

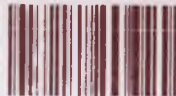
~~18091~~

B. P. im. L.

110

BIBLIOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA.

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ LICZEBNYCH.



1000084262

661

PLAN BIBLIOTEKI MATEMATYCZNO-FIZYCZNEJ.

SERYJA PIĘRWSZA (12-mo).

- Tom I. **Początki arytmetyki** M. BERKMANA. Str. X + 266; z drzeworytami w tekście. W oprawie kop. 65.
 Tom II. **Wiadomości początkowe z fizyki** S. KRAMSZTYKA. Książeczka I. Str. X + 77; drzeworytów 47. W oprawie kop. 30.
 Tom III. Toż. Książeczka II. Str. VIII + 132; drzeworytów 56. W oprawie kop. 45.
 Tom IV. **Wiadomości początkowe z geografii fizycznej i meteorologii** A. W. WITKOWSKIEGO. Str. VIII + 108; drzeworytów 22, litografij 4. W oprawie kop. 45.
 Tom V. **O najprostszyc figurach geometrycznych** M. BERKMANA. *W. w. z d.*

SERYJA DRUGA (12-mo).

- Tom I. **Arytmetyka** M. BERKMANA. *W. w. z d.*
 Tom II. **Krótki wykład geometrii.**
 Tom III. **Krótki wykład początków algebry.**
 Tom IV. **Przystępny wykład fizyki.**
 Tom V. **Kosmografija i geografija fizyczna z meteorologiją.**
 Tom VI. **Nauka rysunków technicznych.**



SERYJA TRZECIA (8-vo).

- Tom I. **Arytmetyka, kurs teoretyczny** M. A. BARANIECKIEGO, z przypiskami A. ŻBIKOWSKIEGO i J. N. FRANKEGO. Str. LVIII + 375, z drz. w tekście. Rubel 1 kop. 70.
 Tom II. **Zadania arytmetyczne** A. JURGIELEWICZA. *W. w. z d.*
 Tom III. **Algebra elementarna i Teoryja przybliżeń liczebnych.**
 Tom IV. **Geometrija elementarna.**
 Tom V. **Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych** M. A. BARANIECKIEGO. *W. w. z d.*
 Tom VI. **Trygonometrija płaska i kulista.**
 Tom VII. **Miernictwo.**
 Tom VIII. **Zasady fizyki** A. W. WITKOWSKIEGO. *W. w. z d.*
 Tom IX. **Kosmografija** J. JĘDRZEJEWICZA. *W. w. z d.*
 Tom X. **Geografija fizyczna z meteorologiją.**
 Tom XI. **Geometrija wykreślana.**
 Tom XII. **Mechanika elementarna.**



SERYJA CZWARTA (8-vo Lex).

- Tom I. **Wstęp do analizy** M. A. BARANIECKIEGO. *W. w. z d.*
 Tom II. **Rozwiązywanie równań liczebnych** J. SOCHOCKIEGO. Str. XII + 212; drzew. 9. Rubli 2.
 Tom III. **Teoryja równań algebracyjnych** J. SOCHOCKIEGO. *W. w. z d. (*)*
 Tom IV. **Geometrija analityczna** W. ZAJĄCZKOWSKIEGO. Str. XL + 511; drzeworytów 85, Rubli 3.
 Tom V. **Geometrija syntetyczna. (**)**
 Tom VI. **Rachunek różniczkowy i całkowy. (***)**
 Tom VII. **Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego.**
 Tom VIII. **Rachunek wariacyjny.**
 Tom IX. **Rachunek prawdopodobieństwa i Metoda najmniejszych kwadratów.**
 Tom X. **Zasady mechaniki teoretycznej** J. N. FRANKEGO. *W. w. z d.*
 Tom XI. **Rachunki wykreślne.**

TOM DODATKOWY «BIBLIOTEKI». Słownik matematyczno-fizyczny.

Jako uzupełniające seryją IV «Bibl. mat.-fiz.» należy uważać następujące dzieła, ogłoszone przez BIBLIOTEKĘ KÓRNICKĄ:

- (*) **Teoryja wyznaczników**, kurs uniwersytecki M. A. BARANIECKIEGO. Paryż, 1879. 8-vo, str. XXII + 600. Marek 12.
 (**) **Wykład geometrii wykreślnej** E. SAGAYEY. Paryż, 1882. 4-to, str. 444 z bardzo wielu drzeworytami w tekście, oraz LXII tablic miedziorytów. Marek 24.
 (***) **Wykład nauki o równaniach różniczkowych** W. ZAJĄCZKOWSKIEGO. Paryż, 1877. 8-vo, str. XXIV + 904. Marek 20.

BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

WYDAWANA POD REDAKCYJĄ

M. A. BARANIECKIEGO

Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH

NA POLU NAUKOWYM, IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

SERYJA IV.

TOM II.

661

ROZWIĄZYWANIE

RÓWNAŃ LICZEBNYCH.

NAPISAŁ

166062

DR. JULIJAN SOCHOCKI,

PROFESOR UNIwersYTETU W PETERSBURGU.



WARSZAWA.

W Drukarni NOSKOWSKIEGO.

1884.

Дозволено Цензурою.
Варшава 23 Октября 1884 г.



512

Składał zecer F. Lewandowski.
Drzewożyty ciał W. Bojarski.
Papiér z papiérni w Pilicy.

SPIS RZECZY.

PRZEDMOWA AUTORA	Str. XI
Errata	XII

ROZDZIAŁ I.

§ I. O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH FUNKCYJ CAŁKOWITYCH	1
1. Pojęcie o równaniu i jego pierwiastkach. — 2. Warunek podzielności funkcji $f(x)$ przez $x - a$. — 3. Wzór Lagrange'a. — 4. O pewnej własności funkcji, nie posiadającej wyrazu stałego. Przykłady. — 5. Własności mod $f(x)$ przy dostatecznie małym i dostatecznie wielkim mod x . Przykłady.	
§ II. O RÓWNANIACH ZE SPÓŁCZYNNIKAMI ZESPOLONYMI.	8
6. Rozwiązanie równania ze współczynnikami zespolonymi może być sprowadzone do rozwiązania równania ze współczynnikami rzeczywistymi. — 7. O pierwiastkach rzeczywistych równania ze współczynnikami zespolonymi. Przykład.	
§ III. KRAŃCE DLA PIERWIASTKÓW RZECZYWISTYCH.	11
8. Krańce wyższy dla pierwiastków dodatnich. Przykłady. — 9. Inny sposób znalezienia krańca wyższego dla pierwiastków dodatnich. Przykłady. — 10. Oznaczenie krańca niższego dla pierwiastków dodatnich. Przykład. — 11. Oznaczenie krańców dla pierwiastków ujemnych. Przykłady.	

ROZDZIAŁ II.

§ I. WZÓR TAYLOR'A	17
12. Wywód wzoru Taylor'a. Przykład. — 13. Sposób Newton'a oznaczenia krańca wyższego dla pierwiastków dodatnich. Przykład.	
§ II. OBLICZANIE WARTOŚCI FUNKCYI CAŁKOWITEJ I JEJ POCHODNYCH	19
14. O obliczaniu wartości funkcji $f(x)$ przy $x = a$. Przykład. — 15. Algorytm Horner'a. Przykład.	
§ III. PIERWIASTKI WIELOKROTNE	21
16. O stopniu wielokrotności pierwiastka. Przykłady. — 17. Twierdzenie d'Alembert'a.	
§ IV. PRAWO CIĄGŁOŚCI	23
18. Dowód ciągłości funkcji całkowitych. — 19. Ciągłość funkcji ułamkowych.	
§ V. PRZYPADEK, KIEDY ZMIENNE x I $f(x)$ SĄ RZECZYWISTE	26
20. Wyniki prawa ciągłości. — 21. Przypadek, kiedy funkcja $f(x)$ zmienia znak. —	

Krótki zarys historyczny rozwoju nauki o równaniach algebraicznych, który zostanie pomieszczony w tomie następnym «Bibl.», obejmie równania liczebne. Tu zaś, w odsyłaczach do odpowiednich miejsc «Spisu», podane są (przez Redakcyję) tylko wskazówki, gdzie można znaleźć prace społecznych matematyków, uwzględnione w tym tomie.

Red.

22. Cecha wzrastania i zmniejszania się wartości funkcji całkowitej. — 23. Przypadek, kiedy funkcja $f(x)$ wciąż wzrasta lub wciąż maleje od $x = a$ do $x = b$. —	
24. Przypadek, kiedy wiadome są wszystkie pierwiastki rzeczywiste równania pochodnego. — 25. O ilości pierwiastków rzeczywistych równania $x^{2n} + px + q = 0$. —	
26. O ilości pierwiastków rzeczywistych równania $x^{2n+1} + px + q = 0$. — 27 i 28. Przykłady.	
§ VI. PRZYPADEK, KIEDY ZMIENNE x I $f(x)$ SĄ ZESPOLONE	31
29. Ciągłość modułu i ciągłość odchylenia. — 30. O odchyleniu krzywej dowolnej. —	
31. Przykład. — 32. Twierdzenie pomocnicze 1-sze o możliwości zmniejszenia wartości mod $f(x)$. — 33. Twierdzenie pomocnicze 2-gie, odnoszące się do przypadku, kiedy odchylenie krzywej zamkniętej jest równe zeru. — 34. Twierdzenie pomocnicze 3-cie, odnoszące się do przypadku, kiedy odchylenie krzywej zamkniętej jest równe liczbie 2π , pomnożonej przez stopień funkcji.	
§ VII. PIĘRWSZY DOWÓD ISTNIENIA PIERWIASTKA	40
35. Dowód istnienia pierwiastka, oparty na twierdzeniu pomocniczym art. 32-go.	
§ VIII. DRUGI DOWÓD ISTNIENIA PIERWIASTKA	40
36. Dowód istnienia pierwiastka, oparty na twierdzeniach pomocniczych art. 33-go i 34-go.	

ROZDZIAŁ III.

§ I. ROZKŁAD FUNKCYI CAŁKOWITEJ NA CZYNNIKI LINIOWE. O DZIELNIKACH FUNKCYJ CAŁKOWITYCH.	43
37. O możliwości rozłożenia funkcji całkowitej na czynniki liniowe. — 38. Przypadek, kiedy istnieją pierwiastki wielokrotne. — 39. Wyrażenie współczynników równania za pomocą jego pierwiastków. — 40. Przypadek, kiedy istnieją pierwiastki zespolone. — 41. O dzielnikach funkcji całkowitej. — 42. Największy wspólny dzielnik funkcji całkowitej i jej pochodnej.	
§ II. O PIERWIASTKACH WIELOKROTNYCH	48
43. Do czego się sprowadza rozwiązanie równania z pierwiastkami wielokrotnymi? —	
44. Przykład.	
§ III. ROZKŁAD FUNKCYI UŁAMKOWEJ NA UŁAMKI NAJPROSTSZE	51
45. Dowód zasadniczego twierdzenia pomocniczego. — 46. Przykład. — 47. Uogólnienie twierdzenia pomocniczego art. 45-go. Przykład. — 48. Rozkład funkcji $\frac{F}{f^m}$.	
Przykład. — 49. Rozkład jakiegokolwiek funkcji ułamkowej na ułamki najprostsze. —	
50. Różne sposoby wyznaczania współczynników w rozkładzie. Przykład. — 51. Przypadek, kiedy chcemy uniknąć liczb urojonych. Przykład	

ROZDZIAŁ IV.

§ I. O IŁOŚCI PIERWIASTKÓW RZECZYWISTYCH RÓWNIANIA, ZAWARTYCH MIĘDZY DANymi KRAŃCAMI	62
52. Dowodzenie twierdzenia zasadniczego.	
§ II. O RÓWNIANIACH Z PIERWIASTKAMI RZECZYWISTYMI I PRZEGRA- DZAJĄCYMI SIĘ	63
53. Pojęcie o pierwiastkach przegradzających się dwu równań. — 54 — 56. Trzy twierdzenia pomocnicze. — 57. Twierdzenie o warunkach koniecznych i dostatecznych na to, aby pierwiastki dwu równań były rzeczywiste, pojedyncze i przegradzające się. — 58. O pewnej własności liczników i mianowników ułamków zbliżonych funkcji, rozwiniętej na ułamek ciągły — 59. Własności liczników i mianowników ułam-	

	ków zbliżonych rozwinięcia $\sqrt{x^2 - 1}$ na ułamek ciągły. — 60. O funkcjach Legendre'a. — 61. O funkcjach Hermite'a ¹⁾ , czyli t. z. funkcjach podobnych do funkcji Legendre'a ²⁾ . — 62. O pewnym układzie równań z pierwiastkami przegradzającymi się, zauważonym przez Hermite'a i Biehler'a ³⁾ .	
§ III.	TWIERDZENIE ROLLE'A	74
	63. Dowód zasadniczego twierdzenia pomocniczego. — 64. Dowód twierdzenia Rolle'a.	
§ IV.	WZÓR LAGRANGE'A	75
	65. Wyprowadzenie pewnego wzoru, jako wyniku z twierdzenia Rolle'a. — 66. Wyprowadzenie wzoru Lagrange'a.	
§ V.	TWIERDZENIE FOURIER'GO	78
	67. Pewne zastosowania twierdzenia Rolle'a. — 68. Przypadek, kiedy druga pochodna nie zmienia swego znaku od $x=a$ do $x=b$ — 69. Szczególnie ważny przypadek. — 70. Dowód twierdzenia Fourier'go — 71 — 74. Przykłady.	
§ VI.	O RÓWNANIACH, NIE MAJĄCYCH PIERWIĄSTKÓW ZESPOLONYCH	84
	75. Dowód twierdzenia zasadniczego. — 76. O funkcji Legendre'a. — 77. Warunki konieczne i wystarczające na to, aby wszystkie pierwiastki równania danego były pojedyncze i rzeczywiste. Przykład.	

ROZDZIAŁ V.

§ I.	O ILOŚCI ZMIAN ZNAKU W RÓWNANIU	87
	78. Oznaczenie ilości zmiany znaku w równaniu. — 79 — 81. Trzy twierdzenia pomocnicze.	
§ II.	TWIERDZENIE DESCARTES'A	91
	82. Dowód twierdzenia Descartes'a. — 83. Uwaga, odnosząca się do stosowania twierdzenia Descartes'a. Przykłady. — 84. Kraniec wyższy dla ilości wszystkich pierwiastków rzeczywistych równania danego. Przykłady.	
§ III.	KRANIEC NIŻSZY DLA ILOŚCI PIERWIĄSTKÓW ZESPOLONYCH. ZASTOSOWANIA	94
	85. Wyprowadzenie nierówności zasadniczej. — 86. O pewnej własności ilorazu, otrzymanego z podzielenia x^{n+m} przez $f(x)$. — 87. O pewnej własności mianowników ułamków zbliżonych, otrzymanyh z rozłożenia $\frac{f(x)}{x^m}$ na ułamek ciągły. Przykład.	
§ IV.	PRZYPADK, KIEDY WSZYSTKIE PIERWIĄSTKI RÓWNANIA SĄ RZECZYWISTE	96
	88. Twierdzenie Descartes'a w tym przypadku, kiedy równanie nie ma pierwiastków zespolonych. Przykład. — 89. Inne zastosowanie twierdzenia Descartes'a w przypadku, kiedy równanie nie ma pierwiastków zespolonych. Przykład.	
§ V.	TWIERDZENIA LAGUERRE'A ⁴⁾	98
	90. Dowód twierdzenia Laguerre'a o krańcu wyższym dla ilości pierwiastków, większych od danej liczby dodatniej a . — 91. Twierdzenie pomocnicze. — 92. Dowód twierdzenia Laguerre'a o krańcu wyższym dla ilości pierwiastków, zawartych między dwiema liczbami dodatnimi a i b . — 93 i 94. Przykłady.	

¹⁾ Hermite w *Comptes rendus* akademii nauk w Paryżu (t. LVIII, r. 1864).

²⁾ Czebyszew w *Zapiskach* akademii nauk w Petersburgu (t. XVI, 1870).

³⁾ Hermite w *Bulletin de la société mathématique* (t. VII, r. 1879); Biehler w *Journal f. d. reine u. ang. Math* (t. LXXXVII, r. 1879).

⁴⁾ Laguerre w *Nouvelles annales de mathématiques* (serija 2-ga, t. XVIII i XIX, l. 1879 i 1880).

ROZDZIAŁ VI.

- § I. TWIERDZENIE BUDAN'A 106
95 i 96. Dwa twierdzenia pomocnicze. — 97. Dowód twierdzenia Budan'a. — 98. Uwaga o twierdzeniu Budan'a.
- § II. PRAWIDŁO ZNAKU PODWÓJNEGO. 113
99. Na czym polega i jak się uzasadnia prawidło znaku podwójnego? — 100 — 103. Przykłady.
- § III. KRANIEC NIŻSZY DLA ILOŚCI PIERWIĄSTKÓW ZESPOLONYCH. PRZYPADEK, KIEDY RÓWNANIE NIE MA PIERWIĄSTKÓW ZESPOLONYCH 116
104. Ilość pierwiastków zespolonych nie jest mniejsza od liczby $2h$. — 105. Twierdzenie Budan'a dla przypadku, kiedy wszystkie pierwiastki równania są rzeczywiste.
- § IV. TWIERDZENIE DESCARTES'A JAKO WNIOSEK Z TWIERDZENIA BUDAN'A 118
106. Inny dowód twierdzenia Descartes'a.
- § V. SPOSÓB FOURIER'GO ODDZIELANIA PIERWIĄSTKÓW 119
107. Określenie wskaźników funkcyj; własności wskaźników. — 108. Przypadek, kiedy grupa funkcyj Fourier'go składa się tylko z trzech funkcyj. — 109. Przypadek, kiedy grupa funkcyj Fourier'go składa się z ilukolwiek funkcyj. — 110 i 111. Przykłady.
- § VI. NIEKTÓRE UWAGI NAD TWIERDZENIEM BUDAN'A. ODDZIELANIE PIERWIĄSTKÓW RÓWNANIA NIEZUPEŁNEGO 128
112. Warunki konieczne i wystarczające na to, aby twierdzenie Budan'a miało miejsce. — 113. Grupa funkcyj Fourier'go dla równania niezupełnego. — 114. Wyprowadzenie pewnego twierdzenia pomocniczego przy pomocy twierdzenia Rolle'a. — 115. Wyprowadzenie pewnego twierdzenia, zastępującego twierdzenie Fourier'go w przypadku równania niezupełnego. — 116 — 119. Przykłady.
- § VII. TWIERDZENIE SYLVESTER'A ¹⁾ 138
120. Określenie funkcyj Sylvester'a. — 121 — 123. Trzy twierdzenia pomocnicze. — 124. Dowód twierdzenia Sylvester'a. — 125. Kraniec niższy dla ilości pierwiastków zespolonych. — 126. Przypadek, kiedy jedna lub więcej funkcyj Sylvester'a staje się równymi zeru. — 127 — 129. Przykłady.
- § VIII. TWIERDZENIE NEWTON'A 150
130. Wartości funkcyj Sylvester'a przy $x=0$, kiedy parametr n' jest równy stopniowi n równania $f(x)=0$. — 131. Dowód twierdzenia Newton'a. — 132 — 134. Przykłady.

ROZDZIAŁ VII.

- § I. POJĘCIE O NADMIARZE FUNKCYI WYMIERNÉJ 154
135. Określenie dwu nadmiarów jakiegokolwiek funkcji ułamkowej między jakimikolwiek krawcami.
- § II. WŁASNOŚCI NADMIARÓW 157
136. Zestawienie charakterystycznych własności nadmiarów. — 137. Sposób obliczania nadmiarów.
- § III. OBLICZANIE NADMIARÓW 158
138. Ogólne prawidło dla otrzymania wartości pierwszego nadmiaru jakiegokolwiek funkcji. — 139. Uwaga co do tego prawidła. — 140. Przypadek, kiedy niektóre

¹⁾ Sylvester w *Proceedings of the London mathematical society* (tom I, 1865) (oraz w *Les Mondes*, t. XI, 1866).

z funkcj, utworzonych dla obliczenia nadmiaru, stają się równymi zeru przy wartościach krańcowych zmiennej niezależnej.

- § IV. NAJWIĘKSZA WARTOŚĆ NADMIARU 163
141. W jakim przypadku nadmiar funkcji ułamkowej osiąga największą bezwzględnie wartość? — 142. O funkcjach Legendre'a i, wogóle, o funkcjach z pierwiastkami przegradzającymi się.
- § V. TWIERDZENIE STURM'A. 164
143. Dowód twierdzenia Sturm'a. — 144. Warunki konieczne i wystarczające na to, aby wszystkie pierwiastki równania były rzeczywiste i różne. — 145. Twierdzenie Sturm'a dla przypadku pierwiastków wielokrotnych. — 146. Przykłady.

ROZDZIAŁ VIII.

- § I. TWIERDZENIE CAUCHY'EGO 167
147. Dwa twierdzenia pomocnicze. — 148. Dowód twierdzenia Cauchy'ego. — 149. Wniosek z twierdzenia Cauchy'ego. — 150. Szczególne założenie co do konturu.
- § II. ODDZIELANIE PIERWIASTKÓW ZESPOLONYCH. 172
151. Ogólny sposób oddzielania pierwiastków zespolonych. — 152. Przykład.
- § III. TWIERDZENIE HERMITE'A ¹⁾. 178
153. Dowód twierdzenia Hermite'a. — 154. Zastosowanie odwrotne twierdzenia Hermite'a. — 155. Przykład.

ROZDZIAŁ IX.

- § I. O RUGOWNIKU. 182
156. Określenie rugownika i ważniejsze jego własności. — 157. Prawidło na obliczenie rugownika. — 158. Przykład.
- § II. NAJPROSTSZA POSTAĆ FUNKCYI WYMIERNEJ PIERWIASTKÓW RÓWNIANIA DANEGO 185
159. Dowód twierdzenia zasadniczego. — 160. Przykład.
- § III. PRZEKSZTAŁCENIE RÓWNIANIA 186
161. Rozwiązanie zadania ogólnego o przekształceniu równania danego. — 162. Inny sposób obliczania rugownika. Przykład. — 163. Pierwiastki równania danego wyrażają się wymiennie przez pierwiastki równania przekształconego.
- § IV. ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ STOPNIA 3-GO I 4-GO 191
164. Rozwiązywanie równań stopnia 3-go. — 165. Rozwiązywanie równań stopnia 4-go.
- § V. WARUNKI, ABY DWA RÓWNIANIA MIAŁY KILKA PIERWIASTKÓW SPÓLNYCH 192
166. Dowód twierdzenia Lagrange'a.
- § VI. NOWY SPOSÓB SPROWADZENIA FUNKCYI UŁAMKOWEJ PIERWIASTKA DO POSTACI CAŁKOWITEJ 194
167. Sposób sprowadzenia funkcji ułamkowej pierwiastka do postaci najprostszej, oparty na ogólnej teorii przekształcenia. Przykład.
- § VII. O WYRÓŻNIKU 195
168. Określenie wyróżnika. — 169. Wyróżnik równania stopnia 4-go. — 170. Wyróżnik równania trójmianowego.

¹⁾ Hermite l. c. (Bull.)

§ VIII. SPOSÓB LAGRANGE'A ODDZIELANIA PIERWIĄSTKÓW.	Str. 197
171. Wyłożenie sposobu Lagrange'a oddzielania pierwiastków. — 172. Sposób Cauchy'ego wyznaczenia krańca niższego dla modułu różnic pierwiastków równania danego. Przykład.	

ROZDZIAŁ X.

§ I. WYZNACZENIE KRAŃCÓW DLA WARTOŚCI FUNKCYI CAŁKOWITEJ MIĘDZY $x=a$ I $x=b$	200
173. Ogólne rozwiązanie zadania o wyznaczeniu krańców niższego i wyższego dla danej funkcyi całkowitej w przedziale danym. — 174. Inny sposób rozwiązania zadania poprzedzającego. — 175. Przykład.	
§ II. SPOSÓB NEWTON'A OBLICZANIA PIERWIĄSTKÓW	202
176. Wyłożenie sposobu Newton'a. — 177. Własności przybliżeń kolejnych, obliczanych według sposobu Newton'a.	
§ III. KRAŃCE WYŻSZE DLA BŁĘDÓW	205
178. Wyprowadzenie wzoru na kraniec wyższy dla m -go błędu. — 179. Uwaga co do wzoru poprzedzającego. Przykład. — 180. Sposób Newton'a można stosować także do obliczania pierwiastków zespolonych ¹⁾ .	
§ IV. WYZNACZANIE PIERWIĄSTKÓW WYMIERNYCH, GDY SPÓŁCZYNNIKI SĄ LICZBAMI CAŁKOWITYMI.	209
181. Prawidło ogólne na odnajdywanie pierwiastków całkowitych. Przykład. — 182. Przekształcenie równania takie, iżby pierwszy współczynnik był równy jedności. — 183. Równanie ze współczynnikami całkowitymi, w którym współczynnik najwyższej potęgi niewiadomej jest jednością, nie może mieć pierwiastków wymiernych ułamkowych. — 184. Sposób ogólny odnajdywania pierwiastków wymiernych ułamkowych. Przykład.	

¹⁾ Darboux w *Journal de mathématiques* (serya 3-cia, t. II, 1876).

PRZEDMOWA.

W tym dziele wyłożyłem tę część moich wykładów Algebry wyższej, prowadzonych w Uniwersytecie petersburskim, która się odnosi do rozwiązywania równań ze współczynnikami liczebnymi.

Wiele ustępów jest tu wypracowanych szczegółowiej, niż podczas moich wykładów ustnych, przy których niezbędnie musiałem zastosować się do przeciągu czasu, na nie przeznaczonego, i mieć wzgląd na to, aby zbytecznie nie nużyć uwagi słuchaczy. Przez takie szczegółowsze rozwinięcia chciałem tym, którzy tego pragną, podać możność bliższego wniknięcia w pewne działy, przedstawiające szczególny interes naukowy. —

Rozwiązanie równania ze współczynnikami liczebnymi prowadzi się przedewszystkiem do zadania o oddzielaniu pierwiastków.

Każdy ze sposobów oddzielania pierwiastków daje bezwarunkowo możność obliczania pierwiastków ze ścisłością żadaną; taka jednak metoda obliczania byłaby zbyt nużąca, osobliwie w tych przypadkach, kiedy należy osiągnąć znaczne przybliżenie. Istotnie, jeżeliśmy już oddzielili pewien pierwiastek i znamy jego wartość przybliżoną z błędem dostatecznie małym, dalsze obliczanie jego wartości może być uskutecznione wygodniej i prędzej przy pomocy innych sposobów, nie mających nic wspólnego ze sposobami oddzielania pierwiastków, a opartych po większej części na podstawach, stosujących się równie dobrze do równań przestępnych, jak do algebraicznych.

Dlatego w tej książce głównie zwrócona została uwaga na oddzielanie pierwiastków. Co się zaś tyczy obliczania pierwiastków, już oddzielonych, ograniczyłem się do wyłożenia samego tylko

sposobu Newton'a, ze względu na swą prostotę zasługującego na szczególną uwagę.

Pod względem praktycznym każdy ze znanych sposobów oddzielania pierwiastków przedstawia pewne strony słabe, niekiedy w zastosowaniach nader wyraźne. O wszystkich tych sposobach można powiedzieć, że w pewnych przypadkach przedstawiają się one jako bardzo dogodne, a w innych jako trudno dające się przeprowadzić — a tylko: niedogodne przypadki przy pewnym sposobie zdarzają się bardzo rzadko, przy innym zaś, przeciwnie, dość często. Oczywiście, że, mówiąc to, nie mam na uwadze tych trudności, jakie mogą wynikać z wielkich liczb, jako współczynników równania, lub z jego wysokiego stopnia. —

Jeden ze sposobów oddzielania i obliczania pierwiastków rzeczywistych równania, ogólnie znany w teorii, chociaż rzadko stosowany — sposób Lagrange'a przez rozwinięcie na ułamki ciągłe — nie jest w tej książce wyłożony. W zasadzie różni się on zupełnie od innych sposobów, a przedstawia jedno z zastosowań teorii ułamków ciągłych, która będzie wyłożona w następującym tomie «Biblijoteki».

ERRATA.

str.	wiersz		zamiast		powinno być
24	12	od góry	Przyrostek modułu		Moduł przyrostku
40	8	„	lub rzeczywistymi		rzeczywistymi lub
73	15	„	zauważonymi		zauważonym

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ LICZEBNYCH.

ROZDZIAŁ I.

RÓWNAŃ I ICH PIERWIĄTKI. — UWAGI O WARTOŚCIACH SZCZEGÓLNYCH FUNKCYJ CAŁKOWITYCH. — RÓWNAŃ ZE SPÓŁCZYNNIKAMI ZESPOLONYMI. — KRAŃCE DLA PIERWIĄTKÓW RZECZYWISTYCH.

§ I. O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH FUNKCYJ CAŁKOWITYCH.

1. Wielomian

$$Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-1}x + A_n,$$

w którym A, A_1, A_2, \dots są współczynnikami stałymi, x liczbą zmienną, n zaś liczbą dodatnią całkowitą, nazywa się funkcją całkowitą stopnia n -go zmiennej x . Przyjmujemy, że współczynnik A jest różny od zera, gdyż inaczej funkcja nie byłaby n -go, lecz niższego stopnia.

Przedstawivszy jakąkolwiek funkcję całkowitą stopnia n -go przez $f(x)$, nazwiemy równanie $f(x)=0$ równaniem stopnia n -go, każdą zaś wartość na x , czyniącą zadość temu równaniu, pierwiastkiem równania $f(x)=0$, albo pierwiastkiem funkcji $f(x)$.

2. Dzielać funkcję całkowitą

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$$

przez dwumian $x-a$, gdzie a jest liczbą dowolną, otrzymujemy, jako iloraz, funkcję całkowitą

$$\begin{array}{r} \varphi(x) = Ax^{n-1} + Aa \mid x^{n-2} + Aa^2 \mid x^{n-3} + \dots + Aa^{n-1} \\ \quad + A_1 \mid \quad + A_1a \mid \quad + A_1a^{n-2} \\ \quad \quad \quad + A_2 \mid \quad \quad \quad + \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + A_{n-1} \end{array}$$

i, jako resztę, liczbę stałą

$$f(a) = Aa^n + A_1a^{n-1} + \dots + A_n.$$

Stąd wynika, że funkcja $f(x)$ tylko wtedy jest podzielna przez $x - a$, kiedy $f(a) = 0$, t. j. kiedy a jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$. A zatem np. funkcja $x^n - a^n$ jest podzielna przez $x - a$, funkcja $x^n + 2x^{n-1} - 2^{n+1}$ przez $x - 2$, i t. d.

3. Przyjmijmy, że funkcja całkowita stopnia n -go,

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n,$$

staje się równą zero przy pewnych n różnych od siebie wartościach $x = a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

Dzieląc funkcję $f(x)$ przez $x - a_0$, otrzymujemy

$$f(x) = (x - a_0)\varphi(x),$$

gdzie $\varphi(x)$ przedstawia funkcję całkowitą stopnia $(n-1)$ -go ze współczynnikiem A przy x^{n-1} . Przyjmując tu kolejno $x = a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ i zważając, że $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_{n-1}) = 0$, otrzymujemy

$$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = \dots = \varphi(a_{n-1}) = 0.$$

Pierwsze z tych równań, t. j. $\varphi(a_1) = 0$, wskazuje, że funkcja $\varphi(x)$ jest podzielna przez $x - a_1$; możemy zatem napisać

$$\varphi(x) = (x - a_1)\varphi_1(x),$$

gdzie $\varphi_1(x)$ przedstawia funkcję całkowitą stopnia $(n-2)$ -go ze współczynnikiem A przy x^{n-2} , czyniącą zadość warunkom

$$\varphi_1(a_2) = \varphi_1(a_3) = \dots = \varphi_1(a_{n-1}) = 0.$$

Podobnie równanie $\varphi_1(a_2) = 0$ wskazuje, że funkcja $\varphi_1(x)$ jest podzielna przez $x - a_2$, tak iż możemy napisać

$$\varphi_1(x) = (x - a_2)\varphi_2(x),$$

gdzie $\varphi_2(x)$ przedstawia funkcję całkowitą stopnia $(n-3)$ -go z tymże współczynnikiem A przy x^{n-3} . W tenże sposób prowadząc dalej rozumowanie, dojdziemy do związków:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_0)\varphi(x), \\ \varphi(x) &= (x - a_1)\varphi_1(x), \\ \varphi_1(x) &= (x - a_2)\varphi_2(x), \\ &\dots \\ \varphi_{n-2}(x) &= (x - a_{n-1})A, \end{aligned}$$

z których wynika

$$(1) \quad f(x) = A(x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_{n-1}).$$

Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ otrzymuje wartość zero przy innej jeszcze wartości zmiennej x , różnej od wartości $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Nazwawszy ową szczególną wartość przez a_n , otrzymamy, według (1),

$$A(a_n - a_0)(a_n - a_1)\dots(a_n - a_{n-1}) = 0.$$

Lecz, zgodnie z naszym przypuszczeniem, żaden z czynników $a_n - a_0, a_n - a_1, \dots$ nie jest równy zeru; przeto

$$A = 0.$$

A zatem, jeżeli funkcja stopnia n -go $f(x)$ jest równą zeru przy $n + 1$ różnych wartościach zmiennej x , to w tej funkcji współczynnik przy x^n jest równy zeru, t. j. stopień funkcji jest w rzeczywistości niższy, niż n -ty. Ale wtedy także $A_1 = 0$, gdyż inaczej mielibyśmy funkcję stopnia $(n - 1)$ -go, która byłaby równą zeru przy pewnych n różnych wartościach zmiennej x . Z tegoż powodu i $A_2 = 0$. Słowem: wszystkie współczynniki A, A_1, \dots , aż do ostatniego A_n włącznie, są równe zeru. A więc

TWIERDZENIE. *Jeżeli funkcja całkowita $f(x)$, stopnia conajwyżej n -go, staje się równą zeru przy $n + 1$ różnych od siebie wartościach zmiennej x , to wszystkie współczynniki tej funkcji przy rozmaitych potęgach zmiennej x są równe zeru, t. j. funkcja $f(x)$ jest tożsamościowo równą zeru.*

Wniosek. *Dwie funkcje całkowite, z których każda jest stopnia conajwyżej n -go, otrzymujące wartości równe przy $n + 1$ różnych wartościach zmiennej niezależnej, są tożsamościowo sobie równe, t. j. w tych funkcjach współczynniki przy jednakowych potęgach zmiennej niezależnej są sobie równe. Różnica bowiem dwu takich funkcji jest funkcją całkowitą, stopnia conajwyżej n -go, która, otrzymując wartość zero przy $n + 1$ różnych wartościach zmiennej niezależnej, jest zerem dla wszelkiej wartości zmiennej niezależnej.*

Wniosek 2. *Jeżeli $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ są $n + 1$ dowolnie wziętymi i różnymi od siebie liczbami i jeżeli utworzymy funkcję stopnia $(n + 1)$ -go,*

$$\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

a przez $\varphi_i(x)$ oznaczymy funkcję stopnia n -go,

$$\varphi_i(x) = \frac{\varphi(x)}{x - x_i} = (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n),$$

natenczas każda funkcja całkowita $f(x)$, stopnia conajwyżej n -go, może być tak przedstawiona:

$$f(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\varphi_0(x_0)} f(x_0) + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x_1)} f(x_1) + \dots + \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(x_n)} f(x_n)$$

(wzór Lagrange'a). Dwie bowiem strony powyższego równania przedstawiają funkcje całkowite, stopnia conajwyżej n -go, wartości zaś tych funkcji przy $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ są sobie równe.

4. TWIERDZENIE. *Jeżeli mamy funkcję całkowitą*

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x,$$

w której wyraz stały $A_n = 0$, jeżeli a oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią, nie mniejszą od modułu każdego ze współczynników $A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, i jeżeli k oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią, natenczas przy każdej oddzielnej wartości x takiej, iż

$$\text{mod } x \leq \frac{k}{a+k};$$

istnieje nierówność

$$\text{mod } f(x) < k.$$

Oznaczając, dla krótkości, mod x literą r , i biorąc pod uwagę, że moduł sumy nie jest większy od sumy modułów, mamy

$$\text{mod } f(x) \leq r^n \text{ mod } A + r^{n-1} \text{ mod } A_1 + \dots + r \text{ mod } A_{n-1}.$$

Gdy po prawej stronie tej nierówności, zamiast mod A , mod A_1, \dots , podstawimy liczbę a , to

$$\text{mod } f(x) \leq ar^n + ar^{n-1} + \dots + ar,$$

czyli

$$\text{mod } f(x) \leq \frac{ar}{1-r} - \frac{ar^{n-1}}{1-r}.$$

Ponieważ, wskutek naszego założenia co do modułu zmiennej x , jest $r < 1$, więc, według ostatniej nierówności,

$$\text{mod } f(x) < \frac{ar}{1-r}.$$

Z nierówności zaś $r \leq \frac{k}{a+k}$ wynika

$$\frac{ar}{1-r} \leq k;$$

zatem

$$\text{mod } f(x) < k.$$

Wniosek. Każda funkcja całkowita ze współczynnikami rzeczywistymi

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_mx^{n-m}, \quad (m \leq n),$$

w której A i A_m są różne od zera, jest, przy wartościach rzeczywistych zmiennej x , bezwzględnie dostatecznie wielkich, tegoż znaku, co wyraz pierwszy Ax^n , a przy wartościach rzeczywistych, bezwzględnie dostatecznie małych, tegoż znaku, co wyraz ostatni A_mx^{n-m} . Nadając bowiem funkcji $f(x)$ taką postać:

$$f(x) = Ax^n \left(1 + \frac{A_1}{A} \frac{1}{x} + \dots + \frac{A_m}{A} \frac{1}{x^m} \right),$$

na mocy ostatniego twierdzenia widzimy bezpośrednio, że wraźe, gdy

$$\text{wartość bezwzględna } \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a+1},$$

gdzie a jest jakąkolwiek liczbą dodatnią, nie mniejszą jednak od wartości bezwzględnej każdego ze współczynników $\frac{A_1}{A}, \frac{A_2}{A}, \dots, \frac{A_m}{A}$, wartość wielomianu

w nawiasie jest dodatna, i funkcja $f(x)$ jest tegoż znaku, co wyraz pierwszy Ax^n . Warunek, jakiemu x zadość czynić powinno, może być wyrażony w postaci:

$$\text{wartość bezw. } x \geq a + 1.$$

Mamy więc stwierdzoną pierwszą część wniosku. — Nadając zaś funkcji $f(x)$ postać:

$$f(x) = \left(\frac{A}{A_m} x^m + \frac{A_1}{A_m} x^{m-1} + \dots + \frac{A_{m-1}}{A_m} x + 1 \right) A_m x^{n-m},$$

również na mocy ostatniego twierdzenia wnosimy, że jeżeli

$$\text{wart. bezw. } x \leq \frac{1}{b+1},$$

gdzie b oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią, nie mniejszą jednak od wartości bezwzględnej każdego ze współczynników $\frac{A}{A_m}, \frac{A_1}{A_m}, \dots, \frac{A_{m-1}}{A_m}$, to wartość wielomianu w nawiasie jest dodatnia, a funkcja $f(x)$ takiegoż znaku, co czynnik $A_m x^{n-m}$ — co okazuje prawdziwość drugiej części wniosku.

PRZYKŁAD 1. Dla funkcji

$$f(x) = x^5 - (2 + 3i)x^3 - 2x^2 + 5ix$$

można przyjąć $a = 5$; skutek tego mamy

$$\text{dla mod } x \leq \frac{1}{6} \quad \text{mod } f(x) < 1;$$

$$\text{dla mod } x \leq \frac{1}{11} \quad \text{mod } f(x) < \frac{1}{2};$$

$$\text{dla mod } x \leq \frac{1}{5m+1} \quad \text{mod } f(x) < \frac{1}{m}.$$

PRZYKŁAD 2. Dla funkcji

$$f(x) = 2x^7 - 3x^5 + 9x^2 - 4x$$

możemy wziąć $a = 9$; wtedy

$$\text{wart. bezw. } f\left(\pm \frac{1}{10}\right) < 1,$$

$$\text{wart. bezw. } f\left(\pm \frac{1}{9m+1}\right) < \frac{1}{m}.$$

PRZYKŁAD 3. Funkcja

$$3x^6 - 7x^4 + 16x^3 - 5x$$

dla wartości zmiennej x , czyniących zadość nierówności $x \geq 6\frac{1}{3}$, otrzymuje wartości dodatne; dla wartości dodatnich zmiennej x , czyniących zadość nierówności $x \leq \frac{5}{21}$, otrzymuje wartości ujemne, a dla wartości ujemnych zmiennej x , które czynią zadość nierówności $x \geq -\frac{5}{21}$, otrzymuje wartości dodatne.

PRZYKŁAD 4. Funkcja

$$7x^3 - 7x^2 + 6x^3 - 5x - 2$$

dla $x \geq 2$ otrzymuje wartości dodatne, dla $x \leq -2$ otrzymuje wartości ujemne, dla wartości zaś zmiennej x , zawartych między $-\frac{2}{9}a + \frac{2}{9}$, otrzymuje wartości ujemne.

5. TWIERDZENIE. *Jeżeli, mając funkcję całkowitą stopnia n -ego,*

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n,$$

w której wyraz stały A_n jest różny od zera, przyjmiemy, że a jest jakąkolwiek liczbą dodatnią, nie mniejszą od modułu każdego ze współczynników $A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, że b jest jakąkolwiek liczbą dodatnią, nie mniejszą od modułu każdego ze współczynników A_1, A_2, \dots, A_n , a k jest jakąkolwiek liczbą dodatnią, to dla każdej wartości zmiennej x , której moduł czyni zadość nierówności

$$\text{mod } x \leq \frac{k}{k+a},$$

będziemy mieli

$$\text{mod } f(x) > \text{mod } A_n - k;$$

dla każdej zaś wartości x , której moduł czyni zadość nierówności

$$\text{mod } x \geq 1 + \frac{b}{k},$$

będziemy mieli

$$\frac{\text{mod } f(x)}{\text{mod } x^n} > \text{mod } A - k.$$

Rozważając funkcję $f(x)$ jako sumę dwu wyrazów

$$f(x) = A_n + (Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x),$$

mamy

$$\text{mod } f(x) \geq \text{mod } A_n - \text{mod } (Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x).$$

Jeżeli przyjmiemy, że $\text{mod } x \leq \frac{k}{k+a}$, to, na zasadzie twierdzenia art. 4-go, będziemy mieli

$$\text{mod } (Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x) < k,$$

a zatem

$$\text{mod } f(x) > \text{mod } A_n - k.$$

Ażeby udowodnić drugą część naszego twierdzenia, napiszmy wielomian $f(x)$ tak:

$$f(x) = x^n \left(A + A_1 \frac{1}{x} + \dots + A_n \frac{1}{x^n} \right).$$

Z tego wnosimy, że

$$\frac{\text{mod } f(x)}{\text{mod } x^n} \geq \text{mod } A - \text{mod} \left(A_1 \frac{1}{x} + \dots + A_n \frac{1}{x^n} \right).$$

Przyjmując zaś $\text{mod } \frac{1}{x} \leq \frac{k}{b+k}$, czyli $\text{mod } x \geq 1 + \frac{b}{k}$, według twierdzenia art. 4-go, mamy

$$\text{mod} \left(A_1 \frac{1}{x} + \dots + A_n \frac{1}{x^n} \right) < k.$$

A zatem

$$\frac{\text{mod } f(x)}{\text{mod } x^n} > \text{mod } A - k.$$

Wniosek 1. Jeżeli x jest pierwiastkiem równania stopnia n -go

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0,$$

w którym wyraz stały A_n jest różny od zera, to

$$\frac{\text{mod } A_n}{a + \text{mod } A_n} < \text{mod } x < 1 + \frac{b}{\text{mod } A}.$$

Gdy bowiem w poprzedzającym twierdzeniu przyjmiemy $k = \text{mod } A_n$, to dla wartości zmiennej x , czyniących zadość nierówności

$$\text{mod } x \leq \frac{\text{mod } A_n}{a + \text{mod } A_n},$$

istnieje nierówność

$$\text{mod } f(x) > 0;$$

wtedy więc liczba x nie może być pierwiastkiem równania $f(x) = 0$. Przyjawszy zaś $k = \text{mod } A$, dostrzeżemy, że, przy

$$\text{mod } x \geq 1 + \frac{b}{\text{mod } A},$$

ma miejsce nierówność

$$\text{mod } f(x) > 0,$$

wskutek której w tym przypadku liczba x także nie może być pierwiastkiem równania $f(x) = 0$.

Wniosek 2. Jeżeli wrazie, gdy H jest jakąkolwiek liczbą dodatnią, a dowolna liczba dodatnia k jest mniejsza od $\text{mod } A$, $\text{mod } x$ jednocześnie zadość czyni dwu nierównościami:

$$\text{mod } x \geq 1 + \frac{b}{k}, \quad \text{mod } x \geq \sqrt[n]{\frac{H}{\text{mod } A - k}},$$

to

$$\text{mod } f(x) > H.$$

Wtedy bowiem z drugiej z wypisanych nierówności wypada

$$\text{mod } x^n \pmod{A - k} \geq H,$$

wskutek zaś pierwszej nierówności mieliśmy poprzednio

$$\frac{\text{mod } f(x)}{\text{mod } x^n} > \text{mod } A - k.$$

Z tego wynika, że, z powiększaniem się wartości zmiennej x do ∞ , wartości funkcji $f(x)$ również powiększają się do ∞ .

PRZYKŁAD 1. $f(x) = 7x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 5x + 16.$

Jeżeli $\text{mod } x \leq \frac{k}{8+k}$, to $\text{mod } f(x) > 16 - k$; jeżeli $\text{mod } x \geq 1 + \frac{16}{k}$, to $\text{mod } f(x) > (7 - k) \text{mod } x^n$. Oznaczając przez x pierwiastek równania

$$7x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 5x + 16 = 0,$$

mamy

$$\frac{16}{24} < \text{mod } x < 1 + \frac{16}{7},$$

a więc tymwięcej

$$\frac{2}{3} < \text{mod } x < 3\frac{1}{2}.$$

PRZYKŁAD 2. Jeżeli przez x oznaczymy pierwiastek, równania

$$3x^7 - 5x^5 + 16x^4 - 5x + 18 = 0,$$

to

$$\frac{1}{2} < \text{mod } x < 7.$$

Następnie, kładąc

$$f(x) = 3x^7 - 5x^5 + 16x^4 - 5x + 18,$$

dla wszelkich wartości zmiennej x , jednocześnie czyniących zadość dwu warunkom:

$$\text{mod } x \geq 10, \quad \text{mod } x \geq \sqrt[7]{H},$$

będziemy mieli nierówność

$$\text{mod } f(x) \geq H.$$

§ II. RÓWNAŃ Z SPÓŁCZYNNIKAMI ZESPOLONYMI.

6. Rozwiązanie równania ze współczynnikami zespolonymi może być sprowadzone do rozwiązania równania ze współczynnikami rzeczywistymi, i dlatego, ilekroć to się okaże pożytecznym, możemy ograniczyć się do przypuszczenia, że współczynniki równania są rzeczywiste.

Istotnie, przyjmijmy, że współczynniki równania

$$(1) \quad Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

są liczbami zespolonymi, a mianowicie:

$$A_m = a_m + b_m i, \quad (m = 0, 1, \dots, n),$$

gdzie a_m i b_m oznaczają liczby rzeczywiste, oznaczmy przez $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ dwie funkcje

$$\varphi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

$$\psi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$$

i napiszmy dane równanie tak:

$$\varphi(x) + i\psi(x) = 0.$$

Stąd

$$\varphi(x) = -i\psi(x),$$

a po podniesieniu obu stron do kwadratu,

$$\varphi(x)^2 = -\psi(x)^2,$$

albo

$$(2) \quad \varphi(x)^2 + \psi(x)^2 = 0.$$

Stopień ostatniego równania jest dwa razy wyższy, niż stopień danego, ale za to wszystkie jego współczynniki są rzeczywiste.

Jeżeli zaś znajdziemy jaki pierwiastek tego ostatniego równania, to on będzie pierwiastkiem równania (1). Gdy bowiem liczba x , zadość czyniąca równaniu (2), jest rzeczywista, to wtedy, oczywiście,

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{i} \quad \psi(x) = 0,$$

wskutek czego

$$\varphi(x) + i\psi(x) = 0.$$

Gdy zaś pierwiastek równania (2) jest postaci $p + qi$, to, przywodząc do zera iloczyn

$$[\varphi(x) + i\psi(x)] [\varphi(x) - i\psi(x)] = \varphi(x)^2 + \psi(x)^2,$$

przywodzi zarazem do zera jeden z jego czynników, t. j. albo

$$\varphi(x) + i\psi(x) = 0,$$

albo

$$\varphi(x) - i\psi(x) = 0;$$

w pierwszym przypadku pierwiastkiem danego równania będzie liczba $p + qi$, zaś w drugim liczba $p - qi$, sprzężona z $p + qi$.

7. Wyznaczenie pierwiastków rzeczywistych równania ze współczynnikami zespolonymi

$$\varphi(x) + i\psi(x) = 0,$$

albo, co wychodzi na jedno, pierwiastków równania

$$\varphi(x)^2 + \psi(x)^2 = 0,$$

sprowadza się do rozwiązania innego równania, stopnia niższego niż n -ty, ze współczynnikami rzeczywistymi. To wynika z tego, że każdy z takich pierwiastków powinien jednocześnie zadość czynić dwu równaniom:

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{i} \quad \psi(x) = 0.$$

Oznaczywszy przez D największy wspólny dzielnik funkcyj $\varphi(x)$ i $\psi(x)$, mamy trzy równania następujące:

$$\varphi(x)X + \psi(x)Y = D, \quad \varphi(x) = DU, \quad \psi(x) = DV,$$

gdzie X, Y, U, V oznaczają funkcje całkowite, łatwo wyznaczyć się dające zapomocą zwyczajnego dzielenia. Pierwsze z tych równań wskazuje, że każda liczba x , czyniąca zadość dwu równaniom: $\varphi(x) = 0$ i $\psi(x) = 0$, czyni także zadość równaniu $D = 0$; dwa zaś ostatnie z wypisanych równań wskazują, że, nawzajem, pierwiastek równania $D = 0$ czyni zadość jednocześnie obu równaniom $\varphi(x) = 0$ i $\psi(x) = 0$.

A więc, *wszystkie pierwiastki rzeczywiste równania ze współczynnikami zespolonymi*

$$\varphi(x) + i\psi(x) = 0$$

czynią zadość równaniu

$$D = 0,$$

i nawzajem.

Jeżeli dwie funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ okażą się pierwszymi względem siebie, to $D = 1$ i równanie $\varphi(x) + i\psi(x) = 0$ nie ma pierwiastku rzeczywistego. Jeżeli zaś D jest funkcją stopnia pierwszego lub wyższego zmiennej x , to równanie $\varphi(x) + i\psi(x) = 0$ możemy napisać tak:

$$D(U + iV) = 0,$$

a rozwiązanie tego równania sprowadzi się do rozwiązania każdego z dwu równań:

$$D = 0,$$

$$U + iV = 0,$$

z których drugie nie ma pierwiastka rzeczywistego.

PRZYKŁAD. Mamy równanie

$$x^5 + ix^4 + 2x^3 - (3 + 5i)x^2 - 6 - 14i = 0.$$

Oznaczywszy

$$\varphi(x) = x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 6, \quad \psi(x) = x^4 - 5x^2 - 14,$$

znajdziemy, jako największy wspólny dzielnik funkcyj $\varphi(x)$ i $\psi(x)$,

$$D = x^2 + 2.$$

Równanie $x^2 + 2 = 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, zatem także równanie dane ich nie ma. Rozwiązanie zaś równania danego sprowadza się do rozwiązywania równania

$$x^2 + 2 = 0$$

i równania

$$x^3 - 3 + i(x^2 - 7) = 0.$$

§ III. KRAŃCE DLA PIERWIASTKÓW RZECZYWISTYCH.

8. Ograniczając się do rozważania przypadku, kiedy wszystkie współczynniki równania danego są rzeczywiste (art. 6), możemy wskazać kilka sposobów odnajdywania krańców, obejmujących pierwiastki rzeczywiste, dodatne lub ujemne, któreto krańce będą bliższe sobie, niż wynikające z twierdzenia art. 5-go (wniosek 1).

TWIERDZENIE. *Jeżeli w równaniu*

$$(1) \quad Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots - A_mx^{n-m} \pm \dots \pm A_n = 0$$

współczynnik A jest dodatni, zaś $-A_m$ jest pierwszym współczynnikiem ujemnym, to wartość dwumianu

$$1 + \sqrt[m]{\frac{a}{A}},$$

gdzie a oznacza liczbę dodatnią, nie mniejszą od wartości bezwzględnej każdego z ujemnych współczynników równania danego, może być przyjęta za kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnich.

Oznaczmy przez $f(x)$ funkcję, stanowiącą stronę lewą równania danego, i przypuśćmy, że zmiennej x nadaliśmy jakąkolwiek wartość dodatnią; wtedy

$$f(x) \geq Ax^n - ax^{n-m} - ax^{n-m-1} - ax^{n-m-2} - \dots - a,$$

albo

$$f(x) \geq Ax^n - a \frac{x^{n-m+1} - 1}{x - 1},$$

albo jeszcze

$$f(x) \geq Ax^n - \frac{ax^{n-m+1}}{x-1} + \frac{a}{x-1}.$$

Przypuśćmy następnie, że $x > 1$, i odrzućmy tu wyraz ostatni na stronie prawej; otrzymamy

$$f(x) > \frac{Ax^n(x-1) - ax^{n-m+1}}{x-1},$$

albo

$$f(x) > x^{n-m+1} \frac{Ax^{n-1}(x-1) - a}{x-1},$$

Ponieważ jednak, według założenia, $x > x - 1 > 0$, przeto $x^{m-1} \geq (x-1)^{m-1}$, gdzie znak $=$ ma miejsce w razie, gdy $m-1=0$; wskutek tego,

$$f(x) > x^{n-m+1} \frac{A(x-1)^m - a}{x-1}, \quad (x > 1).$$

Ta nierówność wskazuje, że jeżeli

$$A(x-1)^m - a \geq 0,$$

czyli

$$x \geq 1 + \sqrt[m]{\frac{a}{A}},$$

to wtedy

$$f(x) > 0,$$

t. j. x nie może być pierwiastkiem równania (1). Innymi słowy, każdy pierwiastek dodatni równania $f(x)=0$, jeżeli istnieje, jest mniejszy od

$$1 + \sqrt[m]{\frac{a}{A}}.$$

PRZYKŁAD 1. Pierwiastki dodatnie równania

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 6x - 27 = 0$$

są mniejsze od $1 + \sqrt[4]{27}$, a więc mniejsze od 7.

PRZYKŁAD 2. Pierwiastki dodatnie równania

$$x^5 + x^4 + x^2 + 5x - 109 = 0$$

są mniejsze od $1 + \sqrt[5]{109}$, a więc mniejsze od 4.

9. Inny sposób odnajdywania krańca wyższego dla pierwiastków dodatnich równania ze współczynnikami rzeczywistymi opiera się na następującym twierdzeniu.

TWIERDZENIE. Niech A, A_1, A_2, \dots, A_n będą jakimikolwiek liczbami, nie mniejszymi od zera, i $\varphi(x)$ funkcją postaci

$$\varphi(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_mx^{n-m} - A_{m+1}x^{n-m-1} - \dots - A_n,$$

gdzie m oznacza jedną z liczb $1, 2, \dots, n$. Jeżeli dla jakiegokolwiek wartości dodatniej a zmiennej x jest $\varphi(a) \geq 0$, to dla każdej wartości zmiennej x , większej od a , ma miejsce nierówność $\varphi(x) > \varphi(a)$, tak iż, tymwięcej, $\varphi(x) > 0$.

Zważmy bowiem, że dla $x > a > 0$, mają miejsce obie nierówności:

$$\begin{aligned} Ax^m + A_1x^{n-1} + \dots + A_mx^{n-m} &> Aa^m + A_1a^{n-1} + \dots + A_m, \\ \frac{A_{m+1}}{x} + \frac{A_{m+2}}{x^2} + \dots + \frac{A_n}{x^{n-m}} &< \frac{A_{m+1}}{a} + \frac{A_{m+2}}{a^2} + \dots + \frac{A_n}{a^{n-m}}, \end{aligned}$$

a odejmując drugą od pierwszej, otrzymujemy

$$Ax^m + \dots + A_m - \frac{A_{m+1}}{x} - \dots - \frac{A_n}{x^{n-m}} > Aa^m + \dots + A_m - \frac{A_{m+1}}{a} - \dots - \frac{A_n}{a^{n-m}},$$

czyli

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n-m}} > \frac{\varphi(a)}{a^{n-m}},$$

skąd

$$\varphi(x) > \left(\frac{x}{a}\right)^{n-m} \varphi(a).$$

Ponieważ zaś, według założenia, $\varphi(a) \geq 0$ i $\frac{x}{a} > 1$, przeto

$$\varphi(x) > \varphi(a).$$

Wniosek. Jeżeli $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ są funkcjami takiej postaci, jak funkcja $\varphi(x)$ w twierdzeniu poprzedzającym; jeżeli a, b, c, \dots, d oznaczają takie liczby dodatne, iż odpowiednio mają miejsce nierówności

$$\varphi_1(a) \geq 0, \varphi_2(b) \geq 0, \dots, \varphi_m(d) \geq 0,$$

k zaś jest liczbą dodatnią, nie mniejszą od każdej z liczb a, b, c, \dots, d , to każdej wartości zmiennej x , większej od k , odpowiadająca wartość funkcji

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_m(x)$$

jest dodatnia. Istotnie, według twierdzenia ostatniego, dla $x > k$ każda z funkcji $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$, a zatem i ich suma, otrzymują wartości dodatnie. —

Przechodząc do jakiegokolwiek równania ze współczynnikami rzeczywistymi, zakładamy, że współczynnik najwyższej potęgi zmiennej x jest dodatni.

Jeżeli wszystkie pozostałe współczynniki są również dodatnie, to wtedy równanie $f(x) = 0$ oczywiście nie posiada całkiem pierwiastków dodatnich, a zatem w tym przypadku niemacno odszukiwać dla nich wyższego krańca dodatniego.

Jeżeli zaś równanie $f(x) = 0$ posiada jeden lub więcej współczynników ujemnych, to wtedy możemy funkcję $f(x)$ przedstawić jako sumę kilku funkcji,

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \dots,$$

z których każda jest takiej postaci, jak funkcja $\varphi(x)$ w twierdzeniu ostatnim, a następnie możemy już łatwo znaleźć takie liczby dodatnie a, b, c, \dots , któreby czyniły zadość odpowiednim warunkom

$$\varphi_1(a) \geq 0, \varphi_2(b) \geq 0, \varphi_3(c) \geq 0, \dots$$

(patrz art. 4, wniosek). Największa z tych liczb może być przyjęta jako wyższy kraniec dla pierwiastków dodatnich równania $f(x) = 0$.

PRZYKŁAD 1. Dla równania

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 6x - 27 = 0$$

mamy



$$\varphi_1(x) = (x^2 + 5x - 12)x^2, \quad \varphi_2(x) = 3(2x - 9);$$

$$\varphi_1(2) > 0, \quad \varphi_2\left(\frac{9}{2}\right) = 0;$$

a zatem, jako kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnych można przyjąć liczbę $4\frac{1}{2}$ — gdy w art. 8-ym, mając toż samo równanie, mieliśmy, jako ów kraniec, liczbę 7. — Zważmy, że jeżelibyśmy tu oznaczyli

$$\varphi_1(x) = x(x^3 + 5x^2 - 12x - 6), \quad \varphi_2(x) = 3(4x - 9),$$

to wtedy byłoby

$$\varphi_1\left(\frac{5}{2}\right) > 0, \quad \varphi_2\left(\frac{9}{4}\right) = 0,$$

a przeto już liczbę $2\frac{1}{2}$ można przyjąć jako kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnych danego równania — zamiast liczby $4\frac{1}{2}$.

PRZYKŁAD 2. Strona lewa równania

$$x^5 + x^4 + x^2 + 5x - 109 = 0$$

otrzymuje wartości dodatne przy $x = 3$; a więc liczbę 3 można tu przyjąć jako kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnych.

10. Wyznaczenie krańca niższego dla pierwiastków rzeczywistych równania ze współczynnikami rzeczywistymi bardzo łatwo sprowadzić można do zadania, rozwiązanego w art. poprzedzającym, t. j. do wyznaczenia krańca wyższego dla takich pierwiastków. Przyjmując bowiem, że x jest liczbą dodatnią, zadość czyniącą równaniu

$$(1) \quad Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0,$$

po podzieleniu obu jego stron przez x^n , otrzymujemy

$$A_n \frac{1}{x^n} + A_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + A_1 \frac{1}{x} + A = 0,$$

czyli, kładąc $\frac{1}{x} = y$,

$$A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \dots + A_1 y + A = 0.$$

Oznaczając zaś przez L kraniec wyższy dla pierwiastków rzeczywistych równania ostatniego, mamy $y < L$, czyli $\frac{1}{x} < L$, skąd

$$x > \frac{1}{L}.$$

Ta nierówność wskazuje, że każdy pierwiastek dodatny równania (jeżeli równanie go posiada) jest większy od liczby $\frac{1}{L}$; dlatego liczba $\frac{1}{L}$ może być uważana za kraniec niższy dla pierwiastków dodatnych równania (1).

PRZYKŁAD. Chcemy znaleźć kraniec niższy dla pierwiastków dodatnich równania

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 6x - 27 = 0.$$

W tym celu znajdziemy naprzód kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnich równania

$$27y^4 - 6y^3 + 12y^2 - 5y - 1 = 0.$$

Kładąc

$$\varphi_1(y) = 3y^3(9y - 2), \quad \varphi_2(y) = 12y^2 - 5y - 1,$$

znajdujemy

$$\varphi_1\left(\frac{1}{3}\right) > 0, \quad \varphi_2\left(\frac{2}{3}\right) > 0;$$

zatem $\frac{2}{3}$ jest kranccem wyższym dla pierwiastków dodatnich równania z nie-
wiadomą y , a $\frac{1}{3}$ jest kranccem niższym dla pierwiastków dodatnich równania
danego.

11. Ażeby wyznaczyć krance dla pierwiastków ujemnych równania

$$Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0,$$

w lewej jego stronie, zamiast x , podstawimy $-y$. Dla otrzymanego zaś równania

$$Ay^n - A_1y^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}A_{n-1}y + (-1)^nA_n = 0$$

znajdziemy, zapomocą powyżej wyłożonych sposobów, wyższy i niższy kraniec dla jego pierwiastków dodatnich. Jeżeli owe krance są np. L i M , to, oczywiście, wszystkie pierwiastki ujemne równania danego (jeżeli tylko one istnieją) są zawarte między kranccami $-L$ i $-M$.

PRZYKŁAD. Pierwiastki ujemne równania

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 6x - 27 = 0$$

są zawarte między kranccami -5 i -7 .

UWAGA. Zdarza się niekiedy, że kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnich jest mniejszy od niższego dla nich kranca. Wskazuje to, iż dane równanie nie ma żadnego pierwiastka dodatniego. Toż samo można powiedzieć i o kranccach dla pierwiastków ujemnych.

Np. Ażeby mieć kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnich równania

$$x^3 - x^2 - x^2 + 5x + 109 = 0,$$

kładąc

$$\varphi_1(x) = x^2(x^3 - x^2 - 1), \quad \varphi_2(x) = 5x + 109,$$

znajdujemy $\varphi_1\left(\frac{3}{2}\right) > 0$; można więc $\frac{3}{2}$ przyjąć jako szukany kraniec wyższy. Ażeby zaś otrzymać kraniec niższy dla pierwiastków dodatnich tegoż równania,

utworzymy równanie

$$109y^5 + 5y^4 - y^3 - y + 1 = 0$$

i, kładąc

$$\varphi(y) = y(109y^4 + 5y^3 - y^2 - 1),$$

znajdziemy $\varphi(\frac{1}{3}) > 0$; zatem liczba 3 może być przyjęta jako kraniec niższy dla pierwiastków dodatnich. Wypadło nam przeto, iż każdy pierwiastek dodatni równania

$$x^5 - x^4 - x^2 + 5x + 109 = 0$$

powinien być mniejszy od $\frac{3}{2}$ i większy od 3. Ponieważ te warunki są z sobą sprzeczne, zatem powyższe równanie wcale nie ma pierwiastków dodatnich. Stąd także wynika, że równanie

$$x^5 + x^4 + x^2 + 5x - 109 = 0$$

wcale nie ma pierwiastków ujemnych.

ROZDZIAŁ II.

WZÓR TAYLOR'A. — OBLICZANIE WARTOŚCI FUNKCYI CAŁKOWITĘJ I JEJ POCHODNYCH. — PIERWIĄTKI WIELOKROTNE. — PRAWO CIĄGŁOŚCI I NIEKTÓRE JEGO NASTĘPSTWA. — DOWÓD ISTNIENIA PIERWIĄTKA.

§ 1. WZÓR TAYLOR'A.

12. Mnożąc wyrazy funkcyi całkowitzej

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-m}x^m + \dots + A_n$$

odpowiednio przez

$$nx^{-1}, (n-1)x^{-1}, \dots, mx^{-1}, \dots, 0x^{-1},$$

otrzymujemy nową funkcyjã stopnia o jedność niższego

$$f'(x) = nAx^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + \dots + mA_{n-m}x^{m-1} + \dots + A_{n-1},$$

która się nazywa piérwszą pochodną funkcyi danéj $f(x)$.

Piérwsza pochodna funkcyi $f'(x)$ nazywa się drugą pochodną funkcyi $f(x)$ i wyraża się tak:

$$f''(x) = n(n-1)Ax^{n-2} + (n-1)(n-2)A_1x^{n-3} + \dots + 2A_{n-2}.$$

Trzecia pochodna funkcyi $f(x)$ jest funkcyjã stopnia $(n-3)$ -go,

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)Ax^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)A_1x^{n-4} + \dots + 3 \cdot 2A_{n-3}.$$

Wogóle funkcyjã stopnia $(n-m)$ -go,

$$f^{(m)}(x) = n(n-1)\dots(n-m+1)Ax^{n-m} + (n-1)(n-2)\dots(n-m)A_1x^{n-m-1} + \dots + m(m-1)\dots 2 \cdot 1A_{n-m},$$

nazywa się m -tą pochodną funkcyi danéj $f(x)$.

Z określenia bezpośrednio wynika, że n -ta pochodna danéj funkcyi $f(x)$ jest liczbã stałą,

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\dots 2 \cdot 1A,$$

i że wszystkie następane pochodne są tożsamościowo równe zeru.

Funkcyjne pochodne powstają same przez się, jeżeli w danéj funkcyi $f(x)$ zamiast x podstawimy $x+h$, a wynik podstawienia,

$$f(x+h) = A(x+h)^n + A_1(x+h)^{n-1} + \dots + A_n,$$

uporządkujemy według potęg rosnących litery h . Jakoż, rozkładając każdy wyraz po stronie prawej według dwumianu Newton'a i łącząc wyrazy podobne, otrzymujemy

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(x).$$

Jest to wzór Taylor'a.

Pisząc a zamiast x , zaś $x-a$ zamiast h , możemy ten wzór tak przedstawić:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^{(n)}(a).$$

PRZYKŁAD. Kładąc

$$f(x) = x^3 - 2x + 5,$$

mamy równość

$$f(x) = a^3 - 2a + 5 + (x-a)(3a^2 - 2) + 3(x-a)^2 a + (x-a)^3.$$

13. W przypadku szczególnym, kiedy wszystkie współczynniki w wyrażeniu funkcji $f(x)$ są rzeczywiste, wzór

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(x)$$

wskazuje, że, wraze gdy dla pewnej wartości rzeczywistej a na zmienną x wszystkie liczby

$$f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a)$$

nie są mniejsze od zera, mamy, przy każdej dodatniej wartości h ,

$$f(a+h) > 0,$$

i dlatego żadna liczba większa od a nie może być pierwiastkiem równania $f(x) = 0$.

Ta uwaga nasuwa nowy sposób odnajdywania krańca wyższego dla pierwiastków dodatnich równania o współczynnikach rzeczywistych, znany jako sposób Newton'a. Żeby zaś wyznaczyć liczbę a , zadość czyniącą powyżej wskazanym warunkom, należy uprzednio założyć, że współczynnik najwyższej potęgi niewiadomej x w równaniu $f(x) = 0$ jest liczbą dodatnią; wtedy bowiem współczynniki najwyższych potęg zmiennej x w wyrażeniu każdej z funkcji

$$f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)$$

będą dodatnie, a, przy dość wielkiej wartości dodatniej $x = a$, wszystkie liczby

$$f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n-1)}(a), f^{(n)}(a)$$

będą również dodatnie.

Najprostszy sposób, zwykle używany do wyznaczenia liczby a , jest następujący. Odnajdujemy naprzód taką liczbę dodatnią a_{n-1} , dla którejby funkcja stopnia pierwszego, $f^{(n-1)}(x)$, była nie mniejszą od zera. Następnie wyznaczamy znak liczby $f^{(n-2)}(a_{n-1})$; jeżeli ta liczba jest ujemną, to szukamy innej liczby $a_{n-2} > a_{n-1}$, która czyniłaby zadość nierówności $f^{(n-2)}(a_{n-2}) \geq 0$; jeżeli zaś $f^{(n-2)}(a_{n-1}) \geq 0$, to zostawiamy poprzednią liczbę a_{n-1} , t. j. przyjmujemy $a_{n-2} = a_{n-1}$. Podobnie dalej; obliczamy $f^{(n-3)}(a_{n-2})$; jeżeli ta liczba jest ujemna, to wyznaczamy nową liczbę $a_{n-3} > a_{n-2}$ taką, iżby $f^{(n-3)}(a_{n-3}) \geq 0$; jeżeli zaś $f^{(n-3)}(a_{n-2}) \geq 0$, to przyjmujemy $a_{n-3} = a_{n-2}$. Postępując wciąż w podobny sposób, znajdziemy żadaną liczbę a , zadość czyniącą warunkom

$$f(a) \geq 0, f'(a) \geq 0, \dots, f^{(n-1)}(a) \geq 0.$$

Co się zaś tyczy liczby $f^{(n)}(a)$, to ona nie zależy od a , gdyż jest nią iloczyn $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots nA$, a więc ta liczba jest dodatna, gdyż, według założenia, $A > 0$.

PRZYKŁAD. Znaleść kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnich równania

$$x^6 + 3x^5 - 12x^4 + 6x^3 - 17x^2 - 481 = 0.$$

Następująca tablica wskazuje sposób wyznaczenia tu liczby a .

$f = x^6 + 3x^5 - 12x^4 + 6x^3 - 17x^2 - 481$				—	+
$f' = 6x^5 + 15x^4 - 48x^3 + 18x^2 - 34x$					+
$\frac{1}{2} f'' = 15x^4 + 30x^3 - 72x^2 + 18x - 17$				—	+
$\frac{1}{6} f''' = 20x^3 + 30x^2 - 48x + 6$					+
$\frac{1}{24} f^{IV} = 15x^2 + 15x - 12$				—	+
$\frac{1}{120} f^V = 6x + 3$				+	
$x =$	0	1	2	3	

Zaczynamy z dołu; przy $x = 0$, znajdujemy $f^V(0) > 0$, $f^{IV}(0) < 0$; przyjmujemy następnie $x = 1$ i znajdujemy $f^{IV}(1) > 0$, $f'''(1) > 0$, $f''(1) < 0$; przy $x = 2$, $f''(2) > 0$, $f'(2) > 0$, $f(2) < 0$; przy $x = 3$, $f(3) > 0$; a zatem liczbę 3 można przyjąć jako kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnich równania danego.

§ II. OBLICZANIE WARTOŚCI FUNKCYI CAŁKOWITEJ I JEJ POCHODNYCH.

14. Dzielenie funkcyj

$$Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n$$

przez $x - a$ i przedstawiając iloraz przez

$$Bx^{n-1} + B_1x^{n-2} + \dots + B_{n-2}x + B_{n-1},$$

a resztę przez B_n , mamy następujące równania dla kolejnego wyznaczenia współczynników B, B_1, \dots, B_n :

$$B=A, B_1=aB+A_1, B_2=aB_1+A_2, \dots, B_{n-1}=aB_{n-2}+A_{n-1}, B_n=aB_{n-1}+A_n.$$

Stąd wynika bardzo łatwy sposób otrzymania ilorazu i reszty z podzielenia funkcji $f(x)$ przez $x - a$.

Wypiszmy wszystkie współczynniki danej funkcji $f(x)$ obok siebie, jeden za drugim, i pod pierwszym z nich, w drugim wierszu, napiszmy jeszcze raz pierwszy współczynnik A . Uczyniwszy to, mnożymy liczbę A przez a i iloczyn dodajemy do drugiej liczby wiersza pierwszego, t. j. do A_1 ; otrzymaną sumę przyjmujemy jako drugą liczbę wiersza drugiego. Tę liczbę mnożymy przez a i iloczyn dodajemy do trzeciej liczby wiersza pierwszego; suma będzie trzecią liczbą wiersza drugiego. Postępując w ten sposób do końca, otrzymamy w wierszu drugim wszystkie szukane liczby B, B_1, \dots, B_n ; ostatnia z nich jest wartością funkcji $f(x)$ przy $x = a$, a najczęściej o tę tylko wartość nam idzie.

PRZYKŁAD. Obliczyć wartości funkcji

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 12x^4 + 6x^3 - 17x^2 - 481$$

dla $x = 3$. — Postępując według powyższej reguły, znajdujemy

1	3	— 12	6	— 17	0	— 481,
1	6	6	24	55	165	14.

Iloraz z podzielenia $f(x)$ przez $x - 3$ jest

$$x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 24x^2 + 55x + 165,$$

a reszta

$$f(3) = 14.$$

15. Wzór Taylor'a, przedstawiony w postaci

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f'''(a) + \dots,$$

okazuje, iż:

Wskutek podzielenia funkcji $f(x)$ przez $x - a$, otrzymujemy iloraz

$$\varphi(x) = f'(a) + \frac{x-a}{1.2} f''(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2.3} f'''(a) + \dots$$

i resztę

$$R = f(a).$$

Wskutek podzielenia funkcji $\varphi(x)$ przez $x - a$, otrzymujemy iloraz

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{1.2} f''(a) + \frac{x-a}{1.2.3} f'''(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2.3.4} f^{IV}(a) + \dots$$

i resztę

$$R_1 = f'(a).$$

Wskutek podzielenia funkcji $\varphi_1(x)$ przez $x - a$, otrzymujemy iloraz

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{1.2.3} f'''(a) + \frac{x-a}{1.2.3.4} f^{IV}(a) + \dots$$

i resztę

$$R_2 = \frac{1}{1.2} f''(a).$$

I tak dalej, tak iż na koniec, wskutek podzielenia funkcji $\varphi_{n-2}(x)$ przez $x - a$, otrzymujemy iloraz

$$\varphi_{n-1}(x) = 1$$

i resztę

$$R_{n-1} = \frac{1}{1.2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(a).$$

Ta uwaga często ułatwia wyznaczenie współczynników rozmaitych potęg dwumianu $x - a$ w rozwinięciu funkcji według wzoru Taylor'a. W tym celu należy tylko n razy z rzędu zastosować prawo, podane w art. poprzednim.

PRZYKŁAD. Rozwinąć funkcję

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 13x^3 - x^2 - 25x + 100$$

według potęg dwumianu $x + 5$. — Należy przyjąć $a = -5$, co doprowadza do następującej tablicy:

1	2	— 13	— 1	— 25	100
1	— 3	2	— 11	30	— 50
1	— 8	42	— 221	<u>1135</u>	
1	— 13	107	— <u>756</u>		
1	— 18	<u>197</u>			
1	— <u>23</u>				

Liczby podkręślane są współczynnikami szukanymi, t. j.

$$f(-5) = -50, \quad f'(-5) = 1135, \quad \frac{1}{2} f''(-5) = -756,$$

$$\frac{1}{6} f'''(-5) = 197, \quad \frac{1}{24} f^{IV}(-5) = -23.$$

Taki sposób obliczania wartości $f(a)$, $f'(a)$, $\frac{1}{2} f''(a)$, ... podał Horner.

§ III. PIERWIĄSTKI WIELOKROTNE.

16. Jeżeli m oznacza którąkolwiek z liczb 1, 2, 3, ..., n , to ze wzoru

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \dots$$

widoczna, że resztą z podzielenia funkcji $f(x)$ przez $(x-a)^m$ jest

$$f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} f^{(m-1)}(a);$$

ażeby więc funkcja $f(x)$ była podzielna przez $(x-a)^m$, potrzeba i wystarcza, aby

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0.$$

Jeżeli a czyni zadość tym warunkom i, prócz tego, $f^{(m)}(a)$ nie równa się zeru, to funkcja $f(x)$, podzielna przez $(x-a)^m$, nie będzie podzielna przez $(x-a)^{m+1}$. W takim razie funkcja liniowa $x-a$ nazywa się czynnikiem m -krotnym funkcji $f(x)$, a liczba a pierwiastkiem m -krotnym równania $f(x)=0$.

Jeżeli $m=1$, to liczba a jest pierwiastkiem pojedynczym równania $f(x)=0$, a funkcja $x-a$ czynnikiem pojedynczym funkcji $f(x)$.

Z tego, co wyżej powiedziano, wynika, że pierwiastek m -krotny równania $f(x)=0$ jest pierwiastkiem $(m-1)$ -krotnym równania $f'(x)=0$, $(m-2)$ -krotnym równania $f''(x)=0$, i t. d., nakoniec pojedynczym równania $f^{(m-1)}(x)=0$, a nie czyni już zadość równaniu $f^m(x)=0$. Innymi słowy, jeżeli dwumian $x-a$ jest czynnikiem m -krotnym funkcji $f(x)$, to jest zarazem czynnikiem $(m-1)$ -krotnym funkcji $f'(x)$ i t. d.

PRZYKŁAD 1. Równanie

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 + 20x - 7 = 0$$

posiada pierwiastek, równy jedności; zważając, iż

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = 0, \quad \frac{1}{6} f'''(1) = 8,$$

wnosimy, że 1 jest pierwiastkiem trzykrotnym równania danego. Wskutek tego możemy je tak napisać:

$$(x-1)^3(x+7) = 0.$$

PRZYKŁAD 2. Równanie stopnia n -go

$$\frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} + \dots + \frac{x}{1} + 1 = 0$$

nie ma pierwiastka wielokrotnego. — Oznaczając stronę lewą tego równania przez $f(x)$, mamy tożsamość:

$$f'(x) = f(x) - \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n};$$

a zatem, jeżeli a jest pierwiastkiem równania danego, to

$$f'(a) = -\frac{a^n}{1 \cdot 2 \dots n},$$

i, jeżeli ten pierwiastek byłby wielokrotnym, to byłoby $a=0$, a to być nie może, gdyż $f(0) = 1$.

PRZYKŁAD 3. Jeżeli A nie jest różne od zera, to równanie $x^n - A = 0$ nie ma pierwiastka wielokrotnego.

PRZYKŁAD 4. Aby równanie $x^n - px + q = 0$ miało pierwiastek dwukrotny, czyli, aby temu równaniu zadość czynił pierwiastek równania $nx^{n-1} - p = 0$, t. j.

$$x = \left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

potrzeba, aby

$$\left(\frac{p}{n}\right)^n = \left(\frac{q}{n-1}\right)^{n-1};$$

wtedy $\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \frac{q}{n-1}$, czyli $\frac{p}{n} \left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{q}{n-1}$, tak iż zamiast $\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ możemy pisać $\frac{nq}{(n-1)p}$.

17. Niech $a + bi$ będzie jakąkolwiek liczbą zespoloną. Według wzoru Taylor'a mamy

$$f(a + bi) = f(a) + \frac{bi}{1} f'(a) - \frac{b^2}{1 \cdot 2} f''(a) - \frac{b^3 i}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \dots,$$

a wprowadziwszy oznaczenia:

$$M = f(a) - \frac{b^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(a) - \dots,$$

$$N = \frac{b}{1} f'(a) - \frac{b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \frac{b^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} f^V(a) - \dots,$$

otrzymujemy

$$f(a + bi) = M + Ni,$$

$$f(a - bi) = M - Ni.$$

Jeżeli w wyrażeniu funkcji $f(x)$ współczynniki są rzeczywiste, to, oczywiście, liczby M i N są również rzeczywiste; wówczas dwie liczby $f(a + bi)$ i $f(a - bi)$ będą zespolone sprzężone, a jeżeli $f(a + bi) = 0$, to także $f(a - bi) = 0$. Gdyby się zdarzyło, że i $f'(a + bi) = 0$, to, dla téjże przyczyny, byłoby również $f'(a - bi) = 0$, i t. d.; jeżeli $f^{(m)}(a + bi)$ nie równa się zeru, to i $f^{(m)}(a - bi)$ także nie jest równe zeru. A więc:

TWIERDZENIE. Jeżeli równanie ze współczynnikami rzeczywistymi posiada pierwiastek m -krotny zespolony $a + bi$, to posiada ono także drugi pierwiastek $a - bi$, sprzężony z poprzednim i również m -krotny.

§ IV. PRAWO CIĄGŁOŚCI.

18. Wzór Taylor'a, napisany w postaci

$$f(x + h) - f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(x),$$

daje wyrażenie przyrostka, jaki otrzymuje wartość funkcji całkowitej $f(x)$, gdy zmienna x otrzymuje przyrostek dowolny h .

Rozważając to wyrażenie jako funkcją jednej zmiennej h , spostrzegamy, iż w nim niema wyrazu stałego, a więc do tego wyrażenia można zastosować twierdzenie art. 4-go. Oznaczając więc przez k dowolną liczbę dodatnią, a przez a liczbę dodatnią, nie mniejszą od każdej z liczb: $\text{mod } f'(x)$, $\frac{1}{1.2} \text{ mod } f''(x)$, \dots , dla wszystkich wartości h , czyniących zadość nierówności

$$\text{mod } h < \frac{k}{k+a},$$

mamy

$$\text{mod } [f(x+h) - f(x)] < k.$$

Stąd bezpośrednio wynika następujące

TWIERDZENIE. *Przyrostek modułu funkcji całkowitej $f(x)$, odpowiadający przyrostkowi dowolnemu h zmiennej niezależnej x , jest mniejszy od dowolnie wziętej liczby dodatniej, jeżeli wartość $\text{mod } h$ jest dostatecznie mała.*

Własność funkcji, którą powyższe twierdzenie wyraża, nazywa się prawem ciągłości; ma ono miejsce dla wszystkich funkcji całkowitych, przy wszelkich możliwych wartościach zmiennej niezależnej.

Prawo to może być wyrażone inaczej w ten sposób:

Gdy przyrostek zmiennej niezależnej zdąża do granicy równej zeru, to odpowiadający przyrostek funkcji całkowitej $f(x)$ również zdąża do granicy równej zeru.

Albo jeszcze:

Nieskończenie małemu przyrostkowi zmiennej niezależnej x odpowiada nieskończenie mały przyrostek funkcji całkowitej $f(x)$.

19. Ułamek, powstający wskutek podzielenia funkcji całkowitej

$$f = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots$$

przez jakąkolwiek inną funkcją całkowitą

$$\varphi = Bx^m + B_1x^{m-1} + \dots$$

(wrazie jeżeli funkcja f nie jest podzielna przez funkcją φ), nazywa się funkcją ułamkową. Weźmy jakąkolwiek funkcją ułamkową

$$F = \frac{f}{\varphi},$$

której licznik i mianownik są pierwsze względem siebie, co zawsze możemy przypuszczać, gdyż, wrazie przeciwnym, moglibyśmy ułamek skrócić.

Dla wartości zmiennej x , zadość czyniącej równaniu $\varphi = 0$, wartość odpowiednia funkcji F równa się ∞ . Wyłączmy spod uwagi takie wartości i przyjmijmy, że zmiennej x nadano wartość, przy której funkcja φ nie równa się zeru. Jeżeli, zamiast poprzedniej wartości x przyjmiemy nową $x+h$, to f , φ i F otrzymują nowe wartości, które możemy odpowiednio tak oznaczyć:

$f + \Delta f$, $\varphi + \Delta\varphi$, $F + \Delta F$; będziemy więc mieli

$$\Delta F = \frac{\varphi \Delta f - f \Delta \varphi}{\varphi(\varphi + \Delta \varphi)}.$$

Przypuśćmy, że α i k są dwiema liczbami dodatnimi, czyniącymi zadość nierównościom

$$\alpha \geq \text{mod } f, \quad \alpha \geq \text{mod } \varphi, \quad k \leq \frac{2\alpha}{\text{mod } \varphi}.$$

Na zasadzie twierdzenia art. 18-go, przy dostatecznie małej wartości mod h możemy przyjąć, iż jednocześnie

$$\text{mod } \Delta f < \frac{\text{mod}^2 \varphi}{4\alpha} k, \quad \text{mod } \Delta \varphi < \frac{\text{mod}^2 \varphi}{4\alpha} k.$$

Z tych nierówności i z obu nierówności, którym, według przypuszczenia, czyni zadość liczba α , wynika, iż

$$\text{mod } \varphi \Delta f < \frac{\text{mod}^2 \varphi}{4} k, \quad \text{mod } f \Delta \varphi < \frac{\text{mod}^2 \varphi}{4} k,$$

wskutek czego

$$\text{mod } (\varphi \Delta f - f \Delta \varphi) < \frac{\text{mod}^2 \varphi}{2} k.$$

Ponieważ zaś z nierówności dla $\Delta\varphi$ i z nierówności, której, według przypuszczenia, czyni zadość liczba k , wynika, iż $\text{mod } \Delta\varphi < \frac{\text{mod } \varphi}{2}$, a wogóle jest

$\text{mod } (\varphi + \Delta\varphi) \geq \text{mod } \varphi - \text{mod } \Delta\varphi$, przeto $\text{mod } (\varphi + \Delta\varphi) > \frac{\text{mod } \varphi}{2}$, albo, po pomnożeniu obu stron przez $\text{mod } \varphi$,

$$\text{mod } \varphi(\varphi + \Delta\varphi) > \frac{\text{mod}^2 \varphi}{2}.$$

Dzieląc tak otrzymane nierówności przez siebie, mamy

$$\text{mod } \frac{\varphi \Delta f - f \Delta \varphi}{\varphi(\varphi + \Delta \varphi)} < k,$$

albo

$$\text{mod } \Delta F < k.$$

Stąd wynika, że przyrostek funkcji F może być tak małym, jak się podoba, byle wartość mod h była dostatecznie małą. Innymi słowy: *funkcja ułamkowa $\frac{f}{\varphi}$ dla wszelkich wartości zmiennej niezależnej x , nie przywodzących mianownika tej funkcji do zera, jest ciągłą.*

Jeżeli funkcja $\frac{f}{\varphi}$ dla pewnej szczególnej wartości x staje się ∞ , to w tym wykładzie mówić będziemy, że wtedy ma miejsce przerwa ciągłości.

§ V. PRZYPADEK, KIEDY ZMIENNE x I $f(x)$ SĄ RZECZYWISTE.

20. Przystępując do wyprowadzenia kilku wniosków, które wprost wynikają z prawa ciągłości, przyjmujemy naprzód, że wszystkie współczynniki funkcyi

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$$

są rzeczywiste, oraz że zmienna x otrzymuje tylko wartości rzeczywiste.

Jeżeli jakakolwiek liczba zmienna rzeczywista zmienia swoje wartości tak, że, przechodząc od pewnej wartości szczególnej do innej, otrzymuje wszystkie wartości pośrednie, to wtedy mówimy, że ona zmienia się w sposób ciągły.

Z twierdzenia, udowodnionego w art. 18-ym, bezpośrednio wnosimy, że jeżeli zmienna niezależna x zmienia się w sposób ciągły, to i funkcja całkowita $f(x)$ zmienia się również w sposób ciągły.

Toż samo wyraża twierdzenie następujące:

TWIERDZENIE. *Jeżeli k jest jakąkolwiek liczbą pośrednią między dwiema wartościami $f(a)$ i $f(b)$ funkcyi całkowitej $f(x)$, to istnieje liczba c , pośrednia między a i b , która zadość czyni równaniu $f(c) = k$.*

Wniosek 1. *Jeżeli dwie jakiegokolwiek wartości $f(a)$ i $f(b)$ funkcyi całkowitej $f(x)$ są znaków różnych, to między krańcami a i b znajduje się taka liczba c , która czyni zadość równaniu $f(x) = 0$.*

Wniosek 2. *Każde równanie stopnia nieparzystego ze współczynnikami rzeczywistymi ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.* Wartości bowiem funkcyi, stanowiącej stronę lewą takiego równania, przy dwu różnego znaku wartościach zmiennej x , bezwzględnie dostatecznie wielkich, są różnego znaku.

Wniosek 3. *Każde równanie stopnia parzystego ze współczynnikami rzeczywistymi, w którym współczynniki wyrazów skrajnych są różnego znaku, ma przynajmniej dwa pierwiastki rzeczywiste, które wtedy są różnego znaku.* Albowiem wartości funkcyi, stanowiącej stronę lewą takiego równania, przy $x=0$ i przy x dostatecznie wielkim dodatnim, jakoteż jej wartości przy $x=0$ i przy x ujemnym, bezwzględnie dostatecznie wielkim, są różnego znaku.

Wniosek 4. *Jeżeli funkcja $f(x)$ nie staje się zerem dla żadnej wartości zmiennej x , pośredniej między liczbami a i b , to ona przy wszystkich tych wartościach zmiennej x jest wciąż tego samego znaku.* W przeciwnym bowiem razie posiadałaby pierwiastek zawarty między liczbami a i b .

21. TWIERDZENIE. *Gdy zmienna x przechodzi przez wartość rzeczywistą a (czyto od wartości mniejszych do większych, czy też od większych do mniejszych), będącą pierwiastkiem m -krotnym równania $f(x) = 0$, wtedy funkcja $f(x)$ zmienia swój znak, albo go nie zmienia, stosownie do tego, czy liczba m jest nieparzysta, czy też parzysta.*

Wskutek założenia o liczbie a , według wzoru Taylor'a mamy

$$f(a+h) = \frac{h^m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} \left[f^{(m)}(a) + \frac{h}{m+1} f^{(m+1)}(a) + \dots \right],$$

gdzie $f^{(m)}(a)$ jest różne od zera. Z tego zaś wynika, iż, przy wartościach h , bezwzględnie dostatecznie małych, znak wartości $f(a+h)$ będzie taki, jak znak iloczynu $h^m f^{(m)}(a)$; a więc, jeżeli m jest liczbą nieparzystą, to $f(a-h)$ i $f(a+h)$ są różnego znaku, jeżeli zaś m jest liczbą parzystą, to $f(a-h)$ i $f(a+h)$ są tego samego znaku. —

Mając wszystkie pierwiastki rzeczywiste równania $f(x)=0$ i wiedząc, jaka jest wielokrotność każdego z nich, możemy wprost określić znak wartości funkcji $f(x)$ przy jakiegokolwiek szczególnej wartości zmiennej x . Jakoż, niech

$$a_1, a_2, \dots, a_r$$

oznaczają wszystkie r pierwiastków rzeczywistych równania $f(x)=0$, uporządkowane według ich wartości rosnących, i niech

$$m_1, m_2, \dots, m_r$$

oznaczają odpowiednie wielokrotności tych pierwiastków. Biorąc pod uwagę $r+1$ przedziałów, wyznaczonych przez każde dwie sąsiednie z $r+2$ liczb

$$-\infty, a_1, a_2, \dots, a_r, +\infty,$$

zauważymy naprzód, że znak funkcji $f(x)$, przy wszelkich wartościach zmiennej x , zawartych w przedziale pierwszym $(-\infty, a_1)$, jest taki sam, jak znak pierwszego jęj wyrazu przy $x=-\infty$, przy wartościach zaś zmiennej x , zawartych w przedziale ostatnim $(a_r, +\infty)$, znak funkcji $f(x)$ jest taki sam, jak znak pierwszego jęj wyrazu przy $x=+\infty$. Przy wszelkich zaś wartościach zmiennej x , zawartych w drugim przedziale (a_1, a_2) , wartości funkcji $f(x)$ są tegoż samego lub innego znaku, niż wartości jęj, odpowiadające przedziałowi pierwszemu $(-\infty, a_1)$, stosownie do tego, czy liczba m_1 jest parzysta, czytęz nieparzysta; dla wszelkich wartości x , zawartych w trzecim przedziale (a_2, a_3) , znak funkcji $f(x)$ jest taki sam, jak znak jęj w przedziale poprzednim, lubtęz inny, stosownie do tego, czy m_2 jest liczbą parzystą, czytęz nieparzystą. Tym sposobem, przechodząc od jednego przedziału do drugiego, z łatwością wyznaczymy znak funkcji $f(x)$ dla wszelkiej wartości zmiennej x .

22. TWIERDZENIE. *Jeżeli dla każdej wartości zmiennej x , zawartęj między dwiema liczbami danymi a i b , wartość funkcji pochodnej $f'(x)$ utrzymuje wciąż tenże znak, to, wmiarę powiększania się wartości zmiennej x od kranca niższego a do wyższego b , wartości odpowiednic funkcji $f(x)$ wzrastają lub maleją, stosownie do tego, czy wartości funkcji $f'(x)$ są w owym przedziale dodatne, czytęz ujemne.*

Przyjmijmy naprzód, że funkcja pochodna $f'(x)$ jest wciąż dodatna dla wartości x , zawartych w przedziale od $x=a$ do $x=b$, i że c przedstawia jakękolwiek liczbę pośrednią między a i b ; wtedy równanie

$$f(x) - f(c) = 0$$

w przedziale od $x=a$ do $x=b$ ma tylko pierwiastek $x=c$. Gdyby bowiem to równanie miało w owym przedziale od $x=a$ do $x=b$ pierwiastek różny od c , i gdybyśmy taki pierwiastek, najbliższy liczby c , nazwali d , przez h zaś

oznaczyli liczbę dowolną, bezwzględnie dostatecznie małą, a tegoż znaku, co różnica $d - c$, to dwie różnice

$$f(c + h) - f(c) \quad \text{i} \quad f(d - h) - f(c)$$

byłyby jednakowego znaku, gdyż funkcja $f(x) - f(c)$ nie ma pierwiastka między $x = c$ i $x = d$ — gdy tymczasem równości

$$f(c + h) - f(c) = hf'(c) + \frac{h^2}{2} f''(c) + \dots,$$

$$f(d - h) - f(c) = -hf'(d) + \frac{h^2}{2} f''(d) + \dots$$

wskazują, iż owe dwie różnice są różnego znaku, albowiem, według założenia, wartości $f'(c)$ i $f'(d)$ są tegoż samego znaku. — Gdy więc funkcja $f(x) - f(c)$ nie staje się zerem dla wartości x w przedziale między $x = c$ i $x = b$, przeto od $x = c$ do $x = b$ utrzymuje ona wciąż tenże sam znak. Że zaś, przy h dodatnim i dostatecznie małym, jest

$$f(c + h) - f(c) = hf'(c) + \frac{h^2}{2} f''(c) + \dots > 0,$$

zatem, dla wszelkich wartości x od $x = c$ do $x = b$, mamy $f(x) - f(c) > 0$, czyli

$$f(x) > f(c).$$

A więc, z uwagi, że c jest jakąkolwiek liczbą pośrednią między a i b , funkcja $f(x)$ w przedziale od $x = a$ do $x = b$ wciąż wzrasta.

Przyjmijmy następnie, że funkcja $f'(x)$ od $x = a$ do $x = b$ jest wciąż ujemna. Wtedy funkcja $-f'(x)$ od $x = a$ do $x = b$ jest wciąż ujemną, i dlatego funkcja $-f(x)$ w tym przedziale wciąż wzrasta, funkcja zaś $f(x)$ w tymże przedziale wciąż maleje:

23. Jeżeli funkcja całkowita $f(x)$ dla wartości, zawartych w przedziale pomiędzy a i b , wciąż wzrasta albo wciąż maleje, to równanie $f(x) = 0$ nie może mieć więcej, jak jeden pierwiastek w przedziale między a i b , a jeżeli taki pierwiastek istnieje, to jego wielokrotność jest nieparzysta. Może się zdarzyć, że $f(x)$ ma pierwiastek równy jednemu z tych krańców, np. liczbie a ; wtedy wielokrotność tego pierwiastka może być albo parzysta, albo nieparzysta, ale już innego pierwiastka w przedziale między a i b , włączając w to i kraniec drugi b , być nie może.

Ażeby się dowiedzieć, który z tych przypadków ma miejsce, należy określić znaki wartości $f(a)$ i $f(b)$. Jeżeli każda z wartości $f(a)$ i $f(b)$ jest różna od zera i jeżeli one są jednakowego znaku, to równanie $f(x) = 0$ nie ma ani jednego pierwiastka, zawartego w przedziale a, b ; jeżeli zaś owe wartości są różnego znaku, to w przedziale a, b równanie $f(x) = 0$ posiada jeden pierwiastek wielokrotności nieparzystej.

24. Jeżeli wiadome są wszystkie pierwiastki rzeczywiste równania $f'(x) = 0$, to łatwo można znaleźć wszystkie pierwiastki rzeczywiste równania $f(x) = 0$.

Niech a, b, c, \dots, d będą tymi pierwiastkami rzeczywistymi równania $f'(x)=0$, których wielokrotność jest nieparzysta, i przyjmijmy, że $a < b < c \dots < d$. Ponieważ w każdym z przedziałów

$$-\infty, a; a, b; b, c; \dots; d, +\infty,$$

funkcja $f(x)$ albo wciąż wzrasta, albo wciąż maleje, przeto łatwo się dowiedzieć, w którym z tych przedziałów przypada pierwiastek równania $f(x)=0$, a w którym nie ma pierwiastka. Wskutek tego będziemy wiedzieli ilość wszystkich pierwiastków rzeczywistych równania $f(x)=0$, a dla każdego z nich będziemy mieli dwa krańce, oddzielające go od innych pierwiastków, jeżeli one istnieją.

Jeżeli w przedziale a, b przypada pierwiastek, to, dzieląc ten przedział na dowolną ilość nowych przedziałów, możemy się dowiedzieć, w którym mianowicie z tych ostatnich przedziałów pierwiastek się znajduje; otrzymamy więc dla niego krańce więcj zblizone, niż pierwotne a i b . Podobnie postępując dalej, będziemy coraz więcj zblizali krańce dla szukanego pierwiastka i możemy otrzymać jego wartość przybliżoną z błędem, nieprzewyższającym dowolnie wziętej liczby, jakkolwiek małej.

25. PRZYKŁAD 1. Oznaczyć ilość pierwiastków rzeczywistych równania stopnia parzystego

$$(1) \quad x^{2n} + px + q = 0.$$

Jeżeli stronę lewą tego równania nazwiemy $f(x)$, to równanie $f'(x)=0$ ma jeden tylko i pojedynczy pierwiastek rzeczywisty

$$a = \left(-\frac{p}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}.$$

Mamy więc tu do rozważenia dwa przedziały:

$$-\infty, a; a, +\infty;$$

w każdym z nich funkcja $f(x)$ albo wciąż wzrasta, albo wciąż maleje. Zważmy, że

$$f(a) = -(2n-1) \left\{ \left(-\frac{p}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n-1}} - \frac{q}{2n-1} \right\},$$

tak iż, jeżeli np. $f(a) > 0$, to wtedy

$$\left(-\frac{p}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n-1}} - \frac{q}{2n-1} < 0,$$

czyli

$$\left(\frac{p}{2n}\right)^{2n} - \left(\frac{q}{2n-1}\right)^{2n-1} < 0;$$

albo, oznaczywszy stronę lewą tej nierówności przez R ,

$$R < 0.$$

Rozważyć należy następujące przypadki:

1) kiedy $R < 0$, wtedy

$$f(-\infty) = +\infty, \quad f(a) > 0, \quad f(+\infty) = +\infty,$$

t. j. równanie (1) nie ma pierwiastka rzeczywistego.

2) kiedy $R = 0$, wtedy równanie (1) posiada jeden tylko pierwiastek rzeczywisty; jest on dwukrotny, jeżeli obie liczby: p i q są różne od zera.

3) kiedy $R > 0$, wtedy równanie (1) posiada tylko dwa różne pierwiastki rzeczywiste, a każdy z nich jest pojedynczy.

26. PRZYKŁAD 2. Oznaczyć ilość pierwiastków rzeczywistych równania stopnia nieparzystego

$$(2) \quad x^{2n+1} + px + q = 0.$$

Jeżeli stronę lewą tego równania nazwiemy $f(x)$, to równanie $f'(x) = 0$, ma tylko dwa i pojedyncze pierwiastki rzeczywiste różniące się znakiem, w razie gdy liczba p jest ujemną; nazwijmy je wtedy a i b i niech $a < b$. Jeżeli więc w równaniu (2) współczynnik p jest ujemny, to wypadnie nam rozważać przedziały

$$-\infty, a; \quad a, b; \quad b, +\infty.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$R = \left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1} + \left(\frac{q}{2n}\right)^{2n},$$

to przekonamy się, że w razie:

1) kiedy $R < 0$, to $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, tak iż równanie (2) ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, z których każdy jest pojedynczy.

2) kiedy $R = 0$, to jedna tylko z dwu wartości $f(a)$ i $f(b)$ jest równą zeru, i równanie (2) posiada wszyskiego dwa różne pierwiastki rzeczywiste, z których jeden jest pojedynczy, a pozostały dwukrotny — jeżeli obie liczby: p i q są różne od zera.

3) kiedy $R > 0$, to $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, i równanie (2) posiada jeden tylko pierwiastek rzeczywisty.

27. PRZYKŁAD 3. Równanie

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} = 0$$

ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, jeżeli n jest liczbą nieparzystą; jeżeli zaś n jest parzyste, to równanie wcale nie ma pierwiastka rzeczywistego. — Przypuściwszy, że to ma miejsce dla pewnego n , można łatwo się przekonać, że ma to również miejsce dla wartości n o jedność większej.

28. PRZYKŁAD 4. Dowiedzieć się, ile pierwiastków rzeczywistych posiada równanie

$$f(x) = x^5 - 7x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Równanie pochodne

$$\frac{1}{5} f'(x) = x^4 - 2,8x + 1 = 0$$

posiada dwa pierwiastki rzeczywiste (art. 25); oznaczymy je przez a i b i przyjmijmy, że $a > b$. — A żeby określić znaki wartości $f(a)$ i $f(b)$, napiszmy tożsamość

$$5f(x) - xf'(x) = -21x^2 + 20x - 5,$$

z której wynika

$$5f(a) = -21a^2 + 20a - 5,$$

$$5f(b) = -21b^2 + 20b - 5.$$

Z tego zaś, wzięwszy pod uwagę, że równanie

$$-21x^2 + 20x - 5 = 0$$

nie posiada pierwiastków rzeczywistych, wnosimy, że obie wartości $f(a)$ i $f(b)$ są ujemne. Wiedząc to, łatwo okazać, że równanie dane ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, pojedynczy i większy od b .

§ VI. PRZYPADEK, KIEDY ZMIENNE x I $f(x)$ SĄ ZESPOLONE.

29. W tym paragrafie wrócimy do przypuszczenia, że współczynniki funkcji

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$$

są jakiegokolwiek, rzeczywiste lub zespolone, i że zmienna niezależna otrzymuje wartości zespolone.

Weźmy dwa układy współrzędnych. Jeden z nich, XY , będzie nam służył do przedstawiania zapomocą punktów rozmaitych wartości zmiennej x , a drugi, UV , do przedstawiania odpowiadających wartości funkcji $f(x)$, tak iż każdemu punktowi x na pierwszej płaszczyźnie odpowiada jeden i tylko jeden punkt f na płaszczyźnie drugiej. Jeżeli punkt x porusza się po jakiegokolwiek krzywej ciągłej $x'x''$, to jednocześnie punkt f opisuje pewną odpowiadającą krzywą $f'f''f'''$, również ciągłą, gdyż dwu nieskończenie bliskim punktom krzywej $x'x''$ odpowiadać winny dwa nieskończenie bliskie punkty krzywej $f'f''f'''$.

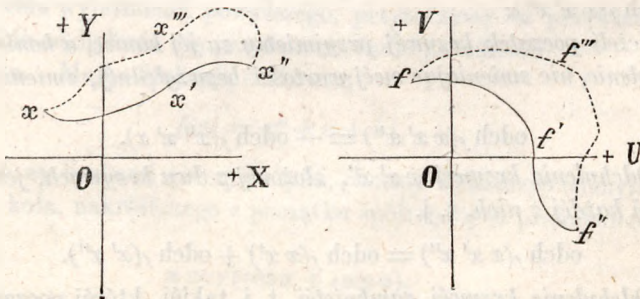


Fig. 1.

Wmiarę zmieniania się x w sposób ciągły według krzywej $x'x''$, od x do x'' , mod $f(x)$ będzie się zmieniał także w sposób ciągły i nako-

niec dosięgnie wartości $\text{mod } f(x'')$, którą można wyznaczyć według wzoru wiadomego. Co się zaś tyczy drugiego argumentu funkcji $f(x)$, odchylenia, to on, oczywiście, także będzie się zmieniał w sposób ciągły, jeżeli wyłączymy wartości zmiennej x , przy których funkcja $f(x)$ staje się równą zero. Odchylenie bowiem wartości zero jest nieoznaczone, tak iż, przy przejściu zmiennej x przez taką wartość, może zachodzić przerwa ciągłości odchylenia funkcji $f(x)$. Ażeby uniknąć takich przypadków, przyjmiemy nadal, że pośród punktów krzywej $x'x''$ niema takiego, w którymby odpowiednia wartość funkcji $f(x)$ była równą zero.

Wyznaczenie wartości $\text{odch } f(x'')$ przedstawia, wogóle mówiąc, więcej trudności, niż wyznaczenie wartości $\text{mod } f(x'')$, i zwykle wymaga roztrząsań szczególnych. Odchylenie bowiem jakiegokolwiek liczby zespolonej zawiera w sobie, jak wiadomo, dowolną wielokrotność liczby 2π . Lecz, jeżeli za początkową wartość $\text{odch } f(x)$ w punkcie x przyjmiemy pewną jedną z nieskończenie wielu owych wartości, różniących się o wielokrotność 2π , to natenczas wszystkim już następnym wartościom zmiennej x na krzywej $x'x''$ będą odpowiadały zupełnie określone wartości $\text{odch } f(x)$. Jakoż, każdemu nieskończeniu małemu poruszeniu się punktu x odpowiada nieskończenie mała zmiana wartości $\text{odch } f(x)$, a całkowity przyrost odchylenia, odpowiadający skończonemu poruszeniu się punktu x na krzywej $x'x''$, może być uważany jako suma nieskończenie wielkiej ilości nieskończenie małych przyrostków tego odchylenia.

Wielokrotność liczby 2π , zawarta w wartości $\text{odch } f(x'')$, zależy od postaci krzywej $x'x''$, a wyznaczenie tej wartości przedstawia ową trudność, o której wyżej wspomnieliśmy.

30. Różnicę $\text{odch } f(x'') - \text{odch } f(x)$, wyznaczoną w tym przypuszczeniu, iż zmienna x , zmieniając się w sposób ciągły, przechodzi przez wszystkie punkty krzywej $x'x''$ od x do x'' , nazywać będziemy *odchyleniem krzywej* $x'x''$ względem funkcji $f(x)$, a dla skrócenia oznaczać ją będziemy przez $\text{odch}_f(x'x'')$, gdzie znak f oznaczacza funkcją $f(x)$. Samo się przez się rozumie, że linija $x'x''$ może być, w przypadku szczególnym, prostą lub łamaną.

Z określenia odchylenia krzywej wynikają wprost następujące własności symbolu $\text{odch}_f(x'x'')$:

1). *Jeżeli początek krzywej przyjmiemy za jej koniec, a koniec za początek, to odchylenie, nie zmieniając swjej wartości bezwzględnej, zmieni swj znak; a zatem*

$$\text{odch}_f(x'x'') = - \text{odch}_f(x''x').$$

2). *Odchylenie krzywej $x'x''$, złożonej z dwu krzywych, jest równe sumie odchyleni każdej z nich, t. j.*

$$\text{odch}_f(x'x'') = \text{odch}_f(x'x') + \text{odch}_f(x'x'').$$

3). *Odchylenie krzywej zamkniętej, t. j. takiej, której początek i koniec razem się z sobą schodzą, nie zależy od tego, który punkt przyjęliśmy za jej początek; np.*

$$\text{odch}_f(x'x''x''x''x) = \text{odch}_f(x'x''x''x'x) = \text{odch}_f(x''x''x''x'x'').$$

4). Odchylenie każdej krzywej zamkniętej jest $2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, dodatnią lub ujemną, albo zerem.

5). Jeżeli krzywą zamkniętą $abca$ (fig. 2) rozdzielimy na dwie części, a punkty podziału b i c połączymy z sobą krzywą dowolną cdb , to

$$\text{odch}_f(abca) = \text{odch}_f(abdca) + \text{odch}_f(bcdb).$$

Podobnie

$$\text{odch}_f(abca) = \text{odch}_f(abda) + \text{odch}_f(bcdb) + \text{odch}_f(cade),$$

i t. d.

6). Jeżeli funkcja, wyznaczająca $f(x)$, jest iloczynem dwu innych funkcji, $f_1(x)$ i $f_2(x)$, to

$$\text{odch}_f(ab) = \text{odch}_{f_1}(ab) + \text{odch}_{f_2}(ab),$$

jakąkolwiek była krzywa ab .

Biorąc pod uwagę ciągłość funkcji ułamkowych (por. art. 19), wnosimy, iż wszystko powyższe powiedziane o odchyleniu krzywej ma miejsce również w tym przypadku, kiedy zamiast funkcji całkowitej $f(x)$ weźmiemy jakąkolwiek funkcją ułamkową $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, pod warunkiem jednak, żeby ani $\varphi(x)$, ani $\psi(x)$ nie stawały się równe zero w żadnym punkcie rozważanej krzywej. Wskutek tego, kładąc

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

mamy, pod warunkiem wypowiedzianym,

$$\text{odch}_f(ab) = \text{odch}_\varphi(ab) - \text{odch}_\psi(ab).$$

31. W celu wyjaśnienia powyższego, przytoczymy tu przykład, w którym wyznaczenie odchylenia nie przedstawia żadnej trudności.

PRZYKŁAD. Mając funkcję całkowitą

$$f(x) = x^n + a + bi,$$

w której a i b są liczbami rzeczywistymi, chcemy wyznaczyć odchylenie łuku xx' na okręgu koła, nakreślonego z początku współrzędnych promieniem r .

Kładąc

$$x = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

$$f(x) = u + iv,$$

znajdujemy

$$u = r^n \cos n\alpha + a, \quad v = r^n \sin n\alpha + b;$$

skąd

$$(u - a)^2 + (v - b)^2 = r^{2n}.$$

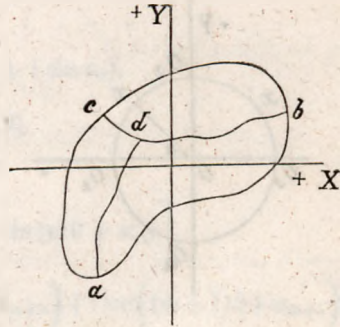


Fig. 2.

Powyższe równanie wskazuje, że wtedy, kiedy punkt porusza się po okręgu koła $O_1O_2O_3O_4$ (fig. 3), nakerślonego z początku współrzędnych promieniem r , to

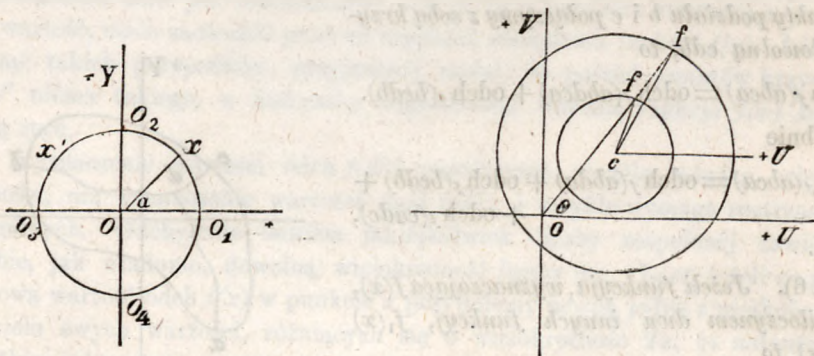


Fig. 3.

odpowiadający mu punkt f w drugim układzie jednocześnie poruszać się będzie po okręgu koła, nakerślonego z punktu c promieniem r^n . Oznaczając zaś kąt UCf przez β , widzimy, iż

$$\beta = n\alpha.$$

Biorąc to pod uwagę i zważając, że odch $f(x) = fOU = \theta$, możemy łatwo wyznaczyć odchylenie jakiegokolwiek łuku na okręgu $O_1O_2O_3O_4$ względem funkcji $f(x)$. — Np. dla całego okręgu znajdujemy:

$$\text{jeżeli } r^n < \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ to odch } f(O_1O_2O_3O_4O_1) = 0,$$

$$\text{jeżeli } r^n > \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ to odch } f(O_1O_2O_3O_4O_1) = 2n\pi.$$

32. Twierdzenie pomocnicze 1. *Jeżeli funkcja całkowita $f(x)$ dla pewnej wartości zmiennej niezależnej, $x = a$, przyjmuje wartość $f(a)$ różną od zera, to zawsze można znaleźć taką liczbę h , żeby wartość mod $f(a + h)$ była mniejsza od wartości mod $f(a)$.*

Przypuśćmy, że pośród liczb

$$f(a), f'(a), \dots, f^{(m)}(a), \dots, f^{(n)}(a),$$

pierwsza, licząc od strony lewej, która nie jest równą zero, jest $f^{(m)}(a)$; jeżeli więc $f'(a)$ jest już różna od zera, to $m = 1$. Gdy przez h oznaczymy przyrostek dowolny, to

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h^m}{1.2 \dots m} f^{(m)}(a) + \dots + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(a),$$

skąd, po podzieleniu obu stron przez $f(a)$, otrzymujemy

$$(1) \quad \frac{f(a + h)}{f(a)} = 1 + \frac{h^m}{1.2 \dots m} \frac{f^{(m)}(a)}{f(a)} + \dots + \frac{h^n}{1.2 \dots n} \frac{f^{(n)}(a)}{f(a)},$$

Wyznaczywszy moduły i odchylenia współczynników rozmaitych potęg h na stronie lewej równania (1) i nazwawszy przez R i θ moduł i odchylenie przyrostka dowolnego h , mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2 \dots m} \frac{f^{(m)}(a)}{f(a)} &= r_m (\cos \alpha_m + i \sin \alpha_m), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{f^{(n)}(a)}{f(a)} &= r_n (\cos \alpha_n + i \sin \alpha_n), \\ h &= R (\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned}$$

Wskutek tego, można równanie (1) tak napisać:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)}{f(a)} &= 1 + R^m r_m \left[\cos(m\theta + \alpha_m) + i \sin(m\theta + \alpha_m) \right] \\ &+ R^{m+1} r_{m+1} \left[\cos((m+1)\theta + \alpha_{m+1}) + i \sin((m+1)\theta + \alpha_{m+1}) \right] \\ &+ \dots + R^n r_n \left[\cos(n\theta + \alpha_n) + i \sin(n\theta + \alpha_n) \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ odchylenie θ dotąd pozostawało dowolne, przeto nadajmy mu wartość

$$\theta = \frac{\pi - \alpha_m}{m},$$

a jęj odpowiednie wartości odchyłeń $(m+1)\theta + \alpha_{m+1}, \dots, n\theta + \alpha_n$ oznaczmy rzez $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$; w takim razie

$$\frac{f(a+h)}{f(a)} = 1 - R^m r_m + R^{m+1} r_{m+1} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) + \dots + R^n r_n (\cos \varphi_{n-m} + i \sin \varphi_{n-m}).$$

Co do modułu R zaś zróbmy przypuszczenie, że

$$R < \frac{1}{\sqrt{r_m}},$$

skąd mamy

$$(2) \quad 1 - R^m r_m > 0,$$

a według ostatniego równania jest

$$\frac{\text{mod } f(a+h)}{\text{mod } f(a)} \leq 1 - R^m r_m + R^{m+1} r_{m+1} + \dots + R^n r_n.$$

Lecz z drugiej strony, jeżeli przyjmiemy, że R , prócz nierówności (2), czyni jeszcze zadość nierówności

$$R \leq \frac{k}{b+k},$$

gdzie k oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią, a b jakąkolwiek liczbę, nie mniejszą od największej z liczb $r_{m+1}, r_{m+2}, \dots, r_n$, to

$$R r_{m+1} + \dots + R^n r_n < k;$$

zatem

$$\frac{\text{mod } f(a+h)}{\text{mod } f(a)} < 1 - R^m(r_m - k).$$

To wskazuje, iż wystarczy przyjąć

$$k \leq r_m,$$

aby istniała nierówność

$$\text{mod } f(a+h) < \text{mod } f(a).$$

A więc, dla wszystkich wartości h takich, że

$$\text{odch } h = \frac{\pi - \alpha_m}{m},$$

a $\text{mod } h$ nie jest większy od mniejszej z dwu liczb

$$\frac{1}{m\sqrt{r_m}}, \quad \frac{r_m}{b+r_m},$$

mamy

$$\text{mod } f(a+h) < \text{mod } f(a),$$

co okazuje prawdziwość wypowiedzianego twierdzenia.

33. Twierdzenie pomocnicze 2. *Jeżeli we wszystkich punktach, leżących na krzywej zamkniętej, albo wewnątrz niej, wartość modułu funkcji całkowitej $f(x)$ nie jest mniejszą od liczby dodatniej k ; to odchylenie tej krzywej względem funkcji $f(x)$ jest równe zeru.*

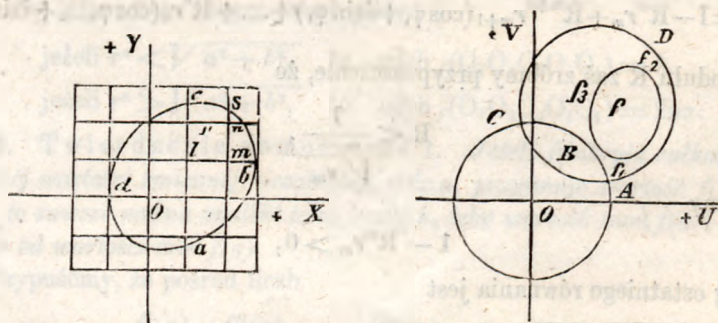


Fig. 4.

Oznaczmy przez R taką liczbę dodatnią, żeby cała krzywa zamknięta $abcda$ (fig. 4) znajdowała się wewnątrz okręgu koła, narysowanego z początku promieniem R , i, kładąc

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n,$$

$$\text{mod } A = a, \quad \text{mod } A_1 = a_1, \dots,$$

wnosimy, iż wartość modułu wielomianu

$$hf'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(x)$$

jest mniejsza od k , czyli

$$\text{mod } [f(x+h) - f(x)] < k.$$

Zestawiając tę nierówność z dwiema nierównościami

$$\text{mod } f(x) \geq k, \quad \text{mod } f(x+h) \geq k,$$

wynikającymi z założenia, widzimy, że punkt f , przedstawiający na płaszczyźnie współrzędnych UOV wartości funkcji $f(x)$, znajdzie się albo na, albo zewnątrz okręgu koła, zakreślonego z punktu O , jako środka, promieniem równym k , a wszystkim punktom, leżącym na obwodzie $lmnr$, odpowiadać będą punkty, leżące jednocześnie zewnątrz owego koła i wewnątrz okręgu koła, zakreślonego z punktu f , jako środka, promieniem k . Innymi słowy, linii łamanej zamkniętej $lmnr$ odpowiada pewna zamknięta krzywa $f_1 f_2 f_3 f_1$, cała zawarta wewnątrz pola ABCDA. To dowodzi, że odchylenie linii $lmnr$ jest równe zeru; gdyż przy ruchu ciągłym punktu f po krzywej $f_1 f_2 f_3 f_1$ kąt $f_1 O U$, zmieniając się także w sposób ciągły, nie może powiększać się lub zmniejszać o 2π , tak iż, gdy punkt f_1 , przeszedłszy całą długość krzywej $f_1 f_2 f_3 f_1$, powróci do swego stanowiska początkowego, kąt $f_1 O U$ dosięgnie także swojej wartości początkowej.

Na zasadzie jednej ze wzmiankowanych wyżej własności odchylenia jakiegokolwiek krzywej, mamy

$$\text{odch } f(abcda) = \Sigma \text{odch } f(lmnrl),$$

gdzie znak sumy na stronie prawej rozciąga się na odchylenia obwodów wszystkich pól składowych. A ponieważ, na mocy powyższego, dla każdego obwodu $lmnrl$ mamy

$$\text{odch } f(lmnrl) = 0,$$

przeto

$$\text{odch } f(abcda) = 0,$$

czego należało dowieść.

34. Twierdzenie pomocnicze 3. *Jeżeli mamy funkcję całkowitą stopnia n -tego,*

$$f = Ax^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n,$$

jeżeli przez a oznaczymy dowolną liczbę dodatnią, nie mniejszą od każdej z liczb

$$\text{mod } A_1, \quad \text{mod } A_2, \dots, \text{mod } A_n,$$

a przez k dowolną liczbę dodatnią mniejszą od $\text{mod } A$, to, zakreśliwszy około początku współrzędnych krzywą zamkniętą $O_1 O_2 O_3 O_4 O_1$, jakiegokolwiek kształtu, lecz taką, żeby odległość każdego jej punktu od początku współrzędnych była

$$\geq 1 + \frac{a}{k}, \text{ będziemy mieli}$$

$$\text{odch } f(O_1 O_2 O_3 O_4 O_1) = 2n\pi.$$

Weźmiemy pod uwagę funkcję ułamkową

$$F = \frac{f}{x^n} = A + A_1 \frac{1}{x} + \dots + A_n \frac{1}{x^n},$$

i wyznaczmy odchylenie krzywej $O_1O_2O_3O_4O_1$ (fig. 5) względem funkcji $F(x)$.

Przyjąwszy $\frac{1}{x} = y$, za-

uważymy, że dowolnie wybranemu punktowi x odpowiada punkt y , leżący po drugiej stronie osi odciętych tak, iż kąt $O_1Ox = -O_1Oy$, a odległość $Oy = \frac{1}{Ox}$.

Dlatego, gdy punkt x , poruszając się w sposób ciągły, opisuje krzywą $O_1O_2O_3O_4O_1$ w kierunku strzałki, to odpowiadający mu punkt y opisze krzywą $B_1B_2B_3B_4B_1$ w kierunku przeciwnym, a jego odległość od początku O , zgodnie z założeniem, będzie

$$\text{wciąż} \leq \frac{k}{a+k}.$$

Oznaczywszy przez φ funkcję

$$\varphi = A + A_1y + \dots + A_ny^n,$$

która zależy od nowiej zmiennej y , mamy

$$\text{odch}_F(O_1O_2O_3O_4O_1) = \text{odch}_\varphi(B_1B_2B_3B_4B_1),$$

gdyż wartość funkcji F w punkcie x na krzywej $O_1O_2O_3O_4O_1$ jest równa wartości funkcji φ w odpowiadającym punkcie y na krzywej $B_1B_2B_3B_4B_1$. A nadto wiadomo, że jeżeli

$$\text{mod } y \leq \frac{k}{a+h},$$

to

$$\text{mod } \varphi(y) > \text{mod } A - k;$$

wskutek czego, na mocy 2-go twierdzenia pomocniczego, wnosimy, że

$$\text{odch}_\varphi(B_1B_2B_3B_4B_1) = 0.$$

A zatem także

$$\text{odch}_F(O_1O_2O_3O_4O_1) = 0,$$

albo, co wychodzi na jedno,

$$\text{odch}_F(O_1O_2O_3O_4O_1) - \text{odch}_{x^n}(O_1O_2O_3O_4O_1) = 0.$$

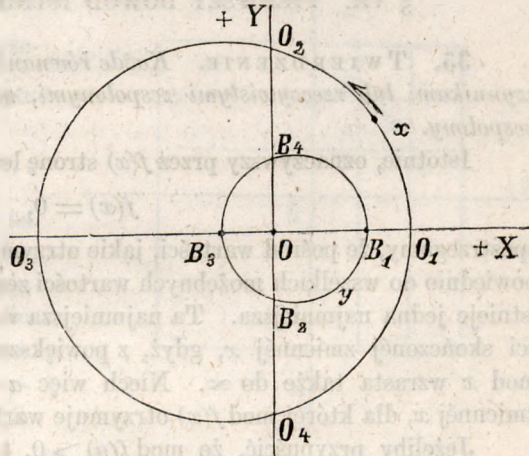


Fig. 5.

Stąd zaś, gdy oczywiście

$$\text{odch}_{x^n}(O_1 O_2 O_3 O_1 O_1) = 2n\pi,$$

otrzymujemy

$$\text{odch}_f(O_1 O_2 O_3 O_4 O_1) = 2n\pi,$$

c. n. d.

§ VII. PIÉRSZY DOWÓD ISTNIENIA PIERWIASTKA.

35. TWIERDZENIE. *Każde równanie jakiegokolwiek stopnia, ze współzynnikiem lub rzeczywistymi zespolonymi, ma pierwiastek, rzeczywisty albo zespolony.*

Istotnie, oznaczwszy przez $f(x)$ stronę lewą równania danego,

$$f(x) = 0,$$

spostrzegamy, że pośród wartości, jakie otrzymuje liczba dodatna mod $f(x)$, odpowiednio do wszelkich możebnych wartości zespolonych zmiennej niezależnej x , istnieje jedna najmniejsza. Ta najmniejsza wartość odpowiada pewnej wartości skończonej zmiennej x , gdyż, z powiększaniem się liczby x do ∞ , wartość mod x wzrasta także do ∞ . Niech więc a oznacza tę szczególną wartość zmiennej x , dla której mod $f(x)$ otrzymuje wartość najmniejszą.

Jeżeliby przypuścić, że mod $f(a) > 0$, to natenczas, według 1-go twierdzenia pomocniczego (art. 32), możnaby znaleźć taką inną wartość $a + h$ zmiennej niezależnej, dla której miałyby miejsce nierówność

$$\text{mod } f(a + h) < \text{mod } f(a).$$

Lecz to przeczyłoby przypuszczeniu, że mod $f(a)$ jest możebnie najmniejszą wartością mod $f(x)$; a zatem

$$\text{mod } f(a) = 0,$$

a liczba a jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$.

§ VIII. DRUGI DOWÓD ISTNIENIA PIERWIASTKA.

36. Mając funkcją całkowitą

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_n,$$

oznaczmy przez a i k toż samo, co w 3-im twierdzeniu pomocniczym (art. 34), t. j.

przez k dowolną liczbę dodatną, mniejszą od wartości mod A ,

przez a dowolną liczbę dodatną większą od każdej z liczb: mod A_1 , mod A_2 , ..., mod A_n ,

a prócz tego, przez m oznaczmy liczbę dodatną, całkowitą, nie mniejszą od wartości $1 + \frac{a}{k}$. Odłóżmy tak na osi odciętych, jak i na osi rzędnych, od

początku spólrzędnych w obie strony, po m jedności, a przez tak wyznaczone punkty poprowadźmy dwa układy prostych, równoległych odpowiednio do osi rzędnych i odciętych. Skrajne z tych linii (t. j. m -te od początku) utworzą kwadrat, który nazwijmy ABCD.

Ponieważ odległość każdego punktu na obwodzie kwadratu ABCD od początku spólrzędnych nie jest mniejszą od $1 + \frac{k}{a}$, przeto, na mocy 3-go twierdzenia pomocniczego (art. 34), mamy

$$\text{odch}_r(\text{ABCD}) = 2n\pi.$$

Jeżeliby się zdarzyło, że na jednej z $4m - 2$ prostych, dzielących kwadrat ABCD, funkcja $f(x)$ stawałaby się równą zero, to wtedy nie byłoby potrzeby dowodzić istnienia pierwiastka. Przypuśćmy więc, że to nie zachodzi; w takim razie zważmy, że

$$\text{odch}_r(\text{ABCD}) = \sum \text{odch}_r(\text{gbc}dg),$$

gdzie znak sumy na stronie lewej rozciąga się na obwoły wszystkich $4m^2$ kwadratów takich, jak $\text{gbc}d$; a zatem

$$\sum \text{odch}_r(\text{gbc}dg) = 2n\pi.$$

Stąd wnosimy, że pośród $4m^2$ kwadratów takich, jak $\text{gbc}d$, znajduje się przynajmniej jeden taki, iż odchylenie jego obwołu jest różne od zera. Niechże to będzie kwadrat $\text{gbc}d$; przyjmujemy więc, że odchylenie jego obwołu jest $2k\pi$, gdzie k oznacza pewną liczbę całkowitą, różną od zera.

Wartości mod $f(x)$ wewnątrz kwadratu $\text{gbc}d$ i na jego obwodzie nie mogą być wciąż większe od dowolnie wziętej liczby dodatniej, gdyż w takim razie, wskutek 2-go twierdzenia pomocniczego (art. 33), mielibyśmy

$$\text{odch}_r(\text{gbc}dg) = 0,$$

co przeczy tytko zrobionemu przypuszczeniu. A więc znajdują się wewnątrz pola $\text{gbc}d$ dowolnie małe wartości modułu funkcji $f(x)$.

Podzielmy każdy z boków gb i gd np. na dziesięć równych części i przez punkty podziału przeprowadźmy dwa układy prostych, równoległych do osi spólrzędnych, ażeby pole $\text{gbc}d$ rozłożyć na sto mniejszych kwadratów, takich jak $glmn$. Jeżeliby się zdarzyło, że na jednej z poprowadzonych teraz linii funkcja $f(x)$ staje się równą zero, to nie mielibyśmy potrzeby dowodzić, że pierwiastek istnieje. Przypuśćmy więc, że to nie zachodzi; w takim razie

$$\text{odch}_r(\text{gbc}dg) = \sum \text{odch}_r(\text{glm}ng),$$

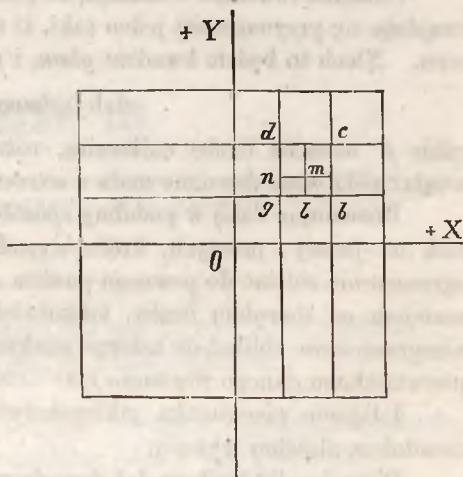


Fig. 6.

a wskutek tego

$$\Sigma \text{ odch}_f(glmng) = 2k\pi,$$

gdzie znak Σ rozciąga się na obwody wszystkich stu kwadracików, wchodzących w skład kwadratu $abcd$.

Ostatnie równanie wskazuje, że pośród stu kwadratów, takich, jak $glmn$, znajduje się przynajmniej jeden taki, iż odchylenie jego obwodu nie jest równe zeru. Niech to będzie kwadrat $glmn$, i przypuśćmy, że

$$\text{odch}_f(glmng) = 2k'\pi,$$

gdzie k' oznacza liczbę całkowitą, różną od zera. A więc znajdują się wewnątrz pola $glmn$ dowolnie małe wartości modułu funkcji $f(x)$.

Rozumując dalej w podobny sposób, otrzymamy oczywiście: albo pierwiastek na jednej z prostych, które wypadnie prowadzić, albo będziemy się nieograniczenie zbliżać do pewnego punktu a takiego, iż wartość $\text{mod } f(a)$ będzie mniejsza od dowolnej liczby, jakkolwiek małej, innymi słowy, będziemy się nieograniczenie zbliżać do takiego punktu a , iż $\text{mod } f(a) = 0$. Liczba a będzie pierwiastkiem danego równania $f(x) = 0$.

Istnienie pierwiastka jakiegokolwiek równania przedstawia twierdzenie zasadnicze algiebrzy wyższej.

Pierwszy d'Alembert dał dowodzenie istnienia pierwiastka. Po nim należy zaznaczyć dowodzenia Euler'a, Lagrange'a, a szczególnie dowodzenia Gauss'a i Cauchy'ego. Pierwszy z wyłożonych tu dowodów podał Cauchy.

ROZDZIAŁ III.

ROZKŁAD FUNKCYI CAŁKOWITÉJ NA CZYNNIKI LINIOWE. — PIERWIĄTKI WIELOKROTNE. — ROZKŁAD FUNKCYI UZAMKOWÉJ NA UŁAMKI NAJPROSTSZE.

§ I. ROZKŁAD FUNKCYI CAŁKOWITÉJ NA CZYNNIKI LINIOWE, O DZIELNIKACH FUNKCYJ CAŁKOWITYCH.

37. Udowodniwszy dla jakiegokolwiek równania istnienie pierwiastka, zajmijmy się teraz wyprowadzeniem wniosków, jakie z tego wynikają.

Niech $f(x)$ przedstawia jakąkolwiek funkcją stopnia n -tego,

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n,$$

a liczba a_1 niech będzie jój pierwiastkiem. Funkcja $f(x)$ jest podzielna przez $x - a_1$; oznaczywszy iloraz przez $f_1(x)$, będziemy mieli

$$f(x) = (x - a_1)f_1(x).$$

Funkcja $f_1(x)$, stopnia $(n - 1)$ -go, posiada pierwiastek. Nazwawszy go a_2 , będziemy mieli tożsamość

$$f_1(x) = (x - a_2)f_2(x),$$

w której $f_2(x)$ oznacza funkcją całkowitą, stopnia $(n - 2)$ -go. Podobnie postępując dalej, otrzymamy nowe tożsamości:

$$f_2(x) = (x - a_3)f_3(x),$$

$$\dots$$
$$f_{n-1}(x) = (x - a_n)f_n(x),$$

w których a_3, a_4, \dots są liczbami stałymi, zaś $f_3(x), f_4(x), \dots$ funkcjami całkowitymi stopnia odpowiednio $(n - 3)$ -go, $(n - 4)$ -go, \dots . Łatwo tu zauważyć, że w wyrażeniu każdej z funkcyj $f_1(x), f_2(x), \dots$ współczynnikiem najwyższej potęgi zmiennej x jest liczba A , tak iż ostatnia funkcja $f^{(n)}(x)$, będąc stopnia zero, jest równa A .

Z powyższych tożsamości wynika

$$f(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

co wyraża następująco twierdzenie.

TWIERDZENIE. *Każda funkcja całkowita stopnia n -go jest równa iloczynowi n czynników liniowych postaci $x - a$, pomnożonemu przez współczynnik najwyższej potęgi zmiennej x w wyrażeniu tej funkcji.*

Taki rozkład funkcji na czynniki liniowe może być wykonany w jeden tylko sposób. Jakoż, przypuściwszy, iż jest możliwą tożsamość

$$A(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = B(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n),$$

wnosimy wprost, iż pośród liczb b_1, b_2, \dots znajduje się liczba a_1 , gdyż strona prawa, a więc jeden z jej czynników jest zerem przy $x = a_1$; niech np. $a_1 = b_1$. Dzieląc obie strony przez $x - a_1$, otrzymamy nową tożsamość

$$A(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n) = B(x - b_2)(x - b_3) \dots (x - b_n),$$

która wskazuje, że pośród liczb b_2, b_3, \dots znajduje się liczba a_2 . I t. d. W ten sposób przekonywamy się, że liczby

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

mogą od liczb

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$$

różnić się tylko następstwem, a nadto, że współczynniki B i A są sobie równe.

38. Z równości

$$f(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

widoczna, iż funkcja $f(x)$ staje się równą zeru tylko przy następujących wartościach zmiennej x :

$$x = a_1, a_2, \dots, a_n;$$

a ponieważ ich jest n , przeto równanie stopnia n -go $f(x) = 0$ nie może mieć więcej niż n pierwiastków.

Tylko w tym przypadku, kiedy wszystkie liczby

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

są różne od siebie, równanie $f(x) = 0$ ma istotnie n pierwiastków; w przypadku przeciwnym ilość pierwiastków równania jest mniejsza od n . — Jeżeli się zdarzy, że wszystkie liczby a_1, a_2, \dots, a_n są sobie równe, to wtedy równanie $f(x) = 0$ ma tylko jeden pierwiastek. Wogóle, przypuściwszy, że pośród liczb a_1, a_2, \dots, a_n jest

$$\alpha \text{ liczb } a,$$

$$\beta \text{ „ } b,$$

$$\vdots$$

$$\lambda \text{ „ } l,$$

gdy już każde dwie z liczb a, b, \dots, l są różne od siebie, możemy napisać

$$f(x) = A(x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x - l)^\lambda.$$

Wtedy czynnik $x - a$ nazywa się α -krotnym czynnikiem funkcji $f(x)$, czynnik $x - b$ jej β -krotnym czynnikiem i t. d.

Oczywiście, że to określenie wielokrotności czynników liniowych funkcji $f(x)$, wychodzi na toż samo, co określenie podane w art. 16-ym.

Przypomnimy, że pierwiastek α nazywa się α -krotnym pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, a w razie gdy $\alpha = 1$ pierwiastkiem pojedynczym. —

Jeżeli przyjmujemy w rachubę wielokrotność każdego pierwiastka, to ilość wszystkich pierwiastków równania $f(x) = 0$ jest równa jego stopniowi, gdyż $\alpha + \beta + \dots + \lambda = n$.

39. Wykonawszy mnożenie, otrzymujemy

$$A(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) = Ax^n - A\Sigma_1 x^{n-1} + A\Sigma_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n A\Sigma_n,$$

gdzie, przez skrócenie, wprowadziliśmy oznaczenia:

$$\Sigma_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

$$\Sigma_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Sigma_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

Ponieważ wyrażenie ostatnie jest tożsamościowo równe wyrażeniu

$$Ax^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n,$$

przeto

$$\Sigma_1 = -\frac{A_1}{A}, \quad \Sigma_2 = \frac{A_2}{A}, \quad \dots, \quad \Sigma_n = (-1)^n \frac{A_n}{A},$$

t. j. wogóle

$$\Sigma_m = (-1)^m \frac{A_m}{A},$$

dla wszystkich wartości wskaźnika m , od jedności do n .

Równania te wyrażają związki, zachodzące między pierwiastkami równania i jego współczynnikami, i dają możność napisania równania, gdy jego pierwiastki są dane.

Wskazują też one, że, jeżeli wszystkie pierwiastki równania są rzeczywiste i dodatne, to ani jeden współczynnik w równaniu nie jest równy zeru, a każde dwa współczynniki sąsiednie są różnego znaku.

40. Przypuśćmy, że wszystkie współczynniki w równaniu $f(x) = 0$ są rzeczywiste; wtenczas ono albo nie ma pierwiastków zespolonych, albo ich ilość jest parzysta. W ostatnim przypadku pierwiastki zespolone grupują się parami, po dwa sprzężone, których wielokrotność jest także sama.

Podanie to, które wypowiedział d'Alembert, udowodniliśmy już w art. 17-ym; ono staje się prawie oczywistym (art. 6), jeżeli przyjmiemy na uwagę rozkład funkcji $f(x)$ na czynniki liniowe.

Przypuśćmy, że równanie $f(x) = 0$ posiada jedną, albo kilka par pierwiastków zespolonych sprzężonych, i weźmy pod uwagę jedną taką parę,

$$a_1 = p + qi, \quad a_2 = p - qi.$$

Iloczyn odpowiadających im dwu czynników liniowych

$$(x - a_1)(x - a_2) = (x - p)^2 + q^2$$

przedstawia funkcją stopnia 2-go ze współczynnikami rzeczywistymi, która pozostaje dodatnią przy wszelkich wartościach rzeczywistych zmiennej x ; tak, iż zamiast każdej pary czynników liniowych zespolonych możemy napisać jeden czynnik stopnia 2-go, który zawsze jest dodatni. Stąd wynika, że *każda funkcja całkowita ze współczynnikami rzeczywistymi rozkłada się na iloczyn czynników liniowych stopnia 2-go ze współczynnikami rzeczywistymi*, a przytym możemy przyjąć, że każdy z czynników stopnia 2-go jest dodatni przy wszelkich wartościach zmiennej niezależnej.

Taki rozkład funkcji całkowitej jest dogodny w przypadku, kiedy chcemy uniknąć liczb zespolonych.

Przy jego pomocy, łatwo sprawdzić twierdzenie, udowodnione w art. 21-ym.

41. Funkcja całkowita $\varphi(x)$, która dzieli bez reszty inną funkcją całkowitą $f(x)$, nazywa się jej *dzielnikiem*.

Oczywiście, że, jeżeli nie będziemy zwracać uwagi na czynnik stały, każdy dzielnik funkcji $f(x)$ jest iloczynem czynników liniowych, wchodzących do rozkładu funkcji $f(x)$. Jeżeli więc mamy rozkład funkcji $f(x)$ na czynniki liniowe, to możemy wypisać wszystkie możebne dzielniki tej funkcji, poczynając od liniowych, a kończąc na samej funkcji $f(x)$.

Istotnie, kładąc

$$f(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

i tworząc wszelkie możebne iloczyny m czynników spośród funkcji liniowych

$$x - a_1, \quad x - a_2, \quad \dots, \quad x - a_n,$$

otrzymamy wszystkie możebne dzielniki stopnia m -go funkcji $f(x)$. Ilość takich dzielników jest równa ilości kombinacji z n elementów po m . Będą one wtedy tylko różnymi dzielnikami, kiedy wszystkie pierwiastki a_1, a_2, \dots, a_n są różne; w przeciwnym razie ilość dzielników stopnia m -go będzie mniejsza.

Mając dwie funkcje całkowite, $F(x)$ i $f(x)$, i dane wszystkie czynniki liniowe każdej z nich, możemy wypisać wszystkie dzielniki wspólne tych dwu funkcji, a więc i największy ich wspólny dzielnik.

Wyrażenie największego wspólnego dzielnika może być otrzymane inaczej, bez pomocy czynników liniowych danych funkcji, według wiadomego sposobu Euklidesa. Dlatego, wyznaczenie wszystkich wspólnych dzielników dwu funkcji sprowadza się do rozłożenia największego wspólnego dzielnika tych funkcji na czynniki liniowe.

Jeżeli największy wspólny dzielnik dwu funkcji $F(x)$ i $f(x)$ jest jednością, to takie funkcje nazywają się *pierwszymi względem siebie*; natenczas równania $F(x) = 0$ i $f(x) = 0$ nie mają pierwiastka wspólnego.

Wogóle, jeżeli największy wspólny dzielnik dwu funkcji $F(x)$ i $f(x)$ jest funkcją stopnia m -go, którą oznaczmy przez D , to dwa równania

$$F(x) = 0, \quad f(x) = 0$$

mają m pierwiastków spólnych, czyniących zadość równaniu stopnia m -go

$$D = 0;$$

z tych pierwiastków niektóre mogą być równe sobie.

Podobne uwagi możnaby zrobić o trzech, czterech i t. d. równaniach.

42. Znajdziemy największy spólny dzielnik funkcji

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$$

i jej pochodnej

$$f'(x) = nAx^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + \dots + A_{n-1}$$

w przypuszczeniu, że rozkład funkcji $f(x)$ na czynniki liniowe jest dany, mianowicie

$$f(x) = A(x-a)^\alpha(x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda,$$

gdzie każde dwie z liczb a, b, \dots, l są różne od siebie.

W tym celu, nie biorąc pod uwagę wielokrotności czynników liniowych, napiszemy powyższe równanie tak:

$$f(x) = A(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n).$$

Wstawiając w obu stronach $x+h$ zamiast x , a strony tak otrzymanej równość dzieląc przez strony poprzedniej, będziemy mieli:

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \left(1 + \frac{h}{x-a_1}\right) \left(1 + \frac{h}{x-a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{h}{x-a_n}\right).$$

Obie strony tej tożsamości są funkcjami całkowitymi względem h ; współczynniki przeto jednakowych potęg h są sobie równe. A gdy

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots,$$

zatem współczynnik pierwszej potęgi h na stronie lewej poprzedniej tożsamości jest

$$\frac{f'(x)}{f(x)},$$

a na drugiejj

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \dots + \frac{1}{x-a_n};$$

jest więc

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \dots + \frac{1}{x-a_n}.$$

Przyjmując na uwagę wielokrotność pierwiastków, możemy tę równość tak napisać:

$$(1) \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \dots + \frac{\lambda}{x-l};$$

kładąc zaś, przez skrócenie,

$$(x-a)(x-b) \dots (x-l) = \varphi(x)$$

i mnożąc obie strony równości (1) przez

$$f(x) = A(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \dots (x-l)^{\lambda-1} \varphi(x),$$

otrzymamy

$$f'(x) = A(x-a)^{\alpha-1} \dots (x-l)^{\lambda-1} \left[\frac{\alpha \varphi(x)}{x-a} + \frac{\beta \varphi(x)}{x-b} + \dots + \frac{\lambda \varphi(x)}{x-l} \right].$$

Dla ostatecznego rozłożenia funkcji $f'(x)$, należałoby otrzymać rozkład funkcji całkowitej

$$\frac{\alpha \varphi(x)}{x-a} + \frac{\beta \varphi(x)}{x-b} + \dots + \frac{\lambda \varphi(x)}{x-l} = \psi(x)$$

na czynniki liniowe. Lecz dla naszego celu, dla odnalezienia największego wspólnego dzielnika funkcji $f(x)$ i $f'(x)$, dostatecznym będzie, gdy dowiedzimy, że do tego rozkładu nie wejdzie żadna z funkcji liniowych

$$x-a, \quad x-b, \quad \dots, \quad x-l,$$

czyli, innymi słowy, że funkcje $f(x)$ i $\psi(x)$ są pierwsze względem siebie. Jażkoż, jeżeliby te dwie funkcje miały wspólny dzielnik liniowy, np. $x-a$, to mielibyśmy $\psi(a) = 0$, czyli

$$(a-b)(a-c) \dots (a-l) = 0,$$

co niemożliwe, gdyż liczba a jest różną od liczb b, c, \dots, l .

Zestawiając z sobą dwa wyrażenia:

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \dots (x-l)^{\lambda}, \\ f'(x) &= A(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \dots (x-l)^{\lambda-1} \psi(x), \end{aligned}$$

i biorąc pod uwagę, że funkcje $f(x)$ i $\psi(x)$ są pierwsze względem siebie, wnosiśmy, że największy wspólny dzielnik funkcji $f(x)$ i jej pochodnej $f'(x)$ jest

$$(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \dots (x-l)^{\lambda-1}.$$

Tym sposobem dochodzimy do następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE. *Największy wspólny dzielnik funkcji całkowitej $f(x)$ i jej pochodnej $f'(x)$ jest iloczynem wszystkich różnych czynników liniowych, wchodzących do rozkładu funkcji $f(x)$, wziętych w potęgę o jedność niższą od tej, w jakiej one wchodzą do rozkładu funkcji $f(x)$.*

Wniosek 1. *m -krotny pierwiastek równania $f(x)=0$ jest $(m-1)$ -krotnym pierwiastkiem równania $f'(x)=0$.*

Wniosek 2. *Ażeby równanie $f(x)=0$ nie miało ani jednego pierwiastka wielokrotnego, jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby funkcje $f(x)$ i $f'(x)$ były pierwsze względem siebie.*

§ II. O PIERWIASTKACH WIELOKROTNYCH.

43. TWIERDZENIE. *Jeżeli równanie stopnia n -ego $f(x)=0$ ma pierwiastki wielokrotne, to rozwiązanie jego można sprowadzić do rozwiązania*

$$\frac{U_1}{U_2} = X_1, \quad \frac{U_2}{U_3} = X_2, \dots, \quad \frac{U_{m-1}}{U_m} = X_{m-1}, \quad U_m = X_m.$$

Takimto sposobem otrzymujemy wyrażenia wszystkich funkcji X_1, X_2, \dots, X_m , a możemy zauważyć, że otrzymujemy je zapomocą zwyczajnego dzielenia algebraicznego.

Rozwiązanie więc równania $f(x) = 0$ sprowadza się do rozwiązania następujących równań:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \dots, \quad X_m = 0.$$

Pierwsze z nich określa wszystkie pierwiastki pojedyncze, drugie określa wszystkie pierwiastki dwukrotne i t. d.

Jeżeliby się zdarzyło, że równanie $f(x) = 0$ nie ma pierwiastków pojedynczych, to wtedy mielibyśmy $X_1 = 1$, i nie możnaby napisać równania $X_1 = 0$. Toż samo można powiedzieć o pierwiastkach dwukrotnych i t. d.

44. PRZYKŁAD. Dowiedzieć się, czy równanie

$$x^8 - x^7 - 4x^6 + 6x^5 - 12x^3 + 16x^2 + 8x - 16 = 0$$

posiada pierwiastki wielokrotne.

Największy spólny dzielnik dwu funkcji:

$$f(x) = x^8 - x^7 - 4x^6 + 6x^5 - 12x^3 + 16x^2 + 8x - 16,$$

$$f'(x) = 8x^7 - 7x^6 - 24x^5 + 30x^4 - 36x^2 + 32x + 8$$

jest

$$D_1 = x^4 - 4x^2 + 4;$$

największy spólny dzielnik funkcji

$$D_1 = x^4 - 4x^2 + 4, \quad D_1' = 4x^3 - 8x$$

jest

$$D_2 = x^2 - 2;$$

nakoniec, największy spólny dzielnik funkcji

$$D_2 = x^2 - 2, \quad D_2' = 2x$$

jest

$$D_3 = 1.$$

Wskutek tego, mamy

$$U_1 = x^4 - x^3 + 2x - 4, \quad U_2 = x^2 - 2, \quad U_3 = x^2 - 2,$$

a stąd

$$X_1 = x^2 - x + 2, \quad X_2 = 1, \quad X_3 = x^2 - 2.$$

A więc równanie dane posiada dwa pierwiastki pojedyncze, zadość czyniące równaniu

$$x^2 - x + 2 = 0,$$

i dwa trzykrotne, zadość czyniące równaniu

$$x^2 - 2 = 0,$$

tak, iż możemy napisać:

$$f(x) = (x^2 - 2)^3 (x^2 - x + 2).$$

§ III. ROZKŁAD FUNKCYI UŁAMKOWEJ NA UŁAMKI NAJPROSTSZE.

45. Z rozkładu funkcyi całkowitej na czynniki liniowe wynika, jako wniosek, rozkład funkcyi ułamkowej na ułamki najprostsze («cząstkowe»).

Zauważymy naprzód, że jeżeli w wyrażeniu funkcyi ułamkowej $\frac{F}{f}$ stopień licznika jest większy albo równy stopniowi mianownika, to zapomocą zwyczajnego dzielenia algebraicznego można rozłożyć funkcję $\frac{F}{f}$ na sumę dwu innych funkcyj, z których pierwsza będzie całkowita, a druga ułamkowa z licznikiem stopnia niższego od stopnia mianownika. Samo się przez się rozumie, że takie rozłożenie jednym tylko sposobem skuteczzone być może.

Weźmiemy pod uwagę taką funkcję ułamkową

$$\frac{F}{PQ},$$

której mianownik jest iloczynem dwu funkcyj całkowitych, pierwszych względem siebie, a stopień licznika F jest niższy od stopnia mianownika PQ . Zauważmy, że, zapomocą zwykłego dzielenia algebraicznego, możemy znaleźć dwie funkcyje całkowite X i Y , zadość czyniące równość

$$QX + PY = 1.$$

Rozważając zaś te funkcyje jako wiadome, otrzymujemy

$$\frac{1}{PQ} = \frac{X}{P} + \frac{Y}{Q};$$

a więc

$$\frac{F}{PQ} = \frac{FX}{P} + \frac{FY}{Q}.$$

Oznaczając przez E i A część całkowitą i resztę, wynikające z podzielenia funkcyi FX przez P , a przez H i B część całkowitą i resztę z podzielenia funkcyi FY przez Q , możemy poprzedzającą równość tak wyrazić:

$$\frac{F}{PQ} = E + H + \frac{A}{P} + \frac{B}{Q}.$$

Lecz, według założenia, funkcja $\frac{F}{PQ}$ nie przedstawia części całkowitej: więc suma $E + H$ jest tożsamościowo równa zeru; wskutek tego

$$\frac{F}{PQ} = \frac{A}{P} + \frac{B}{Q},$$

gdzie A i B są funkcyjami całkowitymi stopni odpowiednio niższych, niż funkcyje P i Q .

Rozkład funkcji ułamkowej $\frac{F}{PQ}$ według poprzedzającego wzoru jest możebny w jeden tylko sposób. Istotnie, jeżeli przypuścimy, że istnieją dwie funkcje A' i B' stopni odpowiednio niższych niż funkcje P i Q , a takie, iż ma miejsce równość

$$\frac{F}{PQ} = \frac{A'}{P} + \frac{B'}{Q},$$

to wtedy ma także miejsce równość

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{Q} = \frac{A'}{P} + \frac{B'}{Q},$$

z której otrzymujemy

$$(A - A')Q = (B' - B)P.$$

Gdy zaś funkcje P i Q są pierwsze względem siebie, przeto z ostatniej równości wynika, że funkcja $A - A'$ jest podzielna przez P ; a że nadto obie funkcje A i A' , a więc i ich różnica, są niższego stopnia niż funkcja P , zatem różnica $A - A'$ jest tożsamościowo równa zeru, t. j.

$$A' = A,$$

wskutek tego, również i

$$B' = B.$$

A więc nie można przypuścić, że funkcje A' i B' różnią się od funkcji A i B .

Z tego wynika następujące

Twierdzenie pomocnicze 1. *Każda funkcja ułamkowa, nie zawierająca w sobie części całkowitej, mająca jako mianownik iloczyn dwu funkcji P i Q , pierwszych względem siebie, może być przedstawiona jako suma dwu ułamków, których mianownikami są funkcje P i Q , a licznikami funkcje stopni niższych niż odpowiednie mianowniki; taki rozkład funkcji ułamkowej może być uskutecziony w jeden tylko sposób.*

46. PRZYKŁAD. Rozłóżyc funkcję

$$\frac{x}{(x^2 + 5)(x^3 + x - 1)}.$$

Rozwijając stosunek dwu czynników mianownika na ułamek ciągły, znajdziemy

$$\frac{x^3 + x - 1}{x^2 + 5} = x - \frac{16}{4x - 1 + \frac{81}{4x + 1}};$$

przedostatni ułamek zbliżony («redukt») jest

$$x - \frac{16}{4x - 1} = \frac{4x^2 - x - 16}{4x - 1};$$

jest więc

$$(x^3 + x - 1)(4x - 1) - (4x^2 - x - 16)(x^2 + 5) = 81,$$

skąd

$$\frac{81}{(x^2 + 5)(x^3 + x - 1)} = \frac{4x - 1}{x^2 + 5} - \frac{4x^2 - x - 16}{x^3 + x - 1}.$$

Pomnożywszy obie strony przez x i oddzieliwszy części całkowite w wyrazach na stronie drugiej, otrzymamy

$$\frac{81x}{(x^2 + 5)(x^3 + x - 1)} = \frac{-x - 20}{x^2 + 5} + \frac{x^2 + 20x - 4}{x^3 + x - 1}.$$

Można to otrzymać inaczej. Kładąc

$$\frac{x}{(x^3 + x - 1)(x^2 + 5)} = \frac{ax^2 + a_1x + a_2}{x^3 + x - 1} + \frac{bx + b_1}{x^2 + 5},$$

gdzie a, a_1, a_2, b, b_1 oznaczają szukane współczynniki liczebne, i znosząc mianowniki, otrzymamy

$$x = (a + b)x^4 + (a_1 + b_1)x^3 + (5a + a_2 + b)x^2 + (5a_1 - b + b_1)x + 5a_2 - b_1.$$

Wskutek zaś przyrównania współczynników jednakowych potęg x po obu stronach, mieć będziemy na wyznaczenie wprowadzonych pięciu współczynników liczebnych układ pięciu równań:

$$\begin{aligned} a + b &= 0, \\ a_1 + b_1 &= 0, \\ 5a + a_2 + b &= 0, \\ 5a_1 - b + b_1 &= 1, \\ 5a_2 - b_1 &= 0 \end{aligned}$$

z których znajdziemy:

$$a = \frac{1}{81}, \quad a_1 = \frac{20}{81}, \quad b = -\frac{1}{81}, \quad b_1 = -\frac{20}{81}, \quad a_2 = -\frac{4}{81}.$$

47. Każda funkcya ułamkowa

$$\frac{F}{PQR \dots T},$$

której licznik jest stopnia niższego niż mianownik, a której mianownik jest iloczynem kilku funkcyj P, Q, R, \dots, T , pierwszych względem siebie, rozkłada się na sumę ułamków

$$\frac{F}{PQR \dots T} = \frac{A}{P} + \frac{B}{Q} + \dots + \frac{D}{T},$$

w których A, B, \dots przedstawiają funkcje całkowite stopni niższych niż odpowiadające im mianowniki.

Taki rozkład może być uskutecziony w jeden tylko sposób. — Opiéra się on na kolejnym stosowaniu twierdzenia, udowodnionego w art. 45-ym.

PRZYKŁAD. Kładąc

$$(1) \quad \frac{72}{x^3(x-1)^2(x+2)} = \frac{a + a_1x + a_2x^2}{x^3} + \frac{b + b_1x}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2},$$

możemy wyznaczyć wszystkie współczynniki a, a_1, \dots w sposób następujący.

Mnożąc naprzód obie strony równości (1) przez $x^3(x-1)^2(x+2)$, otrzymamy

$$72 = (a + a_1x + a_2x^2)(x-1)^2(x+2) + x^3\varphi(x),$$

gdzie φ oznacza pewną funkcją całkowitą. Z tej równości widoczna, że reszta z podzielenia funkcji

$$(a + a_1x + a_2x^2)(x-1)^2(x+2)$$

przez x^3 jest 72. Dzieląc zaś funkcją $(x-1)^2(x+2)$ przez x^3 , otrzymujemy resztę $-3x+2$; a więc reszta z podzielenia iloczynu

$$(a + a_1x + a_2x^2)(-3x+2)$$

przez x^3 jest 72. Tworząc istotnie tę resztę, otrzymujemy równość

$$(-3a_1 + 2a_2)x^2 - (3a - 2a_1)x + 2a = 72,$$

z której wynikają równania

$$3a_1 - 2a_2 = 0,$$

$$3a - 2a_1 = 0,$$

$$2a = 72,$$

a z nich

$$a = 36, \quad a_1 = 54, \quad a_2 = 81.$$

Pomnożywszy obie strony równości (1) przez $x^3(x-1)^2(x+2)$, możemy podobnie otrzymany wypadek tak przedstawić:

$$72 = (b + b_1x)x^3(x+2) + (x-1)^2\psi(x),$$

gdzie ψ oznacza pewną funkcją całkowitą. Stąd widoczna, że reszta z podzielenia funkcji

$$(b + b_1x)x^3(x+2)$$

przez $(x-1)^2$ jest 72; a gdy reszta z podzielenia funkcji $x^3(x+2)$ przez $(x-1)^2$ jest $10x-7$, przeto reszta z podzielenia iloczynu

$$(b + b_1x)(10x-7)$$

przez $(x-1)^2$ jest 72. Uskuteczniwszy istotnie dzielenie, otrzymujemy

$$(10b + 13b_1)x - 7b - 10b_1 = 72;$$

stąd

$$10b + 13b_1 = 0,$$

$$7b + 10b_1 = -72,$$

$$b = 104, \quad b_1 = -80.$$

prześcić dzielenia, jeżeli któraś z poprzednich funkcyj Q_i jest stopnia niższego od n .

Dzieląc powyżej otrzymane tożsamości przez $f^m, f^{m-1}, f^{m-2}, \dots$, otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{F}{f^m} &= \frac{Q}{f^{m-1}} + \frac{A}{f^m}, \\ \frac{Q}{f^{m-1}} &= \frac{Q_1}{f^{m-2}} + \frac{A_1}{f^{m-1}}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{Q_{m-3}}{f^2} &= \frac{Q_{m-2}}{f} + \frac{A_{m-2}}{f^2}, \\ \frac{Q_{m-2}}{f} &= \frac{A_{m-1}}{f}.\end{aligned}$$

Stąd zaś, wskutek dodania i zniesienia w obu stronach wyrazów jednakowych, otrzymamy żądany rozkład funkcji $\frac{F}{f^m}$.

Należy jeszcze udowodnić, że taki rozkład może być dokonany w jeden tylko sposób. Jest to prawie oczywiste. Jakoż, przypuśćmy, że istnieją dwa rozkłady,

$$\begin{aligned}\frac{F}{f^m} &= \frac{A}{f^m} + \frac{A_1}{f^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{f}, \\ \frac{F}{f^m} &= \frac{B}{f^m} + \frac{B_1}{f^{m-1}} + \dots + \frac{B_{m-1}}{f},\end{aligned}$$

w których stopień każdej z funkcyj B, B_1, \dots, B_{m-1} , równie jak i stopień każdej z funkcyj A, A_1, \dots, A_{m-1} , jest niższy niż stopień funkcji f . Odjąwszy je od siebie, otrzymamy,

$$\frac{A - B}{f^m} + \frac{A_1 - B_1}{f^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1} - B_{m-1}}{f} = 0;$$

czyli, po pomnożeniu obu stron przez f^m ,

$$A - B + (A_1 - B_1)f + (A_2 - B_2)f^2 + \dots = 0.$$

Ta zaś równość wskazuje, że różnica $A - B$ jest podzielna przez f , a gdy obie funkcyje A i B są stopnia niższego od n , przeto ma miejsce tożsamość

$$B = A.$$

Wskutek tego, poprzednią równość można napisać tak :

$$A_1 - B_1 + (A_2 - B_2)f + (A_3 - B_3)f^2 + \dots = 0,$$

z której bezpośrednio wynika, że

$$B_1 = A_1.$$

Podobnie dalej $B_2 = A_2$, i t. d.

Zauważymy tu jeszcze, że w szczególnym przypadku, kiedy $f = x - a$, rozkład funkcji $\frac{F}{(x-a)^m}$ według powyższego wzoru wychodzi na jedno z rozkładem funkcji F według wzoru Taylor'a.

PRZYKŁAD.

$$\frac{x^5}{(x^2 + x + 1)^3} = \frac{-x - 1}{(x^2 + x + 1)^3} + \frac{x + 3}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{x - 2}{x^2 + x + 1}.$$

49. Niech będzie funkcja ułamkowa $\frac{F(x)}{f(x)}$, której część całkowitą nazwiemy E , tak iż

$$\frac{F(x)}{f(x)} = E + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

gdzie już stopień funkcji $\varphi(x)$ jest niższy od stopnia funkcji $f(x)$.

W art. 43-im pokazaliśmy, że przy pomocy zwyczajnego dzielenia algebraicznego można wyznaczyć funkcje całkowite X_1, X_2, X_3, \dots , stanowiące iloczyny wszystkich pojedynczych, dwukrotnych, trzykrotnych i t. d. czynników liniowych, wchodzących do rozkładu funkcji $f(x)$. Przypuśćmy, żeśmy istotnie wyznaczyli wszystkie te funkcje, że więc mamy

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 \dots X_m^m.$$

Ponieważ każde dwie z funkcji $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ są pierwsze względem siebie, przeto, na mocy 1-go twierdzenia pomocniczego (art. 45), możemy ułamek $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ przedstawić tak:

$$(1) \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{X_1} + \frac{\varphi_2(x)}{X_2^2} + \frac{\varphi_3(x)}{X_3^3} + \dots,$$

gdzie $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ oznaczają funkcje całkowite stopni odpowiednio niższych niż X_1, X_2^2, X_3^3, \dots . Taki rozkład jest jeden tylko możliwy, a jeżeli się zdarzy, że jedna z funkcji X , np. X_1 , jest tożsamościowo równa 1, to wtedy $\varphi_1(x) = 0$.

Dotychczas nie potrzebowaliśmy wyznaczać pierwiastków równania $f(x) = 0$; ale jeżeli, nie zadawalnając się rozkładem dopięroco otrzymanym, zechcemy rozłożyć daną funkcję na ułamki jeszcze prostsze, to koniecznie potrzeba wyznaczyć pierwiastki funkcji X_1, X_2, \dots .

Weźmy pod uwagę jeden z wyrazów w rozkładzie (1), np. $\frac{\varphi_m(x)}{X_m^m}$; to, co o nim powiemy, będzie się stosować i do wszystkich innych. Oznaczywszy przez a_1, a_2, \dots, a_i pierwiastki funkcji X_m , mamy

$$X_m = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_i),$$

skąd, na mocy 1-go twierdzenia pomocniczego (art. 45),

$$\frac{\varphi_m(x)}{X_m^m} = \frac{\psi_1(x)}{(x - a_1)^m} + \frac{\psi_2(x)}{(x - a_2)^m} + \dots + \frac{\psi_i(x)}{(x - a_i)^m},$$

gdzie $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ oznaczają funkcje całkowite stopni niższych od m ; taki rozkład tylko jeden jest możliwy. Wprowadzając następnie do drugiej strony ostatniej równości zamiast funkcji $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ ich rozkłady według wzoru Taylor'a,

$$\psi_1(x) = \psi_1(a_1) + \frac{x-a_1}{1} \psi_1'(a_1) + \dots,$$

$$\psi_2(x) = \psi_2(a_2) + \frac{x-a_2}{1} \psi_2'(a_2) + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

i nazwawszy, dla krótkości,

$$A_h = \frac{\psi_1^{(h)}(a_1)}{1 \cdot 2 \dots h}, \quad B_h = \frac{\psi_2^{(h)}(a_2)}{1 \cdot 2 \dots h}, \dots,$$

otrzymujemy

$$\frac{\varphi_m(x)}{X_m^m} = \frac{A}{(x-a_1)^m} + \frac{A_1}{(x-a_1)^{m-1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{m-2}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-a_1} + \frac{B}{(x-a_2)^m} + \frac{B_1}{(x-a_2)^{m-1}} + \frac{B_2}{(x-a_2)^{m-2}} + \dots + \frac{B_{m-1}}{x-a_2} + \dots$$

Jest to właśnie ostateczny rozkład funkcji ułamkowej na ułamki najprostsze.

Stąd wynika następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE. Każda funkcja ułamkowa postaci

$$\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda},$$

w której a, b, \dots, l są liczbami od siebie różnymi, może być rozłożona, jednym tylko sposobem, na sumę następujących ułamków najprostszyc:

$$\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda} = E + \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \dots + \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l},$$

gdzie $A, B, \dots, L, A_1, \dots$ oznaczają liczby stałe, a E część całkowitą funkcji danej.

50. Wyznaczenie niewiadomych współczynników w powyższym rozkładzie może być uskutecznione rozmaitymi sposobami, innymi niż sposób, wynikający z teorii ogólnej.

Tak np., mnożąc obie strony wzoru powyższego przez iloczyn

$$(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda$$

i kładąc, dla krótkości,

$$(x - b)^{\beta} \dots (x - l)^{\lambda} = \varphi(x),$$

$$F(x) - (x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} \dots (x - l)^{\lambda} E = \Phi(x),$$

mieć będziemy

$$\Phi(x) = [A + A_1(x - a) + \dots + A_{\alpha-1}(x - a)^{\alpha-1}] \varphi(x) + (x - a)^{\alpha} \theta(x),$$

gdzie $\theta(x)$ przedstawia pewną funkcję całkowitą, której wyrażenia niemaco wypisywać. Podstawmy w obu stronach ostatniej równości $a + h$ zamiast x i rozłóżmy funkcje $\Phi(a + h)$ i $\varphi(a + h)$ według potęg h ; otrzymamy

$$\begin{aligned} & \Phi(a) + \frac{h}{1} \Phi'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \Phi''(a) + \dots \\ = & \left[A + A_1 h + A_2 h^2 + \dots \right] \left[\varphi(a) + \frac{h}{1} \varphi'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''(a) + \dots \right] + h^{\alpha} \theta(a + h). \end{aligned}$$

Stąd, przyrównyując współczynniki jednakowych potęg h w obu stronach, wyprowadzimy następujący układ równości:

$$A \varphi(a) = \Phi(a),$$

$$A_1 \varphi(a) + A \varphi'(a) = \Phi'(a),$$

$$A_2 \varphi(a) + A_1 \varphi'(a) + \frac{1}{1 \cdot 2} A \varphi''(a) = \Phi''(a),$$

$$\dots$$

$$A_{\alpha-1} \varphi(a) + A_{\alpha-2} \varphi'(a) + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (\alpha-1)} A \varphi^{(\alpha-1)}(a) = \Phi^{(\alpha-1)}(a),$$

zapomocą których można kolejno obliczyć wszystkie współczynniki $A, A_1, \dots, A_{\alpha-1}$. — W podobny sposób należy utworzyć równania w celu wyznaczenia grupy współczynników $B, B_1, \dots, B_{\beta-1}$, i t. d.

PRZYKŁAD. Kładąc

$$\frac{27}{(x+1)^3(x-2)^2} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{B_1}{x-2},$$

znajdujemy następujące równania dla wyznaczenia współczynników A, A_1, A_2, B i B_1 :

$$9A = 27,$$

$$27B = 27,$$

$$9A_1 - 6A = 0,$$

$$27B + 27B_1 = 0;$$

$$9A_2 - 6A_1 + A = 0,$$

stąd

$$A = 3, A_1 = 2, A_2 = 1; B = 1, B_1 = -1.$$

51. Jeżeli wszystkie współczynniki w wyrażeniach dwu funkcji całkowitych $F(x)$ i $f(x)$ są rzeczywiste, a jeżeli, prócz tego, równanie $f(x) = 0$ ma jedną albo kilka par pierwiastków zespolonych, to do rozkładu funkcji $\frac{F(x)}{f(x)}$ na ułamki najprostsze, według twierdzenia art. 49-go, wejdą oczywiście liczby

urojone. Sumę tych ułamków najprostszych, które zawierają w mianownikach pierwiastki zespolone, można przedstawić inaczej, bez liczb urojonych; należy tylko, zamiast czynników liniowych zespolonych, wprowadzić czynniki rzeczywiste stopnia 2-go (art. 40).

Jakoż, weźmy pod uwagę jakikolwiek wyraz na stronie drugiej równości

$$\frac{F(x)}{f(x)} = E + \frac{\varphi_1(x)}{X_1} + \frac{\varphi_2(x)}{X_2^2} + \dots,$$

np. $\frac{\varphi_m(x)}{X_m^m}$, i przypuśćmy, że funkcja X_m rozkłada się na takie czynniki:

$$X_m = (x - a) \dots (x - b) (x^2 + px + q) \dots (x^2 + rx + s),$$

gdzie $(x - a), \dots, (x - b)$ są wszystkimi czynnikami rzeczywistymi liniowymi funkcji X_m , a $x^2 + px + q, \dots, x^2 + rx + s$ są iloczynami jej zespolonych sprzężonych czynników liniowych; wtedy będziemy mieli (art. 47)

$$\frac{\varphi_m(x)}{X_m^m} = \frac{\psi(x)}{(x - a)^m} + \dots + \frac{\psi_1(x)}{(x - b)^m} + \frac{\theta(x)}{(x^2 + px + q)^m} + \dots + \frac{\theta_1(x)}{x^2 + rx + s}.$$

Rozwińmy na stronie prawej wyrazy pierwszej grupy według wzoru Taylor'a:

$$\frac{\psi(x)}{(x - a)^m} = \frac{A}{(x - a)^m} + \frac{A_1}{(x - a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x - a},$$

.

gdzie A, A_1, \dots są liczbami stałymi. — Co się tyczy wyrazów drugiej grupy, które w mianownikach mają czynniki stopnia 2-go, to rozłożymy każdy z nich tak, jak było wskazane w 2-im twierdzeniu pomocniczym (art. 48). A zatem, będziemy mieli

$$\frac{\theta(x)}{(x^2 + px + q)^m} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + \dots,$$

.

gdzie M, N, M_1, \dots oznaczają liczby stałe. — Tak postępując, otrzymamy rozkład wyrazu $\frac{\varphi_m(x)}{X_m^m}$ na takie najprostsze ułamki, do których nie wejda liczby urojone.

Z powyższego wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Jeżeli każde dwie z funkcji

$$x - a, \dots, x - b, x^2 + px + q, \dots, x^2 + rx + s$$

są pierwsze względem siebie, to każda funkcja ułamkowa Φ , postaci

$$\Phi = \frac{F(x)}{(x - a)^\alpha \dots (x - b)^\beta (x^2 + px + q)^\lambda \dots (x^2 + rx + s)^\mu},$$

rozkłada się na sumę ułamków najprostszyc według wzoru:

$$\begin{aligned} \Phi = & E + \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots \\ & + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \dots \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{Px+Q}{(x^2+rx+s)^\mu} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}} + \dots, \end{aligned}$$

gdzie E przedstawia część całkowitą funkcji Φ , a A, A_1, \dots , M, N, \dots , P, Q, \dots są liczbami stałymi. Taki rozkład może być uskuteczniiony w jeden tylko sposób; — do niego nie wchodzi liczby urojone, jeżeli ich niema w pierwotnym wyrażeniu funkcji Φ .

PRZYKŁAD. Kładąc

$$\Phi = \frac{27}{(x^2+2)^2(x-1)^3},$$

znajdujemy najprzód

$$\Phi = \frac{9-5x+2x^2-2x^3}{(x^2+2)^2} + \frac{9-8x+2x^2}{(x-1)^3},$$

a następnie,

$$\begin{aligned} \frac{9-5x+2x^2-2x^3}{(x^2+2)^2} &= \frac{5-x}{(x^2+2)^2} + \frac{2-2x}{x^2+2}, \\ \frac{9-8x+2x^2}{(x-1)^3} &= \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}, \end{aligned}$$

tak iż ostatecznie

$$\Phi = \frac{5-x}{(x^2+2)^2} + \frac{2-2x}{x^2+2} + \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}.$$

... ..

$$\frac{A}{(a-x)} + \frac{A}{(a-x)} + \dots + \frac{A}{(a-x)} = \Phi$$

$$\frac{B}{(a-x)} + \frac{B}{(a-x)} + \dots + \frac{B}{(a-x)}$$

$$\frac{Z}{(a-x)} + \frac{Z}{(a-x)} + \dots + \frac{Z}{(a-x)}$$

ROZDZIAŁ IV.

O ILOŚCI PIERWIĄSTKÓW RZECZYWISTYCH RÓWNAŃ, ZAWARTYCH MIĘDZY KRAŃCAMI DANYMI. — WARUNKI KONIECZNE I DOSTATECZNE, ABY PIERWIĄTKI DWU RÓWNAŃ BYŁY RZECZYWISTE, NIERÓWNE I PRZEGRADZAJĄCE SIĘ. — TWIERDZENIE ROLLE'A. — WZÓR LAGRANGE'A. — TWIERDZENIE FOURIER'GO. — WARUNKI KONIECZNE I DOSTATECZNE, ABY PIERWIĄTKI RÓWNAŃ BYŁY RZECZYWISTE I RÓŻNE.

§ I. O ILOŚCI PIERWIĄSTKÓW RZECZYWISTYCH RÓWNAŃ, ZAWARTYCH MIĘDZY DANYMI KRAŃCAMI.

52. Odtąd będziemy wciąż przyjmowali — chyba, że wyraźnie zrobimy inne zastrzeżenie — iż wszystkie współczynniki równania danego są rzeczywiste (art. 6).

Niech będzie równanie $f(x) = 0$ stopnia n -tego, którego pierwiastki oznaczymy przez $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, i przyjmijmy, że pośród nich jest m pierwiastków rzeczywistych, mianowicie: a_1, a_2, \dots, a_m , pozostałe zaś są zespolone.

Funkcją $f(x)$ możemy napisać tak:

$$f(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) F(x),$$

gdzie A przedstawia współczynnik przy x^n w danym równaniu, $F(x)$ zaś przedstawia iloczyn wszystkich czynników liniowych zespolonych, wchodzących do rozkładu funkcji $f(x)$. Funkcja $F(x)$ otrzymuje wartości dodatnie przy wszelkich wartościach rzeczywistych zmiennej niezależnej x (art. 40).

Nazwijmy przez a dowolną liczbę rzeczywistą, nie równą żadnemu z pierwiastków a_1, a_2, \dots, a_m , a przez r ilość tych pierwiastków równania $f(x) = 0$, które są większe od a . Z równości

$$f(a) = A(a - a_1)(a - a_2) \dots (a - a_m) F(a)$$

widoczna, że znak wartości $f(a)$ jest takiż, jak znak liczby $A(-1)^r$. — Tak samo, jeżeli przez b nazwiemy jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, nie równą ani a , ani żadnemu z pierwiastków równania $f(x) = 0$, a przez r' ilość tych pierwiastków tegoż równania, większych od b , to znak wartości $f(b)$ jest takiż, jak

liczby $A(-1)^{r'}$. — A więc znak stosunku $\frac{f(a)}{f(b)}$ jest określony przez $(-1)^{r-r'}$.

Stąd zaś, gdy zważymy, że bezwzględna wartość różnicy $r - r'$ przedstawia ilość pierwiastków rzeczywistych równania $f(x) = 0$, zawartych w przedziale między a i b , dochodzimy do następującego twierdzenia.

T W I E R D Z E N I E. *Przy jakichkolwiek dwu liczbach rzeczywistych a i b , wraźcie, kiedy dwie wartości $f(a)$ i $f(b)$ funkcji całkowitej $f(x)$, są tegoż samego znaku, równanie $f(x) = 0$ posiada parzystą ilość pierwiastków, zawartych między a i b , t. j. albo ani jednego, albo dwa i t. d.; wraźcie zaś, kiedy wartości $f(a)$ i $f(b)$ są różnego znaku, równanie $f(x) = 0$ posiada między a i b nieparzystą ilość pierwiastków, t. j. albo jeden, albo trzy i t. d.*

Albo odwrotnie:

Jeżeli równanie $f(x) = 0$ posiada parzystą ilość pierwiastków, zawartych między a i b , to wartości $f(a)$ i $f(b)$ są tegoż samego znaku; w przeciwnym zaś razie znaki tych wartości są różne.

Należy pamiętać, że w rachubie pierwiastków, zawartych pomiędzy a i b , powinna być uwzględniona wielokrotność każdego z nich: pierwiastek dwukrotny liczy się jako dwa pierwiastki; trzykrotny jako trzy i t. d.; to wypada wprost z dowodzenia twierdzenia.

Zauważymy jeszcze, że powyższe twierdzenie można wyprowadzić, jako wniosek, z twierdzenia art. 21-go.

§ II. O RÓWNIANIACH Z PIERWIĄSTKAMI RZECZYWISTYMI I PRZEGRADZAJĄCYMI SIĘ.

53. Jeżeli pierwiastki rzeczywiste każdej z dwu funkcji $F(x)$ i $f(x)$ są pojedyncze i tak rozłożone, że między każdymi dwoma po sobie następującymi pierwiastkami funkcji $F(x)$ znajduje się, lecz tylko jeden, pierwiastek funkcji $f(x)$, i nawzajem, między każdymi dwoma po sobie następującymi pierwiastkami funkcji $f(x)$ znajduje się, jeden tylko, pierwiastek funkcji $F(x)$, to natenczas będziemy mówili, że pierwiastki rzeczywiste dwu równań $F(x) = 0$ i $f(x) = 0$ przegradzają się.

W tym paragrafie wyprowadzimy wskazówki, przy pomocy których w każdym przypadku szczególnym będziemy mogli się dowiedzieć, czy dwa równania dane mają wszystkie pierwiastki rzeczywiste, od siebie różne, a nadto przegradzające się. — Takie dwa równania, oczywiście, albo będą jednakowego stopnia, albotóż stopień jednego będzie się różnił o jedność od stopnia drugiego z tych równań.

54. Twierdzenie pomocnicze 1. *Jeżeli dwa równania $F(x) = 0$ i $f(x) = 0$, z których drugie jest stopnia niewyższego, niż pierwsze, mają wszystkie pierwiastki rzeczywiste, różne i przegradzające się, i jeżeli spółczynniki najwyższych potęg zmiennej x w wyrażeniach funkcji $F(x)$ i $f(x)$ są dodatne, to po podzieleniu funkcji $F(x)$ przez $f(x)$ otrzymany w reszcie funkcją stopnia o jedność niższego, niż stopień funkcji $f(x)$, a wszystkie jej pierwiastki będą rzeczywiste, różne i przegradzające się nawzajem z pierwiastkami funkcji $f(x)$.*

Prócz tego, jeżeli stopień funkcji $f(x)$ jest niższy niż funkcji $F(x)$, to współczynnik najwyższej potęgi zmiennej x w wyrażeniu reszty jest ujemny.

Oznaczmy przez $-f_1(x)$ resztę z podzielenia $F(x)$ przez $f(x)$, przez Q zaś część całkowitą; będzie więc

$$(1) \quad F(x) = f(x)Q - f_1(x).$$

Nazwawszy pierwiastki funkcji $F(x)$ i $f(x)$ odpowiednio $a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots$, i przyjmąwszy, że one są ustawione w porządku rosnącym, mieć będziemy $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 \dots$, albo $b_1 < a_1 < b_2 < a_2 \dots$.

Kładąc w równości (1) $x = b_i$, a następnie $x = b_{i+1}$, otrzymamy

$$F(b_i) = -f_1(b_i), \quad F(b_{i+1}) = -f_1(b_{i+1}).$$

Stąd, zważywszy, że wartości $F(b_i)$ i $F(b_{i+1})$ są różnego znaku, spostrzegamy, że wartości $f_1(b_i)$ i $f_1(b_{i+1})$ są także różnego znaku; równanie przeto $f_1(x) = 0$ ma przynajmniej jeden pierwiastek, zawarty w przedziale b_i, b_{i+1} . Gdy zaś ilość przedziałów $b_1, b_2; b_2, b_3; \dots$ jest o jedność mniejsza od stopnia m funkcji $f(x)$, zatem równanie $f_1(x) = 0$ ma conajmniej $m - 1$ różnych pierwiastków rzeczywistych, wskutek czego stopień funkcji $f_1(x)$ nie może być niższy od $m - 1$. Lecz stopień funkcji $f_1(x)$ nie może być wyższy od $m - 1$; stopień bowiem reszty jest niższy od stopnia dzielnika. A więc funkcja $f_1(x)$ jest $(m - 1)$ -go stopnia.

Pozostaje jeszcze do udowodnienia druga część twierdzenia, odnosząca się do tego przypadku, kiedy funkcja $F(x)$ jest stopnia wyższego niż funkcja $f(x)$.

Z równości

$$f_1(b_m) = -F(b_m)$$

widoczna, że znaki wartości $f_1(b_m)$ i $F(b_m)$ są różne. Lecz $F(b_m) < 0$, bo w przedziale $b_m, +\infty$ równanie $F(x) = 0$ ma tylko jeden pierwiastek a_{m+1} ; a więc $f_1(b_m) > 0$. Gdy zaś równanie $f_1(x) = 0$ nie ma ani jednego pierwiastka w przedziale $b_m, +\infty$, przeto $f_1(+\infty) > 0$. To wskazuje, że współczynnik przy x^{m-1} w wyrażeniu $f_1(x)$ jest dodatny, czego należało dowieść.

W przypadku, kiedy funkcje $F(x)$ i $f(x)$ są tegoż samego stopnia, jest rzeczą obojętną, czy funkcję $F(x)$ dzielimy przez $f(x)$, czy też $f(x)$ przez $F(x)$; reszty otrzymywane z dzielenia, oczywiście, będą miały współczynniki jednakowych potęg zmiennej x proporcjonalne i różnego znaku, tak iż współczynnik najwyższej potęgi x w wyrażeniu reszty może być dodatny lub ujemny, stosownie do tego, którą z dwu funkcji $F(x)$ i $f(x)$ przyjmujemy za dzielną.

55. Twierdzenie pomocnicze 2. Niech dwa równania: $f(x) = 0$ i $f_1(x) = 0$ mają pierwiastki rzeczywiste, różne i przegradzające się, a stopień równania $f(x) = 0$ przewyższa o jedność stopień równania $f_1(x) = 0$, współczynniki zaś najwyższych potęg zmiennej x w wyrażeniach funkcji $f(x)$ i $f_1(x)$ niech będą dodatne. Gdy utworzymy nową funkcję $F(x)$ według wzoru

$$F(x) = f(x)Q - f_1(x),$$

w którym Q oznacza jakąkolwiek funkcję stopnia pierwszego o dodatnim współczynniku przy x , to wtedy równanie $F(x) = 0$ będzie miało wszystkie pierwiastki pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się nawzajem z pierwiastkami równania $f(x) = 0$.

Oznaczmy przez $n - 1$ stopień funkcji $f(x)$, a przez

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}, \\ c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-2},$$

pierwiastki równań odpowiednio $f(x) = 0$ i $f_1(x) = 0$, przyjmując przytym, że

$$b_1 < c_1 < b_2 < c_2 \dots < b_{n-2} < c_{n-2} < b_{n-1}.$$

Z równości

$$(1) \quad F(x) = f(x)Q - f_1(x)$$

otrzymujemy

$$F(b_1) = -f_1(b_1).$$

To wskazuje, że wartości $F(b_1)$ i $f_1(b_1)$ są różnego znaku. Lecz znak wartości $f_1(b_1)$ wyznacza $(-1)^{n-2}$, a przeto znak wartości $F(b_1)$ wyznacza $(-1)^{n-1}$. Zważmy jeszcze, że znak $F(-\infty)$ jest takiż, jak znak $(-1)^n$; współczynnik bowiem przy x^n w wyrażeniu funkcji $F(x)$ jest dodatni. A więc wartości $F(b_1)$ i $F(-\infty)$ są różnego znaku. Stąd wynika, że równanie $F(x) = 0$ posiada przynajmniej jeden pierwiastek mniejszy od b_1 .

W podobny sposób przekonamy się, że równanie $F(x) = 0$ posiada przynajmniej jeden pierwiastek większy od b_{n-1} .

Należy jeszcze dowieść, że równanie $F(x) = 0$ ma po jednym pierwiastku w każdym z przedziałów $b_1, b_2; b_2, b_3; \dots; b_{n-2}, b_{n-1}$.

Z równania (1) otrzymujemy

$$F(b_i) = -f_1(b_i), \quad F(b_{i+1}) = -f_1(b_{i+1}).$$

Zważmy, że funkcja $f_1(x)$ w przedziale b_i, b_{i+1} posiada jeden tylko pierwiastek c_i ; wartości przeto $f_1(b_i)$ i $f_1(b_{i+1})$ są różnego znaku, a zatem i $F(b_i)$ i $F(b_{i+1})$ są także różnego znaku. To wskazuje, że funkcja $F(x)$ posiada przynajmniej jeden pierwiastek w przedziale b_i, b_{i+1} .

Z powyższego wynika, że równanie $F(x) = 0$, mając przynajmniej po jednym pierwiastku w każdym z $n + 1$ przedziałów, utworzonych przez szereg liczb

$$-\infty, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}, +\infty,$$

i będąc stopnia równego ilości tych przedziałów, ma w każdym z nich po jednym pierwiastku.

UWAGA. Taksamo możemy się przekonać, że funkcja $F_1(x)$, utworzona według wzoru

$$F_1(x) = f(x) + Qf_1(x),$$

będzie miała wszystkie pierwiastki pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się z pierwiastkami funkcji $f_1(x)$.

56. Twierdzenie pomocnicze 3. *Jeżeli dwa równania; $f(x) = 0$ i $f_1(x) = 0$ posiadają pierwiastki pojedyncze, rzeczywiste i wzajemnie przegradzające się, i jeżeli utworzymy funkcję $F(x)$ według wzoru*

$$F(x) = Af(x) + Bf_1(x),$$

gdzie A i B są jakimikolwiek liczbami rzeczywistymi, to wszystkie pierwiastki równania $F(x) = 0$ będą pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się tak z pierwiastkami równania $f(x) = 0$, jak i z pierwiastkami równania $f_1(x) = 0$.

Przyjmujemy, że stopień n funkcji $f(x)$ nie jest niższy od stopnia funkcji $f_1(x)$, i oznaczamy przez b_i i b_{i+1} dwa po sobie następujące pierwiastki funkcji $f(x)$. Z równań

$$F(b_i) = Bf_1(b_i), \quad F(b_{i+1}) = Bf_1(b_{i+1})$$

widoczna, że wartości $F(b_i)$ i $F(b_{i+1})$ są różnego znaku. Stąd wynika, że w każdym z $n - 1$ przedziałów: $b_1, b_2; b_2, b_3; \dots; b_{n-1}, b_n$ równanie $F(x) = 0$ posiada po jednym pierwiastku pojedynczym. Innymi słowy, wszystkie pierwiastki równania $F(x) = 0$ są pojedyncze, rzeczywiste i wzajemnie się przegradzają z pierwiastkami równania $f(x) = 0$.

Toż samo stosuje się do pierwiastków równań $F(x) = 0$ i $f_1(x) = 0$, jeżeli ostatnie z tych równań jest n -go stopnia.

Jeżeli funkcja $F(x)$ jest wyższego stopnia niż funkcja $f_1(x)$, to należy jeszcze okazać, że między każdymi dwoma po sobie następującymi pierwiastkami funkcji $F(x)$, np. między c_i i c_{i+1} , znajduje się jeden pierwiastek funkcji $f_1(x)$; gdyż tylko wówczas będziemy przekonani, że pierwiastki funkcji $F(x)$ i $f_1(x)$ istotnie się przegradzają.— Gdy wartości $f(c_i)$ i $f(c_{i+1})$ są różnego znaku, przeto z równań

$$\begin{aligned} 0 &= Af(c_i) + Bf_1(c_i), \\ 0 &= Af(c_{i+1}) + Bf_1(c_{i+1}) \end{aligned}$$

widoczna, że wartości $f_1(c_i)$ i $f_1(c_{i+1})$ są także różnego znaku. A zatem, w każdym z przedziałów $c_1, c_2; c_2, c_3; \dots$ funkcja $f_1(x)$ ma po jednym pierwiastku pojedynczym, c. n. d.

57. TWIERDZENIE 1. *Mając dwie funkcje całkowite: $F(x)$ i $f(x)$, stopni odpowiednio n -go i $(n - 1)$ -go, ze współczynnikami dodatnimi w pierwszych wyrazach, podzielmy funkcję $F(x)$ przez $f(x)$ i oznaczmy część całkowitą ilorazu przez Q , a resztę przez $-f_1(x)$; podzielmy następnie funkcję $f(x)$ przez $f_1(x)$, część całkowitą oznaczmy przez Q_1 , a resztę przez $-f_2(x)$, i t. d., dopóki w reszcie nie otrzymamy liczby stałej. Ażeby pierwiastki dwu równań: $F(x) = 0$ i $f(x) = 0$ były pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się, potrzeba i wystarcza: popierać, żeby stopnie funkcji $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, \dots stopniowo się o jedną zmniejszały, i powtórę, żeby współczynniki najwyższych potęg zmiennej x w wyrażeniu każdej z funkcji $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, \dots , $f_{n-2}(x)$, f_{n-1} były dodatne.*

Wypiszmy wszystkie tożsamości, wynikające z wykonania wzmiankowanych dzieleń:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x)Q - f_1(x), \\ f(x) &= f_1(x)Q_1 - f_2(x), \\ &\dots \dots \dots \\ f_{n-3}(x) &= f_{n-2}(x)Q_{n-2} - f_{n-1}, \end{aligned}$$

i zastosujemy kolejno do każdego z nich pierwsze twierdzenie pomocnicze. Tą drogą bezpośrednio przekonywamy się, że stopnie funkcyj $f_1(x), f_2(x), \dots$ są odpowiednio: $n-2, n-3, \dots$, oraz, że współczynniki najwyższych potęg zmiennej x są dodatne.

Dla udowodnienia, iż owe warunki są wystarczające, zauważmy naprzód, że współczynniki zmiennej x w wyrażeniach funkcyj liniowych Q, Q_1, Q_2, \dots są oczywiście dodatne; następnie, wypisawszy poprzednie równości w porządku odwrotnym:

$$\begin{aligned} f_{n-3}(x) &= f_{n-2}(x)Q_{n-2} - f_{n-1}, \\ f_{n-4}(x) &= f_{n-3}(x)Q_{n-3} - f_{n-2}(x), \\ &\dots \dots \dots \\ F(x) &= f(x)Q - f_1(x), \end{aligned}$$

zastosujemy do nich kolejno twierdzenie pomocnicze drugie. Spostrzeżemy, że każde dwie po sobie następujące funkcje:

$$f_{n-3}(x), f_{n-4}(x), \dots, f(x), F(x)$$

mają wszystkie pierwiastki pojedyncze, rzeczywiste i nawzajem się przegradzające.

UWAGA. Jeżeli dwie funkcje: $f(x)$ i $F(x)$ są jednakowego stopnia, to, podzieliwszy jedną z nich przez drugą i oznaczywszy resztę przez $f_1(x)$, na mocy pierwszego i trzeciego twierdzenia pomocniczego wnosimy, że dwa równania:

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0$$

tylko wtedy będą posiadały wszystkie pierwiastki pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się, kiedy wszystkie pierwiastki równań

$$f(x) = 0, \quad f_1(x) = 0$$

są pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się. — A więc, przypadek, kiedy funkcje $f(x)$ i $F(x)$ są jednakowego stopnia, sprowadza się w ten sposób do przypadku, kiedy te stopnie różnią się o jedność.

58. TWIERDZENIE 2. *Mając ułamek ciągły*

$$ax + b - \frac{c}{a_1x + b_1 - \frac{c_1}{a_2x + b_2 - \dots}},$$

skończony lub nieskończony, w którym x oznacza zmienną niezależną, a, b, c, \dots są liczbami stałymi rzeczywistymi, każda zaś z liczb $a, a_1, a_2, \dots, c, c_1, c_2, \dots$

jest większa od zera, — oznaczmy przez $P_n(x)$, $Q_n(x)$, albo, krócej, przez P_n , Q_n licznik i mianownik n -go ułamka zbliżonego. Pierwiastki każdej pary równań: $P_n=0$ i $P_{n-1}=0$, $Q_n=0$ i $Q_{n-1}=0$, $P_n=0$ i $Q_n=0$ są pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się.

Istotnie,

$$\begin{aligned} P_1 &= ax + b, & Q_1 &= 1, \\ P_2 &= (a_1x + b_1)(ax + b) - c, & Q_2 &= a_1x + b_1, \\ P_3 &= (a_2x + b_2)P_2 - c_1P_1, & Q_3 &= (a_2x + b_2)Q_2 - c_1Q_1 \end{aligned}$$

i wogóle

$$\begin{aligned} P_n &= (a_{n-1}x + b_{n-1})P_{n-1} - c_{n-2}P_{n-2}, \\ Q_n &= (a_{n-1}x + b_{n-1})Q_{n-1} - c_{n-2}Q_{n-2}. \end{aligned}$$

Stąd, na mocy twierdzenia pierwszego, wnosimy, że pierwiastki dwu równań: $P_n=0$ i $P_{n-1}=0$, również jak i pierwiastki dwu równań: $Q_n=0$ i $Q_{n-1}=0$ są pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się.

Ażeby dowieść tegoż samego dla pierwiastków równań $P_n=0$ i $Q_n=0$, weźmy pod uwagę równość

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = C,$$

gdzie C jest liczbą stałą, różną od zera, której wyrażenia niemaco wypisywać. Oznaczmy przez x_i , x_{i+1} dwa po sobie następujące pierwiastki równania $Q_n=0$. Według ostatniej równości,

$$P_n(x_i) Q_{n-1}(x_i) = P_n(x_{i+1}) Q_{n-1}(x_{i+1}) = C.$$

A gdy wartości $Q_{n-1}(x_i)$ i $Q_{n-1}(x_{i+1})$ są różnego znaku, w przedziale bowiem między x_i i x_{i+1} funkcja $Q_{n-1}(x)$ posiada jeden tylko pierwiastek pojedynczy, przeto wartości $P_n(x_i)$ i $P_n(x_{i+1})$ są także różnego znaku, a zatem między każdymi dwoma po sobie następującymi pierwiastkami równania $Q_n=0$ znajduje się przynajmniej jeden pierwiastek równania $P_n=0$. — Taksamo możemy się przekonać, że w przedziale między każdymi dwoma po sobie następującymi pierwiastkami równania $P_n=0$ znajduje się przynajmniej jeden pierwiastek równania $Q_n=0$. — Widzimy więc, że pierwiastki równań $P_n=0$ i $Q_n=0$ wzajemnie się przegradzają.

59. PRZYKŁAD 1. Równość

$$\sqrt{x^2 - 1} = x - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

proceedzi do następującego rozwinięcia funkcji $\sqrt{x^2 - 1}$ na ułamek ciągły:

$$\sqrt{x^2 - 1} = x - \frac{1}{2x - \frac{1}{2x - \frac{1}{2x - \dots}}}$$

Oznaczywszy przez V_n i U_n licznik i mianownik n -go ułamka zbliżonego, mamy

$$\begin{aligned} V_1 &= x, & U_1 &= 1, \\ V_2 &= 2x^2 - 1, & U_2 &= 2x, \\ V_3 &= 4x^3 - 3x, & U_3 &= 4x^2 - 1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_n &= 2xV_{n-1} - V_{n-2}, & U_n &= 2xU_{n-1} - U_{n-2}. \end{aligned}$$

Każde z równań

$$V_n = 0 \text{ i } U_n = 0$$

ma wszystkie pierwiastki pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się z pierwiastkami odpowiedniego z równań

$$V_{n-1} = 0 \text{ i } U_{n-1} = 0.$$

Prócz tego pierwiastki równania $V_n = 0$ przegradzają się z pierwiastkami równania $U_n = 0$.

Łatwo okazać, iż wszystkie pierwiastki równania $V_n = 0$ są zawarte w przedziale między -1 i $+1$. Wtym celu zauważymy naprzód, że

$$V_n(+1) = 1, \quad V_n(-1) = (-1)^n;$$

co można sprawdzić bezpośrednio, zapomocą powyżej wypisanych równości. Następnie, przypuściwszy, że wszystkie pierwiastki równania $V_{n-1} = 0$ są zawarte między -1 i $+1$, postaramy się udowodnić, że wówczas pierwiastki równania $V_n = 0$ są również zawarte między -1 i $+1$. Jakoż, gdy między każdymi dwoma po sobie następującymi pierwiastkami równania $V_{n-1} = 0$ przypada jeden pierwiastek równania $V_n = 0$, przeto tylko dwa pierwiastki skrajne tego ostatniego równania, t. j. największy dodatni i najmniejszy ujemny, mogą się znajdować zewnątrz przedziału $-1, +1$. Jeżeliby największy pierwiastek dodatni równania $V_n = 0$ był większy od jedności, to równanie owo miałoby w przedziale między $+1$ i $+\infty$ jeden pierwiastek pojedynczy, i liczba $V_n(+1)$ byłaby ujemna, co się sprzeciwia temu, że $V_n(+1) = 1$. Taksamo możemy się przekonać, że najmniejszy pierwiastek ujemny równania $V_n = 0$ nie może być mniejszy od -1 . — Gdy zaś, istotnie, pierwiastek równania $V_1 = 0$, $x = 0$, jest zawarty w przedziale $-1, +1$, przeto, na mocy powyższego, wnosimy, że pierwiastki każdego z równań $V_2 = 0$, $V_3 = 0$, . . . są zawarte w tymże przedziale.

Funkcje V_n i U_n są znane w teorii funkcyj kołowych, w której się dowodzi (zob. «*Wstęp do analizy*»), że

$$V_n = \cos(n \arccos x), \quad U_n = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

co, zresztą, łatwo sprawdzić zapomocą związków, istniejących między trzema po sobie następującymi funkcjami albo V_n albo U_n .

Ostatnie wyrażenia funkcji V_n i U_n pozwalają nam ponownie przekonać się o prawdziwości tego, cośmy powiedzieli o pierwiastkach równań $V_n = 0$ i $U_n = 0$.

Ostateczne wyrażenia funkcji V_n i U_n są następujące:

$$2V_n = (2x)^n - \frac{n}{1} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2x)^{n-6} + \\ + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (2x)^{n-8} - \dots;$$

$$U_n = (2x)^{n-1} - \frac{n-2}{1} (2x)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} (2x)^{n-5} - \\ - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2x)^{n-7} + \dots$$

60. PRZYKŁAD 2. n -ta pochodna funkcji

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 2^n} (x^2 - 1)^n$$

nazywa się funkcją Legendre'a. Nazywając ją X_n , będziemy mieli

$$X_n = \frac{2n(2n-1) \dots (n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} x^n - \dots \\ + (-1)^k \frac{(2n-2k)(2n-2k-1) \dots (n+1-2k)}{2 \cdot 4 \dots (2k) \cdot 2 \cdot 4 \dots (2n-2k)} x^{n-2k} + \dots,$$

czyli

$$X_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \right. \\ \left. - \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n-1)(2n-3)(2n-5)} x^{n-6} + \dots \right];$$

dla $n = 0$ przyjmuje się

$$X_0 = 1.$$

Przy pomocy ostatniego wyrażenia funkcji X_n , łatwo możemy się przekonać, iż ma miejsce tożsamość:

$$(1) \quad nX_n - (2n-1)xX_{n-1} + (n-1)X_{n-2} = 0,$$

dla wszelkiej wartości wskaźnika n , poczynając od $n = 2$. Ta tożsamość wskazuje, że z podzielenia funkcji X_n przez X_{n-1} otrzymujemy w ilorazie $\frac{(2n-1)x}{n}$, i resztę $-\frac{n-1}{n} X_{n-2}$, tak iż stopień reszty jest o jedność niższy

od stopnia dzielnika, a współczynnik najwyższej potęgi x w wyrażeniu reszty jest ujemny. Na zasadzie tego wprost wnosimy, iż równanie $X_n = 0$ ma wszystkie pierwiastki pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się z pierwiastkami równania $X_{n-1} = 0$.

Możemy dowieść, że wszystkie pierwiastki równania $X_n = 0$ są zawarte między -1 i $+1$. — Aby tego dowieść, zauważymy naprzód, że

$$X_n(+1) = 1, \quad X_n(-1) = (-1)^n,$$

gdyż równość (1) wskazuje, że każde z tych równań, mając miejsce dla dwu funkcji X_{n-2} i X_{n-1} , ma miejsce i dla funkcji X_n ; o tym zaś, że one oba mają miejsce dla $n = 1$ i 2 , można się przekonać bezpośrednio. — Przypuśćmy, że wszystkie pierwiastki równania $X_{n-1} = 0$ są zawarte między -1 i $+1$, a dowiedzimy, że wszystkie pierwiastki równania $X_n = 0$ są zawarte także między -1 i $+1$. Jakoż, wobec tego, że pierwiastki równania $X_n = 0$ przegradzają się z pierwiastkami równania $X_{n-1} = 0$, tylko dwa pierwiastki skrajne równania $X_n = 0$ mogłyby być bezwzględnie większe od jedności. Przypuśćmy, że największy pierwiastek równania $X_n = 0$ jest większy od jedności; wówczas w przedziale $+1, +\infty$ równanie to miałoby tylko jeden pierwiastek pojedynczy; gdy zaś $X_n(+\infty) > 0$, zatem mielibyśmy $X_n(+1) < 0$, co być nie może, bowiem $X_n(+1) = +1$. Jeżeli przypuścimy, że równanie $X_n = 0$ ma jeden pierwiastek ujemny, bezwzględnie większy od jedności, to wówczas wartość $X_n(-1)$ powinna być innego znaku, niż wartość $X_n(-\infty)$, a więc innego, niż $(-1)^n$, co być nie może, gdyż $X_n(-1) = (-1)^n$. Funkcje Legendre'a mają bardzo ważne zastosowania w wielu zagadnieniach matematyki stosowanej. Gauss wskazał na inne ich zastosowanie przy przybliżonym obliczaniu pól (zob. «*Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*»).

61. PRZYKŁAD 3. Hermite wskazał na funkcję

$$U_n = x^n - \frac{n(n-1)}{1} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-6} + \dots,$$

która z wielu własności jest podobną do funkcji Legendre'a (otrzymuje się ona z funkcji przestępną e^{-x^2} przez zwykłe różniczkowanie).

Między trzema po sobie następującymi funkcjami U_{n-2} , U_{n-1} , U_n istnieje związek liniowy

$$U_n - xU_{n-1} + 2(n-1)U_{n-2} = 0,$$

przy wszelkich wartościach wskaźnika n , poczynając od $n = 2$, jeżeli przyjmujemy $U_0 = 1$. Stąd widzimy, że z podzielenia U_n przez U_{n-1} otrzymujemy w ilorazie x i resztę $-2(n-1)U_{n-2}$. A ponieważ współczynnik przy x^n w wyrażeniu U_n jest zawsze dodatny, zatem równanie $U_n = 0$ ma wszystkie pierwiastki pojedyncze, rzeczywiste i nadto przegradzające się z pierwiastkami równania $U_{n-1} = 0$.

Wartość bezwzględną wyrazu z x^{n-2k} w wyrażeniu funkcji U_n nazwawszy u_k , mamy

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{kx^2}.$$

Ponieważ liczba k jest zawarta między krańcami

$$1 \leq k \leq \frac{n}{2},$$

przeto

$$2 \leq (n - 2k + 1)(n - 2k + 2) \leq n(n - 1),$$

a zatem

$$\frac{4}{n} \leq \frac{(n - 2k + 1)(n - 2k + 2)}{k} \leq n(n - 1);$$

wskutek tego

$$\frac{4}{nx^2} \leq \frac{u_k}{u_{k-1}} \leq \frac{n(n-1)}{x^2},$$

gdzie pierwszy znak równości ma miejsce dla $k = \frac{n}{2}$, a drugi dla $k = 1$.

Dla wartości zmiennej x , czyniących zadość warunkowi $\frac{n(n-1)}{x^2} \leq 1$, czyli

$$x \geq \sqrt{n(n-1)},$$

będziemy mieli

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} \leq 1,$$

gdzie znak równości odnosi się tylko do $k = \frac{n}{2}$. To wskazuje, że wartość funkcji

$$U_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots,$$

jeżeli ją przedstawimy tak:

$$U_n = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \dots,$$

jako złożona z samych tylko składników dodatnich, jest dodatnia, $U_n > 0$, a liczbę $\sqrt{n(n-1)}$ można przyjąć jako wyższy kraniec dla pierwiastków dodatnich równania $U_n = 0$.

Dla wartości dodatnich zmiennej x , czyniących zadość warunkowi

$$x \leq \frac{2}{\sqrt{n}},$$

otrzymujemy

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} \geq 1,$$

gdzie znak równości odnosi się tylko do $k = 1$. Jeżeli przedstawimy funkcję U_n w postaci

$$U_n = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \dots,$$

albo też w postaci

$$U_n = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \dots,$$

stosownie do tego, czy liczba wszystkich wyrazów u_0, u_1, u_2, \dots jest niepa-

rzysta czytéż parzysta, to spostrzeżemy, że w pierwszym przypadku funkcja U_n jest złożona z samych tylko składników dodatnych: $u_0, -(u_1 - u_2), \dots$, a w drugim razie z samych tylko składników ujemnych: $u_0 - u_1, u_2 - u_3, \dots$; w obu więc razach wartości funkcji U_n nie mogą być równe zeru, a liczbę $\frac{2}{\sqrt{n}}$ można przyjąć jako niższy kraniec dla pierwiastków dodatnych równania $U_n = 0$.

Co się tyczy pierwiastków ujemnych równania $U_n = 0$, to niémaco nad nimi się zatrzymywać: co do wartości bezwzględnej są one równe pierwiastkom dodatnym.

Rozpatrywane tu funkcje są szczególnymi przypadkami pewnej grupy funkcij całkowitych, doniosłego znaczenia przy rozwiązywaniu pewnych zagadnień, i dlatego dobrze znanych w analizie. Są to tak zwane «funkcje podobne do funkcji Legendre'a».

62. Zakończymy ten paragraf wzmianką o pewnym układzie równań z pierwiastkami przegradzającymi się, zauważonymi prawie jednocześnie przez Hermite'a i Biehler'a.

Niech będą dwa równania: jedno $F(x) = 0$ stopnia n -go, drugie $f(x) = 0$ stopnia $(n-1)$ -go, których wszystkie pierwiastki są pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się nawzajem. Przyjawszy, że współczynnik przy x^n w wyrażeniu funkcji $F(x)$ jest dodatni, i oznaczywszy przez a i b dwie jakiegokolwiek liczby rzeczywiste, z których druga jest tegoż samego znaku, co współczynnik przy x^{n-1} w wyrażeniu funkcji $f(x)$, tworzymy iloczyn

$$[F(x) + if(x)](x + a + bi) = F_1(x) + if_1(x).$$

Otrzymujemy tu dwie nowe funkcje, $F_1(x)$ i $f_1(x)$, stopnia odpowiednio $(n+1)$ -go i n -go, które są określone zapomocą wzorów:

$$(1) \quad F_1(x) = F(x)(x + a) - bf(x),$$

$$(2) \quad f_1(x) = bF(x) + f(x)(x + a).$$

Z nich wynika

$$(3) \quad F(x)f_1(x) - F_1(x)f(x) = b(f(x)^2 + F(x)^2).$$

Z równości (1) widzimy, że wszystkie pierwiastki równania $F_1(x) = 0$ są pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się z pierwiastkami równania $F(x) = 0$ (art. 55). Równość zaś (2) wskazuje, że wszystkie pierwiastki równania $f_1(x) = 0$ są pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się z pierwiastkami równania $f(x) = 0$. Nakoniec, według równości (3), pierwiastki równania $F_1(x) = 0$ przegradzają się z pierwiastkami równania $f_1(x) = 0$.

Uważmy iloczyn

$$(x + a_1 + b_1i)(x + a_2 + b_2i) \dots (x + a_n + b_ni),$$

złożony z n dowolnych czynników liniowych, i przypuśćmy, że wszystkie liczby $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ są tegoż samego znaku. Wówczas, kładąc

$$(x + a_1 + b_1i)(x + a_2 + b_2i) \dots (x + a_n + b_ni) = F_n(x) + if_n(x),$$

dochodzimy do dwu równań $F_n(x) = 0$ i $f_n(x) = 0$, mających wszystkie pierwiastki pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się. Wynika to bezpośrednio z uwagi poprzedzającej, gdyż pierwiastki dwu równań:

$$\begin{aligned} F_2(x) &= (x + a_1)(x + a_2) - b_1 b_2 = 0, \\ f_2(x) &= (b_1 + b_2)x + a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0 \end{aligned}$$

są oczywiście rzeczywiste i przegradzające się; takąż więc własność posiadają również pierwiastki dwu równań: $F_3(x) = 0$ i $f_3(x) = 0$, i t. d.

Podobnie łatwo można dowieść twierdzenia odwrotnego:

Jeżeli pierwiastki równań $F(x) = 0$ i $f(x) = 0$, z których drugie jest stopnia o jedność niższego, niż pierwsze, są pojedyncze, rzeczywiste i przegradzające się, to wszystkie pierwiastki równania

$$F(x) + if(x) = 0$$

będą zespolone, a współczynniki w składnikach urojonych będą jednakowego znaku.

§ III. TWIERDZENIE ROLLE'A.

63. Twierdzenie pomocnicze. *Przy przejściu zmiennej x przez pierwiastek rzeczywisty równania $f(x) = 0$, od wartości mniejszych do większych, funkcja ułamkowa $\frac{f(x)}{f'(x)}$, zmieniając odpowiednio swoją wartość, przechodzi od ujemnych przez zero do dodatnich wartości.*

Oznaczając przez a jakikolwiek pierwiastek rzeczywisty równania $f(x) = 0$, przez m jego wielokrotność, a przez h dowolną liczbę rzeczywistą, wypiszmy następujące dwa rozwinięcia według wzoru Taylor'a:

$$(1) \quad f(a+h) = \frac{h^m}{1 \cdot 2 \dots m} f^{(m)}(a) + \frac{h^{m+1}}{1 \cdot 2 \dots (m+1)} f^{(m+1)}(a) + \dots,$$

$$(2) \quad f'(a+h) = \frac{h^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} f^{(m)}(a) + \frac{h^m}{1 \cdot 2 \dots m} f^{(m+1)}(a) + \dots,$$

w których wartość $f^{(m)}(a)$ jest różna od zera, gdyż, w razie przeciwnym, pierwiastek a byłby już większej, niż m -ta wielokrotności. Dzieląc zaś obie strony równości (1) i (2) przez siebie i skracając, otrzymujemy

$$(3) \quad \frac{f(a+h)}{f'(a+h)} = \frac{h f^{(m)}(a) + \frac{h}{m+1} f^{(m+1)}(a) + \dots}{f^{(m)}(a) + \frac{h}{m} f^{(m+1)}(a) + \dots}.$$

Stąd widoczna, że, przy dostatecznie małych wartościach bezwzględnych liczby h , znak ułamka $\frac{f(a+h)}{f'(a+h)}$ jest takiż sam, jak znak liczby h , tak iż, jeżeli znak

tęj liczby h uwidocznimy, otrzymamy dwie nierówności:

$$\frac{f(a-h)}{f'(a-h)} < 0, \quad \frac{f(a+h)}{f'(a+h)} > 0,$$

w których h oznacza już tylko dostatecznie małą liczbę dodatnią. Jeżeli zaś w równości (3) uczynimy $h = 0$, to otrzymamy

$$\frac{f(a)}{f'(a)} = 0.$$

64. Przechodząc do udowodnienia twierdzenia Rolle'a, które się opiera na poprzedzającym twierdzeniu pomocniczym, zauważymy, że ono może być także wyprowadzone, jako wniosek z prawa ciągłości, i dlatego stosuje się ono do wszystkich funkcji ciągłych.

TWIERDZENIE. *Jeżeli a i b są dwoma po sobie następującymi pierwiastkami rzeczywistymi równania $f(x) = 0$, to równanie pochodne $f'(x) = 0$ posiada nieparzystą ilość pierwiastków, zawartych pomiędzy a i b .*

Załóżmy, że $a < b$, i oznaczmy przez h nieskończenie małą liczbę dodatnią. Na mocy udowodnionego twierdzenia pomocniczego, mamy

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+h)} > 0, \quad \frac{f(b-h)}{f'(b-h)} < 0.$$

Wartości $f(a+h)$ i $f(b-h)$ są jednakowego znaku, bo, według założenia, równanie $f(x) = 0$ nie posiada ani jednego pierwiastka między $a+h$ i $b-h$; ażeby więc powyższe nierówności miały miejsce, należy przyjąć, że wartości $f'(a+h)$ i $f'(b-h)$ są różnego znaku. Stąd zaś wynika, że równanie $f'(x) = 0$ między $a+h$ i $b-h$, albo, co wychodzi na jedno, między a i b , posiada nieparzystą ilość pierwiastków.

Jeżeli niewiadomo, czy a i b są bezpośrednio po sobie następującymi pierwiastkami równania $f(x) = 0$, t. j. jeżeli niewiadomo, czy w przedziale między a i b znajdują się jeszcze inne pierwiastki równania $f(x) = 0$, czytóż ich już tam niema, to, w każdym razie, na mocy twierdzenia Rolle'a, wnosimy, że równanie pochodne $f'(x) = 0$ między a i b posiada conajmniej jeden pierwiastek wielokrotności nieparzystej.

§ IV. WZÓR LAGRANGE'A.

65. Niech $f(x)$ i $F(x)$ oznaczają dwie jakiegokolwiek funkcje całkowite, zaś a i b dwie dowolnie wzięte liczby rzeczywiste. Przyjmijmy, że równanie pochodne $F'(x) = 0$ nie posiada ani jednego pierwiastka, któryby był zawartym między a i b , i oznaczmy przez A wartość ułamka

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)}.$$

Nie może być $A = \infty$, gdyż wówczas mielibyśmy $F(b) = F(a)$ i równanie $F(x) - F(a) = 0$ miałoby dwa pierwiastki: $x = a$ i $x = b$, wskutek czego

równanie pochodne $F'(x) = 0$ miałyby między a i b przynajmniej jeden pierwiastek, co się sprzeciwia założeniu. Równanie

$$f(x) - f(a) - A[F(x) - F(a)] = 0$$

ma dwa pierwiastki: $x = a$ i $x = b$, a więc równanie pochodne, które można napisać tak:

$$f'(x) - AF'(x) = 0,$$

ma przynajmniej jeden pierwiastek, zawarty między a i b . Oznaczywszy go przez c , będziemy mieli tożsamość

$$f'(c) - AF'(c) = 0,$$

z której wynika

$$A = \frac{f'(c)}{F'(c)},$$

albo, po podstawieniu zamiast A jego wyrażenia,

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(c)}{F'(c)}.$$

Jeżeli jeszcze wprowadzimy oznaczenia:

$$b - a = h, \quad c - a = h_1,$$

to h_1 będzie przedstawiać liczbę, zawartą między 0 i h , a równość poprzedzającą możemy napisać tak:

$$(1) \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{F(a+h) - F(a)} = \frac{F'(a+h_1)}{f'(a+h_1)}.$$

Stąd wynikają godne uwagi wnioski.

Przypuśćmy, że a jest spólnym pierwiastkiem obu równań: $f(x) = 0$ i $F(x) = 0$, wielokrotności nie mniejszej, niż m -ta, t. j. przypuśćmy, że mają miejsce równania:

$$\begin{aligned} f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \\ F(a) = F'(a) = F''(a) = \dots = F^{(m-1)}(a) = 0, \end{aligned}$$

i, prócz tego, przypuśćmy, że ani jedno z równań

$$F'(x) = 0, \quad F''(x) = 0, \dots, F^{(m)}(x) = 0$$

nie ma pierwiastka, zawartego między a i $a+h$. W takim razie, stosując wzór (1) kilka razy zrzędu, otrzymamy następujący szereg równań:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(a+h_1)}{F'(a+h_1)} = \frac{f''(a+h_2)}{F''(a+h_2)} = \dots = \frac{f^{(m)}(a+h_m)}{F^{(m)}(a+h_m)},$$

w których h, h_1, h_2, \dots, h_m są liczbami jednakowego znaku, o zmniejszających się wartościach bezwzględnych. — Oznaczając przez θ pewną liczbę dodatnią mniejszą od jednośc, możemy przyjąć

$$h_m = \theta h,$$

i wtedy będziemy mieli

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f^{(m)}(a+\theta h)}{F^{(m)}(a+\theta h)}.$$

Kładąc

$$F(x) = (x-a)^m,$$

mamy

$$\begin{aligned} F'(x) &= m(x-a)^{m-1}, \\ F''(x) &= m(m-1)(x-a)^{m-2}, \\ &\dots \dots \dots \\ F^{(m)}(x) &= m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1. \end{aligned}$$

Funkcja $F(x)$ czyni zadość wszystkim wymaganym warunkom, a więc

$$\frac{f(a+h)}{h^m} = \frac{f^{(m)}(a+\theta h)}{1.2.3\dots m},$$

czyli

$$(2) \quad f(a+h) = \frac{h^m}{1.2.3\dots m} f^{(m)}(a+\theta h).$$

Ten wzór ma miejsce dla wszelkiej funkcji całkowitej $f(x)$, jeżeli tylko liczba a czyni zadość warunkom:

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0.$$

66. Weźmy pod uwagę wzór Taylor'a:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{m-1}}{1.2.3\dots(m-1)} f^{(m-1)}(a) + \frac{(x-a)^m}{1.2.3\dots m} f^{(m)}(a) + \dots$$

i przyjmijmy, że

$$\varphi(x) = \frac{(x-a)^m}{1.2.3\dots m} f^{(m)}(a) + \frac{(x-a)^{m+1}}{1.2.3\dots(m+1)} f^{(m+1)}(a) + \dots$$

Do rozkładu funkcji $\varphi(x)$ na czynniki liniowe czynnik $x-a$ wejdzie z wykładnikiem conajmniej m ; a zatem mamy

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \dots = \varphi^{(m-1)}(a) = 0,$$

a to nam pozwala zastosować wzór (2) art. poprzedniego do funkcji $\varphi(x)$ i napisać

$$(1) \quad \varphi(a+h) = \frac{h^m}{1.2\dots m} \varphi^{(m)}(a+\theta h).$$

Z równości zaś

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1} f'(a) - \dots - \frac{(x-a)^{m-1}}{1.2\dots(m-1)} f^{(m-1)}(a)$$

znajdujemy

$$\varphi(a+h) = f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1} f'(a) - \dots - \frac{h^{m-1}}{1.2\dots(m-1)} f^{(m-1)}(a).$$

Nadto, pochodne m -go rzędu funkcji $\varphi(x)$ i $f(x)$ są tożsamościowo równe sobie, gdyż w wyrażeniach funkcji $f(x)$ i $\varphi(x)$ wyrazy, zawierające zmienną x z wykładnikami większymi od $m - 1$, są jednakowe; dlategoż

$$\varphi^{(m)}(a + \theta h) = f^{(m)}(a + \theta h).$$

Wprowadzając do równania (1) zamiast $\varphi(a + h)$ i $\varphi^{(m)}(a + \theta h)$ powyższe wyrażenia i przenosząc niektóre wyrazy ze strony lewej na prawą, otrzymujemy

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \dots + \frac{h^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} f^{(m-1)}(a) + \frac{h^m}{1 \cdot 2 \dots m} f^{(m)}(a + \theta h),$$

gdzie θ oznacza pewną liczbę dodatnią, mniejszą od jedności.

Jest to wzór Taylor'a z wyrazem dopełniającym Lagrange'a. Dla $m = 1, 2, \dots$ z tego wzoru wynikają równania:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{h}{1} f'(a + \theta h), \\ f(a+h) &= f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a + \theta h), \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

a w każdym z nich θ oznacza pewną liczbę dodatnią, mniejszą od jedności.

Zauważymy tu, że cechy wzrastania i zmniejszania się funkcji całkowitej $f(x)$, wyłożone w art. 22-im, można wprost otrzymać z pierwszego z równań (2).

§ V. TWIERDZENIE FOURIER'GO.

67. Przechodzimy do innych zastosowań twierdzenia Rolle'a.

Jeżeli funkcja pochodna $f'(x)$ dla wartości zmiennej x od $x = a$ do $x = b$ nie zmienia znaku, to funkcja pierwotna $f(x)$ w przedziale a, b , włączając w to i te krańce, albo zupełnie nie ma pierwiastków, albo ma tylko jeden, który, zresztą, może być wielokrotnym (nieparzystej wielokrotności).

To podanie, wynikające wprost z tego, co było powiedziane w art. 22-im i 23-im, można także wyprowadzić z twierdzenia Rolle'a.

Istotnie, jeźeliby równanie $f(x) = 0$ miało dwa, albo więcej różnych pierwiastków, zawartych we wzmiankowanym przedziale, i jeźeliby dwa z tych pierwiastków, bezpośrednio po sobie następujące, były a' i b' , to, na mocy twierdzenia Rolle'a, wnieslibyśmy, iż równanie $f'(x) = 0$ ma między a' i b' nieparzystą ilość pierwiastków, wskutek czego funkcja $f'(x)$ zmieniałaby swój znak w przedziale a, b , co się sprzeciwia założeniu.

Ażeby oznaczyć, który z wyżej wymienionych przypadków ma miejsce w rzeczywistości, potrzeba określić znaki wartości $f(a)$ i $f(b)$. I jeżeli jedna z tych wartości będzie równa zeru, to jeden z krańców, a albo b , będzie jedynym pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, zawartym w przedziale a, b ; jeżeli $f(a)$ i $f(b)$ są jednakowego znaku, to równanie $f(x) = 0$ nie posiada pierwiastka

między a i b ; jeżeli, nakoniec, $f(a)$ i $f(b)$ są różnego znaku, to równanie $f(x)=0$ ma między a i b jeden pierwiastek wielokrotności nieparzystej.

68. Weźmy pod uwagę trzy równania:

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0,$$

i przyjmijmy, że w przedziale między a i b druga pochodna $f''(x)$ nie zmienia swego znaku, a równanie $f'(x) = 0$ w tymże przedziale posiada jeden pierwiastek c , różny tak od a , jak i od b . Ten pierwiastek może być wielokrotny, lecz wtedy wielokrotność jego jest nieparzysta.

Zachodzi pytanie: co wtedy, opierając się na twierdzeniu Rolle'a, możemy powiedzieć o pierwiastkach równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b ?

Równanie $f(x) = 0$ w przedziale a, b , włączając w to i te krańce, nie może mieć więcej niż dwa różne pierwiastki. W przeciwnym bowiem razie równanie $f'(x) = 0$ w tymże przedziale miałyby przynajmniej dwa różne pierwiastki, co się sprzeciwia założeniu.

Jeżeli równanie $f(x) = 0$ w przedziale a, b , włączając w to i te krańce, nie ma ani jednego pierwiastka, to $f(a)$ i $f(b)$ są jednakowego znaku.

Jeżeli równanie $f(x) = 0$ w przedziale a, b , włączając w to i te krańce, ma tylko jeden pierwiastek, równy liczbie c , to jego wielokrotność jest parzysta, a $f(a)$ i $f(b)$ są jednakowego znaku.

Jeżeli równanie $f(x) = 0$ w przedziale a, b , włączając w to i te krańce, ma jeden tylko pierwiastek, różny od liczby c , natenczas ten pierwiastek jest pojedynczy, i, wrazie gdy on jest różny od każdego z krańców a i b , wartości $f(a)$ i $f(b)$ są różnego znaku.

Nakoniec, jeżeli równanie $f(x) = 0$ w przedziale a, b , włączając tu i te krańce, ma dwa pierwiastki od siebie różne, to żaden z nich nie równa się liczbie c , lecz jeden jest zawarty w przedziale a, c i może się równać liczbie a , drugi zaś jest zawarty w przedziale c, b i może się równać liczbie b . Obadwa są pierwiastkami pojedynczymi, a wartości $f(a)$ i $f(b)$, jeżeli tylko różnią się od zera, są jednakowego znaku.

Z wszystkiego, co wyżej powiedziano, wypada, że jeżeli dwie wartości: $f(a)$ i $f(b)$ są różnego znaku, to równanie $f(x) = 0$ między a i b posiada jeden tylko pierwiastek pojedynczy; jeżeli zaś wartości $f(a)$ i $f(b)$ są tegoż samego znaku, to równanie $f(x) = 0$ między a i b albo zupełnie nie posiada pierwiastka, albo ma dwa pierwiastki pojedyncze, albo, nakoniec, ma jeden tylko pierwiastek parzystej wielokrotności. Przypadek, kiedy $f(a)$ albo $f(b)$ są równe zeru, możemy usunąć spod uwagi: można go bowiem uniknąć, zmieniając nieco jeden albo oba krańce a i b .

69. Szczególnie ważnym jest tylko ten przypadek, kiedy z funkcji $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ ostatnia nie zmienia znaku w przedziale a, b , i kiedy wartości $f'(a)$ i $f'(b)$ są różnego, a $f(a)$ i $f(b)$ tegoż samego znaku.

Przyjmujemy, że funkcja $f''(x)$ od $x=a$ do $x=b$ jest wciąż dodatna: w razie przeciwnym, zamiast funkcji $f(x)$, wzięlibyśmy funkcją $-f(x)$.

Kładąc w równaniu

$$f'(x+h) = f'(x) + hf''(x+\theta h)$$

naprzód $x = a$, $h = c - a$, a następnie $x = b$, $h = c - b$, gdzie c przedstawia pierwiastek równania $f'(x) = 0$, zawarty między a i b , otrzymamy

$$(1) \begin{cases} 0 = f'(a) + (c-a)f''(a+\theta(c-a)), \\ 0 = f'(b) + (c-b)f''(b+\theta_1(c-b)). \end{cases}$$

Przyuszczając zaś, że $b > a$, i biorąc pod uwagę nierówności

$$f''(a+\theta(c-a)) > 0, \quad f''(b+\theta_1(c-b)) > 0, \quad (a < c < b),$$

z równań (1) wnosimy, że

$$f'(a) < 0, \quad f'(b) > 0.$$

Co się tyczy wartości $f(a)$ i $f(b)$, które, według założenia, są jednakowego znaku, to mogą zajść dwa odrębne przypadki: albo obie liczby $f(a)$ i $f(b)$ są ujemne, albo obie są dodatne.

Jeżeli wartości $f(a)$ i $f(b)$ są ujemne, to równanie $f(x) = 0$ nie ma zupełnie pierwiastka w przedziale a, b . To wynika z tego, że strona prawa równania

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h),$$

dla wartości h od 0 do $c-a$, składa się z dwu wyrazów ujemnych, jak również z tego, że strona prawa równania

$$f(b-h) = f(b) - hf'(b-\theta h),$$

dla wartości h od 0 do $b-c$, jest sumą dwu wyrazów ujemnych; tak iż ani w przedziale a, c , ani w przedziale c, b , funkcja $f(x)$ nie staje się równą zeru.

Jeżeli wartości $f(a)$ i $f(b)$ są dodatne, to równanie $f(x) = 0$ w przedziale a, b albo zupełnie nie ma pierwiastka, albo ma dwa pierwiastki pojedyncze, albo ma jeden pierwiastek parzystej wielokrotności. Oznaczenie, który z tych trzech przypadków ma w rzeczywistości miejsce, jest zadaniem, które często spotkać można przy oddzielaniu pierwiastków równania. To oznaczenie bywa zwykle dość kłopotliwe.

Udowodnimy pewne twierdzenie Fourier'go, które dozwala, w bardzo wielu przypadkach, dokonać owego oznaczenia.

70. TWIERDZENIE. *Jeżeli druga pochodna $f''(x)$ nie zmienia znaku dla wartości zmiennej od $x=a$ do $x=b$ i jeżeli, prócz tego, równanie dane $f(x)=0$ między a i b posiada dwa pierwiastki różne, lub jeden pierwiastek parzystej wielokrotności, to wtedy ma miejsce następująca nierówność:*

$$\text{wart. bezwzg. } \frac{f(a)}{f'(a)} + \text{wart. bezwzg. } \frac{f(b)}{f'(b)} < \text{wart. bezwzg. } (b-a).$$

W omówionym przypadku równanie $f(x) = 0$ ma między a i b albo dwa pierwiastki pojedyncze, α i β , albo jeden pierwiastek wielokrotności parzystej, $\alpha = \beta$.

Niech α oznacza ten pierwiastek, który jest bliższy a , a, tym samym, β niech oznacza ten pierwiastek, który jest bliższy b , jeżeli tylko $\alpha \neq \beta$.

Kładąc w równaniu

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x + \theta h)$$

$x = a$, $h = \alpha - a$, otrzymamy

$$0 = f(a) + (\alpha - a) f'(a) + \frac{(\alpha - a)^2}{2} f''(a + \theta(\alpha - a)),$$

skąd

$$\alpha - a = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{(\alpha - a)^2}{2} \frac{f''(a + \theta(\alpha - a))}{f'(a)}.$$

Ponieważ wartości $f(a)$ i $f''(a + \theta(\alpha - a))$ są tegoż samego znaku, przeto także oba wyrazy na stronie prawej są jednakowego znaku; wskutek tego, mamy

$$(1) \text{ wart. bezw. } (\alpha - a) = \text{wart. bezw. } \frac{f(a)}{f'(a)} + \text{wart. bezw. } \frac{(\alpha - a)^2}{2} \frac{f''(a + \theta(\alpha - a))}{f'(a)}.$$

Nietrudno się przekonać, że liczba $f''(a + \theta(\alpha - a))$, zachodząca w wyrażeniu po prawej, jest różna od zera. Istotnie, w razie przeciwnym, będnie mieli

$$f(a) + (\alpha - a) f'(a) = 0,$$

a wtedy równanie

$$f(x) - f(a) - (x - a) f'(a) = 0$$

miałoby dwa pierwiastki: jeden $x = a$, a drugi $x = \alpha$. A zatem równanie pochodne,

$$f'(x) - f'(a) = 0,$$

między a i b miałoby przynajmniej jeden pierwiastek, prócz widocznego $x = a$. Drugie zaś równanie pochodne, $f''(x) = 0$, powinnyby mieć pomiędzy a i b jeden pierwiastek pojedynczy, albo, wogóle, wielokrotności nieparzystej, co się sprzeciwia założeniu o stałości znaku funkcji $f''(x)$ od $x = a$ do $x = b$. A więc wartość $f''(a + \theta(\alpha - a))$ jest różna od zera.

Wskutek tego, z równania (1) wynika, że

$$\text{wart. bezw. } (\alpha - a) > \text{wart. bezw. } \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

W podobny sposób można dowieść, że

$$\text{wart. bezw. } (b - \beta) > \text{wart. bezw. } \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Dodając zaś do siebie dwie ostatnie nierówności i zważając, że

$$\text{wart. bezw. } (\alpha - a) + \text{wart. bezw. } (b - \beta) \leq \text{wart. bezw. } (b - a),$$

otrzymujemy:

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(a)}{f'(a)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(b)}{f'(b)} < \text{wart. bezw. } (b - a),$$

czego należało dowieść.

Wniosek. Jeżeli, przy istnieniu wszystkich warunków twierdzenia poprzedzającego, okaże się, że

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(a)}{f'(a)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(b)}{f'(b)} \geq \text{wart. bezw. } (b - a),$$

to wtedy równanie $f(x) = 0$ między a i b nie ma pierwiastka.

71. PRZYKŁAD 1. Weźmy funkcją

$$f(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2;$$

tu

$$\frac{1}{2}f'(x) = 10x^3 + 6x^2 + 3x - 2, \quad \frac{1}{6}f''(x) = 10x^2 + 4x + 1.$$

Równanie $f''(x) = 0$ nie posiada pierwiastków rzeczywistych; równanie $f'(x) = 0$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, zawarty między 0 i $\frac{1}{2}$, gdyż $f'(0) < 0$, $f'(\frac{1}{2}) > 0$. A gdy $f(0) > 0$ i $f(\frac{1}{2}) > 0$, przeto równanie $f(x) = 0$ albo zupełnie nie ma pierwiastków rzeczywistych, albo ma ich dwa; one mogą być różne lub równe sobie, a oba są zawarte między 0 i $\frac{1}{2}$. Lecz mamy tu $f(0) = 2$, $f'(0) = -4$,

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{1}{2};$$

a więc

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{f'(0)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(\frac{1}{2})}{f'(\frac{1}{2})} > \frac{1}{2}.$$

Widocznie więc równanie $f(x) = 0$ nie ma pierwiastka w przedziale $0, \frac{1}{2}$; wskutek tego, ono zupełnie nie ma pierwiastków rzeczywistych.

72. PRZYKŁAD 2. Dane jest równanie

$$f(x) = x^6 - 5x^4 + 15x^2 - 10x + 4 = 0.$$

Tu

$$\frac{1}{2}f'(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x - 5, \quad \frac{1}{30}f''(x) = x^4 - 2x^2 + 1.$$

Druga pochodna $f''(x)$ otrzymuje wartości dodatne przy wszelkich wartościach zmiennej x . Dlatego, funkcja $f'(x)$ może mieć jeden tylko pierwiastek rzeczywisty (pojedynczy lub nieparzystej wielokrotności); pierwiastek ten oczywiście istnieje, jest pojedynczy i zawarty między 0 i $\frac{1}{2}$. Zważmy jeszcze, że $f(0) = 4$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{157}{64}$; przeto równanie $f(x) = 0$ albo nie ma pierwiastków między 0 i $\frac{1}{2}$, albo ma ich dwa. Żeby tę wątpliwość rozstrzygnąć, obliczamy:

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{2}{5}, \quad \text{wart. bezw. } \frac{f(\frac{1}{2})}{f'(\frac{1}{2})} = \frac{157}{172};$$

stąd znajdujemy

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{f'(0)} + \text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} > \frac{1}{2}.$$

A zatem, równanie $f(x) = 0$ nie posiada pierwiastków w przedziale $0, \frac{1}{2}$. Łatwo się przekonać, że ono wcale nie ma pierwiastków rzeczywistych.

73. PRZYKŁAD 3. Dla równania

$$f(x) = x^4 - 14x^3 + 24x^2 - 288x - 101$$

mamy

$$\frac{1}{2}f'(x) = 2x^3 - 21x^2 + 24x - 144, \quad \frac{1}{12}f''(x) = x^2 - 7x + 4.$$

Równanie $f''(x) = 0$ ma dwa pierwiastki:

$$c_1 = \frac{7 - \sqrt{33}}{2}, \quad c_2 = \frac{7 + \sqrt{33}}{2}.$$

Przyjmując to na uwagę, rozpatrzmy trzy przedziały: $-\infty, c_1; c_1, c_2; c_2, +\infty$.

W przedziale $-\infty, c_1$ funkcja $f''(x)$ zachowuje wciąż znak dodatny. A gdy $f'(-\infty) < 0$ i $f'(c_1) < 0$, to funkcja $f'(x)$ w tym przedziale utrzymuje ciągle znak ujemny, wskutek czego funkcja $f(x)$ może mieć co najwyżej jeden pierwiastek, nie większy od c_1 . — Ale $f(-\infty) > 0$, zaś $f(c_1) < 0$; a zatem równanie $f(x) = 0$ istotnie ma pierwiastek pojedynczy mniejszy od c_1 . — Pierwiastek ten jest zawarty między 0 i -1 , gdyż $f(0) < 0$, a $f(-1) > 0$.

Zauważmy, że, dla określenia znaków wartości $f(c_1), f(c_2), f'(c_1), f'(c_2)$, należy uprzednio podzielić funkcje $f(x)$ i $f'(x)$ przez $f''(x)$; otrzymamy tą drogą równości:

$$f(x) = Qf''(x) - 463x + 15, \quad \frac{1}{2}f'(x) = Q_1f''(x) - 33x - 116,$$

w których Q i Q_1 oznaczają części całkowite. Stąd, oznaczywszy przez c_i jedną z liczb c_1, c_2 , znajdujemy

$$f(c_i) = -463c_i + 15, \quad \frac{1}{2}f'(c_i) = -33c_i - 116.$$

Zapomocą tych dwu równań łatwo możemy się przekonać, że dla obu wartości wskaźnika i jest

$$f(c_i) < 0, \quad f'(c_i) < 0.$$

Teraz rozważmy drugi przedział c_1, c_2 . W nim funkcja $f''(x)$ jest wciąż ujemna. A gdy $f'(c_1) < 0$ i $f'(c_2) < 0$, przeto także funkcja $f'(x)$ jest stale ujemna. Nakoniec, nierówności $f(c_1) < 0$ i $f(c_2) < 0$ wskazują, że funkcja $f(x)$ wcale nie ma pierwiastków w przedziale c_1, c_2 .

W ostatnim przedziale $c_2, +\infty$ funkcja $f''(x)$ jest wciąż dodatna. Z nierówności zaś $f'(c_2) < 0$ i $f'(+\infty) > 0$ wynika, że funkcja $f'(x)$ ma tylko jeden pierwiastek, większy od c_2 . Nakoniec, z nierówności $f(c_2) < 0$, $f(+\infty) > 0$ wnosimy, że równanie $f(x) = 0$ ma tylko jeden pierwiastek

większy od c_2 . Ten pierwiastek jest pojedynczy i zawarty między 13 i 14, gdyż $f(13) < 0$, $f(14) > 0$.

A zatem, równanie dane ma tylko dwa pierwiastki rzeczywiste; oba są pojedyncze, jeden z nich ujemny, zawarty między 0 i -1 , a drugi dodatny, zawarty między 13 i 14.

74. PRZYKŁAD 4. Weźmy równanie

$$f(x) = x^5 + 10x^2 - 71x - 81 = 0;$$

tu

$$f'(x) = 5x^4 + 20x - 71, \quad f''(x) = 20(x^3 + 1).$$

Biorąc pod uwagę, że funkcja $f''(x)$ od $x = -\infty$ do $x = -1$ jest wciąż ujemna i że

$$\begin{aligned} f'(-\infty) &> 0, & f'(-1) &< 0, \\ f(-\infty) &< 0, & f(-1) &< 0, \end{aligned}$$

wnosimy, że równanie $f(x) = 0$ albo nie ma pierwiastków mniejszych od -1 , albo ma ich dwa, które zresztą mogą być równe. — Obliczając wartość $f(-2)$, znajdujemy $f(-2) > 0$; to wskazuje, że równanie $f(x) = 0$ w przedziale $-\infty, -1$ posiada dwa pierwiastki pojedyncze. Jeden z nich zawiera się między -2 i -3 , a drugi między -1 i -2 .

W przedziale $-1, +\infty$ funkcja $f''(x)$ jest wciąż dodatna. A ponieważ wartości $f'(-1)$ i $f'(+\infty)$ są różnego znaku, zatem funkcja $f'(x)$ posiada jeden tylko pierwiastek pojedynczy, większy od -1 . Nakoniec, ze względu na to, że $f(-1) < 0$, $f(+\infty) > 0$, wnosimy, że równanie $f(x) = 0$ ma tylko jeden pierwiastek większy od -1 . Pierwiastek ten zawiera się między 2 i 3.

A więc, równanie dane ma trzy pierwiastki rzeczywiste: dwa ujemne i jeden dodatny; wszystkie trzy są pojedyncze. Pozostałe dwa pierwiastki są zespolone.

§ VI. O RÓWNIANIACH, NIE MAJĄCYCH PIERWIASTKÓW ZESPOLONYCH.

75. TWIERDZENIE. *Jeżeli wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$ są rzeczywiste, to wszystkie pierwiastki równania pochodnego $f'(x) = 0$ są także rzeczywiste.*

Wynika to wprost z twierdzenia Rolle'a. Jakoż, przypuśćmy, że $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ oznaczają pierwiastki różne równania $f(x) = 0$, m_1, m_2, \dots, m_k odpowiednie ich wielokrotności, a n oznacza stopień równania $f(x) = 0$. Mamy więc

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n.$$

Równanie pochodne $f'(x) = 0$ ma $m_1 - 1$ pierwiastków równych a_1 , $m_2 - 1$ pierwiastków równych a_2 , \dots , $m_k - 1$ pierwiastków równych m_k , i, prócz tego, posiada przynajmniej po jednym pierwiastku w każdym z przedziałów:

$a_1, a_2; a_2, a_3; \dots; a_{k-1}, a_k$. A ponieważ ilość tak wyliczonych pierwiastków,

$$m_1 - 1 + m_2 - 1 + \dots + m_k - 1 + k - 1 = n - 1$$

równa jest stopniowi równania $f'(x) = 0$, przeto równanie $f'(x)$ ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste, a w każdym z przedziałów

$$a_1, a_2; a_2, a_3; \dots; a_{k-1}, a_k,$$

posiada tylko po jednym pierwiastku pojedynczym.

UWAGA. Z powyższego rozumowania okazuje się, że jeżeli m oznacza ilość pierwiastków jakiegokolwiek równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b , a m' ilość pierwiastków równania pochodnego $f'(x) = 0$, zawartych także między a i b , to zawsze

$$m' \geq m - 1.$$

76. Niech

$$f(x) = (x^2 - 1)^n = x^{2n} - \frac{n}{1} x^{2n-2} + \dots;$$

równanie $f(x) = 0$ ma dwa n -krotne pierwiastki: jeden $x = -1$, drugi $x = 1$. Równanie pochodne, $f'(x) = 0$, ma dwa $(n - 1)$ -krotne pierwiastki: $x = -1$ i $x = 1$, i, prócz tego, jeden pierwiastek pojedynczy, zawarty między -1 i $+1$. Drugie równanie pochodne, $f''(x) = 0$, ma dwa $(n - 2)$ -krotne pierwiastki, i, prócz tego, dwa pierwiastki pojedyncze, zawarte między -1 i $+1$. Przewodząc dalej w ten sposób rozumowanie, dojdziemy do równania n -go stopnia, $f^{(n)}(x) = 0$, i dowiedzimy, że wszystkie jego pierwiastki są pojedyncze, rzeczywiste i zawarte między -1 i $+1$.

Zauważmy, że funkcja $f^{(n)}(x)$ różni się tylko czynnikiem stałym od funkcji Legendre'a X_n (art. 60).

77. Jeżeli wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$ są rzeczywiste i pojedyncze, to wszystkie pierwiastki równania pochodnego, $f'(x) = 0$, są także pojedyncze, rzeczywiste i, prócz tego, przegradzające się z pierwiastkami równania $f(x) = 0$. Dlatego też warunki konieczne i dostateczne na to, ażeby pierwiastki równań $f(x) = 0$ i $f'(x) = 0$ były rzeczywiste i przegradzające się (art. 57), są jednocześnie warunkami koniecznymi i dostatecznymi na to, ażeby wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$ były rzeczywiste i pojedyncze.

Te warunki, jak nam już wiadomo, wyrażają się zapomocą nierówności, których ilość równa się stopniowi równania, zmniejszonemu o jedność. Należy jednak zauważyć, że niektóre z tych nierówności mogą wynikać, jako następstwa, z pozostałych, tak iż ilość warunków *niezależnych* może być w rzeczywistości mniejsza od $n - 1$. Naprzykład, dla równania trzeciego stopnia istnieje tylko jedna nierówność warunkowa. —

Jeżeli jedna z pochodnych funkcji $f(x)$ ma przynajmniej jedną parę pierwiastków zespolonych, to równanie $f(x) = 0$ ma także przynajmniej jedną parę pierwiastków zespolonych. Tak np. równanie

$$A x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n = 0$$

ROZDZIAŁ V.

TWIERDZENIE DESCARTES'A. — O PEWNEJ GRUPIE RÓWNAŃ Z PIERWIĄTKAMI ZESPOLONYMI. — ODDZIELENIE PIERWIĄTKÓW RÓWNAŃ, MAJĄCEGO WSZYSTKIE PIERWIĄTKI RZECZYWISTE. — TWIERDZENIA LAGUERRE'A.

§ I. O IŁOŚCI ZMIAN ZNAKU W RÓWNIANIU.

78. W wyrażeniu jakiegokolwiek funkcji całkowitej $f(x)$, uporządkowanym według rosnących lub malejących potęg zmiennej x , każde dwa wyrazy sąsiednie mają współczynniki albo jednakowego, albotóż różnego znaku; w pierwszym razie one przedstawiają powtórzenie znaku, w drugim zaś zmianę znaku.

Zestawiając pierwszy wyraz z drugim, drugi z trzecim i t. d., naliczymy pewną ilość zmian znaku i pewną ilość powtórzeń znaku. Np. w pierwszej z funkcyj

$$\begin{aligned} 7 - 3x + 5x^2 - 8x^3 + x^5 - \frac{1}{3}x^9, \\ x^4 + \frac{3}{4}x + 12, \\ -7 - 3x^2 - x^3 + 10x^4, \end{aligned}$$

jest 5 zmian, 0 powtórzeń; w drugiej 0 zmian, 2 powtórzenia; w trzeciej 1 zmiana, 2 powtórzenia.

Pod wyrażeniem: ilość zmian albo powtórzeń znaku w równaniu $f(x) = 0$ rozumiemy ilość zmian albo powtórzeń znaku w wyrażeniu funkcji $f(x)$.

Z powyższego wynika, że:

ilość zmian (albo powtórzeń) znaku w wyrażeniach dwu funkcji: $f(x)$ i $-f(x)$ jest zawsze taż sama;

suma liczb, wyrażających ilość zmian i ilość powtórzeń znaku w wyrażeniu funkcji $f(x)$, jest równa liczbie, wyrażającej ilość wyrazów tej funkcji, zmniejszonej o jedność;

jeżeli dwa wyrazy skrajne funkcji $f(x)$ są jednakowego znaku, to liczba zmian w jej wyrażeniu jest parzysta, i przeciwnie.

79. Twierdzenie pomocnicze 1. *Jeżeli a jest liczbą dodatnią, a $f(x)$ jakąkolwiek funkcją całkowitą, to ilość zmian znaku w iloczynie*

$(x - a)f(x)$ jest większa od ilości zmian w $f(x)$, a różnica tych dwu liczb jest nieparzysta.

Przyjmijmy, że funkcja $f(x)$ przedstawia v zmian znaku, i napiszmy ją tak:

$$f(x) = (Ax^n + \dots) - (A_1x^{n_1} + \dots) + (A_2x^{n_2} + \dots) - \dots + (-1)^v (A_vx^{n_v} + \dots),$$

umówiwszy się, że współczynniki we wszystkich wyrazach w każdym nawiasie są jednakowego znaku. Możemy przypuścić, że one są dodatne, w przeciwnym bowiem razie zamiast $f(x)$ mogliśmy wziąć $-f(x)$. Prócz tego, przyjmujemy, że wyrazy są uporządkowane według malejących potęg x , tak iż $n > n_1 > n_2 > \dots > n_v$. — W iloczynie $(x - a)f(x)$ jest $v + 2$ wyrazów, mających znaki określone i niezależne od liczby a ; owe wyrazy są na stronie prawej równości

$$(x - a)f(x) = Ax^{n+1} \pm \dots - Bx^{n_1+1} \pm \dots + Cx^{n_2+1} \pm \dots \\ + (-1)^v Kx^{n_v+1} \pm \dots + (-1)^{v+1} Lax^l,$$

w której A, B, C, \dots, K, L są liczbami dodatnimi, wyraźnie wypisane. Ostatni wyraz ostatniej grupy,

$$A^v x^{n_v} + \dots,$$

oznaczyliśmy tu przez Lx^l ; jeżeliby więc ta grupa składała się z jednego tylko wyrazu, to mielibyśmy $L = A^v, l = n_v$. — Nazywając odpowiednio $w_1, w_2, \dots, w_v, w_{v+1}$ ilość zmian znaku w wielomianach:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & Ax^{n+1} \pm \dots - Bx^{n_1+1}, \\ & - Bx^{n_1+1} \pm \dots + Cx^{n_2+1}, \\ & \dots \\ & (-1)^v Kx^{n_v+1} \pm \dots (-1)^{v+1} Lax^l, \end{aligned} \right.$$

a przez v' ilość zmian znaku w iloczynie $(x - a)f(x)$, spostrzegamy naprzód, że każda z liczb w_1, w_2, \dots jest nieparzysta, gdyż w każdym z wielomianów (1) dwa wyrazy skrajne są różnego znaku, i, powtórze, że liczba v' równa się sumie $w_1 + w_2 + \dots + w_{v+1}$. Kładąc

$$w_1 = 2h_1 + 1,$$

$$w_2 = 2h_2 + 1,$$

$$\dots$$

$$w_{v+1} = 2h_{v+1} + 1,$$

$$H = h_1 + h_2 + \dots + h_{v+1},$$

gdzie każda z liczb h_1, h_2, \dots, h_{v+1} , H oznacza liczbę dodatnią, całkowitą, albo zero, znajdujemy

$$w_1 + w_2 + \dots + w_{v+1} = 2H + v + 1,$$

czyli

$$v' = 2H + v + 1.$$

Stąd

$$v' - v = 2H + 1,$$

c. n. d.

80. Twierdzenie pomocnicze 2. Jeżeli a jest liczbą dodatnią, a $f(x)$ funkcją całkowitą, to liczba, wyrażająca ilość zmian znaku w iloczynie $(x+a)f(x)$, nie jest większa od liczby, wyrażającej ilość zmian znaku w $f(x)$, a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą.

Przypuściwszy, że to ma miejsce dla każdej funkcji $f(x)$, której stopień jest mniejszy od n , dowiedzimy, że ono ma miejsce i wtedy, kiedy stopień funkcji $f(x)$ równa się n . Tym sposobem twierdzenie owo będzie udowodnione, gdyż widoczna, że ono ma miejsce wtedy, kiedy funkcja $f(x)$ jest stopnia pierwszego.

Jeżeli Nx^n jest w wyrażeniu funkcji $f(x)$ wyrazem o największym wykładniku przy x , to różnica

$$f(x) - Nx^n = \varphi(x)$$

jest funkcją stopnia niższego od n ; niech Mx^m przedstawia jej wyraz o najwyższym wykładniku przy x . Weźmy teraz pod uwagę wyrażenia czterech następujących funkcji, przypuszczając, że wyrazy są uporządkowane według rosnących potęg zmiennej x :

$$(1) \begin{cases} \varphi(x) = Ax^a + \dots + Mx^m, \\ f(x) = Ax^a + \dots + Mx^m + Nx^n, \\ (x+a)\varphi(x) = A_1x^a + \dots + Mx^{m+1}, \\ (x+a)f(x) = A_1x^a + \dots + Mx^{m+1} + aNx^n + Nx^{n+1}. \end{cases}$$

Nazwijmy liczby, przedstawiające ilość zmian znaku w każdej z tych funkcji, odpowiednio v, w, v', w' , i zważając na to, że, według założenia, różnica $v - v'$ jest liczbą dodatnią, parzystą, lub zerem, oznaczmy $v - v' = 2h$.

Dla ułatwienia dowodzenia, lepiej oddzielnie rozważyć dwa przypuszczenia: kiedy $m+1 < n$ i kiedy $m+1 = n$.

Zacznijmy od pierwszego: $m+1 < n$. Wtedy mogą mieć miejsce dwa przypadki, które będziemy roztrząsać osobno:

a. Spółczynniki M i N są jednakowego znaku. Wtedy równania (1) wprost wskazują, że

$$w = v, \quad w' = v',$$

skąd

$$w - w' = v - v' = 2h, \quad \text{c. n. d.}$$

b. Spółczynniki M i N są różnego znaku. Wtedy z równań (1) otrzymujemy

$$w = v + 1, \quad w' = v' + 1;$$

a więc

$$w - w' = v - v' = 2h, \quad \text{c. n. d.}$$

Przeszedzsy do drugiego przypuszczenia: $m+1 = n$, zauważmy, że teraz, na stronie prawej ostatniego z równań (1), dwa wyrazy: Mx^{m+1} i aNx^n są podobne i stanowią jeden wyraz $(M+aN)x^{m+1}$, tak iż zamiast równań (1) mamy teraz grupę następującą:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= Ax^a + \dots + Mx^m, \\
 f(x) &= Ax^a + \dots + Mx^m + Nx^{m+1}, \\
 (2) \{ \quad (x+a)\varphi(x) &= A_1x^a + \dots + K_1x^k + Mx^{m+1}, \\
 (x+a)f(x) &= A_1x^a + \dots + K_1x^k + (M+aN)x^{m+1} + Nx^{m+2}.
 \end{aligned}$$

Ażeby dowieść, że nasze twierdzenie ma teraz miejsce, rozpatrzmy oddzielnie cztery następujące przypadki, jedyne, jakie tu mogą zachodzić:

a. Spółczynniki M i N są jednakowego znaku. Równania (2) wskazują, że

$$w = v, \quad w' = v';$$

a zatem

$$w - w' = v - v' = 2h, \quad \text{c. n. d.}$$

b. Spółczynniki M i N są różnego, a M i $M + aN$ jednakowego znaku. Wówczas

$$w = v + 1, \quad w' = v' + 1;$$

a zatem

$$w - w' = v - v' = 2h, \quad \text{c. n. d.}$$

c. Spółczynniki M i N są różnego, a N i $M + aN$ jednakowego znaku. Mamy wtedy

$$w = v + 1, \quad w' = v' \pm 1;$$

znak przy jedności na stronie prawej równania ostatniego zależy od tego, czy dwa ostatnie wyrazy w wyrażeniu $(x+a)\varphi(x)$ są jednakowego, czy też różnego znaku. Odejmując, otrzymujemy: wtedy, kiedy zachodzi znak górny,

$$w - w' = v - v' = 2h,$$

a jeżeli dolny,

$$w - w' = v - v' + 2 = 2(h + 1), \quad \text{c. n. d.}$$

d. Spółczynniki M i N są różnego znaku, zaś $M + aN = 0$. Natenczas

$$w = v + 1; \quad w' = v' \pm 1;$$

znak przy jedności w równaniu ostatnim zależy znowu od tego, czy dwa ostatnie wyrazy iloczynu $(x+a)\varphi(x)$ są jednakowego, czy też różnego znaku. Odejmując, dojdziemy do tegoż samego wyniku, co w przypadku poprzednim; a więc i teraz twierdzenie nasze ma miejsce.

81. Twierdzenie pomocnicze 3. *Jeżeli wyraz stały w wyrażeniu funkcji całkowitej $f(x)$ nie równa się zeru, to suma dwu liczb, wyrażających ilość zmian znaku w $f(x)$ i ilość zmian znaku w $f(-x)$, nie przewyższa stopnia funkcji $f(x)$, a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą.*

Niech będzie funkcja

$$f(x) = Ax^n + Bx^m + Cx^r + \dots + Kx^s + L,$$

w której ani jeden ze współczynników A, B, C, \dots, K, L nie równa się zeru i $n > m > r > \dots$. Każda z liczb

$$\alpha = n - m - 1, \quad \beta = m - r - 1, \quad \dots, \quad \lambda = s - 1$$

TWIERDZENIE. *Ilość wszystkich pierwiastków dodatnich równania $f(x) = 0$ nie jest większa od ilości zmian znaku w funkcji $f(x)$, a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą.*

Oczywiście, że pierwiastek równy zeru nie powinien być zaliczany do pierwiastków dodatnich, bo, wskutek pomnożenia równania przez x, x^2, x^3, \dots , nie powiększy się ilość zmian znaku.

Niech m oznacza ilość pierwiastków dodatnich danego równania, któreto pierwiastki nazwijmy a_1, a_2, \dots, a_m .

Funkcja całkowita

$$F(x) = \frac{f(x)}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)}$$

nie ma ani jednego pierwiastka dodatniego; z tego wnosimy, że współczynniki w dwu skrajnych jej wyrazach będą jednakowego znaku, gdyż przy dwu wartościach dodatnich zmiennej x , z których jedna jest dość mała, a druga dość wielka, odpowiednie wartości funkcji $F(x)$ powinny mieć znaki jednakowe. Stąd wynika, że ilość zmian znaku w wyrażeniu funkcji $F(x)$ jest parzysta albo równa zeru.

Oznaczając ilość zmian znaku w wyrażeniu każdej z funkcj

$F(x), (x - a_1)F(x), (x - a_1)(x - a_2)F(x), \dots, (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)F(x)$ odpowiednio przez v_m, v_{m-1}, \dots, v i przyjmując pod uwagę pierwsze twierdzenie pomocnicze paragrafu poprzedzającego, otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} v_m &= 2h, \\ v_{m-1} - v_m &= 2h_1 + 1, \\ v_{m-2} - v_{m-1} &= 2h_2 + 1, \\ &\dots \dots \dots \\ v - v_1 &= 2h_m + 1, \end{aligned}$$

w których h, h_1, h_2, \dots są liczbami całkowitymi, dodatnimi, albo zerami. Stąd, dodając, znajdujemy

$$(1) \quad v = m + 2H,$$

gdzie $H = h + h_1 + \dots + h_m$ jest liczbą całkowitą, dodatnią, albo zerem.

Zważmy, że v oznacza ilość zmian znaku w iloczynie

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)F(x),$$

albo, co toż samo, w funkcji $f(x)$; równanie (1) przeto wyraża twierdzenie Descartes'a.

83. Drugie z twierdzeń pomocniczych paragrafu poprzedzającego często daje możność otrzymania wyższego krańca dla liczby, wyrażającej ilość pierwiastków dodatnich równania $f(x) = 0$, mniejszego od tego, jakie daje twierdzenie Descartes'a.

Weźmy np. równanie

$$f(x) = x^8 - x^7 + 4x^6 - 8x^5 - x^4 + 7x^3 - 22x^2 - 152x - 450 = 0.$$

Według twierdzenia Descartes'a, ilość jego pierwiastków dodatnych jest nieparzysta i nie przewyższa 5-u. Mnożąc jednak obie strony przez $x + 1$, otrzymujemy

$$(x + 1)f(x) = x^9 + 3x^7 - 4x^6 - 9x^5 + 6x^4 - 15x^3 - 174x^2 - 602x - 450 = 0,$$

skąd wnosimy, że ilość pierwiastków dodatnych równania $f(x) = 0$ nie przechodzi 3-ch. Mnożąc zaś powyższe równanie jeszcze raz przez $x + 1$, otrzymujemy

$$(x + 1)^2 f(x) = x^{10} + x^9 + 3x^8 - x^7 - 13x^6 - 3x^5 - 9x^4 - 189x^3 - 776x^2 - 1052x - 450 = 0,$$

z którego widzimy, że ilość pierwiastków dodatnych równania $f(x) = 0$ nie jest większa od 1. A więc, równanie $f(x) = 0$ ma jeden tylko pierwiastek dodatny.

Weźmy jeszcze jeden przykład. Równanie

$$F(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 30x^2 + 6 = 0,$$

według twierdzenia Descartes'a, albo zupełnie nie ma pierwiastków dodatnych, albo ma ich dwa. Pomnożywszy jednak obie jego strony przez $x + 4$, otrzymujemy

$$x^6 + 6x^5 + x^4 + 2x^3 + 120x^2 + 6x + 24 = 0,$$

skąd widzimy, że równanie $f(x) = 0$ wcale nie ma pierwiastków dodatnych.

84. Ilość pierwiastków dodatnych równania $f(-x) = 0$ jest oczywiście równa ilości pierwiastków ujemnych równania $f(x) = 0$. Oznaczywszy tę ilość przez m' , a przez v' ilość zmian znaku w funkcji $f(-x)$, na mocy twierdzenia Descartes'a mamy

$$m' = v' - 2h',$$

gdzie h' jest liczbą całkowitą, dodatnią, albo zerem. Dodając do tego równania stronami odpowiednimi równanie

$$m = v - 2h,$$

które się odnosi do funkcji $f(x)$, otrzymujemy

$$m + m' = v + v' - 2(h + h'),$$

skąd widzimy, że ilość wszystkich pierwiastków rzeczywistych równania $f(x) = 0$, różnych od zera, nie przewyższa sumy $v + v'$ i jest parzysta albo nieparzysta, stosownie do tego, jaką jest suma $v + v'$.

Jeżeli ostatni wyraz w $f(x)$ nie równa się zeru, to suma $v + v'$ nie jest większa od stopnia równania $f(x) = 0$ i jest jednakowej z nim parzystości (art. 81).

Dla przykładu, weźmiemy równanie

$$f(x) = x^8 - x^7 + 4x^6 - 8x^5 - x^4 + 7x^3 - 22x^2 - 152x - 450 = 0.$$

Podstawiając w nim $-x$ zamiast x , otrzymamy

$$f(-x) = x^8 + x^7 + 4x^6 + 8x^5 - x^4 - 7x^3 - 22x^2 + 152x - 450 = 0;$$

skąd widzimy, że równanie $f(x) = 0$ posiada albo jeden tylko, albotóż trzy pierwiastki ujemne.

Weźmy drugi przykład.

$$F(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 30x^2 + 6 = 0.$$

Biorąc $-x$ zamiast x , otrzymamy

$$F(-x) = -x^5 + 2x^4 + 7x^3 + 30x^2 + 6 = 0,$$

skąd widzimy, że równanie $F(x) = 0$ posiada jeden tylko pierwiastek ujemny.

§ III. KRANIEC NIŻSZY DLA ILOŚCI PIERWIASTKÓW ZESPOLONYCH. ZASTOSOWANIA.

85. Oznaczywszy odpowiednio przez m , m' , $2J$ ilość pierwiastków dodatnich, ujemnych i zespolonych równania

$$f(x) = Ax^n + Bx^p + \dots + L = 0,$$

a przez v i v' ilość zmian znaku w $f(x)$ i w $f(-x)$, na mocy twierdzenia Descartes'a mamy

$$v + v' = m + m' + 2h,$$

gdzie h oznacza pewną liczbę dodatnią, lub zero. Zważywszy, że $m + m' = n - 2J$, z ostatniego równania otrzymujemy

$$(1) \quad 2J = n - (v + v') + 2h.$$

W art. 81-ym zaś znaleźliśmy, że

$$(2) \quad n - (v + v') = \alpha + \rho_\alpha + \beta + \rho_\beta + \dots$$

Z równań (1) i (2) wynika:

$$2J = \alpha + \rho_\alpha + \beta + \rho_\beta + \dots + 2h.$$

Stąd widzimy, że

$$(3) \quad 2J \geq \alpha + \rho_\alpha + \beta + \rho_\beta + \dots,$$

i dlatego liczba $\alpha + \rho_\alpha + \beta + \rho_\beta + \dots$ może być przyjęta jako kraniec niższy dla ilości pierwiastków zespolonych równania danego.

Ze związku (3) wynikają nierówności

$$2J \geq \alpha + \rho_\alpha, \quad 2J \geq \beta + \rho_\beta, \quad \dots,$$

albo jeszcze, zważywszy, że każda z liczb ρ_α , ρ_β może mieć jedną z trzech wartości 0, 1, -1 , mamy

$$2J \geq \alpha - 1, \quad 2J \geq \beta - 1, \quad \dots$$

86. Weźmy pod uwagę funkcję całkowitą $f(x)$ stopnia n -go, nie posiadającą pierwiastków zespolonych, i, oznaczywszy przez m jakąkolwiek liczbę całkowitą większą od 1, podzielmy funkcję x^{n+m} przez $f(x)$. Wyrażając część całkowitą przez $\varphi(x)$, a resztę przez $\psi(x)$, mieć będziemy

$$x^{n+m} = f(x)\varphi(x) + \psi(x),$$

czyli

$$x^{n+m} - \psi(x) = f(x) \varphi(x).$$

Na stronie lewej tej równości brak przynajmniej m wyrazów, gdyż stopień funkcji $\psi(x)$ jest mniejszy od n ; i dlatego równanie

$$x^{n+m} - \psi(x) = 0,$$

albo, co toż samo, równanie

$$f(x) \varphi(x) = 0$$

ma przynajmniej $m - 1$ pierwiastków zespolonych. Wszystkie te pierwiastki powinny zadość czynić równaniu $\varphi(x) = 0$ stopnia m -go, gdyż, według założenia, równanie $f(x) = 0$ nie posiada pierwiastków zespolonych. A zatem, równanie $\varphi(x) = 0$ będzie miało albo jeden tylko pierwiastek rzeczywisty, albotóż ani jednego, stosownie do tego, czy liczba m jest nieparzysta, czy też parzysta.

87. Przyjmując, jak w art. poprzedzającym, że $f(x)$ przedstawia funkcję całkowitą, nie posiadającą pierwiastków zespolonych, i oznaczając przez m dowolną liczbę całkowitą, dodatnią, rozwińmy stosunek $\frac{f(x)}{x^m}$ na ułamek ciągły.

Licznik i mianownik jednego z ułamków zbliżonych nazwijmy P i Q , a r niech oznacza stopień mianownika Q . Kładąc

$$\frac{f(x)}{x^m} - \frac{P}{Q} = \frac{\varphi(x)}{Q x^m},$$

między funkcją całkowitą $\varphi(x)$ stopnia nie wyższego od $m - r - 1$; na stronie przeto lewej równania

$$P x^m + \varphi = f(x) Q$$

między ostatnim wyrazem funkcji $P x^m$ i pierwszym wyrazem funkcji φ brak przynajmniej r wyrazów. A zatem, równanie

$$P x^m + \varphi = 0$$

posiada przynajmniej $r - 1$ pierwiastków zespolonych, które, oczywiście, powinny czynić zadość równaniu $Q = 0$. A ponieważ stopień funkcji $f(x)$ jest r , więc równanie $Q = 0$ będzie miało albo jeden tylko pierwiastek rzeczywisty, albotóż ani jednego, stosownie do tego, czy liczba r jest nieparzysta, czy też parzysta. Tę uwagę zawdzięczamy Laguerre'owi; z niej wynika, jako wniosek, to, cośmy powiedzieli w art. poprzedzającym.

PRZYKŁAD. Funkcja $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ ma wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste, bo $f(+1) < 0$. Rozwijając funkcję $\frac{f(x)}{x^4}$ na ułamek ciągły, otrzymujemy

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 1}{x^4} = \frac{1}{x + 2} + \frac{25}{5x - 11} - \frac{16}{20x + 19} + \frac{25}{4x - 3}.$$

Stąd zaś znajdujemy następujące wyrażenia mianowników ułamków zbliżonych:

$$\begin{aligned} Q_1 &= x + 2, & Q_3 &= 25(4x^3 + 3x^2 + x + 1), \\ Q_2 &= 5x^2 - x + 3, & Q_4 &= 16 \cdot 25x^4, \end{aligned}$$

i spostrzegamy, że każde z równań $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$ powinno mieć po dwa pierwiastki zespolone, o czym nietrudno bezpośrednio się przekonać.

§ IV. PRZYPADEK, KIEDY WSZYSTKIE PIERWIASTKI RÓWNAŃ SĄ RZECZYWISTE.

88. W paragrafie niniejszym rozpatrzmy ten przypadek szczególny, kiedy zgóry wiadomo, że wszystkie pierwiastki równania są rzeczywiste. Przyjmijmy tu, że ostatni wyraz w funkcji $f(x)$ nie równa się zeru.

Oznaczając stopień równania $f(x) = 0$ przez n , ilość jego pierwiastków dodatnich przez m , a ujemnych przez m' , ilość zmian znaku w $f(x)$ przez v , ilość zmian znaku w $f(-x)$ przez v' , i, наконец, przez h , h' , h'' pewne liczby całkowite nie mniejsze od zera, będziemy mieli cztery następujące równania:

$$\begin{aligned} m &= v - 2h, \\ m' &= v' - 2h', \\ v + v' &= n - 2h'', \\ m + m' &= n; \end{aligned}$$

z tych równań wynika, iż

$$h + h' + h'' = 0.$$

A gdy żadna z liczb h , h' , h'' nie jest mniejsza od zera, więc

$$h = 0, \quad h' = 0, \quad h'' = 0,$$

a stąd

$$m = v, \quad m' = v'.$$

Te równania wyrażają następujące

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$ są rzeczywiste i różne od zera, to ilość jego pierwiastków dodatnich jest równa ilości zmian znaku w $f(x)$, a ilość jego pierwiastków ujemnych jest równa ilości zmian znaku w $f(-x)$.*

Naprzykład, następujące równania, otrzymywane wskutek przyrównania do zera niektórych z funkcji, podobnych do rozważanych powyżej w art. 58-ym,

$$\begin{aligned} P_3 &= 3x^3 - 2x^2 - 10x + 5 = 0, \\ P_4 &= 3x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 2x + 3 = 0, \\ P_5 &= 6x^5 - 13x^4 - 23x^3 + 45x^2 + 10x - 14 = 0, \\ Q_3 &= 3x^2 - 2x - 7, \\ Q_4 &= 3x^3 - 2x^2 - 10x - 3, \\ Q_5 &= 6x^4 - 13x^3 - 17x^2 + 26x + 16 \end{aligned}$$

mają wszystkie pierwiastki rzeczywiste, a mianowicie:

- pierwsze — dwa pierwiastki dodatne, jeden ujemny,
- drugie — dwa pierwiastki dodatne, dwa ujemne,
- trzecie — trzy pierwiastki dodatne, dwa ujemne,
- czwarte — jeden pierwiastek dodatny, jeden ujemny,
- piąte — jeden pierwiastek dodatny, dwa ujemne,
- szóste — dwa pierwiastki dodatne, dwa ujemne.

89. Możemy teraz przejść do innego jeszcze zastosowania twierdzenia Descartes'a, w przypadku, kiedy wszystkie pierwiastki równania są rzeczywiste. Polega ono na tym, że daje możność oznaczenia, ile równanie ma pierwiastków, zawartych między dwoma dowolnie wziętymi krańcami: a i $b > a$. Jeżeli oznaczymy pierwiastki równania $f(x) = 0$ przez a_1, a_2, \dots, a_n , to pierwiastkami równania $f(a + y) = 0$, czyli równania

$$(1) \quad f(a) + \frac{y}{1} f'(a) + \dots + \frac{y^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(a) = 0$$

będą liczby:

$$a_1 - a, \quad a_2 - a, \quad \dots, \quad a_n - a,$$

a pierwiastkami równania $f(b + z) = 0$, czyli równania

$$(2) \quad f(b) + \frac{z}{1} f'(b) + \dots + \frac{z^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(b) = 0$$

liczby:

$$a_1 - b, \quad a_2 - b, \quad \dots, \quad a_n - b.$$

Ilość pierwiastków dodatnich równania (1) równa jest ilości pierwiastków równania $f(x) = 0$, przewyższających kraniec a , a ilość pierwiastków dodatnich równania (2) równa jest ilości pierwiastków równania $f(x) = 0$, przewyższających kraniec b . A więc, jeżeli przez m i m' oznaczymy ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, przewyższających odpowiednio krańce a i b , a przez v_a i v_b ilość zmian znaku w (1) i (2), to mieć będziemy

$$m = v_a, \quad m' = v_b,$$

skąd

$$v_a - v_b = m - m'.$$

Różnica $m - m'$, oczywiście, wyznacza ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b ; a więc ostatnie równanie wyraża następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli wszystkie pierwiastki równania stopnia n -go, $f(x) = 0$, są rzeczywiste, to ilość jego pierwiastków, zawartych między dwoma dowolnymi krańcami: a i $b > a$, jest wyznaczona przez różnicę między ilością zmian znaku w grupie liczb*

$$f(a), \quad f'(a), \quad f''(a), \quad \dots, \quad f^{(n)}(a)$$

i ilością zmian znaku w grupie liczb

$$f(b), f'(b), f''(b), \dots, f^{(n)}(b).$$

Wyraży równe zero, jeżeli takie się znajdą, nie przyjmują się tu pod uwagę.

Weźmy np. jedno z równań, przytoczonych w art. poprzedzającym:

$$f(x) = 6x^5 - 13x^4 - 23x^3 + 45x^2 + 10x - 14 = 0.$$

Obliczając wartości funkcji $f(x)$ i jej pochodnych dla $x = 0, 1, 2$, otrzymamy następującą tablicę znaków:

	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^V
$x = 2$	—	—	+	+	+	+
$x = 1$	+	+	—	—	+	+
$x = 0$	—	+	+	—	—	+

Widzimy więc stąd, że równanie ma tylko jeden pierwiastek, zawarty między 0 i 1, i tylko jeden między 1 i 2.

§ V. TWIERDZENIA LAGUERRE'A.

90. Laguerre rozciągnął twierdzenie Descartes'a na równanie przestępne; to go przywiodło bezpośrednio do dwu nowych twierdzeń, stosujących się do równań liczebnych, twierdzeń, zasługujących na uwagę ze względu na ich praktyczną doniosłość.

Wyprowadzimy je tu — lecz przy pomocy odrębnego rozumowania.

TWIERDZENIE 1. *Ilość pierwiastków równania*

$$(1) \quad f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n = 0,$$

większych od danej liczby dodatniej a , nie jest większa od ilości zmian znaku w pierwszym wierszu algorytmu Horner'a (art. 14, 15)

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} A & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} & A_n \\ A & A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{n-1,1} & A_{n,1} \\ A & A_{1,2} & A_{2,2} & \dots & A_{n-1,2} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A & A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & & & \\ A & A_{1,n} & & & & \end{array} \right.$$

obliczonego dla $x = a$, a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą. Przyjmujemy tu, że liczba a nie jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$.

Napiszmy układ wierszy

$$(3) \left\{ \begin{array}{cccccc} A & A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} & A_{4,1} & \dots & A_{n,1} \\ A & A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} & A_{4,2} & \dots & A_{n,2} \\ A & A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} & A_{4,3} & \dots & A_{n,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A & A_{1,n} & A_{2,n-1} & A_{3,n-2} & A_{4,n-3} & \dots & A_{n,1} \end{array} \right.$$

według typu ogólnego

$A \ A_{1,k} \ A_{2,k-1} \ A_{2,k-2} \ \dots \ A_{k-1,2} \ A_{k,1} \ A_{k+1,1} \ A_{k+2,1} \ \dots \ A_{n-1,1} \ A_{n,1}$,
i oznaczymy ilość zmian znaku w każdym wierszu kolejno przez $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$.
Kładąc

$$\varphi_{i-1}(x) = Ax^{i-1} + A_{1,i-1}x^{i-2} + A_{2,i-2}x^{i-3} + \dots + A_{i-1,1},$$

$$\psi_i(x) = Ax^i + A_{1,i}x^{i-1} + A_{2,i-1}x^{i-2} + \dots + A_{i-1,2}x + aA_{i-1,1},$$

mamy równość

$$\psi_i(x) = (x + a)\varphi_{i-1}(x),$$

z której wnosimy, iż ilość zmian znaku w wierszu

$$(4) \quad A \ A_{1,i} \ A_{2,i-1} \ \dots \ A_{i-1,2} \ A_{i-1,1}$$

nie jest większa od ilości zmian znaku w wierszu

$$(5) \quad A \ A_{1,i-1} \ A_{2,i-2} \ \dots \ A_{i-1,1},$$

i różnica tych dwu liczb jest parzysta, albo równa zeru. Dopisawszy tak w wierszu (4), jak i w wierszu (5), grupę liczb

$$A_{i,1} \ A_{i+1,1} \ \dots \ A_{n,1}$$

otrzymujemy nowe dwa wiersze:

$$(6) \quad A \ A_{1,i} \ A_{2,i-1} \ \dots \ A_{i-1,2} \ A_{i-1,1} \ A_{i,1} \ \dots \ A_{n,1},$$

$$(7) \quad A \ A_{1,i-1} \ A_{2,i-2} \ \dots \ A_{i-1,1} \ A_{i,1} \ \dots \ A_{n,1},$$

o których można powiedzieć toż samo, co o wierszach (4) i (5), t. j., że ilość zmian znaku w (6) nie jest większa od ilości zmian znaku w (7), a jeżeli te dwie liczby różnią się od siebie, to o liczbę parzystą.

Jeżeli w jakimkolwiek wierszu opuścimy jeden wyraz, dowolnie wzięty, byle nie skrajny, to, oczywiście, ilość zmian znaku w danym wierszu albo się nie zmieni, albo zmniejszy się o liczbę parzystą. Wykręślimy więc w wierszu (6) wyraz $A_{i-1,1}$; on nie mógł być skrajnym, gdyż wyraz $A_{n,1} = f(a)$, według założenia, jest różny od zera. Wskutek tego, wiersze: (6) i (7) staną się wierszami i -tym i $(i-1)$ -szym układu (3), i dlatego możemy napisać

$$(8) \quad v_i = v_{i-1} - 2h_{i-1},$$

gdzie h_{i-1} oznacza pewną całkowitą liczbę dodatnią, albo zero.

Równanie (8) wskazuje, że wszystkie liczby

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$$

są jednakowej parzystości i że każda od poprzedzającej ją nie jest większa.

Zauważmy jeszcze, że tożsamościowo (art. 15)

$$f(x) = A_{n,1} + A_{n-1,2}(x-a) + A_{n-2,3}(x-a)^2 + \dots + A_{1,n}(x-a)^{n-1} + A(x-a)^n,$$

tak iż pierwiastki równania $f(x) = 0$, większe od naszej liczby dodatniej a , są pierwiastkami dodatnimi równania o niewiadomej $x - a$, otrzymanego wskutek przyrównania do zera strony prawej wypisanej równości. A więc,

według twierdzenia Descartes'a, ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, większych od a , nie jest większa od v_n i z tą liczbą jest jednakowej parzystości, a tym samym, na mocy tego, cośmy wyżej okazali, nie jest większa od żadnej z liczb $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$ i jest jednakowej z nimi parzystości. Ten wynik naszego rozumowania obejmuje twierdzenie Laguerre'a.

91. Przy jakichkolwiek dwu danych liczbach a i b , różnych od siebie, każda funkcja całkowita $f(x)$ stopnia n -tego może być przedstawiona, jednym tylko sposobem, w takiej postaci:

$$(1) \quad f(x) = Ax^{n-1}(x-a) + \varphi(x)(x-a)(b-x) + B(b-x),$$

gdzie A i B oznaczają liczby stałe, $\varphi(x)$ zaś pewną funkcją całkowitą stopnia niższego od $n-1$.

Przyjmujemy nadal, że żadna z liczb a i b nie czyni zadość równaniu $f(x) = 0$; wówczas ani jeden ze współczynników A, B w wyrażeniu (1) nie jest równy zeru.

Przypuszczając, że w wyrażeniu funkcji

$$\varphi(x) = Lx^l + L_1x^{l_1} + \dots + L_lx^l,$$

wyrazy są uporządkowane według malejących potęg zmiennej x , i że $b > a$, weźmiemy pod uwagę ilość zmian znaku w grupie liczb:

$$A, L, L_1, \dots, L_l, B$$

i, przez skrócenie, będziemy ją tu nazywali ilością zmian znaku w wyrażeniu

(1). Tak np. powiemy, że wyrażenie

$$-3x^5(x-1) + (x-1)(2-x)(5x^3-x-1) + 4(2-x)$$

przedstawia trzy zmiany znaku.

Twierdzenie pomocnicze. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją całkowitą stopnia n -go, a i i b są dwiema liczbami dodatnimi i $b > a$ (zresztą a może nawet równać się zeru), zaś c jest liczbą pośrednią między a i b , to, wrazie gdy funkcje $f(x)$ i $(x-c)f(x)$ przedstawimy w postaci

$$f(x) = Ax^{n-1}(x-a) + \varphi(x)(x-a)(b-x) + B(b-x),$$

$$(x-c)f(x) = A_1x^n(x-a) + \psi(x)(x-a)(b-x) + B_1(b-x),$$

ilość zmian znaku w wyrażeniu iloczynu $(x-c)f(x)$ jest większa od ilości zmian znaku w wyrażeniu funkcji $f(x)$ o liczbę nieparzystą.

Zauważmy uprzednio, że:

różnica między liczbami, wyrażającymi ilość zmian znaku w grupie

$$p, q, r$$

i ilość zmian znaku w grupie

$$p, r,$$

jest albo 0, albo 2;

jeżeli liczby p i q są jednakowego znaku, to różnica między liczbami, wyrażającymi ilość zmian znaku w grupie

$$p, q', r$$

i ilość zmian znaku w grupie

$$p, q, r,$$

jest albo 0, albo 2.

Kładąc

$$\varphi(x) = Lx^l + L_1x^{l_1} + \dots + L_ix^{l_i},$$

znajdziemy

$$(x - c)\varphi(x) = Lx^{l+1} + M_1x^{m_1} + \dots + M_kx^{m_k} - cL_ix^{l_i},$$

a zatem

$$(2) (x - c)f(x) = \frac{A}{b}(b - c)x^n(x - a) + \left[-\frac{Ac}{b}x^{n-1} + Lx^{l+1} + \dots - cL_ix^{l_i} + B \right] (x - a)(b - x) - B(c - a)(b - x).$$

Niektóre z wyrazów, objętych przez wielki nawias na stronie prawej, mogą być podobne; dlatego należy oddzielnie rozpatrywać następujące cztery przypadki.

a). $n - 1 > l + 1$ i $l_i > 0$. Wówczas w owym wielkim nawiasie niema wyrazów podobnych, a w wyrażeniach (1) i (2) mamy dwie następujące grupy liczb:

$$\begin{aligned} & A, L, L_1, \dots, L_i, B, \\ & A, -A, L, M_1, \dots, -L_i, B, -B. \end{aligned}$$

Oznaczmy ilość zmian znaku w każdej z nich odpowiednio przez v i v' i, prócz tego: ilość zmian znaku w grupach

$$\begin{aligned} & A, L \\ & A, -A, L \end{aligned}$$

przez v_1 i v_1' ; ilość zmian znaku w grupach

$$\begin{aligned} & L, L_1, \dots, L_i \\ & L, M_1, \dots, M_k, -L_i \end{aligned}$$

przez v_2 i v_2' ; nakoniec, ilość zmian znaku w grupach

$$\begin{aligned} & L_i, B \\ & -L_i, B, -B \end{aligned}$$

przez v_3 i v_3' . Mamy więc następujące równania

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 + v_3, \\ v' &= v_1' + v_2' + v_3', \\ v_1' - v_1 &= 2h_1, \\ v_2' - v_2 &= 2h_2 + 1, \\ v_3' - v_3 &= 2h_3, \end{aligned}$$

w których każda z liter h_1, h_2, h_3 oznacza pewną liczbę całkowitą, dodatnią, lub zero. Z tych równań wynika

$$v' - v = 2h + 1,$$

gdzie $h = h_1 + h_2 + h_3$ i dlatego oznacza również pewną liczbę całkowitą, dodatnią, albo zero. To zaś równanie okazuje prawdziwość naszego twierdzenia w przypadku rozważanym.

b). $n - 1 = l + 1, l > 0$. Wówczas, na stronie prawej równości (2) pierwsze dwa z wyrazów, zawartych w wielkim nawiasie, są podobne, wskutek czego należy przyjąć pod uwagę następujące dwie grupy liczb

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} A, L, L_1, \dots, L_i, B, \\ A, L - \frac{Ac}{b}, M_1, \dots, -L_i, B, -B, \end{array} \right.$$

z których pierwsza niech przedstawia v zmian znaku, a druga v' . Weźmy tu jeszcze pod uwagę grupę

$$A, L, M_1, \dots, -L_i, B, -B,$$

różniącą się tylko wyrazem drugim od drugiej z grup (3), i oznaczmy przez w ilość zmian znaku, w niej zachodzących. Mamy

$$v' - w = 2h_1,$$

gdzie h_1 oznacza jedność, albo zero. Zachodzi tu jeszcze związek

$$w - v = 2h_2 + 1,$$

w którym h_2 jest liczbą całkowitą, dodatnią, albo zerem. A więc

$$v' - v = 2h + 1,$$

gdzie litera h oznacza sumę $h_1 + h_2$, liczbę całkowitą, dodatnią, albo zero, c. n. d.

c). $n - 1 > l + 1, l = 0$. Wówczas mamy następujące dwie grupy:

$$\left\{ \begin{array}{l} A, L, L_1, \dots, L_i, B, \\ A, -A, L, M_1, \dots, M_k, -cL_i + B, -B. \end{array} \right.$$

Oznaczmy ilość zmian znaku w każdej z nich odpowiednio przez v i v' i nadto weźmy jeszcze pod uwagę grupę

$$A, -A, L, M_1, \dots, M_k, -cL_i, -B,$$

która niech przedstawia w zmian znaku. Oczywiście, mamy tu dwa równania

$$v' - w = 2h_1,$$

$$w - v = 2h_2 + 1,$$

w których tak h_1 jak i h_2 oznacza liczbę całkowitą, dodatnią, albo zero. Z nich znajdujemy

$$v' - v = 2h + 1,$$

gdzie h oznacza liczbę całkowitą, dodatnią, albo zero, c. n. d.

d). $n - 1 = l + 1$, $l_i = 0$. Mamy tu dwie grupy:

$$A, L, L_1, \dots, L_i, B,$$

$$A, L - \frac{Ac}{b}, M_1, \dots, M_k, -cL_i + B, -B;$$

weźmy jeszcze pod uwagę grupę

$$A, L, M_1, \dots, M_k, -cL_i, -B.$$

Oznaczmy ilość zmian znaku w każdej z nich odpowiednio przez v , v' , w . Jest więc

$$v' - w = 2h_1,$$

$$w - v = 2h_2 + 1,$$

gdzie h_1 i h_2 oznaczają liczby całkowite, nie mniejsze od zera. Stąd zaś wynika

$$v' - v = 2h + 1,$$

gdzie h jest liczbą całkowitą, dodatnią, albo zerem, c. n. d.

92. TWIERDZENIE 2. *Gdy mamy dane równanie stopnia n -tego w postaci*

$$(1) \quad f(x) = Ax^{n-1}(x-a) + \varphi(x)(x-a)(b-x) + B(b-x) = 0,$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza funkcję

$$Lx^l + L_1x^{l_1} + \dots + L_lx^{l_l}$$

stopnia niższego od $n - 1$, której wyrazy są uporządkowane według potęg malejących zmiennej x , zaś a i b są liczbami dodatnimi, nie czyniącymi zadość równaniu $f(x) = 0$, z których $b > a$, to ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych w przedziale od a do b , nie jest większa od ilości zmian znaku w grupie liczb

$$A, L, L_1, \dots, L_l, B$$

i jest z nią jednakowej parzystości.

Jeżeli równanie $f(x) = 0$ nie ma żadnego pierwiastka w przedziale między a i b , to wówczas twierdzenie widocznie ma miejsce, gdyż wartości $f(a)$ i $f(b)$, a tym samym i współczynniki A i B są jednakowego znaku.

Przypuśćmy, że równanie $f(x) = 0$ posiada r pierwiastków w przedziale między a i b , a mianowicie:

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_r$$

Utwórzmy funkcje:

$$F_r(x) = \frac{f(x)}{(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_r)},$$

$$F_{r-1}(x) = \frac{f(x)}{(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_{r-1})},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F_1(x) = \frac{f(x)}{x-c_1},$$

$$F(x) = f(x)$$

Ażeby wyznaczyć A , B i $\varphi(x)$, zauważmy, że, gdy wielomian na stronie lewej nazwiemy $f(x)$, z tożsamości

$$f(x) = Ax^5 + \varphi(x)x(1-x) + B(1-x)$$

wynika bezpośrednio

$$A = f(1), \quad B = f(0),$$

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - Ax^5 - B(1-x)}{x(1-x)}.$$

Uskuteczniając wskazane działania, otrzymamy

$$A = -22, \quad B = -5$$

$$\varphi(x) = -23x^3 - 18x^2 - 2x - 14.$$

Równanie (1) przeto może być napisane tak:

$$22x^5 + (23x^3 + 18x^2 + 2x + 14)x(1-x) + 5(1-x) = 0.$$

Stąd widzimy, że między 0 i 1 niema ani jednego pierwiastka.

ROZDZIAŁ VI.

TWIERDZENIE BUDAN'A. — SPOSÓB FOURIER-GO ODDZIELANIA PIERWIĄSTKÓW RÓWNANIA. — TWIERDZENIE SYLVESTER'A. — TWIERDZENIE NEWTON'A.

§ I. TWIERDZENIE BUDAN'A.

95. Twierdzenie pomocnicze 1. *Jeżeli funkcja całkowita $f(x)$ i kilka po sobie następujących jej pochodnych: $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(r-1)}(x)$ przy $x = a$ stają się równe zeru, to, przy dostatecznie małych wartościach dodatnich liczby h , grupa wartości*

$$f(a-h), f'(a-h), \dots, f^{(r-1)}(a-h), f^{(r)}(a-h)$$

będzie przedstawiała same tylko zmiany znaku, grupa zaś

$$f(a+h), f'(a+h), \dots, f^{(r-1)}(a+h), f^{(r)}(a+h)$$

same tylko powtórzenia znaku.

Wynika to bezpośrednio z twierdzenia art. 63-go, na mocy którego wnosiśmy, że przy przejściu zmiennej x przez wartość a , od wartości mniejszych do większych, każda z funkcjji ułamkowych

$$\frac{f(x)}{f'(x)}, \frac{f'(x)}{f''(x)}, \dots, \frac{f^{(r-1)}(x)}{f^{(r)}(x)},$$

zmieniając się odpowiednio, przechodzi od wartości ujemnych, przez zero, do wartości dodatnich.

96. Twierdzenie pomocnicze 2. *Niech a i b będą dwiema liczbami, nieprzywodzącymi do zera żadnej z funkcjji*

$$(1) \quad f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(r-1)}(x), f^{(r)}(x),$$

niech v_a i v_b oznaczają ilości zmian znaku w (1) odpowiednio przy $x = a$ i $x = b$, i przyjmijmy, że $b > a$. Jeżeli, popiérwsze, funkcja $f^{(r)}(x)$ nie zmienia swego znaku między a i b , i, powtóre, między a i b znajduje się, lecz tylko jedna, wartość $x = c$, przy której przynajmniej jedna z funkcjji (1) staje się równą zeru, to wówczas

$$v_a - v_b = m + 2h,$$

gdzie h jest pewną liczbą całkowitą dodatnią, albo zerem, a m w różnych przypadkach otrzymuje następujące wartości:

kiedy liczba c jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, a wielokrotność tego pierwiastka jest większa od r , to $m = r$;

kiedy liczba c jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, a wielokrotność tego pierwiastka nie jest większa od r , to m jest równe liczbie, wyrażającej wielokrotność tego pierwiastka;

kiedy liczba c nie jest pierwiastkiem równania $f(x)$, to $m = 0$.

Twierdzenie to wynika z poprzedzającego; ażeby je udowodnić, potrzeba rozpatrzyć oddzielnie rozmaite przypadki szczególne.

a. Wszystkie funkcje (1) stają się równe zeru przy $x = c$; innymi słowy, liczba c jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, więcej niż r -krotnym.

Oznaczywszy przez a dość małą liczbę dodatnią, spostrzegamy, że $v_a = v_{c-h}$; gdyż każda z funkcji (1), nie posiadając pierwiastka w przedziale $a, c - h$, jest tegoż samego znaku przy $x = a$, co przy $x = c - h$. Z téjże przyczyny $v_b = v_{c+h}$. Wskutek tego,

$$v_a - v_b = v_{c-h} - v_{c+h}.$$

Że zaś, według poprzedzającego twierdzenia pomocniczego,

$$v_{c-h} = r, \quad v_{c+h} = 0,$$

przeto, na mocy powyższego równania,

$$v_a - v_b = r, \quad \text{c. n. d.}$$

b. Z funkcji (1) staje się przy $x = c$ równą zera albo sama tylko funkcja $f(x)$, albotóż funkcja $f(x)$ i kilka bezpośrednio po niej następujących pochodnych, lecz nie wszystkie.

Przypuśćmy, że $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0$, pozostałe zaś wartości $f^{(k)}(c), \dots, f^{(r)}(c)$ nie są równe zeru. Oznaczywszy przez w_x ilość zmian znaku w grupie

$$f(x), f'(x), \dots, f^{(k-1)}(x), f^{(k)}(x),$$

a przez w_x' ilość zmian znaku w grupie

$$f^{(k)}(x), f^{(k+1)}(x), \dots, f^{(r)}(x),$$

oczywiście będziemy mieli

$$v_x = w_x + w_x'.$$

Nadając dla x naprzód wartość a , następnie zaś wartość b , otrzymujemy

$$v_a = w_a + w_a',$$

$$v_b = w_b + w_b',$$

skąd

$$(2) \quad v_a - v_b = w_a - w_b + w_a' - w_b'.$$

Ponieważ ani jedna z funkcji $f(x)$, $f'(x)$, \dots , $f^{(k)}(x)$ nie staje się równą zeru ani w przedziale a , $c - h$, ani w przedziale $c + h$, b , zatem

$$w_a = w_{c-h}, \quad w_b = w_{c+h},$$

a więc

$$w_a - w_b = w_{c-h} - w_{c+h}.$$

Że zaś, według poprzedniego twierdzenia pomocniczego,

$$w_{c-h} = k, \quad w_{c+h} = 0,$$

zatem

$$w_{c-h} - w_{c+h} = k,$$

wskutek czego mamy

$$w_a - w_b = k.$$

Zważmy jeszcze, że, zgodnie z założeniem, ani jedna z funkcji $f^{(k)}(x)$, $f^{(k-1)}(x)$, \dots , $f^{(r-1)}(x)$, $f^{(r)}(x)$ nie staje się równą zeru dla żadnej wartości zmiennej x , zawartej w przedziale a , b ; jest więc

$$w_a' = w_b',$$

albo

$$w_a' - w_b' = 0.$$

Wprowadzając do strony lewej równania (2) zamiast $w_a - w_b$ i $w_a' - w_b'$ dopiero otrzymane ich wartości, znajdujemy

$$v_a - v_b = k, \quad \text{c. n. d.}$$

c. Z funkcji (1) albo jedna tylko funkcja, albowież kilka sąsiednich funkcji stają się równymi zeru przy $x = c$, lecz $f(c)$ nie jest równe zeru.

Przypuśćmy, że, pośród wartości $f(c)$, $f'(c)$, \dots , $f^{(r)}(c)$, następujące są równe zeru:

$$f^{(i)}(c) = f^{(i+1)}(c) = \dots = f^{(i+k-1)}(c) = 0;$$

wskaźnik i może otrzymywać wartości od 1 do r , wskaźnik zaś k od 1 do $r + 1 - i$. Oznaczając ilość zmian znaku w grupach

$$f(x), \quad f'(x), \dots, f^{(i)}(x), \\ f^{(i)}(x), \quad f^{(i+1)}(x), \dots, f^{(r)}(x)$$

odpowiednio przez w_x i w_x' , mieć będziemy

$$v_x = w_x + w_x';$$

a stąd

$$v_a - v_b = (w_a - w_b) + (w_a' - w_b').$$

Rozważmy oddzielnie wyrazy, znajdujące się na stronie prawej tego równania. — Każda z funkcji: $f(x)$, $f'(x)$, \dots , $f^{(i-1)}(x)$, nie posiadając ani jednego pierwiastka między a i b , jest tegoż samego znaku przy $x = a$ i przy $x = b$; wartości zaś $f^{(i)}(a)$ i $f^{(i)}(b)$ będą jednakowego albo różnego znaku, stosownie do tego, czy wielokrotność pierwiastka c , względem równania $f^{(i)}(x) = 0$, jest parzysta lub nieparzysta, gdyż między a i b równanie to nie ma innych pier-

wiastków, prócz jednego c . A więc, jeżeli liczba c jest pierwiastkiem równania $f^{(i)}(x) = 0$ parzystej wielokrotności, to $w_a - w_b = 0$; jeżeli zaś jego wielokrotność jest nieparzysta, to $w_a - w_b = \pm 1$. — Co zaś do różnicy $w_a' - w_b'$, zauważmy, że ona odnosi się do grupy

$$f^{(i)}(x), f^{(i+1)}(x), \dots, f^{(r)}(x),$$

w której zachodzić może jeden z dwu przypadków, rozpatrywanych wyżej; jeżeli więc $k = r + 1 - i$, to $w_a' - w_b' = r - i$, jeżeli zaś $k < r + 1 - i$, to $w_a' - w_b' = k$. — W tym przypadku, kiedy $k = r + 1 - i$, wielokrotność pierwiastka c względem równania $f^{(i)}(x) = 0$ przewyższa różnicę $r - i$ o liczbę parzystą; jest to następstwem przypuszczenia, uczynionego na początku, że funkcja $f^{(r)}(x)$ nie zmienia znaku między a i b , wskutek czego liczba c może być pierwiastkiem równania $f^{(r)}(x) = 0$ tylko parzystej wielokrotności. A więc, jeżeli różnica $r - i$ jest liczbą parzystą, albo zerem, to, według tego, cośmy wyżej powiedzieli, mamy

$$w_a - w_b = 0, \quad w_a' - w_b' = r - i,$$

skąd, po dodaniu do siebie, otrzymujemy

$$v_a - v_b = r - i.$$

Jeżeli zaś różnica $r - i$ jest nieparzysta, to

$$w_a - w_b = \pm 1, \quad w_a' - w_b' = r - i,$$

i

$$v_a - v_b = r - i \pm 1.$$

W obu przeto razach, różnica $v_a - v_b$ jest parzysta i nie mniejsza od zera, c. n. d. — W przypadku, kiedy $k < r + 1 - i$, zgodnie z tym, cośmy wyżej powiedzieli, znajdziemy, że: jeżeli k jest liczbą parzystą, to

$$w_a - w_b = 0, \quad w_a' - w_b' = k,$$

a stąd

$$v_a - v_b = k;$$

jeżeli zaś k jest nieparzyste, to

$$w_a - w_b = \pm 1, \quad w_a' - w_b' = k$$

i stąd

$$v_a - v_b = k \pm 1.$$

W obu więc razach, różnica $v_a - v_b$ jest parzysta i nie mniejsza od zera, c. n. d.

d. Z funkcyj (1) przy $x = c$ stają się równymi zeru: funkcja $f(x)$ i przynajmniej jedna z pozostałych funkcyj, lecz wskaźniki funkcyj stających się równymi zeru, nie tworzą nieprzerwanego ciągu liczb, jak w przypadkach poprzednich.

Przypuścimy, że pośród liczb

$$f(c), f'(c), \dots, f^{(r)}(c)$$

te, które są równe zeru, tworzą dwie grupy, oddzielone od siebie przez

jedną, albo kilka liczb, nie równych zero; niech pierwszą taką grupę tworzy m liczb:

$$f(c), f'(c), \dots, f^{(m-1)}(c),$$

drugą zaś k liczb:

$$f^{(i)}(c), f^{(i+1)}(c), \dots, f^{(i+k-1)}(c),$$

gdzie $i > m$. Wyrażając przez w_x i w_x' ilość zmian znaku w odpowiednich grupach:

$$\begin{aligned} f(x), f'(x), \dots, f^{(m)}(x), \\ f^{(m)}(x), f^{(m+1)}(x), \dots, f^{(r)}(x), \end{aligned}$$

będziemy mieli

$$v_x = w_x + w_x',$$

skąd

$$v_a - v_b = w_a - w_b + w_a' - w_b'.$$

Każda z owych dwu grup odpowiada jednemu z przypadków już rozpatrywanych; wskutek tego, bezpośrednio znajdujemy, że

$$w_a - w_b = m, \quad w_a' - w_b' = 2h,$$

gdzie h oznacza pewną liczbę całkowitą, dodatnią, albo zero. Dodając do siebie te równania, otrzymamy

$$v_a - v_b = m + 2h, \quad \text{c. n. d. —}$$

Zauważmy, że jeżeliby pośród funkcji (1) te, które stają się równymi zero przy $x = c$, tworzyły nie dwie, ale trzy, lub więcej oddzielnych grup, to wówczas należałoby rozważać nie dwie, ale odpowiednio trzy, lub więcej obszerniejszych grup oddzielnych, z których każda zawierałaby tylko jedną grupę funkcji, stających się równymi zero przy $x = c$. Oczywiście, że ostateczne wyrażenie różnicy $v_a - v_b$ będzie odpowiednie powyższemu.

e. Z funkcji (1), przy $x = c$ funkcja $f(x)$ nie staje się równą zero, ale kilka innych funkcji, tworzących dwie, lub więcej oddzielnych grup, stają się równymi zero.

Przypuśćmy, że pośród liczb:

$$f(c), f'(c), \dots, f^{(r)}(c)$$

te, które są równe zero, tworzą tylko dwie grupy następujące:

$$\begin{aligned} f^{(i)}(c), f^{(i+1)}(c), \dots, f^{(i+k-1)}(c), \\ f^{(j)}(c), f^{(j+1)}(c), \dots, f^{(j+l-1)}(c), \end{aligned}$$

gdzie $i \geq 1$, $j > i + k$. Oznaczając przez w_x i w_x' ilość zmian znaku odpowiednio w grupach:

$$\begin{aligned} f(x), f'(x), \dots, f^{(i+k)}(x), \\ f^{(i+k)}(x), f^{(i+k+1)}(x), \dots, f^{(r)}(x) \end{aligned}$$

i zważając, że każda z tych grup odpowiada jednemu z przypadków już rozpatrywanych, znajdziemy

$$w_a - w_b = 2h, \quad w_a' - w_b' = 2h',$$

gdzie każda z liter h i h' oznacza pewną liczbę całkowitą dodatnią, albo zero. Dodając do siebie te dwa równania, otrzymamy

$$v_a - v_b = 2(h + h'), \quad \text{c. n. d. —}$$

W podobny sposób możemy się przekonać, że to twierdzenie ma miejsce także wtedy, kiedy te z funkcyj (1), które stają się równymi zeru przy $x = c$, tworzą więcej niż dwie oddzielne grupy.

Te pięć przypadków, któreśmy rozpatrzyli, są jedyne, jakie zachodzić mogą; zatem twierdzenie nasze jest udowodnione.

97. Przy pomocy tylko dowiedzonego twierdzenia pomocniczego, możemy uzasadnić następujące twierdzenie Budan'a.

TWIERDZENIE. *Mając funkcję całkowitą stopnia n -go, $f(x)$, i kilka jej pochodnych:*

$$(1) \quad f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(r-1)}(x), f^{(r)}(x),$$

przypuśćmy, że ostatnia funkcja $f^{(r)}(x)$ nie zmienia swego znaku między $x = a$ i $x = b > a$, i że żadna z funkcyj (1) nie staje się równą zeru ani przy $x = a$, ani też przy $x = b$; oznaczmy przez m ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b , lecz liczonych w ten sposób, iż każdy pierwiastek, którego wielokrotność przewyższa liczbę r , jeżeliby taki pierwiastek się zdarzył między a i b , uwzględnia się tylko jako pierwiastek r -krotny; nadto ilość zmian znaku w (1) nazwiemy v_x ; wtedy będziemy mieli następujące równanie:

$$v_a - v_b = m + 2h,$$

w którym h oznacza pewną liczbę całkowitą, dodatnią, lub zero, tak iż liczba m nigdy nie jest większa od różnicy $v_a - v_b$, a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą.

Jakoż, jeżeli między a i b niema takiej liczby, przy której przynajmniej jedna z funkcyj (1) stawałaby się równą zeru, to wówczas $m = 0$, i, powtóre, znak każdéj z liczb

$$f(a), f'(a), \dots, f^{(r)}(a)$$

jest takiż sam, jak znaki odpowiedniéj z liczb

$$f(b), f'(b), \dots, f^{(r)}(b).$$

A zatem jest wtedy, zgodnie z twierdzeniem, $v_a - v_b = m = 0$.

Przypuśćmy, że między a i b znajduje się przynajmniej jedna liczba, przywodząca do zera którąś z funkcyj (1), i wypiszmy wszystkie takie liczby według ich wzrastających wartości:

$$c, c_1, c_2, \dots, c_{k-1}.$$

W każdym z przedziałów $c, c_1; c_1, c_2; \dots; c_{k-2}, c_{k-1}$ wybierzmy po jednéj dowolnéj liczbie pośredniéj i oznaczmy je odpowiednio przez a_1, a_2, \dots, a_{k-1} , tak iż $c < a_1 < c_1 < a_2 < c_2 \dots$. Każdy więc z przedziałów

$$a, a_1; a_1, a_2; \dots; a_{k-2}, a_{k-1}; a_{k-1}, b,$$

$f(x) = 0$, to w owej chwili wielkość v_x zmniejsza się o $m + 2h$ jednostki, gdzie h oznacza liczbę dodatnią, całkowitą, lub zero; jeżeli zaś zmienna x przechodzi przez pierwiastek jednej z funkcyj $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$, ale nie funkcji $f(x)$, to wielkość v_x albo się nie zmienia, albo zmniejsza się o liczbę parzystą. — Można też samo tak wypowiedzieć: przy przejściu zmiennej x przez m -krotny pierwiastek równania $f(x) = 0$, od wartości mniejszych do większych, ilość zmian znaku w (1) zmniejsza się o $m + 2h$, gdzie $2h$ oznacza pewną parzystą liczbę dodatnią, lub zero; przy przejściu zaś zmiennej x przez pierwiastek jakiegokolwiek z funkcyj $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$, który nie czyni zadość równaniu $f(x) = 0$, ilość zmian znaku w (1) albo pozostaje niezmienna, albowież zmniejsza się o liczbę parzystą.

§ II. PRAWIDŁO ZNAKU PODWÓJNEGO.

99. W paragrafie poprzednim, przy dowodzeniu twierdzenia Budan'a, przypuszczaliśmy, że żadna z liczb a i b nie przywodzi do zera żadnej z funkcyj $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(v)}(x)$. W razie przeciwnym, np. jeżeli przy $x = a$ niektóre z funkcyj $f(x), f'(x), \dots, f^{(v)}(x)$ stają się równymi zeru, należy tylko zamiast krańca a przyjmując $a + h$, gdzie h jest nieskończenie małą liczbą dodatnią; i taksamo, jeżeliby przy $x = b$ niektóre z funkcyj $f(x), f'(x), \dots, f^{(v)}(x)$ stawały się równymi zeru, wówczas zamiast b wzięlibyśmy $b - h$. Ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b , oczywiście jest równa ilości pierwiastków tegoż równania, zawartych w przedziale od $a + h$ do $b - h$, a już tak przy $x = a + h$, jak i przy $x = b - h$ żadna z funkcyj $f(x), f'(x), \dots, f^{(v)}(x)$ nie staje się równą zeru.

Należy nam tylko okazać, w jaki sposób określają się znaki wartości $f(a + h), f'(a + h), \dots$, albowież znaki wartości $f(b - h), f'(b - h), \dots$. W tym celu, przyjmując, że a oznacza którykolwiek z dwu krańców przedziału rozważanego, niższy albo wyższy, zauważmy, że jeżeli wartość $f^{(i)}(a)$ nie jest równa zeru, to wartość $f^{(i)}(a \pm h)$ będzie takiegoż znaku, jak wartość $f^{(i)}(a)$, niezależnie od tego, czy h jest dodatnie, czy też ujemne. Jeżeli zaś wartość $f^{(i)}(a)$ jest równa zeru, to wtenczas może się zdarzyć, że i kilka następujących wartości: $f^{(i+1)}(a), f^{(i+2)}(a), \dots$ będzie równych zeru. Przypuśćmy, dla uogólnienia, że

$$f^{(i)}(a) = f^{(i+1)}(a) = \dots = f^{(i+k-1)}(a) = 0,$$

a wartość $f^{(i+k)}(a)$ nie jest już równa zeru. W takim razie, na mocy pierwszego twierdzenia pomocniczego (art. 95), bezpośrednio wnosimy, że grupa liczb:

$$f^{(i)}(a - h), f^{(i+1)}(a - h), \dots, f^{(i+k-1)}(a - h), f^{(i+k)}(a - h),$$

przedstawia same tylko zmiany znaku, gdy tymczasem grupa liczb:

$$f^{(i)}(a + h), f^{(i+1)}(a + h), \dots, f^{(i+k-1)}(a + h), f^{(i+k)}(a + h)$$

przedstawia same tylko powtórzenia znaku; a więc, zależnie od znaku wartości

$f^{(i+k)}(a)$, będącej tegoż samego znaku, co każda z dwu ostatnich liczb: $f^{(i+k)}(a-h)$ i $f^{(i+k)}(a+h)$, możemy odrazu wypisać znaki wszystkich innych liczb w dwu ostatnich grupach.

Takie zastosowanie twierdzenia pomocniczego, podanego w art. 95-ym, nazywa się **prawidłem znaku podwójnego**.

100. PRZYKŁAD 1. Mając równanie

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 85x + 17 = 0,$$

znajdujemy:

$$f'(x) = 5(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 17),$$

$$f''(x) = 20(x^3 - 3x^2 + 3x - 1),$$

$$f'''(x) = 60(x - 1)^2,$$

i spostrzegamy, że trzecia pochodna $f'''(x)$ jest wciąż dodatna. Określając znaki funkcyj

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x),$$

przy $x = -\infty, 0, 1, +\infty$, otrzymujemy następującą tablicę:

x	f	f'	f''	f'''
$+\infty$	+	+	+	+
$1+h$			+	+
1	-	-	0	0
$1-h$			-	+
0	+	-	-	+
$-\infty$	-	+	-	+

gdzie zamiast wartości $x = 1$ potrzeba było przyjąć pod uwagę dwie inne: $x = 1 - h$ i $x = 1 + h$, i posilkować się prawidłem znaku podwójnego. Z tej tablicy znajdujemy

$$v_0 - v_{1-h} = 1, \quad v_{1+h} - v_{+\infty} = 1, \quad v_{-\infty} - v_0 = 1.$$

A zatem, równanie dane posiada tylko dwa pierwiastki dodatne, oba pojedyncze, jeden mniejszy, a drugi większy od 1; prócz tego posiada ono jeden pierwiastek ujemny, również pojedynczy.

101. PRZYKŁAD 2. Dane jest równanie

$$3x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 55x + 100 = 0.$$

Z funkcyj

$$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 55x + 100$$

$$f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 22x - 55,$$

$$f''(x) = 36x^2 - 30x + 22$$

już druga pochodna $f''(x)$ pozostaje dodatną przy wszelkich wartościach zmiennej x ; można przeto twierdzenie Budan'a stosować do szeregu, składającego się z trzech funkcyj: $f(x), f'(x), f''(x)$. Określając znaki tych funkcyj przy $x = 0, 1, 2, \pm\infty$, otrzymujemy następującą tablicę:

x	f	f'	f''
$+\infty$	+	+	+
2	+	+	+
1	+	-	+
0	+	-	+
$-\infty$	+	-	+

Z niej widzimy, że

$$v_{-\infty} - v_0 = 0, \quad v_0 - v_1 = 0, \quad v_1 - v_2 = 2, \quad v_2 - v_{+\infty} = 0.$$

A więc, dane równanie nie ma pierwiastków ujemnych, co jest zresztą widoczne; pierwiastków zaś dodatnich albo ono nie ma wcale, alboważ ma ich dwa, i wtedy oba są zawarte między 1 i 2.

102. PRZYKŁAD 3. Dla równania

$$f = 3x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 51x - 23 = 0$$

otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^V
2	+	+	+	+	+	+
$1+h$			+			
1	-	-	0	+	+	+
$1-h$			-			
0	-	+	-	-	+	+
$-1+h$			-	-		
-1	-	+	0	0	-	+
$-1-h$			-	+		

Jest więc

$$v_{-\infty} - v_{-1-h} = 0,$$

$$v_{-1+h} - v_0 = 0,$$

$$v_0 - v_{1-h} = 2,$$

$$v_{1+h} - v_2 = 1,$$

$$v_2 - v_{+\infty} = 0.$$

A zatem, równanie dane nie posiada pierwiastków ujemnych; co się zaś tyczy pierwiastków dodatnich, to ono ma ich albo jeden, albo trzy: jeden zawarty w przedziale 1, 2, a pozostałe dwa, jeżeli istnieją, w przedziale między 0 i 1.

103. PRZYKŁAD 4. Mamy równanie

$$f(x) = 48x^5 - 32x^4 - 56x^3 + 72x^2 - 29x + 4 = 0.$$

Drugie równanie pochodne

$$f''(x) = 20x^3 - 8x^2 - 7x + 3 = 0,$$

ma jeden pierwiastek dwukrotny; wszystkie więc pierwiastki równania $f''(x)=0$ są wymierne, a tę drugą pochodną można tak przedstawić:

$$f''(x) = (5x + 3)(2x - 1)^2.$$

Stąd widzimy, że funkcja $f''(x)$ przy wszelkich wartościach dodatnich zmiennej x pozostaje wciąż dodatnią, stając się równą zeru przy $x = \frac{1}{2}$. Wskutek tego, stosując twierdzenie Budan'a do jakiegokolwiek przedziału między kranicami dodatnimi, będziemy mogli się ograniczyć do rozważania grupy, złożonej tylko z trzech funkcji: $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$. Nadając zmiennej x wartości $x = +\infty$, 0, 1, otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	f	f'	f''
$+\infty$	+	+	+
1	+	+	+
0	+	-	+

z której widzimy, że równanie dane albo wcale nie ma pierwiastków dodatnich, albo ma ich dwa, a wtedy one zawierają się między 0 i 1. Te dwa pierwiastki, jeżeli tylko one istnieją, mogą być albo różne od siebie, albo równe sobie; w pierwszym razie oba są pojedyncze, w drugim zaś razie oba stanowią jeden pierwiastek, którego wielokrotność nie jest mniejsza od 2; gdyż wielokrotność 2, na którą tu wskazuje twierdzenie Budan'a, należy rozumieć warunkowo. Jakoż, liczba $\frac{1}{2}$, przywodząca do zera funkcję $f''(x)$, jest zarazem pierwiastkiem dwu pozostałych funkcji, $f(x)$ i $f'(x)$, tak iż równanie dane ma jeden czterokrotny pierwiastek, liczbę $\frac{1}{2}$.

§ III. KRANIEC NIŻSZY DLA ILOŚCI PIERWIASTKÓW ZESPOLONYCH RÓWNAŃ. PRZYPADEK, KIEDY RÓWNAŃ NIE MA PIERWIASTKÓW ZESPOLONYCH.

104. Weźmy pod uwagę grupę funkcji

$$(1) \quad f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x),$$

utworzoną z funkcji całkowitej $f(x)$ stopnia n -tego i jej pochodnych, aż do n -tej włącznie, i, oznaczwszy przez a i $b > a$ dwie jakiegokolwiek liczby, zastosujmy twierdzenie Budan'a do każdego z trzech przedziałów: $-\infty, a$; a, b ; $b, +\infty$. Otrzymujemy tu trzy następujące równania:

$$v_{-\infty} - v_a = m' + 2h',$$

$$v_a - v_b = m + 2h,$$

$$v_b - v_{+\infty} = m'' + 2h'',$$

w których każda z liter m, m', m'' oznacza ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych w odpowiednim przedziale, a każda z liter h, h', h'' , oznacza pewną liczbę całkowitą, dodatnią, albo zero. Dodawszy do siebie te równania stronami odpowiednimi, znajdujemy

$$v_{-\infty} - v_{+\infty} = m + m' + m'' + 2(h + h' + h'');$$

lecz widocznie

$$v_{-\infty} = n, \quad v_{+\infty} = 0;$$

a więc

$$n = m + m' + m'' + 2(h + h' + h'').$$

Oznaczywszy przez $2J$ ilość wszystkich pierwiastków zespolonych równania danego, mamy

$$n = m + m' + m'' + 2J;$$

z tego równania i z poprzedzającego wyprowadzamy

$$2J = 2(h + h' + h''),$$

stąd zaś, z uwagi, że żadna z liczb h, h', h'' nie jest ujemna, wnosimy, że

$$(2) \quad 2J \geq 2h.$$

Każdym razem, kiedy będziemy wiedzieli ilość pierwiastków równania $f(x)=0$, zawartych między a i b , będziemy jednocześnie wiedzieli, jaka jest liczba $2h$; a jeżeli $2h > 0$, to między pierwiastkami równania $f(x)=0$ znajduje się przynajmniej $2h$ pierwiastków zespolonych.

Nierówność (2) będzie miała miejsce również wtedy, kiedy zamiast grupy (1) weźmiemy tylko grupę funkcji

$$(3) \quad f(x), f'(x), \dots, f^{(r)}(x),$$

do której wchodzi mniejsza ilość funkcji pochodnych. Istotnie, oznaczywszy przez w_x ilość zmian znaku w grupie (3), a przez w_x' ilość zmian znaku w grupie

$$(4) \quad f^{(r)}(x), f^{(r+1)}(x), \dots, f^{(n)}(x),$$

mamy równość

$$v_x = w_x + w_x',$$

a stąd

$$(5) \quad v_a - v_b = w_a - w_b + w_a' - w_b'.$$

Stosując następnie twierdzenie Budan'a kolejno do każdej z grup (1), (3), (4), otrzymamy

$$v_a - v_b = m + 2h,$$

$$w_a - w_b = m' + 2k,$$

$$w_a' - w_b' = 2m'' + 2j,$$

gdzie m oznacza ilość pierwiastków równania $f(x)=0$, zawartych między a i b , zaś m' ilość pierwiastków tegoż równania, zawartych między a i b , ale tak rachowanych, iż każdy taki pierwiastek, którego wielokrotność jest większa od r , przyjmuje się jako pierwiastek r -krotny; $2m''$ oznacza ilość pierwiastków równania $f^{(r)}(x)=0$, zawartych między a i b ; na koniec h, k, j oznaczają pewne liczby całkowite, nie mniejsze od zera. Równanie przeto (5) możemy zastąpić przez następujące

$$2h + m = 2k + 2j + m' + 2m''.$$

Lecz, oczywiście, $m \leq m' + 2m''$; a więc

$$2h \geq 2k;$$

ponieważ zaś $2J \geq 2h$, przeto, tymwięcej,

$$2J \geq 2k.$$

105. Jeżeli równanie $f(x) = 0$ nie posiada pierwiastków zespolonych, to na mocy nierówności

$$2J \geq 2k,$$

powyżej udowodnionej, wnosimy, że

$$k = 0,$$

jakimikolwiek są krańce a i b , gdyż k nie może być liczbą ujemną. A więc, w tym przypadku mamy

$$w_a - w_b = m,$$

t. j. różnica między ilością zmian znaku w grupie funkcyj

$$f(x), f'(x), \dots, f^{(r)}(x)$$

przy $x = a$ i ilością zmian znaku w tejże grupie przy $x = b$, równa się ilości pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b , jeżeli tylko pierwiastki, których wielokrotność jest większa od r , są liczone jako r -krotne.

Jeżeliby liczba r była równa stopniowi funkcji $f(x)$, to otrzymalibyśmy twierdzenie art. 89-go.

§ IV. TWIERDZENIE DESCARTES'A, JAKO WNIOSEK Z TWIERDZENIA BUDAN'A.

106. Mamy funkcję całkowitą

$$f(x) = Ax^n + Bx^m + Cx^r + \dots + Kx^s + L,$$

uporządkowaną według malejących potęg zmiennej x , w której wyraz stały nie równa się zeru, tak iż wartość $f(0)$ nie jest równa zeru. Przyjmijmy, że żaden ze współczynników A, B, C, \dots nie jest równy zeru.

Wypisując wyrażenia funkcyj pochodnych $f'(x), f''(x), \dots$, spostrzeżemy, że wyraz stały w wyrażeniu i -tej pochodnej $f^{(i)}(x)$ jest równy iloczynowi $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i$, pomnożonemu przez współczynnik x^i w wyrażeniu funkcji $f(x)$; a zatem, jeżeli w wyrażeniu funkcji $f(x)$ niema wyrazu z potęgą x^i , to $f^{(i)}(0) = 0$. Z tego wynika, że znaki wartości

$$f(0), f'(0), \dots, f^{(s)}(0), \dots, f^{(r)}(0), \dots, f^{(m)}(0), \dots, f^{(n)}(0)$$

są także same, jak znaki odpowiednich współczynników

$$L, 0, \dots, K, \dots, C, \dots, B, \dots, A.$$

Tu, dla uwidocznienia, przyjęliśmy, że $f'(0) = 0$, t. j. że w wyrażeniu $f(x)$ niema wyrazu z pierwszą potęgą zmiennej x .

Żeby uniknąć tych zer, podstawiamy zamiast wartości $x = 0$ nieskończenie małą liczbę dodatnią h , i, korzystając z prawidła znaku podwójnego, przekonywamy się, że znaki wartości

$$f(h), f'(h), \dots, f^{(n)}(h), \dots, f^{(r)}(h), \dots, f^{(m)}(h), \dots, f^{(n)}(h)$$

są także same, jak znaki odpowiednich liczb

$$L, K, \dots, K, \dots, C, \dots, B, \dots, A,$$

gdzie wszystkie liczby między A i B są równe A, wszystkie liczby między B i C są równe B i t. d.

A zatem, oznaczając ilość zmian znaku w grupie funkcji

$$f(x), f'(x), \dots, f^{(m)}(x)$$

przez v_x , a ilość zmian znaku w równaniu $f(x) = 0$ przez v , mamy

$$v_h = v.$$

Gdy jeszcze przez m oznaczymy ilość wszystkich pierwiastków dodatnich równania $f(x) = 0$, a przez $2k$ pewną liczbę parzystą, dodatnią, albo zero, to, na mocy twierdzenia Budan'a, mieć będziemy

$$v_h - v_{+\infty} = m + 2k.$$

Wstawiając tu v zamiast v_h i zważając, że $v_{+\infty} = 0$, otrzymamy

$$v = m + 2k.$$

To równanie wyraża twierdzenie Descartes'a (art. 82).

§ V. SPOSÓB FOURIER'GO ODDZIELANIA PIERWIĄSTKÓW.

107. Opierając się na twierdzeniu Budan'a, Fourier podał sposób szczególny oddzielania pierwiastków rzeczywistych równania, zalecający się prostotą, a w większości przypadków dogodniejszy od innych dotąd znanych sposobów. Dzięki temu zastosowaniu, twierdzenie Budan'a jest doniosłej wartości.

Będziemy nazywali grupą funkcji Fourier'go grupę

$$(1) \quad f(x), f'(x), \dots, f^{(r)}(x),$$

składającą się z funkcji całkowitej $f(x)$ i wszystkich jej kolejnych pochodnych do r -ej włącznie, w przypuszczeniu, że już funkcja $f^{(r)}(x)$ jest wciąż tegoż samego znaku przy wszystkich wartościach zmiennej x , zawartych między dwoma danymi krańcami: a i $b > a$. Jest to też sama grupa funkcji, do której się stosuje twierdzenie Budan'a.

Różnicę między liczbą, wyrażającą ilość zmian znaku w grupie (1) przy $x = a$, i liczbą, wyrażającą ilość zmian znaku w tejże grupie przy $x = b$, będziemy nazywali wskaźnikiem funkcji $f(x)$. Różnica między ilością zmian znaku w grupie funkcji

$$f'(x), f''(x), \dots, f^{(r)}(x)$$

przy $x = a$ i ilością zmian znaku w téjże grupie przy $x = b$ będzie wskaźnikiem funkcji $f'(x)$. Podobne znaczenie mają wskaźniki następnych funkcji pochodnych, $f''(x)$, $f'''(x)$, \dots , tak iż np., wskaźnik funkcji $f^{(r-1)}(x)$ jest różnicą między ilością zmian znaku w grupie

$$f^{(r-1)}(x), f^{(r)}(x)$$

przy $x = a$ i ilością zmian znaku w téjże grupie przy $x = b$. Wskaźnik ostatniej funkcji $f^{(r)}(x)$ przyjmujemy zawsze jako równy zeru.

Oznaczając wskaźniki funkcji $f(x)$, $f'(x)$, \dots , $f^{(r)}(x)$ odpowiednio przez e , e_1 , \dots , e_r i wypisując je kolejno obok siebie, otrzymujemy grupę wskaźników

$$e, e_1, e_2, \dots, e_{r-1}, e_r.$$

Ostatni wskaźnik, e_r , zawsze równy jest zeru; każdy z pozostałych jest liczbą całkowitą, dodatnią, albo zerem. Dwa jakiegokolwiek obok siebie tu wypisane wskaźniki mogą się od siebie różnić conajwięcej o jedność, tak iż ich różnica może być jedną z trzech liczb: 0, +1, -1. Wynika to wprost ze znaczenia tych wskaźników.

Jeżeli jedna z funkcji $f(x)$, $f'(x)$, \dots , $f^{(r-1)}(x)$, np. funkcja $f^{(i)}(x)$, jest tegoż samego znaku od $x = a$ do $x = b$, to żaden ze wskaźników e , e_1 , e_2 , \dots , e_{i-1} nie może być mniejszy od wskaźnika e_i . Jakoż, wzięwszy $j < i$, weźmy pod uwagę trzy grupy funkcji,

$$\begin{aligned} & f^{(j)}(x), f^{(j+1)}(x), \dots, f^{(i)}(x), \dots, f^{(r)}(x); \\ & f^{(j)}(x), f^{(j+1)}(x), \dots, f^{(i)}(x); \\ & f^{(i)}(x), f^{(i+1)}(x), \dots, f^{(r)}(x), \end{aligned}$$

i nazwijmy ilość zmian znaku w każdej z nich, odpowiednio v_x , v_x' , v_x'' . Mamy oczywiście

$$v_a - v_b = v_a' - v_b' + v_a'' - v_b'',$$

albo

$$e_j = v_a' - v_b' + e_i.$$

A ponieważ, na zasadzie twierdzenia Budan'a, $v_a' - v_b \geq 0$, zatem $e_j \geq e_i$.

Twierdzenie przeto Budan'a może być tak wysłowione:

Ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b , nie jest większa od wskaźnika funkcji $f(x)$, a jeżeli jest mniejsza od niego, to o liczbę parzystą, przyczym każdy pierwiastek równania $f(x) = 0$ więcej niż r -krotny, jeżeli taki pierwiastek znajduje się między a i b , winien być liczony jako r -krotny.

Każdy więc ze wskaźników e , e_1 , \dots jest krawcem wyższym dla ilości pierwiastków odpowiedniej funkcji, zawartych między a i b .

108. W przypadku, kiedy grupa funkcji Fourier'go składa się tylko z dwu funkcji:

$$f(x), f'(x),$$

twierdzenie Budan'a nic nowego nie daje. Istotnie, ponieważ funkcja $f'(x)$ nie ma zmieniać swego znaku od $x = a$ do $x = b$, zatem funkcja $f(x)$ od

$x = a$ do $x = b$ albo ciągle wzrasta, albo ciągle maleje, a z tego wynika, że równanie $f(x) = 0$ nie może mieć więcej jak jeden pierwiastek, zawarty między a i b . Twierdzenie Rolle'a prowadzi do tegoż wyniku; niema więc potrzeby oddzielnie rozważać tego przypadku.

Przypuścmy, że grupa funkcji Fourier'go składa się z trzech funkcji:

$$f(x), f'(x), f''(x).$$

W tym przypadku co do wskaźnika e możemy zrobić trzy następujące przypuszczenia:

a. wskaźnik $e = 0$; wówczas równanie $f(x) = 0$ nie posiada wcale pierwiastka między a i b ;

b. wskaźnik $e = 1$; równanie $f(x) = 0$ ma wtedy jeden pierwiastek pojedynczy między a i b ;

c. wskaźnik $e = 2$; wówczas równanie $f(x) = 0$ między a i b albo wcale nie posiada pierwiastka, albo ma ich dwa.

Przypadek ostatni przedstawia wątpliwość co do ilości pierwiastków, zawartych między a i b . Wtedy grupa wartości $f(a), f'(a), f''(a)$ przedstawia same zmiany znaku, grupa zaś wartości $f(b), f'(b), f''(b)$ same powtórzenia znaku, wskutek czego otrzymujemy grupę wskaźników

$$2, 1, 0,$$

która wskazuje, iż względem trzech funkcji: $f(x), f'(x), f''(x)$ są wypełnione wszystkie warunki, niezbędne, aby do tych funkcji można było zastosować twierdzenie Fourier'go (art. 70).

Jeżeli, po obliczeniu wartości sumy

$$(1) \quad \text{wart. bezw. } \frac{f(a)}{f'(a)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(b)}{f'(b)},$$

okaże się, że ona nie jest mniejsza od bezwzględnej wartości różnicy $b - a$, to wówczas równanie $f(x) = 0$ między a i b nie ma pierwiastka. — Lecz, jeżeli suma (1) okaże się mniejszą od wartości bezwzględnej $b - a$, to nic z tego wnieść nie będziemy mogli, i trzeba będzie rozdzielić przedział a, b na dwa mniejsze: a, c i c, b , gdzie c jest pewną liczbą dowolną, zawartą między a i b .

Jeżeli, obliczywszy wartość $f(c)$, znajdziemy, że ona jest innego znaku niż $f(a)$, to bezpośrednio wniesiemy, że równanie $f(x) = 0$ między a i b posiada dwa pierwiastki pojedyncze. Jeden z nich będzie zawarty w przedziale a, c , drugi zaś w przedziale c, b , i oba będą już oddzielone. — Jeżeli jednak wartości $f(a)$ i $f(c)$ są jednakowego znaku, to znowu nic wnieść nie będziemy mogli. W tym przypadku wskaźnik funkcji $f(x)$ dla jednego z przedziałów a, c i c, b będzie 2, dla drugiego zaś 0; a zatem, pytanie poprzednie o ilość pierwiastków, zawartych między a i b , sprowadza się teraz do takiegoż pytania, lecz względem przedziału mniejszego.

Postępując z tym nowym przedziałem taksamo, jak postępowaliśmy z przedziałem a, b , albo otrzymamy odpowiedź na nasze pytanie, alboważ spro-

wadzymy je do takiegoż samego pytania, odnoszącego się jednak do przedziału jeszcze mniejszego.

Jeżeli w przedziale między a i b równanie $f(x) = 0$ wcale nie ma pierwiastka, to wciąż przechodząc od przedziału a, b do przedziałów coraz mniejszych, dojdziemy nakoniec do takiego przedziału k, l , iż wartość sumy

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(k)}{f'(k)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(l)}{f'(l)}$$

okaże się nie mniejszą od bezwzględnej wartości różnicy $l - k$. W tym bowiem przypadku, wmiarę jak różnica $l - k$ zdąży do zera, każdy z wyrazów powyższej sumy wzrasta do nieskończoności.

Jeżeli zaś równanie $f(x) = 0$ między a i b ma dwa pierwiastki pojedyncze, to przechodząc od przedziału a, b do przedziałów coraz mniejszych, dojdziemy wreszcie do takiego przedziału k, l , iż wartość bezwzględna różnicy $l - k$ będzie mniejsza od wartości bezwzględnej różnicy dwu pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b . W takim przedziale równanie $f(x) = 0$ nie może mieć więcej, niż jeden pierwiastek; i jeżeli rzeczywiście ma ono jeden pierwiastek między l i k , to wartości $f(l)$ i $f(k)$ będą różnego znaku.

Nakoniec, jeżeli się zdarzy, że równanie $f(x) = 0$ w przedziale a, b posiada jeden pierwiastek wielokrotności parzystej, to wówczas, jakkolwiek daleko będziemy posuwali zmniejszanie przedziału a, b , nie dojdziemy do takiego przedziału k, l , iżby miała mieć miejsce nierówność

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(k)}{f'(k)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(l)}{f'(l)} \geq \text{wart. bezw. } (l - k),$$

czyli, ażeby wartości $f(k)$ i $f(l)$ były różnego znaku.

Aby ostatecznie rozwiązać nasze zadanie, należy wskazać, jakdalece wypaść może potrzeba conajwięcej zbliżyć do siebie krańce przedziału badanego. To, że sposób Fourier'go nie daje ku temu odpowiedniej wskazówki, przedstawia istotną jego wadę. —

Jeżeli więc doszliśmy do przedziału, którego krańce są znacznie zbliżone, i nie mogliśmy, zapomocą powyższych sposobów, dowiedzieć się, czy równanie $f(x) = 0$ ma w owym przedziale dwa pierwiastki, albo nie, wówczas należy zbadać, czy równanie $f(x) = 0$ nie ma w tym przedziale pierwiastka wielokrotnego (por. art. 43).

Jeżeli się okaże, że równanie $f(x) = 0$ wcale nie ma pierwiastka wielokrotnego, wtedy należy jeszcze dalej posunąć zmniejszanie przedziału, dopóki nie otrzymamy odpowiedzi żądanej.

Jeżeli zaś się okaże, że równanie $f(x) = 0$ posiada pierwiastki wielokrotne, to jego rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania innych równań, nie posiadających już pierwiastków wielokrotnych i będących stopnia niższego.

109. Przechodzimy do zbadania przypadku ogólnego, kiedy grupa funkcyj Fourier'go,

$$(1) \quad f(x), f'(x), \dots, f^{(r)}(x),$$

składa się więcej niż z trzech funkcyj (największa ich ilość może być $n + 1$).

Wypiszmy kolejne wskaźniki

$$(2) \quad e, e_1, \dots, e_r.$$

Jeżeli $e = 0$, to równanie $f(x) = 0$ w przedziale badanym a, b wcale nie ma pierwiastka; jeżeli zaś $e = 1$, to równanie $f(x) = 0$ między a i b ma tylko jeden pierwiastek, który więc będzie oddzielny.

Przypuśćmy więc, że $e \geq 2$. Wówczas pośród liczb e, e_1, \dots, e_r znajdziemy przynajmniej jedną równą jedności, gdyż $e > 1$, a $e_r = 0$, dwie zaś z tych liczb, po sobie następujące, nie mogą się różnić więcej niż o jedność. Niech $e_i = 1$ i niech już ani jedna z liczb e, e_1, \dots, e_{i-1} nie równa się jedności, tak iż, jeżeli istnieje pośród liczb (2) kilka równych jedności, to e_i oznacza pierwszą z nich (licząc od strony lewej).

Wskaźnik e_{i-1} , oczywiście, jest równy 2, gdyż inaczej równałby się 0 albo 1, a to sprzeciwia się temu, cośmy powyżej co do e_i i e przyjęli.

Co się tyczy wskaźnika e_{i+1} , to możemy zrobić dwa przypuszczenia: $e_{i+1} = 0$, albo $e_{i+1} > 0$.

Gdy $e_{i+1} = 0$, równanie $f^{(i+1)}(x) = 0$ nie ma pierwiastka zawartego w przedziale a, b ; możemy przeto zastosować twierdzenie Budan'a do grupy trzech funkcji:

$$f^{(i-1)}(x), f^{(i)}(x), f^{(i+1)}(x),$$

któręj, dla przedziału a, b , odpowiada grupa wskaźników:

$$2, 1, 0.$$

Przypadek ten jużesmy powyżej szczegółowo rozważali. — Jeżeli się okaże, że równanie $f^{(i-1)}(x) = 0$ między a i b wcale nie posiada pierwiastków, albo posiada jeden tylko wielokrotności parzystej, to wtedy funkcja $f^{(i-1)}(x)$ jest wciąż tego samego znaku od $x = a$ do $x = b$ i zamiast początkowej grupy funkcji (1) możemy wziąć inną, do której wejdzie mniej funkcji, mianowicie grupę

$$f(x), f'(x), \dots, f^{(i-1)}(x).$$

W grupie wskaźników, odnoszących się do tylkoco wypisanej grupy funkcji, pierwsza jedność będzie bliżej początku (t. j. więcej wlewo), niż w grupie (2). — Jeżeli zaś się okaże, że w przedziale a, b równanie $f^{(i-1)}(x) = 0$ posiada dwa pierwiastki pojedyncze, wtenczas, oznaczając przez c jakąkolwiek liczbę, zawartą między tymi dwoma pierwiastkami, podzielimy przedział a, b na dwa: a, c i c, b . W każdym z tych ostatnich przedziałów będzie po jednym pierwiastku równania $f^{(i-1)}(x) = 0$ i, jeżeli dla każdego z tych przedziałów ułożymy odpowiedni szereg wskaźników, to wskaźnik funkcji $f^{(i-1)}(x)$ tak dla przedziału a, c , jak i dla przedziału c, b będzie się równać jedności. W taki więc sposób będziemy tu mogli przesunąć pierwszy ze wskaźników, równych jedności, więcej wlewo, t. j. bliżej początku.

Przechodząc do drugiego przypuszczenia względem wskaźnika e_{i+1} , mianowicie, przyjmując, że albo $e_{i+1} = 1$, albo $e_{i+1} = 2$, spostrzegamy, że wtedy

funkcja $f^{(i+1)}(x)$ między a i b ma albo jeden pierwiastek albo dwa. Oznaczmy przez α pierwiastek funkcji $f^{(i)}(x)$, zawarty w przedziale a, b , a przez β pierwiastek funkcji $f^{(i+1)}(x)$, zawarty w tymże przedziale. Jeżeli zaś ta ostatnia funkcja między a i b będzie miała dwa pierwiastki, to przez β będziemy rozumieć ten pierwiastek, który jest bliższy pierwiastka α . Przypuśćmy, że przedział a, b podzieliliśmy na kilka innych tak, iż różnica krańców każdego z nich, co do swjej wartości bezwzględnej, nie przewyższa war. bezw. $(\beta - \alpha)$, i weźmy pod uwagę jeden z tych przedziałów, np. l, k ; to, co o nim powiemy, stosować się będzie do wszystkich pozostałych. Pośród wskaźników, odnoszących do przedziału l, k ,

$$(3) \quad e', e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_r,$$

wskaźnik e'_{i-1} będzie się równał jednej z liczb: 0, 1, 2, gdyż $2 = e_{i-1} \geq e'_{i-1}$. — Jeżeli $e'_{i-1} = 0$, to w grupie funkcji Fourier'go, jako ostatnią funkcją, możemy przyjąć $f^{(i-1)}(x)$, i pierwszy ze wskaźników, równych jednośc, będzie przesunięty więcej wlewo, niż wskaźnik e_i w grupie (2). — Jeżeli zaś $e'_{i-1} = 1$, to wówczas pierwszy ze wskaźników, równych jednośc, w grupie (3), oczywiście, będzie się znajdował bliżej początku, niż wskaźnik e_i w grupie (2). — Jeżeli, наконец, $e'_{i-1} = 2$, to $e_i = 1$, a $e_{i+1} = 0$, gdyż, jeżeli $e'_{i+1} > 0$, to każde z równań $f^{(i)}(x) = 0$, $f^{(i+1)}(x) = 0$ miałyby po jednym pierwiastku w przedziale l, k , co przeczyłoby nierówności

$$\text{wart. bezw. } (l - k) < \text{wart. bezw. } (\beta - \alpha).$$

Ten przypadek zbadaliśmy już wyżej.

Ze wszystkiego, cośmy wyżej powiedzieli, widoczna, że tak przy $e_{i+1} = 0$, jak przy $e_{i+1} > 0$, zapomocą dzielenia przedziału a, b możemy pierwszy ze wskaźników, równych jednośc, przesunąć więcej wlewo.

Ażeby nierówności $\text{wart. bezw. } (l - k) < \text{wart. bezw. } (\beta - \alpha)$ można było zadość uczynić, należy mieć kraniec niższy wartości bezwzględnej różnicy $\beta - \alpha$, i im ścisłejszy, tymlepiej. Kraniec ów da nam także pojęcie o tym, o ile, conajwięcej, wypadnie zmniejszyć przedział dany, ażeby osiągnąć pożądane przesunięcie wlewo pierwszego ze wskaźników, równych jednośc.

Przesuwając wciąż, według wyżej opisanego sposobu, pierwszy ze wskaźników, równych jednośc, coraz więcej wlewo, osiągniemy to, że, zamiast pierwotnego przedziału a, b , będziemy mieli pewną ilość nowych przedziałów, a dla każdego z nich wskaźnik funkcji $f(x)$ będzie się równał zeru lub jednośc; wówczas wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$, zawarte w przedziale a, b , będą oddzielone.

110. PRZYKŁAD 1. Weźmy równanie

$$f = 5x^5 - 7x^4 - 9x^3 + 16x^2 - 11x + 51 = 0.$$

Obliczając wartości funkcji pochodnych przy różnych wartościach zmiennej x , otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^V
2	+	+	+	+	+	+
1	+	-	-	+	+	+
0	+	-	+	-	-	+
-1	+	-	-	+	-	+
-2	-	+	-	+	-	+

Stąd widzimy, że wszystkie pierwiastki rzeczywiste równania danego zawierają się między -2 i $+2$, gdyż przy $x=2$ otrzymujemy same tylko powtórzenia znaku, a przy $x=-2$ same tylko zmiany znaku.

Równanie $f=0$ posiada jeden tylko pierwiastek ujemny, zawarty między -1 i -2 ; dla przedziału bowiem $-1, 0$ wskaźnik $e=0$, a dla przedziału $-1, -2$ wskaźnik $e=1$.

Dla przedziału $0, +1$ znajdujemy następującą grupę wskaźników:

$$2, 2, 1, 1, 1, 0.$$

Ponieważ tu po pierwszym wskaźniku, równym jedności, $e_2=1$, następuję wskaźnik $e_3=1$, zatem należy rozdzielić przedział $0, +1$ na kilka mniejszych. Obliczywszy wartości funkcji Fourier'go dla $x=\frac{1}{2}$, i przepisawszy dwa wiersze z tablicy poprzedzającej, otrzymamy nową tablicę znaków:

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^V
1	+	-	-	+	+	+
$\frac{1}{2}$	+	-	-	-	+	+
0	+	-	+	-	-	+

Wskaźnik funkcji $f(x)$ dla przedziału $\frac{1}{2}, 1$ równa się zeru; równanie więc nie ma pierwiastka między $\frac{1}{2}$ i 1 .

Dla przedziału $0, \frac{1}{2}$ otrzymujemy następującą grupę wskaźników:

$$2, 2, 1, 0, 1, 0,$$

w której po pierwszym wskaźniku, równym jedności, $e_2=1$, następuje wskaźnik $e_3=0$. Wskutek tego, obliczamy sumę

$$\text{wart. bezw. } \frac{f'(0)}{f''(0)} + \text{wart. bezw. } \frac{f'(\frac{1}{2})}{f''(\frac{1}{2})} = \frac{11}{32} + \frac{59}{36}.$$

Jest ona większa od $\frac{1}{2}$. Na mocy tego, twierdzimy, że funkcja $f'(x)$ wcale nie ma pierwiastków między 0 i $\frac{1}{2}$. Przyjmując funkcję pochodną $f'(x)$ jako ostatnią w grupie funkcji Fourier'go i tworząc grupę wskaźników, znajdziemy,

że wskaźnik funkcji $f(x)$ równa się zero. A więc równanie $f=0$ wcale nie ma pierwiastka między 0 i $\frac{1}{2}$.

Pozostaje nam zbadać przedział między $+1$ i $+2$. Dla niego z tablicy pierwszej otrzymujemy taką grupę wskaźników:

$$2, 1, 1, 0, 0, 0.$$

Należy przeto przedział $+1, +2$ rozdzielić na przedziały mniejsze.

Kładąc $x = \frac{3}{2}$ i obliczając wartości funkcji Fourier'go, otrzymamy też same znaki, co przy $x = 2$, tak iż musimy jeszcze dzielić przedział $1, \frac{3}{2}$ na przedziały mniejsze.

Kładąc $x = \frac{5}{4}$ i obliczając wartości funkcji Fourier'go, otrzymamy następującą tablicę znaków:

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^V
$\frac{3}{2}$	+	+	+	+	+	+
$\frac{5}{4}$	+	-	+	+	+	+
1	+	-	-	+	+	+

Dla przedziału $1, \frac{5}{4}$ wskaźnik funkcji f równa się zero; a zatem, równanie $f=0$ nie posiada pierwiastka między 1 i $\frac{5}{4}$.

Dla przedziału $\frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ otrzymujemy grupę wskaźników:

$$2, 1, 0, 0, 0, 0;$$

a gdy

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1365}{32}, \quad f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{133}{16},$$

przeto

$$\text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{f'\left(\frac{3}{2}\right)} + \text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{5}{4}\right)}{f'\left(\frac{5}{4}\right)} > \frac{1}{4}.$$

To wskazuje, że równanie $f=0$ nie ma pierwiastka między $\frac{3}{2}$ i $\frac{5}{4}$.

Widzimy zatem, że, z wyjątkiem jednego pierwiastka ujemnego, zawartego między -1 i -2 , równanie dane nie posiada innych pierwiastków rzeczywistych.

111. PRZYKŁAD 2. Weźmy równanie

$$f = 2x^6 + 6x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 30x^2 - 14x + 7 = 0.$$

Z ułożonej dla tego równania tablicy

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^V	f^{VI}
1	+	+	+	+	+	+	+
0	+	-	+	-	-	+	+
-1	+	-	+	+	-	-	+
-2	+	-	+	-	+	-	+

widzimy, że wszystkie jego pierwiastki rzeczywiste, jeżeli one istnieją, zawierają się między -2 i $+1$.

Dla przedziału $0, +1$ otrzymujemy następującą grupę wskaźników:

$$4, 3, 2, 1, 1, 0, 0.$$

Po wskaźniku $e_3 = 1$ następuje wskaźnik $e_4 = 1$; przedział więc $0, 1$ należy rozdzielić na dwa mniejsze.

Obliczywszy wartości funkcji Fourier'go dla $x = \frac{1}{2}$, otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^V	f^{VI}
1	+	+	+	+	+	+	+
$\frac{1}{2}$	+	+	+	-	+	+	+
0	+	-	+	+	-	-	+

Dla przedziału $0, \frac{1}{2}$ mamy grupę wskaźników:

$$2, 1, 0, 1, 1, 1, 0,$$

która wskazuje, że należy obliczyć sumę

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{f'(0)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(\frac{1}{2})}{f'(\frac{1}{2})}.$$

Pierwszy jój wyraz równa się $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$; a zatem, suma obu wyrazów jest większa od $\frac{1}{2}$. Równanie więc dane w przedziale $0, \frac{1}{2}$ nie ma pierwiastka.

Dla przedziału $\frac{1}{2}, 1$ otrzymujemy grupę wskaźników:

$$2, 2, 2, 1, 0, 0, 0,$$

według której obliczamy sumę

$$\text{wart. bezw. } \frac{f''(\frac{1}{2})}{f'''(\frac{1}{2})} + \text{wart. bezw. } \frac{f''(1)}{f'''(1)} = \frac{1}{16} + \frac{1}{6}.$$

Suma ta jest mniejsza od $\frac{1}{2}$; a więc nie możemy stąd nic wnieść o ilości pierwiastków, zawartych między $\frac{1}{2}$ i 1.

Zanim przystąpimy do dzielenia przedziału $\frac{1}{2}$, 1 na mniejsze, postawimy pytanie: czy równanie $f''(0)$ nie posiada pierwiastka dwukrotnego między $\frac{1}{2}$ i 1? Największy wspólny dzielnik funkcji f'' i f''' jest $x^2 + x - 1$, i

$$f''' = (x^2 + x - 1)^2.$$

Stąd widzimy, że pochodna druga posiada istotnie jeden pierwiastek dwukrotny w przedziale $\frac{1}{2}$, 1 i, prócz tego, jest wciąż dodatna przy wszelkich wartościach zmiennej x . Przyjmując funkcję f'' jako ostatnią w grupie funkcji Fourier'go, spostrzeżemy z tablicy ostatniej, że wskaźnik funkcji f dla przedziału $\frac{1}{2}$, 1 równa się zero; równanie więc $f=0$ wcale nie ma pierwiastka między $\frac{1}{2}$ i 1.

Z pierwszej tablicy widzimy jeszcze, że wskaźnik funkcji f dla przedziału 0, — 2 równa się zero; równanie przeto $f=0$ nie ma pierwiastków ujemnych.

A zatem, wszystkie pierwiastki równania danego są zespolone.

§ VI. . NIEKTÓRE UWAGI NAD TWIERDZENIEM BUDAN'A. ODDZIELANIE PIERWIASTKÓW RÓWNAŃ NIEZUPEŁNEGO.

112. Twierdzenie Budan'a jest bezpośrednim wynikiem pewnych własności, właściwych funkcjom grupy

$$(1) \quad f, f', f'', \dots, f^{(r)}.$$

Tych własności jest trzy, a mianowicie:

a. Ostatnia z funkcji (1), t. j. funkcja $f^{(r)}$, nie zmienia swego znaku od $x=a$ do $x=b$.

b. Przy przejściu zmiennej x przez pierwiastek którejkolwiek z funkcji (1), np. przez pierwiastek funkcji $f^{(i)}$, od wartości mniejszych do większych, stosunek

$$\frac{f^{(i)}}{f^{(i+1)}}$$

zmienia swój znak, przechodząc od wartości ujemnych do dodatnych. Stosuje się to tylko do tych pierwiastków, które zawierają się między a i b .

c. Jeżeli liczba c , zawarta między a i b , przywodzi do zera początkowych i funkcji grupy (1),

$$f(c) = f'(c) = \dots = f^{(i-1)}(c) = 0,$$

ale $f^{(i)}(c)$ jest od zera różne, to liczba c jest i -krotnym pierwiastkiem równania

$f = 0$; jeżeli zaś liczba c przywodzi do zera wszystkie funkcje (1), to c liczy się jako tylko r -krotny pierwiastek równania $f = 0$.

Grupa funkcj

$$(2) \quad f, f_1, f_2, \dots, f_r,$$

z których każda może nie być pochodną poprzedzającej, może zastąpić szereg (1), jeżeli tylko funkcje (2) posiadają powyższe trzy własności.

Przypuśćmy np., że jedna z funkcj pochodnych w grupie (1) może być przedstawiona jako iloczyn dwu funkcj całkowitych,

$$f^{(i)} = \varphi \varphi_1,$$

i że czynnik φ jest wciąż dodatny dla wartości zmiennej x od $x = a$ do $x = b$; wówczas grupę (1) można zastąpić przez następującą:

$$(3) \quad f, f', \dots, f^{(i-1)}, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(m)},$$

gdzie pochodna $\varphi^{(m)}$ nie powinna zmieniać swego znaku między a i b . Również, jeżeli jedna z funkcj φ, φ', \dots w grupie (3), np. $\varphi^{(k)}$, jest iloczynem dwu funkcj całkowitych,

$$\varphi^{(k)} = \psi \psi_1,$$

a czynnik ψ_1 jest wciąż dodatny między a i b , to zamiast grupy (3) można rozważać grupę

$$(4) \quad f, f', \dots, f^{(i-1)}, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(k-1)}, \psi, \psi', \dots, \psi^{(l)},$$

gdzie pochodna $\psi^{(l)}$ nie powinna zmieniać swego znaku od $x = a$ do $x = b$.

113. Sposób Fourier'go oddzielania pierwiastków nie może być stosowany do grupy (2), dlatego, że twierdzenie Fourier'go (art. 70) może nie mieć miejsca dla funkcj (2).

Założymy, że w wyrażeniu pierwszej pochodnej f' brak wyrazu stałego, i wyprowadzimy pewne twierdzenie, które w tym przypadku zastąpi w zastosowaniu twierdzenie Fourier'go.

Wówczas funkcja f' może być przedstawiona jako iloczyn

$$f' = x^m \varphi,$$

gdzie m jest pewną liczbą całkowitą, dodatnią, a φ funkcją całkowitą, która nie staje się równą zero przy $x = 0$.

Mając na względzie warunek, ażeby twierdzenie Budan'a pozostawało w swój mocy, zauważymy, że:

jeżeli wykładnik m jest parzysty, to, jakimikolwiek są krańce a i b przedziału rozważanego, zamiast grupy (1) można wziąć grupę

$$f, \varphi, \varphi', \dots;$$

jeżeli zaś wykładnik m jest nieparzysty, to można to zrobić tylko wtedy, kiedy tak $a > 0$, jak i $b > 0$;

jeżeli, наконец, wykładnik m jest nieparzysty, $a < 0$ i $b < 0$, to zamiast grupy (1) możemy wziąć grupę

$$f, -\varphi, -\varphi', \dots$$

114. Twierdzenie pomocnicze. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją całkowitą, a m liczbą całkowitą, dodatnią, i jeżeli funkcja pochodna $f'(x)$ jest podzielna przez x^m , to, oznaczwszy przez $\varphi(x)$ funkcję całkowitą

$$\frac{f'(x)}{x^m} = \varphi(x)$$

i przypuściwszy, że dwie liczby dowolnie wzięte, a i $a+h$, są jednakowego znaku, mieć będziemy równość:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{(a+h)^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \varphi(a) + \frac{(a+h)^{m+1} [(m+1)h - a] + a^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \varphi'(a+\theta h),$$

w której θ oznacza pewną liczbę dodatnią, mniejszą od jedności. Jedna z liczb: a , $a+h$ może być zerem.

Ażeby tego dowieść, nazwijmy uprzednio

$$\frac{(m+1)[f(a+h) - f(a)] - [(a+h)^{m+1} - a^{m+1}] \varphi(a)}{(a+h)^{m+1} [(m+1)h - a] + a^{m+2}} = \frac{A}{m+2}.$$

Zauważmy tu, że A nie może się stawać nieskończenie wielkim. Istotnie, jeżeliby

$$(a+h)^{m+1} [(m+1)h - a] + a^{m+2} = 0,$$

to równanie

$$(a+x)^{m+1} [(m+1)x - a] + a^{m+2} = 0$$

miałoby dwa pierwiastki: $x=0$, $x=h$; a więc, równanie pochodne

$$(m+1)(m+2)x(a+x)^m = 0$$

miałoby jeden pierwiastek, $x = \lambda h$, zawarty między 0 i h , i mielibyśmy

$$a + \lambda h = 0.$$

Stąd zaś, zważywszy, że λ oznacza liczbę dodatnią, mniejszą od jedności, otrzymujemy

$$\frac{a+h}{a} = 1 - \frac{1}{\lambda} < 0,$$

co się sprzeciwia założeniu, że a i $a+h$ są jednakowego znaku.

Weźmy pod uwagę funkcję całkowitą

$$f(a+x) - f(a) - \frac{(a+x)^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \varphi(a) - \frac{A}{(m+1)(m+2)} \left[(a+x)^{m+1} [(m+1)x - a] + a^{m+2} \right].$$

Posiada ona dwa pierwiastki: $x=0$, $x=h$; funkcja więc pochodna

$$f'(a+x) - (a+x)^m \varphi(a) - Ax(a+x)^m,$$

czyli funkcja

$$(a+x)^m [\varphi(a+x) - \varphi(a) - Ax],$$

posiada jeden pierwiastek, $x=\lambda h$, zawarty między 0 i h . A gdy $a+\lambda h$ nie może równać się zeru, przeto

$$\varphi(a+\lambda h) - \varphi(a) - A\lambda h = 0.$$

Stąd zaś wyprowadzamy

$$A = \frac{\varphi(a+\lambda h) - \varphi(a)}{\lambda h},$$

czyli

$$A = \varphi'(a+\theta h),$$

gdzie θ oznacza pewną liczbę dodatnią, mniejszą od jedności. Wstawiając tu zamiast litery A to, co ona wyraża, otrzymamy żadaną równość.

115. TWIERDZENIE. *Mając funkcję całkowitą $f(x)$, której pochodna $f'(x)$ jest podzielna przez x^m , przy m całkowitym i dodatnim, oznaczmy*

$$\frac{f'(x)}{x^m} = \varphi(x).$$

Jeżeli a i $b > a$ są liczbami jednakowego znaku, a funkcja pochodna $f'(x)$ nie zmienia swego znaku od $x=a$ do $x=b$, i jeżeli, prócz tego, równanie początkowe $f(x)=0$ posiada między a i b dwa pierwiastki różne, albo jeden pierwiastek wielokrotności parzystej, to wówczas ma miejsce nierówność:

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(a)}{\varphi(a)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(b)}{\varphi(b)} < \text{wart. bezw. } \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

Ażeby tego dowieść, weźmy pod uwagę równość, dowiedzioną w art. poprzedzającym,

$$f(a+h) = f(a) + \frac{(a+h)^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \varphi(a) + \frac{(a+h)^{m+1} [(m+1)h - a] + a^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \varphi'(a+\theta h),$$

i zauważmy, że dwumian

$$(a+h)^{m+1} [(m+1)h - a] + a^{m+2},$$

rozważany, jako funkcja całkowita zmiennej h , ma taką pochodną:

$$(m+1)(m+2)h(a+h)^m.$$

Wskutek tego, gdy przez λ oznaczymy pewną liczbę dodatnią, mniejszą od jednośc, możemy, posilkując się wzorem Lagrange'a, napisać

$$(a + h)^{m+1} [(m + 1)h - a] + a^{m+2} = (m + 1)(m + 2)\lambda h^2(a + \lambda h)^m.$$

Z tego wynika, że równość poprzedzającą możemy tak przedstawić:

$$(1) \quad f(a + h) = f(a) + \frac{(a + h)^{m+1} - a^{m+1}}{m + 1} \varphi(a) + \lambda h^2(a + \lambda h)^m \varphi'(a + \theta h).$$

Oznaczywszy przez α i $\beta \geq a$ dwa pierwiastki równania $f(x) = 0$, zawierające się między a i b , podstawmy we wzorze (1) zamiast h różnicę $\alpha - a$; otrzymamy

$$0 = f(a) + \frac{\alpha^{m+1} - a^{m+1}}{m + 1} \varphi(a) + \lambda(\alpha - a)^2(a + \lambda(\alpha - a))^m \varphi'(a + \theta(\alpha - a)).$$

Podstawiając następnie w (1) b zamiast a i kładąc $h = \beta - b$, otrzymamy

$$0 = f(b) + \frac{\beta^{m+1} - b^{m+1}}{m + 1} \varphi(b) + \lambda'(\beta - b)^2(b + \lambda'(\beta - b))^m \varphi'(b + \theta'(\beta - b)).$$

Dwa równania ostatnie możemy napisać tak:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha^{m+1} - a^{m+1}}{m + 1} &= -\frac{f(a)}{\varphi(a)} - \lambda(\alpha - a)^2(a + \lambda(\alpha - a))^m \frac{\varphi'(a + \theta(\alpha - a))}{\varphi(a)}, \\ \frac{b^{m+1} - \beta^{m+1}}{m + 1} &= \frac{f(b)}{\varphi(b)} + \lambda'(\beta - b)^2(b + \lambda'(\beta - b))^m \frac{\varphi'(b + \theta'(\beta - b))}{\varphi(b)} \end{aligned} \right.$$

gdzie $\lambda, \lambda', \theta, \theta'$ oznaczają pewne liczby dodatne, mniejsze od jednośc.

W tych równaniach wyrazy drugie na stronie prawej nie mogą równać się zeru. Jeżeli bowiem przypuścimy, że

$$\varphi'(a + \theta(\alpha - a)) = 0,$$

to mielibyśmy

$$f(a) + \frac{\alpha^{m+1} - a^{m+1}}{m + 1} \varphi(a) = 0,$$

a równanie

$$f(x) - f(a) - \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m + 1} \varphi(a) = 0$$

miałoby wówczas dwa pierwiastki: $x = a$, $x = \alpha$; a zatem, równanie pochodne

$$f'(x) - x^m \varphi(a) = 0,$$

czyli równanie

$$\varphi(x) - \varphi(a) = 0$$

miałoby jeden pierwiastek między a i b . A gdy ono posiada pierwiastek $x = a$, to równanie pochodne

$$\varphi'(x) = 0$$

miałoby między a i b jeden pierwiastek wielokrotnośc nieparzystej, co być nie może, gdyż funkcja $\varphi'(x)$, według założenia, nie zmienia swego znaku od $x = a$ do $x = b$. Taksamo możemy się przekonać, że wartośc $\varphi'(b + \theta'(\beta - b))$ jest różna od zera.

Zgodnie z założeniami twierdzenia, w każdym z równań (2) dwa wyrazy na stronie prawej są jednakowego znaku. Dlatego mamy:

$$\text{wart. bezw. } \frac{\alpha^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} > \text{wart. bezw. } \frac{f(a)}{\varphi(a)},$$

$$\text{wart. bezw. } \frac{b^{m+1} - \beta^{m+1}}{m+1} > \text{wart. bezw. } \frac{f(b)}{\varphi(b)}.$$

Stąd zaś, dodając i zważając, że suma

$$\text{wart. bezw. } \frac{\alpha^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} + \text{wart. bezw. } \frac{b^{m+1} - \beta^{m+1}}{m+1}$$

nie jest większa od wartości bezwzględnej ułamka

$$\frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

otrzymamy

$$\text{wart. bezw. } \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} > \text{wart. bezw. } \frac{f(a)}{\varphi(a)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(b)}{\varphi(b)},$$

c. n. d.

116. PRZYKŁAD 1. Oddzielmy od siebie pierwiastki równania

$$1484x^5 - 441x^4 - 18x^3 + 1161x^2 - 243 = 0.$$

Kładąc

$$f(x) = 1484x^5 - 441x^4 - 18x^3 + 1161x^2 - 243,$$

$$\varphi(x) = 2(3710x^3 - 882x^2 - 27x + 1161),$$

otrzymamy następującą tablicę znaków:

x	f	φ	φ'	φ''	φ'''
1	+	+	+	+	+
0,1	-	+	-	+	+
0	-	+	-	-	+

Z niej widoczna, że jeżeli dane równanie ma pierwiastki dodatne, to wszystkie one zawierają się między 1 i 0,1.

Dla tego przedziału mamy grupę wskaźników:

$$3, 2, 1, 0, 0.$$

Należy się tylko dowiedzieć, czy równanie $\varphi(x) = 0$ posiada pierwiastki między 1 i 0,1. W tym celu, obliczamy

$$\text{wart. bezw. } \frac{\varphi(0,1)}{\varphi'(0,1)} = \frac{1153,19}{92,1}.$$

Ponieważ ta wartość jest większa od 1, przeto

$$\text{wart. bezw. } \frac{\varphi(0,1)}{\varphi'(0,1)} + \text{wart. bezw. } \frac{\varphi(1)}{\varphi'(1)} > 1 - 0,1.$$

A zatem, równanie $\varphi(x) = 0$ między 0,1 i 1 nie ma pierwiastka.

Ograniczając się tylko do dwu funkcji,

$$f(x), \quad \varphi(x),$$

otrzymujemy dla przedziału 0,1, 1 następującą grupę wskaźników:

$$1, \quad 0;$$

skąd wnosimy, że równanie $f(x) = 0$ ma tylko jeden pierwiastek dodatni, pojedynczy. —

Ażby oddzielić pierwiastki ujemne równania $f(x) = 0$, wyznaczamy znaki funkcji

$$f(x), \quad -\varphi(x), \quad -\varphi'(x), \quad -\varphi''(x), \quad -\varphi'''(x)$$

dla $x = 0, -1, -0,5, \dots$ i otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	f	$-\varphi$	$-\varphi'$	$-\varphi''$	$-\varphi'''$
0	—	—	+	+	—
—0,5	—	—	—	+	—
—0,6	+				
—1	—	+	—	+	—

Stąd widoczna, że równanie $f(x) = 0$ ma tylko dwa pierwiastki ujemne: jeden zawarty między $-0,5$ i $-0,6$, drugi zaś między $-0,6$ i -1 .

117. PRZYKŁAD 2. Weźmy równanie

$$4x^5 + 5x^4 - 30x^2 + 23 = 0.$$

Kładąc

$$f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 30x^2 + 23,$$

$$\varphi(x) = 20(x^3 + x^2 - 3),$$

mamy tu

$$\varphi'(x) = 20x(3x + 2).$$

Funkcja $\varphi'(x)$ raz tylko zmienia swój znak, mianowicie przy przejściu zmiennej x przez wartość $-\frac{2}{3}$; możemy przeto ograniczyć się do grupy trzech funkcji: $f(x)$, $\varphi(x)$, i $\varphi'(x)$, stosując kolejno sposób Fourier'go do trzech przedziałów:

$$+\infty, 0; \quad 0, -\frac{2}{3}; \quad \frac{2}{3}, -\infty.$$

Z tablicy

x	f	φ	φ'
$\frac{5}{4}$	+	+	+
1	+	—	+
0	+	—	+

widzimy, że dane równanie albo wcale nie ma pierwiastków dodatnich, albotóż ma ich dwa, a wówczas zawierają się one między 1 i $\frac{5}{4}$. Ponieważ dla przedziału $1, \frac{5}{4}$ mamy grupę wskaźników:

$$2, 1, 0,$$

więc możemy tu stosować twierdzenie art. 115-go. Obliczywszy

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{69}{128}, \quad f(1) = 2,$$

$$\varphi\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{165}{16}, \quad \varphi(1) = -20,$$

mamy

$$\text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{5}{4}\right)}{\varphi\left(\frac{5}{4}\right)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(1)}{\varphi(1)} = \frac{67}{440}.$$

Mamy zaś tu

$$\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1}{2} = \frac{9}{32},$$

a więc

$$\text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{5}{4}\right)}{\varphi\left(\frac{5}{4}\right)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(1)}{\varphi(1)} < \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1}{2}.$$

Widzimy przeto, że należy przedział $1, \frac{5}{4}$ dzielić na przedziały mniejsze.

Dla przedziału $1, \frac{3}{20}$, $1, \frac{2}{10}$ znajdujemy

x	f	φ	φ'
1,2	+	+	+
1,15	+	—	+

$$f(1,15) = 0,11546, \quad \varphi(1,15) = -3,1325$$

$$\frac{(1,2)^2 - (1,15)^2}{2} = 0,05875.$$

$$f(1,2) = 0,12128, \quad \varphi(1,2) = 3,36;$$

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(1,15)}{\varphi(1,15)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(1,2)}{\varphi(1,2)} > 0,05875.$$

A więc, równanie wcale nie ma pierwiastków dodatnich.

Posiada ono jeden tylko pierwiastek ujemny, zawarty między 0 i -1 ; jest to widoczne z następującej tablicy:

x	f	$-\varphi$	$-\varphi'$
0	+	+	+
$-\frac{2}{3}$	+	+	0
-1	-	+	-
$-\infty$	-	+	-

118. PRZYKŁAD 3. Weźmy równanie

$$3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 11 = 0.$$

Kładąc

$$f(x) = 3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 11,$$

$$\varphi(x) = 15x^2 + 28x - 24,$$

utworzymy następującą tablicę:

x	f	φ	φ'	φ''
1	+	+	+	+
0	+	-	+	+
-1	+	-	-	+
-2	+	-	-	+
-3	+	+	-	+
-4	-	+	-	+

Z niej widoczna, że równanie dane ma jeden tylko pierwiastek ujemny, zawarty między -3 i -4 .

Co się zaś tyczy pierwiastków dodatnich, to należy szukać ich tylko w przedziale między 0 i 1, dla którego otrzymujemy taką grupę wskaźników:

$$2, 1, 0, 0.$$

A gdy

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{\varphi(0)} = \frac{11}{24},$$

$$\frac{1^3 - 0^3}{3} = \frac{1}{3},$$

to

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{\varphi(0)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(1)}{\varphi(1)} > \frac{1^3 - 0^3}{3},$$

co wskazuje, że równanie $f(x) = 0$ nie ma pierwiastków dodatnich.

119. PRZYKŁAD 4. Weźmy równanie

$$5x^6 - 37x^5 + 50x^4 - 104 = 0.$$

Kładąc

$$f(x) = 5x^6 - 37x^5 + 50x^4 - 104,$$

$$\varphi(x) = 5(6x^2 - 37x + 40).$$

utworzymy tablicę

x	f	φ	φ'	φ''
6	+	+	+	+
5	-	+	+	+
2	-	-	-	+
$\frac{3}{2}$	-	-	-	+
1	-	+	-	+
0	-	+	-	+

Widzimy z niej, że równanie $f(x) = 0$ w przedziale 5, 6 ma jeden pierwiastek; inne pierwiastki dodatne, jeżeli one istnieją, powinny się zawierać między 1 i $\frac{3}{2}$.

Dla przedziału 1, $\frac{3}{2}$ grupa wskaźników jest następująca:

$$2, 1, 0, 0.$$

Ponieważ

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(1)}{\varphi(1)} = \frac{86}{45},$$

i

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 1^4}{4} = \frac{65}{64},$$

więc

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(1)}{\varphi(1)} + \text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{3}{2}\right)} > \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 1^4}{4}.$$

To wskazuje, że równanie $f(x) = 0$ wcale nie ma pierwiastków między 1 i $\frac{3}{2}$.

Następująca zaś tablica wskazuje, że równanie $f(x) = 0$ ma jeden tylko pierwiastek ujemny

x	f	$-\varphi$	$-\varphi'$	$-\varphi''$
0	-	-	+	-
$-\infty$	+	-	+	-

Ponieważ $f(-1) < 0$, $f(-2) > 0$, przeto pierwiastek ujemny znajduje się między -1 i -2 .

§ VII. TWIERDZENIE SYLVESTER'A.

120. Twierdzenie Sylvester'a, podobnie jak twierdzenie Budan'a, daje kraniec wyższy dla ilości pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych w danym przedziale.

Dowodzenie tego twierdzenia zasadza się na rozumowaniu podobnym do tego, jakim posiłkowaliśmy się przy dowodzeniu twierdzenia Budan'a: potrzeba tylko wziąć pod uwagę, oprócz już wiadomych własności funkcji Fourier'go,

$$f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x),$$

jeszcze odpowiednie im własności funkcji

$$S(x), S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x),$$

określonych w ten sposób:

$$S(x) = f(x)^2,$$

$$S_1(x) = f'(x)^2 - k_1 f(x) f''(x),$$

$$\dots$$

$$S_i(x) = f^{(i)}(x)^2 - k_i f^{(i-1)}(x) f^{(i+1)}(x),$$

$$\dots$$

$$S_n(x) = f^{(n)}(x)^2,$$

gdzie n oznacza stopień danego równania $f(x) = 0$, a k_1, k_2, \dots, k_{n-1} są liczbami stałymi, które określa wzór

$$k_i = \frac{n' - i + 1}{n' - i},$$

gdzie litera n' oznacza dowolnie wziętą liczbę dodatnią $\geq n$. Własności funkcji $S_i(x)$, które niezbędnie potrzeba przyjąć pod uwagę, wyrażają następujące trzy twierdzenia.

121. Twierdzenie pomocnicze 1. *Jeżeli dla $x = a$ mamy*

$$f^{(p)}(a) = f^{(p+1)}(a) = \dots = f^{(p+m-1)}(a) = 0,$$

i obie wartości $f^{(p-1)}(a)$ i $f^{(p+m)}(a)$ są różne od zera, to, przy dostatecznie małych wartościach h , znak wartości $S_p(a+h)$ jest takiż, jak znak iloczynu $-h^{m-1}$ przez $f^{(p-1)}(a) f^{(p+m)}(a)$.

Jakoż, wskutek założenia, mamy równości:

$$f^{(p)}(a+h) = \frac{h^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} f^{(p+m)}(a) + \dots,$$

$$f^{(p-1)}(a+h) = f^{(p-1)}(a) + \dots,$$

$$f^{(p+1)}(a+h) = \frac{h^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} f^{(p+m)}(a) + \dots,$$

kórych strony prawe są uporządkowane według potęg rosnących h . Wprowadzając te wyrażenia do strony prawej wzoru

$$S_p(a+h) = f^{(p)}(a+h)^2 - k_p f^{(p-1)}(a+h) f^{(p+1)}(a+h)$$

i porządkując je następnie według potęg rosnących h , będziemy mieli

$$S_p(a+h) = -k_p \frac{h^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} f^{(p-1)}(a) f^{(p+m)}(a) + \dots$$

Przy dostatecznie małych wartościach h , strona prawa jest tu tegoż samego znaku, co pierwszy jój wyraz, a więc znak wartości $S_p(a+h)$ jest takiż, jak znak iloczynu $-h^{m-1} f^{(p-1)}(a) f^{(p+m)}(a)$, gdyż wszystkie liczby k_1, k_2, \dots, k_{n-1} są dodatne.

122. Twierdzenie pomocnicze 2. *Jeżeli przy $x = a$ jest*

$$f^{(p-1)}(a) = f^{(p)}(a) = \dots = f^{(p+m-1)}(a) = 0,$$

a wartość $f^{(p+m)}(a)$, ($m \geq 1$), nie równa się zeru, to, przy dostatecznie małych wartościach h , każda z grupy wartości

$$S_p(a+h), S_{p+1}(a+h), \dots, S_{p+m-1}(a+h)$$

jest dodatna.

Wskutek bowiem założenia, mamy

$$f^{(p-1)}(a+h) = \frac{h^{m+1}}{1 \cdot 2 \dots (m+1)} f^{(p+m)}(a) + \dots,$$

$$f^{(p)}(a+h) = \frac{h^m}{1 \cdot 2 \dots m} f^{(p+m)}(a) + \dots,$$

$$f^{(p+1)}(a+h) = \frac{h^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} f^{(p+m)}(a) + \dots,$$

gdzie strony prawe są uporządkowane według potęg rosnących h . Wprowadzając te wyrażenia do strony prawej wzoru

$$S_p(a+h) = f^{(p)}(a+h)^2 - k_p f^{(p-1)}(a+h) f^{(p+1)}(a+h),$$

i porządkując je następnie według potęg rosnących h , znajdziemy

$$(1) \quad S_p(a+h) = \frac{(n' - m - p) h^{2m}}{(1 \cdot 2 \dots m)^2 (m+1) (n' - p)} f^{(p+m)}(a)^2 + \dots$$

Stąd widzimy, że, przy dostatecznie małych wartościach h , wartość $S_p(a+h)$ jest dodatna, gdyż $n' \geq n \geq m+p$. To zaś, czegośmy dowiedli o $S_p(a+h)$, oczywiście stosuje także do $S_{p+1}(a+h)$, $S_{p+2}(a+h)$, \dots , aż do $S_{p+m-1}(a+h)$ włącznie. Twierdzenie więc nasze jest udowodnione.

UWAGA. Przypadek szczególny, kiedy $n' = n$ i $m+p = n$, zasługuje na osobne omówienie. Wzór (1) wskazuje, że wówczas wartość $S_p(a+h)$, a tym samym i funkcja $S_p(x)$, są tożsamościowo równe zeru. Również wszystkie funkcje pozostałe: $S_{p+1}(x)$, $S_{p+2}(x)$, \dots , aż do funkcji $S_{n-1}(x)$ włącznie, stają się tożsamościowo równymi zeru. W zastosowaniach unika się zawsze tego przypadku przez powiększenie wartości parametru n' .

123. Twierdzenie pomocnicze 3. Jeżeli przy $x = a$ mamy

$$S_p(a) = S_{p+1}(a) = \dots = S_{p+m-1}(a) = 0,$$

a wartości $S_{p-1}(a)$, $S_{p+m}(a)$ są różne od zera, i jeżeli ani jedna z wartości

$$f^{(p)}(a), f^{(p+1)}(a), \dots, f^{(p+m-1)}(a)$$

nie jest równa zeru, to, przy dostatecznie małych wartościach h i przy wszelkich wartościach i od 0 do $m - 1$ włącznie, wartość

$$S_{p+i}(a+h)$$

jest tegoż samego znaku, co iloczyn

$$h^{m-i} f^{(p+i)}(a) f^{(p+m)}(a) S_{p+m}(a).$$

Weźmy tu pod uwagę grupę funkcji $\varphi_{i,r}$, określonych w ten sposób:

a). jeżeli $i + r \leq n$, to

$$\varphi_{i,r} = f^{(i+1)}(x)^r f^{(i+2)}(x)^{r-1} \dots f^{(i+r)}(x);$$

b). jeżeli $i + r \geq n$, to

$$\varphi_{i,r} = f^{(i+1)}(x)^r f^{(i+2)}(x)^{r-1} \dots f^{(n)}(x)^{i+r+1-n}$$

Oczywiście, mamy

$$\varphi'_{i,r} = \varphi_{i,r-1} \varphi,$$

gdzie φ oznacza pewną funkcją całkowitą. Prócz tego, oznaczmy przez $\psi_{i,r}$ taką funkcją całkowitą:

$$\psi_{i,r} = \frac{\varphi_{i,r}}{f^{(i+r)}(x)} f^{(i)}(x).$$

Pochodna r -go rzędu funkcji $S_i(x)$ wyraża się zapomocą wzoru takiej postaci:

$$(1) \quad \varphi_{i,r} S_i^{(r)}(x) = U_0 S_i(x) + U_1 S_{i+1}(x) + \dots + U_{r-1} S_{i+r-1}(x) + \\ + \frac{\psi_{i,r}}{k_{i+1} k_{i+2} \dots k_{i+r}} S_{i+r}(x),$$

gdzie U_0, U_1, \dots oznaczają pewne funkcje całkowite; przyjmujemy zaś, że $i + r \leq n$. — Dowiedzimy naprzód, że wzór (1) ma miejsce w najprostszym przypadku, kiedy $r = 1$. W tym celu, rozwinąwszy obie strony równania

$$S_i(x+h) = f^{(i)}(x+h)^2 - k_i f^{(i-1)}(x+h) f^{(i+1)}(x+h)$$

na szeregi według potęg rosnących litery h , przyrównajmy do siebie współczynniki pierwszej potęgi h ; otrzymamy

$$S'_i(x) = 2 f^{(i)}(x) f^{(i+1)}(x) - k_i [f^{(i-1)}(x) f^{(i+2)}(x) + f^{(i)}(x) f^{(i+1)}(x)].$$

Stąd zaś, zważając, że

$$2 - k_i = \frac{1}{k_{i+1}},$$

gdzie U_0, U_1, \dots oznaczają pewne funkcje całkowite. Jest to wzór (1), w którego obu stronach zamiast r znajduje się $r+1$. — Ma więc wzór (1) miejsce przy wszelkich wartościach r , pod warunkiem, aby $i+r \leq n$.

Kiedy $i+r > n$, to zamiast wzoru (1) mamy

$$(2) \quad \varphi_{i,r} S_i^{(r)}(x) = U_0 S_i(x) + U_1 S_{i+1}(x) + \dots + U_{n-i} S_n(x).$$

Szczególniej zaś uwagi wymaga przypadek, kiedy $n' = n$, gdyż wówczas $k_n = \infty$, a ze wzoru (1) otrzymujemy

$$\varphi_{i,n-i} S_i^{(n-1)}(x) = U_0 S_i(x) + U_1 S_{i+1}(x) + \dots + U_{n-i-1} S_{n-1}(x).$$

Stąd wnosimy, że przy wszelkich wartościach r , czyniących zadość warunkowi $i+r \geq n$, ma miejsce wzór

$$(3) \quad \varphi_{i,r} S_i^{(r)}(x) = U_0 S_i(x) + U_1 S_{i+1}(x) + \dots + U_{n-i-1} S_{n-1}(x),$$

w którym U_0, U_1, \dots oznaczają pewne funkcje całkowite.

Przechodząc do udowodnienia wypowiedzianego twierdzenia, uprzednio zestawimy wypowiedziane założenia, a mianowicie:

a. wszystkie liczby grupy

$$S_p(a), S_{p+1}(a), \dots, S_{p+m-1}(a)$$

są równe zeru,

b. żadna z liczb $S_{p-1}(a), S_{p+m}(a)$ nie równa się zeru,

c. ani jedna z liczb grupy

$$f^{(p)}(a), f^{(p+1)}(a), \dots, f^{(p+m-1)}(a)$$

nie równa się zeru. Oczywiście, że również żadna z liczb $f^{(p-1)}(a), f^{(p+m)}(a)$ nie może równać się zeru, gdyż, w razie przeciwnym, wartość $S_{p-1}(a)$ albo $S_{p+m}(a)$ równałaby się zeru, co się sprzeciwia założeniu.

Kładąc we wzorze (1) $x = a$, $i = p$, $r = 1, 2, \dots, m$, otrzymamy

$$S'_p(a) = S''_p(a) = \dots = S_p^{(m-1)}(a) = 0,$$

$$S_p^{(m)}(a) = \frac{f^{(p)}(a)}{k_{p+1} k_{p+2} \dots k_{p+m} f^{(p+m)}(a)} S_{p+m}(a).$$

Stąd wnosimy, że w rozwinięciu funkcji $S_p(a+h)$ według wzrastających potęg zmiennej h pierwszym wyrazem jest:

$$S_p(a+h) = \frac{h^m}{1 \cdot 2 \dots m} \frac{f^{(p)}(a)}{k_{p+1} \dots k_{p+m} f^{(p+m)}(a)} S_{p+m}(a) + \dots$$

Możemy w obu stronach tego wzoru, oznaczywszy przez i którąkolwiek z liczb $0, 1, 2, \dots, m-1$, jednocześnie wstawić $p+i$ zamiast p , a $m-i$ zamiast m :

$$S_{p+i}(a+h) = \frac{h^{m-i}}{1 \cdot 2 \dots (m-i)} \frac{f^{(p+i)}(a)}{k_{p+i+1} \dots k_{p+m} f^{(p+m)}(a)} S_{p+m}(a) + \dots;$$

skąd widoczna, że przy dostatecznie małych wartościach h , wartość $S_{p-i}(a+h)$ jest tegoż samego znaku, co iloczyn $h^{m-i} f^{(p+i)}(a) f^{(p+m)}(a) S_{p+m}(a)$, c. n. d.

UWAGA. W przypadku szczególnym, kiedy $n' = n$, $m + p = n$, oczywiście mamy

$$S'_p(a) = S''_p(a) = \dots = S_p^{(m)}(a) = 0.$$

Prócz tego, przy pomocy wzoru (3) przekonywamy się, że dla wartości $r > m$ mamy

$$S_p^{(r)}(a) = 0.$$

A więc, w przypadku owym, funkcja $S_p(x)$ jest tożsamościowo równa zeru. Dla téjże przyczyny, każda z funkcyj następujących: $S_{p+1}(x), \dots, S_{n-1}(x)$ staje się tożsamościowo równą zeru. Ażeby uniknąć tego przypadku dość jest powiększyć nieco parametr n' .

124. Utworzymy dwie grupy funkcyj:

$$\begin{array}{l} f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x); \\ S(x), S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \end{array}$$

jedną ze wszystkich funkcyj Fourier'go, drugą zaś ze wszystkich funkcyj Sylwester'a, i, przypuściwszy, że zmiennej x nadaliśmy jakąkolwiek wartość, nie przywodzącą do zera żadnej z funkcyj $f(x), f'(x), \dots, S(x), S_1(x), \dots$, zwrócimy uwagę na znaki dwu którychkolwiek wyrazów sąsiednich w pierwszej grupie, np. wyrazów $f(x)$ i $f'(x)$, i na znaki dwu odpowiadających im wyrazów $S(x)$ i $S_1(x)$ w drugiej grupie. Mogą tu mieć miejsce następujące cztery przypadki:

a. wyrazy $f(x), f'(x)$ przedstawiają zmianę znaku i wyrazy $S(x), S_1(x)$ również zmianę znaku;

b. wyrazy $f(x), f'(x)$ przedstawiają powtórzenie znaku i wyrazy $S(x), S_1(x)$ również powtórzenie znaku;

c. wyrazy $f(x), f'(x)$ przedstawiają powtórzenie znaku, a wyrazy $S(x), S_1(x)$ zmianę znaku;

d. wyrazy $f(x), f'(x)$ przedstawiają zmianę znaku, a wyrazy $S(x), S_1(x)$ powtórzenie znaku.

Przypadek pierwszy będziemy nazywali podwójnym powtórzeniem znaku; drugi podwójną zmianą znaku; trzeci powtórzeniem ze zmianą znaku; czwarty zmianą z powtórzeniem znaku. Rozważając wyrazy

$$\begin{array}{l} f'(x), f''(x); \\ S_1(x), S_2(x), \end{array}$$

następnie wyrazy

$$\begin{array}{l} f''(x), f'''(x); \\ S_2(x), S_3(x) \end{array}$$

i tak dalej, nakoniec wyrazy

$$\begin{array}{l} f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x); \\ S_{n-1}(x), S_n(x), \end{array}$$

za każdym razem będziemy mieli do zauważenia jeden z powyższych czterech przypadków i porachujemy, ile razy każdy z nich się powtórzy.

TWIERDZENIE. *Mając dane równanie stopnia n -tego, $f(x) = 0$, i kładąc*

$$S(x) = f(x)^2;$$

$$S_i(x) = f^{(i)}(x)^2 - k_i f^{(i-1)}(x) f^{(i+1)}(x),$$

$$k_i = \frac{n' - i + 1}{n' - i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$S_n(x) = f^{(n)}(x)^2,$$

gdzie n' oznacza liczbę dowolną, nie mniejszą od n , ułożymy dwie grupy funkcji:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x); \\ S(x), S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \end{array} \right.$$

i za pomocą $(PP)_x$, $(VP)_x$ przedstawimy ilość podwójnych powtórzeń znaku i ilość zmian z powtórzeniem znaku w (1). Jeżeli a i $b > a$ są dwiema dowolnie wziętymi liczbami, nie przywodzącymi do zera żadnej z funkcji w grupach (1), to, oznaczając przez r ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b , będziemy mieli

$$(PP)_b - (PP)_a = r + 2h,$$

$$(VP)_a - (VP)_b = r + 2l,$$

gdzie każda z liter h, l oznacza liczbę całkowitą i dodatnią, albo zero.

Dowodzenie tego twierdzenia sprowadza się do prostego sprawdzenia go za pomocą twierdzeń pomocniczych, wyłożonych w trzech artykułach poprzedzających, i podobnie, jak przy dowodzeniu twierdzenia Budan'a, dość jest ograniczyć się do przypuszczenia, że między krańcami a i b istnieje jedna tylko liczba c , przywodząca do zera przynajmniej jedną z funkcji w grupach (1).

Można, co do téj liczby c , uczynić kilka przypuszczeń, które wypada oddzielnie zbadać.

Przypuśćmy, że przy $x = c$ mamy

$$S_p(c) = S_{p+1}(c) = \dots = S_{p+m-1}(c) = 0, \quad (p > 0),$$

i że żadna inna z funkcji (1) nie staje się zerem. W tym przypadku grupa

$$f^{(p-1)}(c), f^{(p)}(c), \dots, f^{(p+m-1)}(c), f^{(p+m)}(c)$$

zawiera albo same tylko powtórzenia znaku, albo same tylko zmiany znaku.

Oznaczając przez h liczbę dodatnią nieskończenie małą, zauważymy, że znaki funkcji (1) przy $x = a$ są też same, co przy $x = c - h$, a przy $x = b$ też same, co przy $x = c + h$; według założenia bowiem, żadnej z funkcji (1) nie przywodzi do zera wartość zmiennej x , zawarta między a i b , a różna od liczby c . A więc, zamiast wyznaczać znaki funkcji (1) przy $x = a$ i przy $x = b$, możemy je wyznaczać przy $x = c - h$ i przy $x = c + h$.

Oprócz tego, zamiast dwu grup (1) możemy wziąć następujące:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} f^{(p-1)}(x), f^{(p)}(x), \dots, f^{(p+m-1)}(x), f^{(p+m)}(x); \\ S_{p-1}(x), S_p(x), \dots, S_{p+m-1}(x), S_{p+m}(x); \end{array} \right.$$

gdyż każdy z wyrazów opuszczonych jest tegoż samego znaku dla $x = a$, co dla $x = b$, i dlatego nie ma wpływu na wartości różnic $(PP)_b - (PP)_a$ lub $(VP)_a - (VP)_b$. Na zasadzie twierdzenia art. 123-go i na mocy przypuszczenia, że żadna z wartości $f^{(p-1)}(c), f^{(p)}(c), \dots, f^{(p+m-1)}(c), f^{(p+m)}(c)$ nie jest równa zeru, wnosimy, że przy $x = c - h$ znaki funkcyj (2) wyznaczają odpowiednio znaki wartości następujących:

$$f^{(p-1)}(c), \dots, f^{(p+h)}(c), \dots, f^{(p+m)}(c);$$

$$S_{p-1}(c), \dots, (-1)^{m-i} f^{(p+h)}(c) f^{(p+m)}(c) S_{p+m}(c), \dots, S_{p+m}(c).$$

Ponieważ skutek pomnożenia wszystkich wyrazów pierwszej albo drugiej grupy przez jakąkolwiek liczbę, nie zmieni się ani $(PP)_x$ ani $(VP)_x$, przeto zamiast dwu ostatnich grup możemy wziąć takie:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} f^{(p-1)}(c), \dots, f^{(p+h)}(c), \dots, f^{(p+m)}(c); \\ f^{(p+m)}(c) S_{p-1}(c) S_{p+m}(c), \dots, (-1)^{m-i} f^{(p+h)}(c), \dots, f^{(p+m)}(c). \end{array} \right.$$

Taksamo dojdziemy do tego, że przy $x = c + h$ grupy (2) mogą być zastąpione przez następujące:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} f^{(p-1)}(c), \dots, f^{(p+h)}(c), \dots, f^{(p+m)}(c); \\ f^{(p+m)}(c) S_{p-1}(c) S_{p+m}(c), \dots, f^{(p+h)}(c), \dots, f^{(p+m)}(c). \end{array} \right.$$

Ażeby z tych grup (3) i (4) wyznaczyć $(PP)_{c-h}$, $(PP)_{c+h}$, $(VP)_{c-h}$, $(VP)_{c+h}$, a następnie sprawdzić twierdzenie w zrobionym tu przypuszczeniu co do liczby c , najdogodniej jest oddzielnie zbadać różne przypadki, jakie zachodzić mogą w grupach (3) i (4), a mianowicie:

a. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c), f^{(p)}(c), \dots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same powtórzenia znaku, liczba m jest parzysta, a iloczyn $S_{p-1}(c) S_{p+m}(c) > 0$. W tym przypadku znajdujemy: z (3)

$$(VP)_{c-h} = 0, \quad (PP)_{c-h} = 1,$$

a z (4)

$$(VP)_{c+h} = 0, \quad (PP)_{c+h} = m + 1.$$

Jest więc

$$(VP)_{c-h} - (VP)_{c+h} = 0,$$

$$(PP)_{c+h} - (PP)_{c-h} = m,$$

co, według twierdzenia, miejsce mieć powinno.

b. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c), f^{(p)}(c), \dots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same powtórzenia znaku, liczba m jest parzysta, a iloczyn $S_{p-1}(c) S_{p+m}(c) < 0$. Wówczas mamy:

$$(VP)_{c-h} = 0, \quad (PP)_{c-h} = 0,$$

$$(VP)_{c+h} = 0, \quad (PP)_{c+h} = m;$$

a więc

$$(VP)_{c-h} - (VP)_{c+h} = 0,$$

$$(PP)_{c+h} - (PP)_{c-h} = m,$$

jak być powinno.

c. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c), f^{(p)}(c), \dots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same powtórzenia znaku, liczba m jest nieparzysta, a iloczyn $S_{p-1}(c) S_{p+m}(c) > 0$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} (\text{VP})_{c-h} &= 0, & (\text{PP})_{c-h} &= 0, \\ (\text{VP})_{c+h} &= 0, & (\text{PP})_{c+h} &= m+1; \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned} (\text{VP})_{c-h} - (\text{VP})_{c+h} &= 0, \\ (\text{PP})_{c+h} - (\text{PP})_{c-h} &= m+1, \end{aligned}$$

jak być powinno.

d. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c), f^{(p)}(c), \dots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same powtórzenia znaku, liczba m jest nieparzysta, a iloczyn $S_{p-1}(c) S_{p+m}(c) < 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} (\text{VP})_{c-h} &= 0, & (\text{PP})_{c-h} &= 1, \\ (\text{VP})_{c+h} &= 0, & (\text{PP})_{c+h} &= m; \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned} (\text{VP})_{c-h} - (\text{VP})_{c+h} &= 0, \\ (\text{PP})_{c+h} - (\text{PP})_{c-h} &= m-1, \end{aligned}$$

jak być powinno.

e. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c), f^{(p)}(c), \dots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same zmiany znaku, liczba m jest parzysta a iloczyn $S_{p-1}(c) S_{p+m}(c) > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} (\text{VP})_{c-h} &= m+1, & (\text{PP})_{c-h} &= 0, \\ (\text{VP})_{c+h} &= 1, & (\text{PP})_{c+h} &= 0; \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned} (\text{VP})_{c-h} - (\text{VP})_{c+h} &= m, \\ (\text{PP})_{c+h} - (\text{PP})_{c-h} &= 0, \end{aligned}$$

jak być powinno.

f. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c), f^{(p)}(c), \dots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same zmiany znaku, liczba m jest parzysta, a iloczyn $S_{p-1}(c) S_{p+m}(c) < 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} (\text{VP})_{c-h} &= m, & (\text{PP})_{c-h} &= 0, \\ (\text{VP})_{c+h} &= 0, & (\text{PP})_{c+h} &= 0; \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned} (\text{VP})_{c-h} - (\text{VP})_{c+h} &= m, \\ (\text{PP})_{c+h} - (\text{PP})_{c-h} &= 0, \end{aligned}$$

jak być powinno.

g. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c), f^{(p)}(c), \dots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same zmiany znaku, liczba m jest nieparzysta, a iloczyn $S_{p-1}(c) S_{p+m}(c) > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} (\text{VP})_{c-h} &= m+1, & (\text{PP})_{c-h} &= 0, \\ (\text{VP})_{c+h} &= 0, & (\text{PP})_{c+h} &= 0; \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned} (\text{VP})_{c-h} - (\text{VP})_{c+h} &= m+1, \\ (\text{PP})_{c+h} - (\text{PP})_{c-h} &= 0, \end{aligned}$$

jak być powinno.

h . Grupa wartości $f^{(p-1)}(c), f^{(p)}(c), \dots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same zmiany znaku, liczba m jest nieparzysta, a iloczyn $\mathfrak{S}_{p-1}(c) \mathfrak{S}_{p+m}(c) < 0$. Wtedy

$$(\text{VP})_{c-h} = m, \quad (\text{PP})_{c-h} = 0,$$

$$(\text{VP})_{c+h} = 1, \quad (\text{PP})_{c+h} = 0;$$

a więc

$$(\text{VP})_{c-h} - (\text{VP})_{c+h} = m - 1,$$

$$(\text{PP})_{c+h} - (\text{PP})_{c-h} = 0,$$

jak być powinno.

Widzimy więc, że w zrobionym tu przypuszczeniu prawdziwość twierdzenia jest okazana. —

Należy tylko jeszcze okazać, że twierdzenie to jest prawdziwe również w dwu innych przypuszczeniach, mianowicie, kiedy

$$f(c) = f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(m-1)}(c) = 0, \quad f^{(m)}(c) \geq 0$$

i kiedy

$$f^{(p-1)}(c) \geq 0, \quad f^{(p)}(c) = f^{(p+1)}(c) = \dots = f^{(p+m-1)}(c) = 0, \quad f^{(p+m)}(c) \geq 0.$$

Pozostawiamy czytelnikowi doprowadzenie tego sprawdzania do końca; ono w tych dwu ostatnich przypuszczeniach skutecznia się owiele łatwiej.

125. Ilekroć wiemy, ile równanie dane ma pierwiastków, zawartych między a i b , możemy wyznaczyć wartości dwu liczb parzystych

$$2h = (\text{PP})_b - (\text{PP})_a - r,$$

$$2l = (\text{VP})_a - (\text{VP})_b - r,$$

a, oznaczając przez $2J$ ilość pierwiastków zespolonych równania danego, będziemy mieli

$$2J \geq 2h, \quad 2J \geq 2l.$$

Te nierówności wyprowadzają się z twierdzenia Sylvester'a zupełnie taksamo, jak w art. 104-ym nierówności (2) były wyprowadzone z twierdzenia Budan'a.

126. Przypuszczaliśmy dotąd, że żadna z funkcyj $f(x), f'(x), \dots, S_1(x), S_2(x), \dots$, nie staje się zerem ani przy $x = a$, ani też przy $x = b$; w przeciwnym razie należy zmienić wartości niektórych z liczb: a, b , oraz n' (art. 120), nieskończenie mało je powiększając lub zmniejszając. Przy nowych wartościach a, b, n' , nieskończenie mało różniących się od poprzednich, znaki funkcyj $f(x), f'(x), \dots, S(x), S_1(x), \dots$, określają się bezpośrednio na zasadzie dowiedzionych wyżej własności funkcyj Fourier'go i funkcyj Sylvester'a.

Zauważymy tu, że wartość parametru n' należy zmieniać tylko wtedy, kiedy przynajmniej jedna z funkcyj Sylvester'a tożsamościowo równa jest zeru, co, jak już wiadomo, może się zdarzyć tylko przy $n' = n$, t. j. kiedy parametr n' ma najmniejszą wartość, a każdy z parametrów k_1, k_2, \dots, k_{n+1} największą.

W wielu przypadkach twierdzenie Sylvester'a okazuje się dogodniejszym w zastosowaniu, niż twierdzenie Budan'a. Okażemy to na kilku przykładach.

127. PRZYKŁAD 1. Weźmy równanie

$$5x^5 - 7x^4 - 9x^3 + 16x^2 - 11x + 51 = 0.$$

Kładąc

$$k_i = \frac{n-i+1}{n-i} = \frac{6-i}{5-i},$$

mamy

$$k_1 = \frac{5}{4}, \quad k_2 = \frac{4}{3}, \quad k_3 = \frac{3}{2}, \quad k_4 = \frac{2}{1}.$$

Obliczywszy wartości funkcji Fourier'go i funkcji Sylvester'a dla $x = 0, 1, 2$, otrzymujemy poniższą tablicę znaków, w której w wierszu górnym pomieszczone liczby $i = 0, 1, 2, \dots$ odpowiadają funkcjom Fourier'go $f^{(i)}(x)$ i funkcjom Sylvester'a $S_i(x)$, a z każdego dwu wierszy, połączonych z sobą klamrą, górny odnosi się do funkcji Fourier'go, dolny zaś do funkcji Sylvester'a. Tablica ta jest:

x	0	1	2	3	4	5
2	+	+	+	+	+	+
1	+	-	-	+	+	+
0	+	-	+	-	-	+

Przy jej pomocy znajdujemy

$$(VP)_0 = 2, \quad (VP)_1 = 2, \quad (VP)_2 = 0,$$

$$(PP)_0 = 1, \quad (PP)_1 = 3, \quad (PP)_2 = 3;$$

a stąd

$$(VP)_0 - (VP)_1 = 0,$$

$$(PP)_2 - (PP)_1 = 0.$$

Te równania wskazują, że żaden z przedziałów $0, 1; 1, 2$, nie zawiera pierwiastków. A więc, w tym przypadku twierdzenie Sylvester'a daje nam od razu zupełne rozwiązanie zadania, gdy tymczasem twierdzenie Budan'a wskazuje tylko, że w każdym z przedziałów $0, 1; 1, 2$ może się znajdować co najwyżej po dwa pierwiastki.

128. PRZYKŁAD 2. Weźmy równanie

$$2x^6 + 6x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 30x^2 - 14x + 7 = 0.$$

Kładąc we wzorach dla funkcji Sylvester'a $n' = 6$, otrzymamy

$$k_1 = \frac{6}{5}, \quad k_2 = \frac{5}{4}, \quad k_3 = \frac{4}{3}, \quad k_4 = \frac{3}{2}, \quad k_5 = \frac{2}{1}.$$

Obliczając z tymi parametrami wartości funkcyj Sylvester'a dla $x = 0$ i dla $x = 1$, mieć będziemy następującą tablicę znaków:

x	0	1	2	3	4	5	6
1	+	+	+	+	+	+	+
$(1-h)$	+	-	0	+	+	+	+
0	+	-	+	-	-	+	+
	+	+	-	+	+	+	+

Stąd znajdujemy

$$(VP)_0 = 2, \quad (VP)_1 = 0,$$

$$(PP)_0 = 2, \quad (PP)_1 = 4,$$

i

$$(VP)_0 - (VP)_1 = 2,$$

$$(PP)_1 - (PP)_0 = 2.$$

Każde z dwu równań ostatnich wskazuje, że w przedziale 0, 1 dane równanie nie posiada więcej niż dwa pierwiastki; tymczasem, według twierdzenia Budan'a, kraniec wyższy dla ilości pierwiastków, zawartych w tymże przedziale, jest 4.

Dla $x = -1$ i dla $x = -2$ znajdujemy następującą tablicę znaków:

x	0	1	2	3	4	5	6
-1	+	-	+	+	-	-	+
	+	+	+	+	+	+	+
-2	+	-	+	-	+	-	+
	+	+	-	+	+	+	+

Stąd

$$(VP)_{-1} = 4, \quad (VP)_{-2} = 4,$$

$$(PP)_{-1} = 2, \quad (PP)_{-2} = 0,$$

i

$$(VP)_{-2} - (VP)_{-1} = 0,$$

$$(PP)_{-1} - (PP)_{-2} = 2.$$

Pierwsze z dwu ostatnich równań wskazuje, że dane równanie nie ma pierwiastka między -1 i -2 ; gdy tymczasem twierdzenie Budan'a daje liczbę 2, jako kraniec wyższy dla ilości pierwiastków równania, zawartych między -1 i -2 .

129. PRZYKŁAD 3. Weźmy równanie

$$3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 11 = 0.$$

Kładąc

$$k_1 = \frac{5}{4}, \quad k_2 = \frac{4}{3}, \quad k_3 = \frac{3}{2}, \quad k_4 = \frac{2}{1}$$

i obliczając z tymi parametrami wartość funkcji Sylvester'a dla $x = a$ i dla $x = 1$, otrzymamy następującą tablicę:

x	0	1	2	3	4	5
1	+	+	+	+	+	+
1	+	-	+	+	+	+
(+h) 0	+	0	0	-	+	+
0	+	0	0	+	+	+

Więc

$$(VP)_0 = 2, \quad (VP)_1 = 0,$$

$$(PP)_0 = 3, \quad (PP)_1 = 3,$$

i

$$(VP)_0 - (VP)_1 = 2,$$

$$(PP)_1 - (PP)_0 = 0.$$

Ostatnie równanie wskazuje, że nasze równanie wcale nie posiada pierwiastka w przedziale między 0 i 1; tymczasem z twierdzenia Budan'a widzimy tylko, że to równanie może mieć conajwięcej dwa pierwiastki między 0 i 1.

§ VIII. TWIERDZENIE NEWTON'A.

130. Kładąc

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n,$$

$$S_i(x) = f^{(i)}(x)^2 - k_i f^{(i+1)}(x) f^{(i-1)}(x),$$

$$k_i = \frac{n-i+1}{n-i};$$

i wypisując wyrazy skrajne w wyrażeniu funkcji $S_i(x)$, mieć będziemy

$$\begin{aligned} S_i(x) = & (n-1)^2 (n-2)^2 \dots (n-i+1)^2 \left(A_1^2 - \frac{2n}{n-1} A_0 A_2 \right) x^{2n-2i-2} \\ & + \dots \\ & + (1 \cdot 2 \dots i)^2 \left(A_{n-i}^2 - \frac{n-i+1}{n-i} \frac{i+1}{i} A_{n-i-1} A_{n-i+1} \right). \end{aligned}$$

Skąd widzimy, że kiedy parametry k_1, k_2, \dots mają wartości największe, to wtedy stopień funkcji $S_i(x)$ jest $2n-2i-2$, tak iż funkcja przedostatnia $S_{n-1}(x)$ jest wówczas równa liczbie stałej

$$(1 \cdot 2 \dots (n-1))^2 \left(A_1^2 - \frac{2n}{n-1} A_0 A_2 \right).$$

Przy $x = 0$, mamy

$$S_i(0) = (1 \cdot 2 \dots i)^2 \left(A_{n-i}^2 - \frac{(n-i+1)(i+1)}{(n-i)i} A_{n-i-1} A_{n-i+1} \right).$$

Po zrobieniu tych uwag, łatwo z twierdzenia Sylvester'a wyprowadzić, jako wniosek, pewne twierdzenie, podane bez dowodu przez Newton'a. Otrzymuje się ono z twierdzenia Sylvester'a taksamo, jak twierdzenie Descartes'a z twierdzenia Budan'a (us. 106).

131. TWIERDZENIE. *Mając równanie*

$$(1) \quad A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

utwórzmy dwie grupy liczb:

$$(2) \left\{ \begin{array}{cccc} A_0, A_1, & & A_2, & \dots, A_n, \\ 1, A_1^2 - \frac{2n}{n-1} A_0 A_2, & A_2^2 - \frac{3(n-1)}{2(n-2)} A_1 A_3, & \dots, & 1. \end{array} \right.$$

Ilość pierwiastków dodatnich równania (1) nie jest większa od ilości zmian z powtórzeniem znaku w (2), a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą; ilość pierwiastków ujemnych równania (1) nie jest większa od ilości podwójnych powtórzeń znaku w (2), a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą.

Jakoż, stosując twierdzenie Sylvester'a do przedziału $0, +\infty$, otrzymamy

$$(VP)_0 - (VP)_{+\infty} = m + 2h,$$

gdzie m oznacza ilość pierwiastków dodatnich równania (1), a h pewną liczbę całkowitą, dodatnią, albo zero. Lecz $(VP)_{+\infty} = 0$, gdyż grupa funkcji $f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$ przy $x = +\infty$ przedstawia same tylko powtórzenia znaku; zatem

$$(VP)_0 = m + 2h.$$

To równanie wyraża pierwszą część twierdzenia Newton'a, $(VP)_0$ bowiem oznacza ilość zmian z powtórzeniem znaku w (2).

Stosując twierdzenie Sylvester'a do przedziału $0, -\infty$ i oznaczając przez m' ilość pierwiastków ujemnych równania (1), a przez $2h'$ pewną liczbę parzystą, dodatnią, albo zero, otrzymamy

$$(PP)_0 - (PP)_{-\infty} = m' + 2h'.$$

Lecz $(PP)_{-\infty} = 0$, gdyż grupa funkcji $f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$ przy $x = -\infty$ przedstawia same tylko zmiany znaku; więc

$$(PP)_0 = m' + 2h'.$$

Równanie to wyraża drugą część twierdzenia Newton'a, $(PP)_0$ bowiem oznacza ilość podwójnych powtórzeń znaku w (2).

UWAGA. Przyuszczaliśmy tu, że żadna z liczb (2) nie jest równa zero; w przeciwnym bowiem razie należy zamiast $x=0$ wziąć $x = +h$ albo $x = -h$, gdzie h oznacza nieskończenie małą liczbę dodatnią. Niekiedy bywa konieczną zmiana wartości parametru n' .

132. PRZYKŁAD 1. Weźmy równanie

$$x^8 - x^7 + 4x^6 - 8x^5 - x^4 + 7x^3 - 22x^2 - 152x - 450 = 0,$$

toż samo, do któregośmy stosowali twierdzenie Descartes'a (art. 82).

Stosując do niego twierdzenie Newton'a, otrzymamy dwie grupy znaków

$$\begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & - & + & - & - & - \\ + & - & + & + & + & + & + & + & + \end{array}$$

i

$$(VP) = 3, \quad (PP) = 3,$$

tak iż ilość pierwiastków dodatnich jest równa albo 1, albo 3, a ilość pierwiastków ujemnych także jest równa albo 1, albo 3.

133. PRZYKŁAD 2. Dla równania

$$x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 30x^2 + 6 = 0$$

otrzymujemy następujące znaki:

$$\begin{array}{cccccc} + & + & - & + & 0 & + \\ + & + & - & + & - & + \end{array}$$

Dla przedziału $+h, +\infty$ należy w wierszu pierwszym zamiast 0 napisać znak $+$; będziemy mieli

$$(VP) = 0,$$

co wskazuje, że powyższe równanie wcale nie ma pierwiastków dodatnich.

Dla przedziału $-h, -\infty$ zamiast 0 w wierszu pierwszym należy napisać znak $-$; będziemy mieli

$$(PP) = 1,$$

skąd widzimy, że dane równanie ma jeden tylko pierwiastek ujemny.

134. PRZYKŁAD 3. Dla równania

$$x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 5x - 5 = 0$$

otrzymujemy następujące dwie grupy znaków:

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & - & - \\ + & + & + & + & 0 & + \end{array}$$

Funkcja $S_4(x)$ staje się tożsamościowo równą zeru; a więc, zamiast

$$k_i = \frac{6-i}{5-i},$$

powinniśmy wziąć

$$k_i = \frac{6-i+d}{5-i+d},$$

gdzie d oznacza dostatecznie małą, albo prościej — nieskończenie małą liczbę dodatnią. Wskutek tego, każdy z parametrów k_1, k_2, \dots otrzymuje pewien nieskończenie mały przyrostek ujemny.

Jeżeli oznaczymy przyrostek parametru k_i przez Δk_i , to nowa wartość wielkości $S_4(0)$ wyrazi się tak:

$$S_4(0) = f^{IV}(0)^2 - \left(\frac{2}{1} + \Delta k_4\right) f'''(0) f^V(0) = -\Delta k_4 f'''(0) f^V(0),$$

skąd widzimy, że $S_4(0) > 0$. A więc, zamiast 0, w wierszu drugim należy wziąć znak +, wskutek czego otrzymujemy

$$(VP) = 3, \quad (PP) = 2.$$

Toż samo nam daje twierdzenie Descartes'a.

ROZDZIAŁ VII.

O NADMIARZE FUNKCYI WYMIERNÉJ. — SPOSÓB OZNACZANIA I GEÓWNE WŁASNOŚCI NADMIARÓW. — SPOSÓB OBLICZANIA NADMIARÓW. — PRZYPADK SZCZEGÓLNY, KIEDY NADMIAR OTRZYMUJE NAJWIĘKSZĄ MOŻLIWĄ WARTOŚĆ. — O RÓWNANIACH Z PIERWIASTKAMI PRZEGRADZAJACYMI SIĘ. — TWIERDZENIE STURM'A.

§ I. O NADMIARZE FUNKCYI WYMIERNÉJ.

135. Przypuśćmy, że mamy dwie funkcyje całkowite,

$$V = f(x), \quad V_1 = f_1(x),$$

pierwsze względem siebie, i że są dane dwie liczby: a i $b > a$, nie przywodzące żadnej z funkcyj V i V_1 do zera.

Weźmy pod uwagę te pierwiastki każdego z równań

$$V = 0, \quad V_1 = 0,$$

które się zawierają między a i b , i rozdzielmy je na trzy «klasy», stosownie do trzech następujących przypadków:

Jeżeli, przy przejściu zmiennej x przez jeden z tych pierwiastków, np. przez c , od wartości mniejszych do większych, funkcyj ułamkowa $\frac{V}{V_1}$ zmienia swój znak, przechodząc od wartości ujemnych do dodatnich, to pierwiastek c zaliczymy do klasy pierwszej.

Jeżeli, przeciwnie, przy przejściu zmiennej x przez pierwiastek c , od wartości mniejszych do większych, stosunek $\frac{V}{V_1}$ zmienia swój znak, przechodząc od wartości dodatnich do ujemnych, to wówczas pierwiastek c zaliczymy do klasy drugiej.

Jeżeli, nakoniec, przy przejściu zmiennej x przez pierwiastek c od wartości mniejszych do większych, stosunek $\frac{V}{V_1}$ nie zmienia swego znaku, to wówczas pierwiastek c zaliczymy do klasy trzeciej. —

Przypuśćmy, że pośród pierwiastków równania $V = 0$, zawartych między a i b , znajduje się l różnych, należących do klasy pierwszej, i l' różnych, nale-

jących do klasy drugiejj. Różnicę $l - l'$ będziemy nazywać pierwszym nadmiarem stosunku $\frac{V}{V_1}$ od a do b , i, przez skrócenie, będziemy go oznaczali przez $E_a^b \frac{V}{V_1}$, albo króćej przez E_a^b .

Przypuścimy, że pośród pierwiastków równania $V_1 = 0$, zawartych między a i b , znajduje się m różnych, należących do klasy pierwszejj, i m' różnych, należących do klasy drugiejj. Różnicę $m - m'$ będziemy nazywali drugim nadmiarem stosunku $\frac{V}{V_1}$ od a do b , i, przez skrócenie, będziemy go oznaczali przez $I_a^b \frac{V}{V_1}$, albo, króćej, przez I_a^b .

Prócz tego, umówimy się, aby nadmiarem funkcyi $\frac{V}{V_1}$ od b do a nazywać nadmiar téjże funkcyi $\frac{V}{V_1}$, wzięty od a do b i pomnożony przez -1 , t. j.

$$E_b^a = -E_a^b, \quad I_b^a = -I_a^b.$$

Jeżeli przypuścimy, że zmienna x , zmieniając się w sposób ciągły, przechodzi przez wszystkie wartości od $x = a$ do $x = b$, to różnica między liczbą, wskazującą, ile razy stosunek $\frac{V}{V_1}$, stając się zerem, przechodzi od wartości ujemnych do dodatnych, i liczbą, wskazującą, ile razy tenże stosunek, stając się zerem, przechodzi od wartości dodatnych do ujemnych, równa się nadmiarowi E_a^b , *tak wtedy, kiedy $b > a$, jak i wtedy, kiedy $b < a$* . Również różnica między liczbą, wskazującą, ile razy stosunek $\frac{V}{V_1}$, stając się nieskończenie wielkim, przechodzi od wartości ujemnych do dodatnych, i liczbą, wskazującą, ile razy tenże stosunek, stając się nieskończenie wielkim, przechodzi od wartości dodatnych do ujemnych, równa się nadmiarowi I_a^b , *tak wtedy, kiedy $b > a$, jak i wtedy, kiedy $b < a$* .

Jeżeli pierwiastki równań $V = 0$, $V_1 = 0$, zawarte między a i b , są nam znane, to wyznaczenie wartości obu nadmiarów nie może przedstawiać szczególnego zadania. Np., kładąc

$$V = (x - 2)(x + 1), \quad V_1 = (x + 3)(2x - 3)(x - 5)(2x - 11)^2,$$

mieć będziemy

$$\begin{aligned} E_0^1 \frac{V}{V_1} &= 0, & E_{-2}^0 \frac{V}{V_1} &= -1, & E_0^3 \frac{V}{V_1} &= -1, \\ I_{-4}^4 \frac{V}{V_1} &= 2, & I_1^6 \frac{V}{V_1} &= 1, & I_5^7 \frac{V}{V_1} &= 0. \end{aligned}$$

Jest jednak rzeczą ważną, iż, nie znając wcale ani pierwiastków równania $V = 0$, ani pierwiastków równania $V_1 = 0$, możemy zawsze, zapomocą zwykajnego dzielenia algebricznego, wyznaczyć wartości obu nadmiarów funkcyi $\frac{V}{V_1}$ przy dowolnie wziętych krańcach a i b .

§ II. WŁASNOŚCI NADMIARÓW.

136. Z określenia nadmiarów bezpośrednio wynikają zasadnicze ich własności, które można wyrazić zapomocą następujących wzorów:

$$(1) \quad E_a^b \frac{V}{V_1} + E_b^c \frac{V}{V_1} = E_a^c \frac{V}{V_1},$$

$$(2) \quad I_a^b \frac{V}{V_1} + I_b^c \frac{V}{V_1} = I_a^c \frac{V}{V_1},$$

$$(3) \quad I_a^b \frac{V}{V_1} = E_a^b \frac{V_1}{V},$$

$$(4) \quad E_a^b \frac{V}{V_1 + VQ} = E_a^b \frac{V}{V_1},$$

$$(5) \quad I_a^b \left(\frac{V}{V_1} + Q \right) = I_a^b \frac{V}{V_1},$$

gdzie V , V_1 , Q oznaczają jakiekolwiek funkcje całkowite, zaś a , b , c liczby dowolne.

Jeżeli od $x = a$ do $x = b$ mamy $Q > 0$, to wówczas

$$(6) \quad E_a^b \frac{QV}{V_1} = E_a^b \frac{V}{QV_1} = E_a^b \frac{V}{V_1},$$

$$(7) \quad I_a^b \frac{QV}{V_1} = I_a^b \frac{V}{QV_1} = I_a^b \frac{V}{V_1}.$$

Jeżeli dwie funkcje całkowite U i U_1 są pierwsze względem siebie, to wówczas

$$(8) \quad E_a^b \frac{UU_1}{V} = E_a^b \frac{U}{VU_1} + E_a^b \frac{U_1}{VU},$$

$$(9) \quad I_a^b \frac{V}{UU_1} = I_a^b \frac{VU_1}{U} + I_a^b \frac{VU}{U_1},$$

$$(10) \quad I_a^b \left(\frac{V}{U} + \frac{V_1}{U_1} \right) = I_a^b \frac{V}{U} + I_a^b \frac{V_1}{U_1}.$$

Do tych własności dodamy jeszcze jedną, którą przedstawia następujące

TWIERDZENIE. *Oba nadmiary jakiejkolwiek funkcji $\frac{V}{V_1}$, wzięte względem tychże samych krańców a i b , są z sobą związane równaniem*

$$(11) \quad E_a^b \frac{V}{V_1} + I_a^b \frac{V}{V_1} = e_a^b,$$

gdzie e_a^b określa się tak:

$$e_a^b = 0, \quad \text{jeżeli } \frac{V(b)}{V_1(b)} \text{ i } \frac{V(a)}{V_1(a)} \text{ są jednakowego znaku;}$$

$$e_a^b = 1, \quad \text{jeżeli } \frac{V(a)}{V_1(a)} < 0, \quad \text{zaś } \frac{V(b)}{V_1(b)} > 0;$$

Jeżeli stopień funkcji V_1 nie jest mniejszy od stopnia funkcji V , to, dzieląc V_1 przez V i nazywając iloraz Q , a resztę V_2 , otrzymamy

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = E_a^b \frac{V}{V_2 + QV} = E_a^b \frac{V}{V_2},$$

tak iż obliczenie nadmiaru funkcji $\frac{V}{V_1}$ sprowadza się do obliczenia nadmiaru funkcji $\frac{V}{V_2}$, która jest prostszą od poprzedniej. Jeżeli zaś funkcja V_1 jest niższego stopnia niż funkcja V , to dzieląc V przez V_1 i nazywając iloraz Q , a resztę V_2 , mieć będziemy

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = e_a^b - I_a^b \left(Q + \frac{V_2}{V_1} \right) = e_a^b - I_a^b \frac{V_2}{V_1},$$

albo

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = e_a^b - E_a^b \frac{V_2}{V_1},$$

i obliczenie nadmiaru funkcji $\frac{V}{V_1}$ sprowadza się do obliczenia nadmiaru innej funkcji $\frac{V_2}{V_1}$, prostszej, niż poprzednia. Prowadząc w ten sposób dalej obniżanie stopnia, sprowadzimy nasze zadanie do wyznaczenia nadmiaru funkcji całkowitej. Lecz wówczas wyznaczenie nadmiaru wynika bezpośrednio z wzoru (11), gdyż, kładąc $V_1 = 1$, otrzymujemy

$$E_a^b V = e_a^b.$$

§ III. OBLICZANIE NADMIARÓW.

138. Dowiedzimy twierdzenia, obejmującego w sobie prawidło ogólne na otrzymanie wartości jakiegokolwiek nadmiaru $E_a^b \frac{V}{V_1}$. Moglibyśmy je wprowadzić z uwag, uczynionych przy końcu poprzedniego paragrafu, lecz wolimy tu skorzystać z wiadomych już metod, używanych przy dowodzeniu twierdzeń Budan'a i Sylvester'a.

TWIERDZENIE. *Jeżeli, mając dwie funkcje całkowite, pierwsze względem siebie, V i V_1 , podzielimy V przez V_1 i oznaczymy przez V_2 otrzymaną stąd resztę, pomnożoną przez dowolną liczbę ujemną, następnie podzielimy funkcję V_1 przez V_2 i oznaczymy przez V_3 resztę, pomnożoną przez dowolną liczbę ujemną, i będziemy powtarzali to postępowanie dotąd, dopóki nie dojdziemy do reszty V_r , będącej liczbą stałą, a ilość zmian znaku, zachodzących w grupie funkcji*

$$(1) \quad V, V_1, V_2, \dots, V_r,$$

nazwiemy v_x , to, jakikolwiek będą liczby a i b , wartość nadmiaru $E_a^b \frac{V}{V_1}$ wyznaczona będzie zapomocą wzoru:

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = v_a - v_b.$$

Dowodzenie tego twierdzenia zasada się na następujących trzech własnościach funkcji (1).

a. Ostatniej z funkcji (1) nie przywodzi do zera żadna z wartości zmiennej x , zawartych między krańcami a i b . Jest to oczywiste, gdyż V_r jest liczbą stałą, różną od zera.

b. Dwie sąsiednie z funkcji (1) nie mogą stawać się równymi zeru dla żadnej wartości zmiennej x , zawartej między a i b . Gdybyśmy przypuścili, że, przy pewnej wartości zmiennej x mamy

$$V = V_{k+1} = 0,$$

to z tożsamości

$$V_k = Q_k V_{k+1} - CV_{k+2},$$

otrzymanej z podzielenia funkcji V_k przez V_{k+1} , wynika, że, dla tejże wartości zmiennej x , mamy

$$V_{k+2} = 0.$$

T. j., jeżeli, przy jakiegokolwiek wartości zmiennej x , dwie sąsiednie z funkcji (1) stają się równymi zeru, to i następująca po nich funkcja również stawałaby się równą zeru. Natenczas i wszystkie pozostałe, następujące po nich funkcje, powinnyby także stawać się równymi zeru, tak iż mielibyśmy $V_r = 0$, co być nie może.

c. Jeżeli pośród funkcji (1), przy pewnej wartości zmiennej x , zawartej między a i b , funkcja V_{k+1} staje się równą zeru, to dwie obok niej stojące funkcje V_k i V_{k+2} otrzymują wartości znaków różnych. To jest widoczne z równości

$$V_k = Q_k V_{k+1} - CV_{k+2},$$

które, dla wartości x , przywodzących funkcję V_{k+1} do zera, daje

$$V_k = -CV_{k+2}.$$

Przechodząc do udowodnienia naszego twierdzenia, naprzód ograniczymy się do tego przypadku, kiedy między a i b istnieje, lecz tylko jedna, liczba c przywodząca do zera jedną albo kilka funkcji (1). Rozumić się samo przez się, że nie mamy potrzeby zatrzymywać się nad tym przypadkiem, kiedy w przedziale a, b żadna z funkcji szeregu (1) nie ma pierwiastka; wtenczas bowiem twierdzenie nasze staje się oczywistym.

Można zrobić kilka przypuszczeń co do liczby c , które należy zbadać oddzielnie.

Przypuśćmy, że c nie jest pierwiastkiem równania $V=0$, i że przy $x=c$ z funkcji (1) tylko jedna V_k staje się równą zeru. Oznaczając odpowiednio przez w_x, w'_x, w''_x ilość zmian znaku w grupach

$$\begin{aligned} &V, V_1, \dots, V_{k-1}, \\ &V_{k-1}, V_k, V_{k+1}, \\ &V_{k+1}, V_{k+2}, \dots, V_r, \end{aligned}$$

mieć będziemy

$$v_x = w_x + w'_x + w''_x,$$

skąd

$$(2) \quad v_a - v_b = w_a - w_b + w'_a - w'_b + w''_a - w''_b.$$

Oczywiście, że

$$(3) \quad \begin{cases} w_a - w_b = 0, \\ w''_a - w''_b = 0. \end{cases}$$

Należy oznaczyć, czemu się równa różnica $w'_a - w'_b$. W tym celu zważmy, że znaki wartości $V_{k-1}(a)$ i $V_{k-1}(b)$ są jednakowe i także same, jak znak wartości $V_{k-1}(c)$; podobnie, znaki wartości $V_{k+1}(a)$ i $V_{k+1}(b)$ są jednakowe i także, jak znak wartości $V_{k+1}(c)$. Ponieważ zaś znaki wartości $V_{k-1}(c)$ i $V_{k+1}(c)$ są różne, zatem wartości $V_{k-1}(a)$, $V_{k+1}(a)$ są różnego znaku, i wartości $V_{k-1}(b)$, $V_{k+1}(b)$ są także różnego znaku. Stąd wynika, że

$$w'_a = 1, \quad w'_b = 1,$$

a zatem

$$(4) \quad w'_a - w'_b = 0.$$

Według (2), (3) i (4), otrzymujemy

$$v_a - v_b = 0,$$

co wskazuje, że w przypadku rozważanym nasze twierdzenie ma miejsce.

W podobny sposób możemy się przekonać, że twierdzenie to utrzymuje się wówczas, kiedy liczba c , nie przywodząc do zera funkcji V , przywodzi do zera więcej niż jedną z pozostałych funkcji (1). Tak np., jeżeliby, spośród funkcji (1), tylko dwie funkcje: V_k i V_l stawały się równymi zeru przy $x=c$, to, przyjmując, że $l > k$, mielibyśmy $l > k+1$, a oznaczając odpowiednio przez $w_x, w'_x, w''_x, w'''_x, w^{IV}_x$ ilości zmian znaku w każdej z grup

$$\begin{aligned} &V, V_1, \dots, V_{k-1}, \\ &V_{k-1}, V_k, V_{k+1}, \\ &V_{k+1}, V_{k+2}, \dots, V_{l-1}, \\ &V_{l-1}, V_l, V_{l+1}, \\ &V_{l+1}, V_{l+2}, \dots, V_r, \end{aligned}$$

mielibyśmy

$$\begin{aligned} w_a - w_b &= 0, \\ w'_a - w'_b &= 0, \end{aligned}$$

$$w''_a - w''_b = 0,$$

$$w'''_a - w'''_b = 0,$$

$$w^{IV}_a - w^{IV}_b = 0,$$

Stąd zaś, po dodaniu, otrzymamy

$$v_a - v_b = 0,$$

co jest zgodne z twierdzeniem.

Przypuśćmy jeszcze, że liczba c jest pierwiastkiem równania $V = 0$. Oznaczając odpowiednio przez w_x i w'_x ilości zmian znaku w każdej z grup

$$V, V_1; \\ V_1, V_2, \dots, V_r,$$

i uważając, że wartość $V_1(c)$ jest różna od zera, na zasadzie tego, cośmy wyżej udowodnili, wnosimy, że

$$w'_a - w'_b = 0,$$

• wskutek czego mamy

$$v_a - v_b = w_a - w_b.$$

Należy wyznaczyć różnicę $w_a - w_b$. — Jeżeli $\frac{V(a)}{V_1(a)} < 0$, a $\frac{V(b)}{V_1(b)} > 0$, to wówczas $w_a = 1$, $w_b = 0$ i

$$w_a - w_b = 1;$$

a więc

$$v_a - v_b = 1,$$

co jest zgodne z twierdzeniem, gdyż, w tym przypadku, oczywiście, nadmiar $E_a^b \frac{V}{V_1} = 1$. — Jeżeli zaś $\frac{V(a)}{V_1(a)} > 0$, a $\frac{V(b)}{V_1(b)} < 0$, to wtedy $w_a = 0$, $w_b = 1$ i

$$w_a - w_b = -1;$$

a więc

$$v_a - v_b = -1 = E_a^b \frac{V}{V_1},$$

co również jest zgodne z twierdzeniem. — Nakoniec, może się zdarzyć, że oba stosunki $\frac{V(a)}{V_1(a)}$ i $\frac{V(b)}{V_1(b)}$ są jednakowego znaku. Wówczas, oczywiście, $w_a = w_b$, a zatem

$$v_a - v_b = 0 = E_a^b \frac{V}{V_1},$$

zgodnie z twierdzeniem.

Przypuśćmy teraz, że między a i b znajduje się nie jedna, ale jakakolwiek ilość wartości szczególnych

$$c_1, c_2, \dots, c_m,$$

z których każda przynajmniej jedną z funkcj (1) przywodzi do zera. Przyjmijmy, że te liczby są już wypisane w porządku ich rosnących albo malejących wartości, zależnie od tego, czy $a < b$, czy też $a > b$, i oznaczmy przez a_1 jaką-

kolwiek liczbę, zawartą między a i c_1 , przez a_2 jakąkolwiek liczbę, zawartą między c_1 i c_2 , i t. d. Na zasadzie tego, cośmy wyżej udowodnili, twierdzenie nasze ma miejsce dla każdego z przedziałów

$$a, a_1; a_1, a_2; \dots, a_{m-1}, b;$$

mamy więc następujące równania:

$$E_a^{a_1} \frac{V}{V_1} = v_a - v_{a_1},$$

$$E_{a_1}^{a_2} \frac{V}{V_1} = v_{a_1} - v_{a_2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$E_{a_{m-1}}^b \frac{V}{V_1} = v_{a_{m-1}} - v_b.$$

Dodając je do siebie i przyjmując pod uwagę wzór (1) w art. 136-ym, otrzymamy

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = v_a - v_b.$$

Jest więc nasze twierdzenie zupełnie udowodnione.

139. Utworzenie funkcji V_2, V_3, \dots według pravidła, wskazanego w art. poprzedzającym, wymaga, wogóle mówiąc, wiele zachodu; niekiedy jednak można otrzymać daleko prościej inną grupę funkcji

$$(1) \quad V, V_1, U_2, U_3, \dots, U_s,$$

posiadających też same trzy własności charakterystyczne funkcji V, V_1, V_2, V_3, \dots . Wówczas twierdzenie art. poprzedniego, jako będące wynikiem tych trzech własności, będzie również miało miejsce dla grupy funkcji (1).

Jeżeli się zdarzy, że jedna z funkcji V, V_1, V_2, V_3, \dots , np. V_k , nie ma żadnego pierwiastka między a i b , to wówczas można przerwać odnajdywanie następnych funkcji V_{k+1}, V_{k+2}, \dots , przyjąwszy funkcją V_k jako ostatnią. Oczywiście, że wtedy niema potrzeby przypuszczać, że funkcyje V i V_1 są pierwsze względem siebie.

Nadto, jeżeli przy tworzeniu funkcji V, V_1, V_2, V_3, \dots zauważymy, że jedna z nich, np. V_k , jest iloczynem $\varphi(x) U_k$, dwu funkcji całkowitych, a funkcya $\varphi(x)$ nie ma pierwiastka między a i b i pozostaje wciąż dodatną, to wówczas zamiast funkcji V_k możemy wziąć funkcją U_k i tworzyć następne funkcyje przy pomocy V_{k-1} i U_k .

140. Dotąd przypuszczaliśmy, że żadna z funkcji V, V_1, V_2, V_3, \dots nie staje się zerem ani dla $x = a$, ani też dla $x = b$. Nie trudno okazać, że w razie przeciwnym, kiedy jedna albo kilka spośród funkcji V_1, V_2, V_3, \dots stają się równymi zeru przy $x = a$ albo $x = b$, niemaco, przy obliczaniu ilości zmian znaku, zwracać uwagi na wyrazy równe zeru, ale tak postępować, jakgdyby ich wcale nie było. Jakoż, jeżeli $V_k = 0$, to wartości V_{k-1} i V_{k+1} są różne-

go znaku; a więc, gdy zamiast krańca a podstawimy inny, $a + h$, nieskończenie mało różniący się od a , to trzy wyrazy

$$V_{k-1}(a+h), \quad V_k(a+h), \quad V_{k+1}(a+h)$$

przedstawiają jedną zmianę znaku — taksamo, jak i dwa wyrazy

$$V_{k-1}(a) \quad V_{k+1}(a).$$

A zatem, aby oznaczyć ilość zmian znaku w grupie wartości

$$V(a+h), \quad V_1(a+h), \quad V_2(a+h), \dots, V_r(a+h),$$

przy nieskończenie małym h i w przypuszczeniu, że $V(a) \neq 0$, należy obrać ilość zmian znaku w grupie wartości

$$V(a), \quad V_1(a), \quad V_2(a), \dots, V_r(a),$$

nie zwracając uwagi na zera, jakie się zdarzyć mogą.

§ IV. NAJWIĘKSZA WARTOŚĆ NADMIARU.

141. Rozkładając pierwiastki równania $V = 0$ na klasy, jak to było wskazanem w art. 135-ym, i oznaczając przez l i l' ilość pierwiastków, zawartych między krańcami a i $b > a$ i należących do pierwszej lub do drugiej klasy, mamy równość

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = l - l',$$

która wskazuje, że wartość bezwzględna nadmiaru E_a^b nie jest większa od stopnia funkcji V .

Oznaczywszy ów stopień przez n , spostrzegamy, że, w tym przypadku, kiedy

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = n,$$

mamy

$$l = n, \quad l' = 0.$$

Równanie $V = 0$ ma wtedy wszystkie pierwiastki nierówne, rzeczywiste i zawarte między a i b ; wszystkie one należą do klasy pierwszej.

Jeżeli zaś okaże się, że

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = -n,$$

to wówczas

$$l = 0, \quad l' = n,$$

wszystkie pierwiastki równania $V = 0$ są różne, rzeczywiste, zawarte między a i b , i wszystkie należą do klasy drugiej.

142. Wziąwszy pod uwagę funkcję Legendre'a X_n , łatwo spostrzeżemy, że grupa

$$(1) \quad X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_2, X_1, X_0 = 1$$

jest tą właśnie, którą należy utworzyć, według twierdzenia art. 138-go, w celu otrzymania wartości nadmiaru funkcji $\frac{X_n}{X_{n-1}}$.

Ponieważ przy $x = 1$ grupa (1) przedstawia same tylko powtórzenia znaku, a przy $x = -1$ same tylko zmiany znaku, zatem

$$E_{-1}^{+1} \frac{X_n}{X_{n-1}} = n,$$

a więc wszystkie pierwiastki równania $X_n = 0$ są pojedyncze, rzeczywiste i zawarte między -1 i $+1$; te pierwiastki widocznie przegradzają się nawzajem z pierwiastkami równania $X_{n-1} = 0$.

Wogóle, wszystko to, co w art. 57-ym było powiedziane o równaniach z pierwiastkami przegradzającymi się, mogłoby być wyprowadzone zapomocą teorii nadmiarów.

§ V. TWIERDZENIE STURM'A.

143. Na szczególną uwagę zasługuje wyrażenie nadmiaru funkcji ułamkowej $\frac{f(x)}{f'(x)}$, której mianownik jest pochodną licznika; wówczas każdy pierwiastek rzeczywisty równania $f(x) = 0$ należy do klasy pierwszój, i, w przypuszczeniu, że równanie $f(x) = 0$ pierwiastków wielokrotnych nie posiada, jest

$$E_a^b \frac{f(x)}{f'(x)} = l,$$

gdzie l oznacza ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i $b > a$.

Stąd wynika następujące twierdzenie Sturm'a:

TWIERDZENIE. *Podzielmy funkcję całkowitą $V = f(x)$ przez jej pochodną $V_1 = f'(x)$ i oznaczmy przez V_2 resztę, pomnożoną przez dowolną liczbę ujemną; podzielmy następnie funkcję V_1 przez V_2 i oznaczmy przez V_3 resztę, pomnożoną przez dowolną liczbę ujemną, i postępujmy taksamo dalej, aż dopóki nie dojdziemy do reszty V_r , będącej liczbą stałą. Jeżeli funkcja V nie posiada pierwiastków wielokrotnych, to liczba V_r jest różna od zera i wówczas różnica między ilością zmian znaku w grupie*

$$(1) \quad V, V_1, V_2, \dots, V_r$$

przy $x = a$ i ilością zmian znaku w téżej grupie przy $x = b > a$ jest równa ilości pierwiastków równania $V = 0$, zawartych między kranicami a i b .

Twierdzenie Sturm'a jest bezpośrednim wynikiem czterech własności, jakie posiadają funkcje grupy (1), mianowicie:

- a. ostatnia funkcja V_r ani razu nie staje się równą zeru między a i b ;
- b. dwie sąsiednie funkcje grupy (1) nie mogą jednocześnie stawać się równymi zeru dla żadnej wartości zmiennej x , zawartej między a i b ;
- c. jeżeli przy jakiegokolwiek wartości zmiennej x , zawartej między a i b , funkcja V_k staje się równą zeru, to wartości dwu funkcyj V_{k-1} i V_{k+1} są różnego znaku.
- d. przy przejściu zmiennej x przez jakikolwiek pierwiastek równania $V=0$, zawarty między a i b , od wartości mniejszych do większych, stosunek $\frac{V}{V_1}$ przechodzi od wartości ujemnych do dodatnych.

Do każdej grupy funkcyj, które posiadają te cztery własności, twierdzenie Sturm'a jednakowo się stosuje, a funkcje, tworzące taką grupę, nazywają się funkcjami Sturm'a.

144. Ażebymy wszystkie pierwiastki równania $V=0$ były pojedyncze i rzeczywiste, potrzeba i wystarcza, iżby

$$(1) \quad v_{-\infty} - v_{+\infty} = n,$$

gdzie $v_{-\infty}$ i $v_{+\infty}$ oznaczają ilości zmian znaku w grupie funkcyj Sturm'a

$$V, V_1, V_2, \dots, V_r$$

przy $x = -\infty$ i przy $x = +\infty$, n zaś jest stopniem funkcji V . Ponieważ ilość funkcyj V, V_1, \dots, V_r , oczywiście, nie przewyższa liczby $n+1$, przeto $v_{-\infty} \leq n$ i $v_{+\infty} \leq n$; a zatem, według (1),

$$v_{-\infty} = n, \quad v_{+\infty} = 0.$$

Te równania wskazują, że wtedy ilość funkcyj Sturm'a winna być równą liczbie $n+1$, i że współczynniki najwyższych potęg zmiennej x w ich wyrażeniach powinny mieć jednakowe znaki.

Nawzajem, jeżeli funkcje V_2, V_3, \dots są odpowiednio $(n-2)$ -go, $(n-3)$ -go, ... stopnia, tak iż ilość wszystkich funkcyj V, V_1, V_2, \dots jest $n+1$, i jeżeli współczynniki potęg x^{n-2}, x^{n-3}, \dots w wyrażeniach funkcyj V_2, V_3, \dots są takiegoż znaku, jak współczynnik przy x^n w wyrażeniu funkcji V , to wtedy ma miejsce równanie (1), a wszystkie pierwiastki równania $V=0$ są rzeczywiste i różne (art. 77).

145. Przypuśćmy, że tworząc zwykłym sposobem grupę funkcyj Sturm'a dla równania $V=0$, doszliśmy do funkcji V_i , tożsamościowo równej zeru. To wskazuje, że równanie $V=0$ ma pierwiastki wielokrotne, oraz, że wszystkie funkcje grupy

$$(1) \quad V, V_1, V_2, \dots, V_{i-1}$$

są podzielne przez funkcją V_{i-1} , która jest największym wspólnym dzielnikiem funkcji V i jej pochodnej V_1 .

Nazywając

$$\frac{V}{V_{i-1}} = U, \quad \frac{V_1}{V_{i-1}} = U_1, \dots,$$

zauważmy, że funkcje grupy

$$(2) \quad U, U_1, U_2, \dots, U_{i-1}$$

posiadają wszystkie cztery własności charakterystyczne funkcji Sturm'a dla jakiegokolwiek przedziału a, b ; wskutek tego, oznaczywszy przez l ilość pierwiastków równania $U = 0$, zawartych między a i b , a przez v_x ilość zmian znaku w grupie (2), mamy

$$v_a - v_b = l.$$

Ilość zmian znaku w grupie (2) jest równa ilości zmian znaku w grupie (1), a l jest liczbą, wyrażającą ilość różnych pierwiastków równania $V = 0$, zawartych między a i b . Wskutek tego, na zasadzie ostatniego równania, wnosimy, że twierdzenie Sturm'a, stosowane do równania z pierwiastkami wielokrotnymi, daje możność dowiedzieć się, ile równanie ma pierwiastków *różnych*, zawartych między danymi krańcami.

146. Z tego, cośmy powiedzieli w tym rozdziale i w poprzedzającym, wynika, że zadanie o oddzielaniu pierwiastków rzeczywistych równania — a tym samym i zadanie o rozwinięciu pierwiastka rzeczywistego na ułamek dziesiętny albo na ułamek ciągły — należy uważać za rozwiązane w zupełności.

Pozostaje więc tylko oddzielanie pierwiastków zespolonych, czemu poświęcimy rozdział następujący; teraz zaś zastosujemy twierdzenie Sturm'a do kilku przykładów.

PRZYKŁAD 1. Dajmy na to, że potrzeba oddzielić pierwiastki równania

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Tworząc funkcje Sturm'a według ogólnego pravidła, otrzymamy

$$V = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1,$$

$$V_1 = 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4,$$

$$V_2 = 7x^2 + 8x - 4,$$

$$V_3 = 4x + 5,$$

$$V_4 = +1.$$

Stąd wprost widzimy, że wszystkie pierwiastki równania $V = 0$ są rzeczywiste i nierówne. Zawierają się one między następującymi liczbami

$$-2, \quad -1\frac{1}{2}, \quad 0, \quad 1, \quad 2.$$

PRZYKŁAD 2. Weźmy równanie

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Znajdziemy tu

$$\begin{aligned} V &= x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1, \\ V_1 &= 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2, \\ V_2 &= -6x^3 + 33x^2 - 44x + 27, \\ V_3 &= -67x^2 + 102x - 69. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja V_3 nie posiada pierwiastków rzeczywistych, przeto możemy na niej się zatrzymać. Nadając zmiennej x wartości $-\infty, 0, +\infty$ otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	V	V_1	V_2	V_3
$+\infty$	+	+	-	-
0	-	+	+	-
$-\infty$	-	+	+	-

Stąd widzimy, że równanie $V = 0$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty; znajduje się on między 0 i 1, gdyż $V(0) < 0, V(1) > 0$.

PRZYKŁAD 3. Weźmy równanie

$$x^4 - 12x^3 + 55x^2 + 96 = 0.$$

Dla przedziału z krańcami dodatnimi możemy przyjąć

$$\begin{aligned} V &= x^4 - 12x^3 + 55x^2 + 96, \\ V_1 &= 2x^2 - 18x + 55, \\ V_2 &= -348x - 329, \\ V_3 &= -1. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	V	V_1	V_2	V_3
$+\infty$	+	+	-	+
0	+	+	-	+

z której widzimy, że nasze równanie nie ma pierwiastków dodatnich. Dla przedziału z krańcami ujemnymi mamy taką grupę funkcji Sturm'a:

$$\begin{aligned} V &= x^4 - 12x^3 + 55x^2 + 96, \\ V_1 &= -2x^2 + 18x - 55, \\ V_2 &= -348x - 329, \\ V_3 &= +1. \end{aligned}$$

Przy pomocy tych funkcji układamy następującą tablicę:

x	V	V_1	V_2	V_3
0	+	-	-	+
$-\infty$	+	-	+	+

z której widzimy, że równanie $V = 0$ nie ma również pierwiastków ujemnych, co zresztą można było wprost wnieść z tego, że wszystkie współczynniki w wyrażeniu $V(-x)$ są dodatne.

ROZDZIAŁ VIII.

WYZNACZENIE IŁOŚCI PIERWIĄTKÓW, ZAWARTYCH WEWNĄTRZ DANEGO KONTURU. — ODDZIELANIE PIERWIĄTKÓW ZESPOŁONYCH. — PRZYKŁAD. — TWIERDZENIE HERMITA.

§ I. TWIERDZENIE CAUCHY'EGO.

147. W tym rozdziale przyjmiemy, że współczynniki danego równania są niekoniecznie rzeczywiste, lecz mogą być zespolone.

Przy dowodzeniu twierdzenia o istnieniu pierwiątka w rozdziale 2-gim, rozważaliśmy wielkość szczególną, którą nazywaliśmy odchyleniem danej krzywej $z'z''$. Była to różnica między wartościami wielkości $\text{odch } f(z)$ w punktach z'' i z , kiedy punkt bieżący z , poruszając się w sposób ciągły po krzywej $z'z''$, przechodzi od początku z do końca z'' , przy założeniu niezbędnym, iż krzywa $z'z''$ nie zawiera ani jednego takiego punktu, w którymby wartość funkcji $f(z)$ była równą zeru. Obecnie, ograniczając się wyłącznie do krzywych zamkniętych, zajmiemy się pytaniem, jaki istnieje związek między odchyleniem takiej linii krzywej a ilością pierwiątków równania $f(z) = 0$, zawartych wewnątrz niej.

Zacznijmy od udowodnienia następującego twierdzenia pomocniczego.

Twierdzenie pomocnicze 1. *Odchylenie jakiegokolwiek krzywej zamkniętej, wyznaczone przez funkcją liniową $z - a$, równa się 2π albo zeru, zależnie od tego, czy punkt a znajduje się wewnątrz krzywej zamkniętej, czy też zewnątrz niej.*

Jest to wprost widoczne na rysunku. Istotnie, gdziekolwiek znajduje się punkt a (fig. 7), czyto wewnątrz, czy też zewnątrz konturu $z'z''$, zawsze wartość $\text{odch } f(z)$ równa się wielkości kąta zax i, oczywiście, gdy punkt bieżący z ,

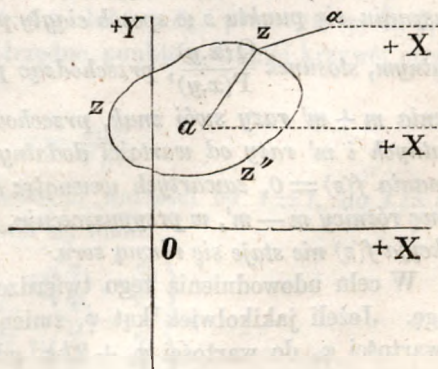


Fig. 7.

poruszając się po konturze $z z' z''$ w kierunku dodatnym, wróci na pierwotne swoje stanowisko, to spólcześnie kąt zax , zmieniając się odpowiednio, otrzyma przyrost 2π albo zero, stosownie do tego, gdzie się znajduje punkt a , wewnątrz czy też zewnątrz konturu $z z' z''$. A zatem, w pierwszym przypadku mamy

$$\text{odch}_{(z-a)} z z' z'' z = 2\pi,$$

w drugim zaś

$$\text{odch}_{(z-a)} z z' z'' z = 0.$$

Twierdzenie pomocnicze 2. *Ilość pierwiastków równania $f(z)=0$, zawartych wewnątrz krzywej zamkniętej $z z' z'' z$, równa się odchyleniu krzywej $z z' z'' z$ o kierunku dodatnym, wyznaczonemu przez funkcję $f(z)$, podzielonemu przez 2π .* Przypuszczamy tu, że kierunek krzywej $z z' z'' z$ jest dodatni, za jaki przyjmujemy kierunek od odciętych dodatnich w stronę rzędnych dodatnich.

Wyrażmy funkcję $f(z)$ jako iloczyn czynników liniowych,

$$f(z) = A(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n),$$

gdzie A przedstawia spólczynnik najwyższej potęgi zmiennej z w wyrażeniu funkcji $f(z)$, i oznaczymy, dla skrócenia, dwumian $z - a_i$ przez u_i . Mamy tu

$$\text{odch}_{fz} z z' z'' z = \text{odch}_{u_1 z} z z' z'' z + \text{odch}_{u_2 z} z z' z'' z + \dots + \text{odch}_{u_n z} z z' z'' z.$$

Lecz, według twierdzenia poprzedzającego, wartość $\text{odch}_{u_i z} z z' z'' z$ jest 2π albo zero, stosownie do tego, czy punkt a_i znajduje się wewnątrz albo zewnątrz krzywej $z z' z'' z$; a więc, strona prawa równania ostatniego równa się iloczynowi 2π przez liczbę, wyrażającą ilość pierwiastków równania $f(z)=0$, zawartych wewnątrz krzywej $z z' z'' z$, o. n. d.

148. Przy pomocy tykoko dowiedzionego twierdzenia, łatwo możemy udowodnić następujące twierdzenie Cauchy'ego.

TWIERDZENIE. *Mając jakąkolwiek funkcję całkowitą $f(z)$ zmiennej zespolonej $z = x + iy$, przyjmijmy, że*

$$f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

gdzie $P(x, y)$, $Q(x, y)$ są funkcjami rzeczywistymi, całkowitymi. Jeżeli, przy poruszaniu się punktu z w sposób ciągły po całym konturze $z z' z'' z$ w kierunku dodatnim, stosunek $\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$, przechodząc pewną ilość razy przez wartość zero, zmienia $m + m'$ razy swój znak, przechodząc m razy od wartości ujemnych do dodatnich i m' razy od wartości dodatnich do ujemnych, to ilość pierwiastków równania $f(z)=0$, zawartych wewnątrz konturu $z z' z'' z$, jest wyrażona przez połowę różnicy $m - m'$, w przypuszczeniu, że w żadnym punkcie konturu $z z' z'' z$ funkcja $f(z)$ nie staje się równą zero.

W celu udowodnienia tego twierdzenia, zrobimy uprzednio następującą uwagę. Jeżeli jakikolwiek kąt φ , zmieniając się w sposób ciągły, przechodzi od wartości φ_0 do wartości $\varphi_0 + 2k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą, albo zero, to spólcześnie wielkość $\text{tg } \varphi$, zmieniając się odpowiednio, przechodzi

pewną ilość razy przez zero, zmieniając swój znak juźto z — na +, juźteź z + na —, i, jeźeli oznaczymy przez m i m' ilość przejść pierwszego rodzaju i drugiego, to, oczywiście, będyemy mieli taką równość:

$$m - m' = 2k.$$

Kładąc

$$\varphi = \text{odch } f(z) = \text{arc tg } \frac{Q(x,y)}{P(x,y)},$$

przypuścmy, że zmienna niezależna z , obchodząc cały kontur $z z' z'' z$ w kierunku dodatnym, wraca do swojej pierwotnej wartości; spólcześnie kąt φ , zmieniając się w sposób ciągły, powiększy się o $2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą albo zerem, tak iż, na zasadzie powyższej uwagi, mamy

$$k = \frac{m - m'}{2},$$

gdzie m jest liczbą wskazującą, ile razy $\text{tg } \varphi = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ przechodzi przez zero od wartości ujemnych do dodatnych, a liczba m' wskazuje, ile razy ta sama wielkość przechodzi przez zero od wartości dodatnych do ujemnych. Lecz, według 2-go twierdzenia pomocniczego, liczba k , stanowiąca stronę lewą powyższego równania, przedstawia ilość pierwiastków równania $f(z) = 0$, zawartych wewnątrz konturu $z z' z'' z$. Jest więc twierdzenie dowiedzione.

149. Różnica $m - m'$, o której mowa w twierdzeniu Cauchy'ego, stanowi to, co w rozdziale poprzednim nazywaliśmy pierwszym nadmiarem funkcji; nadmiar ten umiemy wyznaczać, jeźeli dana funkcja jest wymierna.

Ażeby mieć do czynienia wyłącznie z funkcjami wymiernymi, dość jest przypuścić, że krzywa zamknięta $z z' z'' z$ jest taka, iż spólrzędne każdego jej punktu wyrażają się jako funkcje wymierne zmiennej niezależnej t .

Zwykle bywa tak, że kontur $z z' z'' z$ składa się z kilku oddzielnych krzywych $z z', z' z'', \dots$; spólrzędne punktów na pierwszej krzywej otrzymać można ze wzorów

$$x = \frac{\varphi(t)}{\Phi(t)}, \quad y = \frac{\psi(t)}{\Psi(t)},$$

zmieniając zmienną niezależną t od $t = t_0$ do $t = t'_0$, przyczym $\varphi, \Phi, \psi, \Psi$ przedstawiają funkcje całkowite; spólrzędne punktów drugiej krzywej otrzymują się z podobnych wzorów

$$x = \frac{\varphi_1(t)}{\Phi_1(t)}, \quad y = \frac{\psi_1(t)}{\Psi_1(t)}$$

przez nadawanie dla t wszelkich możebnych wartości od $t = t_1$ do $t = t'_1$, i t. d. Wówtczas szukany nadmiar równa się sumie

$$E_{t_0}^{t'_0} \frac{Q\left(\frac{\varphi}{\Phi}, \frac{\psi}{\Psi}\right)}{P\left(\frac{\varphi}{\Phi}, \frac{\psi}{\Psi}\right)} + E_{t_1}^{t'_1} \frac{Q\left(\frac{\varphi_1}{\Phi_1}, \frac{\psi_1}{\Psi_1}\right)}{P\left(\frac{\varphi_1}{\Phi_1}, \frac{\psi_1}{\Psi_1}\right)} + \dots,$$

której każdy wyraz oblicza się sposobem, opisanym w rozdziale poprzednim.

150. Najczęściej zdarza się, że dany kontur składa się z obwodu prostokąta, którego boki są równoległe do osi współrzędnych. Obchodząc obwód takiego prostokąta w kierunku dodatnim, oznaczmy współrzędne wierzchołków kolejno przez (a, b) , (a', b) , (a', b') , (a, b') , a przez r ilość pierwiastków równania $f(z) = 0$, zawartych wewnątrz tego prostokąta; wówczas mamy

$$r = \frac{1}{2} E_a^a \frac{Q(x, b)}{P(x, b)} + \frac{1}{2} E_b^b \frac{Q(a', y)}{P(a', y)} + \frac{1}{2} E_{a'}^a \frac{Q(x, b')}{P(x, b')} + \frac{1}{2} E_{b'}^b \frac{Q(a, y')}{P(a, y')}.$$

§ II. ODDZIELANIE PIERWIĄTKÓW ZESPOLONYCH.

151. Przyjmijmy, że równanie dane $f(z) = 0$ nie posiada pierwiastków wielokrotnych, i oznaczmy przez R kraniec wyższy dla modułów jego pierwiastków. Na osiach współrzędnych oddzielmy długości $OF = OG = OH = OI = R$ (fig. 8), a przez punkty F, G, H, I poprowadźmy proste, równoległe do tych osi; otrzymamy kwadrat $ABCD$, wewnątrz którego znajdują się wszystkie pierwiastki równania $f(z) = 0$. Przeprowadzając szereg prostych, równoległych

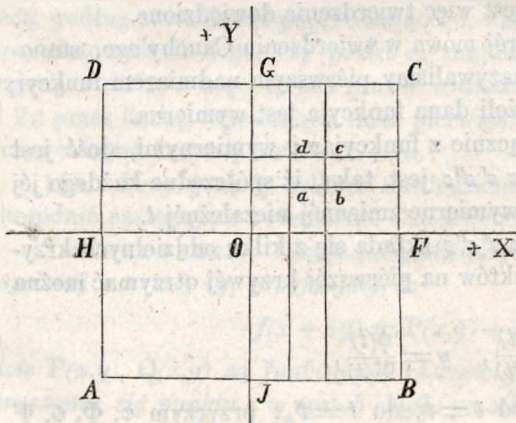


Fig. 8

do osi współrzędnych, rozdzielimy kwadrat $ABCD$ na pewną ilość takich prostokątów, jak $abcd$, i, przy pomocy opisanego wyżej sposobu, oznaczmy, które z nich zawierają pierwiastki, a które ich nie zawierają. Te prostokąty, wewnątrz których jest zawarty więcej niż po jednym pierwiastku, będziemy w ten sam sposób rozkładali na mniejsze, dotąd, dopóki nie otrzymamy prostokątów, wewnątrz których jest niewięcej jak po jednym pierwiastku; wówczas wszystkie pierwiastki równania $f(z) = 0$ będą oddzielone.

Może się zdarzyć, że równanie $f(z) = 0$ będzie miało pierwiastek na jednej z tak poprowadzonych prostych, np. na ad albo na ab , których równania niech będą odpowiednio $x = a$ i $y = b$. Wtedy dwie funkcje $P(a, y)$ i $Q(a, y)$, albo $P(x, b)$ i $Q(x, b)$ będą miały spólny dzielnik, posiadający pierwiastek rzeczywisty; okaże się to przy poszukiwaniu nadmiaru funkcji $\frac{Q(a, y)}{P(a, y)}$, albo funkcji $\frac{Q(x, b)}{P(x, b)}$. Należy jeszcze wskazać na kraniec, do którego dopro-

wadziwszy rozkładanie kwadratu ABCD na mniejsze, będziemy już upewnieni, że wszystkie pierwiastki równania $f(z) = 0$ są oddzielone. Zajmiemy się tym w rozdziale następnym, a teraz objaśnimy na przykładzie to, cośmy tu dotąd ogólnie rozważali.

152. PRZYKŁAD. Należy oddzielić wszystkie pierwiastki równania

$$f(z) = z^5 - 7z^2 + 5z - 1 = 0.$$

Jako wyższy kraniec dla modułów pierwiastków możemy tu przyjąć liczbę 3, gdyż, kładąc $\text{mod } z \geq 3$, mamy

$$\text{mod } f(z) \geq \text{mod}^5 z - 7 \text{mod}^2 z - 5 \text{mod } z - 1 > 0.$$

Poprowadzmy proste równoległe do osi odciętych, w odległościach od początku współrzędnych równych liczbom odpowiednio 1, 2, 3, -1, -2, -3, i podobny układ prostych równoległych do osi rzędnych; otrzymamy 36 kwadratów (fig. 9) elementarnych, wewnątrz których zawierają się wszystkie pięć pierwiastków równania danego; należy oznaczyć, wewnątrz których z tych kwadratów znajduje się przynajmniej po jednym pierwiastku.

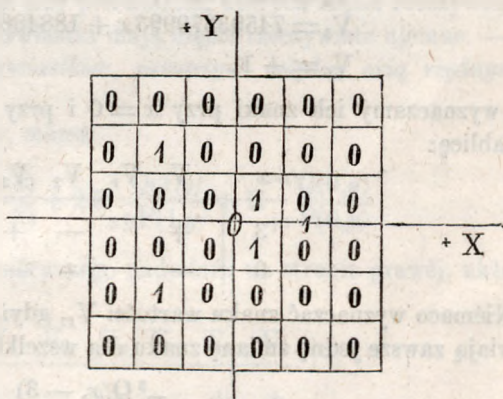


Fig. 9.

W tym celu, kładąc

$$f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y),$$

wypiszemy wyrażenia funkcji P i Q,

$$P(x,y) = x^5 - 7x^2 + 5x - 1 - (10x^3 - 7)y^2 + 5xy^4,$$

$$Q(x,y) = (5x^3 - 14x + 5)y - 10x^2y^3 + y^5,$$

i poprowadzimy badanie w następującym porządku.

a. Wyznaczenie ilości pierwiastków, znajdujących się z prawej strony osi rzędnych.

Oznaczywszy tę ilość przez r , mamy

$$2r = E_0^3 \frac{Q(x, -3)}{P(x, -3)} + E_{-3}^{+3} \frac{Q(3,y)}{P(3,y)} + E_3^0 \frac{Q(x,3)}{P(x,3)} + E_{+3}^{-3} \frac{Q(0,y)}{P(0,y)}.$$

Ponieważ jednak do funkcji $Q(x,y)$ wchodzi tylko nieparzyste potęgi zmiennej y , a do funkcji $P(x,y)$ tylko parzyste, zatem

$$E_0^3 \frac{Q(x, -3)}{P(x, -3)} = E_3^0 \frac{Q(x,3)}{P(x,3)},$$

$$E_{-3}^{+3} \frac{Q(3,y)}{P(3,y)} = 1 + 2E_0^3 \frac{Q(3,y)}{yP(3,y)},$$

wskutek czego wzór poprzedni może być tak napisany:

$$(1) \quad 2r = 1 + 2E_0^3 \frac{Q(x, -3)}{P(x, -3)} + 2E_0^3 \frac{Q(3, y)}{yP(3, y)} + E_{+3}^{-3} \frac{Q(0, y)}{P(0, y)}.$$

W celu obliczenia pierwszego z trzech nadmiarów na stronie prawej, tworzymy grupę funkcji

$$V = \frac{1}{3} Q(x, -3) = -5x^4 + 90x^2 + 14x - 86,$$

$$V_1 = P(x, -3) = x^5 - 90x^3 - 7x^2 + 410x + 62,$$

$$V_2 = -V = 5x^4 - 90x^2 - 14x + 86,$$

$$V_3 = 360x^3 + 21x^2 - 1964x - 310,$$

$$V_4 = 541773x^2 + 97508x - 740870,$$

$$V_5 = 74593379993x + 18848644963,$$

$$V_6 = +1,$$

i wyznaczamy ich znaki przy $x = 0$ i przy $x = 3$; otrzymujemy następującą tablicę:

x	V	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
3	+	-	+	+	+	+	+
0	-	+	-	-	+	+	+

Nie ma co wyznaczać znaku wartości V_1 , gdyż trzy wyrazy V , V_1 , V_2 przedstawiają zawsze jedną zmianę znaku dla wszelkiej wartości x . A więc

$$E_0^3 \frac{Q(x, -3)}{P(x, -3)} = 1.$$

Ażeby znaleźć wartość drugiego nadmiaru na stronie prawej wzoru (1), zważmy, że

$$\frac{Q(3, y)}{y} = y^4 - 90y^2 + 368,$$

$$P(3, y) = 15y^4 - 263y^2 + 194;$$

i dlatego

$$E_0^3 \frac{Q(3, y)}{yP(3, y)} = E_0^3 \frac{y^2 - 90y + 368}{15y^2 - 263y + 194}.$$

Kładąc

$$R = y^2 - 90y + 368,$$

$$R_1 = 15y^2 - 263y + 194,$$

$$R_2 = 1087y - 5326,$$

$$R_3 = +1,$$

układamy tablicę

y	R	R_1	R_2	R_3
9	-	-	+	+
0	+	+	-	+

z której wnosimy, że

$$E_0^3 \frac{Q(3,y)}{yP(3,y)} = 1.$$

Ostatni nadmiar na stronie prawej wzoru (1) wyznacza się bezpośrednio; mianowicie:

$$E_{+3}^{-3} \frac{Q(0,y)}{P(0,y)} = E_{+3}^{-3} \frac{5y + y^5}{-1 + 7y^2} = 1.$$

Wstawiając wartości otrzymane w stronę prawą wzoru (1) i dzieląc obie strony przez 2, będziemy mieli

$$r = 3.$$

To wskazuje, że równanie dane ma trzy pierwiastki, których części rzeczywiste są dodatne; pozostałe zaś dwa pierwiastki mają części rzeczywiste ujemne. —

b. Wyznaczenie ilości pierwiastków, zawartych między osią rzędnych i prostą $x = 1$.

Oznaczywszy tę ilość przez r , mamy

$$(2) \quad 2r = 1 + 2E_0^1 \frac{Q(x, -3)}{P(x, -3)} + 2E_0^3 \frac{Q(1,y)}{yP(1,y)} + E_{+3}^{-3} \frac{Q(0,y)}{P(0,y)}.$$

Ażeby wyznaczyć wartość pierwszego nadmiaru na stronie prawej, układamy tablicę

x	V	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	V ₅	V ₆
1	+	—	—	—	+	+	
0	—	+	—	—	+	+	

i znajdujemy

$$E_0^1 \frac{Q(x, -3)}{P(x, -3)} = 1.$$

Drugi nadmiar na stronie prawej wzoru (2) może być przedstawiony tak:

$$E_0^3 \frac{Q(1,y)}{yP(1,y)} = E_0^3 \frac{y^2 - 10y - 4}{5y^2 - 3y - 2}.$$

Wypisujemy funkcje

$$S = y^2 - 10y - 4,$$

$$S_1 = 5y^2 - 3y - 2,$$

$$S_2 = 47y + 18,$$

$$S_3 = +1,$$

z których pomocą układamy tablicę

y	S	S ₁	S ₂	S ₃
9	—	+	+	+
0	—	—	+	+

a z niej wnosimy, że

$$E_0^3 \frac{Q(1,y)}{yP(1,y)} = 0.$$

Ostatni z nadmiarów, wchodzących do strony prawej wzoru (2), był znaleziony powyżej; jest on równy jedności.

Wstawiając wartości otrzymane we wzór (2), i dzieląc obie strony przez 2, będziemy mieli

$$r = 2.$$

Ponieważ równanie dane ma jeden tylko pierwiastek rzeczywisty, zawarty między 1 i 2, zatem otrzymany wypadek wskazuje, że ma ono dwa pierwiastki zespolone sprzężone, których część rzeczywista przypada między 0 i 1. —

c. Wyznaczenie ilości pierwiastków, zawartych wewnątrz prostokąta, utworzonego przez proste: $y = \pm 1$, $x = 0$, $x = 1$.

Oznaczywszy przez r tę ilość, mamy

$$(3) \quad r = 1 + E_0^1 \frac{Q(x, -1)}{P(x, -1)} + E_0^1 \frac{Q(1,y)}{yP(1,y)}.$$

W celu wyznaczenia pierwszego z nadmiarów na stronie prawej, przy pomocy funkcji

$$U = Q(x, -1) = -5x^4 + 10x^3 + 14x - 6,$$

$$U_1 = P(x, -1) = x^5 - 10x^3 - 7x^2 + 10x + 6,$$

$$U_2 = -U = 5x^4 - 10x^3 - 14x + 6,$$

$$U_3 = 40x^3 + 21x^2 - 44x - 30,$$

$$U_4 = 999x^2 + 4204x - 1290,$$

$$U_5 = -978727x + 343443,$$

$$U_6 = -1,$$

układamy następującą tablicę znaków:

x	U	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
1	+		-	-	+	-	-
0	-		+	-	-	+	-

z której otrzymujemy

$$E_0^1 \frac{Q(x, -1)}{P(x, -1)} = 1.$$

Ażeby otrzymać wartość drugiego nadmiaru na stronie prawej wzoru (3), bierzemy powyżej już utworzone funkcje S , S_1 , S_2 , S_3 i określamy ich znaki dla $y = 0$ i dla $y = 1$; otrzymujemy

y	S	S_1	S_2	S_3
1	-	0	+	+
0	-	-	+	+

Stąd znajdujemy

$$E_0^1 \frac{Q(1,y)}{yP(1,y)} = 0.$$

A zatem

$$r = 2,$$

co wskazuje na istnienie dwu pierwiastków zespolonych sprzężonych, w których współczynnik części urojonej jest, co do wartości bezwzględnej, mniejszy od jedności.

d. Wyznaczenie ilości pierwiastków, zawartych wewnątrz kwadratu, utworzonego przez proste: $x = -1$, $x = -2$, $y = 1$, $y = 2$.

Oznaczając tę ilość przez r , będziemy mieli

$$(4) \quad 2r = E_{-2}^{-1} \frac{Q(x,1)}{P(x,1)} + E_1^2 \frac{Q(-1,y)}{P(-1,y)} + E_{-1}^{-2} \frac{Q(x,2)}{P(x,2)} + E_{-2}^1 \frac{Q(-2,y)}{P(-2,y)}.$$

Ażby wyznaczyć pierwszy z nadmiarów na stronie prawej, zauważymy, że

$$E_{-2}^{-1} \frac{Q(x,1)}{P(x,1)} = -E_{-2}^{-1} \frac{Q(x,-1)}{P(x,-1)}.$$

Układamy tablicę znaków

x	U	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
-1	-		+	-	-	+	+
-2	-		+	-	-	+	+

i znajdujemy

$$E_{-2}^{-1} \frac{Q(x,1)}{P(x,1)} = 0.$$

Przechodząc do wyznaczenia następującego nadmiaru, przekształcamy naprzód jego wyrażenie; otrzymujemy

$$\begin{aligned} E_1^2 \frac{Q(-1,y)}{P(-1,y)} &= E_1^2 \frac{y^3 - 10y^2 + 24y}{-5y^4 + 17y^2 - 14} = E_1^4 \frac{y^2 - 10y + 24}{-5y^2 + 17y - 14} \\ &= E_1^4 \frac{(y-4)(y-6)}{-5y^2 + 17y - 14}. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja pod znakiem E staje się równą zeru przy $y = 4$, zatem z rozważanego teraz konturu należy oddzielić nieskończenie małą część, zawierającą punkt $x = -1$, $y = 2$, i rozważać ją oddzielnie. Odpowiednie krańce w drugim i trzecim z nadmiarów, wchodzących do wzoru (4), należy zmienić o wartość nieskończenie małą; tak iż, zamiast drugiego nadmiaru, potrzeba podstawić

$$E_1^{2-h} \frac{Q(-1,y)}{P(-1,y)} = E_1^4 \frac{y-6}{5y^2 - 17y + 14} = 0,$$

gdzie h oznacza nieskończenie małą liczbę dodatnią.

Zamiast trzeciego nadmiaru na stronie prawej wzoru (4) podstawiamy

$$\begin{aligned} E_{-1-h}^{-2} \frac{Q(x,2)}{P(x,2)} &= E_{-1-h}^{-2} \frac{(x+1)(5x^3 - 5x^2 - 35x + 21)}{x^5 - 40x^3 - 7x^2 + 85x + 27} \\ &= E_{-1}^{-2} \frac{-5x^3 + 5x^2 + 35x - 21}{x^5 - 40x^3 - 7x^2 + 85x + 27}. \end{aligned}$$

Bardzo łatwo, przy pomocy twierdzenia Budan'a, przekonać się, że funkcja $5x^3 - 5x^2 - 35x + 21$ nie ma ani jednego pierwiastka między -1 i -2 ; a więc

$$E_{-1-h}^{-2} \frac{Q(x,2)}{P(x,2)} = 0.$$

Czwarty wyraz na stronie prawej wzoru (5) można przedstawić tak:

$$E_2^1 \frac{Q(-2,y)}{P(-2,y)} = E_1^4 \frac{y^2 - 40y + 113}{10y^2 - 87y + 71}.$$

Przy przejściu zmiennej y od $y=1$ do $y=4$, funkcja $y^2 - 40y + 113$ zmienia swój znak raz jeden, przechodząc wówczas od wartości dodatnich do ujemnych, a funkcja $10y^2 - 87y + 71$ pozostaje wciąż ujemną; wskutek tego,

$$E_2^1 \frac{Q(-2,y)}{P(-2,y)} = 1.$$

Nakoniec, ażeby wyznaczyć nadmiar, odpowiadający wydzielonemu punktowi $x = -1$, $y = 2$, określamy znaki wartości

$$\frac{Q(-1,2-h)}{P(-1,2-h)}, \quad \frac{Q(-1-h,2)}{P(-1-h,2)},$$

przy nieskończenie małym dodatnim h , i znajdujemy, że pierwsza z wypisanych wartości jest ujemna, druga zaś dodatnia; a więc, szukany nadmiar jest równy 1.

Na zasadzie tak otrzymanych wartości nadmiarów, ze wzoru (4) otrzymujemy

$$r = 1.$$

To wskazuje, że dane równanie ma jeden pierwiastek zespolony, którego część rzeczywista jest zawarta między -1 i -2 , a współczynnik części urojonej między 1 i 2. Temu pierwiastkowi odpowiada drugi, sprzężony.

Oddzieliłiśmy więc wszystkie pierwiastki danego równania.

§ III. TWIERDZENIE HERMITE'A.

153. Poprowadźmy na płaszczyźnie spółrzednych dowolną prostą i przez A i B oznaczmy dwa punkty na tej prostej, znajdujące się w nieskończenie wielkiej odległości po różnych jej stronach. Spółrzedne punktów na prostej AB mogą być obliczone ze wzorów

$$(1) \begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha + b, \end{cases}$$

jeżeli będziemy zmiennej t nadawali wartości od $t = -\infty$ do $t = +\infty$, przez α rozumieli kąt, utworzony przez kierunek dodatni prostej AB z kierunkiem dodatnim osi odciętych, przez b zaś odcinek osi rzędnych. W przypadku szczególnym, kiedy prosta AB jest równoległa do osi rzędnych, zamiast wzorów (1) należy wziąć

$$\begin{aligned} x &= a, \\ y &= t, \end{aligned}$$

gdzie a oznacza liczbę stałą.

Zakładamy, że żaden z punktów, określających pierwiastki równania $f(z) = 0$, nie leży na prostej AB .

Oznaczywszy przez a_1, a_2, \dots pierwiastki równania $f(z) = 0$, weźmy pod uwagę jeden z nich, np. a_i , i przyjmijmy $z - a_i = u_i$. W przypuszczeniu, że zmienna t , wzrastając w sposób ciągły, przechodzi przez wszystkie wartości od $t = -\infty$ do $t = +\infty$, punkt z , odpowiadający zmiennej zespolonej $z = x + iy$, zmieniając odpowiednio swoje położenie, będzie się jednocześnie poruszał w kierunku dodatnim po prostej AB , w kierunku od A do B . Odchylenie funkcji liniowej u_i będzie się jednocześnie także zmieniało w sposób ciągły, i przyrost, jaki ono otrzyma przy przejściu punktu z od A do B , oczywiście, będzie się równał $+\pi$ albo $-\pi$, stosownie do tego, czy punkt a_i znajduje się nad, czy też pod prostą AB . Wskutek tego, mamy równość

$$\text{odch}_{u_i} AB = e_i \pi,$$

gdzie $e_i = 1$, jeżeli punkt a_i leży nad prostą AB , zaś $e_i = -1$, jeżeli punkt a_i leży pod prostą AB .

Kładąc w równaniu ostatnim kolejno $i = 1, 2, \dots, n$ i zważając, iż

$$\text{odch}_{u_1} AB + \text{odch}_{u_2} AB + \dots + \text{odch}_{u_n} AB = \text{odch}_f AB,$$

otrzymamy

$$\text{odch}_f AB = (e_1 + e_2 + \dots + e_n) \pi.$$

Jeżeli przez r oznaczmy ilość pierwiastków równania $f(z) = 0$, znajdujących się nad prostą AB , przez s zaś ilość pierwiastków tegoż równania, znajdujących się pod prostą AB , to, oczywiście, będziemy mieli

$$e_1 + e_2 + \dots + e_n = r - s,$$

a więc

$$\text{odch}_f AB = (r - s) \pi.$$

Gdy jakakolwiek liczba zmienna α , albo wciąż wzrastając, albotóż wciąż się zmniejszając, przechodzi od wartości α_0 do $\alpha_0 + \pi$, to wówczas $\text{tg } \alpha$, zmieniając się odpowiednio, przechodzi raz jeden przez wartość zero od wartości ujemnych do dodatnich i raz jeden przez ∞ od wartości dodatnich do ujemnych. Na zasadzie tej uwagi, z ostatniej równości wyprowadzamy następujące:

$$\begin{aligned} & \text{E} \quad \text{tg odch } f(z) = r - s, \\ & \text{I} \quad \text{tg odch } f(z) = s - r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{I} \quad \text{tg odch } f(z) = s - r. \end{aligned}$$

Kładąc

$$f(t(\cos \alpha + i \sin \alpha) + bi) = \varphi(t) + i\psi(t),$$

mamy

$$\operatorname{tg} \operatorname{odch} f(z) = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)},$$

wskutek czego, dwa poprzedzające wzory mogą być napisane tak :

$$(1) \quad \mathbb{E}_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = r - s,$$

$$(2) \quad \mathbb{I}_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = s - r.$$

Oba te wzory są widocznie jednoznaczne wraze, kiedy funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są jednakowego stopnia. Ale, jeżeli funkcja $\varphi(t)$ jest wyższego stopnia niż funkcja $\psi(t)$, to należy stosować wzór (2); jeżeli zaś odwrotnie, funkcja $\varphi(t)$ jest niższego stopnia niż funkcja $\psi(t)$, natenczas należy korzystać z formuły (1). Zresztą, możemy zawsze przyjąć, że stopień funkcji $\psi(t)$ jest niższy od stopnia funkcji $\varphi(t)$; aby to osiągnąć, dość jest podzielić funkcję $f(z)$ przez pewną liczbę zespoloną.

Wzór (2) dał Hermite; ten wzór wyraża następujące

Twierdzenie. *Jeżeli $f(z)$ jest funkcją całkowitą i jeżeli przyjmiemy*

$$f(t(\cos \alpha + i \sin \alpha) + bi) = \varphi(t) + i\psi(t),$$

gdzie α i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to wartość całki $\mathbb{I}_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}$ jest równa różnicy między liczbą, wyrażającą ilość pierwiastków równania $f(z) = 0$, znajdujących się pod prostą $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$, i liczbą, wyrażającą ilość pierwiastków tegoż równania, znajdujących się nad prostą $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$ — w przypuszczeniu, że prosta $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$ nie przechodzi przez żaden pierwiastek równania $f(z) = 0$, i że funkcja $\psi(t)$ nie jest wyższego stopnia niż funkcja $\varphi(t)$.

Wyznaczywszy przy pomocy tego twierdzenia różnicę $r - s$, wyznaczymy tym samym obie liczby r i s , gdyż $r + s = n$.

154. Ilekroć będą uprzednio wiadome liczby r i s , wartość bezwzględna różnicy $r - s$ przedstawi kraniec niższy dla ilości pierwiastków rzeczywistych jednego z równań $\varphi(t) = 0$ lub $\psi(t) = 0$.

Jeżeli np. przyjmiemy

$$(1) \quad \begin{aligned} f(x) &= (x - a_1 - b_1 i)(x - a_2 - b_2 i) \dots (x - a_n - b_n i) \\ &= \varphi(x) + i\psi(x), \end{aligned}$$

gdzie $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ oznaczają liczby rzeczywiste, a $b_1 > 0, b_2 > 0, \dots, b_n > 0$, i jeżeli przypuścimy, że prosta AB razem się schodzi z osią odciętych, to będziemy mieli $r = n, s = 0$ i

$$(2) \quad \mathbb{I}_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = -n,$$

skąd wnosimy, że równanie $\varphi(x) = 0$ ma przynajmniej n pierwiastków rzeczywistych i różnych. A ponieważ funkcja $\varphi(x)$ jest n -go stopnia, więc wszystkie pierwiastki równania $\varphi(x) = 0$ są pojedyncze i rzeczywiste. — Prócz tego, przyjmując pod uwagę, że funkcja $\psi(x)$ jest $(n-1)$ -go stopnia, z równania (2) wprost wniesiemy, że wszystkie pierwiastki równania $\psi(x) = 0$ są rzeczywiste, pojedyncze i przegradzające się z pierwiastkami równania $\varphi(x) = 0$.

Oznaczywszy przez p i q dwie dowolnie wzięte liczby rzeczywiste, mamy

$$(p + qi)f(x) = p\varphi(x) - q\psi(x) + i[p\psi(x) + q\varphi(x)].$$

Stosując do tej funkcji twierdzenie Hermite'a, otrzymamy

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{p\psi(x) + q\varphi(x)}{p\varphi(x) - q\psi(x)} = -n,$$

skąd wynika, że wszystkie pierwiastki równań

$$p\varphi(x) - q\psi(x) = 0,$$

$$p\psi(x) + q\varphi(x) = 0$$

są rzeczywiste, pojedyncze i, prócz tego, przegradzające się nawzajem.

155. PRZYKŁAD. Ażeby znaleźć ilość pierwiastków równania

$$f(z) = z^5 - 7z^2 + 5z - 1 = 0,$$

znajdujących się po prawej i po lewej stronie osi rzędnych, przyjmiemy $z = iy$; jest tu

$$f(iy) = 7y^2 - 1 + iy(y^4 + 5),$$

$$E_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(y^4 + 5)}{7y^2 - 1} = -1.$$

A więc

$$r - s = -1, \quad r + s = 5,$$

skąd otrzymujemy

$$r = 2, \quad s = 3.$$

Równanie przeto nasze ma dwa pierwiastki po lewej stronie osi rzędnych i trzy po prawej jęj stronie.

ROZDZIAŁ IX.

OBLICZANIE ILOCZYNU WSZYSTKICH WARTOŚCI JAKIEJKOLWIEK FUNKCYI CAŁKOWITEJ PIERWIĄSTKA RÓWNANIA DANEGO. — OGÓLNA POSTAĆ FUNKCYI WYMIERNEJ JEDNEGO ALBO WIĘKSZEJ ILOŚCI PIERWIĄSTKÓW DANEGO RÓWNANIA. — PRZEKSZTAŁCENIE RÓWNANIA. — SPOSÓB TSCHIRNHAUSA ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ 3-GO I 4-GO STOPNIA. — TWIERDZENIE LAGRANGE'A O RÓWNANIACH, MAJĄCYCH PIERWIĄSTKI SPÓLNE — ILOCZYN KWADRATÓW RÓŻNIC PIERWIĄSTKÓW RÓWNANIA. — SPOSÓB LAGRANGE'A ODDZIELANIA PIERWIĄSTKÓW.

§ I. O RUGOWNIKU.

156. Oznaczając przez x_1, x_2, \dots, x_n pierwiastki równania

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n = 0,$$

którego współczynniki mogą być rzeczywiste albo zespolone, a przez $F(x)$ jakąkolwiek funkcję całkowitą

$$F(x) = Bx^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_m,$$

zamierzamy obliczyć wartość iloczynu

$$F(x_1) F(x_2) \dots F(x_n).$$

Iloczyn ten będziemy nazywali rugownikiem funkcji $F(x)$ względem równania $f(x) = 0$ i, dla skrócenia, będziemy go oznaczali zapomocą symbolu $[F, f]$.

Istnieje kilka sposobów rozwiązywania tego zadania; przytoczymy tu tylko te, które opierają się na zasadach dobrze nam już znanych.

Wskażemy naprzód na trzy następujące własności symbolu $[F, f]$.

Popiérwsze, przy jakimkolwiek stałym C , byle różnym od zera, jest

$$(1) \quad [F, f] = [F, Cf], \quad [CF, f] = C^n [F, f].$$

Powtóre, jeżeli f_1 jest resztą z podzielenia funkcji F przez funkcję f , to

$$(2) \quad [F, f] = [f_1, f];$$

według bowiem tożsamości

$$F(x) = f(x)Q + f_1(x),$$

wyrażającą związek między dzielnią, dzielnikiem i resztą, jest

$$F(x) = f_1(x),$$

przy wszelkich wartościach wskaźnika i od $i = 1$ do $i = n$; stąd zaś bezpośrednio wynika, iż

$$F(x_1) F(x_2) \dots F(x_n) = f_1(x_1) f_1(x_2) \dots f_1(x_n).$$

Potrzenie, ma miejsce następująca równość:

$$(3) \quad [F, f] = (-1)^{mn} \frac{B^n}{A^m} [f, F].$$

Jakoż, oznaczywszy przez x'_1, x'_2, \dots, x'_m pierwiastki równania $F(x) = 0$, z równości

$$\begin{aligned} F(x) &= B(x - x'_1)(x - x'_2) \dots (x - x'_m), \\ f(x) &= A(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(x_i) &= B(x_i - x'_1)(x_i - x'_2) \dots (x_i - x'_m), \\ f(x'_j) &= A(x'_j - x_1)(x'_j - x_2) \dots (x'_j - x_n), \end{aligned}$$

gdzie wskaźnik i i j mogą otrzymywać wartości:

$$i = 1, 2, 3, \dots, n; \quad j = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Wstawiając te wyrażenia w strony prawe równań

$$\begin{aligned} [F, f] &= F(x_1) F(x_2) \dots F(x_n), \\ [f, F] &= f(x'_1) f(x'_2) \dots f(x'_m), \end{aligned}$$

i oznaczając, dla skrócenia, przez $\Pi(x_i - x'_j)$ iloczyn mn czynników $x_1 - x'_1, x_1 - x'_2, \dots, x_n - x'_m$, otrzymamy

$$\begin{aligned} [F, f] &= B^n \Pi(x_i - x'_j), \\ [f, F] &= A^m \Pi(x'_j - x_i) \end{aligned}$$

skąd, jako wniosek, bezpośrednio wynika równość (3).

157. Przechodząc do rozwiązania naszego zadania, przypuśćmy, żeśmy wykonali szereg kolejnych dzieleń, prowadzących do odnalezienia największego wspólnego dzielnika funkcji $F(x)$ i $f(x)$, i oznaczmy przez $f_1(x), f_2(x), \dots$ wypadające tu reszty. Otrzymujemy w ten sposób związki:

$$\begin{aligned} F &= fQ + f_1, \\ f &= f_1Q_1 + f_2, \\ &\dots \\ f_{i-3} &= f_{i-2}Q_{i-2} + f_{i-1}, \\ f_{i-2} &= f_{i-1}Q_{i-1} + f_i, \end{aligned}$$

gdzie litery Q, Q_1, \dots oznaczają odpowiednie ilorazy. — Przypuśćmy, że reszta f_k jest liczbą stałą B_k , i oznaczmy przez m_1, m_2, \dots, m_{k-1} stopnie funkcji f_1, f_2, \dots, f_{k-1} , a przez B_1, B_2, \dots, B_{k-1} współczynniki najwyższych potęg

zmiennę x w ich wyrażeniach. Wówczas, na mocy wzorów, wyprowadzonych w art. poprzednim, możemy wypisać szereg równań:

$$[F, f] = [f_1, f] = (-1)^{m_1 n} \frac{B_1^n}{A^{m_1}} [f, f_1],$$

$$[f, f_1] = [f_2, f_1] = (-1)^{m_1 m_2} \frac{B_2^{m_1}}{B_1^{m_2}} [f_1, f_2],$$

$$\dots \dots \dots$$

$$[f_{k-3}, f_{k-2}] = [f_{k-1}, f_{k-2}] = (-1)^{m_{k-2} m_{k-1}} \frac{B^{m_{k-2}}}{B_{k-2}^{m_{k-1}}} [f_{k-2}, f_{k-1}],$$

$$[f_{k-2}, f_{k-1}] = [f_k, f_{k-1}] = B_k^{m_{k-1}},$$

z których znajdujemy

$$[F, f] = (-1)^{n m_1 + m_1 m_2 + \dots + m_{k-2} m_{k-1}} \frac{B_1^{n-m_2} B_2^{m_1-m_3} \dots B_k^{m_{k-1}}}{A^{m_1}}.$$

To równanie, do którego strony prawej wchodzi tylko liczby wiadome, przedstawia rozwiązanie naszego zadania.

158. PRZYKŁAD. Kładąc

$$f = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1,$$

$$F = x^3 - 2x + 3,$$

znajdujemy dwie funkcje

$$f_1 = 3x^2 - 7x + 5,$$

$$f_2 = 2x - 1,$$

czyniące zadość równaniom:

$$f = FQ + f_1,$$

$$F = f_1 Q_1 + \frac{8}{9} f_2,$$

$$f_1 = f_2 Q_2 + \frac{9}{4};$$

a zatem, mamy

$$\begin{aligned} [F, f] &= [f, F] = [f_1, F] = \frac{3^3}{1} [F, f_1] \\ &= 3^3 \left[\frac{8}{9} f_2, f_1 \right] = \frac{3^3 \cdot 8^2}{9^2} [f_2, f_1] \\ &= \frac{8^2 \cdot 2^2}{3 \cdot 3} [f_1, f_2] = \frac{2^8}{3^2} \left[\frac{9}{4}, f_2 \right] \\ &= \frac{2^8 \cdot 9}{3^2 \cdot 4} = 2^6 = 64. \end{aligned}$$

§ II. NAJPROSTSZA POSTAĆ FUNKCYI WYMIERNEJ PIERWIASTKÓW RÓWNANIA DANEGO.

159. Powyższy sposób wyznaczenia rugownika $[F, f]$ nie ujawnia niektórych jego bardzo ważnych własności, jak na przykład tój, że: jeżeli wszystkie współczynniki w wyrażeniach funkcyj F i f są liczbami całkowitymi, a współczynnik najwyższej potęgi zmiennej x w wyrażeniu fuukcyi f jest równy jedności, to wartością rugownika jest liczba całkowita.

Żeby ten brak uzupełnić, w paragrafie następnym przedstawimy inny sposób rozwiązanania tego zadania, polegający na pewnej własności wyznaczników, a jednocześnie i samemu zadaniu nadamy postać ogólniejszą.

Teraz zaś udowodnimy następujące

TWIERDZENIE. *Każda funkcycja wymierna $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ pierwiastka równania n -go stopnia $f(x) = 0$ może być przedstawiona w postaci funkcyi całkowitej tegoż pierwiastka, której stopień jest niższy od n , jeżeli tylko żadna z wartości funkcyj nie staje się nieskończenie wielką.*

Przyjmijmy, że ułamek $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ jest nieskracalny, i, uważając x jako zmienną niezależną, odnajdźmy dwie funkcyje całkowite $F(x)$ i $\Psi(x)$, czyniące za- dość równości

$$F(x) \psi(x) - \Psi(x) f(x) = C,$$

w której C oznacza jakąkolwiek liczbę stałą; jest to możebne, gdyż funkcyje $f(x)$ i $\psi(x)$ nie mają wspólnego dzielnika. Nadając w tój równości zmiennej x wartość jednego z pierwiastków równania $f(x) = 0$, otrzymamy

$$F(x) \psi(x) = C,$$

wskutek czego mieć będziemy

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{C} \varphi(x) F(x).$$

Strona prawa tego równania ma postać funkcyi całkowitej pierwiastka x . — Jeżeli stopień iloczynu $\varphi(x) F(x)$ nie jest mniejszy od n , to wówczas dzielimy funkcją $\varphi(x) F(x)$ przez $f(x)$, uważając przytym x jako zmienną niezależną; otrzymujemy równość

$$\varphi(x) F(x) = f(x) Q + \theta(x),$$

w której $\theta(x)$ oznacza resztę, t. j. funkcją stopnia niższego niż n -ty. Stąd, nadając x wartość jednego z pierwiastków równania $f(x) = 0$, otrzymamy

$$\varphi(x) F(x) = \theta(x),$$

albo

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{C} \theta(x).$$

Wniosek. Każda funkcja wymierna $\frac{\varphi(x_1, x_2, \dots)}{\psi(x_1, x_2, \dots)}$, zależąca od kilku pierwiastków równania $f(x) = 0$, może być przedstawiona w postaci funkcji całkowitej tych pierwiastków, stopnia niższego niż n -ty względem każdego z nich. Aby to udowodnić, należy zastosować powyższe twierdzenie kilka razy z rzędu.

160. PRZYKŁAD. Przypuśćmy, że potrzeba sprowadzić do najprostszej postaci funkcję całkowitą.

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + 3},$$

gdzie x oznacza jakikolwiek pierwiastek równania

$$x^5 - 7 = 0.$$

Rozwijamy funkcję $\frac{x^5 - 7}{x^3 - 2x^2 + 3}$ na ułamek ciągły

$$\frac{x^5 - 7}{x^3 - 2x^2 + 3} = x^2 + 2x + 4 + \frac{25}{5x - 4} - \frac{5041}{355x - 421} - \frac{96200}{71x - 1},$$

a oznaczwszy przez $25F$ i 25Ψ licznik i mianownik przedostatniego ułamka zbliżonego, mieć będziemy

$$F = 71x^4 + x^3 + 271x^2 + 329x + 655,$$

$$\Psi = 71x^2 - 141x + 269,$$

$$(x^3 - 2x^2 + 3)F - (x^5 - 7)\Psi = 3848.$$

Jeżeli przypuścimy, że x jest jednym z pierwiastków równania $x^5 - 7 = 0$, to ta równość przyjmie postać:

$$(x^3 - 2x^2 + 3)F = 3848,$$

z której znajdujemy

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + 3} = \frac{71x^4 + x^3 + 271x^2 + 329x + 655}{3848}.$$

§ III. PRZEKSZTAŁCENIE RÓWNAŃ.

161. Niech będzie dane równanie

$$f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = 0,$$

którego pierwiastki oznaczmy przez x_1, x_2, \dots, x_n . Wziąwszy pod uwagę jakikolwiek ułamek wymierny nieskracalny

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

którego mianownik jest funkcją pierwszą względem $f(x)$, zajmiemy się utworzeniem równania stopnia n -go

$$F(y) = y^n + P_1 y^{n-1} + P_2 y^{n-2} + \dots + P_n = 0,$$

którego pierwiastki byłyby następujące:

$$y_1 = \frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)}, \quad y_2 = \frac{\varphi(x_2)}{\psi(x_2)}, \dots, y_n = \frac{\varphi(x_n)}{\psi(x_n)}.$$

Ażeby podać rozwiązanie tego zadania, dość jest ograniczyć się do tego przypadku szczególnego, kiedy mianownik $\psi(x)$ tożsamościowo jest równy jedności, a stopień licznika $\varphi(x)$ jest mniejszy od n ; do takiej bowiem postaci sprowadza się wyrażenie wszelkiej funkcji wymiernej pierwiastka równania danego.

Przypuśćmy więc, że

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = \varphi(x),$$

gdzie a_0, a_1, a_2, \dots oznaczają jakiegokolwiek współczynniki, x zaś jeden z pierwiastków równania $f(x) = 0$. Iloczyn $xy = a_0 x + a_1 x^2 + \dots + a_{n-1} x^n$ sprowadzimy do postaci

$$xy = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1},$$

gdzie b_0, b_1, b_2, \dots oznaczają wielomiany całkowite stopnia pierwszego, tak względem a_0, a_1, \dots , jak i względem p_1, p_2, \dots , któreto wielomiany są jednorodne względem a_0, a_1, a_2, \dots . Iloczyn $x^2 y = b_0 x + b_1 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$, sprowadzony do najprostszj formy, daje równanie

$$x^2 y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1},$$

gdzie c_0, c_1, c_2, \dots oznaczają wielomiany całkowite tak względem a_0, a_1, \dots , jak i względem p_1, p_2, \dots , będące względem a_0, a_1, a_2, \dots funkcjami jednorodnymi liniowymi. Podobnego rodzaju wyrażenia będziemy tworzyć dotąd, dopóki nie dojdziemy do równania

$$x^{n-1} y = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_{n-1} x^{n-1},$$

w którym k_0, k_1, k_2, \dots oznaczają wielomiany całkowite tak względem a_0, a_1, a_2, \dots , jak i względem p_1, p_2, \dots , będące, prócz tego, względem a_0, a_1, a_2, \dots funkcjami jednorodnymi liniowymi. Tym sposobem otrzymujemy układ n równań, które wypiszmy tak:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} (a_0 - y) + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} &= 0, \\ b_0 + (b_1 - y)x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1} &= 0, \\ \dots & \\ k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + (k_{n-1} - y)x^{n-1} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Stąd, jako wniosek, wynika

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_0 - y, & a_1, & \dots, & a_{n-1} \\ b_0, & b_1 - y, & \dots, & b_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_0, & k_1, & \dots, & k_{n-1} - y \end{vmatrix} = 0,$$

gdyż w wyznaczniku (2) każdy z elementów pierwszej kolumny jest równy sumie elementów odpowiadających w kolumnach pozostałych, pomnożonych odpowiednio przez $-x$, $-x^2$ i t. d.

Jeżeli stronę lewą równania (2) uporządkujemy według potęg y , to otrzymamy równanie postaci

$$(3) \quad y^n + P_1 y^{n-1} + P_2 y^{n-2} + \dots + P_n = 0,$$

w którym współczynniki P_1, P_2, \dots mają postać wielomianów całkowitych tak względem a_0, a_1, \dots , jak i względem p_1, p_2, \dots , i są jednorodne względem a_0, a_1, \dots , stopnia odpowiednio 1-go, 2-go, ...

Ponieważ w równaniu (3) y oznacza jakąkolwiek z wartości

$$y_1 = \varphi(x_1), \quad y_2 = \varphi(x_2), \dots, y_n = \varphi(x_n),$$

przeto, jeżeli pośród liczb y_1, y_2, \dots, y_n nie ma dwu równych sobie, to równanie (3), będąc stopnia n -tego, nie może mieć innych pierwiastków, prócz $y = y_1, y_2, \dots, y_n$, a wówczas ma miejsce tożsamość

$$(4) \quad (y - \varphi(x_1)) (y - \varphi(x_2)) (y - \varphi(x_n)) = y^n + P_1 y^{n-1} + \dots + P_n,$$

wskazująca, iż równanie (3) przedstawia szukane rozwiązanie naszego zadania. —

Równość (4) ma miejsce także w tym przypadku, kiedy pośród wartości $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$ są równe sobie. Ażeby tego dowieść, rozważymy oddzielnie dwa przypuszczenia: jedno, że równanie $f(x) = 0$ nie posiada pierwiastków wielokrotnych; drugie zaś, że ono je posiada.

W przypuszczeniu, że wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$ są pojedyncze, nadajmy współczynnikom a_0, a_1, \dots dowolne przyrostki: $\Delta a_0, \Delta a_1, \dots$. Nową wartość funkcji y możemy napisać tak:

$$y + \Delta y = a_0 + \Delta a_0 + (a_1 + \Delta a_1)x + (a_2 + \Delta a_2)x^2 + \dots,$$

tak iż odpowiadający przyrostkom współczynników przyrostek y jest

$$\Delta y = \Delta a_0 + \Delta a_1 x + \Delta a_2 x^2 + \dots + \Delta a_{n-1} x^{n-1}.$$

Posiłkując się wzorem Lagrange'a, wyznaczmy współczynniki $\Delta a_0, \Delta a_1, \dots$ tak, iżby przyrostki tych z wartości

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n,$$

które nie mają sobie równych, były równe zeru, i żeby przyrostki pozostałych były równe różnym dowolnie wziętym liczbom t, t', \dots , bezwzględnie dość małym. Przy takich nowych wartościach współczynników a_0, a_1, \dots , równość (4) będzie miała miejsce. Ponieważ jej obie strony mają postać funkcji całkowitych zmiennych t, t', \dots i są równe przy nieskończeniu wielu różnych wartościach liczb t, t', \dots , niezależnych od siebie, przeto, oczywiście, pozostają one równymi przy wszelkich wartościach t, t', \dots , a więc przy $t=0, t'=0, \dots$

Należy jeszcze okazać, że równość (4) ma miejsce w tym także przypadku, kiedy niektóre z pierwiastków x_1, x_2, \dots są sobie równe. W tym razie,

nadajmy wszystkim pierwiastkom wielokrotnym równania $f(x) = 0$ przyrostki dowolne różne t, t', \dots , bezwzględnie dostatecznie małe, tak iż, zamiast pierwotnego równania $f(x) = 0$, będziemy mieli nowe równanie

$$x^n + p_1' x^{n-1} + p_2' x^{n-2} + \dots + p_n' = 0,$$

nie posiadające pierwiastków wielokrotnych, którego współczynniki będą funkcjami całkowitymi względem t, t', \dots . Równość (4), utworzona dla tego nowego równania, ma miejsce nie tylko przy wszelkiej wartości y , ale także i dla nieskończenie wielu różnych wartości każdej z liczb t, t', \dots , niezależnych od siebie. A ponieważ obie jej strony są funkcjami całkowitymi zmiennych t, t', \dots , zatem pozostają one równymi i przy wszelkiej szczególnej wartości każdej z liczb t, t', \dots . Kładąc $t = 0, t' = 0, \dots$, otrzymujemy równość (4), utworzoną dla równania pierwotnego $f(x) = 0$ z pierwiastkami wielokrotnymi.

A więc, równość (4) ma miejsce we wszystkich przypadkach, t. j. równanie (3) przedstawia ogólne rozwiązanie zadania, które nas tu zajmowało.

162. Zadanie o utworzeniu równania z pierwiastkami: $\varphi(x_1) \varphi(x_2), \dots$ można uważać jako jednoznaczne z tym, które rozważaliśmy w paragrafie pierwszym niniejszego rozdziału, gdyż ono sprowadza się do utworzenia wzoru na obliczenie iloczynu

$$(y - \varphi(x_1)) (y - \varphi(x_2)) \dots (y - \varphi(x_n)),$$

przy jakimkolwiek y .

Kładąc w równości

$$(y - \varphi(x_1)) (y - \varphi(x_2)) \dots (y - \varphi(x_n)) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_0 - y, & a_1, & \dots, & a_{n-1} \\ b_0, & b_1 - y, & \dots, & b_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_0, & k_1, & \dots, & k_{n-1} - y \end{vmatrix}$$

$y = 0$, otrzymamy wzór

$$\varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \dots, & a_{n-1} \\ b_0, & b_1, & \dots, & b_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_0, & k_1, & \dots, & k_{n-1} \end{vmatrix},$$

z którego pomocą możemy wyznaczyć rugownik $[\varphi, f]$. Ten wzór wskazuje, że w tym przypadku, kiedy wszystkie współczynniki tak w równaniu

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0,$$

jako też w wyrażeniu funkcji

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1},$$

są liczbami całkowitymi, wartość rugownika $[\varphi, f]$ jest także liczbą całkowitą; wszystkie bowiem elementy b_0, b_1, \dots, b_{n-1} przedstawiają wówczas, oczywiście, liczby całkowite.

PRZYKŁAD. Kładąc

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 = 0,$$

$$y = \varphi(x) = 3 - 2x + x^3,$$

znajdziemy

$$xy = 1 + 3x - 3x^2 + 2x^3,$$

$$x^2y = 2 + x + x^2 + x^3,$$

$$x^3y = 1 + 2x + 3x^3;$$

a więc mieć będziemy

$$\begin{vmatrix} 3-y & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3-y & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1-y & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3-y \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$y^4 - 10y^3 + 36y^2 - 64y + 64 = 0.$$

Ostatni wyraz tego równania jest iloczynem jego pierwiastków, t. j.

$$[\varphi, f] = 64.$$

163. Równanie

$$(1) \quad y^n + P_1y^{n-1} + P_2y^{n-2} + \dots + P_n = 0,$$

otrzymane z równania danego

$$(2) \quad x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

z pomocą podstawienia

$$(3) \quad y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1},$$

nazywa się równaniem przekształconym. Zasługuje ono na uwagę z tego względu, że, wiedząc jego pierwiastki, możemy obliczyć pierwiastki równania (2) z pomocą działań wymiernych—z wyjątkiem niektórych przypadków szczególnych. Istotnie, dołączając do równania (3) równania następujące:

$$x y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b^{n-1}x^{n-1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x^{n-1}y = k_0 + k_1x + k_2x^2 + \dots + k_{n-1}x^{n-1},$$

mieć będziemy n równań z $n-1$ niewiadomymi x, x^2, \dots, x^{n-1} . Z tych równań możemy wyrazić każdą z niewiadomych x, x^2, \dots w postaci funkcji wymiernej liczby y . W niektórych przypadkach szczególnych może się x przedstawiać w postaci $\frac{0}{0}$; wtedy nie można wyrazić x w funkcji y w sposób wymierny. Lecz, w każdym razie, jeżeli tylko jest wiadomy chociaż jeden pierwiastek równania z niewiadomą y , to rozwiązanie równania z niewiadomą x sprowadza się do rozwiązania innych równań, stopni niższych niż n -ty, gdyż funkcja

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n$$

ma spólny dzielnik z funkcją

$$a_0 - y + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}.$$

Ilekróć zdołamy dobrać dla liczb a_0, a_1, a_2, \dots takie wartości, iż niektóre ze współczynników w równaniu z niewiadomą y staną się równymi zeru, możemy powiedzieć, żeśmy dane równanie przekształcili na inne, prostsze. Taki sposób przekształcania równania był wskazany przez Tschirnhaus'a.

Zauważymy jeszcze, że jeżeli przyjmiemy w równaniu danym (2)

$$y = \frac{p_1}{n} + x,$$

to, widocznie, będziemy mieli $P_1 = 0$, t. j. skutek tego podstawienia, otrzymujemy równanie z niewiadomą y , w którym niema wyrazu z y^{n-1} .

§ IV. ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ STOPNIA 3-GO I 4-GO.

164. Niech będzie dane równanie liczebne stopnia 3-go

$$x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0.$$

Przyjmijmy

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

a utworzywszy równanie

$$y^3 + P_1y^2 + P_2y + P_3 = 0,$$

nadajmy dla a_0, a_1, a_2 takie wartości, iżby one czyniły zadość dwu równaniom:

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0,$$

odpowiednio pierwszego i drugiego stopnia. Wtenczas równanie z niewiadomą y przyjmie postać:

$$y^3 + P_3 = 0.$$

Jest to równanie dwumienne, którego pierwiastki są pierwiastkami sześciennymi z $-P_3$; z nich łatwo wyprowadzić wartości pierwiastków równania danego. W ten sposób można rozwiązać każde równanie stopnia 3-go.

Tą drogą możemy także dojść do wzorów dla pierwiastków równania stopnia 3-go postaci ogólnej.

165. Niech będzie dane równanie liczebne stopnia 4-go

$$x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4 = 0.$$

Kładąc

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

utworzymy równanie

$$y^4 + P_1y^3 + P_2y^2 + P_3y + P_4 = 0.$$

Uważając liczby a_0, a_1, a_2, a_3 jako niewiadome, mające czynić zadość równaniom

$$P_1 = 0, \quad P_3 = 0,$$

mieć będziemy dwa równania, jedno stopnia pierwszego, drugie zaś trzeciego. Rozwiązanie takich równań sprowadza się do rozwiązania jednego równania stopnia 3-go, co, według art. poprzedzającego, można skutecznie zapomocą wyciągnięcia pierwiastków kwadratowych i sześciennych z liczb wiadomych. Uskuteczniejszy to, będziemy mieli równanie z niewiadomą y postaci

$$y^4 + P_2 y^2 + P_4 = 0,$$

które rozwiązuje się łatwo zapomocą wyciągania pierwiastków kwadratowych, a w funkcji pierwiastków tego równania wyrażają się pierwiastki równania danego w sposób wymierny.

Tym sposobem możemy także dojść do wzorów dla pierwiastków równania stopnia 4-go postaci ogólnej.

§ V. WARUNKI, ABY DWA RÓWNAŃ MIAŁY KILKA PIERWIASTKÓW SPÓLNYCH.

166. Aby dwa równania

$$(1) \begin{cases} f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0, \\ F(x) = x^m + q_1 x^{m-1} + q_2 x^{m-2} + \dots + q_m = 0 \end{cases}$$

miały przynajmniej jeden pierwiastek spólny, potrzeba i wystarcza, aby wartość rugownika $[F, f]$ była równa zeru; dlatego wielkość $[F, f]$ nazywa się rugownikiem dwu równań (1).

Przyjmując, że już jest utworzone wyrażenie rugownika $[F, f]$ i że ostatnie wyrazy p_n i q_m w równaniach (1) nie mają określonych wartości, ale, przeciwnie, są uważane jako dwie zmienne niezależne, od których nie zależy żaden ze współczynników pozostałych, mieć będziemy następujące twierdzenie Lagrange'a, podające warunki niezbędne, ażeby dwa równania miały kilka pierwiastków spólnych.

TWIERDZENIE. *Jeżeli przez V oznaczymy rugownik dwu równań*

$$(1) \quad f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n = 0,$$

$$(2) \quad F(x) = x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_m = 0,$$

a przez $V'_{p_n}, V''_{p_n}, \dots, V'_{q_m}, V''_{q_m}, \dots$ pochodne różnego rzędu wielomianu V , rozważanego odpowiednio jako funkcja zmiennej niezależnej p_n , lub jako funkcja zmiennej niezależnej q_m , to, aby równania $f(x) = 0$ i $F(x) = 0$ posiadały k pierwiastków spólnych, koniecznymi są następujące warunki:

$$(3) \quad V = 0, \quad V'_{p_m} = 0, \quad V''_{p_m} = 0, \dots, V^{k-1}_{p_m} = 0,$$

albotóż warunki

$$(4) \quad V = 0, \quad V'_{q_n} = 0, \quad V''_{q_n} = 0, \dots, V^{k-1}_{q_n} = 0.$$

Jakoż, rozumiejąc przez x jakikolwiek pierwiastek równania $f(x) = 0$, przyjmijmy

$$z = -x^n - q_1 x^{n-1} - q_2 x^{n-2} - \dots - q_{m-1} x,$$

czyli

$$z = q_m - F(x),$$

i napiszmy równanie z niewiadomą z ,

$$z^n + P_1 z^{n-1} + P_2 z^{n-2} + \dots + P_n = 0.$$

Pisząc w tym ostatnim równaniu $q_m - y$ zamiast z i nazywając, dla skrócenia,

$$V = q_m^n + P_1 q_m^{n-1} + P_2 q_m^{n-2} + \dots + P_n,$$

otrzymamy

$$(5) \quad V - \frac{y}{1} V'_{q_m} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} V''_{q_m} - \dots + (-1)^n y^n = 0,$$

gdzie

$$V'_{q_m} = n q_m^{n-1} + (n-1) P_1 q_m^{n-2} + \dots,$$

$$V''_{q_m} = n(n-1) q_m^{n-2} + (n-1)(n-2) P_1 q_m^{n-3} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

Jeżeli przez x_1, x_2, \dots, x_n oznaczymy pierwiastki równania $f(x) = 0$, to pierwiastki równania (5) będą następujące:

$$y_1 = F(x_1), \quad y_2 = F(x_2), \quad \dots, \quad y_n = F(x_n).$$

Stąd widzimy, że jeżeli pośród liczb

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \dots, \quad x_n$$

jest k takich, które czynią zadość równaniu $F(x) = 0$, to odpowiadające im pośród liczb

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \dots, \quad y_n$$

będą równe zeru, a równanie (5) będzie wówczas miało k pierwiastków równych zeru. Lecz dlatego potrzeba, aby wyraz stały i współczynniki potęg y, y^2, \dots, y^{k-1} równały się zeru, t. j. aby miały miejsce równania (4).

W podobny sposób możemy okazać, że jeżeli między pierwiastkami równania $F(x) = 0$ znajduje się k takich, które czynią zadość równaniu $f(x) = 0$, to mają miejsce równania (3).

Wszystko to czyni oczywistą prawdziwość twierdzenia Lagrange'a, co do którego można zrobić następujące uwagi:

a. Jeżeli równanie (1) nie ma pierwiastków wielokrotnych, to warunki (4) są nie tylko konieczne, lecz zarazem dostateczne.

b. Jeżeli równanie (2) nie ma pierwiastków wielokrotnych, to warunki (3) są nie tylko konieczne, lecz zarazem dostateczne.

c. Jeżeli każde z równań (1) i (2) ma pierwiastki wielokrotne, to ani warunków (3), ani warunków (4), ani też jednych i drugich jednocześnie, nie można uważać za dostateczne dla istnienia k pierwiastków spólnych.

wyznaczony zapomocą jednego z opisanych wyżej sposobów; nazywamy go wyróżnikiem (dyskryminantem) równania $f(x) = 0$.

Jeżeli wyróżnik jest równy zeru, to równanie posiada pierwiastki wielokrotne, i nawzajem.

Gdy współczynniki w równaniu $f(x) = 0$ są rzeczywiste, to wartość wyróżnika jest także rzeczywista, i jest ona dodatna albo ujemna, zależnie od tego, czy ilość par pierwiastków zespolonych sprzężonych jest parzysta, czy też nieparzysta.

Jeżeli w równaniu $f(x) = 0$ współczynnik najwyższej potęgi zmiennej x jest równy jedności, a pozostałe współczynniki są liczbami całkowitymi, to wyróżnik jest także liczbą całkowitą.

169. PRZYKŁAD 1. Znajdźmy wyróżnik równania

$$f = x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Kładąc

$$y = q + 2px + 4x^3,$$

mieć będziemy

$$xy = -4r - 3qx - 2px^2,$$

$$x^2y = -4rx - 3qx^2 - 2px^3,$$

$$x^3y = 2pr + 2pqx + 2(p^2 - 2r)x^2 - 3qx^3;$$

a więc jest

$$[f', f] = \begin{vmatrix} q & , & 2p & , & 0 & , & 4 \\ -4r & , & -3q & , & -2p & , & 0 \\ 0 & , & -4r & , & -3q & , & -2p \\ 2pr & , & 2pq & , & 2(p^2 - 2r) & , & -3q \end{vmatrix}.$$

Rozwijając wyznacznik na stronie prawej i zważając, że dla równania stopnia 4-go, wyróżnik Δ jest tożsamościowo równy rugownikowi $[f', f]$, otrzymamy

$$\Delta = (-27q^2 - 4p^3)q^2 + 144pq^2r + 16r(p^2 - 4r)^2.$$

170. PRZYKŁAD 2. Weźmy równanie stopnia n -tego

$$f = x^n + px + q = 0.$$

Żeby utworzyć jego wyróżnik, podzielmy funkcję nf przez pochodną f' , a następnie funkcję f' przez resztę $f_1 = (n-1)px + nq$, otrzymaną z pierwszego dzielenia. Druga reszta jest liczbą stałą, $f_2 = (-1)^{n-1}n \left[\frac{nq}{(n-1)p} \right]^{n-1} + p$.

Oznaczywszy przez Q i Q_1 dwie funkcje całkowite, mamy dwa równania

$$nf = Qf' + f_1,$$

$$f' = Q_1f_1 + f_2,$$

przy których pomocy wprowadzamy

$$[f', f] = n[nf, f'] = n[f_1, f'] = (n-1)^{n-1}p^{n-1}[f', f_1]$$

$$= (n-1)^{n-1}p^{n-1} \left[(-1)^{n-1}n \left(\frac{nq}{(n-1)p} \right)^{n-1} + p, f_1 \right]$$

$$= (-1)^{n-1}n^n q^{n-1} + (n-1)^{n-1}p^n.$$

Stąd, zważywszy, że $\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} [f', f]$, otrzymujemy

$$\Delta = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^n q^{n-1} + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)^{n-1} p^n.$$

§ VIII. SPOSÓB LAGRANGE'A ODDZIELANIA PIERWIĄTKÓW.

171. Przy oddzielaniu pierwiastków jakiegokolwiek równania $f(x) = 0$ z pierwiastkami pojedynczymi, spotykamy się z zadaniem o wyznaczeniu takiej liczby dodatniej H , któraby nie przewyższała modułu różnicy każdego z pierwiastków równania $f(x) = 0$.

Istotnie, jeżeli na płaszczyźnie spólrzędnych, służącej do oznaczania liczb zespolonych, poprowadzimy dwa układy prostych, równoległych do każdej z osi spólrzędnych, tak, iżby odległość dwu po sobie następujących równoległych nie była większa od liczby $\frac{H}{\sqrt{2}}$, to wewnątrz każdego z prostokątów, utworzonych przez te proste, nie może znajdować się więcej niż jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$. Zapomocą metody, wyłożonej w rozdziale poprzednim, zawsze możemy dowiedzieć się, czy wewnątrz któregośkolwiek z takich elementarnych prostokątów znajduje się pierwiastek równania $f(x) = 0$, czy też nie. Zbadawszy takim sposobem te prostokąty, których odległość od początku spólrzędnych nie jest większa od krańca wyższego dla modułów pierwiastków równania danego, oddzielimy tysamym wszystkie jego pierwiastki.

Gdy wszystkie spólczynniki w równaniu $f(x) = 0$ są rzeczywiste, i idzie nam tylko o oddzielenie pierwiastków rzeczywistych, to wówczas należy tylko przedział między wyższym i niższym krańcem dla pierwiastków rzeczywistych rozłożyć na pewną ilość przedziałów mniejszych tak, iżby różnica krańców każdego z nowych przedziałów nie była większa od liczby H . Każdy z takich przedziałów nie może zawierać więcej niż jeden pierwiastek. — Żeby się dowiedzieć, czy pewien przedział zawiera pierwiastek albo nie, należy określić znaki funkcji $f(x)$ dla wartości x równych krańcom a i b ; jeżeli znaki wartości $f(a)$ i $f(b)$ są różne, to przedział a, b zawiera jeden pierwiastek; w przeciwnym razie przedział a, b nie zawiera pierwiastka. Zbadawszy takim sposobem wszystkie przedziały, dowiemy się, ile dane równanie posiada pierwiastków rzeczywistych, i każdy z nich będzie oddzielony.

Taki sposób oddzielania pierwiastków rzeczywistych nazywa się sposobem Lagrange'a.

Co się tyczy wyznaczenia liczby H , to ono wynika bezpośrednio z innego zadania, którego rozwiązanie po raz piérwszy dał Waring, a następnie, w formie zręczniejszej, Lagrange. Zadanie to polega na tym, aby utworzyć równanie, którego pierwiastki równałyby się kwadratam różnic pierwiastków równania danego; niższy kraniec dla modułów pierwiastków takiego równania może być przyjęty jako kwadrat krańca H .

Cauchy okazał, że zapomocą samego tylko wyróżnika równania danego, który przedstawia wyraz ostatni w równaniu z kwadratami różnic, można otrzymać kraniec H .

Wogóle, wyznaczając H zapomocą różnych sposobów, będziemy otrzymywali wartości różne, a największa z nich będzie dla nas najdogodniejsza; dlatego też sposób podany przez Cauchy'ego na wyznaczenie krańca H , jakkolwiek zdaje się być owiele prostszy od sposobu Lagrange'a, to jednak w zastosowaniu okazuje się niedogodnym, gdyż daje dla H wartości nadto małe.

172. Nie będziemy tu teraz wykładali sposobów ułożenia równania z kwadratami różnic, lecz ograniczymy się tylko do wyprowadzenia niższego krańca dla modułu różnic pierwiastków według sposobu Cauchy'ego, mając na widoku nietyle praktyczną, ile teoretyczną jego wartość. Nazywając przez x_1, x_2, \dots, x_n pierwiastki równania $f(x) = 0$, przez Δ jego wyróżnik, zaś przez R wyższy kraniec dla modułów pierwiastków, mamy

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2 = \Delta;$$

a zatem

$$(1) \quad \text{mod}^2(x_1 - x_2) \text{mod}^2(x_1 - x_3) \dots \text{mod}^2(x_{n-1} - x_n) = \text{mod} \Delta.$$

Lecz dla modułu różnic dwu dowolnie wziętych pierwiastków mamy

$$\text{mod}(x_i - x_k) \leq \text{mod} x_i + \text{mod} x_k < 2R,$$

gdyż $\text{mod} x_i < R$ i $\text{mod} x_k < R$; a więc

$$\text{mod}^2(x_i - x_k) < 4R^2.$$

Na zasadzie ostatniej nierówności z równania (1) otrzymujemy

$$\text{mod}^2(x_1 - x_2) (2R)^{n(n-1)-2} > \text{mod} \Delta;$$

albo

$$(2) \quad \text{mod}(x_1 - x_2) > \frac{\sqrt{\text{mod} \Delta}}{(2R)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}}.$$

Ponieważ x_1 i x_2 oznaczają dwa dowolnie wzięte pierwiastki równania $f = 0$, zatem z nierówności (2) wnosimy, iż, jako niższy kraniec dla modułów różnic pierwiastków równania $f(x) = 0$, możemy przyjąć liczbę

$$H = \frac{\sqrt{\text{mod} \Delta}}{(2R)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}}.$$

Jeżeli wszystkie spółczynniki w równaniu $f = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n = 0$ są liczbami całkowitymi, a równanie nie ma pierwiastków wielokrotnych, to wtenczas liczba Δ jest całkowita i $\text{mod} \Delta \geq 1$, wskutek czego możemy przyjąć

$$H = \frac{1}{(2R)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}}.$$

PRZYKŁAD. Dla równania

$$x^5 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$$

znajdujemy

$$R = 2,2$$

$$\Delta = 148856,$$

a więc

$$H = \frac{\sqrt{148856}}{(4,4)^{\circ}} = 0,000624 \dots$$

ROZDZIAŁ X.

SPOSÓB NEWTON'A OBLICZANIA PIERWIĄSTKÓW.—KRAŃCE WYŻSZE DLA BŁĘDÓW.—
PRZYKŁAD. — WYZNACZENIE PIERWIĄSTKÓW WYMIERNYCH RÓWNIANIA ZE SPÓŁ-
CZYNNIKAMI CAŁKOWITYMI.

§ I. WYZNACZENIE KRAŃCÓW DLA WARTOŚCI FUNKCYI CAŁKOWITEJ MIĘDZY $x = a$ I $x = b$.

173. Przy obliczaniu pierwiastków równania często potrzeba mieć dwa takie krańce, między którymi zawierałyby się wartości funkcji całkowitej $f(x)$, odpowiadające wartościom zmiennej x od $x = a$ do $x = b$.

W jednym przypadku szczególnym można bezpośrednio otrzymać tak największą, jak i najmniejszą wartość funkcji $f(x)$ między a i b , mianowicie wtedy, kiedy wiadomo, iż pochodna $f'(x)$ nie zmienia znaku między a i b ; wówczas od $x = a$ do $x = b$ funkcja $f(x)$ wciąż wzrasta, albo maleje, a z dwu liczb $f(a)$ i $f(b)$ jedna jest największą, a druga najmniejszą wartością funkcji $f(x)$.

Jeżeli pochodna $f'(x)$ między a i b zmienia znak, ale tylko raz jeden, to wówczas jedna z dwu liczb $f(a)$ i $f(b)$ będzie albo największą albo najmniejszą wartością funkcji $f(x)$.

Wogóle, w celu otrzymania żądanych krańców, należy odszukać dwie takie liczby p i q , z których pierwsza byłaby albo większa od obu wartości $f(a)$ i $f(b)$, a druga od nich mniejsza, i aby każde z dwu równań

$$f(x) - p = 0, \quad f(x) - q = 0$$

nie miało ani jednego pierwiastka między a i b ; wówczas, oczywiście, dla wszelkich wartości zmiennej x , zawartych między a i b , będziemy mieli

$$q < f(x) < p.$$

174. Wyłożymy tu pewne postępowanie elementarne, którym można się posilkować w celu wyznaczenia krańców p i q .

Przyjmując, że funkcja $f(x)$ jest n -go stopnia, przedstawmy ją w takiej postaci:

$$\begin{aligned} f(x) = & Ax^{n-1}(x - a) \\ & + [Cx^{n-2} + C_1x^{n-3} + \dots + C_{n-2}](x - a)(b - x) \\ & + B(b - x), \end{aligned}$$

i weźmy pod uwagę równość

$$\begin{aligned} b^{n-1}(b-a) &= x^{n-1}(x-a) \\ &+ [x^{n-2} + bx^{n-3} + \dots + b^{n-2}](x-a)(b-x) \\ &+ b^{n-1}(b-x). \end{aligned}$$

Mnożąc obie strony tej równości przez liczbę dowolną k i dodając następnie do nich odpowiednie strony równości poprzedzającej, otrzymamy

$$\begin{aligned} f(x) + kb^{n-1}(b-a) &= A'x^{n-1}(x-a) \\ &+ [C'x^{n-2} + \dots + C'_{n-2}](x-a)(b-x) \\ &+ B'(b-x), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A' &= A + k, & C' &= C + k, & C'_1 &= C_1 + kb, \\ C'_2 &= C_2 + kb^2, \dots, & B' &= B + kb^{n-1}. \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że k_0 i k_1 są takimi dwiema wartościami k , iż przy $k = k_0$ wszystkie współczynniki A', C', \dots otrzymują wartości dodatnie, a przy $k = k_1$ wartości ujemne; wówczas, oczywiście, mają miejsce nierówności

$$\begin{aligned} f(x) + k_0b^{n-1}(b-a) &> 0, \\ f(x) + k_1b^{n-1}(b-a) &< 0, \end{aligned}$$

w przypuszczeniu że x zawiera się między a i b . Z powyższych nierówności wyprowadzamy

$$k_0b^{n-1}(a-b) < f(x) < k_1b^{n-1}(a-b),$$

i tym sposobem żądane dwa krańce są odszukane.

175. PRZYKŁAD. Znaleść krańce dla wartości funkcyi

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3$$

pod warunkiem, iż

$$0 \leq x \leq 1.$$

Przedstawiając funkcyję $f(x)$ w postaci

$$f(x) = 5x^4 + x(1-x)[4x^2 + 2x + 3] + 3(1-x),$$

spostrzegamy, że wszystkie wartości funkcyi $f(x)$ między $x=0$ i $x=1$ są dodatnie. Zestawiając powyższe wyrażenie z tożsamością

$$1 = x^4 + x(1-x)[x^2 + x + 1] + (1-x),$$

otrzymamy

$$2 < f(x) < 5.$$

Znaleziony tym sposobem kraniec wyższy jest równy wartości funkcyi $f(x)$ dla $x=1$. Co się zaś tyczy krańca niższego, to on różni się dość znacznie od najmniejszej wartości funkcyi $f(x)$ między $x=0$ i $x=1$.

Dla równania

$$F(x) = f(x) - \frac{47}{16} = 0$$

otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	F	F'	F''	F'''	F^{IV}
1	+	+	+	+	+
$\frac{1}{4}$	+	-	+	+	+
0	+	0	-	+	+

i, prócz tego,

$$\frac{F\left(\frac{1}{4}\right)}{F'\left(\frac{1}{4}\right)} = -\frac{9}{16}.$$

Stąd bezpośrednio wnosimy, że równanie

$$f(x) - \frac{47}{16} = 0$$

nie ma pierwiastka między 0 i 1, i dlatego, przy istnieniu warunku $0 \leq x \leq 1$, ma miejsce nierówność

$$f(x) > 2\frac{15}{16},$$

tak iż, zamiast otrzymanego powyżej krańca niższego 2, można wziąć bliższy, $2\frac{15}{16}$.

§ II. SPOSÓB NEWTON'A OBLICZANIA PIERWIASTKÓW.

176. Przypuśćmy, że w przedziale między dwoma krańcami a i b , dość siebie bliskimi, równanie $f(x) = 0$ ma jeden tylko pierwiastek x . Każdy z krańców a i b może być przyjęty jako pierwsza wartość przybliżona pierwiastka szukanego.

Przyjmując liczbę a jako pierwiastek równania $f(x) = 0$, popełniamy błąd

$$h = x - a.$$

który czyni zadość równaniu $f(a + h) = 0$, czyli

$$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(a) = 0.$$

Ponieważ h jest liczbą bardzo małą, zatym możemy nie zważać na wyrazy, zawierające czynniki h^2, h^3, \dots ; w takim razie, zamiast poprzedniego równania, otrzymujemy

$$f(a) + hf'(a) = 0,$$

skąd

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Jest to przybliżona wartość błędu h . Wprowadzając ją do strony prawej równania $x = a + h$, otrzymamy drugą wartość przybliżoną pierwiastka x .

Oznaczywszy przez a_1 to drugie przybliżenie, mamy

$$(1) \quad a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Podstawiając na stronie prawej równania ostatniego a_1 zamiast a , otrzymamy trzecie przybliżenie szukanego pierwiastka x . Oznaczywszy je przez a_2 , mamy

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

Wogóle, oznaczając $(n + 2)$ -gą przybliżoną wartość przez a_{n+1} mieć będziemy

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

Jeżeli zaś jako pierwsze przybliżenie pierwiastka x weźmiemy b , to następne przybliżenia wyznaczmy ze wzorów

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)},$$

.

Ten sposób obliczania kolejnych przybliżeń pierwiastka jest najprostszy, a wskutek tego ze wszystkich sposobów obliczania pierwiastka, dotąd wiadomych, jest najwięcej znany i używany. Ten sposób podał Newton.

177. Widoczne jest, że dogodność powyższego sposobu zależy od warunku, ażeby każde następujące przybliżenie rzeczywiście było bliższe pierwiastka szukanego, niż poprzedzające.

W zastosowaniu niezawsze to ma miejsce, i dlatego należy zbadać, kiedy możemy być przekonani, że wmiarę obliczenia przybliżenia dalszego istotnie więcej się zbliżymy do pierwiastka szukanego.

Będziemy przypuszczali, że ani równanie $f'(x) = 0$, ani też równanie $f''(x) = 0$, nie ma pierwiastka między a i b . To zaś zawsze można osiągnąć, zbliżając dostatecznie krańce a i b , prócz tylko tego przypadku, kiedy szukany pierwiastek czyni zadość równaniu $f'(x) = 0$, albo równaniu $f''(x) = 0$; ale wówczas rozwiązanie danego równania $f(x) = 0$ sprowadza się do rozwiązania innego równania, stopnia niższego.

Ponieważ dwie wartości $f(a)$ i $f(b)$ powinny być różnego, wartości zaś $f''(a)$ i $f''(b)$ jednakowego znaku, zatem stosunki

$$\frac{f''(a)}{f'(a)}, \quad \frac{f''(b)}{f'(b)}$$

są różnego znaku. Umówimy się, aby przez a oznaczać ten z dwu pierwotnych krańców, dla którego mamy

$$\frac{f''(a)}{f'(a)} > 0.$$

Mając to wszystko na uwadze, dowiedzimy, że:

a. Oba drugie przybliżenia

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

są albo jednocześnie większe, albotóż jednocześnie mniejsze od pierwiastka x , zależnie od tego, czy $a > x$, czy też $a < x$.

b. Drugie przybliżenie a_1 , odpowiadające krańcowi a , zawsze jest bliższe szukanego pierwiastka, niż a .

Dla dowiedzenia tego, weźmy wzór Lagrange'a

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2}f''(t+\theta h).$$

Kładąc $t = a$, $h = x - a$ i zważając, że $f(x) = 0$, mieć będziemy

$$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a+\theta h) = 0,$$

skąd znajdujemy

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{h^2}{2} \frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)},$$

albo

$$x - a + \frac{f(a)}{f'(a)} = -\frac{h^2}{2} \frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)},$$

albo jeszcze

$$(1) \quad x - a_1 = -\frac{h^2}{2} \frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}.$$

W podobny sposób otrzymamy równość

$$(2) \quad x - b_1 = -\frac{h'^2}{2} \frac{f''(b+\theta'h')}{f'(b)};$$

θ i θ' oznaczają pewne liczby dodatne, mniejsze od jedności. Ponieważ, według założenia, żadna z funkcji $f'(x)$, $f''(x)$ nie zmienia swego znaku między $x = a$ i $x = b$, więc znaki wartości $f'(a)$, $f'(b)$ są jednakowe, a także znaki wartości $f''(a)$, $f''(a+\theta h)$, $f''(b+\theta'h')$, $f''(b)$ są jednakowe. Wskutek tego strony prawe równości (1) i (2) są jednakowego znaku, a więc także i różnice $x - a_1$ i $x - b_1$ są jednakowego znaku, t. j. albo oba drugie przybliżenia a_1 i b_1 są większe od pierwiastka szukanego x , albotóż oba są od niego mniejsze.

Przyjmując pod uwagę to, cośmy wyżej powiedzieli o krańcu a , i zestawiając stronę prawą równości (1) ze stroną prawą równości

$$a_1 - a = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

spostzegamy, że różnice $x - a_1$ i $a_1 - a$ są jednakowego znaku; a więc, albo

$$x < a_1 < a,$$

albotóż

$$x > a_1 > a.$$

W obu przypadkach drugie przybliżenie a_1 jest bliższe szukanego pierwiastka x , niż a , i znajduje się po téj samej stronie tego pierwiastka, co przybliżenie a .

Tym sposobem udowodniliśmy oba powyższe podania, odnoszące się do drugich przybliżeń, obliczanych sposobem Newton'a.

§ III. KRAŃCE WYŻSZE DLA BŁĘDÓW.

178. Przypuściwszy, podobnie jak w paragrafie poprzedzającym, że równanie $f(x) = 0$ między krańcami a i b posiada jeden tylko pierwiastek x , i że żadna z funkcji $f'(x)$, $f''(x)$ nie staje się zerem między $x = a$ i $x = b$, odnajdźmy dla funkcji $f'(x)$ kraniec niższy dla jej wartości bezwzględnych między $x = a$ i $x = b$ (por. § I), a dla funkcji $f''(x)$ kraniec wyższy dla jej wartości bezwzględnych między $x = a$ i $x = b$, i, oznaczwszy pierwszy z nich przez A , a drugi przez B , przyjmijmy

$$\frac{B}{2A} = M.$$

Zapomocą stopniowego przybliżania krańców a i b , zawsze możemy do-
sięgnąć tego, iż wartość bezwzględna liczb

$$a - b, \quad M(a - b)$$

będzie mniejsza od pewnej dowolnej małej liczby. Przypuścimy, że

$$\text{wart. bezw. } (a - b) < \frac{1}{10^l},$$

$$\text{wart. bezw. } M(a - b) < \frac{1}{10^k},$$

gdzie l oznacza liczbę całkowitą, nie mniejszą od zera, k zaś liczbę całkowitą nie mniejszą od jedności.

Przyjmując m -te przybliżenie a_m jako wartość żadanego pierwiastka, dopełniamy błąd, który się równa

$$e_m = x - a_m.$$

Podobnie mamy

$$e_{m-1} = x - a_{m-1},$$

albo

$$x = a_{m-1} + e_{m-1},$$

a zatem

$$f(a_{m-1} + e_{m-1}) = 0.$$

Ostatnie równanie możemy napisać tak:

$$f(a_{m-1}) + e_{m-1}f'(a_{m-1}) + \frac{e_{m-1}^2}{2}f''(a_{m-1} + \theta e_{m-1}) = 0.$$

skąd wynika

$$e_{m-1} + \frac{f(a_{m-1})}{f'(a_{m-1})} = -\frac{e_{m-1}^2}{2} \frac{f''(a_{m-1} + \theta e_{m-1})}{f'(a_{m-1})},$$

Zważając zaś, że

$$e_{m-1} + \frac{f(a_{m-1})}{f'(a_{m-1})} = x - \left(a_{m-1} - \frac{f(a_{m-1})}{f'(a_{m-1})} \right) = x - a_m = e_m,$$

możemy poprzednie równanie napisać tak:

$$e_m = -\frac{e_{m-1}^2}{2} \frac{f''(a_{m-1} + \theta e_{m-1})}{f'(a_{m-1})}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\text{wart. bezw. } e_m = e_{m-1}^2 \text{ wart. bezw. } \frac{f''(a_{m-1} + \theta e_{m-1})}{2f'(a_{m-1})};$$

a ponieważ

$$\text{wart. bezw. } \frac{f''(a_{m-1} + \theta e_{m-1})}{2f'(a_{m-1})} < M,$$

zatem

$$(1) \quad \text{wart. bezw. } e_m < M e_{m-1}^2.$$

Kładąc we wzorze (1) kolejno $m = 1, m = 2, \dots$, otrzymamy nierówności

$$\text{wart. bezw. } e_1 < M e^2,$$

$$\text{wart. bezw. } e_2 < M e_1^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\text{wart. bezw. } e_m < M e_{m-1}^2.$$

Podnieśmy obie strony pierwszej z powyższych nierówności do potęgi 2^{m-1} , obie strony drugiej nierówności do potęgi 2^{m-2} i t. d.; otrzymamy

$$e_1^{2^{m-1}} < M^{2^{m-1}} e^{2^m},$$

$$e_2^{2^{m-2}} < M^{2^{m-2}} e_1^{2^{m-1}},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\text{wart. bezw. } e_m < M e_{m-1}^2.$$

Wskutek pomnożenia tych nierówności przez siebie, będziemy mieli, po skróceniu,

$$(2) \quad \text{wart. bezw. } e_m < M^{2^m - 1} (a - b)^{2^m}.$$

Jest to ta właśnie nierówność, którąśmy chcieli wyprowadzić; ona daje możliwość otrzymania wyższych krańców dla błędów, odpowiadających kolejnym przybliżeniom, i wskazuje, że z powiększeniem się liczby m błędy te szybko zdużają do zera. Istotnie, ponieważ, według założenia

$$\text{wart. bezw. } (a - b) < \frac{1}{10^i}, \quad \text{wart. bezw. } M(a - b) < \frac{1}{10^k},$$

więc

$$\text{wart bezw. } M^{2^m-1}(a-b)^{2^m} < \frac{1}{10^{2^m k + l - k}},$$

skąd widoczna, iż, przy dostatecznie wielkim m , liczba $M^{2^m-1}(a-b)^{2^m}$ co do swój bezwzględnej wartości będzie dowolnie mała.

179. Wyprowadzając nierówności (2), przypuszczaliśmy, że przybliżenia a_1, a_2, \dots są zawarte między a i b , co zawsze będzie miało miejsce, jeżeli wartości $f(a)$ i $f'(a)$ są jednakowego znaku. Jednakże w zastosowaniu niekoniecznie należy się trzymać tego warunku: można zacząć rachunek od drugiego krańca b ; należy tylko pamiętać, że, ilekroć otrzymamy przybliżenie a_m , nie zawierające się między a i b , powinniśmy zastąpić je przez inną liczbę a'_m , zawartą między a i b , i taką, iżby dla niej kraniec wyższy dla błędu był takiż, jak dla a_m , t. j. $M^{2^m-1}(a-b)^{2^m}$. Oczywiście, że liczba a'_m , czyniąca zadość powyższym warunkom, może być zawsze bez trudności dobrana przy pomocy liczby a_m . A nawet przybliżenie a_m , chociażby ono zawierało się między a i b , może być zastąpione przez inną liczbę a'_m , zawartą między a i b , pod warunkiem, ażeby kraniec wyższy dla błędu, odpowiadającego a'_m , był równy $M^{2^m-1}(a-b)^{2^m}$; przez to nierówność (2), przy każdym m , oczywiście nie będzie naruszona.

PRZYKŁAD. Weźmy toż samo równanie, do którego Newton zastosował swój sposób, mianowicie równanie

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Posiada ono jeden tylko pierwiastek rzeczywisty, zawarty między 2 i 2,1.

Ponieważ

$$f'(x) = 3x^2 - 2,$$

$$f''(x) = 6x,$$

więc

$$\frac{f''(x)}{2f'(x)} = \frac{3x}{3x^2 - 2} = \frac{3}{3x - \frac{2}{x}},$$

skąd bezpośrednio widzimy, że, wmiarę wzrastania zmiennej x od $x=2$ do $x=2,1$, funkcja $\frac{f''(x)}{2f'(x)}$ wciąż maleje; a zatem, największą jej wartością jest

$$\frac{f''(2)}{2f'(2)} = 0,6,$$

tak iż dla przedziału $a = 2,1$, $b = 2$ możemy przyjąć $M = 0,6$. Mamy tu

$$a - b = \frac{1}{10},$$

$$\text{wart. bezw. } e_m < \frac{1}{10^{2^m}} (0,6)^{2^m - 1}.$$

Przybliżeniem drugim jest

$$a_1 = 2,1 - \frac{f(2,1)}{f'(2,1)} = 2,0945 \dots,$$

gdzie

$$e_1 < 0,006.$$

Szukany pierwiastek x zawiera się między krańcami

$$2,0885 \dots < x < 2,0945 \dots,$$

i, jako drugie przybliżenie, zamiast a_1 , możemy wziąć liczbę

$$a'_1 = 2,09,$$

która jest mniejsza od x , gdyż $f(a'_1) < 0$.

Trzecie przybliżenie możemy wyznaczyć według wzoru

$$a_2 = a'_1 - \frac{f(a'_1)}{f'(a'_1)};$$

otrzymujemy

$$a_2 = 2,09456 \dots,$$

przyczym

$$e_2 < \frac{3}{10^5};$$

a więc, szukany pierwiastek znajduje się między krańcami

$$2,09453 \dots < x < 2,09456 \dots$$

i, jako trzecie przybliżenie, zamiast a_2 możemy wziąć liczbę

$$a'_2 = 2,09455.$$

Czwarte przybliżenie wyznaczamy ze wzoru

$$a_3 = a'_2 - \frac{f(a'_2)}{f'(a'_2)};$$

otrzymujemy

$$a_3 = 2,094551481 \dots,$$

przyczym

$$e_3 < \frac{3}{10^9},$$

tak iż szukany pierwiastek zawiera się między krańcami

$$2,094551478 \dots < x < 2,094551481 \dots$$

Stąd otrzymujemy następującą wartość pierwiastka:

$$x = 2,09455148,$$

z przybliżeniem do jednej-sto milionowej.

180. Sposób Newton'a można także zastosować do obliczania pierwiastków zespolonych, jeżeli znane nam są przybliżone ich wartości; ale wówczas wyznaczenie wyższego krańca dla modułów błędów, odpowiadających stopnio-

wym przybliżeniom, nie może być uskutecznione na zasadzie wzoru Lagrange'a, gdyż on był wprowadzony wyłącznie dla funkcyj rzeczywistych.

Darboux, w rozprawie zatytułowanej: «*Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable*» rozciągnął wzór Lagrange'a na funkcyje zmiennę zespoloną, uczyniwszy przytym pewną zmianę w samym wzorze.

Oznaczając przez $f(x)$ jakąkolwiek funkcją całkowitą zmiennę x , a przez h dowolny przyrostek, będziemy mieli, według wzoru Darboux, następujące równanie:

$$f(x+h) = f(x) + \lambda h f'(x+\theta h),$$

gdzie θ oznacza pewną liczbę dodatnią, mniejszą od jednośc, λ zaś pewną liczbę zespoloną, której moduł ≤ 1 ; w równaniu tym tak h i x , jak i współczynniki w wyrażeniu funkcji $f(x)$, mogą być zespolone. Oczywiście, że powyższy wzór pozwala to wszystko, cośmy powiedzieli wyżej o błędach przy obliczaniu pierwiastków sposobem Newton'a, zastosować także do tego przypadku, kiedy wyznaczany pierwiastek jest zespolony.

§ IV. WYZNACZANIE PIERWIĄTKÓW WYMIERNYCH RÓWNANIA ZE SPÓŁCZYNNIKAMI CAŁKOWITYMI.

181. Rozwiązanie tego zadania należy do Teorii liczb, t. j. do tej części Algebry, która bada własności arytmetyczne pierwiastków; wyłożymy je tu jednak dlatego, że opiera się ono na ogólnie znanych zasadach elementarnych.

Przedewszystkiem wskażemy na pewne ułatwienia przy odszukiwaniu pierwiastków całkowitych równania ze współczynnikiemi całkowitymi.

Niech będzie dane równanie

$$(1) \quad f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n = 0,$$

w którym A, A_1, \dots, A_n są liczbami całkowitymi, i przypuśćmy, że liczba całkowita a czyni zadość temu równaniu. Kładąc

$$\frac{f(x)}{x-a} = -Bx^{n-1} - B_1x^{n-2} - \dots - B_{n-1},$$

zauważymy, że wszystkie współczynniki B, B_1, \dots, B_{n-1} są liczbami całkowitymi i czynią zadość równaniom

$$B_{n-1} = \frac{A_n}{a},$$

$$B_{n-2} = \frac{A_{n-1} + B_{n-1}a}{a},$$

$$B_{n-3} = \frac{A_{n-2} + B_{n-2}a}{a},$$

• • • • •

$$B = \frac{A_1 + B_1}{a},$$

$$B + A = 0.$$

Stąd wynika następujący sposób dowiedzenia się, czy liczba całkowita a czyni zadość danemu równaniu, czytóż nie.

Liczba a powinna być dzielnikiem wyrazu stałego A_n ; w przeciwnym razie a nie może czynić zadość równaniu (1). Przypuśćmy, że liczba A_n jest podzielna przez a , i oznaczmy iloraz przez B_{n-1} . Suma $B_{n-1} + A_{n-1}$ powinna być podzielna przez a ; w przeciwnym bowiem razie a nie czyni zadość równaniu (1). Przypuśćmy, że suma $B_{n-1} + A_{n-1}$ jest podzielna przez a , i oznaczmy iloraz przez B_{n-2} . Suma $B_{n-2} + A_{n-2}$ powinna być podzielna przez a ; w przeciwnym razie a nie czyni zadość równaniu (1). Przypuśćmy, że suma $B_{n-2} + A_{n-2}$ jest podzielna przez a i oznaczmy iloraz przez B_{n-3} . Postępując w podobny sposób dalej, albo przekonamy się, że liczba a nie jest pierwiastkiem równania (1), albowież dojdziemy do ostatniej liczby B . Jeżeli $B + A = 0$, to a jest istotnie pierwiastkiem równania (1); w przeciwnym razie a nie czyni zadość równaniu (1).

Możemy jeszcze dodać do tego kilka innych warunków, niezbędnych, ale nie wystarczających. Tak np., liczba a powinna się zawierać między krańcami dla pierwiastków równania (1); liczba $a - 1$ powinna być dzielnikiem liczby $f(1)$; a liczba $a + 1$ dzielnikiem liczby $f(-1)$; liczba $a - 2$ powinna być dzielnikiem liczby $f(2)$, a liczba $a + 2$ dzielnikiem liczby $f(-2)$, i t. d.

Jeżeliśmy się przekonali, że $f(a) = 0$, to wówczas wszystkie pozostałe pierwiastki równania (1) są pierwiastkami równania

$$Bx^{n-1} + B_1x^{n-2} + \dots + B_{n-1} = 0.$$

PRZYKŁAD. Weźmy równanie

$$f(x) = 3x^3 - 50x^2 - 104x - 105 = 0;$$

ono posiada dwa pierwiastki całkowite: $x = 5$ i $x = -3$, o czym przekonywa nas następująca tablica, zawierająca rezultaty działań:

3	0	- 50	- 104	- 105	
- 3	9	23	35		- 3
	3	6	7		5

Pozostałe dwa pierwiastki otrzymamy z równania

$$3x^2 + 6x + 7 = 0.$$

182. Przy rozwiązywaniu równania ze współczynnikami całkowitymi możemy zawsze przypuszczać, że współczynnik najwyższej potęgi niewiadomej jest równy jedności.

Jakoż, jeżeli w równaniu

$$(1) \quad Ax^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1} = 0$$

spółczynnik A nie jest równy jedności, to wówczas, mnożąc obie strony równania przez A^{n-1} , otrzymamy

$$(Ax)^n + A_1(Ax)^{n-1} + \dots + A^{n-1}A_{n-1} = 0;$$

a stąd, kładąc $Ax = y$,

$$(2) \quad y^n + A_1y^{n-1} + \dots + A^{n-1}A_{n-1} = 0.$$

Tym sposobem rozwiązanie równania (1) sprowadza się do rozwiązania równania (2), w którym współczynniki są liczbami całkowitymi, a współczynnik najwyższej potęgi niewiadomej jest równy jedności.

Można to niekiedy skutecznie inaczej, nieco prościej; np., ażeby sprowadzić równanie

$$8x^4 + 12x^3 + 10x^2 + x - 7 = 0$$

do żądanej postaci, dość uczynić $2x = y$; otrzymujemy

$$y^4 + 3y^3 + 5y^2 + y - 14 = 0.$$

Każdemu pierwiastkowi wymiernemu równania (2) odpowiada pierwiastek wymierny równania (1), i nawzajem; dlategoż zadanie o wyznaczeniu pierwiastków wymiernych równania (1) sprowadza się do wyznaczenia pierwiastków wymiernych równania (2).

183. TWIERDZENIE. *Każdy pierwiastek wymierny równania postaci*

$$(1) \quad x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n = 0$$

ze współczynnikami całkowitymi A_1, \dots, A_n jest liczbą całkowitą.

Przypuśćmy, że równanie (1) ma pierwiastek wymierny $x = \frac{a}{b}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi pierwszymi względem siebie; mamy

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + A_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + A_n = 0,$$

skąd

$$a^n = b(-A_1a^{n-1} - \dots - A_nb^{n-1}),$$

albo, oznaczywszy przez H liczbę całkowitą

$$H = -A_1a^{n-1} - \dots - A_nb^{n-1},$$

$$a^n = bH.$$

Ponieważ jednak liczby a i b są pierwsze względem siebie, zatem możemy znaleźć takie dwie liczby całkowite u i v , które zadość uczynią równaniu

$$au + bv = 1.$$

Stąd, po podniesieniu obu stron do potęgi n -tej, otrzymamy

$$a^n u^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b u^{n-1} v + \dots + b^n v^n = 1,$$

albo, podstawiając bH zamiast a^n ,

$$b\left(Hu^n + \frac{n}{1} a^{n-1} u^{n-1} v + \dots + b^{n-1} v^n\right) = 1.$$

To równanie wskazuje, że liczba b jest dzielnikiem jedności, gdyż wartość wielomianu w nawiasie jest, oczywiście, liczbą całkowitą; a zatem $b = 1$, t. j. pierwiastek wymierny $x = \frac{a}{b}$ jest liczbą całkowitą.

184. Z tego cośmy powiedzieli w dwu art. ostatnich, wnosimy, że wyznaczenie pierwiastków wymiernych równania ze współczynnikami całkowitymi sprowadza się do wyznaczenia pierwiastków całkowitych równania podobnego.

PRZYKŁAD. Równanie

$$3x^3 + x^2 + x + 35 = 0$$

nie posiada pierwiastka całkowitego; ażeby się dowiedzieć, czy nie ma ono pierwiastków wymiernych ułamkowych, przyjmijmy $3x = y$; otrzymujemy równanie

$$y^3 + y^2 + 3y + 315 = 0,$$

które ma jeden tylko pierwiastek całkowity $y = -7$; a więc równanie z nie-
wiadomą x ma jeden tylko pierwiastek wymierny $x = -\frac{7}{3}$.

KONIEC.

Redaktor i wydawca czasopisma «Bibl. mat.-fiz.»

Dr. Maryjan A. Baraniecki.



Biblioteka im. Hieronima
Łopacińskiego w Lublinie

324000



1000084262