Sammlung Göschen

Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie des Raumes

von

h. Bürklen

Figuren

18134

B. P. im. Ł.

1000072444

Sa… …f.

Acker… …rium
Dr… …Inte-
La… …nker,
…tutt-

Agri… …
ser… …
in Göttingen. Nr. 304.

Akustik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik u. Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.

— **Musikalische, v.** Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Universität Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.

Algebra. Arithmetik u. Algebra v. Dr. H. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Alpen, Die, von Dr. Rob. Sieger, Professor an der Universität und an der Exportakademie des k. k. Handelsmuseums in Wien. Mit 19 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 129.

Altertümer, Die deutschen, v. Dr. Franz Fuhse, Direktor d. städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abb. Nr. 124.

Altertumskunde, Griechische, von Prof. Dr. Rich. Maisch, neubearbeitet von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

— **Römische,** von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollb. Nr. 45.

Analyse, Techn.-Chem., von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechn. Schule i. Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— — — Repetitorium und Aufgabensammlung z. Differentialrechnung v. Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.

— — II: Integralrechnung. Von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 89 Fig. Nr. 88.

— **Niedere,** von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.

Arbeiterfrage, Die gewerbliche, von Werner Sombart, Professor an der Universität Breslau. Nr. 209.

Arbeiterversicherung, Die, von Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Arithmetik und Algebra von Dr. Herm. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— — Beispielsammlung zur Arithmetik u. Algebra v. Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Ästhetik, Allgemeine, von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer an d. Kgl. Akademie der bildenden Künste in Stuttgart. Nr. 300.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. W. F. Wislicenus, Prof. a. d. Univers. Straßburg. Mit 36 Abb. u. 1 Sternk. Nr. 11.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbild. Nr. 91.

Aufgabensammlg. z. Analyt. Geometrie d. Ebene v. O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 256.

— **z. Analyt. Geometrie d. Raumes** von O. Th. Bürklen, Prof am Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 8 Figuren. Nr. 309.

— **Physikalische,** v. G. Mahler, Prof. der Mathem. u. Physik am Gymnas. in Ulm. Mit d. Resultaten. Nr. 243.

Aufsatzentwürfe von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von Wilh. Weitbrecht, Prof. der Geodäsie in Stuttgart. Mit 15 Figuren und 2 Tafeln. Nr 302.

Baukunst, Die, des Abendlandes von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbild. Nr. 74.

Betriebskraft, Die zweckmäßigste, von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 1. Teil: Die mit Dampf betriebenen Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten Mit 14 Abbildungen. Nr. 224.

— — 2. Teil: Verschiedene Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 29 Abbildungen. Nr. 225.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Professor am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbild. Nr. 96.

Biologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Biologie der Tiere I: Entstehung u. Weiterbild. d. Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur v. Dr. Heinr. Simroth, Professor a. d. Universität Leipzig. Mit 33 Abbildungen. Nr. 131.

— — II: Beziehungen der Tiere zur organ. Natur v. Dr. Heinr. Simroth. Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.

Bleicherei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Wilhelm Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor der Öffentlichen und l. Sächs Versuchsstation für Brauerei und Mälzerei sowie der Brauer- u Mälzerschule zu Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 303.

Buchführung. Lehrgang der einfachen u. dopp. Buchhaltung von Rob. Stern, Oberlehrer der Off. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule z. Leipzig. Mit vielen Formularen. Nr. 115.

Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbild. Nr. 119.

Chemie, Allgemeine und physikalische, von Dr. Max Rudolphi, Doz. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

— **Analytische,** von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— — II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

— **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

— — siehe auch: Metalle. — Metalloide.

Chemie, Geschichte der, von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— — II: Von Lavoisier bis heute. Nr. 265.

— **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

— — III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— — IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

— **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

— **Physiologische,** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — II: Dissimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 241.

Chemisch-Technische Analyse von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Dampfkessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Figuren. Nr. 9.

Dampfmaschine, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 48 Figuren. Nr. 8.

Dampfturbinen, Die, ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ingenieur Hermann Wilda in Bremen. Mit 89 Abbildungen. Nr. 274.

Dichtungen a. mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl m. Einltg. u. Wörterb. herausgegeb. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Dietrichepen. Kudrun u. Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 10.

Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. a. Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Professor am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hütteningen. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.

— II. Teil: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Elektrizität. Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gust. Jäger, Professor a. d. Univers. Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.

Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel, Privatdozent in Breslau. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Figuren. Nr. 252.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 47 Fig. Nr. 196.

— II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Figuren. Nr. 197.

— III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Figuren. Nr. 198.

Epigonen, Die, des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied des Königl. Preußischen Meteorologischen Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbild. und 3 Tafeln. Nr. 175.

Ethik von Professor Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. 1. Teil. Mit 50 Abbildungen. Nr. 268.

— — 2. Teil. Mit 50 Abbildungen. Nr. 269.

Familienrecht. Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr Heinrich Titze, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Nr. 305.

Färberei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei u. ihre Hilfsstoffe v. Dr. Wilh. Massot, Lehrer a. d. Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie i. Krefeld. M. 28 Fig. Nr. 186.

Feldgeschütz, Das moderne, von W. Hendenreich, Oberstleutnant u. Militärlehrer an der Militärtechnischen Akademie. I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschließlich der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1850 bis 1890. Mit 1 Abbildung. Nr. 306.

Fortsetzung auf der 4. Vorsatzseite.

Sammlung Göschen

673

Z Księgozbioru BOLESŁAWA PRUSA

Aufgabensammlung

zur

Analytischen Geometrie des Raumes

von

O. Th. Bürklen
Prof. am Königl. Realgymnasium in Schwäb. Gmünd

Mit 8 Figuren

Z Księgozbioru BOLESŁAWA PRUSA

Z Księgozbioru BOLESŁAWA PRUSA

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1906

114926
2309757

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.

516

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig-R.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Punkt, Ebene, gerade Linie.

		Seite
§ 1.	Punkt und Vektor	5
§ 2.	Sätze und Aufgaben über Projektionen	9
§ 3.	Die Ebene	11
§ 4.	Die gerade Linie	21
§ 5.	Ebene und Gerade	27
§ 6.	Ebenenkoordinaten	30
§ 7.	Geradlinige und ebene Örter	32

II. Abschnitt.

Krumme Flächen (Herleitung der Gleichung aus ihrem Entstehungsgesetz).

§ 8.	Die Kugel	36
§ 9.	Die Kugel als geometrischer Ort	42
§ 10.	Zylinderflächen	47
§ 11.	Kegelflächen	51
§ 12.	Drehflächen	55
§ 13.	Rückungsflächen	57
§ 14.	Keil-(Konoid-)Flächen	60
§ 15.	Einige Regelflächen	62

III. Abschnitt.

Flächen II. Grades.

§ 16.	Das Ellipsoid	65
§ 17.	Die Hyperboloide	72
§ 18.	Die Paraboloide	76
§ 19.	Die allgemeine Gleichung II. Grades	82

IV. Abschnitt.

§ 20.	Vermischte Aufgaben	85

I. Abschnitt.

Punkt, Ebene, gerade Linie.

§ 1. Punkt und Vektor.

Bezeichnungen: O Nullpunkt oder Ursprung, P Punkt im Raum, $OP = r$, α, β, γ Richtungswinkel von OP, $x|y|z$ Koordinaten von P. Es sind stets, wofern nichts anderes bemerkt ist, rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt.

1. Wo liegen die folgenden Punkte?

a) $4|0|0$, b) $4|3|0$, c) $4|3|5$, d) $4|4|4$,
e) $-4|-4|-4$, f) $0|-7|0$, g) $0|-7|+2$,
h) $-5|-7|+2$, i) $0|0|3$, k) $-5|0|3$,
l) $2|-5|-3$, m) $\infty|0|0$, n) $\infty|3|0$,
o) $\infty|3|5$, p) $3|5|z$-Koord. unbestimmt,
q) $3|y$- u. z-Koord. unbestimmt.

2. Welche Entfernungen von O haben die in 1. angegebenen Punkte?

Formel $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Es sollen die Richtungskosinus und, soweit es ohne Benützung der trigonometrischen Tafeln möglich,

auch die Richtungswinkel der Vektoren angegeben werden, die zu den in Nr. 1 angegebenen Punkten gehören.

4. Von einem über der XY-Ebene, d. h. auf der Seite der $+Z$-Achse liegenden Punkt ist gegeben $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$, $r = 6$; gesucht ist γ, x, y, z.

Res.: $\gamma = 60^0$, $3|3\sqrt{2}|3$.

5. Für einen unter der XY-Ebene liegenden Punkt ist gegeben $x = 15$, $y = 8$, $\alpha = 30^0$. Wie groß ist r, z, $\cos\beta$, $\cos\gamma$?

Res.: $r = 10\sqrt{3}$, $z = -\sqrt{11}$, $\cos\beta = 4\sqrt{3} : 15$, $\cos\gamma = -\sqrt{33} : 30$.

6. Ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a steht auf dem ersten Feld der XY-Ebene so, daß eine Ecke nach O und eine Kante auf die $+X$-Achse fällt. Es sollen die Koordinaten der Ecken berechnet werden.

7. Eine regelmäßige vierseitige Pyramide $SP_1P_2P_3P_4$, deren Kanten alle die Länge a haben, steht so auf der XY-Ebene, daß die Spitze S auf der $+Z$-Achse liegt und $P_1P_2 \perp Y$-Achse, $P_1P_4 \perp X$-Achse ist. Es sollen die Koordinaten der Ecken angegeben werden.

8. Die Koordinaten der Ecken eines Würfels von der Kantenlänge a anzugeben, wenn zwei Gegenecken P_7 und P_8 auf der Z-Achse symmetrisch zu O liegen und P_1 im 1. Feld der XZ-Ebene liegt.

Res.: $P_1 : \frac{a}{3}\sqrt{6} \,|\, 0 \,|\, \frac{a}{6}\sqrt{3}$, $P_2 : \frac{a}{6}\sqrt{6} \,\Big|\, \frac{a}{2}\sqrt{2} \,\Big|\, -\frac{a}{6}\sqrt{3}$ usf.

9. Gegeben sind die Punkte P_1 und P_2 durch ihre Koordinaten. P_1P_2 wird im Verhältnis $m : n$ geteilt.

Es sind die Koordinaten des Teilpunktes und die Länge von $P_1 P_2$ zu suchen.

a) $2|5|11$, $10|3|18$, $1:1$, $2:3$, $2:-3$;

b) $7|-2|-8$, $-3|5|11$, $2:-5$, $3:1$, $-3:1$.

Res.: a) $6|4|14{,}5$, $5{,}2|4{,}2|13{,}8$, $-14|9|-3$, $3\sqrt{13}$;

b) $\frac{41}{3}\Big|-\frac{20}{3}\Big|-\frac{62}{3}$, $-\frac{1}{2}\Big|\frac{13}{4}\Big|\frac{25}{4}$, $-8|8{,}5|20{,}5$, $\sqrt{510}$.

10. Von einem Dreick sind die Koordinaten der Ecken $2|5|0$, $11|3|8$, $5|1|12$ gegeben; es sollen diejenigen des Schwerpunktes und die Längen der Seiten berechnet werden.

Res.: $6\,3\,\frac{20}{3}$, $\sqrt{145}$, $\frac{1}{2}\sqrt{241}$, $\frac{1}{2}\sqrt{301}$.

11. Die Koordinaten für die Schwerpunkte der Seitenflächen des Tetraeders Nr. 6 und der Pyramide von Nr. 7 zu berechnen.

12. Von einem Dreieck sind die Koordinaten $x_1|y_1|z_1$, $x_2|y_2|z_2$ zweier Ecken und die Koordinaten $X|Y|Z$ des Schwerpunktes gegeben. Es sollen die Koordinaten der dritten Ecke gefunden werden.

Res.: $x_3 = 3X - (x_1 + x_2)$, usf.

13. Die Koordinaten der Ecken des Tetraeders $P_1 P_2 P_3 P_4$ sind gegeben. P_1 wird mit dem Schwerpunkt S_1 des Dreiecks $P_2 P_3 P_4$ verbunden und $P_1 S_1$ wird, von P_1 aus, durch S im Verhältnis $3:1$ geteilt. Es sollen die Koordinaten von S berechnet werden.

Res.: $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) : 4$, usf.

Hieraus folgt, daß, wenn man statt von P_1 von einer anderen Ecke ausgeht, sich derselbe Punkt S ergibt. Er heißt Schwerpunkt des Tetraeders.

14. Suche die Koordinaten des Halbierungspunktes derjenigen Strecke, welche die Halbierungspunkte von $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ in Nr. 13 verbindet. Verfahre ebenso mit $P_2 P_3$ und $P_1 P_4$, bzw. $P_1 P_3$ und $P_2 P_4$. Welche Folgerung ergibt sich?

15. Von einem Tetraeder sind die Koordinaten dreier Ecken und diejenigen des Schwerpunktes gegegeben. Es sollen die Koordinaten der vierten Ecke gefunden werden.

Res.: $x_4 = 4X - (x_1 + x_2 + x_3)$, usf.

16. Die Strecke $P_1 P_2$ ist durch Q im Verhältnis $5:2$ geteilt. Die Koordinaten von P_1 sind $3|7|4$, die von Q $8|2|3$; was sind die Koordinaten von P_2?

Res.: $10|0|2{,}6$.

17. Ein Punkt in der Ebene eines Dreiecks liegt so, daß seine Verbindungslinien mit P_3, bzw. P_2 die Seiten $P_1 P_2$, bzw. $P_1 P_3$ im Verhältnis $\lambda : 1$, bzw. $\mu : 1$ teilen. Es sollen seine Koordinaten in denjenigen von $P_1 P_2 P_3$ ausgedrückt werden.

Res.: $(x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3) : (1 + \lambda + \mu)$, usf.

18. Die Strecke zwischen den gegebenen Punkten P_1 und P_2 wird im Verhältnis $\lambda : 1$ geteilt. Wie ist λ zu wählen, damit der Teilpunkt in die XY-Ebene fällt?

19. Den Inhalt der Pyramide zu bestimmen, von welcher eine Ecke in O liegt, während die übrigen die Koordinaten

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 2|4|7\,, \quad -5|3|8\,, \quad 4|1|7\,, \\ \text{b)} & 1|1|0{,}5\,, \quad 3|-3|-6\,, \quad 7|3|-1{,}5 \end{array}$$

haben.

Res.: a) $413:6$, b) 0.

20. Welches ist der Inhalt der vierseitigen Pyramide mit den Ecken

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 1|2|5\,, \quad 1|6|7\,, \quad -3|5|8\,, \quad 9|-1|-4\,, \\ \text{b)} & 4|1|5\,, \quad 2|-1|3\,, \quad 3|0|4\,, \quad 7|2|3\,? \end{array}$$

Res.: a) -12, b) 0.

§ 2. Sätze und Aufgaben über Projektionen.

21. Ist l die Länge einer Strecke im Raum, sind l_1, l_2, l_3 ihre Projektionen auf die Koordinatenachsen und l', l'', l''' ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen, so ist

$$\begin{array}{ll} 1) & l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = l^2\,, \\ 2) & l'^2 + l''^2 + l'''^2 = 2\,l^2\,. \end{array}$$

22. Ist V der Inhalt eines ebenen Flächenstückes, das gegen eine Ebene den Neigungswinkel φ hat, so ist der Inhalt v der Projektion auf diese Ebene

$$v = V \cos\varphi\,.$$

23. Ist V ein ebenes Flächenstück und sind V_1, V_2, V_3 seine Projektionen auf die Koordinatenebenen, so ist

$$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = V^2\,.$$

24. Ein Kreis vom Halbmesser a, dessen Mittelpunkt in der XY-Ebene liegt, projiziert sich auf diese als Ellipse, deren zweite Halbachse die Länge b habe. Es soll mit Nr. 22 bewiesen werden, daß der Inhalt der Ellipse $a b \pi$ ist.

25. Eine im Raum liegende Ellipse, deren Halbachsen a und b sind, werde auf die Koordinatenebenen projiziert; die Halbachsen der Projektionen seien $a_1 | b_1$, $a_2 | b_2$, $a_3 | b_3$. Es soll bewiesen werden, daß

$$1) \quad a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 = a^2 b^2 ,$$

$$2) \quad a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2 = 2 (a^2 + b^2) .$$

Anmerkung: Für den Beweis von 2) können die konjugierten Halbmesser a', b' usf., welche Projektionen a und b sind, in Verbindung mit 21. 2) benützt werden.

26. Die Grundfläche einer regelmäßigen, senkrechten Pyramide soll a) die Hälfte, b) das λ-fache des Gesamtinhalts der Seitenflächen werden. Welchen Neigungswinkel müssen die Seitenflächen erhalten?

Res.: $\cos \varphi = \lambda$.

27. Auf der X-, Y- und Z-Achse sind die Punkte P_1, P_2, P_3 gegeben, wobei $OP_1 = a_1$, $OP_2 = b$, $OP_3 = c$ ist. Das Lot von O auf die Ebene $P_1 P_2 P_3$ habe die Länge p. Es soll bewiesen werden, daß

$$1) \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2} ,$$

ferner soll der Inhalt des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ ermittelt werden.

§ 3. Die Ebene.

28. Zu untersuchen, ob die Punkte $4|1|5$, $2|-1|3$, $7|1|2$, $3|0|4$, $0|-4|2$ in der Ebene $3x - 5y + 2z - 17 = 0$ liegen oder nicht.

29. Die XY-Projektion eines Punktes der Ebene

$$4x + 7y - 3z - 16 = 0$$

hat die Koordinaten $x = 5$, $y = 2$; welches ist seine dritte Koordinate?

30. Bestimme die Abschnitte, welche die Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ auf den Koordinatenachsen macht. Was ist demnach der Fall, wenn 1) $D = 0$, 2) A oder B oder $C = 0$ ist, 3) zwei der Konstanten A, B, C Null sind, 4) A, B und C Null sind?

31. Bestimme die Achsenabschnitte der Ebene

$$ux + vy + wz - 1 = 0 .$$

Was muß der Fall sein, damit die Ebene

1) parallel der X-Achse, oder der Y-Achse, oder der Z-Achse wird,

2) parallel einer der Koordinatenebenen,

3) parallel den drei Koordinatenachsen wird, d. h. sie im Unendlichen schneidet?

32. Gib demnach die Gleichung einer Ebene an, welche parallel 1) der X-Achse, 2) der Y-Achse, 3) der Z-Achse ist, oder durch 4) die X-Achse, 5) die Y-Achse, 6) die Z-Achse, 7) durch O geht, 8) parallel zur XY-Ebene im Abstand c von O (2 Fälle) usf. ist, 9) auf der X-Achse das Stück a, auf der Y-Achse b abschneidet und parallel der Z-Achse ist.

33. Welches ist die Gleichung jeder Koordinatenebene?

34. Untersuche mit Hilfe der Achsenabschnitte, wie sich die Lage der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$

ändert, wenn das Zeichen 1) von A, 2) von A und B, 3) von A, B und C, 4) von D sich ändert.

35. Eine Ebene geht durch die Z-Achse und den Punkt $x_1|y_1$ der XY-Ebene. Welches ist ihre Gleichung?

36. Wie lautet die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt $x_1|y_1$ der XY-Ebene und durch den Punkt $x_2|z_2$ der XZ-Ebene geht?

37. Die Gleichung einer Ebene anzugeben, welche durch die Punkte $x_1|y_1|z_1$ und $x_2|y_2|z_2$ geht und parallel der Z-Achse ist.

38. Die Gleichung einer Ebene anzugeben, welche durch den Punkt $x_1|y_1|z_1$ und durch die 1) X-Achse, 2) Y-Achse, 3) Z-Achse geht.

39. Die Gleichung einer Ebene zu bestimmen, welche durch die Punkte $x_1|y_1|z_1$ und $x_2|y_2|z_2$ und durch O geht.

40. Ebenso die Gleichung einer Ebene durch $x_1|y_1|0$, $x_2|y_2|z_2$, $0|0|z_3$.

41. Die Gleichung der Ebene zu bestimmen, welche durch $x_1|y_1|z_1$, $x_2|y_2|z_2$, $x_3|y_3|z_3$ geht.

Res.: $(x-x_1)[y_1(z_2-z_3)+y_2(z_3-z_1)+y_3(z_1-z_2)]$
$+(y-y_1)[z_1(x_2-x_3)+z_2(x_3-x_1)+z_3(x_1-x_2)]$
$+(z-z_1)[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$.

Beispiele:

1) $7|6|7$, $5|10|5$, $-1|8|9$;

2) $2|4|8$, $-3|1|5$, $6|-2|7$.

Res.: 1) $3x+5y+7z-100=0$,

2) $15x+17y-42z+238=0$.

42. Auf den positiven Zweigen der X-, Y- und Z-Achse sind die Punkte P_1, P_2, P_3 so gegeben, daß

$OP_1 = a$, $OP_2 = b$, $OP_3 = c$ ist. Sie sind mit O Ecken eines Quaders, dessen Begrenzungsebenen parallel den Koordinatenebenen und dessen übrige Ecken Q_1, Q_2, Q_3 und R sind; R ist Gegenecke von O. Es

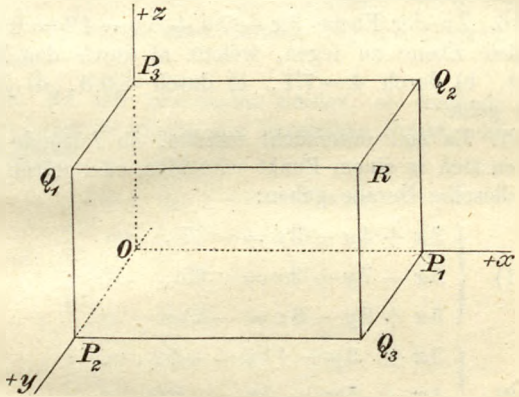

Fig. 1.

sollen die Gleichungen folgender Ebenen angegeben werden:

1) $P_1P_2P_3$, 2) P_1P_2Q, 3) P_1P_3Q, 4) $P_2P_3Q_2$,
5) OP_1R, 6) OP_2R, 7) OP_3R, 8) P_1P_2R,
9) OQ_3R, 10) OQ_1R, 11) OQ_1Q_2, 12) $Q_1Q_2Q_3$.

43. Es sollen die Gleichungen der Begrenzungsebenen des Tetraeders von Nr. 6 und der Pyramide von Nr. 7 ermittelt werden.

44. Die Bedingung dafür anzugeben, daß vier Punkte in einer Ebene liegen.

Sie folgt unmittelbar aus Nr. 41.

324018
LUBLIN

45. Zu untersuchen, ob die Punkte

a) $4|1|5$, $2|-1|3$, $3|0|4$, $7|2|3$;

b) $7|6|7$, $5|10|5$, $-1|8|9$, $4|-1|3$

in einer Ebene liegen.

46. Zu der Ebene $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ eine parallele Ebene zu legen, welche a) durch den Nullpunkt, b) durch $4|-7|1$, c) durch $8|0|3$, d) durch $3|0|0$ geht.

47. Es soll untersucht werden, ob folgende drei Ebenen sich in einem Punkt schneiden, oder durch eine und dieselbe Gerade gehen:

$$1)\quad \begin{cases} 3x + 4y - 3z = -37, \\ 6x - 7y + 2z = 95, \\ 5x + 2y - 8z = -53; \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} 5x + 3y - 11z = -72, \\ 4x - 5y + 7z = -26, \\ 6x + 11y - 3z = -66; \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} 7x - 5y - 31 = 0, \\ 4x + 11z + 43 = 0, \\ 2x + 3y + 4z + 20 = 0; \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} 10x - 4y + 3z - 1 = 0, \\ 7x + 2y - 5z + 10 = 0, \\ 11x + 10y - 18z + 31 = 0; \end{cases}$$

$$5)\quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 4x - 5y - 7z = 0, \\ 6x - y - z = 0; \end{cases}$$

$$6)\quad \begin{cases} x - 1{,}5y - 2{,}25z + 10 = 0\,, \\ -2x + 3y + 4{,}5z - 21 = 0\,, \\ 3x - 4{,}5y - 6{,}75z + 42 = 0\,. \end{cases}$$

Res.: 1) $5|-7|8$, 2) $-10|0|2$, 3) $3|-2|-5$ 4) und 5) durch eine Gerade, 6) die Ebenen sind parallel.

48. Es soll untersucht werden, ob folgende vier Ebenen sich in einem und demselben Punkt schneiden oder nicht:

$$1)\quad \begin{cases} 4x + 2y + 5z - 4 = 0\,, \\ 7x + 5y - 26 = 0\,, \\ 5x - 3z - 21 = 0\,, \\ 5y + 6z + 7 = 0\,; \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} 2x + 5y + 6z - 36 = 0\,, \\ 11x + 2y - 3z + 12 = 0\,, \\ 3x - 7y + 5z + 16 = 0\,, \\ 4x - y - 9z + 35 = 0\,; \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} 4x - 5y + 7z + 26 = 0\,, \\ 6x + 11y - 3z + 66 = 0\,, \\ x - y + 7y - 15 = 0\,, \\ 5x + 3y - 11z + 72 = 0\,; \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0\,, \\ 4x - 5y - 7z = 0\,, \\ 6x - y - z = 0\,, \\ x - 2y + 3z + 76 = 0\,; \end{cases}$$

$$5)\quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0\,, \\ 4x - 5y - 7z = 0\,, \\ 6x - y - z = 0\,, \\ 5x - 3y - 4z = 0\,. \end{cases}$$

Res.: 1) $3|1|-2$, 2) $-1|4|3$, 4) $1|19|-13$.

49. In der Ebene $11x - 2y + 3z - 75 = 0$ den Punkt zu bestimmen, für welchen $z = 4$ und $x = y$ ist.

50. In der Ebene Nr. 49 den Punkt zu bestimmen, für welchen $x = y = z$ ist.

51. In der Ebene $4x - 7y + 5z - 20 = 0$ den Punkt P so zu bestimmen, daß OP mit den Koordinatenachsen gleiche Winkel macht.

Res.: $x = 10$.

52. Welches sind die Richtungswinkel des von O auf die Ebene $2x + 3y + 6z - 35 = 0$ gefällten Lotes?

Res.: $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$.

53. Dieselbe Aufgabe für die Ebene $21x + 30y - 70z - 84 = 0$.

54. Durch die Punkte $5|-4|3$, $-2|1|8$ eine Ebene zu legen, welche senkrecht zu der a) XY-, b) XZ-, c) YZ-Ebene ist.

Res.: a) $5x + 7y + 3 = 0$; b) $5x + 7z - 46 = 0$; c) $y - z + 7 = 0$.

55. Die Gleichung einer Ebene zu bestimmen, welche durch die Punkte $8|-3|1$, $4|7|2$ geht und auf der Ebene $3x + 5y - 7z - 21 = 0$ senkrecht steht.

Res.: $3x + y + 2z - 23 = 0$.

56. Dieselbe Aufgabe für die Punkte $x_1|y_1|z_1$, $x_2|y_2|z_2$ und die Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$.

57. Durch die Punkte $5|6|3$, $7|6|19$ eine Ebene zu legen, für welche der Kosinus des Neigungswinkels gegen die XY-Ebene $1:\sqrt{290}$ ist.

Res.: $-8x + 15y + z - 53 = 0$,

$-8x - 15y + z + 127 = 0$.

58. Durch die Schnittlinie der Ebenen $3x - 4y + z - 12 = 0$, $4x - 7y + 3z + 4 = 0$ eine Ebene zu legen, welche a) durch O, b) durch den Punkt $2|4|-3$ geht, c) senkrecht zu der XY-Ebene, d) senkrecht zu der Ebene $5x + 2y - z + 30 = 0$ ist.

Res.: a) $-9x + 17y - 8z = 0$,

b) $x - 3y + 2z + 16 = 0$,

c) $x - y - 8 = 0$,

d) $x - 2y + z + 4 = 0$.

59. Durch die Schnittlinie der Ebenen

1) $Ax + By + Cz + D = 0$,

2) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

eine Ebene zu legen, welche a) durch O, b) durch $x_1|y_1|z_1$ geht, c) senkrecht zu der XZ-Ebene, d) senkrecht zu der Ebene $A_2x + B_2y + C_2z + D_1 = 0$ ist.

Res.: Die gesuchte Ebenengleichung ist von der Form $E + \lambda E_1 = 0$. Es bestimmt sich λ aus

a) $D + \lambda D_1 = 0$,

b) $(A + \lambda A_1)x_1 + (B + \lambda B_1)y_1$
$+ (C + \lambda C_1)z_1 + D + \lambda D_1 = 0$, usf.

60. Bestimme die Länge p sowie die Richtungskosinus des vom Nullpunkte auf folgende Ebenen gefällten Lotes:

1) $3x+2y+6z-35=0$, 2) $x-2y+2z+21=0$,
3) $7y+24z-150=0$, 4) $8x-15y+119=0$,
5) $6x+15y+10z=0$, 6) $22x-121z=0$.

Res.: 1) $p=5$; $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$;

2) -7; $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$;

3) 6; 0, $\frac{7}{25}$, $\frac{24}{25}$; 4) -7; $-\frac{8}{17}$, $\frac{15}{17}$, 0;

5) 0; $\frac{6}{19}$, $\frac{15}{19}$, $\frac{10}{19}$; 6) 0; $\frac{22}{122}$, 0, $-\frac{121}{122}$.

61. Bestimme den Abstand des Punktes $3|1|5$ von den Ebenen der Aufgabe 60.

62. Die Gleichungen der Ebenen zu ermitteln, welche die von folgenden Ebenenpaaren gebildeten Keile halbieren:

a) $\begin{cases} 3x+2y+6z-35=0, \\ 21x-30y-70z-237=0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8x-15y+119=0, \\ y=0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y+2z+21=0, \\ 7y+24z-50=0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x+15y+10z=0, \\ 10x+14y+35z=0. \end{cases}$

Res.: a) $45x + 184y + 482z - 553 = 0$

und

$$96x - 13y - 4z - 1106 = 0\,;$$

b) $4x - 50y - 22z + 675 = 0\,,$

$46x - 50y + 122z + 375 = 0\,;$

c) $8x - 32y + 119 = 0\,,$

$8x + 2y + 119 = 0\,;$

d) $44x + 319y - 275z = 0\,,$

$424x + 851y + 1055z = 0\,.$

Anmerkung: Die beiden Ebenen eines jeden Paares stehen senkrecht aufeinander.

63. Auf der Y-Achse einen Punkt zu bestimmen, welcher von den beiden Ebenen $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ und $8x + 9y - 72z + 73 = 0$ gleichen Abstand hat.

Res.: $y_1 = \frac{73}{12}\,, \quad y_2 = -\frac{73}{282}\,.$

64. Den Abstand der Ebene $3x + 2y - 6z - 35 = 0$ von den parallelen Ebenen

$$1)\ 3x + 2y - 6z - 56 = 0\,,$$

2) $3x + 2y - 6z - 14 = 0\,;$ 3) $3x + 2y - 6z = 0$

zu bestimmen.

Res.: 3; 7; 5.

65. Die Gleichungen der beiden Ebenen zu finden, welche parallel zu der Ebene $20x - 4y - 5z + 7 = 0$ sind und von ihr den Abstand 6 haben.

Res.: $20x - 4y + 5z + 133 = 0\,,$

$20x - 4y + 5z - 119 = 0\,.$

66. Welchen Wert muß man in der Gleichung $6x - 15y + 10z + d = 0$ der Konstanten d geben, damit das vom Ursprung auf die Ebene gefällte Lot die Länge 3 hat?

Res.: $d = \pm 57$.

67. Durch die X-Achse eine Ebene so zu legen, daß das von dem Punkt $5|1|6$ auf sie gefällte Lot die Länge 4 hat.

Res.: $35y \pm 12z = 0$.

68. Wie ist in der Ebenengleichung von Nr. 66 d zu wählen, damit die Strecke zwischen den Punkten $3|7|4$, $10|0|16$ von der Ebene im Verhältnis $5:2$ geteilt wird?

Res.: $-143\frac{5}{7}$.

69. Wie ist das Teilverhältnis $\lambda:1$ zu wählen, damit der Teilpunkt der Strecke zwischen den Punkten $x_1|y_1|z_1$ und $x_2|y_2|z_2$ in die Ebene $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ fällt? Wann fällt der Teilpunkt ins Unendliche, wann wird er unbestimmt?

Res.: $\lambda = -(x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p)$
$:(x_2\cos\alpha + y_2\cos\beta + z_2\cos\gamma - p)$.

70. Durch die Schnittlinie der Ebenen $3x - y + 2z - 5 = 0$ und $x + 4y - 3z + 1 = 0$ eine Ebene zu legen, welche die um O mit dem Halbmesser 0,6 beschriebene Kugel berührt (d. h. von O den Abstand 0,6 hat).

Res.: $E_1 + \lambda E_2 = 0$, wobei $\lambda = \frac{2}{3}$ oder $\frac{10}{53}$.

71. Welche Winkel bilden folgende Ebenenpaare miteinander?

a) $2x - 3y + 6z - 12 = 0$, $x + 2y + 2z - 7 = 0$;
b) $30x - 70y + 21z = 0$, $15x - 6y + 10z - 19 = 0$;
c) $24y - 7z + 21 = 0$, $22x + 121z + 4 = 0$;
d) $x + y - 11 = 0$, $3x + 8 = 0$;
e) $y - x\sqrt{3} - 7 = 0$, $y = 0$.

Res.: a) $\cos\varphi = \frac{8}{21}$; b) $\frac{240}{1501}$; c) $-\frac{847}{3050}$;
d) 45^0; e) 60^0.

72. Es soll der Winkel, den die Ebenen ROQ_1 und ROQ_2 von Nr. 42 miteinander bilden, berechnet werden.

Res.: $\cos\varphi = ab : \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}$.

73. In der XY-Ebene liegt eine Gerade mit der Gleichung $8x - 15y = 51$. Es soll durch sie eine Ebene gelegt werden, welche mit der XY-Ebene einen Winkel a) von 45^0, b) von 60^0, c) von γ^0 macht.

Res.: $8x - 15y + 17 \operatorname{ctg}\gamma - 51 = 0$.

§ 4. **Die gerade Linie.**

74. Die Gleichungen einer Geraden anzugeben, welche parallel der a) XY-, b) XZ-, c) YZ-Ebene ist. Wie lauten die Gleichungen, wenn die Gerade in der a) XY-, b) XZ-, c) YZ-Ebene liegt?

75. Ebenso die Gleichungen einer Geraden, welche a) die Z-, b) die Y-, c) die Z-Achse schneidet.

76. Wie lauten die Gleichungen der Geraden von Nr. 75, wenn die Gerade noch parallel a) der XY-, b) der XZ-, c) der YZ-Ebene ist?

77. Die Gleichungen irgend einer Geraden anzugeben, welche parallel a) der X-, b) der Y-, c) der Z-Achse ist.

78. Ein Würfel von der Kantenlänge a steht so, daß je eine Kante auf die $+X$-, die $+Y$- und die $+Z$-Achse fällt. Es sollen die Gleichungen der Kanten, der Flächen- und der Körperdiagonalen angegeben werden.

79. Für den Quader von Nr. 42 sollen die Gleichungen folgender geraden Linien angegeben werden:

$$\text{a) } OQ_1\,, \quad OQ_2\,, \quad OQ_3\,; \qquad \text{b) } OR\,;$$
$$\text{c) } P_1Q_1\,, \quad P_2Q_2\,, \quad P_3Q_3\,.$$

80. Die Gleichungen der Kanten des Tetraeders von Nr. 6 anzugeben.

81. Die Gleichungen der Kanten der Pyramide von Nr. 7 anzugeben.

82. Es soll die Lage der folgenden Geraden angeben werden:

$$\text{a) } \begin{cases} x = a \\ y = nz + b\,, \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x = a \\ y = 0\,, \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y = mx + b \\ z = nx\,, \end{cases} \qquad \text{d) } \begin{cases} x = pz \\ y = 0\,, \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} z = mx + c \\ z = ny + c\,, \end{cases} \qquad \text{f) } \begin{cases} z = nx \\ y = b\,, \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0\,, \end{cases} \qquad \text{h) } \begin{cases} z = my \\ y = nx\,, \end{cases} \qquad \text{i) } \begin{cases} y = x \\ z = c\,, \end{cases}$$

$$\text{k) } \begin{cases} y = x \\ z = mx\,, \end{cases} \qquad \text{l) } x = y = z\,.$$

83. Wie liegt die Gerade $y=b$, $Ax+By+Cz=0$? Wie lauten die Gleichungen ihrer Projektionen auf die Koordinatenebenen?

84. Zu untersuchen, ob die Punkte $5|-2|-3$ und $8|3|1$ auf der Geraden $3x+4y+7z+14=0$, $5x-3y-31=0$ liegen oder nicht.

85. Die Gerade von Nr. 84 soll vermittels des Prinzips der linearen Kombination durch irgend zwei andere Gleichungen dargestellt werden.

86. Die Spuren der folgenden Geraden zu finden:

$$1)\ \begin{cases} y=3x-5 \\ z=2x-8\,, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} y=4 \\ z=3x+12\,, \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 3x+4y=12 \\ 2y+3z=\ \ 6\,. \end{cases}$$

87. Die Gleichungen der Verbindungslinie des Nullpunktes mit jedem der folgenden Punkte anzugeben:

1) $3|2|6$, 2) $1|-2|+2$,

3) $-4|20|5$, 4) $-7|-6|42$.

88. Für jede der Geraden von Nr. 87 die Richtungskosinus anzugeben.

89. Die Gleichungen der Verbindungslinie für jedes folgende Punktepaar anzugeben:

1) $3|4|5$, $7|-2|9$; 2) $4|2|0$, $0|3|8$;

3) $0|0|7$, $2|1|7$; 4) $0|-3|0$, $0|4|-2$.

Res.: 1) $3x+2y=17$, $x-z=-2$;

2) $x+4y=12$, $2x+z=8$;

3) $x=2y$, $z-7=0$; 4) $2y+z=0$, $x=0$.

90. Die Spuren einer Geraden in den Koordinatenebenen seien $a_1|b_1|0$, $a_2|0|c_2$, $0|b_3|c_3$. Es soll die Gleichung der Projektion der Geraden auf jede Koordinatenebene angegeben werden. Welche Beziehung besteht zwischen den Koordinaten der drei Spuren?

91. Gegeben sind die Geraden:

$$1)\ \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = 6x + 7\,, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x = 5z - 3 \\ y = -2z + 1\,, \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 7x - 4y - 12 = 0 \\ 9z + 5y + 3 = 0\,. \end{cases}$$

Es soll die Gleichung der YZ-, bzw. XY-, bzw. XZ-Projektion der Geraden gefunden werden.

Res.: 1) $z = 3y + 22$, 2) $2x + 5y + 1 = 0$,
3) $35x + 36z - 48 = 0$.

92. Es soll untersucht werden, ob folgende Geradenpaare einen Punkt gemeinschaftlich haben oder nicht:

$$1)\ \begin{cases} y = 7x - 17 \\ z = 3x - 1\,, \end{cases} \qquad 1')\ \begin{cases} y = 4x - 11 \\ z = -10x + 25\,, \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 5y - 4x = 9 \\ 7x - 3z = 49\,, \end{cases} \qquad 2')\ \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 10x + 6z = 1\,. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 3x - 4z = 40 \\ 7y + 3z = 14\,, \end{cases} \qquad 3')\ \begin{cases} 5y + z = 18 \\ 9x + 5z = 1\,. \end{cases}$$

Res.: 1) $2|-3|5$; 3) $4|5|-7$.

93. Die Bedingung dafür zu finden, daß die geraden Linien

$$1)\begin{cases} x = a_1 + u\cos\alpha_1\,, \\ y = b_1 + u\cos\beta_1\,, \\ z = c_1 + u\cos\gamma_1\,, \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x = a_2 + v\cos\alpha_2\,, \\ y = b_2 + v\cos\beta_2\,, \\ z = c_2 + v\cos\gamma_2 \end{cases}$$

sich schneiden.

Res.: $(a_2 - a_1)(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1)$
$+ (b_2 - b_1)(\ldots) + (c_2 - c_1)(\ldots) = 0\,.$

94. Durch den Punkt $7|8|11$ wird zu jeder der Geraden von Nr. 91 die Parallele gezogen. Wie lauten ihre Gleichungen?

95. Die Gleichungen einer Geraden anzugeben, die a) durch O, b) durch Punkt $x_1|y_1|z_1$ geht und mit den Koordinatenachsen gleiche Winkel macht.

96. Die Bedingungen dafür zu finden, daß die Punkte $x_1|y_1|z_1$, $x_2|y_2|z_2$, $x_3|y_3|z_3$ in gerader Linie liegen.

97. Welches sind die Gleichungen einer Geraden, die durch den Punkt $x_1|y_1|z_1$ geht und deren Richtungskosinus a, b, c sind?

98. Die Gleichungen einer Geraden anzugeben, welche durch Punkt $x_1|y_1|z_1$ geht und mit der X-Achse einen Winkel von 45^0, mit der Z-Achse einen solchen von 60^0 bildet.

Res.: $(x - x_1)\sqrt{2} = 2(y - y_1) = \pm 2(z - z_1)\,.$

99. Dieselbe Aufgabe, wenn der eine Richtungswinkel 150^0, der andere 45^0 ist.

Res.: Keine reelle Lösung.

100. Für folgende gerade Linie die Richtungskosinus anzugeben:

$$1)\begin{cases} y = 5x - 3 \\ z = \frac{5}{4}x + 7 \end{cases}, \qquad 2)\begin{cases} x = 0{,}6z + 1 \\ y = \frac{3}{2}z - 4 \end{cases}.$$

Res.: $\frac{4}{21}\,\frac{20}{21}\,\frac{5}{21}$; $\frac{6}{19}\,\frac{15}{19}\,\frac{10}{19}$.

101. Es sollen die Winkel berechnet werden, welche folgende gerade Linien miteinander bilden:

$$L_1: \begin{cases} y = 2x - 7 \\ z = 2x + 5\,, \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 8 \\ z = 3x \end{cases},$$

$$L_3: \begin{cases} y = 6 \\ z = \frac{15}{8}x + 6\,. \end{cases}$$

Res.: $\cos(L_1 L_2) = \frac{20}{21}$, $\cos(L_2 L_3) = \frac{106}{119}$,

$$\cos(L_3 L_1) = \frac{38}{51}.$$

102. Ebenso für die Geraden von Nr. 100.

103. Für einen beweglichen Punkt P sind die Koordinaten zn der Zeit t gegeben durch die Gleichungen:

$$x = 3t - 1\,, \quad y = 5t + 2\,, \quad z = -3t + 8\,.$$

Es soll gezeigt werden, daß er sich in einer geraden Linie bewegt, deren Gleichungen in x, y und z anzugeben sind.

Res.: $5x - 3y + 11 = 0$, $x + z - 7 = 0$.

104. Die Gleichungen einer Geraden zu finden, welche durch den Punkt $x_1\,y_1\,z_1$ geht und zwei gegebene gerade Linien schneidet.

Beispiel:

$$1)\ \begin{cases} y = 3x + 5 \\ z = 2x - 3\,, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} y = 4x - 7 \\ z = 5x + 10\,. \end{cases}$$

Res.: $y = 22x + 71$, $z = 2x - 3$.

105. Die Gleichungen einer Geraden zu finden, welche zwei gegebene Gerade schneidet und parallel einer dritten gegebenen Geraden ist.

Beispiel: Die gesuchte Gerade soll 1) und 2) von Nr. 104 schneiden und parallel zu $y = 7x$, $z = 8x$ sein.

Res.: $y = 7x + 55$, $z = 8x + 72$.

§ 5. Ebene und Gerade.

106. Den Schnittpunkt der Geraden $y = -2x + 9$, $z = 9x - 43$ mit der Ebene $3x - 4y + 7z - 33 = 0$ zu bestimmen.

Res.: $5|-1|2$.

107. Wie ist n, bzw. n und c zu wählen, damit die durch die Gleichungen $y = -8x - 3$, $z = nx + c$ dargestellte Gerade a) parallel der Ebene von Nr. 106 ist, b) ganz in sie hineinfällt?

108. Gib die Gleichungen des Lotes an, das von dem Punkt $1|2|3$ auf die Ebene

$$\text{a) } 4x - 5y - 8z + 21 = 0,$$

$$\text{b) } 3x + 11y = 0, \quad \text{c) } z = 8$$

gefällt wird.

Res.: a) $\begin{cases} 5x + 4y = 13 \\ 2x + z = 5, \end{cases}$ b) $\begin{cases} 11x - 3y = 5 \\ z = 3, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$

109. Die Gleichungen des Lotes von O auf die Ebene $P_1 P_2 P_3$ von Nr. 42 zu finden.

110. Die Gleichungen der Höhen des Tetraeders von Nr. 6 zu bestimmen.

111. Ebenso diejenigen der Höhen der Pyramide von Nr. 7 zu finden.

112. Die Gleichung der Ebene anzugeben, die senkrecht zu der Geraden $x = pz + q$, $y = rz + s$ ist und durch den Punkt $x_1 y_1 | z_1$ geht.

Res.: $p(x - x_1) + r(y - y_1) + z - z_1 = 0$.

113. Den Winkel φ zwischen der Geraden $3x - 2y = 24$, $3x - z = -4$ und der Ebene $6x + 15y - 10z + 31 = 0$ zu bestimmen.

Res.: $\sin\varphi = 3 : 133$.

114. Die Lage der Geraden $y = 3x + 5$, $z = 7x - 4$ gegen die Ebenen a) $3x + 7y - 4z + 12 = 0$, b) $11x + y - 2z + 31 = 0$, c) $11x + y - 2z - 13 = 0$ zu ermitteln.

Res.: a) Schnittpunkt $\frac{63}{4} \Big| \frac{209}{4} \Big| \frac{425}{4}$, Neigungswinkel $4^0\,40'$; b) die Gerade ist parallel, c) sie liegt in der Ebene.

115. Es sollen die Gleichungen der Ebenen angegeben werden, welche durch diejenigen Geradenpaare von Nr. 92 gehen, welche sich schneiden.

Res.: 1) $82x - 13y + 3z = 218$;

3) $72x + 595y + 159z = 2150$.

116. Durch die Punkte $x_1 y_1 | z_1$, $x_2 y_2 | z_2$ sind zwei parallele Linien gezogen, deren Richtungskosinus a, b, c sind. Es soll die Gleichung der durch die Geraden gelegten Ebene gefunden werden.

Res.: $(x - x_1)[b(z_1 - z_2) - c(y_1 - y_2)] +$ usw.

117. Die Gleichung einer Ebene anzugeben, welche durch die Gerade $y = m x + b$, $z = n x + c$ und eine zu ihr parallele Gerade geht.

Res.: $\dfrac{y - m x - b}{z - n x - c} = \dfrac{b - b_1}{c - c_1}$.

118. Die Gleichung einer Ebene anzugeben, welche durch die erste Gerade von Nr. 117 geht und parallel der Geraden $y = m_1 x + b_1$, $z = n_1 x + c_1$ ist.

Res.: $(m n_1 - m_1 n) x + (n - n_1) y - (m - m_1) z$
$= b_1 (n - n_1) - c_1 (m - m_1)$.

119. Gesucht die Gleichung einer Ebene, die durch den Punkt $x_1 | y_1 | z_1$ geht und parallel zu den beiden Geraden von Nr. 118 ist.

Res.: $(m n_1 - m_1 n)(x - x_1) + (n - n_1)(y - y_1)$
$- (m - m_1)(z - z_1) = 0$.

120. Die Bedingung zu finden, unter der die drei geraden, durch O gehenden Linien, deren Richtungskosinus $a | b | c$, $a_1 | b_1 | c_1$, $a_2 | b_2 | c_2$ sind, in einer Ebene liegen.

Res.: $(a b_1 - a_1 b)(a c_2 - a_2 c)$
$= (a b_2 - a_2 c)(a c_1 - a_1 c)$.

121. Die Bedingung dafür zu finden, daß drei durch O gehende Ebenen eine Gerade gemeinschaftlich haben.

122. Durch die XZ-Spur der Ebene $A x + B y + C z + D = 0$ eine Ebene zu legen, welche senkrecht zu der Ebene ist.

Res.: $A x + \lambda y + C z + D = 0$, wobei
$\lambda = -(A^2 + C^2) : B$ ist.

123. Durch die Schnittlinie der Ebenen von Nr. 59 eine Ebene zu legen, welche a) parallel der Z-Achse ist, b) von O den Abstand p hat, c) die Strecke zwischen zwei gegebenen Punkten im Verhältnis $k:1$ teilt.

Res.: $E + \lambda E_1 = 0$; λ folgt aus

$$\text{a)}\quad C + \lambda C_1 = 0\,,$$

$$\text{b)}\quad p = (D + \lambda D_1) : \sqrt{(A + \lambda A_1)^2 + (B + \lambda B_1)^2 + (C + \lambda C_1)^2}\,,$$

$$\text{c)}\quad (A + \lambda A_1)\frac{x_1 + k x_2}{1 + k} + (B + \lambda B_1)\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + k} + \ldots$$
$$+ D + \lambda D_1 = 0\,.$$

§ 6. Ebenenkoordinaten.

124. Die Koordinaten eines Punktes anzugeben, dessen Gleichung ist:

$$\text{a)}\quad 5u + 7v + 12w + 2 = 0\,,$$

$$\text{b)}\quad 6u - 7v - 3 = 0\,,$$

$$\text{c)}\quad \frac{u}{a} + \frac{v}{b} + \frac{w}{c} + 1 = 0\,,$$

$$\text{d)}\quad 0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w + 1 = 0\,,$$

e) $au + bw + cw = 0$, f) $3u + 1 = 0$,

g) $2v - 3 = 0$, h) $wz + 1 = 0$,

i) $x_1 u + y_1 v + 1 = 0$, k) $au + cw + k = 0$.

125. Die Normalgleichung (—Absolutglied + 1 —) eines Punktes anzugeben, dessen Koordinaten sind:

a) $3|4|6$, b) $-2|0|4$, c) $0|0|3$, d) $4|-5|\infty$,

e) $0|0|0$.

126. Welches sind die Koordinaten einer Ebene, welche durch die drei Punkte geht, die durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$1)\quad \begin{cases} u + 5v + 4w = 23\,, \\ 10u + v + 2w = 18\,, \\ 5u + 8v + 3w = 30\,; \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} u - v + 2w = 16\,, \\ 2u + 2v + 0{,}25w = 9\,, \\ 0{,}5u - 3v + 2w = 17\,. \end{cases}$$

Res.: 1) $1|2|3$, 2) $6|-2|4$.

127. Zu untersuchen, ob die Ebenen, deren Achsenabschnitte a) $\frac{13}{7}\Big|-\frac{13}{4}\Big|\frac{13}{2}$, b) $2|3|-5$, c) $-\frac{7}{6}\Big|\frac{7}{5}\Big|\infty$ sind, durch den Punkt gehen, dessen Gleichung ist: $3u + 5v + 6w + 1 = 0$.

128. Gegeben sind drei Punkte $x_1|y_1|z_1$ usf. Es soll die Gleichung des Schwerpunktes des von ihnen gebildeten Dreiecks angegeben werden.

Res.: $u(x_1 + x_2 + x_3) + v(y_1 + y_2 + y_3)$
$+ w(z_1 + z_2 + z_3) + 3 = 0$.

129. Gegeben sind vier Punkte durch ihre Gleichungen $x_1 u + y_1 v + z_1 w + 1 = 0$ usf. Es soll die Bedingung dafür, daß sie in einer Ebene liegen, angegeben werden.

$$\text{Res.:}\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

130. Gegeben sind vier Punkte durch ihre Gleichungen in Normalform: $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 0$. Es soll untersucht werden, was

1) $A_1 + A_2 = 0$, 2) $A_1 + A_2 + A_3 = 0$,

3) $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$, 4) $A_1 + \lambda A_2 = 0$

bedeutet?

131. Es soll bewiesen werden:

a) daß die drei Schwerlinien eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden;

b) daß die drei Verbindungslinien der Halbierungspunkte von je zwei Gegenkanten eines Tetraeders sich in einem Punkt schneiden;

c) daß die vier Verbindungslinien je einer Tetraederecke mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Dreiecksfläche sich in einem Punkt schneiden.

§ 7. Geradlinige und ebene Örter.

132. Den Ort eines Punktes zu finden, der von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände hat.

Res.: $$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + 2(z_1 - z_2)z = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 .$$

133. Den Ort eines Punktes zu finden, der in der a) XY-, b) YZ-, c) ZX-Ebene liegt und von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände hat.

134. Den Ort eines Punktes zu finden, der von drei gegebenen Punkten gleiche Abstände hat.

135. Den Ort eines Punktes zu finden, der a) von zwei, b) von drei gegebenen Ebenen gleiche Abstände hat.

136. Den Ort eines Punktes zu finden, der

a) von der XY- und XZ-Ebene,
b) „ „ XY-, XZ- und YZ-Ebene,
c) „ „ X- und Y-Achse,
d) „ „ X-, der Y- und der Z-Achse

gleiche Abstände hat.

137. Den Ort eines Punktes zu finden, der

a) von zwei gegebenen Ebenen,
b) „ drei „ „
c) „ n „ „

Abstände hat, die eine gegebene Summe haben.

138. Den Ort eines Punktes zu finden, für welchen die Differenz der Quadrate seiner Abstände von zwei gegebenen Punkten die gegebene Größe d^2 hat.

Res.: $$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 \pm d^2 = 0 .$$

Untersuche die Lage dieser Ebene gegen die Verbindungslinie der beiden Punkte.

139. Gegeben eine durch O gehende Ebene $Ax + By + Cz = 0$. Es soll der Ort eines Punktes gefunden werden, der sich so bewegt, daß seine Abstände von dieser Ebene und von der XY-Ebene sich wie $k:1$ verhalten.

Res.: $$Ax + By + \left(C \mp k\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\right)z = 0 .$$

140. Ein Punkt bewegt sich so, daß seine Koordinaten sich vermittels der veränderlichen Hilfsgrößen u und v berechnen lassen aus $x = a_1 u + b_1 v$, $y = a_2 u + b_2 v$, $z = a_3 u + b_3 v$. Welchen Ort beschreibt er?

Res.: $$x(a_2 b_3 - a_3 b_2) + y(a_3 b_1 - a_1 b_3) + z(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 .$$

141. Durch O gehen drei gerade Linien

$$1)\ \begin{cases} y = m_1 x \\ z = n_1 x \end{cases}, \quad 2)\ \begin{cases} y = m_2 x \\ z = n_2 x \end{cases}, \quad 3)\ \begin{cases} y = m_3 x \\ z = n_3 x \end{cases}.$$

Sie werden durch eine bewegliche, zu der YZ-Ebene parallele Ebene in den Punkten P_1, P_2, P_3 geschnitten, durch P_1, P_2, P_3 wird je eine Ebene senkrecht zu der zugehörigen Geraden gelegt. Es soll der Ort des Schnittpunktes dieser Ebenen gefunden werden.

Res.: $$\frac{x + m_1 y + n_1 z}{1 + m_1^2 + n_1^2} = \frac{x + m_2 y + n_2 z}{1 + m_2^2 + n_2^2} = \frac{x + m_3 y + n_3 z}{1 + m_3^2 + n_3^2}.$$

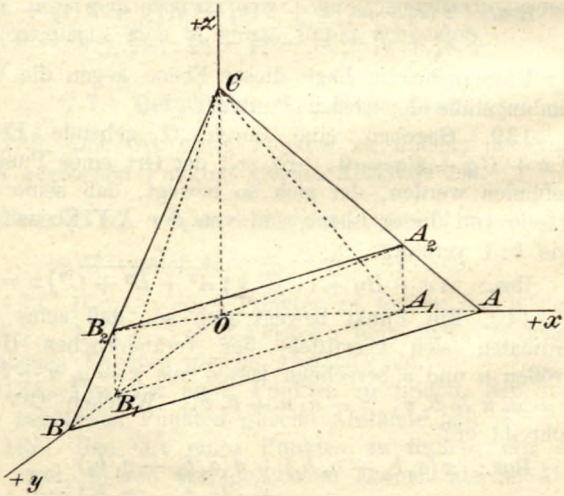

Fig. 2.

142. Eine feste Ebene schneidet die Koordinatenachsen in $A_1 B_1 C$. Durch C wird eine Ebene so gelegt, daß ihre XY-Spur $A_1 B_1$ parallel der AB ist. Durch $A_1 B_1$ wird eine zur Z-Achse parallele Ebene gelegt, welche die Ebene ABC in $A_2 B_2$ schneidet. Durch $A_2 B_2$ und O wird abermals eine Ebene gelegt. Welches ist der Ort der Schnittlinie der Ebenen $A_1 B_1 C$ und $O A_2 B_2$?

Res.: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{\frac{c}{2}} = 1$.

II. Abschnitt.

Krumme Flächen (Herleitung der Gleichung aus ihrem Entstehungsgesetz).

§ 8. Die Kugel.

143. Für die durch folgende Gleichungen gegebenen Kugelflächen die Mittelpunktskoordinaten und den Halbmesser anzugeben:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y + 20 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}x - 8y + 2z + 10\frac{1}{9} = 0$;

c) $4(x^2 + y^2 + z^2) + 4ax - 8by - 4(a+b)z$
$+ a^2 + 4b^2 = 0$.

Res.: a) $2 \mid -5 \mid 0$, 3; b) $\frac{1}{3} \mid 4 \mid -1$;

c) $-\frac{a}{2} \mid b \mid \frac{a+b}{2}$; d) $\frac{a+b}{2}$.

144/145. Welches ist die Bedingung dafür, daß die Kugeln

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

konzentrisch sind?

146. Wie lauten die Gleichungen der Berührungsebenen, die in den beiden Punkten, welche sich auf

die XY-Ebene in den Punkt 6 15 projizieren, an die um O mit Halbmesser 19 beschriebene Kugel gelegt werden?

Res.: $6x + 15y \pm 10z - 19^2 = 0$.

147. Wie lautet die Gleichung einer Berührungsebene, welche man an die um O mit r beschriebene Kugel parallel zu der Ebene

a) $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$,

b) $Ax + By + Cz + D = 0$

legt?

148. Durch die Gerade $y = mx + b$, $z = nx + c$ eine Berührungsebene an die Kugel um O mit r zu legen.

Res.: $y - mx - b - \lambda(z - nx - c) = 0$,

wobei

$$\lambda = [mnr^2 - bc$$
$$\pm \sqrt{(mnr^2 - bc)^2 - (n^2r^2 + r^2 - c^2)(r^2[m^2 + 1] - b^2)}]$$
$$: (n^2r^2 + r^2 - c^2).$$

149. Wie muß der Wert von λ gewählt werden, damit der Punkt, welcher die Strecke zwischen den Punkten P_1 und P_2 im Verhältnis $\lambda : 1$ teilt, auf die um O mit r beschriebene Kugel fällt?

150. Die Gleichung einer Kugel anzugeben, welche die XY-Ebene in einem Kreis um O vom Halbmesser 7 schneidet und durch den Punkt 8 15 10 geht.

Res.: $x^2 + y^2 + (z - 17)^2 = 338$.

151. Um den Punkt 5 4 der XY-Ebene ist ein Kreis vom Halbmesser 6 beschrieben. Es soll die

Gleichung einer Kugelfläche gefunden werden, welche durch diese Kreislinie geht und die Ebene $3x + 2y + 6z - 1 = 0$ berührt.

Res.: $5|4|8$, $r = 10$.

152. Es soll die Gleichung einer Kugelfläche gefunden werden, welche durch die Punkte $0|0|0$, $0|2|14$, $3|5|0$, $1|2|7$ geht.

Res.: $(x + 66)^2 + (y - 43)^2 + (z - 1)^2 = 6206$.

153. Es soll die Gleichung der XY-Projektion des Kreises gefunden werden, in welchem die Ebene $2y - z = 0$, die Kugel $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 6^2$ schneidet. Es soll auch der Mittelpunkt des Kreises angegeben werden.

Res.: $(x - 1)^2 + 5\left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{116}{5}$.

154. Zwei Kugeln K_1 und K_2 mit den Mittelpunkten $a_1|b_1|c_1$, $a_2|b_2|c_2$ und den Halbmessern r_1 und r_2 sind gegeben. Welche Bedingungen müssen stattfinden,

a) wenn K_1 und K_2 sich in reeller Linie schneiden,
b) wenn sie sich von außen,
c) wenn sie sich von innen berühren sollen,
d) wenn K_2 völlig außerhalb K_1 und umgekehrt,
e) wenn K_2 völlig innerhalb K_1 liegen soll, ohne daß sie sich treffen?

155. Zu untersuchen, ob die durch die beiden folgenden Gleichungen dargestellten Kugeln sich berühren

und ob die Berührung von außen oder von innen erfolgt, sowie den Berührungspunkt anzugeben.

$$\text{a)}\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-10x-14y-2z+66=0\,, \\ x^2+y^2+z^2-22x-20y-14z+234=0\,; \end{cases}$$

$$\text{b)}\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-10x-14y-2z-6=0\,, \\ x^2+y^2+z^2-14x-16y-6z+86=0\,; \end{cases}$$

$$\text{c)}\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0\,, \\ x^2+y^2+z^2-14x-10y-12z+85=0\,. \end{cases}$$

a) Berührung von außen, 7|8|3; b) von innen, 11|10|7; c) K_1 außerhalb K_2 und umgekehrt.

156. Die Gleichung einer Kugel anzugeben, welche um $x_1|y_1|z_1$ so beschrieben wird, daß sie die Kugel um O mit Halbmesser r berührt.

Res.: $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$
$$=\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\mp r\right)^2.$$

157. An die Kugel um O mit r im Punkt $x_1|y_1|z_1$ eine Berührungskugel vom Halbmesser r_1 zu legen.

Res.: $\lambda x_1|\lambda y_1|\lambda z_1$, wobei $\lambda=(r\pm r_1):r$.

158. Welches ist die Potenz π des Punktes $x|y|z$ in Beziehung auf die Kugel 1) um $x_1|y_1|z_1$ mit r, 2) um O mit r und welches ist 3) die Potenz des Nullpunktes in bezug auf die Kugel um Punkt $x_1|y_1|z_1$ mit Halbmesser r?

159. Zu beweisen:

a) Der Ort der Punkte gleicher Potenz in Beziehung auf zwei Kugeln ist eine zu der Verbindungslinie der Mittelpunkte senkrechte Ebene, die Potenzebene;

b) die Potenzebenen, die zwischen je zwei von drei Kugeln möglich sind, schneiden sich in einer zu der Ebene der drei Mittelpunkte senkrechten Ebene;

c) von den $\binom{4}{2}$ = sechs Potenzebenen zwischen je zwei von vier Kugeln schneiden sich $\binom{4}{3}$ = viermal je drei in einer Potenzlinie, und diese vier Potenzlinien und daher auch die sechs Potenzebenen gehen durch einen Punkt.

160. Die Bedingungen dafür anzugeben, daß sich zwei Kugeln rechtwinklig schneiden (d. h. daß die beiden Berührungsebenen in irgend einem Punkt der Schnittlinie der Kugeln senkrecht aufeinander stehen).

Res.: $e^2 = r^2 + r_1^2$ (e Zentrale).

161. Die Gleichung der Kugel zu finden, welche vier gegebene Kugeln rechtwinklig schneidet.

162. Die Gleichung der Berührungsebene im Punkt $x_1 | y_1 | z_1$ an die um Punkt $a|b|c$ mit r beschriebene Kugel herzuleiten.

163. Die Koordinaten der Ähnlichkeitspunkte zweier Kugeln zu bestimmen.

164. Zu beweisen: Von den sechs Ähnlichkeitspunkten dreier Kugeln liegen viermal je drei in einer Geraden (Ähnlichkeitsachse), nämlich die drei äußeren und je ein äußerer und die beiden nicht zugehörigen inneren.

165. Von den zwölf Ähnlichkeitspunkten von vier Kugeln liegen zwölfmal je sechs in einer Ebene. Vier von diesen Ebenen gehen durch je drei von den vier Mittelpunkten. Sind A_{rs} ein äußerer und I_{rs} ein innerer Ähnlichkeitspunkt, so sind die übrigen acht

Ähnlichkeitsebenen dargestellt durch folgende Gruppen von Ähnlichkeitspunkten:

1) $A_{12}\,A_{13}\,A_{23}\,A_{14}\,A_{24}\,A_{34}$; 5) $A_{23}\,A_{24}\,A_{34}\,I_{12}\,I_{13}\,I_{14}$;

2) $A_{12}\,A_{13}\,A_{23}\;\;I_{14}\;\;I_{24}\;\;I_{34}$; 6) $A_{12}\,A_{34}\;\;I_{13}\,I_{23}\,I_{14}\,I_{24}$;

3) $A_{12}\,A_{14}\,A_{24}\;\;I_{13}\;\;I_{23}\;\;I_{34}$; 7) $A_{13}\,A_{24}\;\;I_{12}\,I_{23}\,I_{14}\,I_{34}$;

4) $A_{13}\,A_{14}\,A_{34}\;\;I_{12}\;\;I_{23}\;\;I_{24}$; 8) $A_{14}\,A_{23}\;\;I_{12}\,I_{13}\,I_{24}\,I_{34}$.

166. Die Koordinaten des Pols der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ in Beziehung auf die um O mit r beschriebene Kugel zu finden. Was ist der Fall 1) wenn $D = 0$, 2) $A = 0$ ist?

Res.: $-Ar^2 : D$, $-Br^2 : D$, $-Cr^2 : D$.

167. Gegeben ist die Ebene $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ und die Abszisse x_1 eines Punktes P. Es soll der Halbmesser einer Kugel um O gefunden werden, für welche P_1 Pol der gegebenen Ebene ist.

Res.: $r^2 = x_1 p : \cos\alpha$.

168. Es soll bewiesen werden, daß die Polarebenen von vier harmonischen Punkten ein harmonisches Büschel bilden und umgekehrt.

169. Die Gleichung der Kugel in Ebenenkoordinaten zu finden.

170. Durch die Schnittlinie der Kugeln, welche um die Punkte $a|b|c$ und $a_1\,b_1\,c_1$ mit den Halbmessern r und r_1 beschrieben werden, soll eine Kugel gelegt werden, welche

a) die XY-Ebene berührt,
b) durch O geht,
c) die X-Achse berührt.

Res.: $K + \lambda K_1 = 0$, wobei für a) sich λ bestimmt aus

$$\lambda^2(c_1^2 - r_1^2) + \lambda[(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + c^2 + c_1^2 - r^2 - r_1^2] - r^2 + c^2 = 0 .$$

171. Gegeben die Kugel um O mit dem Halbmesser $r = 6$ und die Ebene 1) $2x + 3y + 4z = 24$. Es soll die Gleichung, sowie Mittelpunkt und Halbmesser einer Kugel gefunden werden, welche durch den Schnittkreis der Kugel mit der Ebene und

a) durch O,

b) durch Punkt $3|6|9$ geht,

c) auf der X-Achse ein Stück von der Länge 10, von O ausgemessen, abschneidet.

Res.: a) $\frac{3}{2}\left|\frac{9}{4}\right|3$, $\frac{3\sqrt{35}}{2}$; b) $\frac{5}{6}\left|\frac{15}{4}\right|5$, $\frac{1}{4}\sqrt{341}$;

c) $-16 \mid -24 \mid -32$.

§ 9. Die Kugel als geometrischer Ort.

172. Durch O werden gerade Linien gezogen und zu jeder wird durch den festen Punkt $x_1 y_1 z_1$ die senkrechte Ebene gelegt. Welches ist der Ort des Schnittpunktes jeder Geraden mit der zugehörigen Ebene?

173. Gegeben ist eine Kugel K um O mit dem Halbmesser r. Ein Punkt P bewegt sich so, daß

a) die von ihm an K gelegten Tangenten die Länge c haben,

b) die Berührungslinie des von P an K gelegten Berührungskegels den Halbmesser r_1 hat.

Welches ist der Ort von P?

174. Eine Kugel vom Halbmesser r berührt die YZ-Ebene in O, ihr Mittelpunkt liegt auf der $+X$-Achse. Durch O werden Sehnen OP_1, OP_2 ... gezogen und

a) von O aus im Verhältnis $\lambda : 1$ geteilt,

b) über P_1, P_2 ... hinaus,

c) über O hinaus

um das λfache verlängert. Gesucht der Ort des Teilpunktes bzw. des Endpunktes der Verlängerung.

175. Gegeben ist eine Kugel um O vom Halbmesser r und ein fester Punkt P_1. Dieser wird mit dem auf der Kugel wandernden Punkt P verbunden, PP_1 wird durch Q im Verhältnis $\lambda : 1$ geteilt. Gesucht der Ort von Q.

176. Die Punkte einer Kugel um $a|b|c$ mit dem Halbmesser r werden in der durch die Richtungswinkel $\alpha|\beta|\gamma$ gegebenen Richtung um die Strecke s verschoben. Welches ist die Gleichung des Ortes für die erhaltenen Punkte?

Res.: $(x - a - s\cos\alpha)^2 + \ldots + \ldots - r^2 = 0$.

177. Auf der X-Achse sind die Punkte P_1 und P_2 mit den Abszissen $+a$ und $-a$ gegeben. Ein Punkt P bewegt sich so, daß $P_1P : P_2P = \lambda : 1$ ist. Der Ort von P ist zu suchen. (Besonderer Fall: $\lambda = 1$.)

Res.: $$(1 - \lambda^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2ax(1 + \lambda^2) + a^2(1 - \lambda^2) = 0 .$$

178. Es ist eine Kugel um O vom Halbmesser r und eine zweite um Punkt M auf der $+X$-Achse ($OM = a$) mit dem Halbmesser r_1 beschrieben. Es soll der Ort des Mittelpunktes einer Kugel gefunden

werden, welche beide Kugeln nach größten Kreisen schneidet.

Res.: $x = (a^2 + r_1^2 - r^2)$.

179. Welches ist der Ort eines Punktes, dessen Potenz in Beziehung auf die um $x_1 | y_1 z_1$ beschriebene Kugel von der Größe π ist?

180. Den Ort des Mittelpunktes einer Kugel zu finden, welche

a) zwei,

b) drei gegebene Kugeln rechtwinklig schneidet.

181. Den Ort eines Punktes zu finden, der sich so bewegt, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von n gegebenen Punkten gleich c^2 ist.

182. Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2 $(OP_1 = OP_2 = a)$. Ein Punkt P bewegt sich so, daß $P_1P^2 + \lambda P_2P^2 = c^2$. Gesucht ist der Ort von P. Was ist der Fall, wenn $\lambda = 1$ und $c = 2a$ ist?

Res.: $$(1 + \lambda)(x^2 + y^2 + z^2) - 2a(1 - \lambda)x = c^2 - a^2(1 + \lambda).$$

183. Um O ist eine Kugel vom Halbmesser r, um den Punkt M der $+X$-Achse $(OM = a)$ ist eine zweite vom Halbmesser r_1 beschrieben. Gesucht der Ort für einen Punkt, der so liegt, daß die beiden von ihm an jede der Kugeln gelegten Berührungskegel gleichen erzeugenden Winkel haben.

Res.: $r^2[(x - a)^2 + y^2 + z^2] = r_1^2(x^2 + y^2 + z^2)$.

184. Es ist eine Kugel um O mit r und auf der $+Z$-Achse Punkt P_1 $(OP_1 = c)$ gegeben. Es soll der Ort für einen Punkt P gefunden werden, der sich so bewegt, daß der Unterschied zwischen dem Quadrat

der von ihm an die Kugel gezogenen Tangente und PP_1^2 unveränderlich gleich c^2 ist. — Welcher Ort ergibt sich, wenn man P_1 durch eine Kugel um P_1 und PP_1 durch die Länge der von P an diese Kugel gezogenen Tangente ersetzt?

185. Auf der $+Z$-Achse liegt im Abstand $2c$ von O der Punkt P_1. Von P_1 wird nach irgend einen Punkt P' der XY-Ebene P_1P' gezogen und darauf P so bestimmt, daß

$$P_1P \cdot P_1P' = 4c^2$$

ist. Es ist der Ort von P zu suchen.

Res.: $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = 4c^2$?

186. Vom Nullpunkt O ist nach dem Punkt P_1, der auf einer um den Punkt $x_1 y_1 z_1$ mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugel wandert, der Strahl OP_1 gezogen und darauf P so bestimmt, daß $OP \cdot OP_1 = c^2$ ist. Es soll der Ort von P ermittelt und für den Fall, daß die Kugel durch O geht, untersucht werden.

Res.: $(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2)(x^2 + y^2 + z^2)$
$- 2c^2(x_1 x + y_1 y + z_1 z) + c^4 = 0$.

187. Ein Punkt wandert auf der Geraden $x = a$, $y = b$. Um welche Gerade dreht sich seine Polarebene?

Res.: Um $ax + by - r^2 = 0$, $z = 0$.

188. Eine Ebene dreht sich um die Gerade $y = mx + p$, $z = nx + q$. Auf welcher Geraden wandert ihr Pol? Was ist der Fall, wenn

1) $p = q = 0$,
2) $m = n = 0$?

Res.: Auf der Geraden $p y + q z - r^2 = 0$,
$x + m y + n z = 0$.

189. Ein Punkt wandert auf der Geraden $y = m x + p$, $z = n x + q$. Um welche Gerade dreht sich seine Polarebene?

190. Es soll gezeigt werden, daß die konjugierten Geraden von Nr. 188 senkrecht aufeinander stehen.

191. Eine um O mit r beschriebene Kugel schneidet die $+X$-Achse in S, die $-X$-Achse in S_1. Von S_1 wird nach dem auf der Kugel wandernden Punkt P' eine Sehne gezogen, sie wird über P' hinaus um sich selbst verlängert bis P''; sodann wird OP'' und SP' gezogen. Welches ist der Ort für den Schnittpunkt Q dieser beiden Geraden?

Res.: $\left(x - \frac{r}{3}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{4 r^2}{3}$.

192. Eine um O mit r beschriebene Kugel schneidet die $-X$-Achse in S_1. OS_1 ist über S_1 hinaus verlängert um $S_1 S_2 = 2\, O S_1$; der Kugelhalbmesser OP ist über P hinaus um sich selbst bis P' verlängert. Welches ist der Ort des Schnittpunktes Q der $S_1 P$ und der $S_2 P'$?

Res.: $(x - 3r)^2 + y^2 + z^2 = 16 r^2$.

193. Ein Punkt bewegt sich auf dem Kreis $y^2 + z^2 = \varrho^2$, $x = a$. Welche Fläche umhüllt seine Polarebene in bezug auf die um O mit r beschriebene Kugel?

Res.: $(r^2 - a x)^2 = \varrho^2 (y^2 + z^2)$ (Kegelfläche).

194. Dieselbe Aufgabe wie Nr. 193 für die Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$, $z = c$.

Res.: $a^2 (x^2 - y^2) - (c z - r^2)^2 = 0$.

§ 10. Zylinderflächen.

195. Der Mittelpunkt eines in der YZ-Ebene liegenden Kreises, der die Y-Achse in O berührt, liegt auf der $+Z$-Achse, sein Halbmesser ist r. Er ist Leitlinie einer Zylinderfläche, deren Mantellinien

a) parallel zu der XZ-Ebene und gegen die XY-Ebene unter dem Winkel α geneigt ($n = \operatorname{tg}\alpha$),

b) parallel zu der Geraden $x = pz$, $y = qz$ sind. Zu suchen ist die Gleichung der Fläche.

Res.: a) $y^2 + (z - nx)^2 - 2r(z - nx) = 0$;

b) $(py - qx)^2 + (x - pz)^2 + 2pr(x - pz) = 0$.

196. In der XY-Ebene ist um O ein Kreis vom Halbmesser r beschrieben. Es soll die Gleichung einer Zylinderfläche gefunden werden, für welche dieser Kreis Leitlinie ist und deren Mantellinien

a) parallel der Halbierungslinie des Winkels zwischen der $+X$- und der $+Z$-Achse,

b) parallel zu der Geraden $z = 3x + 5$, $z = 4y - 2$ sind.

Res.: a) $(x - z)^2 + y^2 = r^2$,

b) $16(z - 3x)^2 + 9(z - 4y)^2 = 144r^2$.

197. An eine um O mit r beschriebene Kugel soll ein Berührungszylinder gelegt werden, dessen Mantellinien parallel sind

a) zu der Halbierungslinie des Winkels zwischen der $+X$- und der $+Z$-Achse,

b) zu einer Geraden, die mit den Koordinatenachsen gleiche Winkel macht,

c) zu der Geraden $y = mx$, $z = nx$.

Res.: a) $2y^2 + (z - r)^2 = 2r^2$,

c) $(1 + n^2)(y - mx)^2 + (1 + m^2)(z - nx)^2$
$- 2mn(y - mx)(z - nx) = r^2(1 + m^2 + n^2)$.

198. Die Gleichung einer Zylinderfläche zu finden, deren Leitlinie der um Punkt $x_1 y_1$ in der XY-Ebene mit Halbmesser r beschriebene Kreis ist und deren Mantellinien die Richtungswinkel α, β, γ haben.

Res.: $[(x - x_1)\cos\gamma - z\cos\alpha]^2$
$+ [(y - y_1)\cos\gamma - z\cos\gamma]^2 = r^2\cos^2\gamma$.

199. Die Achsen ($2a$ und $2b$) einer Ellipse liegen auf der X- bzw. der Y-Achse; sie ist Leitlinie einer Zylinderfläche, deren Mantellinien die Richtungskosinus α, β, γ haben. Es soll die Gleichung der Fläche gefunden werden.

Res.: $b^2(\gamma x - \alpha z)^2 + a^2(\gamma y - \beta z)^2 = a^2 b^2$.

200. Eine Parabel, deren Achse die Richtung der negativen Y-Achse, deren Scheitel die Koordinaten abc hat, deren Parameter $2p$, und deren Ebene parallel zu der XY-Ebene ist, ist Leitlinie einer Zylinderfläche, deren Mantellinien parallel zu der Geraden $x = mz$, $y = nz$ sind. Wie lautet die Gleichung dieser Fläche?

Res.: $[x - a - m(z - c)]^2 = -2p[y - b - n(z - c)]$.

201. Durch die X-Achse ist eine Ebene gelegt, welche den Winkel zwischen der $+Y$- und der $+Z$-Achse halbiert. In ihr ist um O mit Halbmesser r ein Kreis beschrieben; er ist Leitkreis einer Zylinderfläche, deren Mantellinien parallel zu der Geraden $x = mz$, $y = nz$ sind. Gesucht ist die Gleichung der Fläche.

Res.: $(y - nz)(m^2 + 2) - 2m(n - 1)(x - mz)$
$\cdot (y - nz) + (x - mz)^2 (n - 1)^2 = r^2 (1 - n)^2$.

202. Welche Gleichung ergibt sich für die Zylinderfläche in Nr. 201, wenn

a) die Mantellinien parallel der Z-Achse sind,

b) die Kreisebene unter dem Winkel α gegen die XY-Ebene geneigt ist?

203. Eine Gerade schneidet auf der $+X$-Achse das Stück p, auf der $+Y$-Achse das Stück q ab.

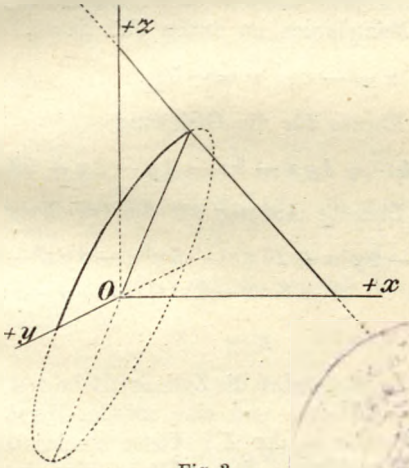

Fig. 3.

Eine Ellipse, deren Mittelpunkt in O liegt und deren unveränderliche Achse $2b$ auf der Y-Achse liegt, dreht sich um diese Koordinatenachse so, daß sie die Gerade beständig schneidet. Es soll

a) die Gleichung der erzeugten Fläche gefunden und b) die XY-Spur derselben als Leitlinie einer Zylinderfläche betrachtet werden, deren Mantellinien parallel zu der gegebenen Geraden sind. Was zeigt sich?

Res.: $\dfrac{(qx+pz)^2}{p^2q^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

204. Es soll untersucht werden, ob die Gleichung

$$9x^2-4y^2-91z^2+18xz-40yz-36=0$$

eine Zylinderfläche darstellt oder nicht und welche Richtung die Mantellinien im ersten Fall haben.

Res.: $x=-z$, $y=-5z$.

205. Ebenso für die Gleichung

$$y^2+4z^2+4yz-5x-4y-8z+39=0.$$

206. Dieselbe Aufgabe für die Gleichung

$$x^3-8y^3-9x^2z+27xz^2-6y^2z-6yz^2-29z^3-x^2 \\ +6xz-9z^2+3x+y-8z-5=0.$$

Res.: $x=3z$, $y=-z$.

207. Es ist gegeben die Zylinderfläche von Nr. 195 a, wobei $\alpha=45^0$ ist, und eine zweite, deren Leitlinie ein um O mit r in der XY-Ebene beschriebener Kreis ist; die Mantellinien dieser Fläche sind parallel zur Z-Achse. Es soll bewiesen werden, daß die Schnittlinie beider Zylinderflächen in zwei ebene Kurven zerfällt, wovon die eine eine Ellipse und die zweite ein Kreis ist, der parallel und kongruent mit dem Leitkreis der zweiten Zylinderfläche ist.

208. Gib die Gleichungen der beiden gemeinschaftlichen Berührungsebenen der Zylinderflächen von Nr. 207 an.

Res.: $y = \pm r$.

209. Berechne die Gleichung der Berührungsebene an die Zylinderfläche von Nr. 195a (mit $n = 1$) in dem zu $x = -\frac{r}{2}$, $z = 0$ auf der Seite der $+Y$-Achse liegenden Punkt.

Res.: $x + y\sqrt{3} - z - r = 0$.

210. Es soll bewiesen werden, daß

$$f(ax - y,\quad y - bz,\quad ax - bz) = 0$$

eine Zylinderfläche darstellt.

211. Durch einen festen Punkt $a|b|c$ wird eine bewegliche Gerade gezogen, welche die Koordinatenebenen in den Punkten P_1, P_2, P_3 schneidet. Es soll bewiesen werden, daß der Ort des Punktes P, der $P_1 P_2$ im Verhältnis $\lambda_1 : 1$ und zugleich $P_2 P_3$ im Verhältnis $\lambda_2 : 1$ teilt, Schnitt zweier hyperbolischer Zylinderflächen ist.

Res.: $(\lambda_1 + 1)xy - \lambda_1 ay - bx = 0$,

$(\lambda_2 + 1)yz - \lambda_2 cy - bz = 0$.

§ 11. Kegelflächen.

212. In der XY-Ebene liegt eine Parabel mit der Achse auf der $+X$-Achse und dem Scheitel in O. Es soll die Gleichung der Kegelfläche gefunden werden, welche die Parabel als Leitlinie und den Punkt $x_1|y_1|z_1$ als Spitze hat.

Res.: $(y_1 z - y z_1)^2 = 2p(z - z_1)(x_1 z - x z_1)$.

213. Ein Kreis vom Halbmesser r hat seinen Mittelpunkt in O, seine Ebene geht durch die Z-Achse und halbiert den Winkel zwischen der $+X$- und der $+Y$-Achse. Er ist Leitlinie einer Kegelfläche, deren Spitze auf der $+Y$-Achse im Abstand d von O liegt. Zu suchen:

a) die Gleichung der Kegelfläche,

b) die Art ihrer Schnitte mit Ebenen parallel zu den Koordinatenebenen.

Res.: a) $2x^2 d^2 + z^2 d^2 - r^2(x - y + d)^2 = 0$.

214. In der XZ-Ebene liegt eine Hyperbel mit der reellen Achse $2c$ auf der Z-, der imaginären $2a$ auf der X-Achse; sie ist Leitlinie einer Kegelfläche, deren Spitze auf der $+Y$-Achse im Abstand b von O liegt. Gesucht die Gleichung der Kegelfläche.

Res.: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(y-b)^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

215. In der YZ-Ebene liegt ein Kreis, seine Mittelpunktskoordinaten sind $0|b|c$, sein Halbmesser ist r; er ist Leitlinie einer Kegelfläche, deren Spitze auf der $+X$-Achse im Abstand d von O liegt. Es soll die Gleichung der Fläche gefunden und es sollen für die besonderen Fälle 1) $b = 0$, 2) $b = 0$ und $c = 0$ Schnitte parallel zu den Koordinatenebenen untersucht werden.

Res.: $[dy + b(x-d)]^2 + [dz + c(x-d)]^2 = r^2(x-d)^2$.

216. Eine Hyperbel hat die Mittelpunktskoordinaten $a|b|c$, die reelle Achse 2α ist parallel zu der X-Achse, die imaginäre 2β parallel zu der Y-Achse. Es soll die Gleichung einer Kegelfläche gefunden werden,

welche diese Hyperbel als Leitlinie und den Ursprung als Spitze hat.

Res.: $\beta^2(cx - az)^2 - \alpha^2(cy - bz)^2 = \alpha^2\beta^2 x^2$.

217. Die in der XY-Ebene liegende Kurve $cy^2 = x^3$ ist Leitlinie einer Kegelfläche, deren Spitze der Punkt $2|1|5$ ist. Die Gleichung der Fläche zu suchen.

Res.: $c(z - 5y)^2(x - 5) = (2z - 5x)^3$.

218. Es soll die Gleichung einer Kegelfläche gefunden werden, welche ihre Spitze auf der $+X$-Achse im Abstand d von O hat, und welche die um O mit r beschriebene Kugel berührt.

Res.: $r^2(x - a)^2 + (r^2 - a^2)(y^2 + z^2) = 0$.

219. An das zweischalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

den Berührungskegel zu legen, dessen Spitze in $x_1|0|0$ liegt.

Res.: $\dfrac{(x - x_1)^2}{a^2 + x_1^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

220. An eine Kugel, die um den Mittelpunkt $a|b|c$ mit dem Halbmesser r beschrieben ist, soll eine berührende Kegelfläche gelegt werden, deren Spitze in O liegt. ($OM = s$.)

Res.: $(ax + by + cz)^2 - (s^2 - r^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

Anmerkung: Die Lösung gestaltet sich am einfachsten, wenn man die Bedingung dafür aufstellt, daß die Gerade $y = mx$, $z = nx$ die gegebene Kugel in zwei zusammenfallenden Punkten trifft.

221. Die Gleichung der Berührungsebene an die Berührungsebene von Nr. 213 im Punkt $0\,0\,r$ zu legen.

Res.: $-rx + ry - dz - dr = 0$.

222. Ebenso für die Kegelfläche von Nr. 216
a) im Punkt $x_1|y_1 z_1$,
b) in dem einen Scheitel der Leithyperbel.

Res.: a) $\beta^2 c(c x_1 - a z_1) x - \alpha^2 c(c y_1 - b z_1) y$
$+ [-\beta^2 a c x_1 + \alpha^2 b z y_1$
$+ (\beta^2 a^2 - \alpha^2 b^2 - \alpha^2 \beta^2) z_1] z = 0$;

b) $c x + (a - \alpha) z = 0$.

223. Auf beiden Seiten von O sind auf der X-Achse je im Abstand a von O die Punkte P_1 und P_2 gegeben. Um O sind in der YZ-Ebene zwei Kreise mit den Halbmessern ϱ_1 und ϱ_2 beschrieben. Sie sind Leitlinien zweier Kegelflächen, deren Spitzen P_1 und P_2 sind. Welches ist der Ort der Schnittlinie dieser beiden Kegelflächen, wenn ϱ_1 und ϱ_2 sich so ändern, daß $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = a^2$ ist?

Res.: $\pm x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

224. Die Punkte P_1 und P_2 von Nr. 223 sind Mittelpunkte zweier Kreise K_1 und K_2 mit den Halbmessern ϱ_1 und ϱ_2; die Kreisebenen sind senkrecht zur X-Achse. P_1 und P_2 sind Spitzen zweier Kegel, deren Leitlinien K_2 bzw. K_1 sind. Welches ist der Ort der Schnittlinie beider Kegelflächen, wenn ϱ_1 und ϱ_2 sich so ändern, daß $\varrho_1 \varrho_2 = a^2$ ist?

Res.: $\pm \frac{x^2}{4} - y^2 - z^2 = \pm \frac{a^2}{4}$.

225. Es soll untersucht werden, ob die Gleichnng $125x^3 + 25y^2z - 10yz^2 + z^3 - 125y^2 + 50yz - 5z^2 + ax = 0$ eine Kegelfläche darstellt.

Res.: Eine Kegelfläche, wenn $a = 0$ ist.

226. Ein Punkt bewegt sich

a) auf dem Kreis $\begin{cases} y^2 + z^2 = \varrho^2 \\ x = a \end{cases}$;

b) auf der Hyperbel $\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ z = c \end{cases}$

Welche Fläche umhüllt seine Polarebene in bezug auf die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$?

Res.: Die Kegelfläche a) $(r^2 - ax) = \varrho^2(y^2 + z^2)$;

b) $(r^2 - cz)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

§ 12. Drehflächen.

227. Eine zu der XZ-Ebene parallele Gerade, welche die Y-Achse im Abstand b von O schneidet und gegen die XY-Ebene unter dem Winkel α ($\operatorname{tg}\alpha = m$) geneigt ist, wird um die Z-Achse gedreht. Es soll die Gleichung der entstehenden Drehfläche gefunden und die letztere näher untersucht werden.

Res.: $x^2 + y^2 - m^2z^2 = b^2$.

Die Fläche ist ein einschaliges Hyperboloid; sie enthält zwei Scharen von Geraden; die zweite Schar entsteht durch Drehung der zu der gegebenen in bezug auf die YZ-Ebene symmetrischen Geraden. Mit $b = 0$ ergibt sich ein Kegel (Asymptotenkegel).

228. Es dreht sich

a) eine Ellipse um die eine Hauptachse,

b) eine Hyperbel 1. um die reelle, 2. um die imaginäre Achse,

c) eine Parabel um ihre Achse. Es soll in jedem Fall die Gleichung der Drehfläche ermittelt werden.

229. Eine in der XZ-Ebene liegende Parabel, welche die $+X$-Achse als Achse und O als Schenkel hat, dreht sich um die Z-Achse. Es soll die Gleichung der entstehenden Drehfläche gefunden werden.

Res.: $x^4 - 4p^2(x^2 + y^2) = 0$.

230. Ein in der XZ-Ebene liegender Kreis vom Halbmesser r, dessen Mittelpunkt M im Abstand a von O $(a > r)$ auf der X-Achse liegt, wird um die Z-Achse gedreht. Es soll die Gleichung des entstehenden Wulstes gefunden werden.

Res.: $x^2 + y^2 = \left(a \pm \sqrt{r^2 - z^2}\right)$.

231. Die Berührungslinie im Punkt $x_1 y_1 z_1$ des Wulstes von Nr. 230 zu finden.

Res.: $$\left[\left(x_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - a x_1\right)x + \left(y_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - a y_1\right)y\right] : \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + z_1 z = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - a\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Besonderer Fall: $a = 0$.

232. Die Berührungslinie für den von O aus an den Wulst gelegten Berührungskegel zu finden.

Res.: Aus dem gleich Null gesetzten Absolutglied der Gleichung der Berührungsebene von Nr. 231 folgt für die Berührungslinie des Kegels

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - r^2.$$

233. Die X-Achse wird um die Halbierungslinie des Winkels zwischen der $+X$- und der $+Y$-Achse gedreht. Zu suchen ist die Gleichung der Drehfläche.

Res.: $z^2 - 2xy = 0$.

234. Durch O wird eine Gerade gezogen, welche mit der $+X$-, $+Y$-, $+Z$-Achse gleiche Winkel macht; um sie wird die Halbierungslinie des Winkels zwischen der $+X$- und der $+Y$-Achse gedreht. Es soll die Gleichung des entstehenden Kegels gefunden werden.

Res.: $(x + y + z)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

§ 13. Rückungsflächen.

235. In der XZ-Ebene ist auf der Seite der $+Z$-Achse eine Gerade im Abstand c parallel zu der X-Achse gezogen. Eine weitere Gerade bewegt sich so, daß sie die erste Gerade und die Halbierungslinie des Winkels zwischen der $+X$- und der $+Y$-Achse schneidet und dabei beständig parallel zu der YZ-Ebene bleibt. Es soll die Gleichung der entstehenden Fläche gefunden und nachgewiesen werden, daß auf ihr noch eine zweite Geradenschar vorhanden ist.

Res.: $xz = c(x - y)$.

236. In der XY-Ebene liegt eine durch O gehende Gerade, welche mit der $+X$-Achse den Winkel α macht. Ein veränderlicher Kreis, dessen Mittelpunkt auf der X-Achse liegt, bewegt sich so, daß er jene Gerade beständig schneidet. Die Gleichung der Fläche zu finden.

Res.: $x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = y^2 + z^2$.

237. Eine veränderliche Hyperbel, deren Mittelpunkt auf der Y-Achse liegt, deren Ebene parallel der XZ-Ebene und deren reelle Achse parallel der X-Achse ist, bewegt sich so, daß sie die Gerade von Nr. 236 beständig schneidet und sich selbst ähnlich bleibt — Achsenverhältnis $1:k$. Es soll die entstandene Fläche gefunden werden.

Res.: $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{z^2}{k^2 a^2} = 0 .$$

238. In der XZ-Ebene liegt eine Hyperbel mit der reellen Achse $2c$ auf der Z-Achse, die imaginäre Achse ist $2a$. In der YZ-Ebene liegt eine Gerade, welche auf den positiven Teilen der $+Y$- und der $+Z$-Achse die Stücke b und c abschneidet. Die Hyperbel bewegt sich so, daß sie sich ähnlich, der XZ-Ebene parallel, daß der Mittelpunkt auf der Y-Achse und ein Scheitel immer auf der Geraden in der XZ-Ebene bleibt. Es soll die Gleichung der entstehenden Fläche gefunden werden.

Res.: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 .$$

239. In der XY-Ebene ist eine Gerade G_1 parallel zu der X-Achse im Abstand b gezogen; eine zweite Gerade G_2 liegt in der XZ-Ebene und schneidet auf der X- und der Z-Achse die Stücke a und c ab. Eine dritte Gerade G_3 bewegt sich so, daß sie G_1 und G_2 beständig schneidet und parallel der YZ-Ebene bleibt. Es soll die Gleichung der entstehenden Fläche gefunden und gezeigt werden, daß auf ihr noch eine zweite Geradenschar vorhanden ist.

Res.: $$a b z = c(a-x)(b-y) .$$

240. In der XY-Ebene liegt im ersten und dritten Feld eine gleichseitige Hyperbel, welche die X- und die Y-Achse zu Asymptoten hat. In der XZ-Ebene ist eine feste Gerade G_1 im Abstand c von O parallel zu der X-Achse gezogen. Eine weitere Gerade bewegt sich so, daß sie die gegebene Hyperbel und die

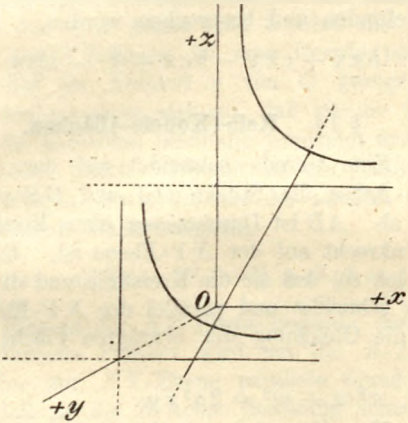

Fig. 4.

Gerade G_1 beständig schneidet und parallel zur YZ-Ebene bleibt. Es soll die Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.

Res.: $c\,x\,y + k^2(z - c) = 0$.

241. In der XZ-Ebene liegt eine Hyperbel, für welche die Z-Achse und eine Parallele zur X-Achse im Abstand c von O Asymptoten sind. Eine zweite Hyperbel liegt in einer Ebene parallel zur XZ-Ebene (im Ab-

stand b von O) so, daß ihr Mittelpunkt auf der Y-Achse liegt, und daß die Schnittlinien der Ebene mit der XY- und der XZ-Ebene Asymptoten sind. Von jeder Hyperbel liegt je ein Zweig auf derselben Seite der XY-Ebene. Eine Gerade bewegt sich so, daß sie beide Hyperbeln beständig schneidet und parallel zur YZ-Ebene bleibt. Es soll die Gleichung der entsprechenden Fläche gefunden und besprochen werden.

Res.: $bxz + cxy - bcx + (k^2 - k_1^2)y = bk^2$.

§ 14. Keil-(Konoid-)flächen.

242. Eine Gerade schneidet auf der $+X$- und der $+Y$-Achse die Stücke OA und OB je von der Länge a ab. AB ist Durchmesser eines Kreises, dessen Ebene senkrecht auf der XY-Ebene ist. Eine Gerade bewegt sich so, daß sie die Kreislinie und die Z-Achse beständig schneidet und parallel der XY-Ebene bleibt. Es soll die Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.

Res.: $z^2(x+y)^2 = 2a^2xy$.

243. Eine Hyperbel mit den Achsen $2a$ und $2b$ hat ihren Mittelpunkt im Abstand b_1 von O auf der Y-Achse, ihre reelle Achse liegt in der XY-Ebene, ihre Ebene ist der XZ-Ebene parallel. Sie ist Leitlinie einer Keilfläche, deren Achse in der XZ-Ebene, im Abstand a_1 von O liegt und parallel der Z-Achse ist. Die erzeugende Gerade ist parallel der XY-Ebene. Es soll die Gleichung der Keilfläche gefunden werden.

Res.: $b^2[b_1(x-a_1)+a_1y]^2 - a^2y^2z^2 - a^2b^2y^2 = 0$.

244. Eine Parabel mit den Scheitelkoordinaten aoc ist Leitlinie eines Konoids, dessen Achse die Z-Achse

und dessen Richtebene die XY-Ebene ist. Die Ebene der Parabel ist parallel der YZ-Ebene, ihre Achse gleichläufig mit der $+Z$-Achse. Die Gleichung des Konoids aufzustellen.

Res.: $a^2 y^2 = 2 p x^2 (z - c)$.

245. Ein Kreis vom Halbmesser r, der seinen Mittelpunkt auf der $+X$-Achse hat, berührt die Y-Achse in O; in der XZ-Ebene ist eine Gerade parallel zu der X-Achse im Abstand c von O gezogen. Eine weitere Gerade bewegt sich so, daß sie die erste Gerade und die Kreislinie beständig schneidet und parallel der YZ-Ebene bleibt. Gesucht ist die Gleichung der erzeugten Fläche, sowie die Art der parallel zur XY-Ebene geführten Flächenschnitte.

Res.: $(z - c)^2 [(x - r)^2 - r^2] + c^2 y^2 = 0$.

246. Eine in der XZ-Ebene liegende, die Z-Achse in O berührende Parabel wird um die X-Achse gedreht. Eine zur XY-Ebene parallele Gerade bewegt sich so, daß sie die Z-Achse beständig schneidet und die entstandene Drehfläche beständig berührt. Es soll die Gleichung der Fläche bestimmt und untersucht werden, in welcher Art von Kurven die Fläche von Ebenen, die parallel zu den Koordinatenebenen gelegt werden, geschnitten wird, und ob noch ein weiteres System von Geraden auf der Fläche vorhanden ist.

Res.: $y^2 z^2 = p^2 x^2$ oder $y z = \pm p x$.

247. Um O ist eine Kugel vom Halbmesser r beschrieben; in der YZ-Ebene ist im Abstand b von O ein Lot zur X-Achse gezogen. Eine weitere Gerade

bewegt sich so, daß sie die erste beständig schneidet und die Kugel berührt.

Res.: $(y-b)^2(r^2-z^2)+x^2(r^2-b^2-z^2)=0$.

§ 15. Einige Regelflächen.

248. In der XY-Ebene liegt eine die Y-Achse in O berührende Parabel, deren Achse die $+X$-Achse ist. Eine Gerade bewegt sich so, daß sie die Z-Achse, die Parabel und die weiter gegebene Gerade $y=mx+b$, $z=nx+c$ beständig schneidet. Es soll die Gleichung der Fläche gefunden und ihre Schnitte mit den Koordinatenebenen betrachtet sowie angegeben werden, wie sich die gefundene Flächengleichung erproben läßt.

Res.: $bx(2pn-m^2c)=[2p(c-z)+m^2cx](mx-y)$.

Proben: 1) Der Ursprung ist ein Punkt der Fläche; 2) die Spur S der gegebenen Geraden in der XY-Ebene muß die Gleichung der Fläche befriedigen; 3) ebenso die XZ-Spur der gegebenen Leitgeraden; 4) die XY-Spur der Fläche muß in die gegebene Parabel und die Verbindungslinie von O mit der XY-Spur der Leitgeraden zerfallen.

249. Es ist ein Kreis um O mit r in der XY-Ebene, ferner die Gerade $x=a$, $y=mz+b$ gegeben. Eine weitere Gerade bewegt sich so, daß sie die Z-Achse, die gegebene Gerade und den Kreis beständig schneidet. Die Gleichung der erzeugten Fläche zu finden.

Res.: $\sqrt{x^2+y^2}(ay-bx-amz)=\pm r(ay-bx-mxz)$.

250. In der XY-Ebene liegt eine die Y-Achse in O berührende Parabel, deren Achse die positive X-Achse ist. Durch den Ursprung geht eine den

Winkel zwischen der $+X$- und $+Z$-Achse halbierende Gerade; ferner ist in der YZ-Ebene eine Parallele zu der Y-Achse im Abstand c gegeben. Eine dritte Gerade bewegt sich so, daß sie die beiden gegebenen Geraden und die Parabel beständig schneidet. Es soll die Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.

Res.: $c^2(xy)^2 + (z-x)^2(z-c)\,2pcx = 0$.

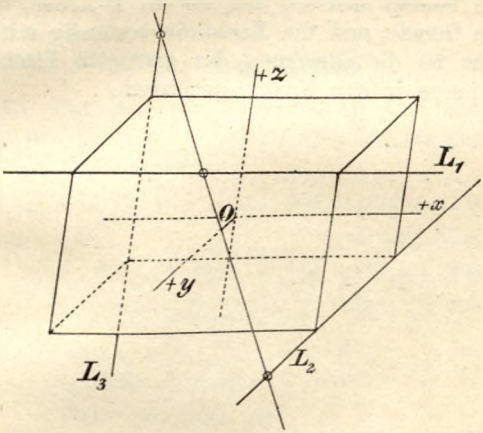

Fig. 5.

251. Eine Gerade bewegt sich so, daß sie dieselben drei Kanten L_1, L_2, L_3 eines Parallelflachs beständig schneidet. Es soll die Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.

Res.: Man nehme den Mittelpunkt des Parallelflachs als Nullpunkt, die Koordinatenachsen parallel zu L_1, L_2, L_3.

Sind $2a$, $2b$, $2c$ die Kantenlängen des Parallelflachs, so ergibt sich als Gleichung der Fläche

$$\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + 1 = 0 .$$

252. Die Ebene eines Kreises, der um O mit r beschrieben ist, ist gegen die XY-Ebene unter 45^0 geneigt. In der XY-Ebene ist eine Gerade parallel zu der Y-Achse im Abstand b gezogen. Eine weitere Gerade bewegt sich so, daß sie die Z-Achse, die gegebene Gerade und die Kreislinie beständig schneidet. Gesucht ist die Gleichung der erzeugten Fläche und ihre Spuren in den Koordinatenebenen.

III. Abschnitt.

Flächen II. Grades.

§ 16. Das Ellipsoid.

253. Die Mittelpunktskoordinaten und die Halbachsen der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Ellipsoide zu bestimmen:

a) $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 - 216x + 32y - 90z + 421 = 0$;

b) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 72x + 24z - 144 = 0$;

c) $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + ax + by + cz = 0$.

Res.: a) $3|-1|5$, 2, 3, 4;

b) $4|0|-3$, 3, 3, 9;

c) $-\frac{a}{2}\Big|-\frac{b}{4}\Big|-\frac{c}{10}$,

$\sqrt{10a^2 + 5b^2 + 2c^2} : 2\sqrt{10}$, bzw. $: 4\sqrt{5}$, $: 10\sqrt{2}$.

254. Es soll für das Ellipsoid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ bestimmt werden:

a) die Gleichung der Berührungsebene im Punkt zu $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $z_1 > 0$;

b) die Gleichung der Polarebene für den Punkt $1|2|3$;

c) die Gleichung der Durchmesserebene, die zu der Geraden $y = 3x$, $z = -7x$ zugeordnet ist;

d) die Gleichungen des Durchmessers, der zu der Ebene $7x - 2y + 5z = 0$ zugeordnet ist.

255. Ebenso für das Ellipsoid $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$ und

a) für den Punkt $x_1 = 3$, $y_1 > 0$, $z_1 = 3$;

b) für den Punkt $5|3|-11$;

c) für den Durchmesser $\frac{x}{4} = \frac{y}{20} = \frac{z}{5}$;

d) für die Ebene $5x - y - \frac{1}{2}z = 0$.

256. Die Koordinaten des Pols der Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ in bezug auf das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

zu bestimmen.

257. Die Gleichung der Durchmesserebene zu bestimmen, welche zu dem durch den Punkt $x_1|y_1|z_1$ gehenden Durchmesser des Ellipsoides von Nr. 256 zugeordnet ist.

Res.: $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} = 0$.

258. Dieselbe Aufgabe für ein Ellipsoid, das dem von Nr. 256 ähnlich ist. Was zeigt sich?

259. Durch den Punkt $x_1|y_1|z_1$ eine Gerade so zu ziehen, daß die auf ihr von dem Ellipsoid von Nr. 256 abgeschnittene Sehne durch die gegebene Ebene $Ax + By + Cz = 0$ halbiert wird.

260. Durch den Punkt $x_1 | y_1 | z_1$ eine Ebene zu legen, welche das Ellipsoid von Nr. 256 in einem Kegelschnitt schneidet, dessen Mittelpunkt dieser Punkt ist.

261. Drei Durchmesser des Ellipsoids von Nr. 256 haben die Richtungskosinus $\alpha | \beta | \gamma$, $\alpha_1 | \beta_1 | \gamma_1$, $\alpha_2 | \beta_2 | \gamma_2$. Es sollen die Bedingungen dafür gefunden werden, daß die Durchmesser zueinander konjugiert sind.

Res.:
$$\frac{\alpha\,\alpha_1}{a^2} + \frac{\beta\,\beta_1}{b^2} + \frac{\gamma\,\gamma_1}{c^2} = 1\,,$$
$$\frac{\alpha_1\,\alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_1\,\beta_2}{b^2} + \frac{\gamma_1\,\gamma_2}{c^2} = 1\,,$$
$$\frac{\alpha_2\,\alpha}{a^2} + \frac{\beta_2\,\beta}{b^2} + \frac{\gamma_2\,\gamma}{c^2} = 1\,.$$

262. Zu beweisen: Die Summe der Quadrate dreier konjugierter Halbmesser ist konstant und gleich der Summe der Halbachsen.

263. Ebenso: Ein Parallelflach, dessen Kanten drei konjugierte Halbmesser sind, hat unveränderlichen Inhalt.

264. Ebenso: Die Summe der Quadrate der Projektionen von drei konjugierten Halbmessern auf eine Gerade und ebenso die Summe der Quadrate der Projektionen von drei konjugierten Halbmessern auf eine beliebige Ebene ist unveränderlich.

265. Die Summe der Quadrate der Seitenflächen des aus drei konjugierten Halbmessern konstruierten Parallelflachs ist konstant.

266. Auf dem Ellipsoid von Nr. 256 einen Punkt so zu bestimmen, daß die in ihm gezogene Berührungsebene auf den Achsen Stücke abschneidet, welche

a) einander gleich sind,

b) sich wie 1 : 2 : 3 verhalten.

Res.: a) $x_1 = \lambda a^2$ usf., $\lambda = 1 : \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;

b) $x_1 = \lambda a^2 : 1$, $y_1 = \lambda b^2 : 2$, $z_1 = \lambda c^2 : 3$,

$$\lambda = 6 : \sqrt{36 a^2 + 9 b^2 + 4 c^2}.$$

267. Den Punkt $x_1 y_1 z_1$ von Nr. 256 so zu bestimmen, daß die in ihm gezogene Berührungsebene auf den Achsen Stücke abschneidet, die sich verhalten

a) wie die Achsen,

b) wie die Quadrate der Halbachsen.

Res.: a) $x_1 = a : 3$ usf.;

b) $x_1 = y_1 = z_1 = abc : \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$.

268. Von einem auf dem Ellipsoid von Nr. 256 wandernden Punkt P wird auf die XY-Ebene das Lot PC gefällt; es wird über P hinaus a) um $PQ = PC$, b) um $PQ = \frac{1}{2} PC$, c) so verlängert, daß $PC : PQ = \lambda : 1$ sich verhält. Gesucht der Ort von Q.

269. Durch einen Scheitel eines Ellipsoids werden Sehnen gezogen. Jede wird

a) um sich selbst,

b) um ihr λfaches verlängert.

Der Ort des Endpunktes der Verlängerung ist zu suchen.

270. Durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ werden an das Ellipsoid von Nr. 256 Sekanten gezogen. Es soll für die auf ihnen abgeschnittenen Sehnen der Ort der Halbierungspunkte gefunden werden.

Res.: $$\frac{\left(x - \frac{x_1}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y - \frac{y_1}{2}\right)^2}{b^2} + \frac{\left(z - \frac{z_1}{2}\right)^2}{c^2} = \frac{x_1^2}{4a^2} + \frac{y_1^2}{4b^2} + \frac{z_1^2}{4c^2}.$$

271. In einer Ellipse E_1 mit den Achsen $2a$ und $2b$ ist eine Sehne PQ senkrecht zu der Achse $2a$ gezogen. PQ ist die eine Achse einer Ellipse E_2, deren Ebene senkrecht zu E_1 ist. Es soll die Gleichung der Fläche gefunden werden, welche entsteht, wenn PQ parallel verschoben wird und E_2 dabei sich ähnlich bleibt.

272. In einer Ellipse E_1 mit den Achsen $2a$ und $2b$ ist ein Durchmesser PQ gezogen. In dem Mittelpunkt O von E_1 ist das Lot errichtet und auf ihm von O aus $OR_1 = OR_2 = c$ abgetragen. PQ und $R_1 R_2$ sind Achsen einer Ellipse E_2. Welche Fläche erzeugt E_2, wenn E_2 sich um $R_1 R_2$ dreht?

273. Zu beweisen: Ist $\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0$ die Gleichung einer Ebene in Normalform, so berüht diese das Ellipsoid von Nr. 256, wenn $p = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}$ ist.

274. Den Ort für die Ecke eines gleichseitigen, rechtwinkligen Dreikants zu finden, dessen Seitenebenen das Ellipsoid von Nr. 256 berühren.

Res.: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$; dieser Ort heißt die Mongesche Kugel.

275. In den Punkten der Schnittlinie einer Ebene mit dem Ellipsoid von Nr. 256 werden Normalen gezogen. Es soll der Ort der Spur dieser Normalen

a) mit der XY-Ebene,

b) mit der XZ-Ebene für den besonderen Fall, daß die gegebene Ebene parallel zur XY-Ebene ist, untersucht werden.

276. In dem Ellipsoid von Nr. 256 ist $a > b > c$; es soll bewiesen werden, daß jede der Ebenen

$$a\sqrt{b^2 - c^2} \cdot z \pm c\sqrt{a^2 - b^2} \cdot x = 0$$

die Fläche in einem Kreis vom Halbmesser b schneidet.

277. Einen Berührungszylinder an das Ellipsoid von Nr. 256 zu legen; die Mantellinien sollen parallel der Halbierungslinie des Winkels zwischen der $-Y$- und der $+Z$-Achse sein.

Res.: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-z)^2}{b^2+c^2} = 1$.

278. Wie Nr. 277. Die Mantellinien sollen aber mit den Koordinatenachsen gleiche Winkel bilden.

279. Den Ort der Fußpunkte der Lote zu finden, welche man vom Mittelpunkt eines Ellipsoids auf seine Berührungsebene fällt.

Res.: $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2+y^2+z^2)^2$.

280. Die Gleichung des Ellipsoids von Nr. 256 in Polarkoordinaten aufzustellen. Es sei P ein beliebiger

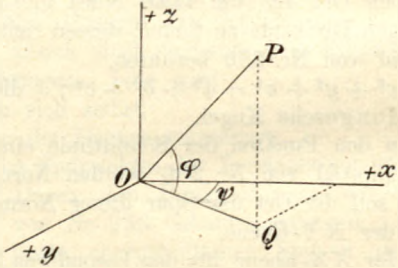

Fig. 6.

Punkt des Ellipsoids, $OP = r$, Q Projektion von P auf die XY-Ebene, $\sphericalangle POQ = \varphi$, positiv oder negativ genommen, je nachdem P mit $+OZ$ auf derselben Seite liegt oder nicht, $\sphericalangle +XOQ = \varphi$ (φ zwischen 0^0 und 360^0).

Res.: $\cos^2\varphi\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi}{b^2}\right)+\sin^2\varphi=\frac{1}{r^2}$.

281. Gegeben sind zwei Punkte F und F_1 $(FF_1=2f)$; gesucht der Ort für einen Punkt P, der sich so bewegt, daß $PF+PF_1=2\alpha$.

Res.: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2+z^2}{\alpha^2-f^2}=1$.

282. Um O ist eine Kugel vom Halbmesser r beschrieben. Von dem Punkt P derselben ist auf die XY-Ebene das Lot PQ gefällt und über P hinaus um sich selbst bis P_1 verlängert. Es soll der Ort des Schnittpunktes der Polarebene von P_1 mit PQ gefunden werden.

Res.: $x^2+y^2+4z^2=r^2$.

283. Eine Ebene E bewegt sich so, daß sie beständig eine Kugel um O vom Halbmesser r berührt. Welches ist der Ort des Pols von E in Beziehung auf das Ellipsoid von Nr. 256?

Res.: $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}-1=0$.

284. Ein Punkt bewegt sich auf der Kugel um O mit r. Welche Fläche umhüllt seine Polarebene in Beziehung auf das Ellipsoid von Nr. 256?

Res.: $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{r^2}$.

§ 17. Die Hyperboloide.

285. Gegeben ist die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$. Eine veränderliche Ellipse, deren Mittelpunkt auf der Z-Achse liegt und deren Achsen parallel der X- bzw. der Y-Achse sind, bewegt sich so, daß sie sich selbst ähnlich bleibt und die Hyperbel beständig schneidet. Es soll die von ihr erzeugte Fläche ermittelt werden. Das Achsenverhältnis der Ellipse sei $a:b$.

Res.: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

286. Es soll, ähnlich wie in Nr. 285, das zweischalige Hyperboloid

a) durch Rückung einer sich ähnlich bleibenden Ellipse an einer festen Hyperbel,

b) durch Rückung einer sich ähnlich bleibenden Hyperbel an einer festen Hyperbel erzeugt werden.

287. Zu beweisen, daß das Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{wobei} \quad a > b > c \quad \text{ist}$$

und die Kugel um O mit dem Halbmesser a sich in zwei Kreisen schneidet, deren Mittelpunkt O ist.

288. Man hat das Hyperboloid von Nr. 287 und das Ebenenpaar $y^2 - m^2 z^2 = 0$. Wie muß λ und m gewählt werden, damit die Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 + \lambda (y^2 - m^2 z^2) = 0,$$

welche durch die beiden ebenen Schnitte mit dem Hyperboloid gelegt ist, eine Kugel wird?

Anmerkung: Die beiden Ebenen und alle dazu parallelen Ebenen liefern Kreisschnitte mit dem Hyperboloid.

Res.: $\lambda = (a^2 - b^2) : a^2 b^2$,

$$m^2 = b^2(a^2 + c^2) : (a^2 - b^2) c^2 .$$

289. In der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, ist der Durchmesser PQ gezogen. PQ ist reelle Achse einer Hyperbel, deren unveränderliche imaginäre Achse $(2c)$ auf der Z-Achse liegt. Es soll die Gleichung der Fläche hergeleitet werden, welche von der Hyperbel erzeugt wird, wenn PQ sich um O dreht.

290. Die Bedingungen zu finden, unter welchen die Gerade $x = mz + p$, $y = nz + q$ auf dem Hyperboloid von Nr. 287 liegt.

Res.: $\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$, $\frac{mp}{a^2} + \frac{nq}{b^2} = 0$,

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1 .$$

291. Die Bedingungen zu finden, unter welchen die Gerade $x = u + \varrho\alpha$, $y = v + \varrho\beta$, $z = w + \varrho\gamma$ auf der Fläche $ayz + bzx + cxy + d = 0$ liegt.

292. Die Gleichungen der beiden Mantellinien des Hyperboloids von Nr. 287 zu finden, welche durch den Punkt $p|q|0$ der Kehlellipse gehen.

Res.: 1) $x = \frac{aq}{bc} z + p$, $y = -\frac{bp}{ac} z + q$;

2) $x = -\frac{aq}{bc} z + p$, $y = \frac{bp}{ac} z + q$.

293. Zu beweisen, daß die XY-Projektionen der beiden Mantellinien von Nr. 292 Tangenten der Kehlellipse im Punkt pq sind.

294. Zu beweisen, daß die durch den Punkt $pq|0$ der Kehlellipse gehende Mantellinie des Systems 1) von Nr. 292 die durch einen Punkt $p_1 q_1 0$ gehende Mantellinie des Systems 2) schneidet.

295. Zu zeigen, daß, wenn die Punkte $pq|0$ und $p_1 q_1|0$ von Nr. 294 Endpunkte eines Durchmessers der Kehlellipse sind, die beiden Mantellinien von Nr. 294 einander parallel sind.

296. Zu beweisen, daß zwei Mantellinien desselben Systems des einschaligen Hyperboloids sich nicht schneiden.

297. Zu beweisen, daß zu jeder Mantellinie auf dem einschaligen Hyperboloid sich eine parallele auf dem Asymptotenkegel ziehen läßt.

298. Vom Mittelpunkt des Hyperboloids von Nr. 287 wird nach jedem Punkte der Fläche ein Strahl gezogen und um sich selbst über den Endpunkt hinaus verlängert. Es soll der Ort der Endpunkte der Verlängerungen gefunden werden.

299. Der Mittelpunkt eines einschaligen Hyperboloids, das die YZ-Ebene in O berührt und dessen imaginäre Achse parallel der Z-Achse ist, liegt auf der $+X$-Achse. Von O aus sind Sehnen gezogen; jede wird über ihren Endpunkt hinaus um die Hälfte verlängert. Es soll der Ort für die Endpunkte der Verlängerungen gefunden werden.

Res.: $$\frac{\left(x - \frac{3a}{2}\right)^2}{\frac{9a^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{9b^2}{4}} - \frac{z^2}{\frac{9c^2}{4}} = 1 .$$

300. Von dem auf der $-X$-Achse liegenden Scheitel des Hyperboloids von Nr. 287 sind Strahlen nach den Punkten dieser Fläche gezogen. Welches ist der Ort der Halbierungspunkte?

301. Die Koordinaten des Pols der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

in bezug auf jedes der Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

zu finden.

302. An jedes der Hyperboloide von Nr. 301 einen Berührungskegel zu legen, dessen Spitze auf der X-Achse liegt.

$$\text{Res.:}\quad \frac{(x - x_1)^2}{a^2 \pm x_1^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,.$$

Mit $x_1 = 0$ gehen beide Kegelflächen in den gemeinschaftlichen Asymptotenkegel der Hyperboloide über.

303. In der XZ-Ebene ist eine Hyperbel gegeben, deren reelle Achse $(2a)$ auf der X-Achse und deren imaginäre Achse $(2c)$ auf der Z-Achse liegt. Eine Ellipse, deren Mittelpunkt in O und deren unveränderliche Achse $2b$ auf der Y-Achse liegt, dreht sich um die Y-Achse so, daß sie die Hyperbel beständig schneidet. Es soll die Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.

304. An das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ ist ein Berührungskegel gelegt. Welches ist der Ort für die Spitze, wenn die Ebene der Berührungslinie sich so bewegt, daß sie das Hyperboloid $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} - 1 = 0$

berührt. Was ist der Fall, wenn $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$ ist?

Res.: $\frac{a_1^2 x^2}{a^4} + \frac{b_1^2 y^2}{b^4} - \frac{c_1^2 z^2}{c^4} = 1$.

305. An das Hyperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ einen Berührungszylinder zu legen, dessen Mantellinien die Richtungskosinus α, β, γ haben. Was ist der Fall, wenn die Mantellinien parallel der X- oder der Z-Achse sind?

Res.: $$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2}\right)^2.$$

§ 18. **Die Paraboloide.**

306. In einer gegebenen Parabel ist eine Sehne PQ senkrecht zu der Achse gezogen. Sie ist die eine

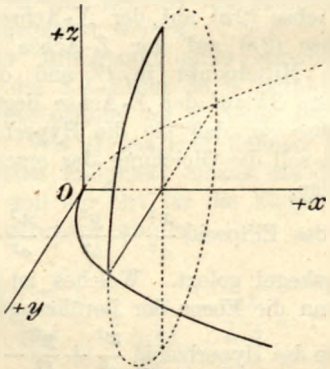

Fig. 7.

Achse einer Ellipse, deren andere Achse ebenfalls senkrecht zu der Parabelachse ist. Es soll die Gleichung derjenigen Fläche hergeleitet werden, die entsteht, wenn die Ellipse sich parallel so weiter bewegt, so daß ihre Scheitel P und Q auf der Parabel fortrücken und sie sich selbst ähnlich bleibt.

307. Zwei Parabeln mit verschiedenen Parametern haben die Achse und den Scheitel gemeinschaftlich; ihre Ebenen aber sind senkrecht zueinander. Es soll die Gleichung der Fläche hergeleitet werden, die entsteht, wenn die eine Parabel sich so weiter bewegt, daß ihre Ebene und ihre Achse unveränderte Richtung behalten und ihr Scheitel auf der festen Parabel bleibt.

308. Dieselbe Aufgabe wie Nr. 306, nur ist statt der Ellipse eine Hyperbel zu nehmen.

309. Wie Nr. 307, nur hat die Achse der zweiten Parabel eine Richtung, die derjenigen der ersten Parabelachse entgegengesetzt ist.

310. Die Koordinaten des Scheitels, die Lage der Achse und die Bestimmungsstücke für die durch die folgenden Gleichungen gegebenen Paraboloide zu ermitteln:

a) $5y^2 + 3z^2 - 10y + 12z + 107 = 0$;

b) $3x^2 - 2y^2 - 6x + 12y + 24z - 26 = 0$;

c) $x^2 + 9z^2 - 12y - 36z = 0$.

Res.: a) $\dfrac{(y-1)^2}{3} + \dfrac{(z+2)^2}{5} = 2(x-3)$;

b) $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{6} = -2\left(z - \dfrac{5}{6}\right)$;

$$\text{c)} \qquad \frac{x^2}{6} + \frac{(z-2)^2}{\frac{2}{3}} = 2(y+3)\,.$$

311. Es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Gerade $y = mx + b$, $z = nx + c$ auf dem Paraboloid $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$ liegt.

$$\text{Res.:} \quad \frac{m^2}{p} - \frac{n^2}{q} = 0\,, \quad \frac{bm}{p} - \frac{cn}{q} - 1 = 0\,,$$

$$\frac{b^2}{p} - \frac{c^2}{q} = 0\,.$$

312. Es soll gezeigt werden, daß auf dem Paraboloid von Nr. 311 zwei Scharen von Geraden möglich sind, welche sich mit Hilfe der veränderlichen Parameter λ und μ darstellen lassen durch

$$1) \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\lambda x \\ \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda}\,, \end{cases} \quad \text{und} \quad 2) \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\mu x \\ \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\mu}\,. \end{cases}$$

313. Es soll gezeigt werden, daß die Mantellinie der einen Schar parallel der Ebene $\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 0$, die der anderen parallel der Ebene $\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 0$, und daß demnach die Projektionen jeder Schar auf die Berührungsebene im Scheitel unter sich parallel sind, sowie daß irgend zwei Mantellinien niemals parallel sein können.

314. Es soll bewiesen werden, daß die Projektion einer Mantellinie auf eine Hauptebene den Hauptschnitt dieser Ebene berührt, und daß also z. B. die XY-Projektionen der Schar 1) von Nr. 312 die Parabel $y^2 = 2px$, $z = 0$ berühren.

315. Aus Nr. 314 die Konstruktion der beiden Mantellinien herzuleiten, die durch einen gegebenen Punkt P eines Hauptschnittes gehen.

Lösung: Ist P Punkt des Hauptschnittes der XY-Ebene und trifft die in P gezogene Tangente die X-Achse in D, so ziehe man in D das Lot, welches

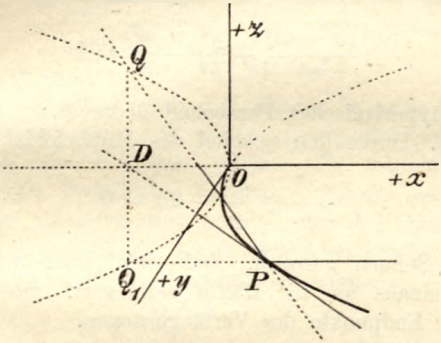

Fig. 8.

den XZ-Hauptschnitt in Q und Q_1 trifft, alsdann sind PQ und PQ_1 die gesuchten Mantellinien.

Hieraus ergibt sich auch die Konstruktion der beiden Mantellinien, die durch einen beliebigen Punkt der Fläche gehen.

316. Zu beweisen, daß jede beliebige Ebene das Drehungsparaboloid $x^2 + y^2 = 2z$ in einer Ellipse

schneidet, die sich auf die XY-Ebene als Kreis projiziert.

317. Zu beweisen, daß das Ellipsoid

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

in ein elliptisches Paraboloid übergeht, wenn der eine Scheitel in O bleibt, die Achsen aber so wachsen, daß die Parameter der Hauptschnitte, welche O enthalten, konstant bleiben.

318. Ebenso zu zeigen, daß unter den Voraussetzungen von Nr. 317 das Hyperboloid

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

in ein hyperbolisches Paraboloid übergeht.

319. Durch den Scheitel des Paraboloids

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$$

werden Sehnen gezogen. Jede wird über ihren Endpunkt hinaus um die Hälfte verlängert. Gesucht der Ort der Endpunkte der Verlängerungen.

Res.: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-3z=0$.

320. Eine Ebene ist Berührungsebene an das Paraboloid $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0$. Welches ist der Ort ihres Pols in Beziehung auf die um O mit r beschriebene Kugel?

Res.: $(p\,y^2+q\,z^2):r^2+2x=0$.

321. Ein Punkt bewegt sich auf dem Paraboloid von Nr. 320. — Welche Fläche umhüllt seine Polarebene in Beziehung auf die um O mit r beschriebene Kugel?

Res.: $(p y^2 + q z^2) : r^2 + 2x = 0$.

322. Durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ werden Sekanten an das Paraboloid von Nr. 320 gezogen. Es soll der Ort für die Mittelpunkte der auf ihnen abgeschnittenen Sehnen ermittelt werden.

Res.: $$\left(y - \frac{y_1}{2}\right)^2 : \frac{p}{2} + \left(z - \frac{z_1}{2}\right)^2 : \frac{q}{2}$$
$$= x - x_1 + \frac{y_1^2}{4p} + \frac{z_1^2}{4q} .$$

323. Eine in der XY-Ebene liegende Parabel, deren Achse die $+X$-Achse, deren Scheitel O ist, wird um die X-Achse gedreht. Es werden an die entstehende Drehfläche Tangenten gelegt, welche die Z-Achse schneiden und parallel der XY-Ebene sind. Es soll die Gleichung der entstehenden Fläche ermittelt und die letztere näher untersucht werden.

Res.: $p x = \pm y z$.

324. Von dem Punkt P, der auf dem Paraboloid $y^2 + z^2 = 2px$ wandert, wird das Lot PQ auf die YZ-Ebene gefällt und der Fußpunkt Q mit dem Brennpunkt F der XY-Spur der Fläche und P mit O verbunden. Welches ist der Ort für den Schnittpunkt der OP mit der FQ?

Res.: $$\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 : \frac{p^2}{16} + (y^2 + z^2) : \frac{p^2}{4} = 1 .$$

325. Von dem Scheitel O des Paraboloids

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

wird auf jede Berührungsebene das Lot gefällt. Es soll die Gleichung für den Ort des Fußpunktes gefunden werden.

Res.: $(x^2 + y^2 + z^2) \cdot z = -\frac{1}{2}(p x^2 + q y^2)$.

§ 19. Die allgemeine Gleichung II. Grades.

326. Die Art der Flächen anzugeben, welche durch die folgenden Gleichungen bestimmt sind*):

a) $2x^2 + y^2 - z^2 - 2zx - 4xy + 4yz + 2y - 4z - 4 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2zx - 2xy - x + y - z = 0$;

c) $y^2 + zx + 3xy + 2yz + 3x + 2y = 0$;

d) $5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6xz + 12x - 36z = 0$;

e) $x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + 2z + 1 = 0$;

f) $z^2 - 2x^2 - 4y^2 + 8xy - 8x + 8y - 4 = 0$;

g) $xy + yz + zx = 9$;

h) $4x^2 - 9z^2 + 2zx - 8x - 4y + 36z - 32 = 0$;

i) $x^2 - 4y - 3z = 0$;

k) $6x^2 + 28y^2 + 5z^2 - 8xy - 4zx - 6 = 0$;

l) $z^2 - xy = 0$.

---

*) Weitere Beispiele zur Untersuchung einzelner Flächen II. Grades liefern viele Aufgaben des Abschnitts II und IV.

Res.: a) einschaliges Hyperboloid, Mittelpunkt $-1|-2|-2$;

b) zwei parallele Ebenen $x - y + z = 0$, $x - y + z - 1 = 0$;

c) einschaliges Hyperboloid, $1|-\frac{1}{2}|-\frac{3}{2}$;

d) hyperbolischer Zylinder, Achse $x = 3(z - 2)$, $y = 2(z - 2)$;

e) elliptisches Paraboloid;

f) Kegel, $0|1|0$;

g) zweischaliges Drehungshyperboloid, $0|0|0$;

h) hyperbolisches Paraboloid;

i) parabolischer Zylinder;

k) Ellipsoid, $0|0|0$;

l) Kegelfläche, $0|0|0$.

327. Den Ort der Mittelpunkte der Flächen zu finden, welche durch folgende Gleichung mit den veränderlichen Parametern a und b dargestellt sind:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2axz + 2byz - 2x - 2y - 2z = 0.$$

Res.: $x^2 + y^2 - z^2 - x - y + z = 0$. (Deutung!)

328. Ebenso den Ort für die Mittelpunkte der Flächen, welche durch die Gleichung

$$x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 2xy + 3xz + \lambda(x + 2y + 3z - 4) = 0,$$

wobei λ ein veränderlicher Parameter ist, dargestellt sind, zu finden.

Res.: Die Gerade $x + y = 0$, $x + z = 0$.

329. Den Ort der Mittelpunkte des Flächenbüschels II. Grades zu finden, das sich durch die Schnittlinie der Flächen

$$1)\quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2y + 3z = 0$$

und

$$2)\quad yz + x - 1 = 0$$

legen läßt, und zu zeigen, daß dieser Ort auf einem zur XY-Ebene senkrechten hyperbolischen Zylinder liegt.

Res.: $4y - 2xz + 2 = 0\,,\quad 6z - 2xy + 3 = 0\,.$

IV. Abschnitt.

§ 20. **Vermischte Aufgaben.**

330. In der XY-Ebene liegt die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Durch die Z-Achse ist eine Ebene gelegt, welche die Hyperbel in P und Q schneidet. Über dem Durchmesser PQ ist in der angegebenen Ebene ein Kreis um O beschrieben. Es soll die Gleichung der Fläche gefunden werden, welche von dem Kreis erzeugt wird, wenn sich seine Ebene um die Z-Achse dreht.

Res.: $(x^2+y^2+z^2)(a^2y^2-b^2x^2)+a^2b^2(x^2+y^2)=0$.

331. In der XY-Ebene liegt die Kurve

$$x^3 - xy + 1 = 0 ;$$

sie ist Leitlinie einer Zylinderfläche, deren Mantellinien parallel der Geraden $x = mz$, $y = nz$ sind. Gesucht die Gleichung der Fläche.

Res.: $(x - mz)^3 - (x - mz)(y - nz) + 1 = 0$.

332. Von O aus wird auf jede Berührungsebene des Paraboloids $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ das Lot gefällt; es soll

die Gleichung für den Ort des Fußpunktes des Lotes bestimmt werden.

Res. $(x^2 + y^2 + z^2) \cdot z = -\frac{1}{2}(p x^2 + q y^2)$.

333. Vom Mittelpunkt O einer Kugel ist der Halbmesser OP gezogen und über P hinaus um den Abstand PC des Punktes P von der XY-Ebene verlängert. Es soll die Gleichung des Ortes für den Endpunkt der Verlängerung gefunden werden.

Res.: $x^2 + y^2 + z^2 - r\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r z$.

334. Von dem Scheitel O wird nach dem beweglichen Punkt P des Paraboloids $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$ der Strahl OP gezogen und von P das Lot PD auf die XY-Ebene gefällt. Auf OP wird von O aus gegen P hin $OQ = PD$ abgetragen. Es soll die Gleichung für den Ort von Q gefunden werden.

Res.: $(x^2 + y^2 + z^2)(q y^2 + p z^2)^2 = 4 p^2 q^2 x^2 z^2$.

335. Um O ist eine Kugel vom Halbmesser 3 beschrieben. Es soll an sie durch die beiden Punkte 1 4 9 und 4 -2 0 eine Berührungsebene gelegt werden.

Res.: $(8 \mp \sqrt{10})x + 2(-1 \mp \sqrt{10})y$
$- (-4 \mp \sqrt{10})z = 36$.

336. Gegeben sind drei gerade Linien, die derselben Ebene parallel sind, z. B. 1) $a y - b x = 0$, $z = 0$; 2) $x = 0$, $z = c_1$; 3) $y = 0$, $z = c_2$. Eine weitere Gerade bewegt sich so, daß sie die drei gegebenen beständig schneidet. Es soll Gleichung und Art der entstehenden Fläche gefunden werden.

Res.: $(b c_1 x - a c_2 y) z - c_1 c_2 (b x - a y) = 0$,

hyperbolisches Paraboloid, wenn $c_1 c_2 a b (c_1 - c_2) \gtrless 0$; ein Ebenenpaar, wenn $c_1 = c_2$ oder einer der Faktoren c_1, c_2, a, b Null ist. Die gefundene Gleichung gilt auch, wenn das Koordinatensystem schiefwinklig, die Z-Achse also nicht mehr gemeinschaftliche Linie des kürzesten Abstandes der drei Geraden ist.

337. Den Ort für die Ecke eines gleichseitigen rechtwinkligen Dreikants zu finden, dessen Seitenebenen

a) das einschalige Hyperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$,

b) das zweischalige Hyperboloid $-\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} - 1 = 0$,

c) das Paraboloid $\frac{y^2}{p} \pm \frac{z^2}{q} = 2x$ berühren. (Vgl. Nr. 279.)

Res.: a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2$ } (Mongesche
b) $x^2 + y^2 + z^2 = -a_1 - b_1^2 + c_1^2$ } Kugel),

c) $2x + p \pm q = 0$ (Mongesche Ebene).

Sind die Hyperboloide a) und b) konjugiert, so hat nur eines einen reellen Ort.

338. Es soll untersucht werden, ob die Fläche $x^2 = y z$ durch Ebenen, welche parallel zu der Ebene $y + z - x = 0$ sind, in Kreisen geschnitten werden kann.

339. Die Leitlinie eines Kegels sei gegeben durch die Gleichungen 1) $x^2 + y^2 = r^2$, 2) $x + y + z = a$; ein Punkt auf der $+Z$-Achse im Abstand c von O ist Spitze des Kegels. Es soll seine Gleichung gesucht werden.

Res.: $(a-c)^2(x^2+y^2) = r^2(x+y+z-c)^2$;

mit $a = c$ ergibt sich die gegebene Ebene.

340. In der XY-Ebene liegt die Parabel $y^2 = 2px$; eine zu der Parabelachse senkrechte Gerade L ist im Abstand c von der XY-Ebene so gezogen, daß ihre XY-Projektion durch den Brennpunkt geht; eine zu L senkrechte Gerade bewegt sich so, daß sie die Parabel beständig schneidet. Es soll die Gleichung der entstehenden Fläche gefunden werden.

Res.: $y^2(z-c) = p^2 z - 2pcx$.

341. Den Ort eines Punktes zu bestimmen, dessen Abstände vom Nullpunkt und von der Ebene $z = k$ sich wie $\lambda : 1$ verhalten.

Res.: $x^2 + y^2 + (1-\lambda^2)z^2 + k\lambda^2(2z-k) = 0$;

der Ort ist also eine Drehfläche mit der Z-Achse als Drehachse und zwar ist er ein einschaliges Hyperboloid, ein Paraboloid, oder ein Ellipsoid, je nachdem $\lambda \gtreqless 1$.

342. In der XY-Ebene liegt die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Es soll der Ort für die Spitzen aller Kegelflächen gefunden werden, welche durch diese Linie gehen und welche die XZ-Ebene in Kreisen schneiden.

Res.: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad x = 0$.

Wie gestaltet sich das Resultat, wenn an Stelle der gegebenen Ellipse die zu ihr konjugierte Hyperbel tritt?

343. Die Bedingung dafür zu finden, daß die Gerade 1) $x = a + \varrho\alpha$, $y = b + \varrho\beta$, $z = c + \varrho\gamma$ die Fläche 2) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k$ berührt.

Res.: $(Aa\alpha + Bb\beta + Cc\gamma)^2 - (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)$
$\cdot (Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 - k^2) = 0$.

344. Die Bedingung dafür zu finden, daß die Fläche $Ax^2 + By^2 + 2Cz = 0$ von der Ebene

$$ax + by + cz + d = 0$$

berührt wird.

Res.: $aBC^2 + AbC^2 + 2ABCcd = 0$.

345. Es sei $\xi\eta\zeta$ die Spitze eines Drehungskegels, ferner seien $\alpha\beta\gamma$ die Richtungskosinus der Achse, φ der Kosinus des erzeugenden Winkels. Die Gleichung der Fläche zu finden.

Res.: $[\alpha(x - \xi) + \beta(y - \eta) + \gamma(z - \zeta)]^2$
$= \varphi^2[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]$.

Welche besondere Form nimmt die Gleichung an, wenn die Drehachse

a) einer Koordinatenebene,

b) einer Koordinatenachse parallel ist,

c) mit allen Koordinatenachsen gleiche Winkel bildet?

346. Den Ort der Spitzen aller Drehungskegel zu finden, welche durch die Parabel $y^2 = 2px$, $z = 0$ gehen*).

Gang: Setze in dem Resultat von Nr. 345 $z = 0$, stelle die Bedingungsgleichungen dafür auf, daß die sich ergebende Gleichung mit $y^2 - 2px = 0$ identisch ist. Durch Elimination von α, β, γ, φ aus diesen

---

*) S. Meier Hirschs Sammlung geom. Aufgaben 1837, IV. Teil, S. 298—303.

Bedingungsgleichungen und aus der Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ findet man als Gleichungen des Ortes

$$\zeta^2 = -2p\left(\xi - \frac{p}{2}\right), \quad \eta = 0\,;$$

er ist also eine Parabel in der XY-Ebene, ihr Brennpunkt ist der Scheitel, ihr Scheitel der Brennpunkt der gegebenen Parabel.

347. Dieselbe Aufgabe für die Ellipse bzw. Hyperbel $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$.

Res.: $b^2x^2 \mp (a^2 \mp b^2)z^2 = (a^2 \mp b^2)b^2\,, \quad y = 0\,.$

348. An das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ ist ein Berührungskegel so gelegt, daß die Ebene der Berührungslinie das Hyperboloid $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} - 1 = 0$ berührt. Welches ist der Ort für die Spitze des Kegels?

Res.: $\frac{a_1^2x^2}{a^4} + \frac{b_1^2y^2}{b^4} - \frac{c_1^2z^2}{c^4} - 1 = 0\,.$

349. Die Seitenflächen E_1, E_2, E_3 eines festliegenden Dreikants werden von einer Geraden, die sich um den in ihr liegenden festen Punkt $A(a\,b\,c)$ dreht, in den Punkten P', P'', P''' geschnitten. Welches ist der Ort des Punktes P, der $P'P''$ im Verhältnis $k_1 : k_2$ und zugleich $P''P'''$ im Verhältnis $k_2 : k_3$ teilt? [Die Dreikantsachsen seien Koordinatenachsen *).]

Res.: $\left.\begin{aligned} k_1(\xi - a)\eta + k_2\xi(\eta - b) &= 0 \\ k_3(\zeta - c)\eta + k_2\zeta(\eta - b) &= 0 \end{aligned}\right\}.$

*) Nr. 349 und 350 aus Neuffer, Über die Behandlung der geom. Örter im Elementarunterricht d. an. Geom. 1896.

Der Ort ist der Schnitt zweier hyperbolischer Zylinder, deren asymptotische Ebenen den Dreikantsflächen parallel sind. Für $k_3 = k_1$ läßt sich aus den Ortsgleichungen die Gleichung $c\,\xi - a\,\zeta = 0$ ableiten, die zeigt, daß in diesem Fall der Ort eine ebene Kurve und zwar eine Hyperbel ist.

350. Gegeben sind die Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,,$$

$$-\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} - 1 = 0$$

und das Paraboloid $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2\,z = 0$. Welches ist der Ort für den auf das Paraboloid bezogenen Pol einer gemeinsamen Berührungsebene der Hyperboloide?

$$\text{Res.:}\quad \left.\begin{aligned} \frac{a^2\,\xi^2}{p^2} + \frac{b^2\,\eta^2}{q^2} - \zeta^2 - c^2 &= 0 \\ \frac{a_1^2\,\xi^2}{p^2} + \frac{b_1^2\,\eta^2}{q^2} + \zeta^2 - c_1^2 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

der Ort ist also die Schnittlinie eines einschaligen Hyperboloids und eines Ellipsoids, deren Achsen ineinanderfallen.

351. Den Ort der Punkte zu finden, durch welche zwei rechtwinklige Mantellinien gehen, und zwar für

a) das einschalige Hyperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$,

b) das hyperbolische Paraboloid $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2\,x$.

Res.: Der Ort ist der Schnitt a) der Mongeschen Kugel mit dem Hyperboloid, b) der Mongeschen Ebene mit dem Paraboloid (s. Nr. 337). Der letztere Ort ist also eine Hyperbel, welche für $p = q$, das gleichseitige Paraboloid, in die beiden zum Scheitel gehörigen Mantellinien übergeht.

352. Aus drei konjugierten Halbmessern des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ wird ein Parallelflach konstruiert. Es soll der Ort für jede Ecke außer O gefunden werden.

Res.: Der Ort für die Gegenecke des Mittelpunktes ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3\,,$$

der für die anderen Ecken

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\,.$$

353. Auf den positiven Zweigen der Koordinatenachsen bewegen sich drei zu gleicher Zeit von O ausgehende Punkte P_1, P_2, P_3 mit den Geschwindigkeiten a, b, c. Welchen Ort beschreibt

a) der Schwerpunkt,

b) der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$,

c) der Fußpunkt des von O auf $P_1 P_2 P_3$ gefällten Lotes?

Res.: a) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$;

b) $$\frac{2(cx - az)}{a^2 - c^2} = \frac{2(cy - bz)}{b^2 - c^2}$$

$$= \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c};$$

c) $ax = by = cz$.

354. Eine Gerade, welche auf der $+X$- und der $-Y$-Achse Stücke von der Länge a abschneidet, wird um die durch O gehende Gerade, welche mit der $+X$-, $+Y$-, $+Z$-Achse gleiche Winkel bildet, gedreht. Gesucht die Gleichung und Art der entstehenden Drehfläche.

Res.: $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - a^2 = 0$

(Drehungshyperboloid).

355. Wie lautet die Gleichung der in der XY-Ebene liegenden Mantellinie der zweiten Schar des Hyperboloids von Nr. 354?

356. Wie lautet die Gleichung der XY-Projektion des Kehlkreises von Nr. 354?

357. Zu beweisen: Die Polarebene eines Punktes in bezug auf jede der drei Flächen

a) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

b) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

c) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

haben von O gleichen Abstand.

Ebenso sind die Abstände der Polarebene eines Punktes in Beziehung auf die beiden Paraboloide

$$\frac{y^2}{p} \pm \frac{z^2}{q} = 2x$$

vom Scheitel einander gleich.

358. Zu beweisen: Fällt man bei einer zentrischen Fläche zweiten Grades von den beiden Punkten, in welchen eine Normale die Fläche und eine Hauptebene schneidet, auf eine andere Hauptebene Lote, so ist das Verhältnis dieser Lote unveränderlich.

Fällt man ebenso bei einem der Paraboloide $\frac{y^2}{p} \pm \frac{z^2}{q} = 2x$ von den beiden Punkten, in welchen eine Normale die Fläche und die XY-Ebene schneidet,

a) Lote auf die YZ-Ebene (Berührungsebene im Scheitel), so ist die Differenz der Abstände,

b) fällt man die Lote auf die XZ-Ebene, so ist das Verhältnis der Abstände konstant.

359. Zu beweisen, daß die Schnittlinie dreier Flächen zweiter Ordnung, welche eine Hauptebene gemeinschaftlich haben, sich auf diese Hauptebene als Linie zweiter Ordnung projiziert.

Haben die beiden Flächen eine Durchmesserebene gemeinschaftlich, so projiziert sich ihre Schnittlinie auf diese Ebene in der Richtung der zugeordneten Sehnen als Linie zweiter Ordnung.

360. Zu beweisen: Wenn zwei Flächen zweiten Grades sich in zwei Punkten berühren, deren Verbindungslinie nicht eine Mantellinie der Fläche ist, so schneiden sie sich im allgemeinen in zwei ebenen Kurven und umgekehrt. Zwei solche Flächen sind daher dargestellt durch Gleichungen von der Form

$F = 0$ und $F + \lambda PQ = 0$, worin P und Q Ausdrücke ersten Grades in x, y und z sind.

361. Zu beweisen: Wenn eine Fläche zweiten Grades, deren Gleichung $F = 0$ ist, von einer zweiten Fläche zweiten Grades längs der Schnittlinie mit einer Ebene $U = 0$ berührt wird, so ist die Gleichung der zweiten Fläche von der Form $F + \lambda U^2 = 0$. Man kann daher durch einen gegebenen Punkt nur eine Fläche zweiten Grades legen, welche eine andere nach einem gegebenen Kegelschnitt berührt.

362. Zu beweisen: Zwei Flächen zweiten Grades, welche derselben anderen Fläche zweiten Grades umschrieben sind, schneiden sich in zwei ebenen Kurven.

363. Zu untersuchen, ob die Sätze Nr. 261—265 über konjugierte Durchmesser des Ellipsoids auch für die Hyperboloide gelten.

364. Zu beweisen: Der Ort der von einem festen Punkt auf die Berührungsebenen einer Kegelfläche zweiten Grades gefällten Lote ist wieder ein Kegel.

365. Zu beweisen: Geht eine bewegliche Sehne eines Ellipsoids durch einen festen Punkt, so beschreibt die Schnittlinie der in den Endpunkten gezogenen gelegten Berührungsebenen eine feste Ebene.

366. Zu zeigen, daß die durch die Gleichungen

$$\varrho) \qquad \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1\,,$$

$$\mu) \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1\,,$$

$$\nu) \qquad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1\,,$$

(wobei b und c konstant und $c > b$) dargestellten Flächen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben — konfokal sind — und daß b, c, $\sqrt{c^2 - b^2}$ die Abstände der in der XY-, XZ- und YZ-Ebene liegenden Brennpunkte von O sind.

367. Zu beweisen, daß die Hauptachsen der Flächen ϱ, μ, ν von Nr. 366 einander rechtwinklig schneiden und daß demgemäß die Schnittlinie von je zwei der Berührungsebenen in einem gemeinschaftlichen Punkt Normale zu der dritten Fläche ist.

368. Zu beweisen: Die Pole einer Ebene in Beziehung auf alle konfokalen zentrischen Flächen liegen in einer zu dieser Ebene senkrechten Geraden. Legt man daher durch jede Schnittlinie jener Ebene an die betreffende Fläche einen Berührungskegel, so liegen die Spitzen dieser Kegel auf einer zu der Ebene senkrechten Geraden.

369. Zu beweisen, daß die Paraboloide

$$\varrho) \qquad \frac{y^2}{p + 2\varrho} + \frac{z^2}{q + 2\varrho} = 2(x + \varrho),$$

$$\mu) \qquad \frac{y^2}{p + 2\mu} + \frac{z^2}{q + 2\mu} = 2(x + \mu),$$

$$\nu) \qquad \frac{y^2}{p + 2\nu} + \frac{z^2}{q + 2\nu} = 2(x + \nu)$$

denselben Brennpunkt haben.

370. Zu zeigen, daß die Flächen ϱ, μ, ν von Nr. 369 sich in einem gemeinschaftlichen Punkt senkrecht schneiden.

371. Welches ist der Ort für den Mittelpunkt $\xi|\eta|\zeta$ einer Kugel vom Halbmesser Null, welche das

Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ doppelt berührt?

Gang: Irgend eine Fläche, welche durch die Schnittlinie einer Kugel vom Halbmesser Null um $\xi\eta\zeta$ mit dem Ellipsoid geht, hat eine Gleichung von der Form

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \\ &\quad + \lambda\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right] = 0 . \end{aligned} \right.$$

Die Kugel ist doppelt berührend, wenn Gleichung 1) ein System von zwei sich schneidenden Ebenen darstellt. Das ist der Fall, wenn 1) unendlich viele Mittelpunkte hat, die auf der Fläche und in einer Geraden liegen. Die drei Gleichungen, aus welchen sich die Lage des Mittelpunktes von 1) bestimmt, müssen sich also auf zwei reduzieren; dies ist der Fall, wenn zum Beispiel

$$\zeta = 0 , \qquad \frac{x}{a^2} = \frac{\xi}{a^2 - c^2} , \qquad \frac{y}{b^2} = \frac{\eta}{b^2 - c^2} ,$$

hiermit folgt aus 1)

$$\text{a)} \quad \zeta = 0 , \qquad \frac{\xi^2}{a^2 - c^2} + \frac{\eta^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0 ,$$

ebenso folgt

$$\text{b)} \quad \xi = 0 , \qquad \frac{\eta^2}{b^2 - a^2} + \frac{\zeta^2}{c^2 - a^2} - 1 = 0$$

und

$$\text{c)} \quad \eta = 0 , \qquad \frac{\zeta^2}{c^2 - b^2} + \frac{\xi^2}{a^2 - b^2} - 1 = 0 .$$

Der Ort besteht also aus den drei Kegelschnitten a), b), c); sie heißen Fokallinien, sie haben mit den zugehörigen Hauptschnitten die Brennpunkte gemein. Der einzelne Kugelmittelpunkt heißt Brennpunkt im weiteren Sinne. Zu einem Brennpunkt $\xi\eta 0$ (F_1) gehören die Ebenen $x = \frac{a^2 \xi}{a^2 - c^2}$, $y = \frac{b^2 \eta}{b^2 - c^2}$, ihre Schnittlinie, die Direktrix von F_1, ist senkrecht zu der XY-Ebene, die Polare ihres Fußpunktes Q in bezug auf den zugehörigen Hauptschnitt ist Tangente an die Fokallinie in F_1.

372. Dieselbe Aufgabe für das Paraboloid

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x.$$

Res.: Zwei Fokallinien

$$\text{a)} \quad \eta = 0, \quad \frac{\zeta^2}{p - q} = -2\xi + p,$$

$$\text{b)} \quad \zeta = 0, \quad \frac{\eta^2}{p - q} = -2\xi + q.$$

373. Zu beweisen: Wenn eine Ebene sich so bewegt, daß sie beständig eine zentrische Fläche zweiten Grades berührt, so ist das Produkt ihrer Abstände vom Mittelpunkt und von ihrem in bezug auf eine zweite konfokale Fläche genommenen Pol konstant und gleich der Differenz der Quadrate der großen Halbachsen beider Flächen.

#18134.
324018
LUBLIN

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Feldgeschütz, Das moderne, von W. Heydenreich, Oberstleutnant u. Militärlehrer an der Militärtechnischen Akademie. II: Die Entwicklung des heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart. Mit 11 Abbildungen. Nr. 307.

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Figuren und 1 Tafel. Nr. 155.

Festigkeitslehre von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit zahlreichen Figuren. Nr. 288.

Filzfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Finanzwissenschaft v. Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 148.

Fischerei und Fischzucht v. Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

Formelsammlung, Mathemat., u. Repetitorium d. Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes, d. Different.- u. Integralrechn. v. O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. Mit 18 Fig. Nr. 51.

— **Physikalische,** von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Forstwissenschaft von Dr. Ad. Schwappach, Professor an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.

Fremdwort, Das, im Deutschen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.

Fremdwörterbuch, Deutsches, von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.

Gardinenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

Geodäsie von Dr. C. Reinhertz, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild. Nr. 102.

Geographie, Astronomische, von Dr. Siegm. Günther, Professor a. d. Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

— **Physische,** von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

— s. auch: Landeskunde. — Länderkunde.

Geologie v. Professor Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. und 4 Tafeln mit über 50 Figuren. Nr. 13.

Geometrie, Analytische, der Ebene v. Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Figuren. Nr. 65.

— **—Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene** von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 256.

— **Analytische, des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.

— — **Aufgabensammlung z. Analyt. Geometrie d. Raumes** von O. Th. Bürklen, Prof. a. Realgymn. i. Schwäb.-Gmünd. M. 8 Fig. Nr. 309.

Geometrie, Darstellende, v. Dr. Rob. Haußner, Prof. an der Universität Jena. I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.

— **Ebene,** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarb. Fig. Nr. 41.

— **Projektive,** in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Prof. an der Universität München. Mit 91 Figuren. Nr. 72.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Geschichte, Badische, von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim und Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.

— **Bayerische**, von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

— **des Byzantinischen Reiches** von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

— **Deutsche, I: Mittelalter** (bis 1500) von Dr. F. Kurze, Oberl. am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 33.

— — **II: Zeitalter der Reformation u. der Religionskriege** von Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 34.

— — **III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648—1806) von Dr. F. Kurze, Oberl. am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 35.

— — siehe auch: Quellenkunde.

— **Französische**, von Dr. R. Sternfeld, Prof. a. d. Univers. Berlin. Nr. 85.

— **Griechische**, von Dr. Heinrich Swoboda, Professor an der deutschen Universität Prag. Nr. 49.

— **des 19. Jahrhunderts** v. Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Univers. Bonn. 1. Bdchn.: 1800—1852. Nr. 216.

— — 2. Bdchn.: 1853 bis Ende d. Jahrh. Nr. 217.

— **Israels** bis auf die griech. Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

— **Lothringens**, von Dr. Herm. Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.

— **des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, Prof. a. d. Univers. München. M. 6 Bild. u. 1 Kart. Nr. 43.

— **Österreichische, I:** Von der Urzeit bis 1439 von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 104.

Geschichte, Österreichische II: Von 1526 bis zur Gegenwart von Hofrat Dr. Franz von Krones, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 105.

— **Römische**, von Realgymnasial-Dir. Dr. Jul. Koch in Grunewald. Nr. 19.

— **Russische**, v. Dr. Wilh. Reeb, Oberl. am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.

— **Sächsische**, von Professor Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.

— **Schweizerische**, von Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.

— **Spanische**, von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.

— **der Chemie** siehe: Chemie.

— **der Malerei** siehe: Malerei.

— **der Mathematik** s.: Mathematik.

— **der Musik** siehe: Musik.

— **der Pädagogik** siehe: Pädagogik.

— **der Physik** siehe: Physik.

— **des deutschen Romans** s.: Roman.

— **der deutschen Sprache** siehe: Grammatik, Deutsche.

— **des deutschen Unterrichtswesens** siehe: Unterrichtswesen.

Geschichtswissenschaft, Einleitung in die, von Dr. Ernst Bernheim, Professor an der Universität Greifswald. Nr. 270.

Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.

Gewerbewesen von Werner Sombart, Professor an d. Universität Breslau. I. II. Nr. 203. 204.

Gewichtswesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Gleichstrommaschine, Die, von C. Kinzbrunner, Ingenieur und Dozent für Elektrotechnik an der Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Figuren. Nr. 257.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Gletscherkunde von Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbild. im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.

Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach u. Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Grammatik, Deutsche, und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

— **Griechische,** I: Formenlehre von Dr. Hans Meltzer, Professor an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 117.

— — II: Bedeutungslehre und Syntax von Dr. Hans Meltzer, Professor an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 118.

— **Lateinische.** Grundriß der lateinischen Sprachlehre von Professor Dr. W. Votsch in Magdeburg. Nr. 82.

— **Mittelhochdeutsche.** Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Prof. a. d. Universität Rostock. Nr. 1.

— **Russische,** von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 66.

— — siehe auch: Russisches Gesprächsbuch. — Lesebuch.

Handelskorrespondenz, Deutsche, von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.

— **Englische,** von E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.

— **Französische,** v. Professor Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.

— **Italienische,** von Professor Alberto de Beaux, Oberlehrer am Kgl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.

— **Spanische,** von Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.

Handelspolitik, Auswärtige, von Dr. Heinr. Sieveking, Prof. an der Universität Marburg. Nr. 245.

Handelswesen, Das, von Dr. Wilh. Lexis, Professor an der Universität Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

— — II: Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und **Gottfried von Straßburg.** Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Professor am Königlichen Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Hauptliteraturen, Die, d. Orients v. Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. a. d. Universität Wien. I. II. Nr. 162. 163.

Heldensage, Die deutsche, von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Prof. an der Universität Münster. Nr. 32.

— siehe auch: Mythologie.

Industrie, Anorganische Chemische, v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.

— — II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.

— — III: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

— **der Silikate, der künstl. Bausteine und des Mörtels.** I: Glas- und keramische Industrie von Dr. Gustav Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 233.

— — II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Professor am Karlsgymn. in Stuttgart. Mit 89 Fig. Nr. 88.

Integralrechnung. Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedrich Junker, Professor am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 50 Figuren. Nr. 147.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Kartenkunde, geschichtlich dargestellt von E. Gelcich, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo und F. Sauter, Professor am Realgymnasium in Ulm, neu bearbeitet von Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin. Mit 70 Abbildungen. Nr. 30.

Kirchenlied. Martin Luther, Thom. Murner, und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Professor G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Professor Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Tafeln und 2 Fig. Nr. 114.

Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Professor der Geschichte an der Universität Berlin. Nr. 156.

Kompositionslehre. Musikalische Formenlehre von Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.

Kontrollwesen, Das agrikulturchemische, von Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Körper, der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.

Kristallographie von Dr. W. Bruhns, Professor an der Universität Straßburg. Mit 190 Abbild. Nr. 210.

Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 10.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Kultur, Die, der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 189.

Kulturgeschichte, Deutsche, von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Künste, Die graphischen, von Carl Kampmann, Fachlehrer a. d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbildungen und Beilagen. Nr. 75.

Kurzschrift siehe: Stenographie.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

— **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen u. Profil. Nr. 63.

Landeskunde von Baden von Prof. Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. M. Profil, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 199.

— **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Professor an der Kgl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbild. u. 1 Karte. Nr. 176.

— **von Britisch-Nordamerika** von Prof. Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 284.

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildgn. u. 1 Karte. Nr. 215.

— **der Iberischen Halbinsel** von Dr. Fritz Regel, Professor an der Universität Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbildung. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

— **von Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 10 Textillustration. und 1 Karte. Nr. 244.

— **des Königreichs Sachsen** v. Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abbildungen u. 1 Karte. Nr. 258.

— **von Skandinavien** (Schweden, Norwegen und Dänemark) von Heinrich Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbild. und 1 Karte. Nr. 202.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Landeskunde des Königreichs Württemberg von Dr. Kurt Hassert, Professor der Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern u. 1 Karte. Nr. 157.

Landwirtschaftliche Betriebslehre von Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 227.

Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert. Kulturhistorische Erläuterungen zum Nibelungenlied und zur Kudrun. Von Professor Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel und 30 Abbildungen. Nr. 93.

Lessings Emilia Galotti. Mit Einleitung und Anmerkungen von Prof. Dr. W. Votsch. Nr. 2.

— **Minna v. Barnhelm.** Mit Anm. von Dr. Tomaschek. Nr. 5.

Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

Literatur, Althochdeutsche, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Professor am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

— **des 16. Jahrhunderts I: Martin Luther, Thom. Murner u. das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts II: Hans Sachs. Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

— — **III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Sirenes und Fabel.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

Literaturen, Die, des Orients. I. Teil: Die Literaturen Ostasiens und Indiens v. Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 162.

— II. Teil: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken, von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 163.

Literaturgeschichte, Deutsche, von Dr. Max Koch, Professor an der Universität Breslau. Nr. 31.

— **Deutsche, der Klassikerzeit** von Carl Weitbrecht, Professor an der Techn. Hochschule Stuttgart. Nr. 161.

— **Deutsche, des 19. Jahrhunderts** von Carl Weitbrecht, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. I. II. Nr. 134. 135.

— **Englische,** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

— — Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286. 287.

— **Griechische,** mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Prof an der Universität Greifswald. Nr. 70.

— **Italienische,** von Dr. Karl Voßler, Professor a. d. Universität Heidelberg. Nr. 125.

— **Nordische,** I. Teil: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Professor an der Universität Rostock. Nr. 254.

— **Portugiesische,** von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule i. München. Nr. 213.

— **Römische,** von Dr. Hermann Joachim in Hamburg. Nr. 52.

— **Russische,** von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

— **Slavische,** von Dr. Josef Karásek in Wien. 1. Teil: Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— — 2. Teil: Das 19. Jahrh. Nr. 278.

— **Spanische,** von Dr. Rudolf Beer in Wien. I. II. Nr. 167. 168.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Luther, Martin, Thom. Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Magnetismus. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

Malerei, Geschichte der, I. II. III. IV. V. von Dr. Rich. Muther, Professor an der Universität Breslau. Nr. 107—111.

Mälzerei. Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor d. Öffentl. u. l. Sächs. Versuchsstation für Brauerei u. Mälzerei, sowie der Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Nr. 303.

Maschinenelemente, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Fr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. August Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Nr. 221.

Materialprüfungswesen. Einführ. i. d. mod. Technik d. Materialprüfung von K. Memmler, Diplomingenieur. Ständ. Mitarbeiter a. Kgl. Material-Prüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel f. Festigkeitsversuche. Mit 55 Fig. Nr. 311.

Materialprüfungswesen. Einführ. i. d. mod. Technik d. Materialprüfung von K. Memmler, Diplomingenieur. Ständ. Mitarbeiter a. Kgl. Material-Prüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. II: Metallprüfung u. Prüfung von Hilfsmaterialien d. Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Figuren. Nr. 312

Mathematik, Geschichte der, von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univ. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

Meereskunde, Physische, von Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbild. im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Messungsmethoden, Physikalische v. Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Fig. Nr. 301.

Metalle (Anorganische Chemie 2. Teil) v. Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Metalloide (Anorganische Chemie 1. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Professor an der Universität Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.

Mineralogie von Dr. R. Brauns, Professor an der Universität Kiel. Mit 130 Abbildungen. Nr. 29.

Minnesang und Spruchdichtung. Walther v. d. Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Professor an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Morphologie, Anatomie u. Physiologie der Pflanzen. Von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 141.

Münzwesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Murner, Thomas. Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrh. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberl. am Nikolaigymn. zu Leipzig. Nr. 7.

Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen, von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbild. und Musikbeilagen. Nr. 121.

Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre) v. Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.

Musikgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.

— **des 19. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164. 165.

Musiklehre, Allgemeine, v. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Mythologie, Germanische, von Dr. Eugen Mogk, Professor an der Universität Leipzig. Nr. 15.

— **Griechische und römische,** von Dr. Herm. Steuding, Professor am Kgl. Gymnasium in Wurzen. Nr. 27.

— siehe auch: Heldensage.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigations-Schule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.

Nibelunge, Der, Nöt in Auswahl und Mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Professor an der Universität Rostock. Nr. 1.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großh. landwirtschaftlichen Versuchsanstalt Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.

Pädagogik im Grundriß von Professor Dr. W. Rein, Direktor des Pädagogischen Seminars an der Universität Jena. Nr. 12.

— **Geschichte der,** von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

Paläontologie v. Dr. Rud. Hoernes, Prof. an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Professor J. Vonderlinn in Breslau. Mit 121 Figuren. Nr. 260.

Perspektive nebst einem Anhang üb. Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Architekt Hans Freyberger, Oberlehrer an der Baugewerkschule Köln. Mit 88 Abbild. Nr. 57.

Petrographie von Dr. W. Bruhns, Prof. a. d. Universität Straßburg i. E. Mit 15 Abbild. Nr. 173.

Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Oberlehrer Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Pflanzenkrankheiten v. Dr. Werner Friedrich Bruck in Gießen. Mit 45 Abbildungen und 1 farb. Tafel. Nr. 310.

Pflanzen-Morphologie, -Anatomie und -Physiologie von Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 141.

Pflanzenreich, Das. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Figuren. Nr. 122.

Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 158.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Philosophie, Einführung in die, von Dr. Max Wentscher, Prof. a. d. Universität Königsberg. Nr. 281.

— Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Photographie. Von Prof. H. Keßler, Fachlehrer an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbild. Nr. 94.

Physik, Theoretische, I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Univ. Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Universität Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

— **Geschichte der,** von A. Kistner, Professor an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.

— — II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Nr. 294.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Prof. d. Mathem. u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Physikalische Messungsmethoden v. Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Fig. Nr 301.

Plastik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

Poetik, Deutsche, von Dr. K. Borinski, Dozent a. d. Univ. München. Nr. 40.

Posamentiererei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Ind. zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie, von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Psychophysik, Grundriß der, von Dr. G. F. Lipps in Leipzig. Mit 3 Figuren. Nr. 98.

Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der kgl. höheren Maschinenbauschule in Posen. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 290.

Quellenkunde zur deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. a. d. Universität Tübingen. 2 Bände. Nr. 279. 280.

Rechnen, Kaufmännisches, von Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139. 140. 187.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Tietze, Professor an der Universität Göttingen. Nr. 305.

Rechtslehre, Allgemeine, von Dr. Th. Sternberg in Charlottenburg. I: Die Methode. Nr. 169.

— II: Das System. Nr. 170.

Rechtsschutz, Der internationale gewerbliche, von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.

Redelehre, Deutsche, v. Hans Probst, Gymnasialprofessor in Bamberg. Mit einer Tafel. Nr. 61.

Religionsgeschichte, Alttestamentliche, von D. Dr. Max Löhr, Prof. an der Universität Breslau. Nr. 292.

— **Indische,** von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.

— — siehe auch Buddha.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Religionswissenschaft, Abriß der vergleichenden, von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.

Roman. Geschichte d. deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielke. Nr. 229.

Russisch-Deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 68.

Russisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 67.

— — siehe auch: Grammatik.

Sachs, Hans. Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.

Säugetiere. Das Tierreich I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.

Schattenkonstruktionen v. Prof. J. Vonderlinn in Breslau. Mit 114 Fig. Nr. 236.

Schmarotzer u. Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde v. Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. d. Univers. Gießen. Mit 67 Abbildungen. Nr. 151.

Schule, Die deutsche, im Auslande, von Hans Amrhein in Halle a. S. Nr. 259.

Schulpraxis. Methodik der Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminaroberlehrer in Annaberg. Nr. 50.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeb. von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.

Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Spinnenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

Sprachdenkmäler, Gotische, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.

Sprachwissenschaft, Germanische, v. Dr. Rich. Loewe in Berlin. Nr. 238.

— **Indogermanische,** v. Dr. R. Meringer, Prof. a. d. Univ. Graz. Mit einer Tafel. Nr. 59.

Sprachwissenschaft, Romanische, von Dr. Adolf Zauner, Privatdozent an der Universität Wien. I: Lautlehre u. Wortlehre I. Nr. 128.

— — II: Wortlehre II u. Syntax. Nr. 250.

— **Semitische,** von Dr. C. Brockelmann, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 291.

Staatsrecht, Preußisches, von Dr. Fritz Stier-Somlo, Professor an der Universität Bonn. 2 Teile. Nr. 298 u. 299.

Stammeskunde, Deutsche, von Dr. Rudolf Much, a. o. Professor an d. Universität Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.

Statik, I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper v. W. Hauber, diplom. Ing. Mit 82 Fig. Nr. 178.

— II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.

Stenographie nach dem System von F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Mitglied des Kgl. Stenogr. Instituts Dresden. Nr. 246.

— Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken u. einem Anhang v. Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses Oranienstein. Nr. 86.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Professor a. d. Universität Tübingen. Mit 34 Abbild. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 44 Figuren. Nr. 97.

Stilkunde von Karl Otto Hartmann, Gewerbeschulvorstand in Lahr. Mit 7 Vollbildern und 195 Text-Illustrationen. Nr. 80.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Technologie, Allgemeine chemische, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Teerfarbstoffe, Die, mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Professor an der Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.

Telegraphie, Die elektrische, von Dr. Lud. Rellstab. M. 19 Fig. Nr. 172.

Testament. Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. W. Staerk in Jena. Nr. 272.

— Die Entstehung des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Dir. der Königlichen Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Thermodynamik (Technische Wärmelehre) von K. Walther und M. Röttinger, Dipl.-Ingenieuren. Mit 54 Fig. Nr. 242.

Tierbiologie I: Entstehung und Weiterbildung der Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Mit 33 Abbildungen. Nr. 131.

— **II:** Beziehungen der Tiere zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.

Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Tierkunde v. Dr. Franz v. Wagner, Professor an der Universität Gießen. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Tierreich, Das, I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.

Tierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle, von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.

Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Dr. Gerh. Hessenberg, Privatdoz. an der Techn. Hochschule in Berlin. Mit 70 Figuren. Nr. 99.

Unterrichtswesen, Das öffentliche, Deutschlands i. d. Gegenwart von Dr. Paul Stötzner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.

— **Geschichte des deutschen Unterrichtswesens** von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.

— — **II.** Teil: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Urgeschichte der Menschheit v. Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Univ. Wien. Mit 53 Abbild. Nr. 42.

Urheberrecht, Das deutsche, an literarischen, künstlerischen und gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Univ. Freiburg i. B. Nr. 180.

Versicherungswesen, Das, von Dr. iur. Paul Moldenhauer, Dozent der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. Nr. 262.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.

Volkslied, Das deutsche, ausgewählt und erläutert von Professor Dr. Jul. Sahr. Nr. 25.

Volkswirtschaftslehre v. Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Freiburg i. B. Nr. 133.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Volkswirtschaftspolitik von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 177.

Waltharilied, Das, im Versmaße der Urschrift übersetzt und erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer a. Realgymnasium i. Weimar. Nr. 46.

Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule und a. d. Techn. Hochsch. in Stuttgart. Nr. 23.

Warenkunde, von Dr. Karl Hassack, Professor an der Wiener Handelsakademie. I. Teil: Unorganische Waren. Mit 40 Abbildungen. Nr. 222.

— II. Teil: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.

Wärme. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik) von R. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ingenieuren. Mit 54 Figuren. Nr. 242.

Wäscherei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Wasser, Das, und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe von Dr. Ernst Leher, Dipl.-Ingen. in Saalfeld. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.

Weberei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Wirkerei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Wolfram von Eschenbach. Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. a. Kgl. Friedrichskolleg. z. Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— **Deutsches,** von Dr. Ferd. Detter, Prof. an d. Universität Prag. Nr. 64.

Zeichenschule von Prof. K. Kimmich in Ulm. Mit 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck u. 135 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

Zeichnen, Geometrisches, von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearb. v. Prof. J. Vonderlinn, diplom. und staatl. gepr. Ingenieur in Breslau. Mit 290 Fig. und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Weitere Bände erscheinen in rascher Folge.

Sammlung Schubert.

Sammlung mathematischer Lehrbücher,

die, auf wissenschaftlicher Grundlage beruhend, den Bedürfnissen des Praktikers Rechnung tragen und zugleich durch eine leicht faßliche Darstellung des Stoffs auch für den Nichtfachmann verständlich sind.

G. J. Göschensche Verlagshandlung in Leipzig.

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände:

1 **Elementare Arithmetik und Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 2.80.
2 **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. M. 4.80.
3 **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. 2. Auflage. M. 2.—.
4 **Elementare Stereometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.40.
5 **Niedere Analysis I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen** von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.60.
6 **Algebra mit Einschluß der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. M. 4.40.
7 **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. M. 5.—.
8 **Analytische Geometrie der Ebene** von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 6.—.
9 **Analytische Geometrie des Raumes I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel** von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.—.
10 **Differential- und Integralrechnung I. Teil: Differentialrechnung** von Prof. Dr. W. Frz. Meyer in Königsberg. M. 9.—.
11 **Differential- und Integralrechnung II. Teil: Integralrechnung** von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. M. 10.—.
12 **Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. M. 5.—.
13 **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. 2. Auflage. M. 8.—.
14 **Praxis der Gleichungen** von Prof. C. Runge in Hannover. M. 5.20.
19 **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungs-Rechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. M. 8.—.
20 **Versicherungsmathematik** von Dr. W. Grossmann in Wien. M. 5.—.
25 **Analytische Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flächen zweiten Grades** von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.40.
27 **Geometrische Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen** von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München. M. 10.—.
29 **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen I. Teil** von Professor Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 4.80.
31 **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 8.50.
32 **Theorie und Praxis der Reihen** von Prof. Dr. C. Runge in Hannover. M. 7.—.
34 **Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil** von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 12.—.

Sammlung Schubert.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

35 **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.

36 **Mehrdimensionale Geometrie II. Teil: Die Polytope** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.

38 **Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung I. Teil** v. Prof. E. Grimsehl in Hamburg. M. 6.—.

39 **Thermodynamik I. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt, Göttingen. M. 10.—.

40 **Mathematische Optik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 6.—.

41 **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrokinetik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 5.—.

42 **Theorie der Elektrizität u. d. Magnetismus II. Teil: Magnetismus und Elektromagnetismus** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 7.—.

43 **Theorie der ebenen algebraischen Kurven höh. Ordnung** v. Dr. Heinr. Wieleitner in Speyer. M. 10.—.

44 **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil** von Professor Dr. Victor Kommerell in Reutlingen u. Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 5.80.

45 **Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen** von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.80.

46 **Thetafunktionen u. hyperelliptische Funktionen** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 4.50.

48 **Thermodynamik II. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt, Göttingen. M. 10.—.

49 **Nicht-Euklidische Geometrie** v. Dr. H. Liebmann, Leipzig. M. 6.50.

50 **Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung** von Dr. J. Horn, Professor an der Bergakademie zu Clausthal. M. 10.—.

51 **Liniengeometrie mit Anwendungen II. Teil** von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 8.—.

In Vorbereitung bzw. projektiert sind:

Elemente der Astronomie.

Mathematische Geographie.

Darstellende Geometrie II. Teil: Anwendungen der darstellenden Geometrie.

Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. von Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.

Dynamik von Professor Dr. Karl Heun in Karlsruhe.

Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.

Geodäsie von Professor Dr. A. Galle in Potsdam.

Allgemeine Funktionentheorie von Dr. Paul Epstein in Straßburg.

Räumliche projektive Geometrie.

Geometrische Transformationen II. Teil von Professor Dr. Karl Doehlemann in München.

Elliptische Funktionen von Dr. Karl Boehm in Heidelberg.

Allgem. Formen- u. Invariantentheorie.

Kinematik von Professor Dr. Karl Heun in Karlsruhe.

Elektromagnet. Lichttheorie von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg.

Gruppen- u. Substitutionentheorie von Prof. Dr. E. Netto in Gießen.

Theorie der Flächen dritter Ordnung.

Mathematische Potentialtheorie v. Prof. Dr. A. Wangerin in Halle.

Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Bauwesen von Dr. ing. H. Reißner in Berlin.

Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Maschinenbau von Dr. Rudolf Wagner in Stettin.

Graphisches Rechnen von Prof. Aug. Adler in Prag.

Partielle Differentialgleichungen von Professor J. Horn in Clausthal.

Grundlagen der theoretischen Chemie von Dr. Franz Wenzel in Wien.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Grundriß der Handelsgeographie

von

Dr. Max Eckert

Privatdozent der Erdkunde an der Universität Kiel

2 Bände

I: Allgemeine Wirtschafts- und Verkehrsgeographie

Preis: Broschiert M. 3.80—, geb. in Halbfranz M. 5.—

II: Spezielle Wirtschafts- und Verkehrsgeographie

Preis: Broschiert M. 8.—, geb. in Halbfranz M. 9.20

Dieser Grundriß ist ein Versuch, die Handelsgeographie als ein einheitliches wissenschaftliches System, das die gesamte Wirtschafts- und Verkehrsgeographie umfaßt, darzustellen. Ihr Wesen und ihre Aufgaben bestimmt der Verfasser dahin, daß sie von der Kenntnis der allgemeinen Lage und der orographischen und hydrographischen Voraussetzungen aus die gründliche Einsicht in die Erwerbs- und Verkehrsverhältnisse sowohl eines einzelnen Landschaftsgebietes bzw. eines einzelnen Wirtschaftsreiches, als auch der gesamten Erde, unter steter Berücksichtigung der wichtigsten klimatologischen, geologischen, volkswirtschaftlichen und politischen Faktoren, vermittelt.

Leitfaden der Handelsgeographie

von

Dr. Max Eckert

Preis: In Leinwand geb. M. 3.—

Dieser Leitfaden ist für die Hand des Schülers bestimmt. Er ist im allgemeinen ein Auszug aus dem vorstehenden „Grundriß der Handelsgeographie"; wenn sich aber auch die stoffliche Verteilung im großen und ganzen nach diesem Werk richtet, so sind doch in einzelnen Punkten bedeutende Veränderungen vorgenommen worden. Außerdem wurde das statistische Beiwerk auf ein Minimum beschränkt.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Allgemeine und spezielle Wirtschaftsgeographie

von

Dr. Ernst Friedrich

Privatdozent an der Universität Leipzig

Mit 3 Karten

Preis: Broschiert M. 6.80, geb. in Halbfranz M. 8.20

Dieses Buch sucht in ein **hologäisches Verständnis** der Wirtschaft (Produktion und Verkehr) einzuführen, indem es zeigt, wie jede örtliche Wirtschaft als Teil in dem zusammenhängenden und durch tellurische Faktoren bestimmten Wirtschaftsleben der Erde dasteht. Dabei wird, wie es richtig ist, die Produktion der Länder in den Vordergrund gestellt, der Verkehr an zweiter Stelle behandelt.

Zeichenkunst

Methodische Darstellung des gesamten Zeichenwesens unter Mitwirkung erster Kräfte herausgegeben von

Karl Kimmich

582 Seiten, mit 1091 Text-Illustrationen, sowie 57 Farb- und Lichtdrucktafeln

2 Bände

Preis: gebunden M. 25.—

Biblioteka im. Hieronima
Łopacińskiego w Lublinie

I 324018

1000072444