \Lambda_2 = -\frac{\varphi'''}{\varphi^5} + \frac{3\varphi''^2}{\varphi^5},$$

tożsamości zaś są następujące

$$\begin{aligned} 2\varphi'^3 &= \varphi'(\varphi^2)'' - \varphi''(\varphi^2)', \\ &= \varphi'(2\varphi\varphi'' + 2\varphi'^2) - \varphi'' \cdot 2\varphi\varphi', \\ -6\varphi''\varphi'^2 &= \varphi'''(\varphi^2)' - \varphi'(\varphi^2)''', \\ &= \varphi''' \cdot 2\varphi\varphi' - \varphi'(2\varphi\varphi''') + 6\varphi'\varphi''', \\ +6\varphi''^2\varphi' - 2\varphi'''\varphi'^2 &= \varphi''(\varphi^2)'' - \varphi'''(\varphi^2)'', \\ &= \varphi''(2\varphi\varphi'' + 6\varphi'\varphi'') - \varphi'''(2\varphi\varphi'' + 2\varphi'^2), \end{aligned}$$

co w samej rzeczy ma miejsce. I w podobny sposób, dla sprawdzenia współczynników  $\lambda^4$ , mielibyśmy do porównania, pierwsze cztery wyrazy rozwinięcia

$$\frac{1}{\left(\varphi' + \frac{6}{2}\varphi'' + \frac{6^2}{2 \cdot 3}\varphi''' + \dots\right)^4},$$

z wyznacznikami utworzonymi z pierwowzoru (matrix)

$$\begin{vmatrix} \varphi', & \varphi'', & \varphi''', & \varphi'''' \\ (\varphi^2)', & (\varphi^2)'', & (\varphi^2)''', & (\varphi^2)'''' \\ (\varphi^3)', & (\varphi^3)'', & (\varphi^3)''', & (\varphi^3)'''' \end{vmatrix}.$$

Szereg równań może być przedstawionym jak następuje, pisząc jak powyżej A dla oznaczenia funkcji

$$\varphi' + \frac{6}{2}\varphi'' + \frac{6^2}{2 \cdot 3}\varphi''' + \dots,$$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\varphi'} \cdot 1,$$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{-1}{\varphi'^3} \begin{vmatrix} \theta, & 1 \\ \varphi', & \varphi'' \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{1},$$

$$\frac{1}{A^3} = \frac{+1}{\varphi'^6} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\theta^2, & \frac{1}{2}\theta, & 1 \\ \varphi', & \varphi'', & \varphi''' \\ (\varphi^2)', & (\varphi^2)'', & (\varphi^2)''' \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{1.1.2},$$

$$\frac{1}{A^4} = \frac{-1}{\varphi'^{10}} \begin{vmatrix} \frac{1}{6}\theta, & \frac{1}{6}\theta^2, & \frac{1}{3}\theta, & 1 \\ \varphi', & \varphi'', & \varphi''', & \varphi^{(4)} \\ (\varphi^2)', & (\varphi^2)'', & (\varphi^2)''', & (\varphi^2)^{(4)} \\ (\varphi^3)', & (\varphi^3)'', & (\varphi^3)''', & (\varphi^3)^{(4)} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{1.1.2.1.2.3},$$

i t. d.

gdzie w każdym przypadku funkcya po lewej stronie ma być rozwinięta tylko do tej potęgi jaka zachodzi w wyznaczniku: współczynniki liczebne pierwszych wierszy poziomych różnych wyznaczników, są odwróceniami liczb

$$n(n-1)\dots 2.1, \quad n(n-1)\dots 2, \quad n(n-1), \quad n, \quad 1,$$

gdzie  $n$  jest wskaźnikiem najwyższej potęgi  $\theta$ . A zatem dowód twierdzenia Wronskiego polega ostatecznie na postawieniu powyższych równań. Jako sprawdzenie, w czwartym wzorze, napiszmy  $\varphi = e^a$  ( $a = 0$ ); mamy

$$\left(\frac{\theta}{e^a - 1}\right)^4 \text{ lub } \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{6}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^3 + \dots\right)^4}$$

$$= -\frac{1}{24} \begin{vmatrix} \frac{1}{6}\theta^3, & \frac{1}{6}\theta^2, & \frac{1}{5}\theta, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 2, & 4, & 8, & 16 \\ 3, & 9, & 27, & 81 \end{vmatrix}$$



gdzie wyrażenie po prawej stronie jest

$$= -\frac{1}{12} \left( -1 \cdot 12 + \frac{1}{5} \theta \cdot 72 - \frac{1}{6} \theta^2 \cdot 132 + \frac{1}{6} \theta^3 \cdot 72 \right)$$

$$= 1 - 2\theta + \frac{11}{6} \theta^2 + \theta^3,$$

a rozwinięszy lewą stronę aż do trzeciej potęgi  $\theta$ ,

$$= 1 = 1$$

$$- 4 \left( \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{6} \theta^2 + \frac{1}{24} \theta^3 \right) - 2\theta - \frac{2}{5} \theta^2 - \frac{1}{6} \theta^3$$

$$+ 10 \left( \frac{1}{4} \theta^3 + \frac{1}{6} \theta^3 \right) + \frac{5}{2} \theta^2 + \frac{5}{3} \theta^3$$

$$- 20 \left( \frac{1}{8} \theta^3 \right) - \frac{5}{2} \theta^3$$

$$1 - 2\theta + \frac{11}{6} \theta - \theta^3$$

co się zgadza.

Wracając do powyższego równania i rozwijając różne wyrazy  $(\varphi^2)' = 2\varphi\varphi'$ ,  $(\varphi^2)'' = 2\varphi\varphi'' + 2\varphi'^2$ , etc., a zatem, ponieważ w każdym przypadku lewa strona zawiera  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,  $\varphi'''$ , etc. lecz nie zawiera  $\varphi$ , widocznym jest iż po prawej ręce wyrazy zawierające  $\varphi$  znoszą się nawzajem; przypuściwszy że tak jest, równania przybierają najprostszą formę otrzymaną przez założenie  $\varphi = 0$ , to jest mamy w ten sposób  $(\varphi^2)' = 0$ ,  $(\varphi^2)'' = 2\varphi'^2$ , etc.

W celu uproszczenia wzorów, zastąpmy  $\varphi'$ ,  $\frac{1}{2}\varphi''$ ,  $\frac{1}{6}\varphi'''$ ,  $\frac{1}{24}\varphi^{(4)}$ , etc. przez  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , etc. znajdziemy następujące proste kształty: napisawszy dla skrótów

$$\theta = b + c\theta + d\theta^2 + e\theta^3 + \text{etc.}$$

będziemy mieli

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1}{b} \cdot 1,$$

$$\frac{1}{\Theta^2} = -\frac{2}{b^3} \left| \begin{array}{c} \theta, \frac{1}{2} \\ b, c, \end{array} \right|$$

$$\frac{1}{\Theta^3} = -\frac{3}{b^6} \left| \begin{array}{c} \theta^2, \frac{1}{2}\theta, \frac{1}{3} \\ b, c, d \\ b^2, 2bc \end{array} \right|,$$

$$\frac{1}{\Theta^4} = -\frac{4}{b^{10}} \left| \begin{array}{c} \theta^3, \frac{1}{2}\theta^2, \frac{1}{3}\theta, \frac{1}{4} \\ b, c, d, e \\ b^2, 2bc, 2bd + c^2 \\ b^3, 3b^2c \end{array} \right|,$$

to jest dla  $\Theta^{-n}$  prawa strona daje rozwinięcia dochodzące do  $\theta^{n-1}$ . Zauważyć należy, że w wyznacznikach różne wiersze poziome są współczynnikiami rozwinięć  $\Theta$ ,  $\Theta^2$ ,  $\Theta^3$ , etc. odpowiednio.

Dowodzenie jest bardzo łatwe; dość jest wziąć pod uwagę równanie dla  $\frac{1}{\Theta^i}$ . Załóżmy

$$\frac{1}{\Theta^i} = \dots r\theta^6 + q\theta^5 + p\theta^4 + \ell\theta^3 + \frac{1}{2}\gamma\theta^2 + \frac{1}{3}\delta\theta + \frac{1}{4}\epsilon.$$

gdzie widocznie  $\epsilon = \frac{4}{b^4}$ , i napiszmy

$$\Theta = B_1 + C_1\theta + D_1\theta^2 + E_1\theta^3 + \dots,$$

$$\Theta^2 = B_2 + C_2\theta + D_2\theta^2 + \dots,$$

$$\Theta^3 = B_3 + C_3\theta + \dots,$$

gdzie  $B_1 = b$ ,  $B_2 = b^2$ ,  $B_3 = b^3$ ; chcemy pokazać że

$$\epsilon B_1 + \gamma C_1 + \delta D_1 + \epsilon E_1 = 0,$$

$$\gamma B_2 + \delta C_2 + \epsilon D_2 = 0,$$

$$\delta B_3 + \epsilon C_3 = 0,$$

bo gdy to ma miejsce, opuszczając wyrazy zawierające  $\theta^4$ ,  $\theta^5$ , etc. i pisząc

$$\epsilon \theta^3 + \frac{1}{2} \gamma \theta^2 + \frac{2}{3} \delta \theta + \epsilon \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\epsilon \theta^4} \right) = 0,$$

następnie rugując  $\epsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ , mamy

$$\left| \begin{array}{cccc} \theta^3, & \frac{1}{2} \theta^2, & \frac{1}{3} \theta, & \frac{1}{4} - \frac{1}{\epsilon \theta^4} \\ B_1, & C_1, & D_1, & E_1 \\ & B_2, & C_2, & D_2 \\ & & B_3, & C_3 \end{array} \right| = 0,$$

w którym to równaniu wyraz zawierający

$$\frac{1}{\theta^4} \text{ jest } + \frac{1}{4} B_1 B_2 B_3 \frac{1}{\theta^4}, = \frac{1}{4} b^{10} \frac{1}{\theta^4};$$

a tak równanie jest  $\frac{1}{\theta^4} = -\frac{4}{b^{10}}$  w wyznaczniku bez wyrazu o którym mowa (to jest z wyrazem narożnym sprowadzonym do  $\frac{1}{4}$ ).

Na dowód tego pomocniczego twierdzenia pomnożmy wyrażenie na  $\frac{1}{\theta^4}$  przez  $\frac{1}{\theta^4}$ , i zróżniczkujmy względem  $\theta$ , otrzymamy :

$$\frac{4(\theta \Theta)}{(\theta \Theta)^3} = \dots - 2r\theta - q + \frac{\epsilon}{\theta^4} + \frac{\gamma}{\theta^3} + \frac{\delta}{\theta^4} + \frac{\epsilon}{\theta^5}.$$

Pomnożywszy przez

$$\theta \Theta = B_1 \theta + C_1 \theta^2 + D_1 \theta^3 + E_1 \theta^4,$$

478070.

widzimy że  $B_1\epsilon + C_1\gamma + D_1\delta + E_1\epsilon$  jest spółczynnikiem  $\frac{1}{\theta}$  w  $\frac{h(\theta\epsilon)'}{(\theta\epsilon)^4}$ ,  
 i w podobny sposób  $B_2\gamma + C_2\delta + E_2\epsilon$  jest spółczynnikiem  $\frac{1}{\theta}$  w  $\frac{h(\theta\epsilon)'}{(\theta\epsilon)^3}$ ,  
 zaś  $B_3\delta + C_3\epsilon$  spółczynnikiem  $\frac{1}{\theta}$  w  $\frac{h(\theta\epsilon)'}{(\theta\epsilon)^2}$ . Niech będzie teraz  $m$  cal-  
 kowitą dodatnią,  $\frac{1}{(\theta\epsilon)^m}$  rozwinięte podług zwiększających się potęg  $\theta$ ,  
 zawiera potęgi  $\theta$ , dodatnie i odjemne, lecz nie zawiera wyrazu logaryt-  
 mowego: zróżniczkowawszy więc podług  $\theta$ ,  $\frac{(\theta\epsilon)'}{(\theta\epsilon)^{m+1}}$  nie zawiera wy-  
 razu mającego  $\frac{1}{\theta}$  (\*); a więc wyrażenia o których mowa są każde z nich  
 $= 0$ ; co dopełnia dowodzenia.

Powyższe wzory dające rozwinięcie  $\frac{1}{\theta^n}$  aż do  $\theta^{n-1}$  w wyrazach mają-  
 cych spółczynniki w rozwinięciu  $\theta$ ,  $\theta^2$ ,  $\theta^{n-1}$  są, sądzę, godnymi uwagi.

(\*) Sposób ten jest znanym sposobem używanym przez Jacobi'ego i  
 Murphy'ego. (Przyp. CAYLEY'A.)

KONIEC TOMU DRUGIEGO.





NAKŁADEM WŁAŚCICIELA BIBLIOTEKI KÓRNICKIEJ, A PRZEWODNICZĄCEGO W TOWARZYSTWACH NAUKOWEJ POMOCY I NAUK ŚCISŁYCH W PARYŻU, WYSZŁY NASTĘPUJĄCE DZIEŁA MATEMATYCZNE :

1. NORZEWSKI ROCH. *Nouvelle théorie des proportions et progressions harmoniques avec ses applications à la géométrie*. Paris, 1852, in-8°, avec planches (wyczerpane).
2. G. II. NIEWĘGŁOWSKI, professor analizy w Szkole wyższej Polskiej Montparnasse, egzaminator matematyki w liceum Świętego Ludwika, w Raryżu, 1866. — *Arytmetyka z teorią przybliżeń liczebnych i t. d.* (Kurs zupełny, zawierający działania skrócone, błędy samoistne i względne; noty dotyczące własności liczb, wiele rozwiązanych zagadnień i ćwiczenia), in-8°, stron 352. Paryż, 1866. Cena 1 tal. 10 srg.
3. — *Geometrii część I. Geometria płaska*, (wydanie drugie) w Paryżu, 1868 r., stron 436, in-8°, figury w tekście. Cena 1 talar 10 srg.
4. — *Geometrii część I i II*, kurs zupełny, drugie wydanie całkiem przerobione, zawierające całą geometryę starożytnych i metody geometrii nowoczesnej (pierwsze wydanie z 1852 roku). Paryż, 1868, in-8°, stron VIII i 778. Cena 2 tal. 20 srg.
5. — *Trygonometria prostolinijna i sferyczna z teorią ilości urojonych i z notami*. Paryż, 1870 r., in-8°, str. xv i 407. Cena 1 tal. 15 srg.
6. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami*, wyłożył W. FOLKIERSKI, inżynier cyw. b. uczeń Szkoły Politechnicznej w Karlsruhe, licencyat n. m. P. F. Sorbony, Professor mechaniki w Szkole Wyższej Przygotowawczej w Paryżu, tom I, zawierający rachunek różniczkowy, oraz dodatek Władysława Trzaski o wyznacznikach. Paryż, 1870, in-8°, str. XLVIII i 1087, fig. w tekście 136. Cena 3 tal. 10 srg.
7. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom I (Główne artykuły przez pp. Frankego, Gosiewskiego, Sągajłę, Trzaskę, Żmurkę). Paryż, 1871, in-4°, stron 186, figur 5. Cena 2 tal.
8. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom II (Artykuły pp. Gosiewskiego, Kucharzewskiego, Sągajły, Trzaski i Żalińskiego). Paryż, 1872, in-4°, stron 240, figur 8. Cena 2 tal. (Obydwa tomy razem oprawne 3 tal. 22 srg. 6 fen.).
9. *Wykład Hydrauliki* wraz z teorią machin wodnych, poprzedzony wiadomościami wstępnymi z hydrostatyki i hydrodynamiki, przez pp. FELIKSA KUCHARZEWSKIEGO i WŁ. KLUGERA (Inżynierów dyplomowanych szkoły Drogi Mostów w Paryżu). Paryż, 1873, str. LVI i 1019. Figur w tekście 110, oprawa angielska. Cena 20 fr.

10. *Zasady Rachunku różniczkowego i całkowego*, przez WŁADYSŁAWA FOLKIERSKIEGO, stałego Sekretarza i Wice-prezesa Towarzystwa Nauk Ścisłych, tom II. *Rachunek Całkowy. Część pierwsza: Całkowanie różniczek i t. d.* Paryż, 1873, stron xvi i 740, figur 76, oprawa angielska. Cena 12 franków.
11. *Wykład mechaniki cząsteczkowej (molekularnej)* przez WŁADYSŁAWA GOSIEWSKIEGO, prof. Fizyki matematycznej. Tomu I<sup>o</sup>, Części różniczkowej zeszyt pierwszy, Paryż, 1873, stron 176. Cena fr. 4.
12. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom III, zawierający prace pp. W. Folkierskiego, Klugera, Kucharzewskiego, Dolińskiego, Gosiewskiego i Martynowskiego. Paryż, 1853, str. VIII i 358, figur 96. Cena fr. 12.
13. *Kurs Mechaniki Rozumowej* przez G. H. NIEWĘGŁOWSKIEGO, dwa tomy, Tom I, *Statyka. — Dynamika punktu*. Paryż, 1873. In-8°, stron 544, z figurami, cena fr. 10.
14. *Wykład zupełny Algebry*, przez ADOLFA SĄGAJŁĘ w czterech tomach. Tom I: *Początki Algebry*. Paryż, 1873, in-8°, stron 632 z figurami. Cena 6 fr.
15. *Bibliografia Piśmiennictwa Polskiego z działu Matematyki i Fizyki oraz ich zastosowań*, przez Dr. TEOFILA ŻEBRAWSKIEGO, Człon. Akad. Krakowskięj. Kraków, 1873, in-8°, stron 617 z 4 tablicami. Cena 3 tal.
16. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom IV, zawierający wypracowania pp. A. Martynowskiego, K. Brandta, J.-N. Frankego, W. Klugiera, W. Puchewicza, S. Baranowskiego i Cayley'a (tłomaczenie z angielskiego). In-4°. Paryż, 1874, czterdzieści dwa arkuszy druku, stron 334, z 99 figurami w tekście. Cena fr 12.
17. ADOLF SĄGAJŁO, professor Matematyki: *Algebra*, tom II, *Teorya Wyznaczników i ich przedniejsze zastosowania*, in-8°, str. 400. Paryż, 1874.

ZNAJDUJĄ SIĘ OBECNIE W DRUKU.

18. *Kurs Mechaniki Rozumowej* G. H. NIEWĘGŁOWSKIEGO tom II: *Dynamika układów materjalnych, Hidrostatyka i Hidrodynamika*, in-8°.
19. *Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, Tom V.

---

Zarząd Biblioteki Kórnickięj czuje potrzebę wyrazić żal swój, że był zmuszonym znacznie podnieść cenę ostatnich nakładów. Ma to miejsce szczególnieżw dziełach matematycznych, drukowanych w Paryżu, gdzie papier nowym obłożony podatkiem, podwyższone taryfy drukarskie i nie slychane trudności korekty wpłynęły tak niekorzystnie na kosztu druku, iż nawet podniesione ceny o wiele jeszcze pokryć ich nie mogą.

Niżej wymienione księgarnie zgłosiły się z obietnicą sprzedawania po stałych cenach wszystkich nakładów Biblioteki Kórnickiej i odbierają je wprost od Zarządu zaraz po wykończeniu każdego tomu.

- w WARSZAWIE*, pp. GEBETHNER i WOLFF.
- » » Michał GLÜCKSBURG.
  - » » Adolf KOWALSKI.
  - » » J. J. OKOŃSKI.
  - » » Maurycy ORGELBRAND.
  - » » G. SENNEWALD.
  - » » UNGER i BANARSKI.
- w KRAKOWIE*,
- » Józef CZECH.
  - » D. E. FRIEDLEIN (Rynek, 11).
  - » Stanisław KRZYŻANOWSKI.
  - » Alexander NOWOLECKI.
  - » Fr. TRZECIESKI (księgarnia wydawnictwa dzieł tanich i pożytecznych).
- w LWOWIE*,
- » A. D. BARTOSZEWICZ (księgarnia Polska, ulica Kopernika l. 12).
  - » GUBRYNOWICZ i SCHMIDT.
  - » MILIKOWSKI.
  - » F. H. RICHTER.
  - » Karol WILD.
- w POZNANIU*,
- » Mieczysław LEITGEBER i SPÓŁKA.
  - » J. K. ŻUPAŃSKI.
- w ŚREMIE*,
- » K. GĄSIOROWSKI.
- w PETERSBURGU i MOSKWIE*.
- » B. M. WOLFF.
- w PARYZU*, Księgarnia Luksemburska, 46, *rue de Tournon*.

Z zamówieniami zgłaszać się należy do Zarządu Biblioteki Kórnickiej, pod adresem : Dr. Z. Celichowski w Kórniku (W. Ks. Poznańskie).











Biblioteka im. Hieronima  
Łopacińskiego w Lublinie

|| 323983

W.2, T.2



1000004274