# НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ

# АЛГЕБРЫ.

Tocowski Aleksander
z Matematycznej

1864 rok

# НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ

# АЛГЕБРЫ,

## СЪ ТАБЛИЦАМИ СТЕПЕНЕЙ ЧИСЕЛЪ

## отъ 1 до 1000.

СОСТАВЛЕНЫ

**Н. Т. Щегловымъ.**

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

ВЪ ТИПОГРАФІИ ЯКОВА ТРЕЯ.

1853.

**ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ:**

съ тѣмъ, чтобы по отпечатаніи представлено было въ Ценсурный Комитетъ узаконенное число экземпляровъ. С. Петербургъ, 28 Января 1853 года.

*Ценсоръ Н. Елагинъ.*

**ИЗДАНІЕ КНИГОПРОДАВЦА С. ЛОСКУТОВА.**

# ПРЕДИСЛОВІЕ.

Курсъ начальныхъ основаній Алгебры, предлагаемый здѣсь благосклонному вниманію почитателей математическихъ наукъ, составленъ мною не по какой ни есть извѣстной программѣ, принятой въ русскихъ Учебныхъ Заведеніяхъ, и не въ такомъ объемѣ, въ какомъ преподается въ нихъ начальная Алгебра. У меня не было цѣли дать этой книгѣ назначеніе специальное; а потому и планъ для изложенія предметовъ, которыми я предположилъ ограничиться въ этомъ курсѣ, принятъ такой, какой собственно для меня показался удобнѣе.

Всѣ извѣстныя Алгебры на русскомъ языкѣ, признаваемыя у насъ лучшими, составлены французскими авторами, каковы: *Лакроа*, *Франкеръ*, *Бурдонъ*, *Лефебюръ-де-Фурси*, *Мейеръ и Шоке*, и проч. И дѣйствительно, онѣ ведутъ учащагося къ цѣли, по видимому, путемъ удобнѣйшимъ, отличаются краткостію, легкимъ изложеніемъ предметовъ, печатаются (на французскомъ языкѣ) изящно. Предметы излагаются въ нихъ почти одни и тѣ же; разность замѣчается только въ расположеніи предметовъ Науки, въ полнотѣ и обработкѣ различныхъ статей.

Во всѣхъ нѣмецкихъ курсахъ даже начальной Алгебры, какіе мнѣ случалось читать, я находилъ нетолько иной способъ обработки предметовъ, но другое число предметовъ, чѣмъ я и воспользовался отчасти для составленія моего курса. Такимъ образомъ, не нарушая системы, я изложилъ совсѣмъ отдѣльно *Синтактику* (теорію переложеній, сочетаній, и проч.); за нею ввелъ начальныя основанія *Математической теоріи вѣроятностей*, въ такомъ размѣрѣ, въ какомъ находилъ ее почти во всѣхъ начальныхъ Алгебрахъ у нѣмецкихъ авторовъ, чего совсѣмъ нѣтъ въ новѣйшихъ Алгебрахъ французскихъ. Въ заключеніе, я помѣстилъ способъ рѣшенія численныхъ уравненій высшихъ степеней съ одною извѣстною. Для этого надлежало сообщить общія понятія о функціяхъ съ одною перемѣнною, и показать только тѣ ихъ свойства, которыя особенно полезны для рѣшенія таковыхъ уравненій. А какъ это и было окончательною статьею, то не счелъ я нужнымъ говорить о дѣлимости многочленныхъ раціональныхъ функцій, о симметрическихъ функціяхъ, объ исключеніи неизвѣстной между данными уравненіями высокихъ степеней, и о всемъ, что отъ этого зависитъ. По сей причинѣ выпущены изъ моего курса нѣкоторыя теоремы, помѣщаемыя въ новѣйшихъ иностранныхъ курсахъ, которыя превосходны въ теоріи, но затруднительны для начинающихъ, либо до крайности утомительны въ практикѣ. Въ замѣнъ этого, я принялъ другой путь, короче ведущій къ достиженію цѣли, мною предположенной, — способы менѣе сложные, на дѣлѣ удобоисполнимые.

Любознательнаго читателя прошу не считать излишнимъ, что я въ начальныхъ основаніяхъ Алгебры, изложивши теорію уравненій высшихъ степеней съ одною неизвѣстною, много распространился надъ рѣшеніемъ численныхъ уравненій. Это сдѣлано по уваженію единственно къ новымъ способамъ вычисленія корней дѣйствительныхъ несоизмѣримыхъ, такъ и мнимыхъ, каковы: способъ Ньютоновъ исправленный, и способъ Фогеля. Послѣдній способъ еще недавно сдѣлался извѣстенъ, да и первый совсѣмъ не въ томъ видѣ излагается въ разныхъ курсахъ, какъ здѣсь. Кромѣ того, что эти способы отличаются вѣрностію и особенною простотою, они любопытны и по одной своей новости. Но, чтобы можно было ими пользоваться безъ утомительности при разрѣшеніи численныхъ уравненій, не превышающихъ 10-й степени, я составилъ двѣ таблицы, изъ которыхъ въ одной находятся первыя пять степеней чиселъ отъ 1 до 1000; а во второй—слѣдующія пять степеней, но только для чиселъ двузначныхъ отъ 1 до 100. Ни въ одномъ курсѣ не находилъ я таблицъ этого рода (кромѣ таблицъ квадратовъ и кубовъ), а между тѣмъ, онѣ чрезвычайно полезны не только для быстраго вычисленія корней численныхъ уравненій, но и во множествѣ другихъ случаевъ какъ въ Алгебрѣ, такъ и въ другихъ вычисленіяхъ, гдѣ логариѳмы оказываются недостаточными. Таблицы эти составлены тщательно и повѣрены. Не смотря на это, я не осмѣливаюсь утверждать, чтобъ не остались въ нихъ гдѣ-нибудь погрѣшности, а потому желательно, чтобы, для общей пользы, кто ни есть, хотя изъ одного любопытства, занялся ихъ повѣркою. Всякая открытая погрѣшность будетъ принята мною съ благодарностію.

*Н. Щ.*

# ОГЛАВЛЕНІЕ.

## ВВЕДЕНІЕ.

### ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЯ ПОНЯТІЯ И ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

## АЛГЕБРИЧЕСКІЯ ДѢЙСТВІЯ.

## ГЛАВА ПЕРВАЯ.

### СЛОЖЕНІЕ И ВЫЧИТАНІЯ АЛГЕБРИЧЕСКИХЪ КОЛИЧЕСТВЪ.

## ГЛАВА ВТОРАЯ.

### УРАВНЕНІЯ И НЕРАВЕНСТВА.

### I. Уравненія первой степени съ одною неизвѣстною.

### II. Уравненіе первой степени съ двумя, тремя, и болѣе неизвѣстными, когда число неизвѣстныхъ равно числу уравненій.

### III. О неравенствахъ.

### IV. Уравненія съ двумя, тремя и больше, неизвѣстными, когда число неизвѣстныхъ болѣе числа данныхъ уравненій.

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

### НЕПРЕРЫВНЫЯ ДРОБИ.

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

### ВОЗВЫШЕНІЕ АЛГЕБРИЧЕСКИХЪ КОЛИЧЕСТВЪ ВЪ КВАДРАТЪ.

## ГЛАВА ПЯТАЯ.

### А. УРАВНЕНІЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ СЪ ОДНОЮ НЕИЗВѢСТНОЮ.

### B. УРАВНЕНІЯ 2-й СТЕПЕНИ СЪ ДВУМЯ НЕИЗВѢСТНЫМИ, КОГДА ЧИСЛО НЕИЗВѢСТНЫХЪ РАВНО ЧИСЛУ ДАННЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

СТРАН.

## ГЛАВА ШЕСТАЯ.

### ВОЗВЫШЕНІЕ ОДНОЧЛЕНОВЪ И МНОГОЧЛЕНОВЪ ВЪ ТРЕТЬЮ СТЕПЕНЬ.

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

### О ВОЗВЫШЕНІИ ВЪ СТЕПЕНИ ВООБЩЕ, И ИЗВЛЕЧЕНІИ КОРНЕЙ.

## ГЛАВА ОСЬМАЯ.

### ТЕОРІЯ ЛОГАРИѲМОВЪ.

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

### О ПРОГРЕССІЯХЪ.

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

### ПРИЛОЖЕНІЕ ПРОГРЕССІЙ И ЛОГАРИѲМОВЪ КЪ ВЫЧИСЛЕНІЮ ПРОЦЕНТОВЪ И ДОХОДОВЪ РАЗЛИЧНАГО РОДА.

## ГЛАВА ОДИНАДЦАТАЯ.

### *(Синтактика).*

### ПЕРЕЛОЖЕНІЯ, СОЧЕТАНІЯ И РАЗЛИЧНЫЯ СОЕДИНЕНІЯ ИЗЪ ДАННАГО ЧИСЛА БУКВЪ, И ОПРЕДѢЛЕНІЕ ИХЪ СУММЫ.

## ГЛАВА ДВѢНАДЦАТАЯ.

### НАЧАЛЬНЫЯ ПОНЯТІЯ ОБЪ ИСЧИСЛЕНІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

## ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ.

### О ФУНКЦІЯХЪ ВООБЩЕ.

## ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ.

### ТЕОРІЯ УРАВНЕНІЙ ВЫСШИХЪ СТЕПЕНЕЙ СЪ ОДНОЮ НЕИЗВѢСТНОЮ.

### Преобразованіе уравненій.

## ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ.

### РѢШЕНІЕ ЧИСЛЕННЫХЪ УРАВНЕНІЙ ВЫСШИХЪ СТЕПЕНЕЙ СЪ ОДНОЮ НЕИЗВѢСТНОЮ.

# НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ АЛГЕБРЫ.

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ПОНЯТІЯ И ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

**1.** *Алгебра* есть общая Ариѳметика. Она показываетъ самые общіе способы исчисленія количествъ, и общіе способы рѣшенія вопросовъ, къ нимъ относящихся *).

Въ ней числа, изображающія величины различныхъ количествъ, замѣняются буквами французской либо греческой азбуки: $a$, $b$, $c$......, $x$, $y$, $z$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$...... Каждая буква можетъ представлять какое угодно число цѣлое или дробь, отвлеченное или именованное.

Однородныя, или чѣмъ нибудь сходныя количества, въ Алгебрѣ очень часто пишутся одною буквою, а для различія ихъ величины, ставятся знаки надъ этою буквою, либо малыя цифры внизу ея съ правой стороны, наприм. $a'$, $a''$, $a'''$.....; это выговаривается: $a$ со знакомъ, съ двумя знаками, съ тремя знаками, и проч. Также пишутъ $a_1$, $a_2$, $a_3$...... и выговариваютъ: $a$ одинъ, $a$ два, $a$ три, и т. д.

Какъ для теоретическаго изложенія алгебрическихъ дѣйствій, такъ и для общаго рѣшенія задачь, можно брать какія угодно буквы вмѣсто чиселъ. Слѣдовательно, одна и та же буква въ разнородныхъ задачахъ будетъ имѣть различныя значенія; но, въ одной и той же задачѣ каждая буква отдѣльно должна изображать какое нибудь опредѣленное количество, чѣмъ нибудь различное отъ всякаго другаго.

**2.** Сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе между буквенными количествами въ Алгебрѣ изображается тѣми же знаками, что и въ обыкновенной Ариѳметикѣ: $+$, $-$, $\times$ или (.), и $\div$.

---

*) До Р. Х. Алгебра не была извѣстна. Она появляется въ 4-мъ вѣкѣ послѣ Р. Х. въ твореніяхъ Діофанта, александрійскаго ученаго, состоявшихъ изъ 13 книгъ, изъ коихъ шесть дошли до насъ.

Такимъ образомъ *сумма* изъ $a$, $b$, $c$, изображается чрезъ $a+b+c$, и выговаривается: $a$ сложенное съ $b$ и $c$, или $a$ плюсъ $b$ плюсъ $c$.

*Для вычитанія* $b$ изъ $a$, пишутъ $a-b$, и выговариваютъ: $a$ безъ $b$, или $a$ минусъ $b$.

*Дѣленіе* $a$ на $b$ изображается чрезъ

$$a : b, \text{ или } \frac{a}{b}.$$

*Умноженіе* буквенныхъ количествъ дѣлается такъ: пишутся эти количества одно подлѣ другаго, и между ними ставится знакъ $\times$ или $(.)$, или короче: ставятся помножаемыя буквы одна подлѣ другой безъ всякаго знака. Напримѣръ: $a\times b\times c=a.b.c=abc$; этимъ и означено, что $a$ помножено на $b$ и на $c$.

Нельзя дѣлать этого сокращенія между числами. Наприм. $5\times2$ и $52$ имѣютъ совершенно различныя значенія.

**3**. Когда буквенное количество помножается на численнаго множителя, то этотъ послѣдній ставится просто подлѣ буквеннаго съ лѣвой стороны, и называется его *предстоящимъ* или *коефиціентомъ*. Напримѣръ:

$$4\times a=4a,\ \frac{3}{7}\times p=\frac{3}{7}p;$$

здѣсь $4$ коефиціентъ при $a$, $\frac{3}{7}$ коефиціентъ при $p$.

Коефиціентъ показываетъ, сколько разъ буквенное количество, при немъ стоящее, или какая часть его берется. Такъ,

$$4a=a+a+a+a;$$

$$\frac{3}{7}p=\frac{1}{7}p+\frac{1}{7}p+\frac{1}{7}p.$$

Когда коефиціентъ стоитъ предъ произведеніемъ нѣсколькихъ буквъ, то показываетъ, сколько разъ (или какая часть) берется все это произведеніе. Наприм.

$$3abc=abc+abc+abc.$$

Всякая отдѣльная буква имѣетъ при себѣ коефиціентомъ 1-цу; только ее не пишутъ, а всегда подразумѣваютъ, ибо само собою понятно, что $a=1.a$.

При самыхъ общихъ рѣшеніяхъ вопросовъ, коефиціенты предъ искомыми или неизвѣстными количествами также означаются буквами, изображающими какія нибудь отвлеченныя числа. Наприм. если въ выраженіи

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

одно $x$ неизвѣстно, то извѣстныя числа $a$, $b$, $c$, .... называются коефиціентами.

**4**. *Степени и показатели ихъ*. Отъ умноженія количества самаго на себя получаются произведенія называемыя *степенями* того количества. Степени различаются по числу равныхъ множителей, взятыхъ для ихъ составленія. Одинъ множитель $a$ представляетъ *первую степень* этого количества. Произведеніе двухъ равныхъ множителей $a\times a=aa$ называется *второю степенью* отъ $a$; произведеніе трехъ равныхъ множителей $a\times a\times a=aaa$ составляетъ *третью степень* отъ $a$, и т. д.

Для сокращенія, пишутъ букву $a$ одинъ разъ, и надъ нею съ правой стороны ставятъ *показатель*, то есть, число, показывающее, сколько разъ эта буква взята множителемъ для составленія степени, или какой она степени. Посему, пишутъ $aa=a^2$, и произносятъ: $a$ второй степени, или $a$ квадратъ; $aaa=a^3=$ $a$ третьей степени, или $a$ кубъ; $aaaaa=a^5=a$ пятой степени.

Ежели степень состоитъ изъ числа $n$ множителей $a$, то пишется $aaaaa\ldots=a^n$, и выговаривается $a$ $n$-ой степени.

Таким образомъ,

$$aaaabbbcc \text{ надобно писать } a^4\, b^3\, c^2.$$

**5**. Всякое количество $a$, возвышаемое въ степень, называется *основаніемъ*, *производителемъ*, или *корнемъ этой степени*.

Не должно смѣшивать показателя степени буквеннаго количества съ его коефиціентомъ. Наприм. $3a$ не равно $a^3$; потому что

$$3a=a+a+a,\ a^3=aaa.$$

Всякая буква имѣетъ показателемъ 1-цу; но этотъ показатель не пишется, а только всегда подразумѣвается. Наприм. $a=a^1$.

**6**. *Знаки сравненія*. — Для сравненія величины однородныхъ количествъ употребляются:

а) *Знакъ равенства*, $=$, который ставится между равными количествами; наприм. $2a+3a=5a$.

б) *Знаки неравенства*, $>$, $<$, которые выговариваются: *больше*, *меньше*. Напримѣръ, если нужно показать, что $a$ больше $b$, и $c$ меньше $d$, то пишется

$$a>b,\ c<d;$$

отверстіе знака всегда обращается къ большему количеству.

**7**. При алгебрическихъ дѣйствіяхъ чаще всего употребляются равенства. Главное свойство равенства между количествами выражается слѣдующею аксіомою: *равенство между равными количествами не перемѣнится, если мы произведемъ какія нибудь равныя дѣйствія надъ ними*, напримѣръ, если придадимъ къ нимъ по ровну, или отнимемъ по ровну, если ихъ помножимъ или раздѣлимъ на равныя количества, если возвысимъ въ равныя степени, и проч.

## АЛГЕБРИЧЕСКІЯ КОЛИЧЕСТВА.

**8**. Алгебрическими, т. е. буквенными, количествами называются выраженія, которыхъ составляющія части изображены буквами, и соединены между собою знаками различныхъ дѣйствій, таковы наприм.:

$$5a,\ 6a^3b,\ 3a-2b+c,\ \frac{4a^3-7b^3}{p^2+q^2}, \text{ и проч.}$$

**9**. *Члены*. — Членами алгебрическаго количества называются количества, его составляющія, соединенныя между собою знаками $+$ или $-$.

Члены бываютъ *положительные* или *отрицатальные*, смотря потому, какіе знаки находятся предъ ихъ коефиціентами, $+$ или $-$.

Если количество начинается положительнымъ членомъ, то предъ этимъ членомъ не пишется знакъ $+$, а только всегда подразумѣвается. Наприм.

$$3a^2b=+3a^2b$$

Въ выраженіи $2a^2-3b+5c-d$ члены $2a^2$, $5c$, положительные; $-3b$ и $-d$ члены отрицательные (вычитаемые).

**10.** *Количества одночленныя, двучленныя, и проч.* — Алгебрическія количества, по числу членовъ ихъ составляющихъ, бываютъ *одночленныя, двучленныя* (биномы), *трехчленныя*, и, вообще, *многочленныя* (полиномы). Напримѣръ:

$5a$, $4b^2c$, $\frac{3}{5}\frac{p^2b^3}{mn}$, суть колич. одночленныя;

$a+b$, $3ab^2-4a^2n$, $7b^2c+\frac{a}{b}$, количества двучленныя;

$2a-\frac{2}{3}bc+\frac{4}{5}\frac{ab}{c}$, количество трехчленное;

$ax+bx^2+cx^3+dx^4+\ldots$ количество многочленное, или многочленъ.

**11.** Многочленъ называется *однороднымъ*, если всѣ его члены состоятъ изъ равнаго числа буквенныхъ множителей; въ противномъ случаѣ, онъ называется *смѣшаннымъ, неоднороднымъ*. Напримѣръ:

$ab^2-3bc^2+\frac{4}{5}mnp$, количество однородное;

$ab^2-mn+p$, количество неоднородное.

**12.** Однородное количество бываетъ первой степени, второй степени, третьей степени, и проч., когда всѣ члены его содержатъ по одному буквенному множителю, или по два, по три, и т. д. Напримѣръ:

$3a+b-\frac{2c}{3}$, количество первой степени;

$3a^2-bd-\frac{2}{3}cm$, —— второй степени;

$3a^2p+bd^2-\frac{2}{3}cm$, —— третьей степени.

**13.** Значеніе многочлена ни сколько не перемѣнится, въ какомъ бы порядкѣ ни были написаны его члены. Напримѣръ:

$3a^2b-4ab^2+2b^3$ можно написать:
$2b^3-4ab^2+3a^2b$, или
$3a^2b+2b^3-4ab^2$, или
$-4ab^2+3a^2b+2b^3$;

потому что, отъ этой перестановки, не перемѣняется условіе, что $3a^2b$ и $2b^3$ надобно сложить, и изъ суммы вычесть $4ab^2$.

Основываясь на этомъ свойствѣ, въ Алгебрѣ весьма часто располагаютъ многогочлены по возрастающимъ или убывающимъ степенямъ какой нибудь буквы, общей многимъ членамъ ихъ. Напримѣръ, количество

$$3ab^2-3a^2b+a^3-b^3$$

можно расположить по уменьшающимся степенямъ буквы $a$, и найдется:

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$

оно въ тоже время расположилось по возрастающимъ степенямъ буквы $b$, но въ сущности нисколько не перемѣнилось.

**14.** *Члены подобные.* — Въ многочленѣ могутъ быть члены подобные или неподобные. Члены подобные всѣ состоятъ изъ однѣхъ и тѣхъ же буквъ, имѣющихъ соотвѣтственно равныхъ показателей; только ихъ знаки и коефиціенты могутъ быть какіе угодно. Напримѣръ, въ многочленѣ

$$a^2b+5a^2b-2a^2b+4ab^2$$

три первые члена подобны, но четвертый имъ не подобенъ, потому что его буквы $a$ и $b$ имѣютъ другихъ показателей.

**15.** *Сокращеніе многочленовъ.*—Многочлены, въ которыхъ находятся подобные члены, можно приводить въ простѣйшій видъ, т. е. *сокращать*, соединяя подобные члены, чрезъ сложеніе или вычитаніе, въ одинъ членъ, а именно:

1) Если подобные члены будутъ съ равными знаками, то надобно сложить одни ихъ коефиціенты, предъ суммою поставить ихъ общій знакъ, а буквы написать тѣ же, какія находятся въ одномъ членѣ. Наприм.:

$$3a+4a=7a,$$

$$4m-2p-3p=4m-5p,$$

$$2a^3b^2+10a^3b^2=12a^3b^2,$$

$$5mn^2-3a^2b-\ \ 7a^2b=5mn^2-10a^2b,$$

$$-\frac{3}{4}a^5c^3-\frac{2}{3}a^5c^3=-\frac{17}{12}a^5c^2.$$

2) Если подобные члены съ противными знаками, то надобно сложить сперва члены положительные, потомъ члены отрицательные, вычесть меньшую сумму изъ большей, и предъ остаткомъ поставить знакъ большаго количества. Послѣднее понятно изъ слѣдующихъ примѣровъ:

$$6a-\ \ 4a=2a,$$

$$6a-\ \ 6a=0,$$

$$6a-10a=-4a.$$

(ибо $6a-10a=6a-6a-4a$; но $6a-6a=0$, посему $6a-10a=-4a$).

*Примѣры.* $6a^2b^3-4a^2b^3+3a^2b^3-a^2b^3=$

$$=9a^2b^3-5a^2b^3=4a^2b^3;$$

$$8a^2b-15a^2b+6a^2b=14a^2b-15a^2b=-a^2b.$$

**16.** Всякое алгебрическое выраженіе обращается въ численное (нумерическое), если выразить его буквы числами, подставить эти числа на мѣста буквъ, и произвести ариѳметическія дѣйствія, показанныя знаками.

*Примѣръ.* — Найти численную величину количества $3a^2b^3$, полагая $a=4$, $b=2$.

Она будетъ:

$$3a^2b^3=3.\,4^2.\,2^3=3.\,16.\,8=384.$$

*Примѣръ.* — Найти численную величину для $\frac{4}{5}ab^2-\frac{2}{3}bc^2$, полагая $a=10$, $b=3$, $c=\frac{1}{2}$.

Она будетъ:

$$\frac{4}{5}.\,10.\,3^2-\frac{2}{3}.\,3.\,\frac{1}{4}=72-\frac{1}{2}=71\frac{1}{2}.$$

**17.** Очень часто нужно бываетъ только показать, что надъ цѣлымъ многочленомъ должно произвести какое нибудь дѣйствіе; тогда этотъ многочленъ ставятъ между скобками, и предъ скобкою ставятъ знакъ требуемаго дѣйствія. Напримѣръ, желая показать, что многочленъ $3a-b+2c$ надобно вычесть изъ $5d$, пишутъ:

$$5d-(3a-b+2c);$$

если тотъ-же многочленъ надобно помножить на $5a^2b$, то пишутъ:

$$(3a-b+2c)5a^2b.$$

Для помноженія $a+b$ на $a-b$, пишутъ:

$$(a+b)\cdot(a-b);$$

для возвышенія $a+b$ въ квадратъ, пишутъ:

$$(a+b)^2,\text{ и проч.}$$

# АЛГЕБРИЧЕСКІЯ ДѢЙСТВІЯ.

## ГЛАВА ПЕРВАЯ.

### СЛОЖЕНІЕ И ВЫЧИТАНІЕ АЛГЕБРИЧЕСКИХЪ КОЛИЧЕСТВЪ.

**18.** **Сложеніе.**—Для сложенія алгебрическихъ количествъ, надобно только написать эти количества съ ихъ знаками въ одну строку, и потомъ сократить, если будутъ подобные члены, то и получится искомая сумма. Напримѣръ: суммы количествъ $3a^2b$, $5ab^3$, $2b$, найдется

$$3a^2b+5ab^3+2b.$$

Сумма членовъ $2a^2$, $-3b^2$, будетъ

$$2a^2-3b^2.$$

Здѣсь предъ $3b^2$ удержанъ знакъ —, потому что это придаваемое количество отрицательное. Справедливость этого можно еще доказать тѣмъ, что, если изъ суммы двухъ количествъ вычесть одно изъ нихъ, то должно остаться другое: отнимите же $2a^2$ изъ $2a^2-3b^2$, остается именно другое количество $-3b^2$. Слѣдовательно, при сложеніи $2a^2$ съ $-3b^2$, долженъ быть сохраненъ знакъ — предъ $3b^2$.

Поэтому въ Алгебрѣ суммою вообще называется совокупность членовъ съ равными или различными знаками, и, для отличія, называется *алгебрическою суммою*.

*Примѣръ.* Сумма количествъ $3a^3+2ab^2+b^3$ и $5ab^2+2a^3$ найдется:

$$3a^3+2ab^2+b^3+5ab^2+2a^3;$$

а, соединивъ подобные члены:

$$3a^3+2a^3=5a^3,$$
$$2ab^2+5ab^2=7ab^2,$$

получится также сумма, только сокращенная:

$$5a^3+7ab^2+b^3.$$

**19.** И въ Алгебрѣ, подобно тому какъ въ Ариѳметикѣ, при сложеніи многочленовъ, пишутъ эти слагаемыя количества однѣ подъ другими, проводятъ подъ ними горизонтальную черту; потомъ ищутъ подобные члены, начиная съ перваго; такіе члены приводятъ въ одинъ, который и пишутъ подъ чертою; а послѣ приписываютъ туда же и члены неподобные съ ихъ знаками.

*Примѣръ.* — Сложить количества:

$$\begin{array}{c} 7x^2-8xy+z^2 \\ 6xy-9z^2-3x^2 \\ 3z^2+2xy \\ \hline \end{array}$$

Найдется сумма $4x^2-5z^2$.

*Примѣръ.* — Сложить:

$$\begin{array}{c} \frac{5}{6}mn^2-\frac{4}{5}a^2n-5\frac{1}{2} \\ a^2n-\frac{2}{3}mn^2-\frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

Сумма: $\frac{1}{6}mn^2+\frac{1}{5}a^2n-5\frac{3}{4}$

Здѣсь, для сокращенія подобныхъ членовъ $\frac{5}{6}mn^2$ и $-\frac{2}{3}mn^2$, вычтенъ коефиціентъ втораго члена изъ коефиціента перваго, то есть, взято $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$. Далѣе, изъ $a^2n$ вычтенъ членъ $\frac{4}{5}a^2n$, то есть, взято $1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$, и проч.

**20.** **Вычитаніе.** Для вычитанія одного количества изъ другаго, надобно перемѣнить знаки у всѣхъ членовъ вычитаемаго, и написать оное подлѣ уменьшаемаго въ одну строку, а потомъ сократить, если будутъ члены подобные, то и найдется искомая разность.

Это правило можно объяснить слѣдующими примѣрами вычитанія одночленныхъ количествъ:

1) Изъ $3a^2$ вычесть $5ab$. Разность будетъ

$$3a^2-5ab.$$

2) Изъ $a$ вычесть $-b$. Разность будетъ

$$a+b.$$

Для доказательства точности этого вывода, замѣтимъ, что $b-b=0$, и что уменьшаемое $a$ не перемѣнится, если придадимъ къ нему этотъ нуль:

$$a=a+0=a+b-b;$$

а потомъ отсюда отнимемъ $-b$, и останется

$$a+b.$$

3) Изъ $a$ вычесть $b-c$; получится разность

$$a-b+c.$$

Ибо, $a=a+0=a+b-b+c-c$;

отсюда вычитаю $+b-c$, то есть, уничтожаю два члена $+b$ и $-c$, и получаю искомую разность $a-b+c$.

Этимъ и доказано правило, что, при вычитаніи, надобно у всѣхъ членовъ количества вычитаемаго перемѣнить знаки, и съ этими знаками написать подлѣ уменьшаемаго.

**21.** При вычитаніи многочленовъ, дѣйствіе располагаютъ какъ въ Ариѳметикѣ: пишутъ вычитаемое подъ уменьшаемымъ, проводятъ подъ нимъ черту, перемѣняютъ знаки у всѣхъ членовъ вычитаемаго, сокращаютъ подобные члены, если они есть, и, что получится, ставятъ подъ чертою; туда же сносятъ и члены несократимые.

*Примѣръ.* Изъ $10b^2c-15bc^2+20c^3$ вычесть $10c^3-bc^2-2b^2c$.

Для этого перемѣнимъ знаки предъ всѣми членами вычитаемаго, подпишемъ подъ уменьшаемымъ, и сократимъ:

$$\begin{array}{rl} & 10b^2c-15bc^2+20c^3 \\ & -10c^3+\ \ bc^2+2b^2c \\ \hline \text{разность} & 12b^2c-14bc^2+10c^3. \end{array}$$

*Примѣръ.* Изъ $\frac{1}{6}mn^2+\frac{1}{5}a^2n-5\frac{3}{4}$ вычесть $a^2n-\frac{2}{3}mn^2-\frac{1}{4}$.

Перемѣнивъ знаки въ вычитаемомъ, напишемъ его подъ уменьшаемымъ, и сократимъ:

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{6}mn^2+\frac{1}{5}a^2n-5\frac{3}{4} \\ & -a^2n+\frac{2}{3}mn^2+\frac{1}{4} \\ \hline \text{разность} & =\frac{5}{6}mn^2-\frac{4}{5}a^2n-5\frac{1}{2} \end{array}$$

**22.** *Остатки отрицательные, количества отрицательныя.*—Въ Алгебрѣ отрицательные остатки происходятъ при вычитаніи большихъ количествъ изъ меньшихъ. Такъ, если надобно изъ $2a$ вычесть $5a$; то всё-таки вычитаютъ меньшее изъ большаго, и предъ остаткомъ ставятъ знакъ —,

$$2a-5a=-3a.$$

Ибо это все тоже, что $2a-2a-3a$; но $2a-2a=0$, слѣдовательно остатокъ будетъ $-3a$.

Если изъ 10 станемъ послѣдовательно вычитать 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...

$$\begin{array}{l} 10,\ 10,\ 10,\ 10,\ 10,\ 10,\ \ldots. \\ \ \ 8,\ \ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ \ldots. \\ \hline \ \ 2,\ \ 1,\ \ 0,-1,-2,-3,\ \ldots. \end{array}$$

получатся остатки 2, 1, 0, —1, —2, —3....., которые, по общему объ нихъ понятію, должны быть тѣмъ меньшіе, чѣмъ вычитаемое число болѣе, то есть:

$$1<2,\ 0<1,\ -1<0,\ -2<-1,\ -3<-2,\ \text{и такъ далѣе.}$$

Отсюда заключаютъ, что всякій отрицательный остатокъ меньше нуля; изъ двухъ отрицательныхъ остатковъ тотъ менѣе, котораго численная величина (взятая безъ знака) болѣе.

**23.** Однакожъ, это заключеніе отнюдь нельзя принимать за общій смыслъ всѣхъ отрицательныхъ количествъ. Безъ надлежащаго истолкованія, выраженіе $-1<0$ противорѣчитъ здравому смыслу: меньше нуля ничего себѣ представить нельзя, иначе надобно самое ничто признать за нѣкоторое измѣримое количество. Такимъ же образомъ и выраженіе $-3<-2$ противорѣчитъ здравому смыслу, и приводитъ къ нелѣпости, будто бы $\frac{-3}{-2}$ должно быть дробью, а не цѣлымъ числомъ.

Изъ этого видно, что выраженія $-1<0$ и $-3<-2$, имѣютъ смыслъ не самый общій, а какой именно, это требуетъ объясненія.

Въ отвлеченныхъ числахъ, вообще *положительный остатокъ* означаетъ *избытокъ уменьшаемаго числа* предъ вычитаемымъ, а *остатокъ отрицательный* показываетъ избытокъ вычитаемаго числа предъ уменьшаемымъ, который остался только потому, что вычитать было не изъ чего; стало-быть, онъ есть *результатъ недоконченнаго вычитанія*. Оттого, остатокъ отрицательный, будучи прилагаемъ ко всякому положительному числу $a$, уменьшаетъ оное, тогда какъ нуль, придаваемый къ $a$, не производитъ въ немъ никакой перемѣны, такъ что

$$a-1<a+0;$$

отъ этого неравенства отнявъ по $a$, найдемъ

$$-1<0.$$

Очевидно также, что $a-3<a-2$; а отнявъ по $a$ съ обѣихъ сторонъ, будетъ

$$-3<-2.$$

И такъ, выраженіе $0>-1$ имѣетъ тотъ смыслъ, что нуль, придаваемый ко всякому положительному числу, даетъ результатъ болѣе, нежели когда придадимъ $-1$ къ этому числу. Смыслъ выраженія $-2>-3$ тотъ, что $-2$, придаваемое къ положительному числу, дастъ результатъ болѣе, нежели когда придадимъ къ нему $-3$. Такъ надобно разсуждать объ отрицательныхъ остаткахъ въ числахъ отвлеченныхъ.

Но, въ числахъ именованныхъ отрицательныя количества $-a$, $-2a$, $-3a$,..... имѣютъ разныя значенія, и увеличиваются точно также, какъ и положительныя количества, $a$, $2a$, $3a$......, чему множество можно представить примѣровъ. Такъ, если кто нибудь дѣлаетъ два шага впередъ и 5 назадъ, то результатъ его движенія $3-5=-2$ шага показываетъ, что онъ идетъ не впередъ, а назадъ. Если я выигрываю 5 рублей, а проигрываю 8 рублей, то результатъ моей игры $5-8=-3$ рубля показываетъ, сколько я долженъ заплатить. Если кто нибудь, купивши товару на 15 рублей, заплатилъ только 10 рублей, то результатомъ этой покупки $10 - 15 = -5$ будетъ составлять долгъ, который надобно заплатить рано или поздо, и который тѣмъ больше, чѣмъ болѣе было бы взято товару. Въ Аналитической Геометріи, для опредѣленія мѣста точекъ принимаются ординаты (извѣстныя прямыя линіи) положительныя и отрицательныя, возрастающія нерѣдко до безконечности. Въ Механикѣ, силы, дѣйствующія въ одну сторону, принимаются за положительныя, а дѣйствующія въ противную сторону за отрицательныя.

**24.** Сдѣлаемъ еще замѣчаніе о нулѣ, который получается при вычитаніи. Онъ, въ различныхъ случаяхъ вычитанія, бываетъ *абсолютный* или только *относительный, условный.*

Изъ абсолютнаго нуля вычитать ничего нельзя, $0 - a = -a$ означаетъ невозможность. Такъ нуль градусовъ на гигрометрѣ показываетъ совершенное отсутствіе паровъ въ воздухѣ, и отрицательные градусы рѣшительно не возможны.

Нуль условный или относительный не означаетъ совершеннаго отсутствія того количества, о которомъ идетъ рѣчь; но берется какъ начало, какъ исходная точка, отъ которой мы соглашаемся начинать считать большія или меньшія части этого количества, по обѣ ея стороны, особливо когда мы не знаемъ этому количеству ни начала, ни конца, или когда оно возрастаетъ отъ безконечно малаго къ безконечно большому. Къ такимъ количествамъ относятся: пространство, время, нѣкоторыя силы. Вотъ примѣры: Окружность круга не имѣетъ ни начала, ни конца, а потому и берется произвольная точка за начало, гдѣ ставится нуль, и отъ него дуги круга считаются въ одну сторону за положительныя, а дуги въ противную сторону — за отрицательныя. На земномъ шарѣ каждый меридіанъ можно взять первымъ, и отъ него считать всѣ долготы на востокъ за положительныя, а на западъ — за отрицательныя. На термометрахъ Реомюровомъ и Фаренгейтовомъ нули градусовъ занимаютъ разныя мѣста, такъ что $0^\circ$ Реом. $= 32^\circ$ Фаренгейтовымъ, и проч. Слѣдовательно, нуль условный, относительный, не означаетъ отсутствія количества, но только исходную точку, отъ которой согласились вести счетъ этому количеству.

## УМНОЖЕНІЕ.

**25.** *Умноженіе одночленовъ.* При умноженіи одночленовъ должно наблюдать слѣдующія правила относительно ихъ знаковъ, предстоящихъ, буквъ и показателей:

1) Коефиціенты должно перемножить одинъ на другой, чтобъ получить коефиціентъ для произведенія.

2) Разныя буквы написать одну подлѣ другой безъ всякаго знака въ какомъ угодно порядкѣ, а всего лучше въ порядкѣ алфавитномъ.

*Примѣръ.* $4ac \times 5bd = 20abcd.$

Ибо, произведеніе не перемѣнится, если переставить множители въ какомъ угодно порядкѣ, какъ это извѣстно еще изъ Ариѳметики *); посему, можемъ написать:

$$4ac\times5bd=4.5ac\times bd=20abcd.$$

3) Если помножаются равныя буквы съ какими ни есть показателями, то надобно сложить показатели; сумма ихъ будетъ показателемъ этой буквы въ произведеніи.

*Примѣръ.* $a^2\times a^3=a^{2+3}=a^5$;
потому что $a^2=aa$, $a^3=aaa$; стало-быть,

$$a^2\times a^3=aa\times aaa=a^5.$$

И вообще, $a^m.\ a^n=a^{m+n}$, гдѣ $m$, $n$, цѣлыя числа.

*Примѣръ.* $3a^2b^3cf\times4ab^2c^3d=3.4.a^2.a.b^3.b^2.c.c^3.d.f=12a^3b^5c^4df.$

*Примѣръ.* $\frac{2}{3}mn^2\times\frac{4}{5}m^2n^3p\times\frac{3}{4}npq^5=$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}.m.m^2.n^2.n^3.n.p.p.q^5=\frac{2}{5}m^3n^6p^2q^5.$$

4) Если множимое и множитель имѣютъ равные знаки $+$ и $+$, либо $-$ и $-$, то произведеніе должно имѣть знакъ $+$; а если знаки ихъ различны $+$ и $-$, либо $-$ и $+$, то произведеніе должно имѣть знакъ $-$. Это послѣднее правило требуетъ объясненія.

---

*) Въ Ариѳметикѣ это правило выводится изъ умноженія чиселъ соизмѣримыхъ. Въ Алгебрѣ, гдѣ каждая буква можетъ означить количества какія угодно: соизмѣримыя, несоизмѣримыя, даже мнимыя, какъ увидимъ впослѣдствіи, правило это требуетъ общаго доказательства.

*Доказательство.* Очевидно, что, наприм. $a^2\times a^3=a^3\times a^2=a^4\times a$; ибо это тоже, что $aa.aaa=aaa.aa=aaaa.a=a^5$. Слѣдовательно, $a^m\times a^n=a^{m-1}.a^{n+1}=a^{m+2}.a^{n-2}=\ldots$, если $m$ и $n$ суть числа цѣлыя. И такъ, если $ab$ не равно $ba$, то пусть

$$\left.\begin{array}{l}ab=ba^m\\ ba=ab^n\end{array}\right\}\text{ гдѣ } m,\ n \textit{ неизвѣстныя цѣлыя числа.}$$

Эти равенства можно написать

$$ab=ba.a^{m-1}$$
$$ba=ab.b^{n-1}.$$

Подставивъ первое равенство во второе, получаемъ:

$$ba=ba.1=ba.a^{m-1}b^{n-1};$$

откуда видно, что $a^{m-1}\ b^{n-1}=1$. Теперь возмемъ

$$\begin{array}{rl} a & =a,\ \text{помножимъ}\\ \text{на } a^{m-1}b^{n-1} & =1\\ \hline a^mb^{n-1} & =a;\ \text{это помножимъ}\\ \text{на}\quad b & =b\\ \hline a^mb^n & =ab.\end{array}$$

Цѣлыя числа $m$, $n$, удовлетворяющія этому равенству, возможны только

$$m=n=1.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$ab=ba^m=ba;$$

что и доказать слѣдовало.

Очевидно, что если бы дано было помножить $a+b$ на $c$, надлежало бы перемножить оба члена множимаго на $c$, и произведеніе сложить:

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Это дѣйствіе совершенно таково же, что и въ Ариѳметикѣ, когда помножаютъ число состоящее изъ сотенъ, десятковъ и единицъ: тогда помножаются на данный множитель единицы, десятки и сотни множимаго, и всѣ полученныя частныя произведенія слагаются въ одну сумму.

Помножимъ теперь $a-b$ на $c$, то есть, отыщемъ произведеніе $(a-b)c$: оно будетъ $ac-bc$.

Для доказательства возмемъ $a>b$, и положимъ, что $a=b+d$; будемъ имѣть:

$$(a-b)c=(b+d-b)c=dc.$$

А какъ всякій членъ долженъ быть помноженъ на $c$, то будетъ также

$$bc+dc-b(+c)=dc.$$

Отъ равныхъ количествъ отнимемъ по $dc$, останется

$$bc-b(+c)=0.$$

Но чтобъ это двучленное произведеніе уничтожилось, необходимо, чтобъ было $-b(+c)=-bc$; ибо только тогда $bc-bc=0$.

Этимъ доказано, что $-b(+c)=-bc$.

Теперь, обратно: помножимъ $c$ на $a-b$, полагая $a=b+d$:

$$c(a-b)=c(b+d-b)=cd, \text{ или}$$
$$cb+cd+c(-b)=cd.$$

Отъ равныхъ количествъ отбросивъ по $cd$, останется $cb+c(-b)=0$. Это возможно лишь тогда, когда $+c(-b)=-cb$, чтобъ было $cb-cb=0$.

Отсюда видно, что плюсъ на минусъ даетъ въ произведеніи минусъ.

Для доказательства, что $-b\times-c=+bc$, возмемъ тотъ же двучленъ $a-b$ и помножимъ на $-c$, предполагая, что $a=b+d$; будемъ имѣть произведеніе

$$(a-b)(-c)=(b+d-b)(-c)=+d(-c).$$

А помноживъ каждый членъ множимаго $b+d-b$ на множитель $-c$, и замѣчая, что $b(-c)=-bc$, $+d(-c)=-dc$, какъ было доказано, получимъ еще

$$-cb-cd-b(-c)=-cd.$$

Отъ равныхъ количествъ отнимемъ по $-cd$, останется

$$-bc-b(-c)=0.$$

Но этотъ двучленъ уничтожится лишь тогда, когда при $-bc$ будетъ стоять $+bc$, то есть, когда будетъ $-b(-c)=+bc$.

Этимъ и доказано, что минусъ на минусъ даетъ въ произведеніи плюсъ.

*Примѣры*: 1) $0,25a^2b^3c \times -\frac{3}{7}a^2bc = -\frac{3}{28}a^4b^4c^2$.

2) $3m^2n \times -5mn^2 \times -\frac{7}{60}mnp = \frac{7}{4}m^4n^1p$.

Здѣсь надлежало сперва помножить коефиціентъ 3 на — 5, что даетъ — 15; а это помножить еще на $-\frac{7}{60}$, чтобъ получить коефиціепъ $\frac{7}{4}$ произведенія.

3) $-\frac{3}{10}a^mb^nc^3d \times \frac{5}{6}a^nb^2c^rd^s = -\frac{1}{4}a^{m+n}b^{n+2}c^{r+3}d^{s+1}$.

**26.** *Умноженіе многочленовъ*. Для умноженія одного многочлена на другой, надобно помножить всѣ члены множимаго на каждый членъ множителя, сложить всѣ полученныя частныя произведенія, и сократить, если будутъ подобные члены. Самое же дѣйствіе располагаютъ такъ, какъ видно изъ слѣдующихъ примѣровъ:

$$\begin{array}{rl}
\text{1) Помножить} & 3a^2b^3c-4a^3bd^2 \\
\text{на} & 5a^4b^2-2a^2b^2c^2 \\
\hline
& 15a^6b^5c-20a^7b^3d^2 \\
& -6a^4b^5c^3+8a^5b^3c^2d^2
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\}\text{произведенія.}$$

Здѣсь нѣтъ подобныхъ членовъ, слѣдовательно искомое произведеніе

$$15a^6b^5c-20a^7b^3d^2-6a^4b^5c^3+8a^5b^3c^2d^2.$$

Когда множимое и множитель имѣютъ въ своихъ членахъ равныя буквы съ разными показателями, то полезно располагать ихъ напередъ по убывающимъ степенямъ какой нибудь одной буквы. Тогда и частныя произведенія расположатся по убывающимъ степенямъ той же буквы. Для легчайшаго сокращенія общаго произведенія, располагаютъ частныя произведенія такъ, чтобы члены съ равными степенями стояли одни подъ другими; между ними должны находиться подобные члены, если только они есть дѣйствительно.

2) Помножить $4x^2+6xy+9y^2$ на $2x-3y$.

Здѣсь множимое и множитель расположены по убывающимъ степенямъ буквы $x$: мы расположимъ и частныя произведенія по степенямъ тойже буквы:

$$\begin{array}{rrrr}
4x^2 & +6xy & +9y^2 & \\
2x & -3y & & \\
\hline
8x^3 & +12x^2y & +18xy^2 & \\
 & -12x^2y & -18xy^2 & -27y^3 \\
\hline
\end{array}$$

произведеніе $= 8x^3-27y^3$

3) Помножить $\frac{1}{2}m^3c - \frac{1}{4}m^2c^2 + \frac{1}{8}mc^3$ на $\frac{2}{3}mc^2 - \frac{4}{5}m^2c$.

Для большаго удобства, расположимъ множимое и множитель по степенямъ буквы $c$, и потомъ будемъ умножать:

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{8}mc^3 - \frac{1}{4}m^2c^2 + \frac{1}{2}m^3c \\
\qquad\quad \frac{2}{3}\,mc^2 - \frac{4}{5}m^2c \\
\hline
\frac{1}{12}m^2c^5 - \frac{1}{6}\,m^3c^4 + \frac{1}{3}\,m^4c^3 \\
\qquad\quad - \frac{1}{10}m^3c^4 + \frac{1}{5}m^4c^3 - \frac{2}{5}\,m^5c^2 \\
\hline
\frac{1}{12}m^2c^5 - \frac{4}{15}m^3c^4 + \frac{8}{15}m^4c^3 - \frac{2}{5}m^5c^2.
\end{array}
$$

**27.** Если члены множимаго однородны между собою, и члены множителя также между собою однородны, то и всѣ члены произведенія должны быть однородными; потому что они будутъ состоять изъ равнаго числа буквенныхъ множителей. Это можно видѣть изъ всѣхъ примѣровъ, которые представлены здѣсь для умноженія многочленовъ.

**28.** Если члены множимаго и множителя имѣютъ равныя буквы, и расположены по уменьшающимся степенямъ какой ни есть одной изъ нихъ, то никогда не можетъ быть, чтобы первый членъ произведенія сократился съ какимъ нибудь другимъ членомъ, потому что въ немъ одномъ будетъ находиться высшая степень этой буквы. Напримѣръ:

$$
\begin{array}{l}
a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \\
\qquad a^2 - 2ab + b^2 \\
\hline
a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 \\
\quad - 2a^4b - 2a^3b^2 - 2a^2b^3 - 2ab^4 \\
\qquad\qquad + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 \\
\hline
a^5 - a^4b - ab^4 + b^5.
\end{array}
$$

Здѣсь множимое и множитель расположены были по убывающимъ степенямъ буквы $a$, и по возрастающимъ степенямъ буквы $b$; отъ того получилось и произведеніе, расположенное по степенямъ тѣхъ же буквъ. Первый членъ $a^5$ произведенія содержитъ высшую степень буквы $a$, равно какъ и послѣдній членъ $b^5$ высшую степень буквы $b$; оттого ни которой изъ нихъ сократиться не могъ.

Мы увидимъ, что на этомъ свойствѣ основывается отыскиваніе членовъ частнаго числа при дѣленіи многочленовъ.

**29.** Умноженіе служитъ для возвышенія въ степени количествъ одночленныхъ. Объ этомъ предметѣ подробно будемъ говорить въ послѣдствіи; а теперь представимъ только нѣкоторые частные случаи, весьма часто встрѣчающіеся, и которые надобно знатъ на память всякому учащемуся; это суть произведенія: $(a+b)(a+b)$, $(a-b)(a-b)$, $(a+b)(a-b)$.

$$\begin{array}{r}a+b\\ a+b\\ \hline a^2+ab\\ +ab+b^2\\ \hline a^2+2ab+b^2\end{array}\qquad\begin{array}{r}a-b\\ a-b\\ \hline a^2-ab\\ -ab+b^2\\ \hline a^2-2ab+b^2\end{array}\qquad\begin{array}{r}a+b\\ a+b\\ \hline a^2+ab\\ -ab-b^2\\ \hline a^2-b^2\end{array}$$

И такъ, $(a+b)(a+b)=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,

$(a-b)(a-b)=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$,

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

то есть: *квадратъ суммы двухъ количествъ* a и b *равенъ квадрату перваго+удвоенное произведеніе перваго на второе, и+квадратъ втораго.*

*Квадратъ разности двухъ количествъ равенъ квадрату перваго, безъ удвоеннаго произведенія перваго на второе, и + квадратъ втораго.*

*Сумма двухъ количествъ, помноженная на разность ихъ, равна разности ихъ квадратовъ.*

Зная на память эти выводы, надобно стараться непосредственно примѣнять ихъ ко всякимъ случаямъ такого рода, не прибѣгая къ дѣйствію умноженія. Такъ:

$$(3a^2b^3c+5bc^2d)^2=9a^4b^6c^2+30a^2b^4c^3d+25b^2c^4d^2,$$

$$\left(\frac{2}{5}am^2-\frac{5}{6}mn^2\right)^2=\frac{4}{25}a^2m^4-\frac{2}{3}am^3n^2+\frac{25}{36}m^2n^4,$$

$$\left(\frac{1}{2}b^2c+3mn\right)\left(\frac{1}{2}b^2c-3mn\right)=\frac{1}{4}b^4c^2-9m^2n^2,$$

$$(2x^m+5y^n)(2x^m-5x^n)=4x^{2m}-25y^{2n}.$$

## ДѢЛЕНІЕ.

**30.** Въ Алгебрѣ, какъ и въ Ариѳметикѣ, дѣленіемъ называется такое дѣйствіе, посредствомъ котораго находятъ частное число по даннымъ дѣлимому и дѣлителю. Слѣдовательно дѣленіе заключаетъ въ себѣ разложеніе дѣлимаго количества на двухъ производящихъ его множителей, изъ которыхъ одинъ данъ—это дѣлитель, и другой ищется — это частное.

**31.** *Дѣленіе одночленовъ.* — При дѣленіи одночленныхъ количествъ, надобно соблюдать правила относительно знаковъ, коефиціентовъ, буквъ и показателей:

1. Если дѣлимое и дѣлитель имѣютъ равные знаки, то частное должно имѣть знакъ + ; если же у дѣлимаго и дѣлителя знаки различные, то частное должно имѣть знакъ — .

2. Надобно коефиціентъ дѣлимаго раздѣлить на коефиціентъ дѣлителя.

3. Если въ дѣлимомъ и дѣлителѣ находятся равныя буквы съ различными показателями, то должно показатель дѣлителя вычесть изъ показателя дѣлимаго, получится показатель той же буквы въ частномъ.

4. Буквы, общія дѣлимому и дѣлителю, съ равными показателями, надобно исключить.

Всѣ сіи правила легко доказываются одною *повѣркою дѣленія*, состоящею въ томъ, что частное, помноженное на дѣлитель, должно произвести дѣлимое съ его знакомъ, слѣдующимъ образомъ:

a) При раздѣленіи $ab$ на $b$, частное должно быть

$$\frac{ab}{b}=a;$$

тутъ частное $a$, помноженное на дѣлитель $b$, дѣйствительно произведетъ дѣлимое $ab$.

При раздѣленіи $+ab$ на $-b$,

$$\text{частное}=\frac{ab}{-b}=-a,$$

потому что дѣлитель $-b$ только отъ умноженія на $-a$ можетъ произвести дѣлимое $+ab$.

При раздѣленіи $-ab$ на $+b$,

$$\text{частное}=\frac{-ab}{+b}=-a,$$

по той же причинѣ, что $+b$ только на $-a$ помноженное даетъ $-ab$.

При раздѣленіи $-ab$ на $-b$,

$$\text{частное}=\frac{-ab}{-b}=+a;$$

ибо, только $-b$ на $+a$ даетъ $-ab$.

b) При раздѣленіи $12ab$ на $4b$,

$$\text{частное}=\frac{12ab}{4b}=3a;$$

потому что $3a\times4b=12ab$. Здѣсь, для полученія коефиціента 3 въ частномъ, надлежало раздѣлить 12 на 4.

c) Теперь раздѣлимъ $a^5$ на $a^3$, гдѣ дѣлимое и дѣлитель суть разныя степени одного и того же количества $a$. Частное должно быть

$$\frac{a^5}{a^3}=a^2;$$

потому что $a^3$ только отъ помноженія на $a^2$ даетъ

$$a^3\times a^2=a^{3+2}=a^5.$$

Очевидно, что показатель $2=5-3$, и что можно было написать

$$\frac{a^5}{a^2}=a^{5-3}=a^2.$$

Докажемъ теперь, что вообще

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

Для этого положимъ, что $\frac{a^m}{a^n}=a^x$, гдѣ показатель частнаго неизвѣстенъ, и сдѣлаемъ поверку:

$$a^m=a^n\times a^x=a^{n+x}.$$

Но, чтобы это равенство могло быть, необходимо нужно равенство показателей:

$$n+x=m; \text{ отсюда вычтемъ } n,$$
$$-n=-n$$
$$\overline{\phantom{x=m-n}}$$
$$x=m-n$$

Слѣдовательно, $\frac{a^m}{a^n}=a^x=a^{m-n}$.

И такъ, при дѣленіи, надобно вычитать показатель дѣлителя изъ показателя дѣлимаго, если въ нихъ находятся равныя буквы.

d) Равныя буквы съ равными показателями въ дѣлимомъ и дѣлителѣ надобно исключать просто какъ равныхъ множителей; потому что частное отъ этого не должно перемѣниться. Такъ:

$$\frac{abc}{bc}=a, \qquad \frac{m^2n^3p^4}{n^3p^4}=m^2.$$

*Примѣры:* $\frac{12a^5b^4c^3}{4a^2b^2}=3a^3b^2c^3;$

$$6a^3bx^5 : \frac{3}{4}a^2bx^3=8ax^2;$$

$$a^{2n+1} : -a^{2n-1}=-a^2;$$

$$a^mx^{m+n} : ax^{m-1}=a^{m-1}x^{n+1}.$$

**32.** Дѣленіе одночленовъ *нацѣло* невозможно: 1) когда коефиціентъ дѣлимаго не дѣлится на коефиціентъ дѣлителя безъ остатка; 2) когда показатель какой ни есть буквы дѣлимаго менѣе показателя той же буквы въ дѣлителѣ; 3) когда дѣлитель содержитъ въ себѣ такія буквы, какихъ нѣтъ въ дѣлимомъ.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ частное изображается дробью, которую надобно только сократить чрезъ исключеніе всѣхъ множителей общихъ дѣлимому и дѣлителю. Напримѣръ:

$$\frac{20a^5b^2cd}{15a^2bc^4p^2}=\frac{4a^3bd}{3c^3p^2}.$$

**33.** *Показатели нуль и отрицательные.* — Мы знаемъ, что $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

При этомъ дѣленіи могутъ встрѣтиться три случая: $m>n$, $m=n$, $m<n$. Въ первомъ случаѣ показатель $m-n$ частнаго будетъ положительный; во второмъ показатель $m-n=0$; въ третьемъ $m-n=-$.

Намъ извѣстно, что такое $a$ возвышенное въ положительную степень; докажемъ теперь, что

$$a^0=1, \quad a^{-k}=\frac{1}{a^k}.$$

a) Когда $m=n$, то выраженіе $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ обращается въ $\frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=a^0$. Но знаемъ, что $\frac{a^m}{a^m}=1$; слѣдовательно $a^0=1$.

И такъ, *всякое количество, возвышенное въ нуль, равно единицѣ.*

b) Отрицательный показатель бываетъ при раздѣленіи меньшей степени на большую той же буквы. Наприм.

$$\frac{a^3}{a^5}=a^{3-5}=a^{-2}.$$

Но, поелику $\frac{a^3}{a^5}=\frac{aaa}{aaaaa}$, по сокращеніи, обращается въ $\frac{1}{a^2}$, то, очевидно, что

$$a^{-2}=\frac{1}{a^2}$$

Вообще же это доказывается такъ:

$$a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n};$$

положимъ $m=0$, найдется тотчасъ

$$a^{-n}=\frac{a^0}{a^n}=\frac{1}{a^n}.$$

И такъ, *отрицательная степень количества равна единицѣ, раздѣленной на ту же степень положительную.*

**34.** Выраженіе $a^0$ употребляется въ тѣхъ случаяхъ, когда хотятъ сохранить въ частномъ числѣ всѣ сокращающіяся буквы. А выраженіе $a^{-n}$ служитъ для того, чтобы буквы или числа, находящіяся въ знаменателѣ дроби, перенести въ числитель, или наоборотъ.

*Примѣръ.* $\frac{15a^5b^2c}{5a^3b^2c}=3a^2b^0c^0=3a^2.$

*Примѣръ.* $\frac{24m^2n^3p^4}{6m^5n^4p^3}=4m^{-3}n^{-1}p=\frac{4p}{m^3n}.$

*Примѣръ.* $10a^m=\frac{10}{a^{-m}}$

Послѣ этого понятны будутъ и слѣдующіе примѣры умноженія и дѣленія количествъ, съ положительными и отрицательными показателями:

1) $a^m a^{-n}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$

2) $a^{-m}.a^{-n}=\frac{1}{a^m a^n}=\frac{1}{n^{m+n}}=a^{-(m+n)}.$

3) $a^m:a^{-n}=a^{m+n}.$

4) $a^{-m}:a^{-n}=a^{-m+n}.$

Все это оправдывается повѣркою. Такъ, въ послѣднемъ примѣрѣ,

$$a^{-m}=a^{-n}\times a^{-m+n}=a^{-n-m+n}=a^{-m}.$$

**35.** *Дѣленіе многочленовъ.* Раздѣлить одинъ многочленъ на другой значитъ найти частное, т. е. третій многочленъ такой, который, будучи умноженъ на дѣлителя, произвелъ бы дѣлимое.

**36.** Изъ этого опредѣленія видно, что дѣлитель и частное должны содержать въ себѣ только такія буквы, какія находятся въ дѣлимомъ; и что дѣленіе безъ остатка невозможно, если въ дѣлителѣ есть хотя одна буква, не находящаяся въ дѣлимомъ.

Теперь представимъ себѣ, что частное уже найдено, что дѣлитель и частное расположены по убывающимъ степенямъ одной какой ни есть буквы, и перемножены между собою; то получится дѣлимое, также расположенное по убывающимъ степенямъ этой буквы, и первый членъ этого произведенія одинъ будетъ заключать въ себѣ ея высшую степень (**28**), слѣдовательно ни съ которымъ не сократится. Отсюда заключаемъ обратно, что если раздѣлить *первый членъ* этого произведенія (какъ дѣлимаго) *на первый членъ дѣлителя*, то необходимо получится первый членъ частнаго. Это свойство приводитъ насъ къ слѣдующему правилу дѣленія многочленовъ:

Прежде всего должно расположить члены дѣлимаго и дѣлителя по убывающимъ степенямъ одной буквы; написать дѣлитель съ правой стороны дѣлимаго, и отдѣлить ихъ вертикальною чертою. Потомъ раздѣлить первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя, наблюдая извѣстныя правила относительно знаковъ, коефиціентовъ, буквъ и показателей; — получится первый членъ частнаго, на который надобно помножить всѣ члены дѣлителя. Къ остатку должно снести всѣ прочіе члены дѣлимаго, расположивъ ихъ по степенямъ все той же буквы, и раздѣлить первый членъ остатка на первый членъ дѣлителя; получится второй членъ частнаго, на который надобно помножить всего дѣлителя, и произведеніе вычесть изъ дѣлимаго, и т. д. продолжать, пока въ остаткѣ не получится ничего, или выйдетъ остатокъ, котораго ни одинъ членъ не дѣлится на первый членъ дѣлителя. Тогда этотъ остатокъ приписывается къ частному, проводится подъ нимъ черта, и подъ нею ставится дѣлитель.

*Примѣры:*

1) Раздѣлить $8a^3-10a^2b+7ab^2-3b^3$ на $2a^2-ab+b^2$.

Для этого я располагаю дѣлимое и дѣлитель по убывающимъ степенямъ буквы *a*:

$$
\begin{array}{r|l}
\text{Дѣлимое.} & \text{Дѣлитель.} \\
8a^3-10a^2b+7ab^2-3b^3 & 2a^2-ab+b^2 \\ \cline{2-2}
-8a^3+\ 4a^2b-4ab^2 & 4a-3b=\textit{частное.} \\ \cline{1-1}
-\ 6a^2b+3ab^2-3b^3 & \\
+\ 6a^2b-3ab^2+3b^3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Дѣлю первый членъ $8a^3$ дѣлимаго на первый членъ $2a^2$ дѣлителя; отчего получаю первый членъ $4a$ частнаго, который пишу подъ чертою дѣлителя. Помножаю дѣлитель на $4a$:

$$(2a^2-ab+b^2)4a=8a^3-4a^2b+4ab^2,$$

и это произведеніе вычитаю изъ дѣлимаго. Остатокъ $-6a^2b+3ab^2-3b^3$ располагаю по степенямъ буквы $a$, и дѣлю $-6a^2b$ на $2a^2$. Получаю второй членъ $-3b$ частнаго, на который также помножаю весь дѣлитель:

$$(2a^2-ab+b^2)(-3b)=-6a^2b+3ab^2-3b^3,$$

и это произведенiе вычитаю изъ дѣлимаго. Въ остаткѣ нуль; слѣдовательно $4a—3b$ и есть полное частное число.

Вѣрно ли исполнено дѣленiе, это повѣряется чрезъ умноженiе дѣлителя на частное: въ произведенiи непремѣнно должно получиться дѣлимое, т. е.:

$$(2a^2—ab+b^2)(4a—3b)=8a^3—10a^2b+7ab^2—3b^3.$$

2) Раздѣлить $11a^2b^3—4a^4b—3ab^2$ на $3ab+2a^2—b^2$.

Расположимъ дѣлимое и дѣлитель по степенямъ буквы *a:*

$$\begin{array}{r|l}
\textbf{Дѣлимое.} & \textbf{Дѣлитель.} \\
—4a^4b+11a^2b^3—3ab^4 & 2a^2+3ab—b^2 \\ \cline{2-2}
+4a^4b+6a^3b^2\ —2a^2b^3 & —2a^2b+3ab^2=\textit{частное.} \\ \cline{1-1}
6a^3b^2+9a^2b^3\ —3ab^4 & \\
—6a^3b^2—9a^2b^3\ +3ab^4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

3)

$$\begin{array}{r|l}
\textbf{Дѣлимое.} & \textbf{Дѣлитель.} \\
6a^6—24a^2b^4—72ab^5—54b^6 & 3a^3+6ab^2+9b^3 \\ \cline{2-2}
—6a^6—12a^4b^2—18a^3b^3 & 2a^3—4ab^2—6b^3 \\ \cline{1-1}
—12a^4b^2—18a^3b^3—24a^2b^4—72ab^5—54b^6 & \\
+12a^4b^2+24a^2b^4+36ab^5 & \\ \hline
—18a^3b^3—36ab^5—54b^6 & \\
+18a^3b^3+36ab^5+54b^6 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

4)

$$\begin{array}{r|l}
30x^{2m}—25x^{m+n}+75x^m—125x^{2n} & 3x^m+5x^n \\ \cline{2-2}
—30x^{2m}—50x^{m+n} & 10x^m—25x^n+\frac{75x^m}{3x^m+5x^n} \\ \cline{1-1}
—75x^{m+n}+75x^m—125x^{2n} & \\
+75x^{m+n}+125x^{2n} & \\ \cline{1-1}
\text{Остатокъ}=+75x^m &
\end{array}$$

Въ этомъ примѣрѣ получился остатокъ $75x^m$, нераздѣлимый на двучленнаго дѣлителя; оттого частное найдено $10x^m—25x^n+\frac{75x^m}{3x^m+5x^n}$.

**37.** Въ Алгебрѣ встрѣчается множество случаевъ, гдѣ нужно бываетъ *отдѣлять изъ даннаго многочлена множитель общiй всѣмъ* (или только нѣкоторымъ) *его членамъ, и ставить его внѣ скобокъ*. Для этого надобно собрать всѣхъ множителей, общихъ всѣмъ членамъ даннаго количества, перемножить ихъ между собою, и на произведенiе раздѣлить все это количество: получится частное, въ которомъ не будетъ ни одного множителя общаго всѣмъ его членамъ. Тогда это частное заключаютъ въ скобки, а внѣ скобокъ ставится общій дѣлитель въ видѣ множителя.

*Примѣръ.* — Положимъ, что изъ количества $12a^5b^3-15a^2b^6$ нужно отдѣлить общій множитель, и вынесть за скобки. — Здѣсь тотчасъ видно, что множители общіе обоимъ членамъ суть 3, $a^2$, $b^3$. Составимъ изъ нихъ произведеніе $3a^2b^3$, и на него раздѣлимъ данное количество:

$$\frac{12a^5b^3-15a^2b^6}{3a^2b^3}=4a^3-5b^3;\text{ слѣдовательно}$$

$$12a^5b^3-15a^2b^6=(4a^5-5b^3)3a^2b^3.$$

*Примѣръ.* $x+ax^2-bx^3=x\,(1+ax-bx^2)$.

Нерѣдко нужно бываетъ выносить внѣ скобокъ общій множитель съ знакомъ —; тогда непремѣнно должны перемѣниться знаки всѣхъ членовъ, остающихся внутри скобокъ. Напримѣръ, во всѣхъ членахъ количества $-ab+a^2b^2-a^3b^3$ находится общій множитель $ab$; чтобы вынесть его за скобки съ знакомъ —, раздѣлимъ это количество на $-ab$; получится:

$$\frac{-ab+a^2b^2-a^3b^3}{-ab}=1-ab+a^2b^2;\text{ посему}$$

$$-ab+a^2b^2-a^3b^3=-ab(1-ab+a^2b^2).$$

*Примѣръ.* $-2m+3mx=-m(2-3x)$.

*Примѣръ.* $-m-2=-1(m+2)=-(m+2)$.

Въ послѣднемъ примѣрѣ вынесена за скобки —1 какъ общій множитель.

Надобно приучиться непосредственно и скоро выносить общихъ множителей внѣ скобокъ, не прибѣгая къ извѣстнымъ пріемамъ дѣленія, что возможно, потому что въ членахъ алгебрическихъ количествъ общіе множители очевидны, и отдѣленіе ихъ не составляетъ никакой трудности.

**38.** Мы примѣнимъ это обстоятельство къ дѣленію такихъ многочленовъ, которые, бывъ расположены по убывающимъ степенямъ какой угодно буквы, содержатъ равныя степени этой буквы въ нѣсколькихъ членахъ. Здѣсь необходимо нужно во всѣхъ членахъ дѣлимаго и дѣлителя, имѣющихъ одну и ту же степень этой буквы, вынесть ее за скобки въ видѣ множителя, и потомъ производить дѣленіе по общему правилу (**36**), считая каждую алгебрическую сумму членовъ въ скобкахъ за коэфиціентъ предъ тою буквою.

*Примѣръ.* — Раздѣлить

$$12a^3b^2-27a^3c^2+2a^2b^2c+3a^2bc^2-6ab^2c+9abc^2-b^2c^2$$

$$\text{на } 2a^2b+3a^2c-bc.$$

Расположивъ дѣлимое и дѣлитель по степенямъ буквы $a$, я замѣчаю, что степени $a^3$, $a^2$, $a$, находятся въ нѣсколькихъ членахъ того и другаго; потому выношу эти степени внѣ скобокъ, а именно:

$$(12b^2-27c^2)a^3+(2b^2c+3bc^2)a^2-(6b^2c-9bc^2)a-b^2c^2,$$

$$(2b+3c)a^2-bc.$$

Для сбереженія мѣста при дѣленіи, пишется, вмѣсто каждой пары скобокъ, одна вертикальная черта; съ лѣвой стороны ея ставятся члены, бывшіе въ скобкахъ, одинъ надъ другимъ, а съ правой стороны — общій ихъ множитель:

$$
\begin{array}{r|l|l|l|l}
\multicolumn{4}{c}{\text{Дѣлимое.}} & \multicolumn{1}{c}{\text{Дѣлитель.}} \\
12b^2 & a^3+2b^2c & a^2-6b^2c & a-b^2c^2 & (2b+3c)a^2-bc \\ \cline{5-5}
-27c^2 & +3bc^2 & +9bc^2 & & (6b-9c)a+bc \\
-12b^2 & a^3+6b^2c & a & & \\
+27c^2 & -9bc^2 & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\text{Остатокъ}\left\{\begin{array}{r|l}
+2b^2c & a^2-b^2c^2 \\
+3bc^2 & \\
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-2b^2c & a^2+b^2c^2 \\
-3bc^2 & \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{0}
\end{array}
$$

Дѣлю $(12b^2-27c^2)a^3$ на $(2b+3c)a^2$, и нахожу частное $(6b-9c)a$. Помножаю это частное на дѣлитель и вычитаю изъ дѣлимаго. Остатокъ $(2b^2c+3bc^2)a^2-b^2c^2$ дѣлю также на $(2b+3c)a^2$, и нахожу частное $bc$. Помножаю дѣлитель на $bc$, и произведеніе вычитаю изъ дѣлимаго. Въ остаткѣ нуль: слѣдовательно полное частное $=(6b-9c)a+bc$.

*Примѣръ.* Раздѣлить

$$10a^3+5a^2b-15a^2c+3ab^2-9abc-5b^2c+15bc^2$$

на $5a^2+3ab-5bc$.

Частное получится $2a+b-3c$.

*Примѣръ.* Раздѣлить

$6a^2b+11abc-3a^2c-4ab^2-6b^2c$ на $2ab+3bc-ac$.

Частное получится $3a-2b$.

**39.** Независимо отъ коефиціентовъ и знаковъ предъ ними, дѣленіе безъ остатка (нацѣло) одного количества на другое невозможно: 1) одночленнаго количества на двучленное и многочленное вообще; 2) когда дѣлимое количество меньшей степени относительно дѣлителя; 3) когда дѣлитель содержитъ хотя одну букву, которой нѣтъ въ дѣлимомъ; 4) когда члены дѣлимаго однородны между собою, а члены дѣлителя разнородны; 5) если хотя одна буква дѣлимаго будетъ меньшей степени относительно той же буквы въ дѣлителѣ; 6) если первый членъ дѣлимаго, или первый членъ какого либо остатка, не будетъ дѣлиться на первый членъ дѣлителя; и 7) если первый членъ дѣлимаго, или какого нибудь остатка, будетъ собственно одночленомъ, а первый членъ дѣлителя будетъ двойнымъ (въ видѣ бинома), на примѣръ: дѣлимое $ax^3+bx^2+cx+c$,

дѣлитель $(a+b)x^2+bx+c$.

Для алгебрическихъ дѣйствій гораздо полезнѣе знать случаи дѣлимости однихъ количествъ на другія, и обстоятельства, при которыхъ они имѣютъ мѣсто; но здѣсь нельзя говорить объ этомъ подробно, а между тѣмъ общія начала дѣлимости чиселъ знать необходимо нужно.

## О ДѢЛИМОСТИ ЧИСЕЛЪ.

**40.** Изъ Ариѳметики извѣстно, что всякое число называется *кратнымъ* другаго, если оно можетъ на него дѣлиться безъ остатка. Наприм. 21, которое равно $3\times7$, есть кратное трехъ и семи.

**41.** Число называется *первымъ*, если оно можетъ дѣлиться только само на себя и на единицу. Таковы числа: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,.....

Два числа называются *первыми между собою*, если имѣютъ только единицу общимъ дѣлителемъ. Наприм. числа 12 и 35 суть первыя между собою; потому что

$$12=2.\ 2.\ 3.\ 1,$$
$$35=5.\ 7.\ 1,$$

имѣютъ общимъ множителемъ 1-цу.

Такого же рода бываютъ и количества алгебрическія.

Количество также называется *кратнымъ* другаго, если оно дѣлится на это второе безъ остатка. Наприм. $6a^2b+11abc-3a^2c-4ab^2-6b^2c$, которое равно $(2ab+3bc-ac)(3a-2b)$, есть кратное двучлена $3a-2b$. Количество называется *первымъ*, если оно дѣлится только на себя и на единицу. Два количества называются *первыми между собою*, если имѣютъ только единицу общимъ множителемъ.

**42.** О дѣлимости чиселъ въ Алгебрѣ заключаютъ по тѣмъ же началамъ, какія излагаются въ Ариѳметикѣ. Мы здѣсь повторимъ ихъ въ общихъ выраженіяхъ.

1) *Если нѣсколько чиселъ* A, B, C,... *имѣютъ общій множитель* D, *то и алгебрическая сумма ихъ имѣетъ тотъ же множитель.*

Положимъ, что, отъ раздѣленія A, B, C,.... на D, произойдутъ частныя $q$, $q'$, $q''$,..., такъ что

$$A=qD,\ B=q'D,\ C=q''D,\ldots\ldots;\ \text{то сумма}$$
$$A+B+C+\ldots=(q+q'+q''+\ldots)D,$$

очевидно, имѣетъ тотъ же множитель D.

2) *Ежели сумма или разность двухъ чиселъ и одно изъ нихъ дѣлятся на* $d$ *безъ остатка, то и другое число раздѣлится на* $d$. — Пусть сумма

$$A\pm B=md\ \text{дѣлится на}\ d,$$
$$\text{и}\quad B=nd\quad »\quad »\ ;$$

къ этой суммѣ придадимъ $\mp B = \mp nd$; получится:

$$A = md \mp nd = (m \mp n)d.$$

Откуда видно, что $A$ есть кратное $d$.

3) *Произведенiе нѣсколькихъ чиселъ* ABC *дѣлится на* D *безъ остатка, если хотя одно изъ нихъ, наприм.* A, *дѣлится на* D.

Пусть $\frac{A}{D} = q$, или $A = qD$, то произведенiе

$$ABC = qDBC$$

очевидно раздѣлится на D.

*Слѣдствiя.*—Изъ 2) и 3) заключаемъ: a) если дѣлимое A и дѣлитель B дѣлятся на какое нибудь число D нацѣло, то и остатокъ $r$ также раздѣлится на D. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что $A = mD$, $B = nD$, и что, отъ раздѣленiя A на B, получится частное $q$, и остатокъ $r$; то

$$A = qB + r, \text{ или } mD = q.nD + r;$$

а поелику $A = mD$ и $B = nD$ дѣлятся на D, то, по 2), необходимо раздѣлится на D и остатокъ $r$.

b) Обратно: если дѣлитель B и остатокъ $r$ содержатъ въ себѣ общiй множитель D, то и дѣлимое A будетъ содержать въ себѣ тотъ же множитель $D$. Это очевидно.

c) Но если дѣлимое A и дѣлитель B суть первые между собою, то дѣлитель и остатокъ тоже будутъ между собою первыми. Ибо если между A и B нѣтъ общаго множителя, кромѣ 1-цы, то не будетъ его и въ послѣднемъ членѣ $r$ равенства $A = qB + r$.

Въ этомъ случаѣ, отъ раздѣленiя дѣлителя B на первый остатокъ $r$, получится второй остатокъ $r'$, который будетъ первымъ съ $r$; отъ раздѣленiя перваго остатка $r$ на второй $r'$, получится третiй остатокъ $r''$, который также будетъ первымъ съ $r'$. Продолжая такимъ образомъ, мы получимъ рядъ остатковъ

$$r,\ r',\ r'',\ r''',\ r'''',\ldots..$$

которые будутъ всѣ между собою первые, и постепенно уменьшающiеся; изъ нихъ послѣднiй не уничтожающiйся остатокъ будетъ $= 1$.

Пусть $q'$, $q''$, $q'''$, $q''''$,.... суть частныя отъ послѣдовательныхъ дѣленiй B на $r$, $r$ на $r'$, $r'$ на $r''$, $r''$ на $r'''$...., такъ что

$$B = q'r + r',$$
$$r = q''r' + r'',$$
$$r' = q'''r'' + r''',$$
$$r'' = q''''r''' + r'''', \text{ и проч.}$$

Положимъ, что $r'''' = o$, стало-быть, дѣленiе кончено, и $r'' = q''''r'''$ или $\frac{r''}{r'''} = q''''$, то необходимо $r''' = 1$; иначе вышло бы, что $r''$ дѣлится безъ остатка на число $r''' > 1$. А какъ $r'''$ дѣлитъ само себя и $r''$ нацѣло, то оно раздѣлило бы и $r'$ нацѣло (въ предпослѣднемъ равенствѣ), чему быть нельзя, потому что дѣлимое $r'$ и остатокъ $r'''$ суть первые между собою. И такъ, послѣдній не уничтожающійся остатокъ $r'''=1$.

4) *Если какое нибудь число* D *дѣлитъ нацѣло произведеніе* AB *двухъ чиселъ* A *и* B, *и есть первое съ однимъ изъ нихъ, наприм. съ* A, *то оно непремѣнно раздѣлитъ нацѣло другое число* B.

Для доказательства, будемъ дѣлить A на D, потомъ дѣлителя D на первый остатокъ, первый остатокъ на второй, второй на третій и т. д., пока въ остаткѣ получится 1-ца; при семъ назовемъ $q$, $q'$, $q''$, $q'''$,.... частныя отъ этихъ дѣленій, и соотвѣтственные остатки $r$, $r'$, $r''$, $r'''$,... первый, второй, третій.....; то получится рядъ равенствъ:

$$A=qD+r$$
$$D=q'r+r',$$
$$r=q''r'+r'',$$
$$r'=q'''r''+r''', \text{ и проч.}$$

Пусть $r'''=1$; это будетъ послѣдній неуничтожающійся остатокъ. Всѣ эти равенства помножимъ теперь на второе данное число B:

$$1) \quad AB=q.BD+Br,$$
$$2) \quad DB=q'.Br+Br',$$
$$3) \quad Br=q''.Br'+Br'',$$
$$4) \quad Br'=q'''.Br''+B.1.$$

Поелику AB, въ 1), дѣлится на D по положенію, $q$.BD также, то и B$r$ раздѣлится на D; DB, во 2), и $q'$.B$r$ дѣлятся на D, то и членъ B$r'$ раздѣлится; въ 3) B$r$ и $q''$.B$r'$ дѣлятся на D, слѣдовательно и B$r''$; наконецъ, B$r'$ и $q'''$.B$r''$ дѣлятся на D, то и B раздѣлится на D. Это послѣднее и доказать было нужно.

*Примѣръ:* Произведеніе 50×78=3900 дѣлится на 13 и даетъ частное 300; множитель 50 и 13 суть первые между собою; слѣдовательно 78 дѣлится на 13. И въ самомъ дѣлѣ,

$$78:13=6.$$

*Слѣдствіе 1-е.* Всякое число D, первое съ каждымъ множителемъ произведенія ABC, есть первое и съ самимъ этимъ прозведеніемъ. Ибо, если бы оно могло раздѣлить ABC безъ остатка, то необходимо раздѣлило бы одинъ изъ его множителей, что невозможно. Такъ 12×13=156; число 5 есть первое съ 12 и 13; оно первое и съ произведеніемъ 156.

*Слѣдствіе 2-е.* Всякое число D первое съ $a$ есть также первое и со всѣми его степенями $a^2$, $a^3$, $a^4$,..... $a^n$.

*Слѣдствіе 3-е.* Если числа $a$, $b$, суть первыя между собою, то и степени ихъ $a^2$, $b^2$, $a^3$, $b^3$,.... суть числа между собою первыя. Ибо, если бы нашелся множитель, способный раздѣлить $a^3$, $b^3$ безъ остатка, то онъ раздѣлилъ бы также $a$ и $b$, что невозможно.

5) *Всякое число* A, *которое дѣлится на какія нибудь числа* D, D′, *первыя между собою, раздѣлится и на ихъ произведеніе* DD′.

Положимъ, что $\frac{A}{D}=q$, $\frac{A}{D'}=q'$.

Изъ перваго имѣемъ $A=qD$; подставимъ это во второе, получится:

$$\frac{A}{D'}=\frac{qD}{D'}=q'=\text{цѣлому};$$

но D, D′, первыя между собою, слѣдовательно будетъ

$$\frac{q}{D'}=\frac{A}{DD'}=\text{цѣлому}.$$

6) *Всякое произведеніе* $N=abcd\ldots.$, *состоящее только изъ первыхъ чиселъ* $a, b, c, d,\ldots$, *какъ множителей, не можетъ быть выражено произведеніемъ* $\alpha\beta\gamma\delta,\ldots$, *другихъ также простыхъ чиселъ* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta,\ldots..$

Пусть $abcd\ldots.=\alpha\beta\gamma\delta\ldots.$

Въ слѣдствіе сего равенства, множитель $\alpha$, долженъ дѣлить 4) одинъ изъ множителей произведенія $abcd\ldots.$; а какъ всѣ эти множители суть первые, то это возможно лишь тогда, когда одинъ изъ нихъ будетъ $=\alpha$. Пусть $a=\alpha$. Исключивъ этихъ равныхъ множителей, останется равенство

$$bcd\ldots.=\beta\gamma\delta\ldots.;$$

въ немъ $\beta$ долженъ быть также равенъ $b$, $c$, либо $d\ldots\ldots$, и т. д. Изъ этого видно, что множители двухъ такихъ произведеній должны быть равны каждый каждому. Слѣдовательно число N только одинакимъ образомъ можетъ быть разложено на простыхъ своихъ множителей.

Мы не будемъ говорить здѣсь о частныхъ случаяхъ дѣлимости чиселъ на 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11......; объ этомъ достаточно излагается въ курсахъ обыкновенной Ариѳметики: но обратимъ вниманіе на дѣлимость нѣкоторыхъ частныхъ количествъ, весьма часто встрѣчающихся въ алгебрическихъ дѣйствіяхъ.

## ДѢЛИМОСТЬ СТЕПЕНЕЙ И ДВУЧЛЕНОВЪ.

**43.** При раздѣленіи многочленовъ на одночлены, тотчасъ бываетъ видно, можетъ ли быть произведено это дѣленіе точнымъ образомъ, или нѣтъ; но этого нельзя напередъ угадывать при дѣленіи многочлена на многочленъ. Есть однакоже случаи явной дѣлимости количествъ, которыя нужно знать учащимся.

1) *Всякая степень дѣлится безъ остатка на ея корень.*— Сюда относятся простѣйшіе, намъ извѣстные случаи:

$$(a^2+2ab+b^2):(a+b)=(a+b)^2:(a+b)=a+b;$$

$$(a^2-2ab+b^2):(a-b)=(a-b)^2:(a-b)=a-b.$$

$$(a+b)^n:(a+b)=(a+b)^{n-1}.$$

2) *Разность одинакихъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на разность ихъ корней.* Напрѣм.

$$a^2-b^2:a-b=(a+b)(a-b):(a-b)=a+b;$$
$$a^3-b^3:a-b=a^2+ab+b^2;$$
$$a^4-b^4:a-b=a^3+a^2b+ab^2+b^3;$$
$$a^5-b^5:a-b=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4;$$

..........................................

$$a^m-b^m:a-b=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots+b^{m-1}.$$

Во всѣхъ этихъ случаяхъ, *частное имѣетъ столько членовъ, сколько единицъ въ показателѣ m дѣлимаго.*

Нельзя здѣсь не замѣтить особеннаго, весьма простаго порядка, по которому происходятъ члены частнаго одинъ послѣ другаго. Однообразное ихъ происхожденіе такъ явно, что, нашедши два или три такихъ члена, можно по одной аналогіи смѣло писать прочіе члены, уменьшая показатель буквы $a$, и увеличивая показатель буквы $b$ единицею. Этотъ порядокъ называется *закономъ происхожденія членовъ.*

3) *Разность равныхъ четныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на сумму ихъ корней.*

$$a^2-b^2:a+b=(a+b)(a-b):a+b=a-b;$$
$$a^4-b^4:a+b=a^3-a^2b+ab^2-b^3;$$

..........................................

$$a^{2m}-b^{2m}:a+b=a^{2m-1}-a^{2m-2}b+a^{2m-3}b^2-\ldots-b^{2m-1};$$

$a^6-b^4=(a^3)^2-(b^2)^2$ дѣлится на $a^3+b^2$;

$a^{2m}-b^{2n}$ дѣлится $a^m+b^n$.

4) *Сумма двухъ равныхъ нечетныхъ степеней дѣлится безъ остатка на сумму ихъ корней.*

$$a+b:a+b=1;$$
$$a^3+b^3:a+b=a^2-ab+b^2;$$
$$a^5+b^5:a+b=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4;$$

..........................................

Отсюда видно также, что раздѣлятся безъ остатка:

$a^6+b^3$ на $a^2+b$; ибо $a^6+b^3=(a^2)^3+b^3$;

$a^{10}+b^5$ на $a^2+b$;

$a^9+b^6$ на $a^3+b^2$; и проч.

**11.** Всѣ эти случаи дѣлимости очень часто употребляются *для разложенія двучленовъ* и *даже иногда многочленовъ на ихъ множителей.*

Такъ:
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$
$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3),$$
$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots+b^{m-1}),$$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, и проч.

Примѣры для разложенія многочленовъ на ихъ множителей:

a) $$-7a^4c+14a^3bc-7a^2b^2c.$$

Здѣсь находимъ сперва $-7a^2c$ общимъ множителемъ, который и вынесемъ внѣ скобокъ:

$$-7a^2c(a^2-2ab+b^2).$$

Но $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, то

$$-7a^4c+14a^3bc-7a^2b^2c=-7a^2c(a-b)^2.$$

b) Возмемъ еще $24a^5b^2+81a^2b^5$;

вынесемъ внѣ скобокъ общій множитель $3ab^2$; получится

$$24a^5b^2+81a^2b^5=3a^2b^2(8a^3+27b^3).$$

Но, $8a^3=(2a)^3$, $27b^3=(3b)^3$; поэтому можно $8a^3+27b^3$ разложить еще на множителей, дѣля на $2a+3b$:

$$8a^3+27b^3:2a+3b=4a^2-6ab+9b^2.$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$24a^5b^2+8a^2b^5=3a^2b^2(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2).$$

c) Иногда полезно брать члены, съ общими множителями, по два, по три...., выносить этихъ множителей за скобки, и такимъ образомъ открывать двучленныхъ, трехчленныхъ,.... множителей даннаго многочлена.

*Примѣръ.* $$6y^2z+9yz^2+2py+3pz.$$

Здѣсь нѣтъ ни одного множителя, общаго всѣмъ членамъ, но есть множители общіе членамъ первому и третьему, также второму и четвертому, а потому испытаемъ отдѣлить ихъ:

$$2y(3yz+p)+3z(3yz+p).$$

Этимъ дѣйствіемъ тотчасъ обнаружился общій двучленный множитель $3yz+p$, который вынесемъ за скобки; получится

$$(2y+3z)(3yz+p).$$

*Примѣръ.* $a^3-a^2b+ab^2-b^3=a^2(a-b)+b^2(a-b)=(a^2+b^2)(a-b)$.

*Примѣръ.* $$a^5+a^4b+2a^3b^2+2a^2b^3+ab^4+b^5=$$
$$=a^4(a+b)+2a^2b^2(a+b)+b^4(a+b)=$$
$$=(a+b)(a^4+2a^2b^2+b^4)=(a+b)(a^2+b^2)^2.$$

*Примѣръ.* $$x^3-3ax^2+3a^2x-a^3=x^3-a^3-3ax(x-a)=$$
$$=(x^2+ax+a^2)(x-a)-3ax(x-a)=$$
$$=(x^2-2ax+a^2)(x-a)=(x-a)^3.$$

## ОБЩІЙ НАИБОЛЬШІЙ ДѢЛИТЕЛЬ.

**45.** Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ двухъ чиселъ называется произведеніе, состоящее изъ множителей общихъ этимъ числамъ.

**46.** Въ одночленахъ этотъ наибольшій дѣлитель почти очевиденъ, и его розысканіе не составляетъ никакой трудности. Положимъ, что надобно найти такой дѣлитель между $60a^3b^4c^5d$ и $144a^2b^5c^3$.

Отыщемъ напередъ общій наибольшій дѣлитель между предстоящими 60 и 144: онъ будетъ 12. А послѣ того уже видно, что наименьшія данныя степени $a^2$, $b^4$, $c^3$, общихъ буквъ, суть общіе множители обоихъ одночленовъ. Слѣдовательно, искомый общій наибольшій дѣлитель, какъ произведеніе изъ всѣхъ общихъ множителей, будетъ

$$12a^2b^4c^3.$$

**47.** Розысканіе общаго наибольшаго дѣлителя *въ многочленахъ* гораздо сложнѣе, и основывается на слѣдующихъ началахъ дѣлимости (**42**, слѣдст.):

a) Если въ дѣлимомъ AD и дѣлителѣ BD есть общій множитель D, то онъ находится и въ остаткѣ $r$, какой получится отъ раздѣленія AD на BD; ибо тогда

$$AD = q.BD + r, \text{ или}$$

$$A = q.B + \frac{r}{D},$$

гдѣ $q$ частное; и очевидно, что $\frac{r}{D}$ должно быть цѣлымъ количествомъ.

Если общій дѣлитель находится въ BD и остаткѣ $r$, то онъ долженъ быть и въ остаткѣ $r'$, какой получится отъ раздѣленія BD на $r$, и т. д.

И обратно, если общій дѣлитель находится въ остаткѣ $r$ и дѣлителѣ BD, то онъ находится и въ дѣлимомъ AD.

b) Сверхъ того, общій дѣлитель не перемѣнится, если одно данное количество AD помножить на количество M, первое со вторымъ BD, или помножить BD на N первое съ AD. Отъ этого получатся ADM, BD; но, будемъ ли искать общій наибольшій дѣлитель между AD и BD, или между AMD и BD, онъ получится всё тотъ же D.

c) Общій наибольшій дѣлитель не перемѣнится, если раздѣлить AD на количество первое съ BD, или раздѣлить BD на количество — положимъ B, первое съ AD: тогда получатся AD и D вмѣсто AD и BD, но общій наибольшій дѣлитель D останется тотъ же.

**48.** На этихъ началахъ основано слѣдующее правило для розысканія общаго наибольшаго дѣлителя:

Надобно сперва вынесть за скобки множителей, общихъ всѣмъ членамъ одного и общихъ всѣмъ членамъ другаго даннаго многочлена. Отдѣлить многочлены, оставшіеся внутри скобокъ, и расположить ихъ по убывающимъ степенямъ одной буквы. Принять за дѣлимое тотъ многочленъ, въ которомъ эта буква высшей степени, и дѣлить его на другой многочленъ. Можетъ случиться, что первый членъ дѣлимаго не будетъ дѣлиться на первый членъ дѣлителя; тогда надобно помножить дѣлимое на такое число или количество, *первое* съ дѣлителемъ, которое бы сдѣлало первый членъ дѣлимаго кратнымъ перваго члена дѣлителя, и тогда дѣлить. Когда получится остатокъ низшей степени противъ дѣлителя, то, исключивъ изъ него множители общіе всѣмъ его членамъ, должно принять его за дѣлитель, а прежній дѣлитель за дѣлимое, и производить дѣленіе. Отъ этого получится второй остатокъ. На этотъ второй остатокъ надобно дѣлить первый, и такъ далѣе продолжать, пока остатка совсѣмъ не будетъ. Тогда послѣдній дѣлитель и будетъ общимъ дѣлителемъ двухъ данныхъ многочленовъ; а бывъ помноженъ на произведеніе множителей, вынесенныхъ внѣ скобокъ, при самомъ началѣ дѣйствія, составитъ общій наибольшій дѣлитель этихъ многочленовъ. Если же получится остатокъ, не содержащій главной буквы, по степенямъ которой были расположены многочлены, то эти многочлены не имѣютъ общаго многочленнаго дѣлителя. А если, сверхъ того, не окажется и общихъ множителей между числами и буквами, вынесенными внѣ скобокъ вначалѣ дѣйствія; то многочлены не имѣютъ между собою никакого общаго множителя, и суть первые между собою.

**49.** Руководствуясь этимъ правиломъ, поищемъ общій наибольшій дѣлитель между

$$10a^3b^2—26a^2b^2y+12ab^2y^2,\text{ и}$$
$$21a^3b^2—42a^2b^2y+7ab^2y^2—14b^2y^3.$$

Сперва вынесемъ за скобки множителей, общихъ всѣмъ членамъ перваго, и всѣмъ членамъ втораго многочлена:

$$2ab^2(5a^2—13ay+6y^2),$$
$$7b^2(3a^3—6a^2y+ay^2—2y^3),$$

и возмемъ $5a^2—13ay+6y^2$

$$3a^3—6a^2y+ay^2—2y^3.$$

Расположивъ эти многочлены по уменьшающимся степенямъ буквы $a$, примемъ $3a^3—6a^2y+ay^2—2y^3$ за дѣлимое, и $5a^2—13ay+6y^2$ за дѣлитель; а чтобы дѣленіе было возможно безъ дробей, помножимъ дѣлимое на 5:

$$\begin{array}{l|l}
15a^3—30a^2y+5ay^2—10y^3 & 5a^2—13ay+6y^2 \\
\cline{2-2}
—15a^3+39a^2y—18ay^2 & 3a,\quad 9y \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

$9a^2y—13ay^2—10y^3$, помножимъ на 5:

$45a^2y—65ay^2—50y^3$, продолжаемъ дѣлить:

$$\underline{—45a^2y+117ay^2—54y^3}$$

$52ay^2—104y^3$, выключимъ $52y^2$:

$$52y^2(a—2y).$$

Примемъ теперь $5a^2—13ay+6y^2$ за дѣлимое, а сокращенный остатокъ $a—2y$ за дѣлитель:

$$\begin{array}{r|l} 5a^2-13ay+6y^2 & a-2y \\ \cline{2-2} -5a^2+10ay & 5a-3y \\ \cline{1-1} -\ 3ay+6y^2 & \\ +\ 3ay-6y^2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Итакъ, $a-2y$ есть общій наибольшій дѣлитель многочленовъ $5a^2-13ay+6y^2$ и $3a^3-6a^2y+ay^2-2y^3$. А раздѣливъ тотъ и другой на $a-2y$, получимъ

$$5a^2-13ay+6y^2=(5a-3y)(a-2y),$$

$$3a^3-6a^2y+ay^2-2y^3=(3a^2+y^2)(a-2y).$$

Полные же данные многочлены получатся, помноживъ первый на $2ab^2$, а второй на $7b^2$:

$$2ab^2(5a-3y)(a-2y)=2a(5a-3y)(a-2y)b^2,$$

$$7b^2(3a^2+y^2)(a-2y)=7(3a^2+y^2)(a-2y)b^2.$$

Изъ этого видно, что общій наибольшій дѣлитель полныхъ данныхъ многочленовъ есть

$$(a-2y)b^2.$$

*Примѣръ для упражненія.*—Многочлены

$$6x^3-a^3-11x^2-\ 8ax,$$

$$4x^4-a^4+a^2x^2\ -10ax^3,$$

имѣютъ общій наибольшій дѣлитель $x^2-2ax-a^2$.

Слѣдующій примѣръ открываетъ нѣкоторыя замѣчанія, служащія дополненіемъ къ общему правилу. Предлагается найти общій наибольшій дѣлитель между

$$3a^2-4ab-\ 8ac-4b^2-8bc-3c^2, \text{ и}$$

$$6a^2+7ab-13ac+2b^2-9bc+5c^2.$$

Расположимъ эти многочлены по убывающимъ степенямъ буквы $a$, и соединимъ въ одну сумму члены, содержащіе первую степень буквы $a$, а члены, совсѣмъ ее не содержащіе, въ другую сумму, написавъ ту и другую вертикальными рядами (**38**):

$$\begin{array}{r|l||r|l} 6a^2+\ 7b & a+2b^2 & 3a^2-4b & a-4b^2 \\ -13c & -9bc & -8c & -8bc \\ & +5c^2 & & -3c^2 \\ \cline{3-4} & & \multicolumn{2}{c}{2} \\ -6a^2+\ 8b & a+\ 8b^2 & & \\ +16c & +16bc & & \\ & +\ 6c^2 & & \\ \cline{1-2} +15b & a+10b^2 & & \\ +\ 3c & +\ 7bc & \multicolumn{2}{l}{\!\!\Big\}=(5b+c)3a+10b^2+7bc+c^2.} \\ & +\ \ c^2 & & \end{array}$$

Получивши остатокъ съ меньшею степенью буквы $a$ относительно дѣлителя, надлежало бы теперь помножить весь дѣлитель на $5b+c$, и принять его за дѣлимое. Но, здѣсь надобно еще увѣриться, не находится ли этотъ множитель $5b+c$ въ $10b^2+7bc+c^2$, чего нельзя знать, не раздѣливъ это количество на $5b+c$:

$$\begin{array}{r|l}
10b^2+7bc+c^2 & 5b+c \\ \cline{2-2}
-10b^2-2bc & 2b+c \\ \cline{1-1}
5bc+c^2 & \\
-5bc-c^2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Чрезъ это дѣленіе находимъ, что $10b^2+7bc+c^2=(5b+c)(2b+c)$, и заключаемъ, что остатокъ, выше найденный,

$$3a(5b+c)+10b^2+7bc+c^2=(5b+c)(3a+2b+c).$$

Общій наибольшій дѣлитель, если онъ находится, долженъ быть только въ $3a+2b+c$, потому что другой множитель $5b+c$ не имѣетъ буквы $a$.

И такъ, станемъ дѣлить прежній дѣлитель на $3a+2b+c$:

$$\begin{array}{r|l}
3a^2-4b & a-4b^2 \\
-8c & -8bc \\
 & -3o^2
\end{array}
\quad
\begin{array}{||l}
3a+2b+c \\ \hline
a-(2b+3c) \\
\\
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
-3a^2-2b & a \\
-c & \\ \hline
-6b & a-4b^2 \\
-9c & -8bc \\
 & -3c^2
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\}=-3a(2b+3c)-4b^2-8bc-3c^2$$

$$\begin{array}{r|l}
+6b & a+4b^3 \\
+9c & +2bc \\
 & +6bc \\
 & +3c^2 \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{0}
\end{array}$$

Посему, $3a+2b+c$ и есть искомый общій наибольшій дѣлитель.

---

## АЛГЕБРИЧЕСКІЯ ДРОБИ.

**50.** Когда дѣленіе одного количества на другое бываетъ невозможно, тогда это дѣйствіе только обозначается: ставятъ дѣлителя подъ дѣлимымъ и проводятъ между ними горизонтальную черту. Такія выраженія называются *алгебрическими дробями*. Наприм. $\frac{2ab^2}{3c^3d}$, $\frac{3a^2-b}{5c+3p}$. Въ нихъ дѣлимое называется *числителемъ*, а дѣлитель *знаменателемъ* дроби.

**31.** Надъ алгебрическими дробями производятся всѣ тѣ же дѣйствія, что и надъ дробями ариѳметическими, потому что ихъ главнѣйшія свойства тѣ же самыя.

Дробь увеличится, если увеличить ея числитель; но она уменьшится чрезъ уменьшеніе числителя:

$$\frac{a+m}{b}>\frac{a}{b}, \text{ потому что дѣлимое } a+m>a.$$

$$\frac{a-m}{b}<\frac{a}{b}, \text{ потому что дѣлимое } a-m<a.$$

Дробь уменьшится, если увеличить ея знаменатель; но она увеличится отъ уменьшенія знаменателя:

$$\frac{a}{b+c}<\frac{a}{b}, \text{ потому что дѣлитель } b+c>b,$$

$$\frac{a}{b-c}>\frac{a}{b}, \quad — \quad — \quad — \quad b-c<b.$$

*Дробь не перемѣнитъ величины своей, если помножить, или раздѣлить, ея числитель и знаменатель на одно и то же число.*

Для доказательства, возмемъ дробь $\frac{a}{b}$, и назовемъ буквою $q$ частное, отъ раздѣленія $a$ на $b$, то есть:

$$\frac{a}{b}=q.$$

Дѣлимое $a$ равно дѣлителю, помноженному на частное, то есть:

$$a=bq.$$

Это равенство помножимъ на произвольное число $n$; будемъ имѣть:

$$an=bq.n=bn\times q.$$

а это равенство раздѣлимъ на $bn$, и будетъ

$$\frac{an}{bn}=q=\frac{a}{b}.$$

Обратно:

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $\frac{a}{m}=q$, $\frac{b}{m}=q'$; откуда $a=qm$, $b=q'm$. Раздѣлимъ одно равенство на другое:

$$\frac{a}{b}=\frac{qm}{q'm}.$$

Но, изъ предыдущаго свойства, знаемъ, что $\frac{qm}{q'm}=\frac{q}{q'}$; посему

$$\frac{a}{b}=\frac{q}{q'}=\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}.$$

Эти два свойства служатъ для сокращенія дробей, и также для приведенія ихъ къ общему знаменателю въ различныхъ дѣйствіяхъ.

**52.** *Сокращеніе дробей.* — Сократить дробь значитъ привесть ее въ простѣйшій видъ чрезъ исключеніе множителей общихъ ея числителю и знаменателю.

**53.** *Въ дроби одночленной* множители, общіе числителю и знаменателю, очевидны; и потому приведеніе дроби въ простѣйшій видъ очень легко.

*Примѣръ.* $\frac{12a^3b^4c}{32a^5b^7c^2}=\frac{3.4.a^3b^4c}{8.4.a^3a^2b^4b^3c.c}=\frac{3}{8a^2b^3c}$.

Столь же легко сократить дробь, у которой одинъ числитель, или одинъ знаменатель, состоитъ изъ нѣсколькихъ членовъ: тогда общіе множители, если они есть, должны быть въ каждомъ членѣ, безъ чего и сокращеніе не возможно.

*Примѣръ.* $\frac{6a^3b^2}{4a^2b^2c+10ab^3}=\frac{6a^3b^2:2ab^2}{(4a^2b^2c+10ab^3):2ab^2}=\frac{3a^2b}{2ac+5b^2}$.

**54.** *Дроби многочленныя* можно сокращать или чрезъ постепенное исключеніе множителей, общихъ числителю и знаменателю, или посредствомъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Для постепеннаго сокращенія, надобно вынесть внѣ скобокъ множители общіе всѣмъ членамъ числителя, и общіе всѣмъ членамъ знаменателя, и сдѣлать между ними сокращеніе. Потомъ смотрѣть, оставшіеся многочлены не составляютъ ли квадратовъ отъ суммы или разности двучленовъ, не имѣютъ ли вида $a^2-b^2$, $a^4-b^4$,.... $a^3+b^3$, $a^5+b^5$,....; и если это окажется, то разложить ихъ на множители (**44**), и тогда сократить, буде можно.

*Примѣръ.* Сократить $\frac{15a^3-30a^2b+15ab^2}{24a^4-24a^2b^2}$.

Отдѣлимъ множители общіе всѣмъ членамъ, и сдѣлаемъ между ними сокращеніе:

$$\frac{15a(a^2-2ab+b^2)}{24a^2(a^2-b^2)}=\frac{5}{8a}\left(\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}\right).$$

Но, знаемъ, что $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; то

$$\frac{5}{8a}\left(\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}\right)=\frac{5(a-b)^2}{8a(a+b)(a-b)}=\frac{5(a-b)}{8a(a+b)}.$$

*Примѣръ.* Сократить $\frac{3m^3n+3m^2n}{6m^3n^2-6mn^2}$.

Сперва находимъ $\frac{\overset{2}{3m^3}n(m+1)}{6mn^2(m^2-1)}=\frac{m(m+1)}{2n(m^2-1)}$.

А какъ $m^2-1=(m+1)(m-1)$, то

$$\frac{m\,(m+1)}{2n(m^2-1)}=\frac{m}{2n(m-1)}.$$

*Примѣръ.*

$$\frac{x^6-1}{x^5-x^3+x^2-1}=\frac{(x^3+1)(x^3-1)}{x^3(x^2-1)+x^2-1}=$$

$$=\frac{(x^3+1)(x^3-1)}{(x^3+1)(x^2-1)}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=x+\frac{1}{x+1}.$$

*Примѣръ.* $$\frac{x^4-2x^3y+x^2y^2}{x^4-2x^2y^2+y^4}=\frac{x^2(x^2-2xy+y^2)}{(x^2-y^2)^2}=$$
$$=\frac{x^2(x-y)^2}{(x+y)^2(x-y)^2}=\frac{x^2}{(x+y)^2}.$$

*Примѣръ.* $$\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}=\frac{3a^2(a-2b)+b^2(a-2b)}{9a^4(a-2b)-b^4(a-2b)}$$
$$=\frac{(3a^2+b^2)(a-2b)}{(9a^4-b^4)(a-2b)},$$

а поелику $9a^4-b^4=(3a^2+b^2)(3a^2-b^2)$, то
$$\frac{3a^2+b^2}{9a^4-b^4}=\frac{1}{3a^2-b^2}.$$

Въ этомъ послѣднемъ примѣрѣ употребленъ способъ отдѣленія общихъ множителей, показанный въ (44,3).

**55.** Самый общій способъ сокращенія дробей производится *посредствомъ общаго наибольшаго дѣлителя* въ числителѣ и знаменателѣ данной дроби. Для этого надобно найти этотъ наибольшій дѣлитель, потомъ раздѣлить на него числитель и знаменатель данной дроби: она сразу получитъ простѣйшій видъ, потому что исключатся всѣ множители общіе числителю и знаменателю.

Положимъ, что нужно сократить дробь:
$$\frac{6x^3-a^3-11ax^2-8a^2x}{4x^4-a^4+a^2x^2-10ax^3}.$$

Расположимъ обѣ части этой дроби по убывающимъ степенямъ буквы $x$:
$$\frac{6x^3-11ax^2-8a^2x-a^3}{4x^4-10ax^3+a^2x^2-a^4},$$

и примемъ знаменатель за дѣлимое, а числитель за дѣлитель. Но, чтобы первый членъ $4x^4$ могъ безъ остатка раздѣлиться на $6x^3$, помножимъ все дѣлимое на 3:

$$\begin{array}{r|l}
12x^4-30ax^3+\ 3a^2x^2-3a^4 & 6x^3-11ax^2-8a^2x-a^3 \\ \hline
-12x^4+22ax^3+16a^2x^2+2a^3x & 2x,-4a. \\ \hline
-8ax^3+19a^2x^2+\ 2a^3x-3a^4, & \text{помножимъ на } 3; \\
-24ax^3+57a^2x^2+\ 6a^3x-9a^4 & \text{теперь раздѣлимъ:} \\
+24ax^3-44a^2x^2-32a^3x-4a^4 & \\ \hline
13a^2x^2-26a^3x-13a^4, & \text{исключимъ } 13a^2; \\
x^2-\ 2ax-a^2. &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
6x^3-11ax^2-8a^2x-a^3 & x^2-2ax-a^2 \\ \hline
-6x^3+12ax^2+6a^2x & 6x+a. \\ \hline
ax^2-2a^2x-a^3 & \\
-ax^2+2a^2x+a^3 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

И такъ, $x^2-2ax-a^2$ есть общій наибольшій дѣлитель данной дроби. Раздѣливъ на него ея числитель и знаменатель, получится простѣйшая дробь:

$$\frac{6x+a}{4x^2-2ax+a^2}.$$

**56.** *Приведеніе дробей къ общему знаменателю.* Для этого надобно каждую данную дробь помножить на произведеніе знаменателей всѣхъ прочихъ дробей; отчего величины дробей не перемѣнятся, но знаменатели сдѣлаются равными. Положимъ, что надобно привести къ общему знаменателю дроби:

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f}.$$

По совершеніи дѣйствія, получатся дроби:

$$\frac{a.df}{bdf},\ \frac{c.bf}{bdf},\ \frac{e.bd}{bdf},$$

съ равными знаменателями.

**57.** Часто бываетъ, что знаменатели данныхъ дробей имѣютъ общихъ множителей; тогда надобно стараться приводить дроби *къ наименьшему общему знаменателю.* Для этого берутся высшія степени всѣхъ множителей въ знаменателяхъ, составляется изъ нихъ произведеніе, которое и будетъ искомымъ общимъ знаменателемъ. Потомъ смотрятъ, какихъ множителей недостаетъ въ знаменателѣ первой дроби, необходимыхъ для составленія этого общаго знаменателя; на тѣхъ множителей и помножаютъ обѣ части той дроби. Такимъ же образомъ поступаютъ со второю, третьею, и т. д. дробями; отчего всѣ онѣ получатъ общій знаменатель самый меньшій. Наприм. дроби:

$$\frac{3a}{4b^2c^3},\ \frac{5f}{6b^4c^2d},\ \frac{4h}{3bc^2},$$

имѣютъ общихъ множителей въ знаменателяхъ. Высшія степени множителей сихъ знаменателей суть: $2^2$, $3$, $b^4$, $c^3$, $d$. Общимъ знаменателемъ будетъ $12b^4c^3d$. Но, чтобы первая дробь получила этотъ знаменатель, надобно помножить обѣ ея части на $3b^2d$, во второй на $2c$, въ третьей на $4b^8cd$. Сдѣлавъ это, получатся дроби съ общимъ знаменателемъ:

$$\frac{9ab^2d}{12b^4c^3d},\ \frac{2fc}{12b^4c^3d},\ \frac{16b^3cdh}{12b^4c^3d}.$$

Приведеніе дробей къ общему знаменателю обыкновенно употребляется при сравненіи дробей, при ихъ сложеніи и вычитаніи.

**58.** *Сложеніе и вычитаніе дробей* дѣлается такъ же, какъ и въ Ариѳметикѣ. 1) Если дроби съ равными знаменателями, то слагаются (или вычитаются) ихъ числители, а подъ суммою (или разностью) пишется ихъ общій знаменатель. Для объясненія возмемъ дроби:

$$\frac{a}{p},\ \frac{b}{p},\ \frac{c}{p},$$

положимъ, что $\frac{a}{p}=q$, $\frac{b}{p}=q'$, $\frac{c}{p}=q''$, откуда

$$a=pq,\ b=pq',\ c=pq''.$$

Сложимъ эти равенства:

$$a+b+c=p(q+q'+q''),$$

и сумму раздѣлимъ на $p$, получится

$$\frac{a+b+c}{p}=q+q'+q''=\frac{a}{p}+\frac{b}{p}+\frac{c}{p}.$$

Если данныя дроби съ разными знаменателями, то сперва приводятся къ общему знаменателю, потомъ берется алгебрическая сумма числителей и дѣлится на общій знаменатель.

*Примѣръ.* $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{e}{f}=\frac{a.df}{b.df}+\frac{c.bf}{d.bf}-\frac{e.bd}{f.bd}=\frac{adf+bcf-bde}{bdf}.$

*Цѣлое число $a$ изобразить въ видѣ дроби съ знаменателемъ $b$.* — Для этого надобно только помножить это число $a$ и раздѣлить на $b$:

$$a=\frac{a\times b}{b}.$$

**59.** *Дробное число, состоящее изъ цѣлаго, совокупленнаго съ дробью сложеніемъ или вычитаніемъ, обратить въ неправильную дробь.*—Пусть это число

$$a\pm\frac{b}{m}.$$

Обратимъ цѣлое $a$ въ дробь съ знаменателемъ $m$; потомъ сложимъ числителей, и подъ алгебрическою суммою напишемъ ихъ общій знаменатель:

$$a=\frac{am}{m}, \text{слѣдовательно}$$

$$a\pm\frac{b}{m}=\frac{am}{m}\pm\frac{b}{m}=\frac{am\pm b}{m}.$$

*Примѣръ.* Сложить $a-1$ съ $\frac{c^2+1}{a+1}$ въ одну дробь.

$$a-1+\frac{c^2+1}{a+1}=\frac{(a-1)(a+1)+c^2+1}{a+1}=\frac{a^2+c^2}{a+1}.$$

*Примѣръ.* $a^2+ab+b^2+\frac{b^3}{a-b}=\frac{a^3}{a-b}.$

*Примѣръ.* $\left(2a+\frac{4b^2}{9a}\right)+\left(3b-\frac{5a^2}{6b}\right)=\frac{18a^2+4b^2}{9a}+\frac{18b^2-5a^2}{6b}=$

$$=\frac{36a^2b+8b^3+54ab^2-15a^3}{18ab}.$$

*Примѣръ.* $\left(\frac{2ab^2+3bc^2}{2b-c}\right)-\left(\frac{4a^2b-3b^2c}{4a+b}\right)=$

$$=\frac{(2ab^2+3bc^2)(4a+b)-(4a^2b-3b^2c)(2b-c)}{(2b-c)(4a+b)}$$

$$=\frac{12abc^2+2ab^3+6b^3c+4a^2bc}{8ab-4ac+2b^2-bc}.$$

*Примѣръ.*
$$a+\frac{b^2-ac}{a+c}-\frac{(a^2+b^2)}{a-c}=$$
$$=\frac{a^3-ac^2+ab^2-a^2c-b^2c+ac^2-a^3-ab^2-a^2c-b^2c}{a^2-c^2}=$$
$$=-\frac{(2a^2c+2b^2c)}{a^2-c^2}=\frac{2c(a^2+b^2)}{c^2-a^2}.$$

**60.** ***Изъ неправильной дроби исключить цѣлое количество.*** — Это возможно въ такой дроби, у которой числитель и знаменатель могутъ быть расположены по степенямъ одной и той же буквы, и притомъ когда хотя одинъ первый членъ числителя можетъ точнымъ образомъ дѣлиться на первый членъ знаменателя. Тогда надобно въ самомъ дѣлѣ дѣлить числитель на знаменателя, пока получится остатокъ, котораго первый членъ не можетъ дѣлиться на первый членъ дѣлителя. Тогда этотъ остатокъ надобно приписать къ частному, провесть подъ нимъ черту, и подписать дѣлителя.

*Примѣръ.* Исключить цѣлое изъ дроби
$$\frac{x^3-3x^2+7x-2}{x^2-2x+3}.$$

Раздѣливъ числитель на знаменатель, получаемъ
$$\frac{x^3-3x^2+7x-2}{x^2-2x+3}=x-1+\frac{2x+1}{x^2-2x+3}.$$

**61.** *Для умноженія дроби на дробь,* надобно взять произведеніе всѣхъ числителей и раздѣлить на произведеніе знаменателей.

Положимъ, что даны дроби $\frac{a}{b}=m, \frac{c}{d}=n$, и что требуется найти произведеніе
$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}.$$

Взявъ равенства: $a=bm$, $c=dn$, перемножимъ между собою:
$$ac=bm.dn=bd.mn,$$
и раздѣлимъ на $bd$, получится
$$\frac{ac}{bd}=mn=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d},$$
что и слѣдовало доказать.

При помноженіи нѣсколькихъ дробей между собою надобно напередъ исключать множителей, общихъ произведенію числителей и произведенію знаменателей; отчего все дѣйствіе сократится, и найдется простѣйшій выводъ.

*Примѣръ.* $$\frac{2a^2b}{3cm^2}\times\frac{3bc^2}{10an^2}\times\frac{5cm}{7a^2b^2}=\frac{c^2}{7amn^2}.$$

*Примѣръ.* $$(1\frac{1}{2})^2\cdot\frac{7a^{n+3}}{15b^{n-1}}\times\frac{20b^{n+1}}{21a^{n-3}}=a^6b^2.$$

*Примѣръ.* $$\frac{25x^{3n-1}}{3a^{n-m}}\times\frac{12a^{n+m}}{5x^{n+1}}=20a^{2m}.x^{2n-2}.$$

*Примѣръ.* $$\frac{m+1}{a^3+b^3}\times\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}\times\frac{a^2-b^2}{m^2-1}.$$

Въ этомъ примѣрѣ я замѣчаю напередъ, что

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$m^2-1=(m+1)(m-1);$$

а сдѣлавъ подстановленіе, тотчасъ нахожу простѣйшій выводъ произведенія

$$\frac{a-b}{(a+b)(m-1)}.$$

**62.** *Для раздѣленія дроби на дробь*, надобно помножить дробь дѣлимую на обращенную дробь дѣлителя.

Положимъ, что нужно раздѣлить $\frac{a}{b}=p$ на $\frac{c}{d}=q$, то есть, найти частное

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{p}{q}.$$

Дѣлимое равно частному, помноженному на дѣлитель; слѣдовательно

$$\frac{a}{b}=\frac{p}{q}\times\frac{c}{d}.$$

Это равенство помножимъ на дробь $\frac{d}{c}$, получится

$$\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{p}{q}\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=\frac{p}{q}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d};$$

чѣмъ и доказано правило дѣленія.

Если $d=1$, то $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$;

если $b=1$, то $\frac{a}{1}:\frac{c}{d}=a\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{c}$.

*Примѣръ.* $\frac{25x^{3n-1}}{3a^{n-m}}:\frac{12a^{n+m}}{5x^{n+1}}=\frac{125x^{4n}}{36a^{2n}}$.

*Примѣръ.* $\frac{4a^n}{3x}\cdot\frac{27x^n}{a^{n-2}}:\frac{9x^2}{5a}=20a^3x^{n-3}$.

*Примѣръ.* $\frac{15a^5}{3a^2-7b^2}:\frac{20a^3b^2}{4ab+3c^2}=\frac{15a^5}{3a^2-7b^2}\times\frac{4ab+3c^2}{20a^3b^2}=\frac{3a^2}{4b^2}\left(\frac{4ab+3c^2}{3a^2-7b^2}\right)$.

*Примѣръ.* Сократить дробное выраженіе:

$$\frac{\left(1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}\right)\left(a-\frac{a^2-b^2}{a+b}\right)}{\left(1+\frac{3b-a}{a+b}\right)(a^2+b^2)}=$$

$$=\frac{(a^3-ba^2+b^2a-b^3)(a^2+ab-a^2+b)}{a^3(a^2+b^2)(b+3b)}=\frac{a^4-b^4}{4a^3(a^2+b^2)}=\frac{a^2-b^2}{4a^3}.$$

**63.** Въ заключеніе статьи о дробяхъ, разсмотримъ еще одно изъ ихъ свойствъ.

*Если къ числителю и знаменателю правильной дроби придать поровну, то она увеличится, а если вычесть по-ровну, то уменьшится.*

Дробь же неправильная, въ такихъ случаяхъ, получаетъ измѣненія совсѣмъ противныя.

Возмемъ дробь $\frac{a}{b}$; къ обѣимъ частямъ ея придадимъ $c$; получится $\frac{a+c}{b+c}$. Потомъ раздѣлимъ въ самой вещи $a+c$ на $b+c$, выйдетъ

$$\frac{a+c}{b+c}=\frac{a}{b}+\left(\frac{b-a}{b+c}\right)\frac{c}{b}\dots\dots\dots(k)$$

Очевидно, что эта дробь не равна $\frac{a}{b}$.

*У дроби правильной* $\frac{a}{b}$ знаменатель $b>a$, $b-a=+$; слѣдовательно будетъ

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{b-a}{b+c}\right)\frac{c}{b}>\frac{a}{b}.$$

*У дроби неправильной,* $b<a$, $b-a=-$; отчего будетъ

$$\frac{a}{b}-\left(\frac{a-b}{b+c}\right)\frac{c}{b}<\frac{a}{b},$$

то есть, дробь сдѣлается менѣе. Обратное дѣйствіе очевидно само собою.

**61.** Помножимъ числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$ на произвольное цѣлое число $n$; величина ея неперемѣнится, и будетъ $\frac{a}{b}=\frac{an}{bn}$; потомъ внесемъ $an$, $bn$, вмѣсто $a$, $b$, въ формулу ($к$); получится выводъ совсѣмъ другой:

$$\frac{an+c}{bn+c}=\frac{an}{bn}+\frac{n(b-a)}{bn+c}\cdot\frac{c}{bn}=\frac{a}{b}+\frac{(b-a)}{bn+c}\cdot\frac{c}{b},$$

изъ котораго видно, что въ правильной дроби

$$\frac{an+c}{bn+c}<\frac{a+c}{b+c},\ \text{потому что разность}\ \left(\frac{b-a}{bn+c}\right)\frac{c}{b}<\left(\frac{b-a}{b+c}\right)\frac{c}{b}.$$

Если $n$ взять очень велико, то разность сдѣлается очень мала, и можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины. Наприм.

для $a=2$, $b=3$, $c=10$, $n=1$, будетъ

$$\frac{2+10}{3+10}=\frac{2}{3}+\frac{10}{39}.$$

для $n=1000$, найдется $\frac{2010}{3010}=\frac{2}{3}+\frac{1}{903}$,

для $n=100000$, ....... $\frac{200010}{300010}=\frac{2}{3}+\frac{1}{90003}$, и такъ далѣе.

Слѣдовательно, если $n$ будетъ безконечно великъ, то разность $\left(\frac{b-a}{bn+c}\right)\frac{c}{b}$ получится безконечно малою, т. е. совсѣмъ уничтожится, и тогда останется только данная дробь $\frac{2}{3}$. Это значитъ, что конечная величина $c$ предъ безконечною $an$, и также $bn$, совсѣмъ исчезнетъ, потому что не сдѣлаетъ въ ней ни какой перемѣны.

# ГЛАВА ВТОРАЯ.

## УРАВНЕНІЯ.

### *Общія понятія и опредѣленія.*

**65.** Два неравныя, впрочемъ однородныя, количества можно всегда привести во взаимное равенство, если одно изъ нихъ, или оба вмѣстѣ, измѣнить чрезъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, или возвышеніе въ степень, и проч. посредствомъ вводнаго третьяго количества. Величина этого послѣдняго часто бываетъ не очевидна, и потому неизвѣстна, однако же алгебрически возможна.

Такъ, напримѣръ, числа 3 и 9 неравны; но ихъ можно привесть въ равенство:

a) *Чрезъ сложеніе* меньшаго числа 3 съ нѣкоторымъ числомъ $x$, чтобы вышло $3+x=9$; гдѣ, очевидно, $x=6$.

b) *Чрезъ умноженіе:* $3x=9$; гдѣ $x=3$.

c) *Чрезъ возвышеніе въ степень*: $3^x=9$. Здѣсь $x=2$, потому что $3^2=9$.

Число 30 сдѣлается равно 10, *чрезъ вычитаніе:* $30-x=\cancel{2}0$, гдѣ $x=20$; *чрезъ дѣленіе:* $\frac{30}{x}=10$, взявъ $x=3$.

**66.** *Уравненіемъ* называется всякое алгебрическое выраженіе, въ которомъ символически означены всѣ дѣйствія, посредствомъ коихъ требуется привесть одни данныя количества въ равенство съ другими посредствомъ одного, по крайней мѣрѣ, неизвѣстнаго. Оно, въ то же время, заключаетъ въ себѣ и всѣ условія, показывающія намъ, какъ надобно преобразовать его, чтобы найти это неизвѣстное, выразить оное въ количествахъ данныхъ.

Такимъ образомъ: $30-x=20$, есть уравненіе, показывающее, что надобно число 30 превратить въ 20, чрезъ вычитаніе третьяго неизвѣстнаго $x$; $\frac{30}{x}=10$, $3^x=9$, суть уравненія: въ первомъ требуется 30 превратить въ 10 посредствомъ дѣленія; а во второмъ — какъ получить число 9 изъ 3 чрезъ возвышеніе въ степень.

Вообще же, всякія два количества, наприм. $a+b-c$, $d+e$, могутъ быть приводимы въ равенство посредствомъ неизвѣстнаго $x$, различными способами, какъ то:

$$a+bx-\frac{c}{x}=d+ex, \text{ или}$$

$$ax+\frac{b}{x}-c=dx+\frac{c}{x^2}, \text{ и проч.}$$

**67.** Количества, раздѣленныя знакомъ $=$, называются *частями уравненія*. Каждая часть можетъ состоять изъ одного или нѣсколькихъ членовъ, соединенныхъ между собою знаками $+$ и $-$. Неизвѣстная величина $x$ можетъ быть въ одной части уравненія, или въ обѣихъ, и притомъ въ нѣкоторыхъ членахъ, или во всѣхъ. Наприм.

$$2+3x=17-5x,$$

$$ax+\frac{b}{x}=dx-\frac{e}{x^2}.$$

Извѣстныя или данныя количества въ уравненіяхъ означаются цифрами или буквами $a$, $b$, $c$,... $m$, $n$, $p$,...; а неизвѣстныя количества — послѣдними буквами французскаго алфавита.

**68.** Уравненія бываютъ *численныя* и *буквенныя*. Въ первыхъ всѣ извѣстныя величины означены цифрами, а во вторыхъ буквами. Наприм.

$2+3x=13-5x$, уравненіе численное;

$a+bx=c-dx$, уравненіе буквенное.

Уравненіе, въ которомъ неизвѣстная находится въ показателѣ степени, называется *неопредѣленно-степеннымъ*. Наприм. $a^x=b$.

**69.** Уравненія различаются *по степени* неизвѣстной, въ нихъ находящейся. Онѣ бываютъ *первой степени*, *второй степени*, *третьей*,...., и вообще $n$-*ой степени*, когда неизвѣстная $x$, не находясь нигдѣ въ знаменателѣ, будетъ имѣть высшею степенью первую, вторую, третью, или, вообще, $n$-ю, Напримѣръ:

$a+bx=c-dx$, уравненіе первой степени;

$ax^2+bx=c$, уравненіе второй степени;

$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots+s=0$ уравненіе $n$-ой степени.

Уравненія всякихъ степеней различаются еще по числу неизвѣстныхъ: онѣ бываютъ съ одною неизвѣстною, иногда съ двумя, тремя, и т. д. Наприм.

$a+bx=c-dx$, уравненіе съ одною неизвѣстною;

$ax+by=c$, уравненіе съ двумя неизвѣстными $x$, $y$.

**70.** *Рѣшить уравненіе* значитъ найти всѣ величины его неизвѣстной $x$, которыя удовлетворяютъ ему, то есть, будучи подставлены въ уравненіе на мѣсто $x$, дѣлаютъ первую часть его тожественно равною второй. Оттого неизвѣстная въ уравненіи называется величиною *искомою*, *корнемъ уравненія*.

Число рѣшеній, то есть, число корней въ нѣкоторыхъ уравненіяхъ бываетъ опредѣленное, наприм. одно, два, три...; но есть уравненія, допускающія безконечное число рѣшеній.

## I. УРАВНЕНІЕ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ СЪ ОДНОЮ НЕИЗВѢСТНОЮ.

**71.** Для разрѣшенія уравненія первой степени съ одною неизвѣстною, надобно преобразовать его такъ, чтобы въ первой его части осталась одна эта неизвѣстная съ знакомъ $+$, а всѣ извѣстныя величины перенесены въ другую часть уравненія, безъ нарушенія равенства между этими частями.

**72.** Возмемъ сперва самыя простыя уравненія:

$$x+a=b,\ x-c=d,\ px=q,\ \frac{x}{p}=h,$$

въ которыхъ неизвѣстная $x$ находится въ первой части и соединена съ одною изъ данныхъ посредствомъ сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

Чтобъ найти неизвѣстную $x$ изъ уравненій $x+a=b$, $x-c=d$, *надобно перенести извѣстные члены* $+a$, $-c$, соединенные съ нею сложеніемъ и вычитаніемъ, *во вторую часть уравненія съ противнымъ знакомъ*, и будетъ:

$$x=b-a,\ x=d+c.$$

Въ самомъ дѣлѣ, равенство частей перваго уравненія не измѣнится, если отнять отъ обѣихъ его частей членъ $a$, то есть, взять

$$x+a-a=b-a.$$

Но $a-a=0$; посему $x=b-a$.

Равенство также сохранится, если къ обѣимъ частямъ втораго уравненія придадимъ членъ $+c$:

$$x-c+c=d+c.$$

Но $-c+c=0$; слѣдовательно, $x=d+c$.

Такимъ образомъ, *въ первомъ уравненіи,* членъ $+a$ перешелъ во вторую часть съ знакомъ $-$; а *во второмъ уравненіи* членъ $-c$ перешелъ во вторую часть его со знакомъ $+$.

*Въ третьемъ уравненіи* $px=q$ неизвѣстная $x$ освободится отъ множителя $p$ *чрезъ раздѣленіе* обѣихъ частей на $p$, отчего равенство не перемѣнится:

$$\frac{px}{p}=\frac{q}{p},\ \text{или}\ x=\frac{q}{p}.$$

*Въ четвертомъ уравненіи* $\frac{x}{p}=h$ неизвѣстная $x$ освободится отъ дѣлителя $p$ чрезъ помноженіе обѣихъ частей на $p$, отчего равенство не нарушится:

$$\frac{x}{p}.p=hp,\ \text{или}\ x=hp.$$

Если неизвѣстная получится съ знакомъ $-$, то надобно перемѣнить знаки во всѣхъ членахъ уравненія, чтобъ получить $x$ съ знакомъ $+$. Такъ, наприм., изъ уравненія

$$a-x=b,\ \text{находимъ}$$
$$-x=b-a.$$

Но чтобы неизвѣстная $x$ сдѣлалась положительною, помножимъ обѣ части уравненія на $-1$:

$$(-x)(-1)=(b-a)(-1); \text{ тогда получимъ}$$

$$x=a-b,$$

уравненіе то же, только перемѣнились знаки предъ всѣми его членами.

**73.** Иногда неизвѣстная $x$ найдется скорѣе, если оставимъ ее во второй части уравненія, или даже перенесемъ ее во вторую часть, а всѣ извѣстныя — въ первую часть его. Напримѣръ:

$$a=x-b.$$

Здѣсь, конечно, лучше перенести $-b$ въ первую часть уравненія съ противнымъ знакомъ, и будетъ

$$a+b=x,$$

а это все то же, что $x=a+b$.

*Примѣръ.* $p-x=q+2x$.

Здѣсь лучше перенести $x$ во вторую часть, а $q$ въ первую часть, и будетъ

$$p-q=x+2x=3x;$$

а это всё равно, что $3x=p-q$.

Потомъ, раздѣливъ обѣ части на 3, получимъ

$$\frac{3x}{3}=\frac{p-q}{3}, \text{ или } x=\frac{p-q}{3}.$$

Послѣ этихъ частныхъ и простѣйшихъ случаевъ рѣшенія уравненій первой степени съ одною неизвѣстною, не трудно уже перейти къ общему правилу рѣшенія сихъ уравненій, сколь бы ни были онѣ сложны.

**74.** *Общее правило.* — 1) Надобно сперва освободить данное уравненіе отъ дробей, привесть всѣ его члены къ общему знаменателю, и этотъ знаменатель отбросить. 2) Потомъ перенесть всѣ извѣстные члены въ первую часть уравненія съ противными знаками, а всѣ неизвѣстные во вторую, либо наоборотъ. 3) Сдѣлать сокращеніе, соединивъ извѣстные члены въ одинъ, и также всѣ члены неизвѣстные въ одинъ членъ: тогда получится уравненіе, вида $ax=b$. 4) Освободить неизвѣстное $x$ отъ предстоящаго множителя, раздѣливъ на него обѣ части уравненія. Послѣ всего этого, неизвѣстная $x$ опредѣлится совершенно, выразится во всѣхъ количествахъ данныхъ.

*Примѣръ.* Разрѣшить уравненіе

$$\frac{4}{5}x-3=5+\frac{2}{3}x.$$

Приведемъ всѣ члены къ общему знаменателю:

$$\frac{12x-45}{15}=\frac{75+10x}{15}.$$

Отбросимъ общій знаменатель; потому что двѣ равныя дроби, съ равными знаменателями, должны имѣть равныхъ числителей:

$$12x-45=75+10x.$$

Перенесемъ неизвѣстные члены въ первую часть уравненія съ противными знаками, а извѣстные во вторую:

$$12x-10x=75+45;$$

а, по сокращеніи, будетъ

$$2x=120.$$

Наконецъ, освободимъ неизвѣстное $x$ отъ множителя 2, раздѣливъ обѣ части уравненія на 2, и получится

$$x=60.$$

Такова величина неизвѣстной.

**75.** *Повѣрка.*—Для избѣжанія погрѣшностей, надобно рѣшеніе каждаго уравненія повѣрять, а именно: подставить найденную величину въ данное уравненіе вмѣсто неизвѣстной $x$. Если рѣшеніе вѣрно, то первая часть должна выйти тожественно равною второй.—Такъ мы имѣли уравненіе

$$\frac{4x}{5}-3=5+\frac{2}{3}x,\text{ и нашли } x=60;$$

подставимъ 60 на мѣсто $x$, получится

$$\frac{4}{5}\cdot 60-3=5+\frac{2}{3}\cdot 60,\text{ или}$$

$$4.12-3=5+2.20,$$

$$45=45.$$

Отсюда заключаемъ, что рѣшеніе было сдѣлано вѣрно.

*Примѣръ.* Рѣшить уравненіе:

$$x-2px+3q^2=3p^2q^2-p^2x.$$

Здѣсь нѣтъ дробей; а потому перенесемъ тотчасъ члены съ неизвѣстною $x$ въ первую часть уравненія, а члены извѣстные во вторую часть съ противными знаками:

$$x-2px+p^2x=3p^2q^2-3q^2.$$

Вынесемъ общихъ множителей $x$ и $3q^2$ за скобки:

$$x(1-2p+p^2)=3q^2(p^2-1).$$

Раздѣлимъ обѣ части на многочленъ $1-2p+p^2$, помножающій неизвѣстную $x$, получится

$$x=\frac{3q^2(p^2-1)}{1-2p+p^2}=\frac{3q^2(p^2-1)}{(p-1)^2},\text{ или}$$

$$x=\frac{3q^2(p+1)}{p-1}.$$

*Примѣръ.* Рѣшить уравненіе:

$$1-\frac{(3x+a)}{4x-b}=\frac{4a}{8b-a}.$$

Приведемъ сперва къ общему знаменателю, и отбросимъ его:

$$20bx-5b^2-15bx-5ab-4ax+ab+3ax+a^2=16ax-4ab$$

Перенесемъ всѣ неизвѣстные члены въ первую часть уравненія, а всѣ извѣстные во вторую, и сократимъ, найдется:

$$5bx-17ax=5b^2-a^2.$$

Вынесемъ общій множитель $x$ внѣ скобокъ:

$$(5b-17a)x=5b^2-a^2;$$

Наконецъ, раздѣлимъ обѣ части на $5b-17a$, получится

$$x=\frac{5b^2-a^2}{5b-17a}.$$

*Примѣры для упражненія:*

1) $$(a-x)^2-2(a-b)x+x^2=\frac{(6x+b)}{3}.x;$$

найдется $x=\frac{3a^2}{12a-3b}$.

2) $$\frac{ab}{(a-x)(b-x)}=\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x};\ x=\frac{ab}{a+b}.$$

3) $$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc};\ x=\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}$$

4) $$\frac{1-a}{2}=\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x(x+1)};\ x=\frac{a+1}{a-1}.$$

5) $$\frac{(8-3x)^2}{1-x}+16=\frac{(9-5x)^2}{1-x}+16x;\ x=0,1.$$

**36.** *Примѣчаніе.*—Надобно различать уравненія отъ *явныхъ равенствъ*. Равенства суть такія выраженія численныя или буквенныя, соединенныя знакомъ $=$, которыя довольно сократить, чтобы получить первую часть тождественно равною второй.

Наприм.

$$63:9=7,$$
$$3a+7a=10a,$$
$$7b-4b+c=3b+c,\ \text{и проч.}$$

суть равенства явныя.

Онѣ отъ уравненій отличаются еще тѣмъ, что, принимая въ нихъ одну букву за неизвѣстную, а всѣ прочія за количества данныя, мы не можемъ отсюда найти эту неизвѣстную: она всегда получится равна только самой себѣ и ни отъ чего независима.

Но поелику равенства, по формѣ своей, сходны съ уравненіями, то онѣ нерѣдко могутъ быть смѣшиваемы съ уравненіями. Наприм.

$$\frac{x}{3}\left(3-\frac{2}{x}\right)=x-\frac{2}{3}$$

весьма походитъ на уравненіе: но стоитъ только дѣйствительно помножить $\frac{x}{3}$ на $3-\frac{2}{x}$ (или какъ ни есть сократить), то найдется:

$$x-\frac{2}{3}=x-\frac{2}{3}\text{ , откуда}$$

$$x-x=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\text{, или }0=0.$$

Неизвѣстная $x$ осталась неопредѣленною.

### ИЗСЛѢДОВАНІЕ РѢШЕНІЯ ОБЩАГО УРАВНЕНІЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ СЪ ОДНОЮ НЕИЗВѢСТНОЮ.

**77.** Самый общій видъ уравненія первой степени съ одною неизвѣстною тотъ, когда члены неизвѣстные и члены извѣстные находятся въ обѣихъ частяхъ его, а именно:

$$ax+b=cx+d;$$

Изъ этого уравненія находимъ

$$x=\frac{d-b}{a-c}.$$

Здѣсь неизвѣстная $x$ зависитъ отъ частныхъ величинъ $a$, $b$, $c$, $d$; она измѣняется съ перемѣною сихъ послѣднихъ. Давая всевозможно различныя величины этимъ количествамъ, можно открыть всѣ измѣненія, какія неизвѣстная $x$ способна принимать на себя, и ея переходы изъ однихъ состояній въ другія. Разсмотрѣніе таковыхъ измѣненій называется *изслѣдываніемъ*, которое мы и приложимъ къ выводу

$$x=\frac{d-b}{a-c}.$$

Прежде всего открывается намъ: 1) что всякое уравненіе первой степени съ одною неизвѣстною имѣетъ только одно рѣшеніе; потому что $\frac{d-b}{a-c}$ даетъ одно число.

2) Рѣшеніе найдется положительное, когда будетъ въ одно время $d>b$, $a>c$, либо $d<b$ и $a<c$; это очевидно.

3) $x=0$, если $d=b$, но $a$ не равно $c$.

4) Рѣшеніе получится отрицательное, когда $d>b$ и $a<c$, либо когда $d<b$, $a>c$.

5) Рѣшеніе выйдетъ $x=\frac{m}{0}$, если $d-b=m$, и $a=c$.—Этотъ символическій выводъ показываетъ, что $x=\frac{m}{0}$ долженъ быть *безконечно большимъ*, и что въ этомъ случаѣ уравненію нельзя удовлетворить ни какими конечными величинами. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ себѣ, что разность $a-c$ постепенно уменьшается, напр. положимъ $a-c=\frac{1}{10}$; тогда

$$x=\frac{d-b}{a-c}=\frac{m}{\frac{1}{10}}=10m;$$

$$\text{для } a-c=\frac{1}{1000},\ x=1000m;$$

$$\text{для } a-c=\frac{1}{1000000},\ x=1000000m, \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно, если $a-c$ сдѣлается чрезмѣрно мало, то $x$ сдѣлается чрезмѣрно великъ; а потому, когда $a-c=0$, то есть, безконечно мало, то $x=\frac{m}{0}$ долженъ сдѣлаться безконечно-великъ.

И такъ, всякое количество, раздѣленное на нуль, равняется *безконечности*. Такое количество изображается знакомъ ∞, и пишется:

$$x=\frac{m}{0}=\infty\,.$$

Отсюда обратно заключаемъ: a) *что безконечность, помноженная на нуль, представляетъ всякую величину конечную,*

$$m=\infty\times 0;$$

b) Что *всякая величина конечная, раздѣленная на безконечно большую, даетъ нуль въ частномъ числѣ;* ибо изъ предыдущаго имѣемъ

$$\frac{m}{\infty}=0.$$

Выраженіе $\frac{m}{0}$ показываетъ, что *въ данномъ уравненіи находится какая-нибудь несообразность, несовмѣстность, и вообще нелѣпое требованіе.* И дѣйствительно, если въ

$$ax+b=cx+d$$

возмемъ $a=c$, то должно быть и $b=d$, или $d-b=0$. А какъ мы, принявъ $a=c$, хотимъ, чтобы было $d-b=m$, а не равно нулю; то рѣшеніе $x=\frac{m}{0}$ и обнаружило, что, при такомъ условіи, нельзя удовлетворить уравненію ни какими конечными величинами, потому что это условіе невозможно.

6) Выводъ $x=\frac{d-b}{a-c}$ обратится въ $\frac{0}{0}$, если возмемъ $d=b$ и $a=c$. Это символическое рѣшеніе означаетъ *неопредѣленность*, т. е. что, при такомъ предположеніи, можно удовлетворить данному уравненію всякими величинами, взятыми на мѣсто $x$. И въ самомъ дѣлѣ, тогда

$$ax+b=cx+d=ax+b$$

представляетъ не уравненіе, но тождественное равенство двухъ выраженій, которое тѣмъ и отличается отъ уравненія, что изъ него нельзя опредѣлить $x$; потому что здѣсь всякая величина, взятая на мѣсто $x$, удовлетворяетъ равенству.

**78.** Однако же не надобно всегда заключать, что уравненіе допускаетъ неопредѣленность, то есть, всѣ возможныя числа для $x$, когда получится выводъ

$x=\frac{0}{0}$. Это обстоятельство можетъ произойти еще и тогда, когда въ числителѣ и знаменателѣ дробнаго вывода находится общій множитель, который при частномъ предположеніи обращается въ нуль, и въ то же время обращаетъ $x$ въ $\frac{0}{0}$. Поэтому, надобно стараться сократить дробный выводъ, найденный для $x$, выключивъ всѣ множители, общіе его числителю и знаменателю, и тогда дѣлать желаемое предположеніе.

Наприм. выводъ $x=\frac{a^3-ab^2}{a-b}$, при положеніи $a=b$, обращается въ $\frac{0}{0}$ только потому, что эта дробь не сокращена, что въ ея числителѣ и знаменателѣ находится множитель $a-b$; ибо,

$$x=\frac{a^3-ab^2}{a-b}=\frac{a(a^2-b^2)}{a-b}=\frac{a(a+b)(a-b)}{a-b}.$$

Сдѣлавъ сокращеніе, останется $x=a(a+b)$, и тогда, для $a=b$, найдется $x=2a^2$, рѣшеніе опредѣленное.

*Примѣръ*. Разрѣшивъ уравненіе (**35**)

$$x-2px+3q^2=3p^2q^2-p^2x,$$

мы нашли $x=\frac{3q^2(p^2-1)}{p^2-2p+1}$.

Полагая $p=1$, окажется $x=\frac{0}{0}$ именно отъ того, что дробное выраженіе здѣсь не сокращено, и содержитъ въ числителѣ и знаменателѣ общій множитель $p-1$; потому что

$$x=\frac{3q^2(p^2-1)}{p^2-2p+1}=\frac{3q^2(p+1)(p-1)}{(p-1)^2}=\frac{3q^2(p+1)}{p-1}.$$

Въ сокращенную дробь подставимъ $p=1$, найдемъ

$$x=\frac{3q^2(p+1)}{0}=\frac{6q^2}{0}=\infty,$$

рѣшеніе хотя символическое, но все же опредѣленное.

*Примѣръ*. $x=\frac{18a^2c-12abc+2b^2c}{3a^3f-81b^3f}$,

при положеніи $b=3a$, обращается въ $\frac{0}{0}$; а потому надобно попробовать сократить этотъ выводъ. Сначала найдется

$$x=\frac{2c(9a^2-6ab+b^2)}{3f(b^3-27a^3)};\ \text{потомъ}$$

$$x=\frac{2c(3a-b)^2}{3f(b^2+3ab+9a^2)(b-3a)}$$

$$=\frac{-2c(3a-b)}{3f(b^2+3ab+9a^2)}.$$

Теперь положимъ $b=3a$, получится $x=0$, рѣшеніе опредѣленное.

## ЗАДАЧИ.

**79.** *Задачею* въ Алгебрѣ называется всякой вопросъ, въ которомъ предлагаются условія, словесно выражающія связь (отношеніе, зависимость) между нѣкоторыми количествами данными, и нѣкоторыми неизвѣстными, и требуется найти послѣднія посредствомъ первыхъ, то есть, разрѣшить задачу.

Но, если рѣшеніе задачи состоитъ въ томъ, чтобы выразить ея неизвѣстныя количества посредствомъ надлежащаго совокупленія количествъ данныхъ, то само собою видно, что связь между количествами данными и неизвѣстными задачи должна изобразиться однимъ или нѣсколькими уравненіями, изъ которыхъ тѣ неизвѣстныя и найдутся; онѣ будутъ удовлетворять уравненіямъ, т. е. всѣмъ требуемымъ условіямъ задачи, и потому будутъ ея рѣшеніями.

Изъ сего видно, что рѣшеніе алгебрическаго вопроса производится двумя дѣйствіями: 1) *приведеніемъ задачи въ уравненіе,* и 2) *разрѣшеніемъ этого уравненія.*

**80.** Разрѣшеніе уравненія первой степени съ одною неизвѣстною не имѣетъ никакихъ трудностей; но приведеніе задачи въ уравненіе не имѣетъ опредѣленныхъ правилъ; оно требуетъ навыка и остроты ума. Только передѣлавъ многіе примѣры, можно приучиться довольно скоро угадывать, какія въ данномъ вопросѣ находятся количества данныя и неизвѣстныя, сколько ихъ; какія, по условіямъ задачи, находятся между ними отношенія явныя или неявныя, и какими алгебрическими дѣйствіями надлежитъ выразить сіи отношенія, чтобы составилось уравненіе. Впрочемъ, во всѣхъ курсахъ Алгебры, для приведенія задачи въ уравненіе, совѣтуютъ пользоваться слѣдующимъ общимъ правиломъ:

Надобно отыскать въ задачѣ всѣ величины данныя, и всѣ величины искомыя, и, означивъ сіи послѣднія буквами $x$, $y$, $z$,..., предположить, что задача будто рѣшена, что эти неизвѣстныя найдены. Послѣ того надобно, посредствомъ алгебрическихъ знаковъ, выразить всѣ отношенія, всѣ дѣйствія надъ количествами данными и искомыми, означенныя въ задачѣ, какія должно произвести, чтобы повѣрить величины неизвѣстныхъ: тогда уравненіе составится само собою; останется только разрѣшить его.

Но, чтобы сдѣлать въ этомъ навыкъ, разсмотримъ рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ.

**81.** Задача 1. *Найти два числа, которыхъ сумма $a$, и разность $b$, извѣстны.*

Пусть $x$ большее число, то $a-x$ будетъ число меньшее. Разность между ними $=b$; посему

$$x-(a-x)=b, \text{ или}$$
$$x-a+x=b,$$
$$2x=a+b$$
$$x=\frac{(a+b)}{2} \text{ большее число.}$$

$$\text{Меньшее число } = a-x = a-\frac{(a+b)}{2}$$
$$=\frac{a-b}{2}.$$

Итакъ, *большее число равно полусуммѣ, а меньшее полуразности данныхъ чиселъ $a$ и $b$*. Наприм. если $a=36$, $b=10$, то

$$\text{большее число } =\frac{36+10}{2}=23,$$
$$\text{меньшее } \ldots\ldots =\frac{36-10}{2}=13.$$

Эти числа удовлетворяютъ вопросу; потому что сумма $x=23+13=36$, а разность $23-13=10$.

**Задача 2.**—*Найти число, которое, бывъ сложено съ своею половиною, и его тремя пятыми, составило бы 105.*

Пусть это число $=x$, то

$$\text{его половина } =\frac{1}{2}x,$$
$$\text{его три пятыя } =\frac{3}{5}x,$$

$$\text{сумма } =x+\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}x=105.$$

Отсюда, $10x+5x+6x=1050$, или

$$21x=1050,$$
$$x=50.$$

Таково искомое число. И въ самомъ дѣлѣ,

$$50+\frac{1}{2}.50+\frac{3}{5}.50=105, \text{ или}$$
$$50+25+30=105,$$

**Задача 3.**—*Отецъ въ духовномъ завѣщаніи оставилъ $\frac{1}{3}$ имѣнія сыну, $\frac{2}{5}$ имѣнія дочери, а остальныя 3000 руб. серебр. вдовѣ, матери ихъ; спрашивается, какъ велико это имѣніе, и по скольку должны получить сынъ и дочь?*

Пусть $x$ все имѣніе: очевидно, что если взять одну треть имѣнія и его двѣ пятыя доли, да 3000 рублей, то сумма должна составить все имѣніе; посему,

$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}x+3000=x.$$

Освободивъ отъ знаменателей, получимъ:

$$5x+6x+45000=15x; \text{ отсюда}$$
$$45000=4x, \text{ и}$$
$$x=11250 \text{ руб. серебр.}$$

Таково все имѣніе, изъ котораго

сынъ получитъ $\frac{1}{3}x=3750$ руб.

дочь ......... $\frac{2}{5}x=4500$ руб.

**Задача 4.** — *У одного крестьянина спросили, сколько лѣтъ его тремъ сыновьямъ? Онъ отвѣчалъ: имъ всѣмъ вмѣстѣ 59 лѣтъ, только средній вдвое старше младшаго и четырьмя годами моложе старшаго.* Узнать, сколько же лѣтъ каждому?

Пусть $x$ лѣта младшаго сына,
то $2x$ – средняго –
$2x+4$ – старшаго –

$x+2x+2x+4=59$ лѣтъ всѣмъ имъ; отсюда
$5x+4=59$,
$5x=55$, $x=11$.

И такъ, младшему сыну 11 годовъ; стало-быть среднему $2x=22$ года, а старшему $2x+4=26$.

**Задача 5.**—*Сколько намъ лѣтъ? спрашивалъ сынъ отца своего. Угадай, сказалъ отецъ: я теперь втрое старше тебя, а чрезъ 10 лѣтъ буду только вдвое старше.*

Пусть $x$ лѣта сына, то $3x$ лѣта отца; послѣ 10 годовъ сынъ будетъ имѣть
$x+10$ лѣтъ,
а отецъ $3x+10$ – , и тогда будетъ
$3x+10=2(x+10)$. Отсюда,
$3x=2x+10$
$x=10$.

И такъ, сыну теперь 10 лѣтъ, а отцу $3x=30$ лѣтъ.

**Задача 6.**—*Куплено въ лавку сукно по 15 руб. серебромъ за каждые 5 аршинъ, а продано изъ лавки по 30 руб. сер. за 8 аршинъ, и при этомъ выручено барыша 300 руб. серебр.; спрашивается, сколько же было этого сукна?*

Пусть было $x$ аршинъ всего сукна.

1 аршинъ при покупкѣ стоилъ $\frac{15}{5}=3$ руб. сер.;

каждый аршинъ проданъ по $\frac{30}{8}=\frac{15}{4}$ руб.

Отъ каждаго аршина получено барыша:

$$\frac{15}{4}-3=\frac{3}{4}\text{ руб. сер.,}$$

а отъ $x$ аршинъ всего сукна 300 рублей.

Чтобы найти $x$, составляю пропорцію:

$$1 : x = \frac{3}{4} : 300\text{; откуда}$$

$$x = 400\text{ аршинъ.}$$

Задача 7.—*Отецъ даритъ сыну въ каждую недѣлю опредѣленное число денегъ на мелочные расходы; сынъ тратитъ по $\frac{2}{3}$ оныхъ денегъ въ теченіи 30 недѣль, по $\frac{3}{4}$ въ 20 недѣль, и всѣ деньги только въ двѣ недѣли. По прошествіи 52 недѣль оказалось, что онъ изъ оставшихся денегъ сберегъ 30 рублей. Спрашивается сколько онъ получалъ отъ отца каждую недѣлю, и по скольку тратилъ въ разные сроки?*

Пусть $x$ деньги, получаемыя сыномъ въ каждую недѣлю; то $52x$ будутъ всѣ деньги, какія онъ получилъ въ 52 недѣли.

Сынъ тратитъ сперва по $\frac{2}{3}x$ въ недѣлю, слѣдовательно $30.\frac{2}{3}x$ въ 30 недѣль; потомъ онъ тратитъ по $\frac{3}{4}$ въ недѣлю, слѣдовательно $20.\frac{3}{4}x$ въ 20 недѣль; наконецъ, онъ истрачиваетъ всѣ $2x$ въ остальныя двѣ недѣли.

Теперь, если вычесть всѣ потраченныя деньги изъ $52x$, которыя онъ получилъ за все время, то въ остаткѣ должно быть 30 рублей. И такъ,

$$52x-30.\frac{2}{3}x-20.\frac{3}{4}x-2x=30\text{, или}$$

$$52x-20x-15x-2x=30\text{, или}$$

$$15x=30\text{: откуда}$$

$$x=2.$$

Слѣдовательно сынъ получалъ по 2 руб. серебромъ въ недѣлю. Онъ тратилъ

въ 30 недѣль по $\frac{2}{3}x=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ рубля;

потомъ по $\frac{3}{4}x=\frac{6}{4}=1\frac{1}{2}$ рубля въ 20 недѣль.

Задача 8. — *Подрядчикъ нанялъ работника съ такимъ условіемъ, чтобы ему платить 45 коп. серебромъ за каждый день его работы, и брать съ него по 20 коп. сер. за всякій день, въ который онъ не будетъ работать. По прошествіи 60 дней, оказалось, что работнику надобно выдать 14 руб. серебромъ. Спрашивается: сколько дней онъ работалъ, и сколько не работалъ?*

Положимъ, что онъ работалъ $x$ дней,

то не работалъ $60-x$ дней.

За $x$ дней работы онъ долженъ получить $45x$ копѣекъ; за $60-x$ дней неработы у него надобно вычесть $20(60-x)$ копѣекъ. Вычетши послѣднія деньги изъ первыхъ, мы должны получить выданную ему плату 14 рублей. Здѣсь рубли надобно раздробить въ копѣйки, потому что въ уравненіи должны быть количества однородныя. И такъ,

$$45x-20(60-x)=1400 \text{ коп., или}$$
$$45x-1200+20x=1400; \text{ отсюда}$$
$$x=40.$$

Слѣдовательно, работникъ работалъ 40 дней, а не работалъ $60-x=20$ дней.

**Задача 9.**—*Нѣсколько работниковъ получаютъ 120 рублей; если бы ихъ было четырьмя меньше, то каждый изъ нихъ получилъ бы втрое болѣе. Спрашивается: сколько же было всѣхъ работниковъ, и сколько каждый получилъ?*

Пусть $x$ число работниковъ.

Каждый изъ нихъ получаетъ $\frac{120}{x}$ рублей.

Если бы ихъ было четырьмя менѣе, то есть, $x-4$, тогда каждый получилъ бы $\frac{120}{x-4}$, и эти деньги были бы въ 3 раза больше $\frac{120}{x}$. Слѣдовательно,

$$\frac{120}{x-4}=3.\frac{120}{x}; \text{ отсюда}$$
$$x=3(x-4)=3x-12, \text{ и}$$
$$x=6 \text{ работниковъ.}$$

Каждый изъ нихъ получилъ $\frac{120}{6}=20$ рублей.

**Задача 10.**—*Раздѣлить данное число $a$ на двѣ части, которыя бы относились между собою, какъ $m$ къ $n$.*

Пусть $x$ первая часть, то вторая часть будетъ $=a-x$. По условію задачи,

$$x:a-x=m:n; \text{ отсюда}$$
$$nx=m(a-x)=am-mx, \text{ или}$$
$$(m+n)x=am, \text{ и}$$
$$x=\frac{am}{m+n}, \text{ первая часть.}$$

Вторая часть $=a-x=a-\frac{am}{m+n}=\frac{an}{m+n}$.

Сумма ихъ $=\frac{am+an}{m+n}=a$.

**Задача 11.**—*Раздѣлить число $a$ на три части, кои бы относились между собою, какъ $m:n:p$.*

По этому условію, перв. час. + втор. час. + трет. час. $=a$; сверхъ того, перв. час. : втор. час. : трет. час. $=m:n:p$, или

$$\frac{\text{перв. час.}}{m}=\frac{\text{втор. час.}}{n}=\frac{\text{трет. час.}}{p}.$$

Но, въ равныхъ геометрическихъ содержаніяхъ, сумма членовъ предыдущихъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ одинъ изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему; посему,

перв. час. + втор. час. + трет. час. : $m+n+p=$ перв. час. : $m$;

или, $a : m+n+p=$ перв. час. : $m$; отсюда

$$\text{перв. час.}=\frac{am}{m+n+p}.$$

Такимъ же образомъ нашли бы, что

$$\text{втор. час.}=\frac{an}{m+n+p};$$

$$\text{трет. час.}=\frac{ap}{m+n+p}.$$

Сумма этихъ частей, очевидно, $=a$.

Эта задача заключаетъ въ себѣ алгебрическое рѣшеніе *правила товарищества.*

Задача 12. — *Нѣсколько наслѣдниковъ* A, B, C,... *получаютъ имѣніе. Въ духовномъ завѣщаніи сказано: чтобы* A *получилъ 1000 рублей и* $\frac{1}{6}$ *долю остатка; чтобы* B *получилъ 2000 руб. и* $\frac{1}{6}$ *остатка, и т. д. По окончаніи раздѣла, оказалось, что всѣ они получили поравну. Спрашивается: какъ велико было это имѣніе, и сколько было всѣхъ наслѣдниковъ?*

Этотъ вопросъ допускаетъ, повидимому, нѣсколько неизвѣстныхъ; но условіе, что *всѣ наслѣдники получили поравну*, дѣлаетъ его зависимымъ отъ одного уравненія и одной неизвѣстной.

Пусть искомое имѣніе $=x$. Когда A возметъ 1000 руб., то останется $x-1000$; онъ же возметъ и $\frac{1}{6}$ долю остатка, слѣдовательно,

$$\text{A получитъ}\quad 1000+\frac{x-1000}{6}=\frac{5000+x}{6};$$

Когда B возметъ 2000 рублей, то останется:

$$x-\frac{(5000+x)}{6}-2000=\frac{5x-17000}{6};$$

онъ же получитъ и $\frac{1}{6}$ этого остатка; слѣдовательно,

$$\text{B получитъ}\quad 2000+\frac{5x-17000}{36}=\frac{55000+5x}{36}.$$

А какъ всѣ наслѣдники должны получить поравну, то

$$\frac{55000+5x}{36}=\frac{5000+x}{6},\text{ или}$$

$$55000+5x=30000+6x;\text{ откуда}$$

$$x=25000\text{ рублей.}$$

Таково все раздѣляемое имѣніе. Каждый наслѣдникъ получитъ столько, сколько получаетъ первый изъ нихъ, то есть, $\frac{5000+x}{6}=\frac{30000}{6}=5000$ рублей. Число же наслѣдниковъ найдется, раздѣливши все имѣніе на часть одного, а именно:

$$\frac{25000}{5000}=5 \text{ наслѣдниковъ.}$$

Разрѣшимъ теперь этотъ же вопросъ по общему способу, означая данныя числа буквами. Пусть $x$ все раздѣляемое имѣніе. Положимъ, что A беретъ изъ имѣнія $a$ рублей и $\frac{1}{n}$ часть остатка; что B беретъ $b$ рублей изъ того, что осталось послѣ A, и $\frac{1}{n}$ остатка, и т. д. Тогда часть перваго будетъ

$$a+\frac{x-a}{n}=\frac{a(n-1)+x}{n}.$$

Когда B возметъ $b$ рублей, то весь остатокъ будетъ

$$x-\left[\frac{a(n-1)+x}{n}\right]-b=\frac{nx-a(n-1)-x-bn}{n}$$

$$=\frac{(n-1)x-(n-1)a-bn}{n}$$

$$=\frac{(n-1)(x-a)-bn}{n}.$$

Онъ же беретъ и $\frac{1}{n}$ сего остатка; слѣдовательно вся часть наслѣдника B будетъ

$$b+\frac{(n-1)(x-a)-bn}{n^2}=\frac{bn(n-1)+(n-1)(x-a)}{n^2}$$

$$=\frac{(x-a+bn)(n-1)}{n^2}.$$

Части, полученныя наслѣдниками, должны быть равны; посему,

$$\frac{a(n-1)+x}{n}=\frac{(x-a+bn)(n-1)}{n^2}, \text{ откуда}$$

$$an(n-1)+nx=(x-a+bn)(n-1)$$

$$=(n-1)x+(bn-a)(n-1).$$

Отсюда, наконецъ, $x=(bn-an-a)(n-1)$.

Таково все раздѣляемое имѣніе.

*Участокъ наслѣдника* A $=\frac{a(n-1)+x}{n}=$

$$=\frac{a(n-1)+(bn-an-a)(n-1)}{n}=(b-a)(n-1).$$

А какъ части всѣхъ наслѣдниковъ равны, то число наслѣдниковъ найдется, раздѣливъ все имѣніе на участокъ одного; и выйдетъ:

$$\text{число наслѣдниковъ }=\frac{(bn-an-a)(n-1)}{(b-a)(n-1)}$$

$$=n-\frac{a}{b-a}.$$

**82**. Рѣшенія, получаемыя изъ буквенныхъ уравненій, называются *формулами*. Всякая же формула представляетъ собою модель, образецъ рѣшенія всѣхъ частныхъ задачъ, подобныхъ той, изъ которой она выведена. Такимъ образомъ

$$x=(bn-an-a)(n-1) \text{ есть формула.}$$

Она служитъ къ тому, что даетъ намъ рѣшенія для всякихъ частныхъ вопросовъ того же рода, чрезъ одно подстановленіе цифръ на мѣсто буквъ. Напримѣръ, если первый наслѣдникъ получаетъ 1000 рублей и $\frac{1}{6}$ остатка, а второй 2000 рублей и также $\frac{1}{6}$ остатка; то, положивъ $a=1000$, $b=2000$, $n=6$, и подставивъ въ формулу, найдемъ сразу всё раздѣляемое имѣніе,

$$x=(12000-6000-1000)5=25000 \text{ рублей.}$$

Выводомъ общихъ формулъ Алгебра безпредѣльно превышаетъ обыкновенную Ариѳметику, гдѣ нѣтъ общихъ формулъ, а только показываются нѣкоторыя правила, руководствующія къ разрѣшенію самыхъ простыхъ задачъ того или другаго рода.

**83**. *Рѣшенія задачъ символическія, отрицательныя*, и проч.

Рѣшенія различныхъ задачъ, выводимыя изъ общихъ формулъ, бываютъ всякаго вида: положительныя — конечныя и опредѣленныя, также отрицательныя, и рѣшенія вида $\frac{a}{0}$ и $\frac{0}{0}$.

Есть много случаевъ, гдѣ рѣшенія положительныя и отрицательныя удовлетворяютъ требованіямъ задачи (наприм. при опредѣленіи координатъ для разныхъ точекъ въ Аналитической Геометріи). Но, если вопросъ удовлетворяется только рѣшеніями цѣлыми, положительными и конечными, то всякое рѣшеніе другаго вида будетъ невозможное, противное здравому смыслу, и показывающее, что въ задачѣ есть условія ложныя, противорѣчивыя, требованія нелѣпыя, неисполнимыя въ настоящемъ ея смыслѣ.

**Примѣръ**. *Работникамъ за переносъ мебели дано 5 руб. серебромъ; изъ этихъ денегъ каждый работникъ получилъ 80 коп. серебр.; найти число работниковъ.*

Пусть $x$ число работниковъ. Каждый получилъ 80 копѣекъ: слѣдовательно всѣ получили $80x=5$ руб.$=500$ копѣекъ. Отсюда, $x=\frac{500}{80}=6\frac{1}{4}$.

Рѣшеніе положительное, но невозможное потому, что будто было 6 съ $\frac{1}{4}$ работниковъ.

**84**. Рѣшеніе $\frac{a}{0}$ представляетъ *безконечно большое количество*, а $\frac{0}{0}$ показываетъ *неопредѣленность*, какъ видѣли выше (**77**, 5, 6). Первое изъ нихъ показываетъ, что уравненіе не можетъ быть удовлетворено ни какими величи нами конечными, взятыми на мѣсто $x$, что въ задачѣ есть какія нибудь требованія невозможныя, условія нелѣпыя; второе же, то есть, $\frac{0}{0}$, что уравненіе удовлетворяется всякими величинами количества $x$.

**85.** *Рѣшенія отрицательныя* хотя вполнѣ удовлетворяютъ уравненіямъ, но часто вовсе не даютъ удовлетворительнаго отвѣта на требованія задачи; а потому рѣшаютъ ее не въ прямомъ смыслѣ, и показываютъ, что въ условіяхъ задачи не только есть требованія противныя здравому смыслу, но и какую надобно сдѣлать въ ней перемѣну, чтобы рѣшеніе вышло положительное.

**Примѣръ.** *Найти число, которое надобно придать къ $b$, чтобъ получить сумму $a$.*

Пусть это число $x$. По условію задачи,

$$b+x=a, \text{ откуда}$$

$$x=a-b.$$

Если $a>b$, то $x=+$, и задача рѣшается въ прямомъ ея смыслѣ. Но когда возмется $a<b$, то получится $x=-$. Наприм. если $a=10$, $b=16$, то

$$x+16=10,$$

$$x=10-16=-6.$$

Это рѣшеніе, не имѣющее смысла, произошло отъ нелѣпаго условія, которое въ уравненіи очевидно. Нельзя требовать, чтобы 16, сложенное съ чѣмъ нибудь, составило 10; оно и безъ того больше 10.

Однакожъ это рѣшеніе показываетъ, что смыслъ задачи нужно перемѣнить, взявъ неизвѣстную съ знакомъ —; потому что изъ

$$x=-6, \text{ имѣемъ } -x=6;$$

то есть, что рѣшеніе сдѣлается положительнымъ, если $x$ возмется отрицательнымъ въ самыхъ условіяхъ задачи. Тогда уравненіемъ будетъ

$$-x+16=10, \text{ или } 16-x=10,$$

и смыслъ задачи будетъ такой: найти число, которое надобно вычесть изъ 16, чтобъ получить 10. Въ этомъ случаѣ, найдется $x=6$, рѣшеніе прямо удовлетворяющее условію задачи.

**Задача.** *Отецъ имѣетъ 40 лѣтъ, а сынъ 16, узнать, чрезъ сколько годовъ отецъ будетъ втрое старше сына?*

Положимъ, чрезъ $x$ годовъ: тогда будетъ

отцу $40+x$ годовъ,

а сыну $16+x$, и

$$40+x=3(16+x)=48+3x; \text{ откуда}$$

$$x=-4 \text{ года.}$$

Это непрямое рѣшеніе показываетъ, что въ задачѣ есть какое нибудь условіе невозможное; и въ самомъ дѣлѣ, нельзя, чтобы $40+x$ было равно $48+3x$, потому что $40<48, x<3x$.

Задача будетъ правильною, если въ уравненіи перемѣнимъ знакъ предъ $x$; тогда будетъ

$$40-x=3(16-x),$$

и смыслъ будетъ такой: *отецъ имѣетъ 40 лѣтъ, а сынъ 16; узнать, сколько лѣтъ прошло, когда отецъ былъ втрое старѣе сына?* — и найдется $x=4$ года.

Тогда отцу было $40-x=36$ лѣтъ,
а сыну $16-x=12$ » .

### II. УРАВНЕНІЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ СЪ ДВУМЯ, ТРЕМЯ, И БОЛѢЕ, НЕИЗВѢСТНЫМИ.

**86.** Уравненія, въ которыхъ данныя количества приводятся въ равенство съ другими посредствомъ двухъ или болѣе неизвѣстныхъ, бываютъ: 1) съ корнями постоянными, опредѣленными, одинъ отъ другаго независимыми; 2) и съ корнями непостоянными, неопредѣленными, одинъ отъ другихъ зависимыми. Въ первыхъ находится столько неизвѣстныхъ, сколько дано различныхъ уравненій; а во вторыхъ число неизвѣстныхъ бываетъ менѣе даннаго числа уравненій. Отчего первыя называются иногда *опредѣленными*, а вторыя — *неопредѣленными*, относя эту опредѣленность или неопредѣленность не къ самымъ уравненіямъ, а только къ ихъ корнямъ.

### А. КОГДА ЧИСЛО НЕИЗВѢСТНЫХЪ РАВНО ЧИСЛУ УРАВНЕНІЙ. РѢШЕНІЯ ОПРЕДѢЛЕННЫЯ.

**87.** Уравненія съ двумя, или больше, неизвѣстными только тогда достаточны для опредѣленія всѣхъ ихъ неизвѣстныхъ, когда число неизвѣстныхъ равно числу уравненій. При этомъ надобно наблюдать: 1) чтобъ ни одно изъ данныхъ уравненій не представляло тождества, наприм. $2x-5+3y=3y+2x-5$; 2) чтобы всѣ уравненія были различны, то есть, чтобъ одно уравненіе не было тожественно съ другимъ, не происходило бы изъ другаго чрезъ однообразное увеличеніе или уменьшеніе обоихъ его частей.

Такъ наприм. уравненія:

$$7x-3y=6,$$

$$\frac{7}{3y}=\frac{2}{xy}+\frac{1}{x},$$

$$\frac{7x-9}{1-y}=\frac{6-7x}{y},$$

по видимому, различны, а въ самомъ дѣлѣ онѣ суть видоизмѣненія перваго уравненія чрезъ сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе его членовъ и частей, и представляютъ одно уравненіе, въ чемъ легко увѣриться, стоитъ только освободить ихъ отъ знаменателей и сократить.

По этому, когда дается нѣсколько уравненій, содержащихъ въ себѣ такое же число неизвѣстныхъ, надобно прежде всего привесть ихъ въ простѣйшій, однообразный видъ, освободивъ отъ знаменателей, и исключивъ общихъ множителей въ каждомъ: тогда уравненія тожественныя, если онѣ будутъ, сами собою обнаружатся.

3) Наконецъ, когда уравненія приведены въ простѣйшій видъ, и члены ихъ расположены однообразно, надобно смотрѣть, чтобы онѣ были совмѣстны, не противорѣчивы. Для примѣра, возмемъ уравненія

$$2x-3y=4,$$
$$10x-15y=30;$$

раздѣлимъ второе на общаго множителя 5, получится $2x-3y=6$. Очевидно, что второе уравненіе несовмѣстно съ первымъ, потому что состоитъ съ нимъ въ явномъ противорѣчіи. Такія уравненія совсѣмъ негодятся для опредѣленія неизвѣстныхъ $x$, $y$.

### 1. Уравненія съ двумя неизвѣстными.

**88.** Для разрѣшенія двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными первой степени, надобно сперва каждому изъ нихъ дать общій видъ $ax+by=c$, гдѣ $x$, $y$ суть неизвѣстныя, $a$, $b$, $c$, числа цѣлыя.

Для этого должно освободить уравненія отъ знаменателей, въ каждомъ изъ нихъ перенесть члены съ неизвѣстными въ первую часть уравненія, а извѣстные — во вторую, и сдѣлать всѣ возможныя сокращенія. Потомъ два уравненія, приведенныя уже въ простѣйшій видъ, надобно совокупить между собою такъ, чтобъ исключилась одна изъ извѣстныхъ, и составилось бы одно уравненіе съ одною неизвѣстною, откуда она и опредѣлится. А получивши одну изъ неизвѣстныхъ, легко найдется и другая.

**89.** Способовъ исключенія неизвѣстной изъ данныхъ уравненій находится четыре: 1) способъ подстановленія, 2) способъ сравненія, 3) способъ сокращенія чрезъ сложеніе и вычитаніе, и 4) способъ Безу чрезъ введеніе произвольныхъ множителей.

Пусть данныя уравненія:

$$\frac{5x}{30-6y}-\frac{5}{6}=\frac{y}{10-2y},$$
$$\frac{7x-9}{1-y}=\frac{6-7x}{y}.$$

Первое уравненіе приведется къ общему знаменателю, если помножимъ обѣ части дроби $\frac{5}{6}$ на $5-y$, и обѣ части дроби $\frac{y}{10-2y}$ на 3.

Отбросивъ общій знаменатель $30-6y$, по сокращеніи, получится:

$$1)\qquad 5x+2y=25.$$

Помноживъ обѣ части втораго уравненія, первую на $y$, а вторую на $1-y$, найдемъ сперва

$$7xy-9y=6-7x-6y+7xy;$$

а, по сокращеніи, останется

$$2)\qquad 7x-3y=6.$$

Приложимъ теперь всѣ помянутые способы исключенія къ разрѣшенію этихъ уравненій 1) и 2).

**90.** *По способу подстановленія.* — Будемъ искать неизвѣстную $x$ изъ перваго уравненія, предполагая, будто $y$ данъ, и найденное выраженіе для $x$ подставимъ во второе уравненіе: тогда исключится $x$, и останется одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ $y$, откудо оно и сыщется.

Изъ перваго уравненія имѣемъ:

$$x=\frac{25-2y}{5};$$

это выраженіе подставимъ во 2-е уравненіе на мѣсто $x$; найдется

$$\frac{7(25-2y)}{5}-3y=6,\text{ или}$$

$$175-14y-15y=30;\text{ откуда}$$

$$145=29y,\text{ и}$$

$$y=5.$$

Нашедши $y=5$, подставимъ это въ первое уравненіе $5x+2y=25$: выйдетъ

$$5x+10=25;\text{ откуда}$$

$$x=3.$$

Можно $y=5$ подставить во второе уравненіе $7x-3y=6$; получится

$$7x-15=6,\text{ откуда}$$

$$\text{также }x=3.$$

**91.** *По способу сравненія.* — Надобно освободить одну неизвѣстную $x$ (либо $y$) изъ обоихъ уравненій, предполагая, будто другая извѣстна, и потомъ сравнить между собою два выраженія, найденныя для $x$: тогда исключится $x$, и составится одно уравненіе съ одною неизвѣстною $y$, откуда она и опредѣлится.

Примѣръ тотъ же:

$$5x+2y=25,$$

$$7x-3y=6.$$

Изъ перваго уравненія находимъ

$$x=\frac{25-2y}{5};$$

изъ втораго, $x=\frac{6+3y}{7}$.

Эти выраженія должны быть равны между собою, а потому сравнимъ ихъ:

$$\frac{25-2y}{5}=\frac{6+3y}{7}.$$

Полученное уравненіе, съ одною неизвѣстною $y$, освободимъ отъ знаменателей, и разрѣшимъ:

$$175-14y=30+15y, \text{ или}$$
$$-29y=-145; \text{ откуда}$$
$$y=5.$$

Число 5 подставимъ на мѣсто $y$ въ первое уравненіе $5x+2y=25$, получимъ

$$5x+10=25; \text{ откуда}$$
$$x=3.$$

**92.** *По способу сокращенія чрезъ сложеніе и вычитаніе.* — Надобно въ обоихъ уравненіяхъ сдѣлать равными коефиціенты предъ тою неизвѣстною, которую хотимъ напередъ исключить, помноживъ первое уравненіе на коефиціентъ этой неизвѣстной во второмъ, а второе уравненіе — на коефиціентъ сей же неизвѣстной въ первомъ уравненіи. Получивши оба уравненія съ равными коефиціентами предъ одною неизвѣстною, надобно ихъ сложить, если эти коефиціенты съ различными знаками, либо вычесть одно изъ другаго, если они съ равными знаками: тогда исключится одна неизвѣстная, и получится одно уравненіе съ одною неизвѣстною, которая отсюда и опредѣлится Примѣръ тотъ же:

$$\begin{array}{r|l} 5x+2y=25 & 3 \\ 7x-3y=\ \ 6 & 2 \end{array}$$

Исключимъ сперва неизвѣстную $y$. Коефиціенты этой неизвѣстной суть: 2 въ первомъ и 3 во второмъ; мы сдѣлаемъ ихъ равными, если помножимъ первое на 3, а второе на 2; получатся:

$$\left.\begin{array}{l} 15x+6y=75 \\ 14x-6y=12 \end{array}\right\} \text{сложимъ, потому что } 6y \text{ и } -6y \text{ съ противными знаками.}$$
$$\begin{array}{l} \hline 29x=87; \text{ откуда} \\ \ \ x=3. \end{array}$$

Такимъ же образомъ можно исключить неизвѣстную $x$, чтобы найти $y$. Она имѣетъ коефиціенты 5 и 7; чтобъ сдѣлать ихъ равными, помножимъ первое уравненіе на 7, а второе на 5:

$$\left.\begin{array}{l} 35x+14y=175 \\ 35x-15y=\ 30 \end{array}\right\} \text{вычтемъ второе изъ перваго:} \qquad \begin{array}{r} 35x+14y=\ 175 \\ -35x+15y=-30 \\ \hline 29y=\ 145 \\ y=5\ (*). \end{array}$$

---

*) Этотъ способъ исключенія неизвѣстной ничѣмъ не разнится отъ способа чрезъ раздѣленіе одного уравненія на другое безъ остатка. Въ самомъ дѣлѣ, данныя уравненія можно написать такъ:

$$5x+2y-25=0.$$
$$7x-3y-\ 6=0.$$

Способъ исключенія чрезъ сложеніе и вычитаніе особенно выгоденъ въ тѣхъ случаяхъ, когда коефиціенты одной и той же неизвѣстной бываютъ *кратными одинъ другаго*, или *равными*.

*Примѣръ:*

$$3x-4y=8,$$
$$6x+y=25.$$

Здѣсь коефиціенты предъ $x$, и предъ $y$, суть кратные одинъ другаго; а потому, для исключенія $y$, довольно помножить второе уравненіе на 4 и сложить съ первымъ:

$$\begin{array}{l} 3x-4y=8, \\ \underline{24x+4y=100} \\ 27x=108, \text{ отсюда } x=4. \end{array}$$

А для исключенія $x$, и опредѣленія $y$, довольно помножить первое данное уравненіе на 2, и вычесть изъ втораго:

$$6x-8y=16,$$
$$6x+y=25.$$

Вычтемъ верхнее изъ нижняго, получится

$$9y=9;\ \text{откуда } y=1.$$

Способъ этотъ дѣлается еще проще, когда коефиціенты одинакихъ неизвѣстныхъ равны.

**Примѣръ.** *Найти два числа, коихъ сумма* $=a$, *и разность* $=b$.

Пусть первое число $x$, второе $y$; то должно быть

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} x+y=a \\ x-y=b \end{array}\right| \text{сложимъ} \\ \hline 2x=a+b \\ x=\dfrac{a+b}{2}=\text{ первое число.} \end{array}$$

А чтобъ найти $y$, возмемъ опять

$$\left.\begin{array}{r} x+y=a \\ x-y=b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{вычтемъ нижнее} \\ \text{изъ верхняго} \end{array} \left| \begin{array}{r} x+y=a \\ -x+y=-b \\ \hline 2y=a-b \\ y=\dfrac{a-b}{2}. \end{array}\right.$$

---

Теперь раздѣлимъ первое уравненіе на второе; а чтобы не имѣть дробей въ частномъ, то помножимъ первое на коефиціентъ 7 предъ $x$:

$$\begin{array}{r|l} 35x+14y-175 & 7x-3y-6 \\ \cline{2-2} -35x+15y+30 & 5 \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{r}{29y-145=0.} & \end{array}$$

Остатокъ долженъ быть равенъ нулю, потому что дѣлимое и дѣлитель равны нулю. Изъ этого остатка нахожу

$$y=\frac{145}{29}=5.$$

**93**. *По способу Безу.* — Надобно помножить одно изъ данныхъ уравненій на произвольное неопредѣленное число $m$; потомъ, изъ этого уравненія вычесть второе. Получится одно уравненіе съ двумя неизвѣстными и третьею произвольною неопредѣленною величиною $m$, которую мы ввели, и которою можемъ располагать какъ намъ угодно. Теперь, чтобъ исключить $y$ и опредѣлить $x$, положимъ весь алгебрическій коефиціентъ предъ $y$ равнымъ нулю: тогда получатся два простѣйшія уравненія съ $x$ и $m$, изъ которыхъ сперва найдется $m$, а потомъ $x$.

Возмемъ самый общій примѣръ:

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right| \begin{array}{l} m \\ , \end{array}$$

въ которомъ $a'$, $b'$, $c'$ различны отъ $a$, $b$, $c$. Помножимъ первое на произвольное число $m$, и вычтемъ изъ него второе, выйдетъ:

$$(am-a')x+(bm-b')y=cm-c'.$$

Въ этомъ уравненіи хотя двѣ неизвѣстныя; но за то находится произвольное число $m$, которое состоитъ въ нашемъ распоряженіи.

Чему бы мы ни положили $m$ равнымъ, мы ничего не перемѣнимъ въ задачѣ, потому что на него помножено все первое уравненіе. Для исключенія $y$, надобно $m$ взять такимъ, чтобы коефиціентъ $bm-b'$ обратился въ нуль. Тогда будемъ имѣть:

$$bm-b^1=0, \text{ и } (am-a')x=cm'-c', \text{ откуда}$$

$$x=\frac{cm-c'}{am-a'}.$$

А изъ условнаго уравненія, $bm-b'=0$, находимъ

$$m=\frac{b'}{b};$$

слѣдовательно, $$x=\frac{c.\frac{b'}{b}-c'}{a.\frac{b'}{b}-a'}=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}.$$

Такимъ же образомъ можемъ исключить $x$ и найти $y$; для этого, въ уравненіи

$$(am-a')x+(bm-b')y=cm-c'$$

положимъ $am-a'=0$, и останется:

$$(bm-b')=cm-c', \text{ откуда}$$

$$y=\frac{cm-c'}{bm-b'}.$$

Теперь условное уравненіе $am-a'=0$ другое; изъ него получится и другое значеніе для $m$, а именно:

$$m=\frac{a'}{a};$$

слѣдовательно, $$y=\frac{c.\frac{a'}{a}-c'}{b.\frac{a'}{a}-b'}, \text{ или}$$

$$y=\frac{ca'-ac'}{ba'-ab'}=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Выведенныя нами двѣ формулы:

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},\ y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

суть общія для разрѣшенія всѣхъ уравненій съ двумя неизвѣстными. Мы примѣнимъ ихъ къ рѣшенію уравненій:

$$5x+2y=25$$
$$7x-3y=6.$$

Чтобы прямо получить величины для $x$ и $y$ по означеннымъ формуламъ, должно сравнить данныя численныя уравненія съ общими алгебрическими $ax+by=c,\ a'x+b'y=c'$, и положить:

$$a=5,\ b=2,\ c=25,$$
$$a'=7, b'=-3, c'=6;$$

потомъ подставить эти числа въ формулы, и получится:

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}=\frac{-25.3-2.6}{-5.3-2.7}=\frac{87}{29}=3.$$
$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}=\frac{5.6-25.7}{-5.3-2.7}=-\frac{145}{29}=5.$$

Впрочемъ, при разрѣшеніи численныхъ уравненій, надобно избирать такой способъ, посредствомъ котораго легче и скорѣе можно достигнуть цѣли.

### 2. Уравненія съ тремя, и болѣе, неизвѣстными.

**94.** Всѣ способы, употребляемые для разрѣшенія уравненій съ двумя неизвѣстными, служатъ и для рѣшенія опредѣленныхъ уравненій первой степени съ тремя и болѣе неизвѣстными. Возмемъ три уравненія:

$$\frac{2}{3}x+y-\frac{1}{3}z=2\frac{2}{3},$$
$$5x-6y+3z=15,$$
$$8y-6x+4z=14,$$

Прежде всего надобно освободить ихъ отъ знаменателей, и потомъ сократить, если можно. Здѣсь третье уравненіе дѣлится все на 2; и такъ,

$$1)\quad 2x+3y-z=8,$$
$$2)\quad 5x-6y+3z=15,$$
$$3)\quad 4y-3x+2z=7.$$

а) *Рѣшеніе по способу подстановленія.* — Освободимъ одну какую нибудь неизвѣстную изъ одного уравненія, и ея выраженіе подставимъ въ два другія уравненія: тогда эта неизвѣстная исключится, и останутся два уравненія съ двумя неизвѣстными, изъ которыхъ и найдутся сіи послѣднія такимъ же или другимъ способомъ. Здѣсь проще всего освободить $z$ изъ 1) уравненія:

$$z=2x+3y-8..$$

Подставимъ это выраженіе вмѣсто $z$ во 2) и 3) уравненія:

$$5x-6y+3(2x+3y-8)=15,$$
$$4y-3x+2(2x+3y-8)=7.$$

Сдѣлавъ надлежащее сокращеніе, находимъ:

$$11x+3y=39,$$
$$10y+x=23,$$

два уравненія съ двумя неизвѣстными. Изъ послѣдняго имѣемъ $x=23-10y$. Это подставимъ въ первое, и выйдетъ

$$11(23-10y)+3y=39,$$

одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ; изъ него найдется $y=2$.

Эту величину подставимъ, въ выраженіе

$x=23-10y$, получится $x=3$.

Наконецъ, подставивъ на мѣсто $y$, $x$, ихъ найденныя величины, въ

$z=2x+3y-8$; выйдетъ

$z=2.3+3.2-8$, или $z=4$.

Что рѣшеніе точно, это оправдывается повѣркою, подставивъ $y=2$, $x=3$, $z=4$, наприм. въ 3) уравненіе:

$$4y-3x+2z=7,$$
$$4.2-3.3+2.4=7,$$
$$8-9+8=7.$$

b) *По способу сравненія.* — Надобно освободить одну изъ неизвѣстныхъ изъ всѣхъ трехъ уравненій; потомъ сравнить ея первое выраженіе со вторымъ и третьимъ: тогда эта неизвѣстная исключится, и получатся два уравненія съ двумя неизвѣстными, и проч.

*Примѣръ тотъ же:*

$$2x+3y-z=8,$$
$$5x-6y+3z=15,$$
$$4y-3x+2z=7.$$

Освободимъ $z$ изъ всѣхъ трехъ уравненій:

$z=2x+3y-8$ изъ перваго,

$z=\frac{15-5x+6y}{3}$ изъ втораго,

$z=\frac{7-4y+3x}{2}$ изъ третьяго.

Сравнимъ первое выраженіе со вторымъ и съ третьимъ, получатся:

$$2x+3y-8=\frac{15-5x+6y}{3},$$
$$2x+3y-8=\frac{7-4y+3x}{2},$$

только два уравненія съ двумя неизвѣстными $x$, $y$; онѣ, по сокращеніи, будутъ

$$\begin{aligned} 11x+3y&=39,\\ x+10y&=23. \end{aligned}$$

Освободимъ $x$ изъ этихъ обоихъ уравненій:

$$x=\frac{39-3y}{11},\ x=23-10y,$$

и сравнимъ между собою:

$$\frac{39-3y}{11}=23-10y, \text{ или}$$

$$39-3y=253-110y,$$

одно уравненіе съ одною неизвѣстною $y$, изъ котораго и найдется $y=2$;
а потомъ, изъ $x=23-10y$, получимъ $x=3$;
и наконецъ, изъ $z=2x+3y-8$, выйдетъ $z=4$.

c) *По способу сокращенія.* — Положимъ, что надобно исключить неизвѣстную $z$: для этого надобно сдѣлать равными коефиціенты при $z$ во всѣхъ уравненіяхъ, чрезъ помноженіе каждаго уравненія на произведеніе коефиціентовъ этой неизвѣстной $z$ въ прочихъ уравненіяхъ. Послѣ того, должно сложить, либо вычесть, первое уравненіе со вторымъ и съ третьимъ, такъ чтобы $z$ исключился; и останутся два уравненія съ двумя неизвѣстными $y$, $x$, и проч. Беремъ тотъ же примѣръ:

$$\begin{array}{r|l} 2x+3y-z=8 & 2.3=6,\\ 5x-6y+3z=15 & 2.1=2,\\ 4y-3x+2z=7 & 3.1=3, \end{array}$$

Чтобъ исключить $z$, помножимъ первое уравненіе на произведеніе $2.3=6$ коефиціентовъ, стоящихъ при $z$ въ двухъ прочихъ уравненіяхъ; помножимъ второе на $2.1=$[illegible], третье на $3.1=3$:

$$\begin{aligned} 12x+18y-6z&=48,\\ 10x-12y+6z&=30,\\ 12y-9x+6z&=21, \end{aligned}$$

Теперь коефиціенты при $z$ равны, только не съ одинакими знаками; а потому, для исключенія $z$, надобно сложить первое уравненіе со вторымъ, а потомъ съ третьимъ, получатся:

$$\begin{aligned} 22x+6y&=78,\\ 3x+30y&=69, \end{aligned}$$

или:

$$\begin{array}{r|l} 11x+3y=39 & 10\\ x+10y=23 & 3 \end{array}$$

два уравненія съ двумя неизвѣстными. Помножимъ первое изъ нихъ на 10, второе на 3, и вычтемъ, чтобъ исключить $y$; останется:

$$107x=321, \text{ откуда } x=3.$$

Послѣ чего найдутся $y$ и $z$ такимъ же или другимъ способомъ.

Нѣтъ необходимости, чтобы всѣ три неизвѣстныя были въ каждомъ изъ трехъ уравненій; довольно и того, что три неизвѣстныя будутъ, какъ ни есть, находиться въ трехъ уравненіяхъ.

*Примѣръ:*

$$\begin{array}{r|l} 2x-y-z=0, & 4. \\ 5x-2z=20, & \\ 4y-x=10. & \end{array}$$

Помножимъ первое на 4 и сложимъ съ третьимъ, чтобъ исключить $y$, выйдетъ:

$$7x-4z=10,$$

сюда припишемъ второе........ $5x-2z=20$;

послѣднее помножимъ на 2, и вычтемъ изъ него первое; останется:

$$3x=30,\ x=10.$$

Вставимъ это въ третье уравненіе $4y-x=10$, найдется:

$$4y-10=10,\ y=5.$$

Подставимъ $x=10$, $y=5$, въ самое первое уравненіе:

$$2x-y-z=0, \text{ получится}$$

$$20-5-z=0,\ z=15.$$

Для повѣрки, внесемъ величины $x$, $z$, во второе уравненіе $5x-2z=20$, будетъ

$$50-30=20;$$

слѣдовательно, рѣшеніе вѣрно.

**95.** *По способу Безу.*—Чтобъ исключить двѣ неизвѣстныя величины изъ трехъ уравненій, надобно ввести въ нихъ два произвольные, неопредѣленные множителя, которыми можемъ располагать, какъ намъ угодно, а именно: помножимъ первое уравненіе на произвольный множитель $m$, второе на $n$; сложимъ два первыя уравненія, а третье изъ нихъ вычтемъ. Получится одно уравненіе со всѣми тремя неизвѣстными и съ двумя произвольными $m$ и $n$. Произвольные множители можемъ взять такими, чтобы алгебрическіе коефиціенты при $y$ и $z$ сдѣлались равными нулю. Отъ этого получатся три уравненія, изъ которыхъ легко найдутся $m$, $n$ и $x$, и проч.

Для примѣра возмемъ три общихъ уравненія:

$$\begin{array}{r|l} ax+by+cz=d & m \\ a'x+b'y+c'z=d' & n \\ a''x+b''y+c''z=d'' & \end{array}$$

Помноживъ первое на произвольную неопредѣленную $m$, второе на $n$, сложимъ эти уравненія, и вычтемъ изъ суммы ихъ третье уравненіе, получится:

$$(\alpha)\ldots..(am+a'n-a'')x+(bm+b'n-b'')y+(cm+c'n-c'')z=dm+d'n-d''.$$

Двѣ произвольныя $m$, $n$, возмемъ такими, чтобы алгебрическіе коефиціенты при $y$ и $z$ обратились въ нуль; отчего получатся *условныя уравненія:* $bm+b'n-b''=0$,

$cm+c'n-c''=0$;

останется $(am+a'n-a'')x=dm+d'n-d''$, откуда

$$x=\frac{dm+d'n-d''}{am+a'n-a''}.$$

Что касается до $m$, $n$, онѣ теперь найдутся изъ условныхъ уравненій, а именно, будутъ:

$$m=\frac{-(b'c''-b''c')}{bc'-b'c},\quad n=\frac{-(b''c-bc'')}{bc'-b'c}.$$

Онѣ, будучи подставлены въ выраженіе для $x$, по сокращеніи, даютъ

$$x=\frac{d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)}.$$

Такимъ же образомъ найдется неизвѣстное $y$: для этого надобно изъ общаго уравненія $(\alpha)$ исключить $x$ и $z$, положивъ

$am+a'n-a''=0$, $cm+c'n-c''=0$; останется

$$y=\frac{dm+d'n-d''}{bm+b'n-b''}.$$

При этомъ условіи, найдутся для $m$ и $n$ другія величины:

$$m=\frac{-(a'c''-a''c')}{ac'-a'c},\quad n=\frac{-(a''c-ac'')}{ac'-a'c},$$

которыя надлежитъ подставить въ выраженіе для $y$, и получится

$$y=\frac{d(a'c''-a''c')+d'(a''c-ac'')+d''(ac'-a'c)}{b(a'c''-a''c')+b'(a''c-ac'')+b''(ac'-a'c)}.$$

Наконецъ, чтобъ получить $z$, уравняемъ нулю коефиціенты при $x$ и $y$ въ общемъ уравненіи $(\alpha)$:

$am+a'n-a''=0$, $bm+b'n-b''=0$; останется

$$z=\frac{dm+d'n-d''}{cm+c'n-c''}.$$

Здѣсь изъ условныхъ уравненій найдутся

$$m=\frac{-(b'a''-a'b'')}{ba'-b'a},\quad n=\frac{-(b''a-ba'')}{ba'-b'a},$$

отчего выраженіе для $z$ обратится въ

$$z=\frac{d(b'a''-b''a')+d'(b''a-ba'')+d''(ba'-b'a)}{c(b'a''-b''a')+c'(b''a-ba'')+c''(ba'-b'a)}.$$

**96.** При одномъ взглядѣ на выводы $x$, $y$, $z$, открывается, что между скобками въ числителѣ и знаменателѣ каждаго находятся соотвѣтственно равные двучлены (наприм. въ послѣднемъ выводѣ видимъ двучлены $b'a''-b''a'$, $b''a-ba''$, $ba'-b'a$ въ числителѣ и знаменателѣ), а внѣ скобокъ этихъ двучленовъ, во всѣхъ числителяхъ, буквы $d$, $d'$, $d''$. Внѣ скобокъ тѣхъ же двучленовъ, находящихся въ знаменателѣ для $x$, стоятъ коефиціенты $a$, $a'$, $a''$, этой неизвѣстной; для $y$ его коефиціенты $b$, $b'$, $b''$, и для $z$ его коефиціенты $c$, $c'$, $c''$.

Внимательное наблюденіе за порядкомъ буквъ, составляющихъ тотъ или другой выводъ, показало возможность писать дробныя выраженія для $x$, $y$ и $z$, непосредственно, слѣдующимъ образомъ:

Напишемъ коефиціенты, $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$ $c'$,..... по три раза, для каждой неизвѣстной въ порядкѣ:

| Для $x$. | | | Для $y$. | | | Для $z$. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $b$ | $a$ | $c$ | $c$ | $b$ | $a$ |
| $a'$ | $b'$ | $c'$ | $b'$ | $a'$ | $c'$ | $c'$ | $b'$ | $a'$ |
| $a''$ | $b''$ | $c''$ | $b''$ | $a''$ | $c''$ | $c''$ | $b''$ | $a''$ |
| $a$ | $b$ | $c$ | $b$ | $a$ | $c$ | $c$ | $b$ | $a$ |
| $a'$ | $b'$ | $c'$ | $b'$ | $a'$ | $c'$ | $c'$ | $b'$ | $a'$ |
| $a''$ | $b''$ | $c''$ | $b''$ | $a''$ | $c''$ | $c''$ | $b''$ | $a''$ |
| $a$ | $b$ | $c$ | $b$ | $a$ | $c$ | $c$ | $b$ | $a$ |
| $a'$ | $b'$ | $c'$ | $b'$ | $a'$ | $c'$ | $c'$ | $b'$ | $a'$ |
| $a''$ | $b''$ | $c''$ | $b''$ | $a''$ | $c''$ | $c''$ | $b''$ | $a''$ |

Теперь, для полученія $x$, начнемъ съ его знаменателя: возмемъ среднія буквы $a$, $a'$, $a''$, въ первой колоннѣ коефиціентовъ, и отъ каждой протянемъ косвенно по двѣ линіи, вверхъ и внизъ, чрезъ три буквы, какъ здѣсь показано; тогда линіи внизъ опредѣлятъ множителей для трехъ членовъ положительныхъ, а линіи вверхъ—множителей для трехъ членовъ отрицательныхъ знаменателя, а именно:

$$ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c,$$ или

$$a(b'c''-b''c)+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c).$$

А чтобъ получить числитель, надобно только взять $d$, $d'$, $d''$, вмѣсто $a$, $a'$, $a''$.

Точно также найдутся числители и знаменатели для $y$ и $z$ изъ второй и третьей колонны коефиціентовъ.

Приложимъ это къ разрѣшенію уравненій:

$$3x+2y-4z=8,$$
$$5x-3y+3z=33,$$
$$7x+y+5z=65,$$

Напишемъ коефиціенты въ порядкѣ:

| Для $x$. | | | Для $y$. | | | Для $z$. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | —4 | 2 | 3 | —4 | —4 | 2 | 3 |
| 5 | —3 | 3 | —3 | 5 | 3 | 3 | —3 | 5 |
| 7 | 1 | 5 | 1 | 7 | 5 | 5 | 1 | 7 |
| 3 | 2 | —4 | 2 | 3 | —4 | —4 | 2 | 3 |
| 5 | —3 | 3 | —3 | 5 | 3 | 3 | —3 | 5 |
| 7 | 1 | 5 | 1 | 7 | 5 | 5 | 1 | 7 |
| 3 | 2 | —4 | 2 | 3 | —4 | 4 | 2 | 3 |
| 5 | —3 | 3 | —3 | 5 | 3 | 3 | —3 | 5 |
| 7 | 1 | 5 | 1 | 7 | 5 | 5 | 1 | 7 |

Отсюда прямо получаемъ:

$$x=\frac{8(-15-3)+33(-4-10)+65(6-12)}{3(-15-3)+5(-4-10)+7(6-12)}=$$

$$=\frac{-8.18-33.14-65.6}{-3.18-5.14-7.6}=6.$$

$$y=\frac{8(25-21)+33(-28-15)+63(9+20)}{2(25-21)-3(-28-15)+1(9+20)}=$$

$$=\frac{8.4-33.43+63.29}{2.4+3.43+1.29}=3.$$

$$z=\frac{8(-21-5)+33(3-14)+63(10+9)}{-4(-21-5)+3(3-14)+5(10+9)}=$$

$$=\frac{-8.26-33.11+63.19}{4.26-3.11+5.19}=4.$$

Что рѣшенія $x=6$, $y=3$, $z=4$ вѣрны, это оправдывается повѣркою надъ какимъ угодно даннымъ уравненіемъ.

**97.** Надобно еще замѣтить, что дробныя выраженія для $x$, $y$, $z$, выведенныя изъ трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными, различаются только своими числителями, а знаменатель имѣютъ общій. Въ самомъ дѣлѣ, если уничтожить скобки въ выраженіи для $x$, и въ каждомъ членѣ расположить буквы по порядку знаковъ надъ ними, то найдемъ сперва:

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

Послѣ того, уничтожимъ скобки въ дробныхъ выраженіяхъ для $y$ и $z$, и перемѣнимъ знаки во всѣхъ членахъ ихъ числителей и знаменателей; найдутся:

$$y=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

$$z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

**98.** Употребленіе одинакихъ буквъ, отличающихся только знаками, для выраженія коефиціентовъ предъ тою или другою неизвѣстною въ данныхъ уравненіяхъ, привело къ открытію способа (притомъ самаго общаго для уравненія со многими неизвѣстными), писать выводы для $x$, $y$, $z$,... на память, не прибѣгая къ непосредственному, довольно продолжительному, ихъ выводу. Начнемъ съ уравненій съ двумя неизвѣстными:

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c';$$

онѣ даютъ: $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$, $y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$.

гдѣ видно, что общій знаменатель составленъ изъ одинхъ коефиціентовъ $a$, $a'$, $b$, $b'$, предъ $x$, $y$; что числители составлены изъ этого знаменателя, взявши $c$, $c'$ вмѣсто $a$, $a'$, для $x$, и тѣ же $c$, $c'$, вмѣсто $b$, $b'$, для $y$.

Теперь возмемъ три уравненія съ тремя неизвѣстными $x$, $y$, $z$, въ которыхъ

$a$, $a'$, $a''$, коефиціенты для $x$,
$b$, $b'$, $b''$, — — $y$,
$c$, $c'$, $c''$, — — $z$.

Для составленія общаго знаменателя, возмемъ члены, $ab$, $ba$, знаменателя выводовъ для $x$, $y$, предыдущаго случая (выпуствъ на время знаки надъ буквами); припишемъ къ каждому члену букву $c$ сперва на третьемъ мѣстѣ, то есть, справа, потомъ на второмъ (въ срединѣ), и на третьемъ (слѣва), получатся тройныя соединенія:

$$abc,\ acb,\ cab;\ bac,\ bca,\ cba,$$

которыя соединимъ попеременно знаками + и —:

$$abc-acb+cab-bac+bca-cba.$$

Наконецъ, поставимъ одинъ знакъ надъ второю буквою, и два надъ третьею въ каждомъ членѣ; составится общій знаменатель:

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''.$$

Для полученія числителя неизвѣстной $x$, замѣнимъ буквы $a$, $a'$, $a''$ знаменателя буквами $d$, $d'$, $d''$; для полученія числителя неизвѣстной $y$ замѣнимъ буквы $b$, $b'$, $b''$ знаменателя буквами $d$, $d'$, $d''$, а для $z$ замѣнимъ $c$, $c'$, $c''$ знаменателя тѣми же буквами $d$, $d'$, $d''$.

**99.** Точно по такому же механизму составляются дробныя выраженія для $x$, $y$, $z$, $u$, если даны четыре уравненія съ четырьмя неизвѣстными:

$$ax+by+cz+du=e,$$
$$a'x+b'y+c'z+d'u=e',$$
$$a''x+b''y+c''z+d''u=e'',$$
$$a'''x+b'''y+c'''z+d'''u=e'''.$$

Здѣсь неизвѣстныя $x$, $y$, $z$, $u$, изобразятся дробями, имѣющими общій знаменатель. Этотъ знаменатель мы найдемъ съ помощію знаменателя (взятаго безъ знаковъ надъ буквами)

$$abc-acb+cba-bac+bca-cba$$

предыдущаго случая, когда были даны три уравненія съ тремя неизвѣстными. Къ каждому члену припишемъ справа коефиціентъ $d$ новой неизвѣстной $u$; потомъ подвинемъ его влѣво черезъ одну букву, черезъ двѣ, и черезъ всѣ три; отъ сего каждый трех-буквенный членъ произведетъ четыре члена о четырехъ буквахъ, а шесть членовъ произведутъ 24 члена. Эти члены надобно написать въ одну строку, соединивъ ихъ попеременно знаками $+$ и $-$, и въ каждомъ, начиная слѣва, поставить одинъ, два, три члена, соотвѣтственно надъ второю, третьею и четвертою буквами; составится общій знаменатель:

$$\begin{gathered}ab'c''d'''-ab'd''c'''+ad'b''c'''-da'b''c'''\\-ac'b''d'''+ac'd''b'''-ad'c''b'''+da'c''b'''\\+ca'b''d'''-ca'd''b'''+cd'a''b'''-dc'a''b'''\\-ba'c''d'''+ba'd''c'''-bd'a''c'''+db'a''c'''\\+bc'a''d'''-bc'd''a'''+bd'c''a'''-db'c''a'''\\-cb'a''d'''+cb'd''a'''-cd'b''a'''+dc'b''a'''.\end{gathered}$$

Изъ этого общаго знаменателя составятся тотчасъ числители; надобно только въ немъ взять

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | вмѣсто | $a$ | для числителя неизвѣстной | $x$, |
| $e'$ | – | $a'$ | – – – | $y$, |
| $e''$ | – | $a''$ | – – – | $z$, |
| $e'''$ | – | $a'''$ | – – – | $u$. |

Какое бы число ни было уравненій со столькими же неизвѣстными, составъ этихъ неизвѣстныхъ дѣлается по одному и тому же закону. Лапласъ доказалъ общность этого закона въ *Запискахъ Академіи Наукъ* еще 1772 года.

*Примѣчаніе.* — Если дано будетъ уравненій болѣе числа неизвѣстныхъ величинъ: тогда, для опредѣленія этихъ неизвѣстныхъ, избирается столько уравненій, сколько есть неизвѣстныхъ; остальныя же уравненія называются *условными*, которымъ найденныя величины неизвѣстныхъ должны удовлетворять; въ противномъ случаѣ, такія уравненія называются *несовмѣстными*, потому что не согласуются между собою, даютъ неизвѣстнымъ величины различныя, чего не должно быть.

Положимъ, что даны: $ax+by=c,$

$$a'x+b'y=c'$$

$$a''x+b''y=c''.$$

Для опредѣленія $x$, $y$, довольно двухъ первыхъ уравненій, изъ которыхъ находимъ:

$$x=\frac{cb'--bc'}{ab'-a'b},\ y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Третье уравненіе $ax''+by''=c''$ условное, которому найденныя величины $x$, $y$ должны удовлетворять. Сдѣлавъ это подстановленіе, найдется:

$$a''(cb'-bc')+b''(ac'-ca')=c''(ab'-ba').$$

Если этого равенства не будетъ, то данныя уравненія *не совмѣстны*, и не годятся всѣ вмѣстѣ для рѣшенія вопроса.

## ЗАДАЧИ,

### РѢШАЕМЫЯ ПОСРЕДСТВОМЪ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ УРАВНЕНІЙ 1-Й СТЕПЕНИ СЪ ДВУМЯ, ТРЕМЯ, И БОЛѢЕ, НЕИЗВѢСТНЫМИ.

**100.** Задача 1. — *Гувернёръ, раздавая воспитанникамъ бумагу для письма, замѣтилъ, что, если дать каждому по 12 листовъ, то у него не достанетъ 15 листовъ; такъ онъ далъ по 10 листовъ, и у него осталось 35 листовъ. Спрашивается: сколько было всѣхъ воспитанниковъ, и сколько у гувернера было бумаги?*

Въ этой задачѣ находимъ двѣ неизвѣстныя величины: число воспитанниковъ и количество бумаги. И такъ, пусть

$x$ число воспитанниковъ,

$y$ число листовъ бумаги.

Если выдавать по 12 листовъ на $x$ воспитанниковъ, что составитъ $12x$ листовъ, то $y$ листовъ бумаги будетъ мало; къ нимъ надобно прибавить 15 листовъ, которыхъ не достаетъ. Слѣдовательно,

$$12x=y+15.$$

Когда же выдадимъ по 10 листовъ на $x$ воспитанниковъ, то есть, $10x$ листовъ, то всей бумаги $y$ листовъ будетъ много; останется 35 листовъ, которыя надобно вычесть изъ $y$. Посему,

$$10x=y-35.$$

Вычетши второе уравненіе изъ перваго, найдется:

$2x=50$; откуда

$x=25$ воспитанниковъ.

Это подставивъ во второе уравненіе, получится:

$250=y-35$; а отсюда

$y=285$ листовъ бумаги.

**Задача 2.** — *Сколько намъ лѣтъ? спросилъ сынъ отца своего, который отвѣчалъ: твои лѣта теперь составляютъ треть моихъ, а шесть лѣтъ тому назадъ они составляли только четверть моихъ лѣтъ. — Сколько же лѣтъ каждому изъ нихъ?*

Пусть $x$ годы отца,

$y$ – сына.

По первому условію, $y=\frac{1}{3}x$.

Шесть лѣтъ назадъ, отцу было $x-6$ лѣтъ,

сыну..... $y-6$ лѣтъ;

и тогда лѣта сына были $y-6=\frac{1}{4}(x-6)$.

Для рѣшенія, подставимъ первое уравненіе во второе:

$$\frac{1}{3}x-6=\frac{1}{4}(x-6), \text{ или}$$

$$4x-72=3x-18; \text{ отсюда}$$

$$x=54 \text{ года отцу},$$

$$y=\frac{1}{3}.54=18 \text{ лѣтъ сыну.}$$

**Задача 3.** *У разносчика спросили: сколько у него яблокъ въ двухъ корзинкахъ? Онъ отвѣчалъ, отгадайте: если изъ первой корзинки переложить во вторую пять яблокъ, то въ обѣихъ будетъ поровну; а если изъ второй переложить въ первую 10 яблокъ, то въ первой сдѣлается вдвое больше, нежели во второй.*

Пусть $x$ число яблокъ въ первой корзинкѣ;

$y$ – – во второй.

По первому условію:

$$x-5=y+5, \text{ по второму,}$$

$$x+10=2(y-10).$$

Вычтемъ верхнее уравненіе изъ нижняго, и сократимъ, получится

$$15=y-25, \text{ откуда}$$

$$y=40 \text{ яблокъ.}$$

Это подставимъ въ первое уравненіе:

$$x-5=40+5,$$

$$x=50 \text{ яблокъ.}$$

И такъ, въ первой корзинкѣ было 50 яблокъ, а во второй 40; а въ обѣихъ вмѣстѣ 90.

**Задача 4.** — *Подрядчикъ платитъ 23 руб. серебромъ за 10 рабочихъ дней маляру и за 16 дней плотнику; потомъ, не перемѣняя цѣны, платитъ 15 руб. серебромъ за слѣдующіе 6 дней маляру и 12 дней* *плотнику. Спрашивается, сколько получаетъ въ день маляръ, и сколько плотникъ?*

Пусть $x$ дневная плата маляру,
$y$ — — плотнику.

За 10 дней первому слѣдуетъ $10x$ рублей,

За 16 дней второму — $16y$ — ,

что составляетъ:

$$1)\quad 10x+16y=23;$$

а во второй разъ:

$$6x+12y=15, \text{ или}$$
$$2)\quad 2x+4y=5.$$

Помножимъ второе уравненіе на 4, и вычтемъ изъ перваго, останется:

$$2x=3, \text{ или}$$
$$x=1,50 \text{ рубля.}$$

Потомъ, помножимъ второе уравненіе на 5, и вычтемъ изъ него первое, выйдетъ:

$$4y=2,$$
$$y=0,50 \text{ рубля.}$$

И такъ, маляръ получаетъ 1 руб. 50 копѣекъ серебромъ, а плотникъ только 50 копѣекъ, въ каждый день.

**Задача 5.** — *Два купца продали нѣкоторый товаръ, одинъ по 8 рублей за пудъ, а другой по 9 рублей. Первый говоритъ: еслибы я продалъ еще треть твоего товару по своей цѣнѣ, то получилъ бы 256 рублей; а другой отвѣчаетъ: еслибы я продалъ еще* $\frac{1}{4}$ *твоего товару по моей цѣнѣ, то получилъ бы 270 рублей. Требуется узнать, сколько пудовъ продалъ тотъ и другой, и на какую сумму?*

Пусть первый продалъ $x$ пудовъ,
и второй — $y$ пудовъ.

Если къ первому числу придать $\frac{1}{3}$ втораго, то за весь товаръ, по 8 рублей за пудъ, первый получилъ бы

$$\left(x+\frac{1}{3}y\right)8=256 \text{ рублей.}$$

А если ко второму числу $y$ придать $\frac{1}{4}$ перваго, то за весь товаръ, по 9 рублей за пудъ, второй купецъ получилъ бы

$$\left(y+\frac{1}{4}x\right)9=270 \text{ рублей.}$$

Эти два уравненія можно сократить, первое на 8, а второе на 9; онѣ, по сокращеніи, будутъ:

$$x+\frac{1}{3}y=32,$$
$$y+\frac{1}{4}x=30.$$

или

$$\left.\begin{aligned} 3x+\ y&=96 \\ y+\tfrac{1}{4}x&=30 \end{aligned}\right\}\ \text{вычтемъ нижнее}$$

$$11\tfrac{1}{4}x=66,\ \text{откуда}$$

$$x=24\ \text{пуда.}$$

Подставимъ это въ $y+\frac{1}{4}x=30$, найдется

$$y=24\ \text{пуда.}$$

И такъ оба купца продали одинакое число пудовъ:

первый получилъ 24.8=192 рубля,

а второй . 24.9=216 –

**Задача** 6. — *Купецъ имѣетъ два сорта чаю, по* $2\frac{1}{2}$ *руб. серебр. за фунтъ, и по* $3\frac{3}{4}$ *рубля за фунтъ; онъ желаетъ оба сорта смѣшать въ такомъ содержаніи, чтобы вышло 100 фунтовъ, по 3 рубля сер. за фунтъ. Спрашивается: сколько фунтовъ надобно взять перваго сорта, и сколько втораго для составленія смѣси?*

Пусть нужно взять $x$ фунтовъ перваго сорта,

$y$ – втораго сорта,

а всего: 1) $x+y=100$ фунтовъ.

$x$ фунтовъ перваго сорта стоютъ $2\frac{1}{2}x$ рублей,

$y$ – втораго – – $3\frac{3}{4}y$ –,

100 фунтовъ смѣси по 3 рубля будутъ стоить 300 рублей; слѣдовательно

$$2\tfrac{1}{2}x+3\tfrac{3}{4}y=300,\ \text{или}$$

$$2)\quad 10x+15y=1200.$$

Помножимъ первое уравненіе на 10, и вычтемъ изъ втораго, найдется:

$$5y=200,\ \text{или}$$

$$y=40\ \text{фунтовъ.}$$

Послѣ того, изъ $x+y=100$, получимъ:

$$x=100-y=100-40$$

$$x=60\ \text{фунтовъ.}$$

Стало-быть, для составленія требуемой смѣси, надобно взять 60 фунтовъ чаю перваго сорта, и 40 фунтовъ втораго.

**Задача** 7. — *Нѣкто, имѣя капиталъ 25000 рублей серебромъ, одну часть его отдаетъ въ проценты по* $5\frac{0}{0}$ *со 100 въ годъ, а другую по* $4\frac{0}{0}$, *и со всего этого капитала получаетъ въ годъ 1160 рублей процентовъ. Узнать, какъ велики эти части капитала?*

Пусть $x$ первая часть, по $5^0_0$,

$y$ вторая часть, по $4^0_0$.

Обѣ части составляютъ весь капиталъ

$$1)\quad x+y=25000 \text{ рублей.}$$

Годовые проценты съ этихъ частей капитала найдутся изъ пропорцій:

$$100 : x=5 : \frac{5x}{100},$$

$$100 : y=4 : \frac{4y}{100}.$$

Сумма этихъ процентовъ равна 1160 рублямъ; посему

$$\frac{5x}{100}+\frac{4y}{100}= \quad 1160, \text{ или}$$

$$2)\quad 5x+4y=116000.$$

Помножимъ первое уравненіе на 4, и вычтемъ изъ втораго:

$$\begin{array}{r} 5x+4y=116000 \\ 4x+4y=100000 \\ \hline x=\ 16000 \end{array}$$

Это подставимъ въ $x+y=25000$, найдется

$$y=\ 9000.$$

Слѣдовательно первая часть капитала 16000, а вторая 9000 руб. серебромъ.

**Задача 8.** — *Три брата должны заплатить общій долгъ въ 5000 рублей, но ни одинъ изъ нихъ не имѣетъ столько денегъ, чтобы могъ заплатить весь долгъ. Первый говоритъ второму: дай мнѣ половину твоихъ денегъ, я заплачу весь долгъ; второй говоритъ третьему: дай мнѣ треть твоихъ денегъ, я также заплачу весь долгъ; если первый дастъ третьему четверть своихъ денегъ, то и онъ берется заплатить. Спрашивается, сколько денегъ было у каждаго?*

Здѣсь находятся три неизвѣстныя, а именно:

$x$ рублей у перваго брата,

$y$ – у втораго,

$z$ – у третьяго.

По условіямъ задачи, тотчасъ составятся три уравненія:

$$x+\tfrac{1}{2}y=5000, \text{ или } 2x+y=10000,$$

$$y+\tfrac{1}{3}z=5000, \qquad 3y+z=15000,$$

$$z+\tfrac{1}{4}x=5000, \qquad 4z+x=20000.$$

Помножимъ второе уравненіе на 4, и вычтемъ изъ него третье, останется:

$$12y-x=40000;$$

это помножимъ на 2, и сложимъ съ первымъ, получится:

$$25y=90000, \text{ откуда}$$
$$y=3600 \text{ рублей.}$$

Потомъ, изъ $2x+y=10000$ найдется

$$x=3200 \text{ рублей;}$$

а это подставивъ въ $4z+x=20000$, получимъ

$$z=4200 \text{ рублей.}$$

И такъ, первый братъ имѣетъ 3200 рублей, второй 3600 руб., а третій 4200 рублей.

**Задача 9.** — *Куплено 60 четвертей ржи, 30 четвертей ячменя и 45 четвертей пшеницы на 525 рублей серебромъ; во второй разъ куплено 80 четвертей ржи, 40 чет. ячменя и 50 четв. пшеницы, по тѣмъ же цѣнамъ, на 650 руб. серебромъ; въ третій разъ куплено 70 чет. ржи, 20 ячменя и 35 пшеницы, на 465 рублей серебромъ. Узнать, сколько рублей платили за четверть ржи, четверть ячменя, и пшеницы?*

Положимъ, что платили:

$x$ рублей за четверть ржи,
$y$ – – – ячменя,
$z$ – – – пшеницы.

Слѣдовательно, въ первомъ случаѣ,

60 чет. ржи стоятъ $60x$ рублей,
30 чет. ячменя – $30y$ –
45 чет. пшеницы – $45z$ –,

а все вмѣстѣ:

$$60x+30y+45z=525 \text{ рублей.}$$

Во второмъ случаѣ нашли бы:

$$80x+40y+50z=650;$$

въ третьемъ:

$$70x+20y+35z=465$$

или:

$$1)\quad 4x+2y+3z=35,$$
$$2)\quad 8x+4y+5z=65,$$
$$3)\quad 14x+4y+7z=93.$$

Помноживъ первое уравненіе на 2, и, вычтя изъ него второе, получимъ сразу:

$$z=5 \text{ рублей серебромъ.}$$

Это подставимъ во 2) и 3), и вычтемъ 2) изъ 3), найдется:

$$6x+10=28$$
$$x=3 \text{ руб. серебромъ.}$$

Чрезъ подстановленіе $x=3$, $z=5$, въ первое уравненіе, получимъ, наконецъ, $y=4$ руб.

Отсюда заключаемъ, что за четверть ржи платили 3 рубля, за ячмень 4, а за пшеницу 5 рублей серебромъ.

**Задача 10.** — *Нѣкто держитъ въ рукѣ три карты, между которыми нѣтъ ни одной фигуры, и говоритъ: у меня на двухъ первыхъ картахъ столько очковъ, сколько на третьей и еще 15; на первой и третьей столько очковъ, сколько на второй и еще 5; а на второй и третьей столько, сколько на первой безъ одного. Узнать: какіе эти карты?*

Пусть $x$ число очковъ на первой картѣ,
$y$ — — на второй —,
$z$ — — на третьей —.

Здѣсь получаются уравненія:

$$1)\quad x+y=z+15,$$
$$2)\quad x+z=y+5,$$
$$3)\quad y+z=x-1.$$

Уравненія: 1) + 2) даютъ $x=10$,
1) + 3) — $y=7$,
2) + 3) — $z=2$.

И такъ, эти карты: десятка, семерка и двойка.

**Задача 11.** — *Находятся три капитала въ обращеніи: изъ нихъ первый приноситъ извѣстные годовые проценты; другой капиталъ 2500 рублями болѣе, его проценты со 100 единицею болѣе, и приноситъ годовой доходъ 200 рублями болѣе; третій капиталъ 3750 рублями болѣе перваго, имѣетъ годовые проценты со 100 двумя единицами болѣе перваго, и приноситъ годовой доходъ 375 рублями больше перваго. Требуется узнать, какъ велики эти капиталы, и какъ велики съ нихъ годовые проценты?*

Пусть $x$ первый капиталъ, $y$ его проценты со 100;
то второй капиталъ долженъ быть

$$x+2500,\quad (y+1) \text{ его проц. со } 100;$$

третій капиталъ

$$x+3750,\quad (y+2) \text{ — — —}$$

Годовые проценты съ этихъ капиталовъ получатся изъ пропорціи:

$$100 : x = y : \frac{xy}{100},$$

$$100 : x+2500 = y+1 : \frac{(x+2500)(y+1)}{100},$$

$$100 : x+3750 = y+2 : \frac{(x+3750)(y+2)}{100}.$$

А какъ проценты втораго капитала 200 рублями, и третьяго капитала 375 рублями болѣе перваго, то слѣдуетъ, что

$$\frac{(x+2500)(y+1)}{100}=\frac{xy}{100}+200,$$

$$\frac{(x+3750)(y+2)}{100}=\frac{xy}{100}+375.$$

Отсюда получаемъ:

$$2500y+x=17500,$$
$$3750y+2x=30000,$$

или

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 5000y+2x=35000 \\ 3750y+2x=30000 \end{array}\right| \text{ вычтемъ нижнее} \\ \hline 1250y=5000, \end{array}$$

$$y=4 \text{ руб. } \tfrac{0}{0}$$
$$y+1=5 \ - \ -$$
$$y+2=6 \ - \ -$$

Слѣдовательно, первый капиталъ находился въ обращеніи по 4 $\frac{0}{0}$, второй по 5 $\frac{0}{0}$, третій по 6 $\frac{0}{0}$. А подставивъ $y=4$ въ уравненіе,

$2500y+x=17500$, найдемъ:

$x=7500$ руб. капиталъ первый,

$x+2500=10000$ руб. капиталъ второй,

$x+3750=11250$ руб. капиталъ третій.

**Задача 12.** — *Опредѣлить постоянныя числа* A, B, C, *въ данномъ уравненіи,*

$$At+Bt^2+Ct^3=M,$$

*въ которомъ* $t$ *и* M *величины перемѣнныя, одна отъ другой зависимыя, когда извѣстно*, что

для $t=5$, $M=1$,

для $t=10$, $M=10$,

для $t=15$, $M=30$.

По первому значенію для $t$ и M, имѣемъ

$$5A+25B+125C=1,$$

по второму, $10A+100B+1000C=10$,

по третьему, $15A+225B+3375C=30$,

или:

$$A+5B+25C=\frac{1}{5},$$
$$A+10B+100C=1,$$
$$A+15B+225C=2.$$

Вычтемъ первое уравненіе изъ втораго и третьяго, останется:

$$5B+75C=\frac{4}{5},\ \text{или}\ B+15C=\frac{4}{25},$$

$$10B+200C=\frac{9}{5},\qquad B+20C=\frac{9}{50}.$$

Изъ разности послѣднихъ уравненій найдемъ:

$$5C=\frac{1}{50},\ \text{или}\ C=\frac{1}{250}.$$

Послѣ того, изъ уравненія, $B+20C=\frac{9}{50}$, получится:

$$B=\frac{9}{50}-20C=\frac{9}{50}-\frac{2}{25}=\frac{1}{10}.$$

Наконецъ, $A=1-10B-100C=-\frac{2}{5}$.

Для повѣрки, подставимъ найденныя числа въ уравненіе,

$$5A+35B+125C=1,\ \text{найдется:}$$

$$-\frac{10}{5}+\frac{25}{10}+\frac{125}{250}=1,\ \text{или}$$

$$-2+2\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=1.$$

И такъ рѣшеніе сдѣлано вѣрно.

Слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ видъ:

$$-\frac{2}{5}t+\frac{1}{10}t^2+\frac{1}{250}t^3=M.$$

Этотъ случай относится *къ простому интерполированію* рядовъ чиселъ, возрастающихъ или убывающихъ по неизвѣстному закону, получаемыхъ изъ какихъ ни есть наблюденій разсматриваемаго явленія, посредствомъ которыхъ желаютъ открыть законъ этого явленія.

### ИЗСЛѢДОВАНІЕ ФОРМУЛЪ, ПОЛУЧАЕМЫХЪ ЧРЕЗЪ РАЗРѢШЕНІЕ ОБЩИХЪ УРАВНЕНІЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ СЪ ДВУМЯ НЕИЗВѢСТНЫМИ. РѢШЕНІЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫЯ, $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{0}$, И НУЛЕВЫЯ.

**101.** Какъ при разрѣшеніи задачъ съ одною неизвѣстною, такъ и со многими неизвѣстными, могутъ получаться рѣшенія положительныя и отрицательныя, рѣшенія символическія $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{0}$, и сверхъ того рѣшенія нулевыя.

a) Одни только *рѣшенія положительныя* разрѣшаютъ вопросъ въ прямомъ смыслѣ, въ какомъ предполагалось по даннымъ его условіямъ.

b) *Отрицательныя рѣшенія* показываютъ, что въ задачѣ находятся какія нибудь условія невозможныя, которымъ нельзя удовлетворить рѣшеніями положительными. Онѣ показываютъ также, какъ надобно измѣнить вопросъ, чтобы всѣ рѣшенія были прямыя, положительныя, а именно: должно предъ неизвѣстною, которая получилась съ знакомъ —, перемѣнить знакъ во всѣхъ уравненіяхъ (**85**).

c) Рѣшеніе $x=\frac{a}{0}=\infty$ также показываетъ, что въ задачѣ находятся условія противорѣчивыя или одно съ другимъ несогласныя, отъ которыхъ одно уравненіе дѣлается *несовмѣстно* съ другимъ. Для доказательства этого, возмемъ только два уравненія:

$$ax+by=c,$$
$$a'x+b'y=c',$$

изъ которыхъ (**93**) мы нашли $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ab'}$,

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Полсжимъ $ab'-a'b=0$, или $a'=\frac{ab'}{b}$, получатся въ одно время $x=\infty$, $y=\infty$.

А чтобъ открыть, отчего это произошло, подставимъ $a'=\frac{ab'}{b}$ во второе уравненіе; найдется:

$$\frac{ab'x}{b}+b'y=c', \text{ или}$$
$$ax+by=\frac{bc'}{b'}.$$

Сравнивая это послѣднее съ первымъ даннымъ уравненіемъ, находимъ, что здѣсь должно быть $\frac{bc'}{b'}=c$, или $cb'-bc'=0$. А какъ этого условія въ задачѣ нѣтъ, то и слѣдуетъ, что два такія данныя уравненія несовмѣстны одно съ другимъ.

Подобная же несовмѣстность откроется, если взять $a=0$, $a'=0$, либо $b=0$, $b'=0$. Въ первомъ случаѣ, $x=\infty$, $y=\frac{0}{0}$, а во второмъ $y=\infty$, $x=\frac{0}{0}$.

Принимая въ разсмотрѣніе только второй случай, уравненія сдѣлаются:

$$ax=c,\ a'x=c', \text{ или}$$
$$x=\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}.$$

Этого равенства не было дано; слѣдовательно и уравненія несовмѣстны между собою.

d) Рѣшеніе $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$, показываетъ: 1) либо неопредѣленность задачи, 2) либо что находится общій множитель въ числителѣ и знаменателѣ дробныхъ выраженій для $x$, $y$, который для частнаго предположенія обращается въ нуль. Это послѣднее мы видѣли (**78**); а потому разсмотримъ только первый случай. Для сего, въ выраженіяхъ:

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},\ y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'},$$

положимъ $cb'=bc'$ и $ab'=ba'$; найдется $x=\frac{0}{0}$, и въ то же время $y=\frac{0}{0}$; ибо, если уравненіе $cb'=bc'$ раздѣлить на $ab'=ba'$, то выйдетъ $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$, или $ac'=ca'$, $ac'-ca'=0$.

Въ слѣдствіе условій $cb'=bc'$, $ab'=ba'$, откуда $a'=\frac{ab'}{b}$, $c=\frac{bc'}{b'}$, второе данное уравненіе $a'x+b'y=c'$ обращается

$$\text{въ } \frac{ab'x}{b}+b'y=c', \text{ или}$$
$$ax+by=\frac{bc'}{b'}=c.$$

Слѣдовательно, при этомъ условіи, второе уравненіе выходитъ тождественно съ первымъ, то есть, мы собственно имѣемъ только одно уравненіе съ двумя неизвѣстными, а не два. Но одного уравненія съ двумя неизвѣстными недостаточно для опредѣленія неизвѣстныхъ, отчего оно называется неопредѣленнымъ, а потому вопросъ токого рода заключаетъ въ себѣ *неопредѣленность*.

e) Наконецъ, если взять $c=0$, $c'=0$, въ уравненіяхъ:

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c',$$

$$\text{то получимъ:}\quad x=\frac{cb'-bc'}{a'b-a'b}=0,\ y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=0.$$

Здѣсь открывается также несовмѣстность; потому что данныя уравненія обращаются въ

$$ax+by=0, \text{ или } ax=-by$$
$$a'x+b'y=0 \qquad a'x=-b'y, \text{ откуда}$$
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}, \text{ или } ab'=a'b.$$

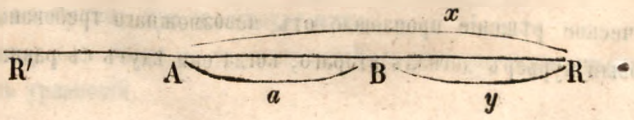
Но этого равенства въ задачѣ нѣтъ, чѣмъ и доказывается несовмѣстность уравненій.

А еслибъ и это условіе, $ab'=a'b$, было дано; то получили бы $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$, зависящія отъ того, что тогда мы имѣли бы не два уравненія, а только одно $ax+by=0$ неопредѣленное.

Къ такимъ же слѣдствіямъ мы дошли бы, разсматривая символическія рѣшенія уравненій съ тремя и болѣе неизвѣстными.

Слѣдующая задача, при различныхъ условіяхъ, представляетъ рѣшенія всякаго рода.

**102.** Задача.—*Два курьера выѣхали въ одно время изъ двухъ разныхъ мѣстъ* A *и* B, *и ѣдутъ по одной дорогѣ оба въ сторону* R. *Первый изъ нихъ проѣзжаетъ въ каждый часъ по т верстъ, а второй по п верстъ. Узнать: на какомъ разстояніи* AR *первый курьеръ догонитъ втораго?*



Назовемъ $AB=a$ извѣстное разстояніе между A и B; пусть R мѣсто, гдѣ первый курьеръ догонитъ втораго, и положимъ $AR=x$, $BR=y$: то будемъ имѣть:

$$1)\quad x-y=a.$$

Первый курьеръ проѣзжаетъ $m$ верстъ въ 1 часъ, то $x$ верстъ проѣдетъ въ нѣкоторое время $t$, которое найдется изъ пропорціи:

$$m:x=1:t,\ t=\frac{x}{m}.$$

Второй проѣзжаетъ $n$ верстъ въ 1 часъ, слѣдовательно $y$ верстъ проѣдетъ во время $t'=\frac{y}{n}$. А какъ времена ѣзды обоихъ курьеровъ равны, то

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n},\text{ или}$$

$$nx=my,\text{ или}$$

$$2)\quad nx-my=0.$$

Разрѣшивъ уравненія 1) и 2), найдется:

$$x=\frac{am}{m-n},\ y=\frac{an}{m-n}.$$

Пока $m>n$, оба рѣшенія остаются *положительными*, слѣдовательно прямыми. Оба курьера съѣдутся въ мѣстѣ R, которое отстоитъ отъ мѣста A на разстояніи $\frac{am}{m-n}$, а отъ B на разстояніи $\frac{an}{m-n}$, чему и быть должно, потому что задній курьеръ ѣдетъ скорѣе передняго, и непремѣнно гдѣ нибудь догонитъ.

Но, если, $m<n$, то есть, скорость ѣзды задняго курьера менѣе скорости передняго, то обѣ неизвѣстныя получатся *отрицательными:*

$$x=\frac{-am}{n-m},\ y=\frac{-an}{n-m}.$$

Этимъ рѣшеніемъ и обличается то невозможное требованіе, чтобы первый курьеръ догналъ втораго, когда онъ ѣдетъ медленнѣе; но, съ тѣмъ вмѣстѣ, указывается, какъ надобно перемѣнить условія задачи, чтобы рѣшенія вышли положительными. Надлежитъ только перемѣнить знаки предъ $x$, $y$, въ данныхъ уравненіяхъ, тогда будетъ:

$$-x+y=a,\text{ или } y-x=a,\text{ и}$$

$$-nx\overset{+}{-}my=0,$$

и въ такомъ случаѣ надобно заставить обоихъ курьеровъ ѣхать не къ R, но въ противную сторону, къ R′; разумѣется, что тогда курьеръ B догонитъ курьера A, потому что ѣдетъ скорѣе.

Теперь положимъ $m=n$, или $m-n=0$, то получится:

$$x=\frac{am}{m-n}=\frac{am}{0},\ y=\frac{an}{m-n}=\frac{an}{0}=\infty.$$

Это символическое рѣшеніе произошло отъ невозможнаго требованія въ задачѣ, чтобы первый курьеръ догналъ втораго, когда они ѣдутъ съ равными скоростями.

Ежели $m$ и $n$ неравны, но $a=0$, то есть, что *оба курьера выѣзжаютъ изъ одного мѣста*, то очевидно, что ихъ точка соединенія можетъ быть только на этомъ мѣстѣ, и нигдѣ болѣе, потому что ихъ скорости различны. Въ этомъ случаѣ

$$x=\frac{am}{m-n}=0;\ y=\frac{an}{m-n}=0.$$

Наконецъ, ежели $a=0$, и $m=n$, то рѣшенія обратятся въ

$$x=\frac{0}{0},\ y=\frac{0}{0},$$

и показываютъ здѣсь *неопредѣленность* въ задачѣ, потому что уравненія удовлетворяются всякими числами, взятыми на мѣсто $x$, $y$. Она произошла отъ того, что мы заставили курьеровъ выѣхать изъ одного мѣста (ибо $a=0$) въ одну сторону и съ равными скоростями ($m=n$), и хотимъ знать, гдѣ они съѣдутся между собою. Очевидно, что они всегда будутъ ѣхать одинъ подлѣ другаго, точка съѣзда ихъ будетъ на всякомъ разстояніи $x$ или $y$; оттого эти разстоянія опредѣлились въ символическихъ выраженіяхъ.

**Задача.**—*Найти два такія числа $x$, $y$, чтобъ было*

$$x=\frac{a}{y},\ y=b+\frac{c}{x}.$$

Изъ нихъ получаемъ:

$$1)\ xy=a$$

$$2)\ xy=bx+c;$$

слѣдовательно, $bx+c=a$, откуда

$$x=\frac{a-c}{b};$$ это подставимъ въ 1):

$$xy=\left(\frac{a-c}{b}\right)y=a,$$ отсюда

$$y=\frac{ab}{a-c}.$$

Если взять $a=c$, то найдутся:

$$x=0,\ y=\frac{ab}{0}=\infty;$$

оттого что, при этомъ условіи, выходитъ

$$\left.\begin{array}{l} xy=a \\ xy=bx+a \end{array}\right\}$$ несовмѣстность.

И подавно нельзя брать $c>a$; въ этомъ случаѣ

$$x=\frac{-(c-a)}{b},\ y=\frac{-ab}{c-a},$$

обѣ неизвѣстныя отрицательны.

Если $b=0$, то $x=\frac{a-c}{b}=\infty$, $y=0$; тогда уравненія: $xy=a$, $xy=bx+c$, обращаются въ $xy=a$, $xy=c$; откуда $a=c$.

Но, поелику $a$ не равно $c$; то символическое рѣшеніе показываетъ опять несовмѣстность уравненій.

**103.** Мы знаемъ, что если въ уравненіяхъ съ двумя неизвѣстными,

$$ax+by=c,\ a'x+b'y=c',$$

положить $c=0$, $c'=0$, то получатся:

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}=0,\ y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}=0.$$

Но, и въ уравненіяхъ съ тремя неизвѣстными:

$$\begin{aligned}ax+by+cz&=d,\\ a'x+b'y+c'z&=d',\\ a''x+b''y+c''z&=d'',\end{aligned}$$

положивши $d=0$, $d'=0$, $d''=0$, получили бы $x=0$, $y=0$, $z=0$; потому что числители дробныхъ выраженій для $x$, $y$, $z$, помножены на $d$, $d'$, $d''$ (**95**). Тоже самое получили бы мы и изъ всякой системы опредѣленныхъ уравненій со многими неизвѣстными, въ которыхъ нѣтъ ни одного извѣстнаго члена. Всѣ такія уравненія будутъ между собою несовмѣстны. Это общее правило приводитъ насъ къ слѣдующему общему заключенію:

Если дано уравненіе

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots=0,$$

расположенное по степенямъ нѣкоторой перемѣнной величины $x$, котораго коефиціенты A, B, C, D,... неизвѣстны и независимы отъ $x$, то какія бы числа мы ни взяли на мѣсто $x$ для опредѣленія коефиціентовъ, всегда получится:

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ D=0,\ldots$$

**104.** Это можно выводить и не изъ общихъ формулъ. Возмемъ, напримѣръ, уравненіе

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3=0$$

только съ четырьмя неизвѣстными коефиціентами A, B, C, D, и представимъ, что перемѣнное количество $x$ обратилось въ $y$, $z$, $u$; то, для опредѣленія четырехъ коефиціентовъ, получатся четыре уравненія:

$$\begin{aligned}&1)\quad A+Bx+Cx^2+Dx^3=0\\ &2)\quad A+By+Cy^2+Dy^3=0\\ &3)\quad A+Bz+Cz^2+Dz^3=0\\ &4)\quad A+Bu+Cu^2+Du^3=0.\end{aligned}$$

Станемъ послѣдовательно вычитать изъ перваго уравненія второе, третье и четвертое:

$$\begin{aligned}&1)-2)\quad B(x-y)+C(x^2-y^2)+D(x^3-y^3)=0\\ &1)-3)\quad B(x-z)+C(x^2-z^2)+D(x^3-z^3)=0\\ &1)-4)\quad B(x-u)+C(x^2-u^2)+D(x^3-u^3)=0.\end{aligned}$$

Раздѣлимъ первое изъ сихъ уравненій на $x-y$, второе на $x-z$, третье на $x-u$:

$$B+C(x+y)+D(x^2+xy+y^2)=0$$
$$B+C(x+z)+D(x^2+xz+z^2)=0$$
$$B+C(x+u)+D(x^2+xu+u^2)=0.$$

Здѣсь вычтемъ второе и третье уравненія изъ перваго:

$$C(y-z)+D(xy+y^2-xz-z^2)=0$$
$$C(y-u)+D(xy+y^2-xu-u^2)=0$$

или

$$C+D(x+y+z)=0$$
$$C+D(x+y+u)=0.$$

Чрезъ взаимное вычитаніе послѣднихъ, находимъ:

$$D(z-u)=0.$$

Но какъ $z-u$ не нуль, то необходимо $D=0$.

Послѣ сего, изъ $C+D(x+y+z)=0$, выходитъ $C=0$; изъ $B+C(x+y)+$ $+D(x^2+xy+y^2)=0$ слѣдуетъ, что $B=0$; а наконецъ изъ $A+Bx+Cx^2+$ $+Dx^3=0$ получается $A=0$.

Изъ всего этого проистекаетъ общій законъ относительно равенства многочленовъ:

*Два многочлена, расположенные по степенямъ одной и той же буквы $x$, представляющей нѣкоторую перемѣнную величину, могутъ быть равны между собою, при всякихъ измѣненіяхъ $x$, только тогда, когда численные коефиціенты, помножающіе равныя степени $x$, будутъ равны между собою.*

Положимъ, что должны быть равны между собою многочлены

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots,$$

независимо отъ величинъ перемѣнной $x$, которыхъ коефиціенты $A$, $B$, $C\ldots$, $a$, $b$, $c,\ldots$ постоянны и независимы отъ $x$; то, перенеся всѣ члены въ одну часть уравненія

$$(A-a)+(B-b)x+(C-c)x^2+(D-d)x^3+\ldots\ldots=0,$$

мы приводимся къ предыдущему случаю; и чтобъ это равенство могло быть для всякой величины, какую бы $x$ ни получилъ, необходимо нужно

$$A-a=0,\ B-b=0,\ C-c=0,\ D-d=0,\ldots$$

Этотъ простой и весьма замѣчательный законъ открытъ первоначально *Декартомъ*, и весьма часто употребляется въ Алгебрѣ. Нельзя говорить теперь объ его употребленіяхъ; но мы увидимъ ихъ впослѣдствіи. Онъ извѣстенъ подъ именемъ *начала неопредѣленныхъ предстоящихъ*.

## III. НЕРАВЕНСТВА. ИЗСЛѢДЫВАНІЕ ФОРМУЛЪ ПОСРЕДСТВОМЪ НЕРАВЕНСТВЪ.

**105.** До сихъ поръ мы изслѣдывали формулы, выводимыя изъ различныхъ вопросовъ, только чрезъ измѣненіе величины данныхъ количествъ, означаемыхъ буквами $a$, $b$, $c$,....; но тѣ же формулы можно еще изслѣдывать другимъ образомъ, а именно: искать, при какихъ данныхъ неизвѣстная можетъ сдѣлаться положительною или отрицательною, цѣлою или дробью, и въ какихъ предѣлахъ данная формула имѣетъ это свойство. Для сего надобно умѣть данныя количества подчинять желаемымъ условіямъ *равенства* или *неравенства*, и изъ этихъ условій стараться, посредствомъ преобразованій, найти предѣлы, между которыми тѣ количества могутъ удовлетворять нашимъ требованіямъ. Мы знаемъ главнѣйшія преобразованія равенствъ; теперь разсмотримъ свойства неравенствъ, ихъ преобразованія и начальныя употребленія.

**106.** Когда сличаются между собою количества неравныя, то, обыкновенно, пишутся сряду, и отдѣляются знакомъ $>$ (больше), либо $<$ (меньше): выраженіе такого рода называется *неравенствомъ*. Наприм.

$$a+2b>5c-d,\ \text{или}$$
$$5c-d<a+2b.$$

Все количество, по лѣвую сторону знака $>$ или $<$, называется *первою частію неравенства*, а количество съ правой стороны — *второю частію неравенства*.

Тѣ же самые знаки употребляются иногда перечеркнутые, $\not>$ и $\not<$, и выговариваются: *не больше, не меньше*. Напримѣръ, если надобно означить, чтобы число $a$ было не больше 10 и не менѣе 3, то пишется:

$$a\not>10,\ a\not<3.$$

**107.** Части неравенства могутъ быть обѣ положительныя, или обѣ отрицательныя, либо одна положительная, а другая отрицательная. Наприм.

$$a>b,\quad -p>-q,\quad s>-r;$$

только нельзя написать $-r>s$, потому что всякое количество отрицательное менѣе положительнаго.

**108.** Надъ неравенствами можно дѣлать почти всѣ тѣ же преобразованія, какія дѣлаются надъ равенствами или уравненіями; но есть нѣкоторыя преобразованія, только имъ свойственныя.

1) *Къ обѣимъ частямъ неравенства можно придавать, или изъ нихъ вычитать, равныя количества; отъ этого знакъ неравенства не перемѣняется.* Напримѣръ, если $15>8$, то и

$$15+5>8+5,\ \text{то есть},\ 20>13;$$
$$15-5>8-5,\ -\ -\ 10>3;$$
$$15-18>8-18,\ -\ -\ -3>-10.$$

Если $-5<-3$, то и $-5+7<-3+7$, или $2<4$
$-5-2<-3-2$, или $-7<-5$.

Это свойство показываетъ, что можно всѣ члены неравенства переносить въ первую или во вторую часть его, съ противными знаками, какъ въ уравненіяхъ. Наприм. $7>3$ можно написать $7-3>0$;

$-10<-6$ можно написать $0<10-6$, или $10-6>0$.

2) *Можно обѣ части неравенства помножить или раздѣлить на какое угодно положительное число; отъ этого знакъ неравенства не перемѣнится.*

Наприм. если $a<b$, то и $am>bm$, $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$; это очевидно.

3) *Знакъ неравенства перемѣнится, или это неравенство помножить или раздѣлить на какое ни есть отрицательное число.* — Напримѣръ, если $a>b$, $am>bm$, $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$; то, перенеся части послѣднихъ двухъ въ противныя стороны, получимъ:

$$-bm>-am,\ -\frac{b}{m}>-\frac{a}{m};\ \text{то есть},$$
$$-am<-bm,\ -\frac{a}{m}<-\frac{b}{m},\ \text{или}$$
$$a(-m)<b(-m),\ \ \frac{a}{-m}<\frac{b}{-m}.$$

И такъ, отъ помноженія неравенства $a>b$, и отъ раздѣленія на $-m$, знакъ неравенства перемѣнился. Примѣры: $12>6$, $-10>-15$;

но $12(-2)<6(-2)$, то есть, $-24<-12$;

$$\frac{-10}{-5}<\frac{-15}{-5},\ \text{то есть},\ 2<3.$$

Отсюда видно, что, при перемѣнѣ знаковъ предъ всѣми членами неравенства (т. е. при помноженіи на $-1$), должно перемѣнять и самый знакъ неравенства. Наприм. $5>2$, но $-5<-2$.

4) *Положительныя неравенства согласныя,* то есть, имѣющія тотъ же знакъ $>$ или $<$, *можно слагать между собою, перемножать и возвышать въ положительныя степени, какъ равенства или уравненія, безъ перемѣны знака неравенства.* Наприм. если

$$a>a',\ b>b',\ c>c',\ \text{то и}$$
$$a+b+c>a'+b'+c';\ \text{также и}$$
$$abc>a'b'c'.$$

А полагая $a=b=c$, $a'=b'=c'$, найдется:

$$a^3>a'^3.$$

Все это очевидно, и не требуетъ ни какихъ объясненій.

Если въ неравенствѣ находится *одна часть положительная, а другая отрицательная, то его знакъ не перемѣнится при возвышеніи въ степени нечётныя; но можетъ перемѣниться отъ возвышенія въ степени чётныя*. Наприм. $5>-3,\ 5^2>(-2)^2$; 4

но $5>-7,\ 5^2<(-7)^2$. 7

*Знакъ неравенства всегда перемѣняется отъ возвышенія обѣихъ частей въ степени отрицательныя.*

Наприм. если $a>b$, то $a^{-3}<b^{-3}$; это потому, что

$$a^{-3}=\frac{1}{a^3},\quad b^{-3}=\frac{1}{b^3},$$

но $a>b$, слѣдовательно $\frac{1}{a^3}<\frac{1}{b^3}$.

5) Нельзя позволить вычитать одно неравенство изъ другаго, имѣющаго тотъ же знакъ; потому что большая часть неравенства уменьшаемаго можетъ иногда скорѣе истощиться, нежели меньшая, и тогда знакъ неравенства долженъ перемѣниться. Напримѣръ, если станемъ

$$\begin{array}{r|l} \text{изъ}\ 5>3 & 8>7 \\ \text{вычитать}\ 3>2 & 6>2,\ \text{получимъ} \\ \hline 2>1 & 2<5. \end{array}$$

6) Но, *можно вычитать одно неравенство изъ другаго, имѣющаго противный знакъ; отъ этого составится неравенство, имѣющее знакъ неравенства уменьшаемаго.* — Для доказательства, возмемъ

$$a>b,\ c<d.$$

Но, если $c$ меньше $d$, то можно положить $c=d-h$, и это равенство вычесть изъ $a>b$; получится:

$$a-c>b-d+h,\ \text{слѣдовательно, и подавно}$$
$$a-c>b-d.$$

7) *Неравенства между числами положительными, имѣющія различные знаки, можно дѣлить одно на другое; въ частномъ получится неравенство съ тѣмъ же знакомъ, какой былъ въ неравенствѣ дѣлимомъ.*

Напримѣръ, если $a>b,\ c<d$, то будетъ

$$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $c=d-h$, и на это равенство раздѣлимъ $a>b$; будетъ:

$$\frac{a}{c}>\frac{b}{d-h}.$$

Но вторая дробь сдѣлается еще меньше, если увеличить ея знаменатель, отбросивъ $h$; слѣдовательно $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

**109.** Изъ четырехъ первыхъ свойствъ видно, 1) что всякое дробное неравенство можно приводить къ общему знаменателю, и этотъ знаменатель отбрасывать, какъ въ равенствахъ или уравненіяхъ; 2) что, перенося члены изъ одной части неравенства въ другую съ противными знаками, можно освободить какой угодно членъ, а изъ этого члена какую угодно букву отъ ея коефиціента (чрезъ дѣленіе). Для примѣра, положимъ, что надобно освободить $x$ изъ неравенства

$$\frac{2x+b}{3c} > \frac{4d-c}{5b}.$$

Приведемъ обѣ части къ общему знаменателю, и откинемъ его:

$$5b(2x+b) > 3c(4d-c), \text{ или}$$

$$10bx+5b^2 > 12cd-3c^2; \text{ отсюда}$$

$$10bx > 12cd-5b^2-3c^2, \text{ и, наконецъ,}$$

$$x > \frac{12cd-5b^2-3c^2}{10b}.$$

**110.** Приложимъ теперь свойства неравенствъ къ изслѣдыванію формулъ, выводимыхъ изъ рѣшенія алгебрическихъ вопросовъ съ одною и съ двумя неизвѣстными.

1) Дана формула $x=\frac{2a+4}{10-3a}$, найти, какія *цѣлыя числа* надобно брать вмѣсто $a$, чтобъ $x$ оставался всегда *положительнымъ*, и въ какихъ предѣлахъ?

Для этого надобно, чтобъ числитель и знаменатель были оба положительные или оба отрицательные; а потому

$$2a+4 > 0, \text{ либо } 2a+4 < 0$$

$$10-3a > 0 \qquad 10-3a < 0.$$

Изъ первыхъ двухъ неравенствъ имѣемъ: $a > -2$, $a < 3\frac{1}{3}$; а изъ двухъ послѣднихъ: $a < -2$, $a > 3\frac{1}{3}$. Этотъ послѣдній выводъ заключаетъ въ себѣ противорѣчіе, и потому невозможность; а выводъ первый даетъ настоящіе предѣлы, между которыми заключаются всѣ цѣлыя числа, дѣлающія $x$ положительнымъ. Предѣлъ $-2$ называется нижнимъ, а предѣлъ $3\frac{1}{3}$ высшимъ. Въ самомъ дѣлѣ, взявши числа $-1$, $0$, $1$, $2$, $3$, на мѣсто $a$, получится:

$$x=\frac{2}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{7}, 2, 10.$$

Вообще, *если предѣлы имѣютъ противные знаки, и нѣтъ противорѣчія, то всѣ положительныя величины для $x$ зависятъ отъ чиселъ, заключающихся только между этими предѣлами.*

2 Дана формула $x=\frac{4-2a}{10-3a}$; найти, какія надобно брать числа цѣлыя, положительныя, на мѣсто $a$, чтобъ $x$ оставался положительнымъ, и въ какихъ предѣлахъ?

Беру опять: $4-2a > 0$, либо $4-2a < 0$,

$$10-3a > 0 \qquad 10-3a < 0;$$

и нахожу: $a < 2$, $a < 3\frac{1}{3}$, и также $a > 2$, $a > 3\frac{1}{3}$.

Такимъ образомъ получились два предѣла въ сторону знака $<$, и два предѣла въ сторону знака $>$; изъ нихъ предѣлъ $<3\frac{1}{3}$ включается въ нижнемъ $<2$, а предѣлъ $>2$ включается въ высшемъ $>3\frac{1}{3}$. Начиная отъ этихъ предѣловъ $<2$ и $>3\frac{1}{2}$, можно брать всѣ числа для $a$, чтобы $x$ оставался положительнымъ.

3) *Если, при изслѣдованіи формулы, встрѣтится такое противорѣчіе, которое нельзя исправить и перемѣною знака неравенства въ числителѣ и знаменателѣ, то оно покажетъ, что для $x$ нѣтъ ни одного рѣшенія положительнаго.* Для примѣра возмемъ формулу:

$$x=\frac{a^2+1}{2a-a^2-1}.$$

Въ ней $a^2+1>0$ возможно, но $2a-a^2-1>0$ невозможно, потому что $2a-a^2-1=-(a-1)^2$ существенно $<0$. Но, если знаменатель меньше нуля. то нельзя взять $a^2+1<0$. И такъ, $x$ не имѣетъ положительныхъ рѣшеній, какое бы число ни взяли на мѣсто $a$.

4) Найти, для какихъ цѣлыхъ чиселъ $a$ и $b$ формула

$$x=\frac{15-2a-3b}{3a-5-b}.$$

даетъ рѣшенія положительныя.

Для этого возмемъ сперва $15-2a-3b>0$.

$$3a-5-b>0.$$

Члены $3a$, $-2a$, съ противными знаками; ихъ можно исключить, помноживъ первое неравенство на 2, а второе на 3, и сложивъ; получится $35-11b>0$, откуда

$$b<3\frac{2}{11}.$$

Нельзя исключить $b$ такимъ же образомъ, потому что члены $-3b$, $-b$ въ неравенствахъ съ равными знаками; но можемъ найти

$$a>\frac{15-3b}{2} \text{ изъ перваго неравенства,}$$

$$a>\frac{5+b}{3} \text{ изъ втораго неравенства.}$$

Если $b$ не нуль, то оно $=1$, 2, 3.

Для $b=1$, $a<6$ и $>2$, то есть, $a=3$, 4, 5;

$b=2$, $a<4\frac{1}{2}$ и $>2\frac{1}{3}$, то есть, $a=2$, 3, 4;

$b=3$, $a<3$ и $>2\frac{2}{3}$, то есть, $a=2$.

Если взять $15-2a-3b<0$, $3a-5-b<0$, то нашли бы:

$$b>3\frac{2}{11},\ a>\frac{15-3b}{2} \text{ и } <\frac{5+b}{2};$$ напримѣръ,

для $b=5$, $a>0$, $a<5$.

5) Найти, для какихъ чиселъ $a$ и $b$ формула $x=\frac{8-2a+b}{2b-3a-5}$ даетъ рѣшенія положительныя, которыя больше 1-цы?

Возмемъ: $8-2a+b>0$, $2b-3a-5>0$, и еще

$$8-2a+b>2b-3a-5.$$

Изъ послѣдняго находимъ: $13+a-b>0$, а отсюда

$$a>b-13, \text{ или}$$

$$3a>3b-39;$$

Изъ втораго неравенства получаемъ $3a<2b-5$. Это послѣднее можно вычесть изъ $3a>3b-39$, потому что имѣютъ противные знаки; останется:

$$0>b-34, \text{ или } b<34.$$

Потомъ возмемъ неравенство $2b-3a-5>0$, и вычтемъ изъ него $b<34$ помноживъ это на 2; останется:

$$-3a-5>-68, \text{ или } 3a+5<68; \text{ откуда}$$

$$a<21.$$

Таковы предѣлы для $b$ и $a$. Положимъ $a=20$, $b=30$; найдется $x=4\frac{2}{5}$.

6) Возмемъ формулы $x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}$, $y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$, выведенныя изъ уравненій $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$, и поищемъ условія, при которыхъ будетъ $x>y$, предполагая $x$, $y$, положительными.

Для этого возмемъ сперва

$$cb'>c'b,\ ac'>a'c,\ ab'>a'b, \text{ либо } cb'<c'b,\ ac'<a'c,\ ab'<a'b$$
$$cb'-c'b>ac'-a'c. \qquad \text{и } cb'-c'b<ac'$$

Раздѣливъ $cb'>c'b$ на $a'c<ac'$, найдется третье условіе $ab'>a'b$ (либо $ab'<a'b$ изъ условій обратныхъ). Изъ этого видно, что достаточны только условія:

$\alpha$) $ab'>a'b$, $cb'-c'b>ac'-a'c$, либо $\beta$) $ab'<a'b$ и $cb'-c'b<ac'-a'c$.

Взявши произвольно пять чиселъ: $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$, и пріискавъ къ нимъ шестое $c'$, чтобъ удовлетворялось неравенство $\alpha$) или $\beta$), составятся два уравненія, въ которыхъ $x$, $y$, будутъ положительными, и притомъ $x>y$.

### В. КОГДА ЧИСЛО НЕИЗВѢСТНЫХЪ БОЛѢЕ ЧИСЛА УРАВНЕНІЙ. НЕОПРЕДѢЛЕННЫЙ АНАЛИЗЪ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

**111.** Предположимъ, что для разрѣшенія какого нибудь вопроса дано будетъ число неизвѣстныхъ болѣе числа уравненій: такой вопросъ останется неопредѣленнымъ, потому что число уравненій недостаточно будетъ для опредѣленія этихъ неизвѣстныхъ. Положимъ, напримѣръ, что даны два уравненія съ тремя неизвѣстными $x$, $y$, $z$: изъ этихъ уравненій можно исключить только одну неизвѣстную, наприм. $z$, и тогда выйдетъ одно уравненіе съ двумя неизвѣстными $x$, $y$, изъ котораго нельзя опредѣлить ни ту, ни дугую, потому что одна изъ нихъ всегда будетъ выражаться посредствомъ другой.

Пусть дано уравненіе $2y+3x=5$. Изъ него имѣемъ $y=\frac{5-3x}{2}$. Но этотъ $y$ все-же неопредѣленъ, потому что $x$ неизвѣстенъ. Оттого, если давать неизвѣстной $x$ различныя опредѣленныя величины, столько же разныхъ величинъ получится и для $y$. Наприм.

$$\text{полагая } x=0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\ldots$$
$$\text{найдется } y=2\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2},\ -2,\ldots$$

Каждая величина для $x$, и ей соотвѣтственная величина для $y$, удовлетворяютъ данному уравненію. Слѣдовательно, *уравненія съ двумя неизвѣстными допускаютъ безчисленное множество рѣшеній.*

Поелику $y$ совершенно зависитъ отъ $x$, и измѣняется съ перемѣною сего послѣдняго; то говорятъ, что $y$ есть *функція* отъ $x$, и на оборотъ. Числа 2, 3, 5, въ уравненіи $2y+3x=5$, называются *постоянными*, а $x$, $y$, *перемѣнными.*

**112.** Хотя уравненія такого рода допускаютъ безчисленное множество рѣшеній; но, въ задачахъ, очень часто необходимо нужно бываетъ ограничивать это множество рѣшеній слѣдующими условіями:

1) Чтобы рѣшенія были прямыя, т. е. положительныя; 2) чтобы всѣ онѣ были цѣлыя; и 3) чтобы величина одной изъ неизвѣстныхъ была не больше, или не менѣе нѣкоторой данной.

Этими условіями весьма ограничивается число рѣшеній, такъ что оно бываетъ иногда безконечное, но часто получается небольшое число рѣшеній, и даже ни одного. Такъ, напримѣръ, въ предыдущемъ уравненіи $2y+3x=5$, всѣхъ рѣшеній безчисленное множество; но рѣшеній цѣлыхъ и положительныхъ для $x$, $y$, только одно, а именно: $x=1$, $y=1$.

**113.** Вотъ признакъ, по которому можно угадывать сразу, допускаетъ ли данное уравненіе, $ax+by=c$, рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ, или нѣтъ:

*Оно не допускаетъ рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ, когда коефиціенты $a$, $b$, предъ неизвѣстными имѣютъ общій множитель, а извѣстный членъ $c$ его не содержитъ.*

Пусть этотъ общій множитель $h$, такъ что $a=a'h$, $b=b'h$; тогда уравненіе $ax+by=c$ обращается въ $a'hx+b'hy=c$, или

$$a'x+b'y=\frac{c}{h}.$$

Если $a'$, $b'$, цѣлыя числа, $c$ и $h$ числа первыя между собою; то $\frac{c}{h}$ дробь несократимая. Какое бы цѣлое число мы ни взяли на мѣсто $y$, всегда $x$ получится дробнымъ. Слѣдовательно, такое уравненіе не допускаетъ ни одного рѣшенія, гдѣ бы въ одно время $x$, $y$, были цѣлыми. Таково наприм. уравненіе

$$6x-12y=7;$$

и такія уравненія надобно тотчасъ оставлять безъ разыскиванія цѣлыхъ рѣшеній, потому что оно ихъ не содержитъ.

**114.** *Найти всѣ рѣшенія цѣлыя и положительныя, удовлетворяющія данному уравненію, $ax+by=c$, съ двумя неизвѣстными.*

Надобно изъ этого уравненія освободить ту неизвѣстную, при которой находится меньшій коефиціентъ, раздѣливши на него всѣ члены дѣйствительно: тогда эта неизвѣстная, вообще, выразится цѣлыми членами и при нихъ дробями. А какъ дробей не должно быть, то надобно соединить ихъ вмѣстѣ, и сумму ихъ означить буквою $t$, представляющею цѣлое число. Такимъ образомъ получится второе уравненіе съ меньшими коефиціентами, содержащее вторую неизвѣстную, и новую неизвѣстную $t$. Изъ этого втораго уравненія надобно освободить вторую неизвѣстную, раздѣливъ дѣйствительно всѣ члены на ея коефиціенты: она также выразится цѣлыми членами и дробями при нихъ. Дроби надобно соединить вмѣстѣ, и сумму ихъ означить другою буквою $t'$, представляющею также нѣкоторое цѣлое число. Отъ сего получится третье уравненіе, содержащее только $t$, $t'$. Изъ этого уравненія должно освободить $t$, отдѣлить цѣлые члены отъ дробей, и сумму дробей означить буквою $t''$, и продолжать все то же дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока одна изъ буквъ $t_n$ выразится одними цѣлыми членами. Тогда, возвращаясь отъ послѣдняго уравненія къ предпослѣднему, отъ этого къ слѣдующему, и дѣлая въ нихъ подстановленія, мы наконецъ дойдемъ до того, что неизвѣстныя $x$, $y$, выразятся также цѣлыми членами, содержащими числа и самую послѣднюю букву $t_{n-1}$.

Получивши эти выводы, надобно, по способу неравенствъ, (**110**), отыскать предѣлы, между которыми послѣдняя буква $t_{n-1}$ даетъ въ одно время для

$x$, $y$, рѣшенія положительныя: между этими предѣлами будутъ находиться всѣ искомыя рѣшенія.

Задача. 1.—*Раздѣлить число 124 на двѣ части* A *и* B *такія, чтобы первая дѣлилась безъ остатка на 5, а вторая на 13.*

Пусть $A:5=x$, $B:13=y$; то

$$A=5x.\ B=13y.$$

Но, $A+B=124$; слѣдовательно,

$$5x+13y=124.$$

Освободимъ $x$, при которомъ стоитъ меньшій коефиціентъ,

$$x=\frac{124-13y}{5}=24+\frac{4}{5}-2y-\frac{3}{5}y,\text{ или}$$

$$x=24-2y+\frac{4-3y}{5}.$$

Поелику $x$ должно быть цѣлое, то $\frac{4-3y}{5}$ не должно быть дробью: а потому назовемъ его буквою $t$, отчего выйдетъ:

$$1)\quad x=24-2y+t,\text{ и условное уравненіе}$$

$$t=\frac{4-3y}{5},$$

которое освободимъ отъ знаменателя, $5t=4-3y$, и изъ котораго найдемъ $y$:

$$y=\frac{4-5t}{3}=1-t+\frac{1-2t}{3}.$$

Но $y$ цѣлое число, то и дробное выраженіе $\frac{1-2t}{3}$ должно быть цѣлымъ числомъ, которое посему назовемъ буквою $t'$; получится

$$2)\quad y=1-t+t',$$

и второе условное уравненіе $t'=\frac{1-2t}{3}$, или $3t'=1-2t$, откуда освободимъ

$$t=\frac{1-3t'}{2}=-t'+\frac{1-t'}{2}.$$

Но и $t$ цѣлое число, а потому и $\frac{1-t'}{2}$ должно представлять нѣкоторое цѣлое же число, которое назовемъ буквою $t''$; тогда будемъ имѣть:

$$3)\quad t=-t'+t'',$$

и новое условное уравненіе $\frac{1-t'}{2}=t''$, изъ котораго найдется:

$$4)\quad t'.=1-2t''.$$

Такимъ образомъ $t'$ выразилось цѣлыми членами. Возвращаясь назадъ, подставимъ въ 3) уравненіе на мѣсто $t'$ его величину, получимъ:

$$t=-1+3t''.$$

Величины $t$, $t'$, подставимъ въ 2) уравненіе, и наконецъ величины $y$ и $t'$ въ 1) уравненіе, найдутся:

$$y=3-5t'',$$

$$x=17+13t''.$$

Нашедши для $x$, $y$, выраженія въ цѣлыхъ членахъ и въ функціи нѣкотораго цѣлаго числа $t''$, поищемъ теперь предѣлы для $t''$, между которыми должно брать для него цѣлыя числа, чтобы найти для $x$, $y$, всѣ рѣшенія цѣлыя и положительныя.

Для этого надобно составить неравенства:

$$3-5t''>0,\text{ откуда } t''<\frac{3}{5},$$

$$17+13t''>0 \qquad t''>-\frac{17}{13}.$$

Изъ этого видно, что для $t''$ можно брать цѣлыя числа только 0, и —1. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\begin{array}{llllll} \text{для } t= & 1, & 0, & -1, & -2,\ldots & \text{получится:} \\ y=- & 2, & 3, & 8, & 13,\ldots & \\ x= & 30, & 17, & 4, & -9,\ldots & \end{array}$$

Здѣсь возможны только два рѣшенія въ числахъ цѣлыхъ и положительныхъ, а именно:

$$y=3, \quad x=17,$$

$$\text{либо} \quad y=8, \quad x=4.$$

Слѣдовательно, число 124 можно двоякимъ образомъ раздѣлить на двѣ такія части A и B, чтобы первая дѣлилась безъ остатка на 5, а вторая на 13. Въ первомъ случаѣ:

$$\begin{array}{r} A=5x=5.17=85 \\ B=13y=13.\ 3=39 \\ \hline A+B=124. \end{array}$$

Во второмъ случаѣ:

$$\begin{array}{r} A=5x=5.4=20 \\ B=13y=13.8=104 \\ \hline A+B=124. \end{array}$$

**Задача 2.** *Промѣнять 100 рублей серебромъ на кредитные билеты въ 3 и 5 рублей серебромъ.*

Пусть $x$ число билетовъ въ 3 рубля,

$y$ - - - 5 - ; то

$$3x+5y=100.$$

Освободимъ $x$, у котораго меньшее предстоящее:

$$x=\frac{100-5y}{3}=33-y+\frac{1-2y}{3}.$$

А какъ $x$ должно быть цѣлое число, то $\frac{1-2y}{3}$ должно быть такъ же цѣлое, которое и назовемъ буквою $t$; получится:

$$1) \quad x=33-y+t,\ t=\frac{1-2y}{3},\text{ или}$$

$$3t=1-2y.$$

Изъ послѣдняго уравненія освободимъ $y$:

$$y = \frac{1-3t}{2} = -t + \frac{1-t}{2},\ \text{и положимъ}$$

$$2)\quad y = -t + t',\ \text{и}\ t' = \frac{1-t}{2};\ \text{отсюда}$$

$$3)\quad t = 1 - 2t'.$$

Сдѣлавъ подстановленіе въ уравненія 2) и 1), получимъ, наконецъ:

$$x = 35 - 5t',$$

$$y = -1 + 3t'.$$

Числа $x$, $y$, должны быть цѣлыя и положительныя, слѣдовательно:

$$35 - 5t' > 0,\ \text{откуда}\ t' < 7,$$

$$-1 + 3t' > 0 \qquad t' > \frac{1}{3}.$$

Откуда видно, что цѣлыя числа для $t'$ можно брать только 1, 2, 3, 4, 5, 6, и тогда получимъ:

$$\begin{aligned} t' &= 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6; \\ x &= 30,\ 25,\ 20,\ 15,\ 10,\ 5; \\ y &= 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17. \end{aligned}$$

И такъ, шестью только разными способами можно размѣнять 100 руб. серебромъ на кредитные билеты въ 3 и въ 5 руб. серебромъ; то есть, можно взять 30 первыхъ и 2 вторыхъ, либо 25 первыхъ и 5 вторыхъ, и т. д. Все это оправдывается повѣркою; наприм. если я возму 10 билетовъ трехрублевыхъ и 14 пятирублевыхъ, то сумма ихъ дастъ:

$$10.3 + 14.5 = 30 + 70 = 100\ \text{руб.}$$

**115.** Если даны *два уравненія съ тремя неизвѣстными* $x$, $y$, $z$, то надобно исключить изъ нихъ сперва одну $z$, и получится одно уравненіе съ двумя неизвѣстными. Для отысканія всѣхъ рѣшеній *цѣлыхъ и положительныхъ*, надобно, по предыдущему способу, выразить неизвѣстныя $x$, $y$, цѣлыми членами въ функціи нѣкотораго цѣлаго числа $t$, подставить ихъ въ одно изъ данныхъ уравненій: получится и третья неизвѣстная $z$, выраженная въ томъ же $t$. Наконецъ, надобно отыскать предѣлы, между которыми должно брать цѣлыя числа для $t$, чтобы получить для $x$, $y$, $z$, всѣ рѣшенія цѣлыя и положительныя. Все это можно лучше видѣть изъ слѣдующихъ задачъ:

**Задача.** — *На 385 рублей куплено стульевъ, креселъ и столовъ, а именно: по 5 рублей за стулъ, по 17 руб. за кресло, и по 60 руб. за столъ. При этомъ число стульевъ было втрое болѣе числа креселъ и столовъ. Спрашивается: сколько же куплено каждой этой мебели?*

Пусть $x$ число стульевъ,
$y$ - креселъ,
$z$ - столовъ.

По условію, число стульевъ было втрое болѣе числа креселъ и столовъ; посему,

$$x=3(y+z), \text{ или}$$

$$1)\ x-3y-3z=0; \text{ а за нихъ заплачено}$$

$$2)\ 5x+17y+60z=385 \text{ рублей.}$$

Вотъ два уравненія съ тремя неизвѣстными, гдѣ $x$, $y$, $z$, должны быть цѣлыми числами и положительными.

Исключимъ $x$, помноживъ 1) уравненіе на 5, и, вычтя его изъ втораго, останется:

$$32y+75z=385, \text{ откуда}$$

$$y=\frac{385-75z}{32}=12-2z+\frac{1-11z}{32}, \text{ или}$$

$$(a)\quad y=12-2z+t, \text{ полагая } t=\frac{1-11}{32}, \text{ или}$$

$$32t=1-11z, \text{ и}$$

$$z=-3t+\frac{1+t}{11}.$$

Но $z$ цѣлое число, то и положимъ

$$(b)\quad z=-3t+t', \text{ взявъ } t'=\frac{1+t}{11}, \text{ откуда}$$

$$(c)\quad t=11t'-1.$$

Это подставимъ въ (b) и (a), найдется:

$$z=3-32t',$$

$$y=5+75t', \text{ и, наконецъ,}$$

$$x=3(y+z)=24+129t'.$$

Для того, чтобы $x$, $y$, $z$, были числами цѣлыми и положительными, надобно:

$$3-32t'>0, \text{ или } t'<\frac{3}{32}$$

$$5+75t'>0 \qquad t'>-\frac{5}{75}$$

$$24+129t'>0 \qquad t'>-\frac{24}{129}.$$

Откуда видно, что можно взять только $t'=0$; и тогда найдется: $x=24$, $y=5$, $z=3$. Стало-быть, куплено двѣ дюжины стульевъ, 5 креселъ, и 3 стола.

**Задача.** — *У крестьянина спросили: сколько арбузовъ онъ везетъ въ городъ? Онъ отвѣчалъ: если считать ихъ по десяткамъ, то останется 7; а если считать дюжинами, то останется 9; а всѣхъ менѣе 100.*

Пусть $x$ число десятковъ арбузовъ,
$x$ – дюжинъ,
$z$ полное число всѣхъ арбузовъ.

Считая по десяткамъ, нашли бы полное число арбузовъ $z=10x+7$; а считая дюжинами, выйдетъ полное число $z=12y+9$. Посему:

$$10x+7=12y+9, \text{ или}$$
$$10x=12y+2, \text{ или, короче:}$$
$$5x=6y+1.$$

Освобождаю $x$, и нахожу

$$x=y+\frac{y+1}{5};$$

Но какъ $x$ число цѣлое, то беру

$$1)\quad x=y+t, \text{ полагая } t=\frac{y+1}{5};$$

а изъ этого условнаго уравненія нахожу:

$$2)\quad y=5t-1; \text{ посему,}$$
$$3)\quad x=6t-1.$$

Теперь полное число арбузовъ будетъ:

$$z=10x+7=10(6t-1)+7, \text{ или}$$
$$4)\quad z=60t-3<100$$

А чтобъ $x$, $y$, $z$, были числами цѣлыми и положительными, надобно:

$$6t-1>0, \text{ или } t>\frac{1}{6}$$
$$5t-1>0, \qquad t>\frac{1}{5}$$
$$60t-3<100 \qquad t<\frac{103}{60}.$$

Откуда видно, что только $t=1$ годится для рѣшенія задачи. И въ самомъ дѣлѣ,

$$\begin{array}{rrrr} \text{для } t= & 0, & 1, & 2,\ldots. \\ x= & -1, & 5, & 11,\ldots, \\ y= & -1, & 4, & 9,\ldots. \\ z= & -3, & 57, & 117,\ldots. \end{array}$$

Полное число $z<100$; стало-быть, одно рѣшеніе 57 годится, и значитъ, что у крестьянина 57 арбузовъ.

**116.** Трудность рѣшенія неопредѣленныхъ вопросовъ увеличивается съ увеличеніемъ числа неизвѣстныхъ безъ увеличенія числа уравненій. Это очевидно само собою. А какъ при этомъ должно поступать, покажетъ слѣдующій примѣръ.

Задача.—*Раздѣлить число 25 на четыре части такія, чтобы сумма первой съ удвоенной второю относилась къ суммѣ третьей части съ утроенною четвертою, какъ 3 : 5.*

Пусть $x$, $y$, $z$, $u$, части первая, вторая, третья и четвертая. По условіямъ вопроса должно быть:

$$1)\quad x+y+z+u=25, \text{ и}$$
$$x+2y:z+3u=3:5, \text{ или}$$
$$2)\quad 5x+10y=3z+9u.$$

Помножимъ первое уравненіе на 3, и сложимъ со вторымъ; то, по сокращеніи, останется

$$8x+13y-75=6u,$$

одно уравненіе съ тремя неизвѣстными.

Отсюда освободимъ $u$, при которомъ находится меньшій коефиціентъ:

$$u=x+2y-12+\frac{2x+y-3}{6}.$$

Но какъ $u$ число цѣлое, то положимъ

$$u=x+2y-12+t,\ \text{взявъ}\ t=\frac{2x+y-3}{6},\ \text{или}$$

$$6t=2x+y-3.$$

Отсюда имѣемъ:

1) $y=3+6t-2x$,
2) $u=13t-6-3x$,
3) $z=25-x-y-u=28+4x-19t$.

Поищемъ теперь предѣлы для $t$, взявъ неравенства:

$$\begin{array}{l|l} 3+6t-2x>0, & 2 \\ 13t-6-3x>0, & \\ 28+4x-19t>0. & \end{array}$$

Помноживъ первое неравенство на 2, и сложивъ съ третьимъ, будетъ

$$34-7t>0,\ \text{или}\ t<5.$$

Помножимъ первое неравенство на 3, а второе на 2, и вычтемъ первое изъ втораго, найдется:

$$32t-21>0,\ \text{или}\ t>\frac{21}{32}.$$

Итакъ, можно брать для $t$ только цѣлыя числа 1, 2, 3, 4.

1) Полагая $t=1$,

| | Предѣлы для $x$: |
|---|---|
| будетъ: $y=9-2x$ | $x<2\frac{1}{3}$, |
| $u=7-3x$ | |
| $z=9+4x$ | $x>-2\frac{1}{4}$. |

Посему, здѣсь можно брать $x=1$ и 2.

Для $x=$ 1, 2, найдется:
$y=$ 7, 5,
$u=$ 4, 1,
$z=$13, 17.

2) Полагая $t=2$,

| | Предѣлы для $x$: |
|---|---|
| будетъ: $y=15-2x$ | $x<6\frac{2}{3}$, |
| $u=20-3x$ | |
| $z=4x-10$ | $x>2\frac{1}{2}$. |

Посему, можно брать $x=3,\ 4,\ 5,\ 6$.

Для $x=\ 3,\ \ 4,\ \ 5,\ \ 6$, найдутся:

$y=\ 9,\ \ 7,\ \ 5,\ \ 3,$

$u=11,\ \ 8,\ \ 5,\ \ 2,$

$z=\ 2,\ \ 6,\ 10,\ 14.$

3) Полагая $t=3$,

будетъ: $y=21-2x$

$u=33-3x$

$z=4x-29$

**Предѣлы для** $x$:

$x<11$,

$x>7\frac{1}{4}$.

Посему, можно брать $x=8,\ 9,\ 10$.

Для $x=8,\ \ 9,\ 10$, найдутся

$y=5,\ \ 3,\ \ 1,$

$u=9,\ \ 6,\ \ 3,$

$z=3,\ \ 7,\ 11.$

4) Полагая $t=4$,

найдемъ: $y=27-2x$

$u=46-3x$

$z=4x-48$

**Предѣлы для** $x$:

$x<14$,

$x>12$.

Слѣдовательно, можно взять только $x=13$.

Для $x=13$, получимъ:

$y=\ 1,$

$u=\ 7,$

$z=\ 4.$

И такъ, десятью способами можно раздѣлить число 25 на четыре части $x$, $y$, $z$, $u$, такія, чтобы $x+2y:z+3u=3:5$. Для повѣрки, возмемъ хотя послѣднее рѣшеніе, гдѣ $x=13$, $y=1$, $u=7$, $z=4$.

Сумма этихъ чиселъ $13+1+7+4=25$; а требуемое отноженіе

$$13+2:4+21=3:5, \text{ или}$$

$$15:25=3:5,$$

что совершенно вѣрно.

Задача, размотрѣнная нами, весьма хорошо показываетъ употребленіе неравенствъ въ изслѣдованіяхъ (анализѣ), и заслуживаетъ того, чтобы учащіеся занялись ея рѣшеніемъ.

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

### НЕПРЕРЫВНЫЯ ДРОБИ.

**117.** *Непрерывною дробью* называется такая, у которой знаменатель какое нибудь цѣлое число, сложенное съ дробью; у этой дроби опять знаменатель цѣлое число съ дробью, и т. д. Такова наприм. дробь

$$\cfrac{a}{b+\cfrac{m}{c+\cfrac{n}{d+\dots}}}$$

Частныя дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{m}{c}$, $\frac{n}{d}$,..... входящія въ составъ непрерывной дроби, называются ея *членами приближенія*, и считаются: первый членъ второй, третій, и проч.

**118.** Непрерывная дробь называется *простою*, когда числители всѣхъ ея дробныхъ членовъ суть единицы; наприм.

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\dots}}} \quad \text{или} \quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

Она бываетъ также *конечною* и *безконечною*. Конечная дробь состоитъ изъ опредѣленнаго числа дробныхъ членовъ, а дробь безконечная иметъ безчисленное множество таковыхъ членовъ Наприм.

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{10}}}$$

дробь конечная, имѣющая три члена приближенія.

**119.** Безконечная непрерывная дробь называется *періодическою*, если нѣкоторые изъ ея членовъ возвращаются всегда въ одномъ и томъ же порядкѣ; въ дроби непеpіодической этого не бываетъ. Наприм.

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\dots}}}}$$

дробь періодическая, въ которой два члена повторяются безпрестанно въ одномъ и томъ же порядкѣ.

Здѣсь мы будемъ разсматривать однѣ простыя непрерывныя дроби, конечныя или безконечныя

**120.** Всякая простая *дробь обыкновенная* можетъ быть превращена въ непрерывную дробь конечную; и, на оборотъ, всякая непрерывная дробь конечная происходитъ отъ какой нибудь дроби обыкновенной, соизмѣримой съ единицею. Напримѣръ для превращенія дроби $\frac{100}{347}$ въ непрерывную, надобно раздѣлить ея числитель и заменатель на числитель 100; получится:

$$\frac{100}{347}=\frac{1}{3+\frac{47}{100}}.$$

Числитель и заменатель дроби $\frac{47}{100}$ раздѣлимъ на ея числитель 47, найдется:

$$\frac{47}{100}=\frac{1}{2+\frac{6}{47}}.$$

Числитель и заменатель дроби $\frac{6}{47}$ раздѣлимъ на ея числитель 6, выйдетъ:

$$\frac{6}{47}=\frac{1}{7+\frac{5}{6}}.$$

Наконецъ, $\frac{5}{6}=\frac{1}{1+\frac{1}{5}}.$

Дробь $\frac{1}{5}$ имѣетъ числителемъ 1-цу, оттого и не можетъ уже далѣе разлагаться въ непрерывную дробь.

Послѣ этого, будемъ подставлять выраженія послѣдующихъ дробей въ предшествующія, начиная съ послѣдней, и найдется:

$$\frac{6}{47}=\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}},$$

$$\frac{47}{100}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}},$$

$$\frac{100}{347}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}.$$

Такимъ образомъ обыкновенная дробь $\frac{100}{347}$ вся разложена въ непрерывную, и состоитъ изъ пяти членовъ приближенія.

**121.** Разсматривая приведеніе дроби $\frac{100}{347}$ въ непрерывную, находимъ, что мы сперва дѣлили большее число 347 на меньшее 100, получили частное 3, и остатокъ 47. Потомъ, дѣлили прежній дѣлитель 100 на этотъ первый остатокъ 47; получили частное 2 и второй остатокъ 6. Послѣ того, дѣлили второй остатокъ на третій, третій на четвертый, и т. д., пока не получилось въ остаткѣ ничего. Это дѣйствіе совершенно то же, какое употребляется для розысканія общаго наибольшаго дѣлителя (**48**) между 100 и 347. Частныя числа 3, 2, 7, 1, 5, полученныя такимъ образомъ, дѣлаются знаменателями послѣдовательныхъ членовъ приближенія непрерывной дроби.

Отсюда видно, что дробь $\frac{100}{347}$, или всякая другая несократимая, скорѣе всего разложится въ непрерывную дробь чрезъ розысканіе общаго наибольшаго дѣлителя между ея числителемъ и знаменателемъ:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
 & 3 & 2 & 7 & 1 & 5 \\
347 & 100 & 47 & 6 & 5 & 1 \\
300 & 94 & 42 & 5 & 5 & \\
\hline
47 & 6 & 5 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Отъ сего тотчасъ получатся всѣ знаменатели членовъ приближенія для непрерывной дроби, и она будетъ:

$$\frac{100}{347}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}.$$

### ПЕРЕХОДЪ ОТЪ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБИ КЪ ОБЫКНОВЕННОЙ; ЗАКОНЪ СОСТАВЛЕНІЯ СЕЙ ПОСЛѢДНЕЙ ИЗЪ ЧЛЕНОВЪ ПРИБЛИЖЕНІЯ ПЕРВОЙ.

**122.** Назовемъ чрезъ $\frac{m}{n}$ полное выраженіе непрерывной дроби, и пусть будетъ ея общій видъ

$$\frac{m}{n}=\cfrac{x}{a+\cfrac{y}{b+\cfrac{z}{c+\cfrac{u}{d+\cfrac{t}{e+\ldots\ldots}}}}}$$

гдѣ $a, b, c, d, \ldots, x, y, z, u, \ldots$ цѣлыя числа, и притомъ $x<a, y<b, z<c, \ldots$

Поелику мы не можемъ взять безконечное число членовъ приближенія непрерывной дроби, чтобъ найти ея полную величину $\frac{m}{n}$, то будемъ къ ней приближаться, бравъ достаточное число членовъ, ея составляющихъ.

Первая приближенная дробь къ $\frac{m}{n}$ найдется, взявши одинъ первый членъ непрерывной дроби, и откинувъ всѣ прочіе: она будетъ

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{x}{a}.$$

Вторая приближенная дробь получится, взявъ два первые члена, и откинувъ всѣ прочіе; или, все равно, взявши $a+\frac{y}{b}$ на мѣсто $a$ въ первомъ приближеніи $\frac{x}{a}$; получится:

$$\frac{m_2}{n_2}=\frac{x}{a+\frac{y}{b}}=\frac{bx}{ab+y}.$$

Третья приближенная дробь получится, когда возмемъ три первые члена, откинувъ прочіе; или, всё то же, когда подставимъ $b+\frac{z}{c}$ вмѣсто $b$ во второе приближеніе:

$$\frac{m_3}{n_3}=\frac{x}{a+\frac{y}{b+\frac{z}{c}}}=\frac{\left(b+\frac{z}{c}\right)x}{a\left(b+\frac{z}{c}\right)+y}$$

$$=\frac{cbx+xz}{abc+cy+az}=\frac{bx.c+x.z}{(ab+y)c+a\,z}.$$

Четвертое приближеніе найдется, взявъ четыре члена непрерывной дроби; или, все равно, подставивъ въ найденное третье приближеніе $c+\frac{u}{d}$ вмѣсто $c$, и будетъ:

$$\frac{m_4}{n_4}=\frac{x}{a+\frac{y}{b+\frac{z}{c+\frac{u}{d}}}}=\frac{bx\left(c+\frac{u}{d}\right)+xz}{(ab+y)\left(c+\frac{u}{d}\right)+az}.$$

$$\frac{m_4}{n_4}=\frac{bcdx+bxu+dxz}{abcd+abu+adz+cdy+yu}$$

$$=\frac{(bcx+xz)d+bxu}{(abc+az+cy)d+(ab+y)u};$$

и такъ далѣе.

**123.** *Законъ составленія приближеній.* — Разсматривая приближенныя дроби: первую, вторую, третью и четвертую, открывается, что всякая послѣдующая дробь составляется изъ двухъ предшествующихъ по весьма простому закону:

$$\frac{x}{a},\ \frac{bx}{ab+y},\ \frac{bx.c+x.z}{(ab+y)c+a.z},$$

а именно: третья дробь составлена изъ первыхъ двухъ такимъ образомъ, что числитель и знаменатель второй дроби помножены на знаменатель $c$ третьяго члена $\frac{z}{c}$, а числитель и знаменатель первой дроби на числитель $z$ этого члена,

$$\frac{bx.c}{(ab+y)c},\ \frac{x.z}{a.z};$$

потомъ взята сумма числителей, и раздѣлена на сумму знаменателей, отчего и получилось:

$$\frac{m_3}{n_3}=\frac{bx.c+x.z}{(ab+y)c+az},\ \text{или короче},\ \frac{m_2c+m_1z}{n_2c+n_1z}.$$

Возмемъ теперь дроби вторую, третью и четвертую:

$$\frac{bx}{ab+y},\ \frac{bcx+xz}{abc+cy+az},\ \frac{(bcx+xz)d+bx.u}{(abc+az+cy)d+(ab+y)u};$$

и здѣсь, для полученія четвертой дроби, надобно помножить числитель и знаменатель третьей дроби на знаменатель $d$ четвертаго члена $\frac{u}{d}$ непрерывной дроби, а числитель и знаменатель второй дроби на числитель $u$ этого члена; потомъ взять сумму числителей и раздѣлить на сумму ихъ знаменателей; отчего и получилось:

$$\frac{m_4}{n_4}=\frac{(bcx+xz)d+bx.u}{(abc+az+cy)d+(ab+y)u}=\frac{m_3d+m_2\cancel{z}\,u}{n_3d+n_2\cancel{z}\,u}.$$

Точно также получается пятая приближенная дробь посредствомъ третьей и четвертой. Для этого, въ четвертую дробь надобно внести $d+\frac{t}{e}$ вмѣсто $d$, и найдется:

$$\frac{m_5}{n_5}=\frac{m_3\left(d+\frac{t}{e}\right)+m_2u}{n_3\left(d+\frac{t}{e}\right)+n_2u}=\frac{(m_3d+m_2u)e+m_3t}{(n_3d+n_2u)e+n_3t}.$$

А какъ $m_3d+m_2u=m_4u$, $n_3u+n_2u=n_4$, то

$$\frac{m_5}{n_5}=\frac{m_4e+m_3t}{n_4e+n_3t},$$

и такъ далѣе. Слѣдственно пятая дробь составилась по тому же закону, по которому составлена четвертая и третья; стало-быть, этотъ законъ составленія есть общій и для всѣхъ прочихъ приближеній.

*Слѣдствіе 1е.* Полная величина $\frac{m}{n}$ непрерывной дроби всегда заключается между каждыми двумя ея послѣдовательными приближеніями, такъ что

$$\frac{m}{n}<\frac{m_1}{n_1}\ \text{и}\ >\frac{m_2}{n_2},$$

$$\text{она}\ <\frac{m_3}{n_3}\ \text{и}\ >\frac{m_4}{n_4},$$

$$\text{она}\ <\frac{m_5}{n_5}\ \text{и}\ >\frac{m_6}{n_6},\ \text{и проч.};$$

и вообще, *всѣ приближенныя дроби нечетнаго порядка больше* $\frac{m}{n}$, *а дроби четнаго порядка* $<\frac{m}{n}$. Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\frac{m}{n}=\cfrac{x}{a+\cfrac{y}{b+\cfrac{z}{c+\cfrac{u}{d+\ldots}}}},$$

то первое приближеніе $\frac{x}{a}=\frac{m_1}{n_1}>\frac{m}{n}$, потому что у дроби ($\frac{x}{a}$ $\frac{m_1}{n_1}$ ~~уменьшенъ~~) знаменатель. меньше.

Далѣе, возмемъ $\frac{m_2}{n_2}=\cfrac{x}{a+\frac{y}{b}}$, и замѣтимъ, что

$$\frac{y}{b}>\cfrac{y}{b+\frac{z}{c}}, \text{ или}$$

$$a+\frac{y}{b}>a+\cfrac{y}{b+\frac{z}{c}}; \text{ стало-быть,}$$

$$\frac{m_2}{n_2}=\cfrac{x}{a+\frac{y}{b}}<\cfrac{x}{a+\cfrac{y}{b+\cfrac{z}{c+\ldots}}},$$

$$\text{то есть, } \frac{m_2}{n_2}<\frac{m}{n}.$$

А какъ $\frac{m_1}{n_1}>\frac{m}{n}$; то ясно, что $\frac{m}{n}$ заключается между $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$.

Потомъ возмемъ третій членъ приближенія; онъ будетъ:

$$\frac{z}{c}>\cfrac{z}{c+\cfrac{u}{d+\ldots}}, \text{ или}$$

$$b+\frac{z}{c}>b+\cfrac{z}{c+\cfrac{u}{d+\ldots}};$$

$$\text{а потому, } \cfrac{y}{b+\frac{z}{c}}<\cfrac{y}{b+\cfrac{z}{c+\cfrac{u}{d+\ldots}}}, \text{ или}$$

$$a+\cfrac{y}{b+\frac{z}{c}}<a+\cfrac{y}{b+\cfrac{z}{c+\cfrac{u}{d+\ldots}}};$$

слѣдовательно:

$$\cfrac{x}{a+\cfrac{y}{b+\frac{z}{c}}}>\cfrac{x}{a+\cfrac{y}{b+\cfrac{z}{c+\cfrac{u}{d+\ldots}}}}$$

то есть, $\frac{m_3}{n_3} > \frac{m}{n}$.

Но видѣли, что $\frac{m_2}{n_2} < \frac{m}{n}$,

стало-быть, полная дробь $\frac{m}{n}$ заключается между двумя послѣдовательными къ ней приближеніями $\frac{m_2}{n_2}$ и $\frac{m_3}{n_3}$, и такъ далѣе. Очевидно также, что всѣ приближенія нечетнаго порядка больше $\frac{m}{n}$, а четнаго порядка меньше $\frac{m}{n}$

*Слѣдствіе 2-е.* — Отъ этого, послѣдующія приближенія, вычитаемыя изъ ближайшихъ имъ предшествующихъ, даютъ разности попеременно положительныя и отрицательныя, и каждая разность равна произведенію числителей членовъ приближенія, раздѣленному на произведеніе знаменателей сравниемыхъ дробей. Эти разности становятся тѣмъ меньше, чѣмъ высшихъ разрядовъ бываютъ сравниваемыя приближенныя дроби.

Такимъ образомъ находимъ:

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2} = \frac{x}{a} - \frac{bx}{ab+y} = + \frac{yx}{a(ab+y)} = + \frac{y}{n_1 n_2};$$

$$\frac{m_2}{n_2} - \frac{m_3}{n_3} = \frac{bx}{ab+y} - \frac{(bcx+xz)}{abc+az+cy} = - \frac{yz}{(ab+y)(ac+az+cy)}$$

$$= - \frac{xyz}{n_2 n_3};$$

$$\frac{m_3}{n_3} - \frac{m_4}{n_4} = \frac{bcx+xz}{abc+az+yc} - \frac{(bcdx+bxu+dxz}{abcd+abu+adz+cdy-yu}$$

$$= + \frac{xyzu}{n_3 n_4}$$

нашли бы также, что

$$\frac{m_4}{n_4} - \frac{m_5}{n_5} = - \frac{xyzut}{n_4 n_5}, \text{ и т. д.}$$

И такъ, всякая разность изображается дробью, у которой знаменатель равенъ произведенію знаменателей сравнительныхъ дробей, а числитель равенъ произведенію числителей членовъ приближенія, входящихъ въ эти дроби.

Сверхъ того, видно, что вторая разность менѣе первой

$$\frac{xyz}{(ab+y)(abc+az+cy)} < \frac{xy}{a(ab+y)}, \text{ то есть}$$

$$\frac{z}{abc+az+cy} < \frac{1}{a},$$

потому что $z =$ или $< c$, и $a$, $b$, $c$, $y$, суть числа цѣлыя. Потомъ, нашли бы также, что

$$\frac{xyzu}{n_3 n_4} < \frac{xyz}{n_2 n_3}, \text{ или } \frac{m_4}{n_4} < \frac{m_2}{n_2}.$$

То есть, послѣдующія разности становятся тѣмъ меньше, чѣмъ высшихъ порядковъ бываютъ сравниваемыя дроби.

*Слѣдствіе 3-е.* — Чаще всего встрѣчаются непрерывныя дроби, въ которыхъ всѣ числители членовъ приближенія суть единицы, то есть,

$x=y=z=u=\ldots\ldots=1$; тогда

$$\frac{m}{n}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}}}$$

Въ такомъ лучаѣ, послѣдовательными приближеніями будутъ:

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{1}{a},\quad \frac{m_2}{n_2}=\frac{b}{ab+1},\quad \frac{m_3}{n_3}=\frac{bc+1}{(ab+1)c+a},$$

$$\frac{m_4}{n_4}=\frac{(bc+1)d+b}{(ab+1)d+ad+ab+1}, \text{ и такъ далѣе.}$$

Здѣсь составленіе всякой приближенной дроби изъ двухъ ей предшествующихъ еще проще. Напримѣръ: третье приближеніе $\frac{bc+1}{(ab+1)c+a}$ составлено изъ втораго $\frac{b}{ab+1}$ и первая $\frac{1}{a}$; числитель и знаменатель второй дроби помножены на знаменатель $c$ третьяго члена $\frac{1}{c}$, потомъ взята сумма $(bc+1)$ числителей и раздѣлена на сумму $(ab+1)c+a$ знаменателей. Точно также составлено четвертое приближеніе посредствомъ втораго и третьяго.

**124.** Этотъ законъ подаетъ весьма легкій способъ находить всѣ послѣдовательныя приближенія къ непрерывной дроби, будетъ ли она конечная или безконечная. Пусть

$$\frac{m}{n}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{6}}}}}}$$

Возмемъ двѣ первыя приближенныя дроби:

$$\frac{1}{2} \text{ и } \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7}}=\frac{7}{15},$$

поставимъ ихъ въ одной строкѣ; надъ второю дробью, и надъ мѣстами, послѣдующихъ дробей: третьей, четвертой, и т. д., напишемъ знаменатели 1, 5, 10, 6, третьяго, четвертаго и т. д. членовъ, то есть:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 5 & 10 & 6 & \\ \frac{1}{2}, & \frac{7}{15}, & \frac{8}{17}, & \frac{47}{100}, & \frac{478}{1017}, & \frac{2915}{6202} \end{array}$$

Потомъ, руководствуясь означеннымъ закономъ, найдемъ третье приближеніе:

$$\frac{7.1+1}{15.1+2}=\frac{8}{17};$$

четвертое приближеніе..... $\frac{5.8+7}{5.17+15}=\frac{47}{100}$,

пятое приближеніе......... $\frac{10.47+8}{10.100+17}=\frac{478}{1017}$,

и, наконецъ,............... $\frac{6.478+47}{6.1017+100}=\frac{2915}{6202}$.

**125.** Разности между приближенными дробями, получаемыя чрезъ вычитаніе каждой послѣдующей дроби изъ предшествующей, будутъ:

$$\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}=+\frac{1}{n_1n_2},\ \text{откуда}\ m_1n_2-m_2n_1=+1;$$

$$\frac{m_2}{n_2}-\frac{m_3}{n_3}=-\frac{1}{n_2n_3},\qquad m_2n_3-m_3n_2=-1;$$

$$\frac{m_3}{n_3}-\frac{m_4}{n_4}=+\frac{1}{n_3n_4},\qquad m_3n_4-m_4n_3=+1;$$

$$\frac{m_4}{n_4}-\frac{m_5}{n_5}=-\frac{1}{n_4n_5},\qquad m_4n_5-m_5n_4=-1;$$

........................................................................

$$\frac{m_r}{n_r}-\frac{m_{r+1}}{n_{r+1}}=\pm\frac{1}{n_rn_{r+1}},$$

Отсюда заключаемъ:

a) Поелику всякая разность $m_2n_3-m_3n_2=-1$,

или $m_3n_4-m_4n_3=+1$,

изображается единицею, то между $m_2n_3$, $m_3n_2$, также между $m_3n_4$, $m_4n_3$, не можетъ быть ни какихъ общихъ множителей кромѣ единицы; слѣдовательно, всѣ послѣдовательныя приближенія $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, $\frac{m_3}{n_3}$, $\frac{m_4}{n_4}$,... суть дроби несократимыя.

b) Послѣдующія разности $\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}$, $\frac{m_3}{n_3}-\frac{m_4}{n_4}$,...... имѣютъ попеременно знаки + и —; каждая разность изображается дробью, у которой числитель единица, а знаменатель произведеніе знаменателей сравниваемыхъ дробей.

c) Поелику знаменатели $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$,.... становятся постепенно болѣе и болѣе; то послѣдовательныя разности $+\frac{1}{n_1n_2}$, $-\frac{1}{n_2n_3}$, $+\frac{1}{n_3n_4}$,... между приближеніями дѣлаются менѣе и менѣе.

d) А какъ полная величина $\frac{m}{n}$ непрерывной дроби заключается между $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$, между $\frac{m_2}{n_2}$ и $\frac{m_3}{n_3}$, и т. д., и вообще между $\frac{m^r}{n_r}$ и $\frac{m_{r+1}}{n_{r+1}}$, она менѣе всѣхъ приближеній нечетнаго порядка, а болѣе приближеній четнаго порядка; то разности, $+\frac{1}{n_1n_2}$, $-\frac{1}{n_2n_3}$,.... $\pm\frac{1}{n_rn_{r+1}}$, можно назвать предѣлами погрѣшностей оныхъ приближеній къ $\frac{m}{n}$. И въ самомъ дѣлѣ, если вмѣсто $\frac{m}{n}$ возмемъ $\frac{m_2}{n_2}$ или $\frac{m_3}{n_3}$, то сдѣлаемъ погрѣшность менѣе нежели $-\frac{1}{n_2n_3}$. И вообще, если вмѣсто

$\frac{m}{n}$ возмемъ $\frac{m_r}{n_r}$ или $\frac{m_{r+1}}{n_{r+1}}$, то сдѣлаемъ погрѣшность менѣе нежели $\pm\frac{1}{n_r n_{r+1}}$. Но $n_r < n_{r+1}$, то, взявши $n_r$ вмѣсто $n_{r+1}$, получится дробь $\pm\frac{1}{n_r^2} > \frac{1}{n_r n_{r+1}}$; слѣдовательно и подавно можно сказать, что если вмѣсто $\frac{m}{n}$ взять $\frac{m_r}{n_r}$, то сдѣлаемъ погрѣшность менѣе нежели $\pm\frac{1}{n_r^2}$. Эта послѣдняя дробь и берется обыкновенно для приблизительнаго выраженія предѣла погрѣшности.

Для примѣра, возмемъ дробь

$$\frac{m}{n}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{6}}}}}}.$$

Ея послѣдовательныя приближенія были (**124**)

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{1}{2}=0{,}500000........>\frac{m}{n}$$
$$\frac{m_2}{n_2}=\frac{7}{15}=0{,}466666.......<\frac{m}{n}$$
$$\frac{m_3}{n_3}=\frac{8}{17}=0{,}470588........>\frac{m}{n}$$
$$\frac{m_4}{n_4}=\frac{47}{100}=0{,}470000......<\frac{m}{n}$$
$$\frac{m_5}{n_5}=\frac{478}{1017}=0{,}4700098......>\frac{m}{n}$$
$$\frac{m_6}{n_6}=\frac{2915}{6202}=0{,}47000967....=\frac{m}{n}.$$

Если вмѣсто $\frac{m}{n}$ возмемъ $\frac{47}{100}$, то сдѣлаемъ погрѣшность менѣе нежели $\frac{1}{100^2}=0{,}0001$. И въ самомъ дѣлѣ, разность

$$\frac{m}{n}-\frac{m_4}{n_4}=0{,}47000967....-0{,}4700000$$
$$=0{,}00000967....<0{,}0001.$$

**126.** Составимъ послѣдовательныя разности:

$$\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}=+\frac{1}{n_1n_2}$$
$$\frac{m_2}{n_2}-\frac{m_3}{n_3}=-\frac{1}{n_2n_3}$$
$$\frac{m_3}{n_3}-\frac{m_4}{n_4}=+\frac{1}{n_3n_4}$$
$$........................$$
$$\frac{m_r}{n_r}-\frac{m_{r+1}}{n_{r+1}}=\pm\frac{1}{n_rn_{r+1}}$$, и сложимъ, то получится:

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_{r+1}}{n_{r+1}} = \frac{1}{n_1 n_2} - \frac{1}{n_2 n_3} + \frac{1}{n_3 n_4} - \frac{1}{n_4 n_5} + \ldots \pm \frac{1}{n_r n_{r+1}}$$

Если $\frac{m_{r+1}}{n_{r+1}} = \frac{m}{n}$, то отсюда найдется:

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1} - \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_2 n_3} - \frac{1}{n_3 n_4} + \ldots\ldots \pm \frac{1}{n_r n_{r+1}}.$$

Слѣдовательно, всякая обыкновенная дробь, или дробь, разложенная въ непрерывную, изображается рядомъ простыхъ дробей по весьма очевидному закону, нетребующему изъясненія.

Такимъ образомъ дробь $\frac{m}{n} = \frac{2915}{6202}$, для которой $\frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{2}$, и сверхъ того $n_1 = 2$, $n_2 = 15$, $n_3 = 17$, $n_4 = 100$, $n_5 = 1017$, изобразится рядомъ:

$$\frac{2915}{6202} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.15} + \frac{1}{15.17} - \frac{1}{17.100} + \frac{1}{100.1017} - \frac{1}{1017.6202}.$$

**127.** Непрерывныя дроби имѣютъ многія полезныя употребленія: 1) для вычисленія дробей несоизмѣримыхъ, которыхъ полнаго выраженія мы получить не можемъ, но къ которымъ можемъ приближаться такъ близко, какъ угодно, и на всякомъ шагу знать степень приближенія; 2) для простѣйшаго приближеннаго выраженія такихъ обыкновенныхъ дробей, которыхъ числитель и знаменатель велики, и суть первые между собою. Такъ, напримѣръ, еслибы хотѣли мы, вмѣсто дроби $\frac{2915}{6202}$, получить весьма близкую къ ней дробь, только гораздо простѣйшую, и удобнѣе удержимую въ памяти; то, разложивъ ее въ непрерывную дробь:

$$\frac{2915}{6202} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{6}}}}}},$$

нашли бы ея приближенія:

$$\frac{1}{2},\ \frac{7}{15},\ \frac{8}{17},\ \frac{47}{100},\ \frac{478}{1017},$$

и потомъ взяли бы, наприм. $\frac{47}{100} = 0,47$ вмѣсто $\frac{2915}{6202}$; погрѣшность была бы менѣе 0,0001.

**128.** *Прибавленіе.* — Иногда нужно бываетъ найти приближенную величину непрерывной дроби

$$\frac{m}{n} = \cfrac{x}{a - \cfrac{y}{b - \cfrac{z}{c - \cfrac{u}{d - \ldots}}}}$$

въ такомъ случаѣ надобно обратиться къ формуламъ общимъ (**123**), и подставить въ нихъ $-y$, $-z$, $-u$, $-\ldots$ вмѣсто $y$, $z$, $u$,…, то послѣдовательныя приближенія найдутся:

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{x}{a},\quad \frac{m_2}{n_2}=\frac{bx}{ab-y},$$

$$\frac{m_3}{n_3}=\frac{bcx-xz}{abc-cy-az}=\frac{bx.c-x.z}{(ab-y)c-a.z}=\frac{m_2c-m_1z}{n_2c-n_1z},$$

также
$$\frac{m_4}{n_4}=\frac{m_3d-n_2u}{n_3d-n_2u},$$

$$\frac{m_5}{n_5}=\frac{m_4e-m_3t}{n_4e-n_3t},\ \text{и т. д.}$$

Слѣдовательно, здѣсь всякая послѣдующая приближенная дробь, наприм. $\frac{m_3}{n_3}$, составляется также изъ двухъ предшествующихъ $\frac{m_2}{n_2}$, $\frac{m_1}{n_1}$, и также числитель и знаменатель дроби $\frac{m_2}{n_2}$ помножаются на знаменатель $c$ слѣдующаго члена $\frac{z}{c}$, а числитель и знаменатель дроби $\frac{m_1}{n_1}$ на $z$, потомъ *берется разность числителей и дѣлится на разность знаменателей*.

Разности между послѣдовательными приближеніями:

$$\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}=-\frac{xy}{n_1n_2}$$

$$\frac{m_2}{n_2}-\frac{m_3}{n_3}=+\frac{xyz}{n_2n_3}$$

$$\frac{m_3}{n_3}-\frac{m_4}{n_4}=-\frac{xyzu}{n_3n_4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

тоже имѣютъ попеременно знаки $+$ и $-$; только порядокъ знаковъ совершенно обратный порядку ихъ въ прежнемъ общемъ случаѣ.

Для $x=y=z=u=\ldots=1$,

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{1}{a},\quad \frac{m_2}{n_2}=\frac{b}{ab-1},$$

$$\frac{m_3}{n_3}=\frac{b.c-1}{(ab-1)c-a}=\frac{m_2c-m_1}{n_2c-n_1},$$

$$\frac{m_4}{n_4}=\frac{m_3d-m_2}{n_3d-n_2},\ \text{и т. д.}$$

$$\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}=-\frac{1}{n_1n_2},$$

$$\frac{m_2}{n_2}-\frac{m_3}{n_3}=+\frac{1}{n_2n_3},$$

$$\frac{m_3}{n_3}-\frac{m_4}{n_4}=-\frac{1}{n_3n_4},\ \text{и т. д.}$$

**129.** Непрерывная безконечная дробь изображается такимъ же рядомъ, только имѣющимъ безконечное число членовъ, посредствомъ которыхъ она приближается къ своему предѣлу, никогда его не достигая. Весьма замѣчательно, что *предѣлъ всякой безконечной, непрерывной дроби періодической выражается корнемъ уравненія 2-й степени.* Такъ наприм. дробь

$$x = \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \ldots.}}}$$

очевидно, можно написать:

$$x = \frac{b}{a+x}\text{; откуда}$$

$$x^2+ax = b\text{, уравненіе второй степени.}$$

Возмемъ еще дробь $x = \cfrac{b}{a + \cfrac{b'}{a' + \cfrac{b}{a + \cfrac{b'}{a' + \ldots.}}}}$

гдѣ періодъ состоитъ изъ двухъ членовъ приближенія. Эту дробь также можно написать:

$$x = \cfrac{b}{a + \cfrac{b'}{a'+x}}\text{; откуда}$$

$$x = \frac{a'b+bx}{aa'+ax+b'}\text{, и}$$

$$ax^2+(aa'+b'-b)x = a'b\text{,}$$

также уравненіе 2-й степени.

Нашли бы также, что непрерывная періодическая дробь съ тремя, четырьмя, и болѣе, членами приближенія, также зависитъ отъ разрѣшенія уравненія 2-й степени.

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

### О ВОЗВЫШЕНІИ АЛГЕБРИЧЕСКИХЪ КОЛИЧЕСТВЪ ВЪ КВАДРАТЪ И ИЗВЛЕЧЕНІИ КОРНЕЙ КВАДРАТНЫХЪ.

**130.** Для возвышенія даннаго количества въ квадратъ, надобно помножить оное само на себя.

Если *количество одночленное*, то при этомъ надобно: 1) возвысить въ квадратъ его предстоящее; 2) помножить на 2 показатели всѣхъ его буквенныхъ множителей; 3) предъ произведеніемъ поставить знакъ +, будетъ-ли данное количество положительное или отрицательное. 4) Если данное количество дробь, то, для возвышенія въ квадратъ, надобно взять квадратъ ея числителя и раздѣлить на квадратъ знаменателя.

Все это основывается на извѣстныхъ правилахъ умноженія, какъ видно изъ слѣдующихъ примѣровъ:

$$\text{a)}\quad (5a^2b^3)^2 = 5a^2b^3 \times 5a^2b^3 = 25a^4b^6;$$

$$\text{b)}\quad (-6a^n)^2 = (-6a^n)(-6a^n) = 36a^{2n};$$

$$\text{c)}\quad \left(\frac{3ab^2}{4c^3d}\right)^2 = \frac{3ab^2}{4c^3d} \times \frac{3ab^2}{4c^3d} = \frac{9a^2b^4}{16c^6d^2}.$$

**131.** Для возвышенія въ квадратъ количества многочленнаго, надобно открыть законъ, по которому оно производится. А для этого станемъ постепенно возвышать въ квадратъ количество двучленное, трехчленное, и т. д.

Мы знаемъ, что

$$(a+b)^2 = a^2+2ab^2+b^2;$$

теперь возмемъ количество $\overline{a+b}+c$, и примемъ $a+b$ за одинъ членъ, то квадратъ его найдется:

$$(\overline{a+b}+c) = (a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$= a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2.$$

То есть: *квадратъ трехчленнаго количества $a+b+c$ равенъ квадрату двучлена $(a+b)$, сложенному съ удвоеннымъ произведеніемъ этого двучлена на третій членъ $c$, и + квадратъ третьяго члена.*

Возмемъ, далѣе, четырехчленное количество $\overline{a+b+c}+d$, примемъ его $a+b+c$ за одинъ членъ; то квадратъ его получится:

$$(\overline{a+b+c}+d)^2 = (a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2$$
$$= a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2.$$

Здѣсь также видимъ, что *квадратъ четырехчленнаго количества равенъ квадрату количества трехчленнаго, $(a+b+c)^2$, сложенному съ двойнымъ произведеніемъ этого тричлена на четвертый членъ, и + квадратъ четвертаго члена.* — Этотъ законъ мы нашли бы при возвышеніи въ квадратъ количества пятичленнаго, шестичленнаго, и т. д., и узнали бы, что, съ прибавленіемъ новаго члена $d$ къ данному многочлену, прибавляется къ квадрату этого многочлена удвоенное произведеніе суммы всѣхъ его членовъ на этотъ новый, и квадратъ новаго члена.

**132.** Приложимъ этотъ способъ *къ возвышенію въ квадратъ какого ни есть многозначнаго числа*, наприм. 235. Для сего, разложимъ это число на сотни, десятки и единицы:

$$235^2 = (200+30+5)^2;$$

сравнимъ съ квадратомъ тричлена

$$(a+b+c)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2,$$

полагая $200=a$, $30=b$, $5=c$; откроется, что $235^2$ должно состоять изъ квадрата сотенъ, + удвоеннаго произведенія сотенъ на десятки, + квадрата десятковъ, + удвоеннаго произведенія сотенъ и десятковъ на единицы, и + квадрата единицъ, то есть:

$$(235)^2=200^2+2.200.30+30^2+2.230.5+5^2.$$

$$\begin{array}{lrcr} \text{Но,} & 200^2 & = & 40000 \\ & 2.200.30 & = & 12000 \\ & 30^2 & = & 900 \\ & 2.230.5 & = & 2300 \\ & 5^2 & = & 25 \\ \hline \text{Посему,} & 235^2 & = & 55225. \end{array}$$

Мы знаемъ, что квадратъ дроби равенъ квадрату ея числителя раздѣленному на квадратъ знаменателя. А здѣсь замѣтимъ только: 1) что, для возвышенія въ квадратъ цѣлаго числа съ дробью, надобно привесть это дробное число сперва въ неправильную дробь, и потомъ возвышать въ эту степень. Наприм.

$$\left(3\frac{2}{5}\right)^2=\left(\frac{17}{5}\right)^2=\frac{17}{5}\times\frac{17}{5}=\frac{289}{25}.$$

2) Квадратъ десятичной дроби получается какъ квадратъ изъ цѣлаго числа. Онъ долженъ содержать въ себѣ десятичныхъ знаковъ вдвое болѣе, нежели сколько ихъ было въ данной дроби. Напр.

$$(2,53)^2=2,53\times2,53=6,4009.$$

### A. Извлеченіе корня квадратнаго изъ чиселъ.

**133.** *Извлеченіемъ квадратнаго корня* изъ даннаго количества называется дѣйствіе, посредствомъ котораго ищется такой множитель, котораго квадратъ равенъ этому количеству. Этотъ искомый множитель называется *корнемъ квадратнымъ* того количества. Такъ наприм. корень квадратный изъ $4a^2$ есть $2a$; потому что $2a\times2a=4a^2$.

**134.** Часто нужно бываетъ только показать, что надобно извлечь квадратный корень изъ даннаго количества; въ такомъ случаѣ употребляется *коренной знакъ* $\sqrt[2]{\quad}$, или просто $\sqrt{\quad}$. Подъ нимъ пишется то количество, котораго корень квадратный ищется. Наприм.

$$\sqrt{4a^2}=2a,\ \sqrt{10}.$$

Это выговаривается: корень квадратный изъ $4a^2$, корень квадратный изъ 10.

**135.** *Изъ цѣлыхъ чиселъ.* — Для извлеченія корней квадратныхъ изъ цѣлыхъ чиселъ, надобно знать квадраты первыхъ чиселъ; — они находятся въ слѣдующей табличкѣ:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Корни:* | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9 | 10 |
| *Квадраты:* | 1, | 4, | 9, | 16, | 25, | 36, | 49, | 64, | 81 | 100, |

изъ которой видно, что квадрату числа однозначнаго или двузначнаго соотвѣтствуетъ корень однозначный; что самому меньшему трехзначному числу 100 соотвѣтствуетъ корень 10, самое меньшее двузначное число; что не всякое число полный квадратъ. Такъ напримѣръ, число 30 заключается между полными квадратами 25 и 36, а его корень заключается между 5 и 6.

**136.** Корни изъ неполныхъ квадратовъ называются *неизвлекомыми, ирраціональными,* т. е. *несоизмѣримыми съ единицею;* потому что не могутъ быть выражены точнымъ образомъ ни цѣлыми числами, ни дробными. — И въ самомъ дѣлѣ $\sqrt{30} > 5$ и $< 6$, а потому долженъ изобразиться нѣкоторымъ дробнымъ числомъ $\frac{M}{N}$, гдѣ M, N суть первыя между собою, и $M > N$. И такъ, пусть

$$\sqrt{30} = \frac{M}{N};$$

возмемъ квадратъ этого равенства:

$$30 = \frac{M^2}{N^2}.$$

Числа M, N, первыя между собою, потому что дробь $\frac{M}{N}$ несократимая; то и числа $M^2$, $N^2$, также будутъ первыми между собою. (**43**, слѣдст. 2). Стало-быть, дробь $\frac{M^2}{N^2}$ не можетъ быть сокращена, и не можетъ обратиться въ цѣлое число 30. А это и показываетъ, что $\sqrt{30}$ есть число ирраціональное, несоизмѣримое съ единицею. Оно не можетъ быть найдено точнымъ образомъ; но мы увидимъ, что можно находить его приближенныя величины, какія угодно.

**137.** Квадратные корни изъ чиселъ отрицательныхъ называются *невозможными, мнимыми,* наприм. $\sqrt{-4}$; потому что нѣтъ такого числа положительнаго или отрицательнаго, котораго квадратъ былъ бы отрицательный. По этому мы будемъ говорить здѣсь о корняхъ изъ чиселъ и количествъ положительныхъ.

**138.** Прежде извлеченія квадратнаго корня изъ числа, содержащаго три, четыре, или болѣе цифръ, надобно сначала узнать, сколько цифръ должно быть въ его корнѣ. А для этого сравниваютъ данное число съ квадратами:

$$10^2=100,\ 100^2=10000,\ 1000^2=1000000, \text{ и проч.},$$

и смотрятъ, между какими изъ этихъ квадратовъ оно заключается. Положимъ, что дано число 5625. Это число находится между 100 и 10000, слѣдовательно корень его падаетъ между 10 и 100; стало-быть, искомый корень двузначный, то есть, состоитъ изъ десятковъ и единицъ; по этому, данное число 5625 должно содержать въ себѣ *квадратъ десятковъ, удвоенное произведеніе десятковъ корня на его единицы,* и *квадратъ единицъ,* и можетъ быть сравнено съ квадратомъ двучлена $(a+b)^2$, въ которомъ $a$ означаетъ десятки а $b$ единицы корня, т. е.

$$5625=a^2+2ab+b^2.$$

Отыскиваніе же цифръ корня производится, начиная съ цифры высшаго разряда, а именно: надобно сперва найти десятки $a$ корня, и квадратъ ихъ вычесть изъ 5625; получится остатокъ:

$$5625-a^2=2ab+b^2=(2a+b)b.$$

Потомъ надобно взять удвоенное произведеніе $2ab$ десятковъ на искомыя единицы, и раздѣлить на удвоенные десятки $2a$ корня; получатся $2ab:2a=b$ единицы корня. Эти единицы $b$ надобно придать къ $2a$, и сумму $2a+b$ помножить на $b$; произведеніе $(2a+b)b=2ab+b^2$ будетъ остальною частію даннаго квадрата, которую и вычтемъ изъ $5625-a^2$. Если данное число 5625 полный квадратъ, то остатокъ будетъ нуль:

$$5625-a^2-2ab-b^2=0.$$

**139.** Узнавши порядокъ извлеченія корня, я пишу данное число 5625, провожу съ правой стороны вертикальную черту:

| Квадратъ. | Корень. |
|---|---|
| 56,25 | 75 |
| 49 | |
| 72,5 | 14 дес. $+5$ един. $=145$ |
| 725 | $\times 5$ |
| 0 | |

и говорю: квадратъ десятковъ производитъ не менѣе какъ сотни, то и надобно искать его въ сотняхъ. Для этого отдѣляю единицы и десятки запятою, и нахожу, что ближайшій меньшій квадратъ, содержащійся въ 56, есть 49, которому соотвѣтствуетъ корень 7 десятковъ. Число 7 десятковъ ставлю по правую сторону вертикальной черты; для повѣрки беру $7^2=49$, и вычитаю изъ 56. Къ остатку 7 сношу остальные 25. Въ этомъ числѣ 725 должны находиться: удвоенное произведеніе десятковъ корня на единицы и квадратъ единицъ. Но, какъ удвоенное произведеніе десятковъ на единицы даетъ не менѣе какъ десятки; то я отдѣляю 5 единицъ запятою, помножаю 7 десятковъ корня на 2, и на произведеніе 14 дѣлю 72. Частное 5 ставлю на мѣстѣ единицъ корня. Для повѣрки, придаю эти 5 единицъ къ 14 десяткамъ, что составитъ 145; помножаю это все на 5, чтобы заразъ получить удвоенное произведеніе десятковъ на единицы и квадратъ единицъ корня, и нахожу 725. Это вычитаю изъ 725. Остатокъ нуль; слѣдовательно,

$$\sqrt{5627}=75.$$

**140.** Такимъ же образомъ надобно поступать, когда данное число имѣетъ болѣе четырехъ цифръ. Положимъ, что требуется извлечь квадратный корень изъ 54756. Это число заключается между $100^2=10000$ и $1000^2=1000000$; стало-быть, его корень содержится между 100 и 1000, то есть, состоитъ изъ трехъ цифръ: изъ сотенъ, десятковъ и единицъ, и можетъ быть сравнено съ квадратомъ тричлена $a+b+c$, $54756^2=(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$, гдѣ $a$ означаетъ искомыя сотни корня, $b$ его десятки и $c$ единицы.

| Квадратъ. | Корень. |
|---|---|
| 5,47,56 | 234 |
| 4 | |
| 14,7 | 43 |
| 129 | 3 |
| 185,6 | 464 |
| 1856 | 4 |
| 0 | |

И такъ, данное число 54756 должно состоять изъ квадрата сотенъ и десятковъ, изъ удвоеннаго произведенія сотенъ и десятковъ на единицы и квадрата единицъ. Но, поелику квадратъ десятковъ производитъ не менѣе какъ сотни, гдѣ его должно искать, то отдѣлимъ десятки и единицы запятою. Квадратъ сотенъ производитъ не менѣе, какъ десятки тысячь, въ которыхъ его надобно искать, то отдѣлимъ тысячи и сотни запятою. Поступая такимъ образомъ, мы раздѣлимъ все данное число на классы отъ правой руки къ лѣвой, въ каждомъ по двѣ цифры; только въ послѣднемъ классѣ можетъ быть и одна цифра. *Число классовъ всегда показываетъ число цифръ корня.*

Замѣтивъ это, я ищу квадратъ сотенъ въ 5; ему соотвѣтствуетъ ближайшій корень 2 сотни. Беру $2^2=4$, и вычитаю изъ 5; къ остатку сношу слѣдующій классъ 47. Въ числѣ 147 сотенъ должны заключаться $2ab+b^2$, то есть, удвоенное произведеніе сотенъ корня на его десятки, и квадратъ десятковъ. А какъ удвоенное произведеніе сотенъ на десятки даетъ тысячи и должно въ нихъ заключаться; то я отдѣляю цифру 7 сотенъ запятою, удвояю 2 сотни корня, что составитъ 4 сотни; дѣлю 14 на 4. Частное 3 десятка ставлю подлѣ 2 сотенъ корня, и также подлѣ 4; число 43 помножаю на 3, и произведеніе вычитаю изъ 147. Къ остатку 18 сношу послѣдній классъ 56. Во всемъ этомъ остаткѣ 1856 должны находиться $2(a+b)c+c^2$, то есть, удвоенное произведеніе сотенъ и десятковъ корня на его единицы, и квадратъ единицъ. А чтобы найти единицы корня, я отдѣляю 6 единицъ остатка запятою, удвояю 23 десятка, что составитъ 46; дѣлю 185 на 46, и частное 4 единицы ставлю подлѣ 23 десятковъ корня, и подлѣ 46. Число 464 помножаю на 4, и произведеніе 1856 вычитаю изъ 1856. Въ остаткѣ нуль; слѣдовательно,

$$\sqrt{54756}=234.$$

**141.** Ежели случится, что, по снесеніи класса, остатокъ съ первою цифрою этого класса будетъ менѣе удвоеннаго произведенія цифръ корня; то должно въ корнѣ поставить нуль, снести подъ черту слѣдующій классъ, и продолжать извлеченіе.

*Примѣръ.* Найти $\sqrt{1162084}$.

| Квадратъ. | Корень. | |
|---|---|---|
| 1,16,20,84 | 1078 | |
| 1 | | |
| 1,6 | 2 | 208 |
| 162,0 | 207 | 8 |
| 1449 | 7 | 1664 |
| 1718,4 | 2148 | |
| 17184 | 8 | |
| 0 | | |

По раздѣленіи даннаго числа на классы, видно, что въ корнѣ его должны быть четыре цифры. Поставивъ 1 тысячу въ корнѣ, и вычтя ея квадратъ изъ перваго класса, я сношу классъ 16, отдѣляю 6 запятою, удвояю цифру корня, и нахожу, что 2 въ 1 не содержится: изъ этого заключаю, что нѣтъ сотенъ въ корнѣ; а потому ставлю нуль на ихъ мѣстѣ, и сношу слѣдующій классъ. Въ числѣ 1620 отдѣляю послѣднюю цифру запятою, и, удвоивъ число 10 сотенъ корня, дѣлю 162 на 20 для того, чтобъ отыскать десятки корня.—Хотя 20 во 162 содержится 8 разъ; но ежели 8 поставимъ подлѣ 20, и число 208 помножимъ на 8, то выйдетъ 1664 произведеніе $>1620$. Это показываетъ, что цифра 8 велика: посему возмемъ 7, и остальное дѣйствіе окончимъ, какъ было показано въ предыдущихъ примѣрахъ. Найдется

$$\sqrt{1162084}=1078.$$

**142.** Всего чаще случается, что, по снесеніи всѣхъ классовъ, и по полученіи всѣхъ цифръ корня, получится остатокъ отъ даннаго числа; то надобно заключить, что это число неполный квадратъ, и что его корня нельзя получить точнымъ образомъ.

*Примѣръ:*

| | |
|---|---|
| 3,49 | 18 |
| 1 | |
| 24,9 | 28 |
| 224 | 8 |
| 25 | |

Въ этомъ примѣрѣ, по снесеніи класса 49, и по удвоеніи десятковъ корня, видно, что, хотя 2 въ 24 содержится 12 разъ, но не только нельзя взять 12, даже 9 было бы еще велико (ибо $29\times9=261$); потому взята цифра 8, и получился остатокъ 25. Очевидно, что 18 есть неполный корень изъ 349.

**143.** Хотя цѣлыя числа, неполные квадраты, не имѣютъ себѣ точныхъ корней; однако же всегда можно искать приближенныя величины такихъ корней различными способами: 1) посредствомъ дробей десятичныхъ, 2) посредствомъ дробей обыкновенныхъ, 3) посредствомъ дробей непрерывныхъ.

а) *Посредствомъ дробей десятичныхъ.* — Это самый обыкновенный и самый употребительной способъ отыскиванія приближенной величины корня. Для сего, *надобно къ данному числу приписать съ правой стороны столько нулей, сколько нужно, чтобъ число ихъ было вдвое болѣе числа десятичныхъ знаковъ, требуемыхъ въ приближенномъ корнѣ, и потомъ извлекать корень какъ изъ цѣлаго числа. По окончаніи дѣйствія, отдѣлить въ корнѣ столько десятичныхъ, сколько ихъ требовалось.*

*Примѣръ.* — Найти $\sqrt{7}$, приближенный и точный только въ трехъ десятичныхъ.

Приписываю къ числу 7 шесть нулей; потомъ дѣлю все на классы, и извлекаю корень какъ изъ цѣлаго числа:

| | |
|---|---|
| 7,00,00,00 | 2645 |
| 4 | |
| 30,0 | 46 |
| 276 | 6 |
| 240,0 | 524 |
| 2096 | 4 |
| 3040,0 | 5285 |
| 26425 | 5 |
| 3975 | |

Въ полученномъ числѣ 2645 отдѣляю три десятичныхъ знака, и нахожу $\sqrt{7}=2,645$ приближенный и точный только въ тысячныхъ доляхъ.

*Примѣръ.* — Найти $\sqrt{5,2}$, приближенный до двухъ десятичныхъ.

Здѣсь приписываю три нуля съ правой стороны числа 5,2, чтобы вышло четыре десятичныхъ; потомъ дѣлю на классы, и извлекаю корень какъ изъ цѣлаго числа:

| | |
|---|---|
| 5,20,00 | 228 |
| 4 | |
| 12,0 | 42 |
| 84 | 2 |
| 360,0 | 448 |
| 3584 | 8 |
| 16 | |

Отдѣляю въ корнѣ двѣ десятичныя, и нахожу

$$\sqrt{5,2}=2,28\ldots.$$

*Примѣры:*

$$\sqrt{2}=1,4142\ldots.$$

$$\sqrt{3}=1,7320\ldots.$$

$$\sqrt{5}=2,2360\ldots.$$

b) *Посредствомъ обыкновенныхъ дробей.*—Положимъ, что изъ числа N, неполнаго квадрата, надобно извлечь корень приближенный до $\frac{1}{n}$. Для этого возмемъ $n^2$, помножимъ и раздѣлимъ на него число N:

$$N=\frac{N.n^2}{n^2};$$

изъ обѣихъ частей равенства извлечемъ корни:

$$\sqrt{N}=\sqrt{\frac{N.n^2}{n^2}}.$$

Мы знаемъ, что квадратъ дроби равенъ квадрату ея числителя, раздѣленному на квадратъ знаменателя; то, обратно, для извлеченія корня квадратнаго изъ дроби, надобно взять корень изъ числителя и раздѣлить на корень изъ знаменателя. Посему,

$$\sqrt{N}=\frac{\sqrt{N.n^2}}{\sqrt{n^2}}=\frac{\sqrt{Nn^2}}{n}.$$

Найдемъ $\sqrt{Nn^2}$ только въ цѣлыхъ числахъ, откинувъ дроби, и пусть $\sqrt{Nn^2}=w$; то будемъ имѣть:

$$\sqrt{N}>\frac{w}{n} \text{ и } \sqrt{N}<\frac{w+1}{n}.$$

А какъ $\frac{w+1}{n}-\frac{w}{n}=\frac{1}{n}$, то очевидно, что взятъ ли $\frac{w}{n}$ или $\frac{w+1}{n}$ за корень приближенный къ $\sqrt{N}$, погрѣшность будетъ менѣе нежели на $\frac{1}{n}$.

*Примѣръ.*—Найти квадратный корень изъ 10, приближенный до $\frac{1}{125}$.

Беру $\sqrt{10}=\sqrt{\frac{10.125^2}{125^2}}=\frac{\sqrt{10\ 125^2}}{125}=\frac{\sqrt{156250}}{125}$;

ищу $\sqrt{156250}=395$, удерживая однѣ цѣлыя числа, откинувъ дроби; и заключаю, что

$$\sqrt{10}>\frac{395}{125}, \text{ но } <\frac{396}{125}.$$

Разность $\frac{396}{125}-\frac{395}{125}=\frac{1}{125}$. Слѣдовательно, найденный приближенный корень $\frac{395}{125}$ разнится отъ истиннаго $\sqrt{10}$ менѣе, нежели на $\frac{1}{125}$.

c) *Посредствомъ дробей непрерывныхъ.* — Весьма замѣчательно, что корень квадратный изъ числа неполнаго квадрата выражается непрерывною періодическою дробью (**129**). Положимъ, что данное число, изъ котораго хотимъ извлечь корень, разлагается на $a^2+b$; то можно взять

$$\sqrt{a^2+b}=a+x,$$

гдѣ $x<1$. Отсюда $x=\sqrt{a^2+b}-a$.

Это выраженіе помножимъ и раздѣлимъ на $\sqrt{a^2+b}+a$; получится:

$$x=\frac{b}{\sqrt{a^2+b}+a}.$$

Сюда внесемъ $a+x$ на мѣсто $\sqrt{a^2+b}$, найдется:

$$x=\frac{b}{2a+x}.$$

На мѣсто $x$ въ знаменателѣ подставимъ $\frac{b}{2a+x}$:

$$x=\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+x}}, \text{ и такъ далѣе.}$$

Посему, $\sqrt{a^2+b}=a+x=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\dots}}}$

Если $b=2$, то

$$\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{2a+\dots}}}}$$

Пусть $b=a$; тогда

$$\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2a+\dots}}}}$$

И вообще, если между $b$ и $2a$ есть общій множитель, непрерывная дробь должна быть періодическою, съ двумя повторяющимися членами приближенія.

*Примѣръ.*—Найти $\sqrt{5}$ приближенный посредствомъ непрерывной дроби.

Замѣчая, что $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1}$, имѣю тотчасъ:

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}$$

Ограничиваясь только четырьмя членами приближенія, найдется:

$$\sqrt{5}=2\frac{72}{305}=2,23606\ldots,$$

который разнится отъ истиннаго менѣе нежели на $\frac{1}{(305)^2}=\frac{1}{93025}$, и потому имѣетъ точность въ пяти десятичныхъ.

*Примѣръ.* — Найти $\sqrt{11}$, приближенный до стотысячныхъ долей включительно, посредствомъ непрерывной дроби.

$$\sqrt{11}=\sqrt{3^2+2}=3+\cfrac{2}{6+\cfrac{2}{6+\cfrac{2}{6+\ldots}}}$$

$$=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}$$

Здѣсь послѣдовательныя приближенія къ дроби корня:

$$\begin{array}{cccc} & & 3 & 6 \\ \frac{1}{3}, & \frac{6}{19}, & \frac{19}{60}, & \frac{120}{379}, \end{array}$$

Взявъ послѣднюю дробь, получаемъ:

$$\sqrt{11}=3\frac{120}{379},$$

который разнится отъ истиннаго менѣе, нежели на $\frac{1}{(379)^2}$, слѣдовательно менѣе нежели на $\frac{1}{100000}$ часть единицы.

*Примѣръ.*—Найти $\sqrt{19}$ приближенный посредствомъ непрерывной дроби.

$$\sqrt{19}=\sqrt{4^2+3}=4+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\ldots}}}}$$

Здѣсь послѣдовательныя приближенія къ дроби корня (**123**):

$$\begin{array}{cccc} 3 & 8 & & \\ \frac{3}{8}, & \frac{24}{67}, & \frac{201}{560}, & \frac{1680}{4681},\ldots \\ & 3 & 8 & \end{array}$$

Взявъ послѣднюю дробь, имѣемъ:

$$\sqrt{19}=4\frac{1680}{4681}.$$

Этотъ корень разнится отъ истиннаго менѣе нежели на $\frac{3^4}{560.4681}$.

Приближеніе получается скорѣе, когда числители членовъ непрерывной дроби суть единицы, или значительно менѣе знаменателей; а потому полезно бываетъ преобразовать данный корень такъ, чтобы онъ выразился непрерывною дробью такого рода. Напримѣръ, мы гораздо скорѣе получимъ приближенный $\sqrt{19}$, взявъ

$$\sqrt{19}=\sqrt{\frac{19.9}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{171};$$

потому что $171=169+2=13^2+2$. Отъ этого

$$\sqrt{19}=\frac{1}{3}\left\{13+\cfrac{2}{26+\cfrac{2}{26+\ldots}}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{13+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{26+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{26+\ldots}}}}\right\}$$

***Примѣръ.***—$\sqrt{43}=\sqrt{36+7}=6+\cfrac{7}{12+\cfrac{7}{12+\cfrac{7}{12+\ldots}}}$

Но лучше взять:

$$\sqrt{43}=\frac{1}{2}\sqrt{43.4}=\frac{1}{2}\sqrt{172}=\frac{1}{2}\sqrt{13^2+3}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{13+\cfrac{3}{26+\cfrac{3}{26+\cfrac{3}{26+\ldots}}}\right\}$$

Взявъ три члена приближенія, найдется корень

$$\frac{1}{2}\,(13{,}1148770\ldots)$$

точный въ семи десятичныхъ.

Иногда можно поступать такъ, какъ показываетъ слѣдующій примѣръ.

Найти $\sqrt{3}$ приближенный посредствомъ непрерывной дроби.

$$\sqrt{3}=\sqrt{2^2-1}=2-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\ldots}}}}$$

Здѣсь приближенныя дроби, которыя надобно вычитать изъ 2, суть:

$$-\frac{1}{4},\ -\frac{4}{15},\ -\frac{\overset{4}{15}}{56},\ -\frac{\overset{4}{56}}{209},\ldots$$

Взявъ послѣднюю дробь, мы получимъ:

$$\sqrt{3}=2-\frac{56}{209}=1,732052....,$$

который будетъ разниться отъ истиннаго менѣе, нежели на $\frac{1}{(209)^2}=0,000023$. И въ самомъ дѣлѣ, непосредственное извлеченіе даетъ

$$\sqrt{3}=1,732050....,$$

и разность оказывается только въ милліонныхъ доляхъ.

**144.** *Изъ дробей.* — Корень квадратный изъ дроби равняется корню изъ числителя, раздѣленному на корень изъ знаменателя. Наприм.:

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}.$$

Приближенные корни изъ дробей, неполныхъ квадратовъ, отыскиваются тѣми же способами, какіе показаны для полученія ихъ изъ цѣлыхъ чиселъ.

1) Данную дробь превращаютъ въ десятичную, и изъ этой десятичной извлекаютъ корень, какъ изъ цѣлаго числа, до столькихъ десятичныхъ, сколько потребуется.

*Примѣръ.* — Найти $\sqrt{\frac{3}{7}}$, приближенный до трехъ десятичныхъ.

Обращаю эту дробь въ десятичную:

$$\frac{3}{7}=0,42857142....;$$

беру только шесть десятичныхъ, отбросивъ всѣ прочія; дѣлю на классы, и извлекаю корень какъ изъ цѣлаго числа:

$$\begin{array}{r|r}
42,85,71 & 654 \\
36 & \\
\hline
68,5 & 125 \\
625 & 5 \\
\hline
607,1 & 1304 \\
5216 & 4 \\
\hline
855 &
\end{array}$$

Въ найденномъ корнѣ отдѣляю три десятичныхъ знака, и получаю:

$$\sqrt{\frac{3}{7}}=0,654....$$

точный только въ этихъ десятичныхъ.

2) Можно употребить и *дроби обыкновенныя* для полученія приближеннаго квадратнаго корня изъ данной дроби. Для этого надобно сдѣлать знаменатель ея полнымъ квадратомъ, помноживъ обѣ части дроби на знаменатель; тогда останется дѣлать приближенное извлеченіе собственно изъ числителя. Наприм.:

$$\sqrt{3\frac{2}{7}}=\sqrt{\frac{23}{7}}=\frac{\sqrt{23.7}}{\sqrt{7^2}}=\frac{1}{7}\sqrt{161}.$$

Извлекши корень изъ 161 только до двухъ десятичныхъ, мы получимъ 12,69. Слѣдовательно, приближенный корень будетъ $\frac{12,69}{7}=\frac{1269}{700}$.

$$\text{А какъ } \frac{1269}{700}<\sqrt{3\frac{2}{7}},$$

$$\text{а } \frac{1270}{700}>\sqrt{3\frac{2}{7}},$$

и разность $\frac{1270}{700}-\frac{1269}{700}=\frac{1}{700}$; то, взявъ $\frac{1269}{700}$ на мѣсто полнаго корня, мы сдѣлаемъ погрѣшность менѣе, нежели на $\frac{1}{700}$.

3) Можно также употребить и *дроби непрерывныя* для извлеченія приближеннаго квадратнаго корня изъ данной дроби, какъ видно изъ слѣдующаго образца, гдѣ требуется извлечь корень изъ $\frac{4}{5}$.

Для этого дѣлаю знаменатель полнымъ квадратомъ:

$$\sqrt{\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{20}{25}}=\frac{1}{5}\sqrt{4^2+4}=\frac{1}{5}\left\{4+\cfrac{4}{8+\cfrac{4}{8+\cfrac{4}{8+\ldots}}}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\left\{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\ldots}}}}\right\}$$

Беру четыре члена приближенія къ дроби, прилагаемой къ 4; нахожу послѣдовательно:

$$\frac{1}{2},\ \frac{8}{17},\ \frac{17}{36},\ \frac{114}{305},\ldots$$

Ограничиваясь послѣднею дробью, получаю:

$$\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{1}{5}\left(4+\frac{144}{305}\right)=0,89442\ldots,$$

гдѣ вѣрны всѣ 5 десятичныхъ.

### В. КОРНИ КВАДРАТНЫЕ ИЗЪ ОДНОЧЛЕННЫХЪ АЛГЕБРИЧЕСКИХЪ КОЛИЧЕСТВЪ.

**145.** Мы знаемъ, что для составленія квадрата изъ одночлена, надобно взять произведеніе квадратовъ всѣхъ его множителей, или, другими словами, взять квадратъ его коефиціента и помножить на 2 показатели всѣхъ его буквенныхъ множителей. Наприм.

$$(5a^3b^2c)^2=5a^3b^2c\times5a^3b^2c=5^2(a^3)^2(b^2)^2c^2=25a^6b^4c^2.$$

Отсюда заключаемъ обратно, что *корень квадратный изъ одночлена равенъ произведенію квадратныхъ корней изъ его множителей;* и что для полученія этого корня надобно поступить обратнымъ путемъ: извлечь корень квадратный изъ коефиціента, и раздѣлить на 2 показатель каждой его буквы. Посему,

$$\sqrt{25a^6b^4c^2}=\sqrt{25}.\sqrt{a^6}.\sqrt{b^4}.\sqrt{c^2}=5a^3b^2c.$$

**146.** Для извлеченія квадратнаго корня изъ дроби, надобно такимъ же образомъ извлекать корень изъ числителя и знаменателя. Наприм.

$$\sqrt{\frac{4a^2b^8}{9c^4d^6}}=\frac{2ab^4}{3c^2d^3}.$$

**147.** Корень квадратный называется неизвлекомымъ изъ алгебрическаго одночлена, если его коефиціентъ или какіе нибудь его буквенные множетели не полные квадраты. Наприм.

$$\sqrt{5a^2} \text{ и } \sqrt{4a^3b^2},$$

оба корня неизвлекомые. Впрочемъ такіе корни могутъ быть приводимы въ простѣйшій видъ, если въ нихъ находятся нѣкоторые множители полные квадраты. Въ такомъ случаѣ можно эти квадраты отдѣлить, извлечь изъ нихъ корни, и, что получится, вынесть за радикалъ въ видѣ множителя. Такъ:

$$\sqrt{5a^2}=\sqrt{5}\,\sqrt{a^2}=a\sqrt{5};$$
$$\sqrt{4a^3b^2}=\sqrt{4.a.a^2.b^2}=\sqrt{4a^2b^2}\,\sqrt{a}=2ab\sqrt{a}.$$

Посредствомъ этого дѣйствія коренныя выраженія дробныя получаютъ иногда значительное сокращеніе. Наприм.

$$\frac{3a^2}{4b}\sqrt{\frac{8b^3}{9a^5c}}=\frac{3a^2}{4b}\sqrt{\frac{2.4.b^2b}{9a^4.a.c}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2b}{ac}}.$$

Обратно: можно всегда множитель, стоящій предъ радикаломъ, внести подъ коренной знакъ; надобно только возвысить его въ квадратъ, и написать множителемъ подъ корнемъ. Наприм.

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}, \text{ потому что}$$
$$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}.\sqrt{b}=a\sqrt{b}.$$

И это обстоятельство подаетъ иногда возможность приводить въ простѣйшій видъ одночленныя алгебрическія дроби. Наприм.

$$6ab\sqrt{\frac{c}{3ab}}=\sqrt{\frac{36a^2b^2c}{3ab}}=\sqrt{12abc}.$$

## Счисленіе коренныхъ количествъ второй степени.

**148.** Оно показываетъ способъ слагать, вычитать, умножать и дѣлить коренныя количества 2-й степени.

Для большей удобности, мы начнемъ съ умноженія и дѣленія.

a) Для умноженія или раздѣленія одного кореннаго количества на другое, надобно помножить или раздѣлить однѣ ихъ подкоренныя количества, и написать подъ однимъ радикаломъ. Такъ, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$;

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Это очевидно изъ того, что $\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$, и что $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

*Примѣръ.* $3a\sqrt{2b}\times\frac{1}{2}a\sqrt{8b}=\frac{3}{2}a^2\sqrt{2b.8b}=\frac{3}{2}a^2.4b=6a^2b$.

*Примѣръ.* $2a\sqrt{27b}:\frac{2}{5}\sqrt{3b}=2a.\frac{5}{2}\sqrt{\frac{27b}{3b}}=5a\sqrt{9}=15a$.

О возвышеніи коренныхъ количествъ, какъ дѣйствительныхъ, такъ и мнимыхъ, мы будемъ говорить впослѣдствіи, въ общемъ трактатѣ о коренныхъ количествахъ· а здѣсь замѣтимъ только, что

$$(\sqrt{a})^2=a, \text{ и } (\sqrt{-a})^2=-a.$$

b) *Для сложенія* или *вычитанія* коренныхъ количествъ 2-й степени, надобно написать эти количества въ строку, соединить знаками + или —, и потомъ сократить, если можно. Сокращеніе дѣлается только между членами *подобными*, то есть, такими, которыхъ подкоренныя количества совершенно равны между собою. Тогда слагаются или вычитаются одни множители при радикалахъ, а коренное количество, какъ общій множитель, выносится внѣ скобокъ. Наприм.

$$3\sqrt{5ab}+4\sqrt{5ab}=(3+4)\sqrt{5ab}=7\sqrt{5ab};$$
$$5\sqrt{2ab}-4\sqrt{2ab}=\sqrt{2ab};$$
$$7a\sqrt{p}\pm5a\sqrt{p}=(7a\pm5a)\sqrt{p}.$$

Но, чтобы точно знать, находятся ли подобные члены въ данной алгебрической суммѣ, надобно, всякой разъ, приводить ея члены въ простѣйшій видъ, извлекая квадратные корни изъ всѣхъ множителей—полныхъ квадратовъ, находящихся подъ радикаломъ, и вынося эти корни за радикалъ въ видѣ множителей. Тогда, подобные члены, если они есть, сами собою, обнаружатся. Наприм.

$$3a\sqrt{8b^3c^2}+\sqrt{2bd^2}=6abc\sqrt{2b}+d\sqrt{2b}=(6ab+d)\sqrt{2b};$$
$$2\sqrt{50}+3\sqrt{32}-5\sqrt{18}=10\sqrt{2}+12\sqrt{2}-15\sqrt{2}=7\sqrt{2}.$$

**149.** Такимъ же образомъ производится счисленіе и между коренными количествами дробными. Только относительно дробей надобно сдѣлать особое и весьма нужное замѣчаніе. Когда одночленная дробь имѣетъ коренное количество въ знаменателѣ, то всегда можно уничтожить радикалъ въ знаменателѣ, чрезъ помноженіе обѣихъ ея частей на это коренное количество.

*Примѣры:* 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.\sqrt{2}.$

2) $\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}=3\sqrt{0,05}.$

3) $\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{(\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}})\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}}=5.$

При сложеніи и вычитаніи такихъ дробныхъ количествъ, надобно всегда освободить ихъ знаменатели отъ радикаловъ, потомъ привести въ простѣйшій видъ радикальные члены, и подобные члены сократить.

*Примѣры:* $2ab\sqrt{\frac{a}{b}}+3\sqrt{a^3b}=2ab\sqrt{\frac{ab}{b^2}}+3a\sqrt{ab}=5a\sqrt{ab};$

$$\frac{5a^2b}{\sqrt{ab}}-\frac{3abc}{\sqrt{bc}}=\frac{5a^2b\sqrt{ab}}{ab}-\frac{3abc\sqrt{bc}}{bc}=3a(\sqrt{ab}-\sqrt{bc}).$$

**150.** Извѣстное свойство, что $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, очень часто употребляется для освобожденія знаменателей дробей отъ коренныхъ количествъ второй степени, если эти знаменатели двучленные, трехчленные, и т. д.

*Примѣры:*

1) Если дана дробь $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, то, помноживъ обѣ ея части на разность $1-\sqrt{2}$, найдется:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1.$$

2) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=-(1+\sqrt{2}).$

3) $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}.$

4) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-z}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}}{x+y-z+2\sqrt{xy}}=$

$$=\frac{(x-y-z)\sqrt{x}+(y-x-z)\sqrt{y}+(z-x-y)\sqrt{z}+2\sqrt{xyz}}{(x+y-z)^2-4xy}.$$

5) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{6}}}=3(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1).$

При сложеніи и вычитаніи такихъ дробей всегда надобно освобождать ихъ знаменатели отъ радикаловъ показаннымъ способомъ, а потомъ приводить къ общему знаменателю и сокращать. Напримѣръ:

$$\frac{1}{3+\sqrt{7}}+\frac{5}{4-\sqrt{11}}-\frac{6}{\sqrt{7}-2}-\frac{1}{2}(\sqrt{7}-5)=$$

$$=\frac{3-\sqrt{7}}{2}+4+\sqrt{11}-2\sqrt{7}-4-\frac{1}{2}(\sqrt{7}-5)=4+\sqrt{11}-3\sqrt{7}.$$

### Извлеченіе квадратнаго корня изъ количествъ многочленныхъ.

**151.** Здѣсь берутся такіе многочлены, которые дѣйствительно суть полныя вторыя степени. Во всѣхъ другихъ случаяхъ непосредственное извлеченіе квадратнаго корня почти безполезно. Поэтому надобно напередъ знать нѣкоторые признаки для многочленовъ — неполныхъ квадратовъ.

1-е. Всякое количество двучленное не можетъ быть полнымъ квадратомъ; потому что квадратъ одночленнаго количества состоитъ изъ одного члена; квадратъ двучленнаго количества состоитъ изъ трехъ членовъ, а квадратъ трехчленнаго количества,

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2,$$

содержитъ шесть членовъ.

2-е. Многочленное количество, освобожденное отъ множителя общаго всѣмъ его членамъ, и неимѣющее въ членахъ своихъ радикальныхъ количествъ, будучи расположено по степенямъ одной буквы, не будетъ полнымъ квадратомъ, если его первый и послѣдній члены неполные квадраты. — Другіе признаки неполноты квадратовъ открываются при самомъ дѣйствіи извлеченія квадратнаго корня.

**152.** Извлеченіе корня квадратнаго изъ многочленовъ ничѣмъ не разнится отъ извлеченія его изъ чиселъ. Оно также производится порядкомъ, совершенно обратнымъ тому, по которому составляется квадратъ. Надобно послѣдовательно отыскивать члены корня, составлять изъ нихъ члены квадрата, и вычитать изъ даннаго многочлена. Если, по исключеніи всѣхъ членовъ квадрата, составленнаго изъ суммы членовъ корня, въ остаткѣ не получится ничего, то найденный корень и будетъ искомымъ. Все же это дѣйствіе производится слѣдующимъ образомъ.

1) Располагаютъ данный многочленъ по убывающимъ степенямъ одной его буквы, извлекаютъ квадратный корень изъ перваго члена: получится *первый членъ корня*, который записываютъ съ правой стороны даннаго количества, и отдѣляютъ отъ него вертикальною чертою. 2) Этотъ первый членъ корня возвышаютъ въ квадратъ и вычитаютъ изъ даннаго многочлена. Въ полученномъ остаткѣ должны находиться: удвоенное произведеніе перваго члена корня на второй неизвѣстный, и еще другіе члены, какіе должны быть въ полномъ квадратѣ. 3) Удвоивъ первый членъ корня, дѣлятъ на него первый членъ остатка;—получаютъ *второй членъ корня.* 4) Составляютъ удвоенное произведеніе перваго члена корня на второй, и квадратъ втораго члена, и вычитаютъ изъ дѣлимаго количества. Если остатка не будетъ, то значитъ корень найденъ, и дѣйствіе кончено. Но, положимъ, что выйдетъ остатокъ; въ такомъ случаѣ онъ долженъ содержать въ себѣ удвоенное произведеніе перваго и втораго членовъ корня на

третій неизвѣстный, и квадратъ третьяго члена. Посему, 5) *третій членъ* найдется, если мы раздѣлимъ остатокъ на удвоенное произведеніе обоихъ членовъ корня. Тогда надобно будетъ составить удвоенное произведеніе перваго и втораго членовъ корня на этотъ третій и квадратъ третьяго члена, и вычесть изъ дѣлимаго. Если остатка не получится, то дѣйствіе кончено, и корень найденъ. Но, если будетъ остатокъ, то онъ опять долженъ содержать въ себѣ удвоенное произведеніе трехъ членовъ корня на четвертый неизвѣстный, и квадратъ четвертаго члена, который надобно будетъ искать также, какъ мы искали третій членъ, и проч.

Можетъ случиться, что, послѣ какого нибудь вычитанія, получится въ остаткѣ число членовъ менѣе числа членовъ корня, либо этотъ остатокъ не можетъ дѣлиться на удвоенное произведеніе всѣхъ найденныхъ членовъ корня; тогда прямо надобно заключить, что данное количество неполный квадратъ, и что корень его неизвлекомый.

*Примѣръ*. Извлечь квадратный корень изъ $4b^2+9a^2-12ab$.

Расположимъ это количество по степенямъ буквы $a$:

| | Квадратъ. | Корень. |
|---|---|---|
| | $9a^2-12ab+4b^2$ | $3a-2b$ |
| | $-9a^2$ | |
| остатокъ | $-12ab+4b^2$ | $6a-2b$ |
| | $+12ab-4b^2$ | $-2b$ |
| | 0 | |

Квадратный корень изъ перваго члена $9a^2$ есть $3a$: напишемъ его за вертикальною чертою съ правой стороны, возвысимъ въ квадратъ, $(3a)^2=9a^2$, и вычтемъ изъ даннаго многочлена. Остатокъ $-12ab+4b^2$ долженъ содержать въ себѣ удвоенное произведеніе перваго члена корня на второй, и квадратъ втораго члена. Чтобы найти второй членъ корня, помножимъ первый членъ $3a$ корня на 2, и на произведеніе $6a$ раздѣлимъ первый членъ $-12ab$ остатка; — найдется $-2b$ второй членъ корня. Для повѣрки, припишемъ $-2b$ къ $6a$, и все это помножимъ на $-2b$: тогда $ba\times(-2b)$ дастъ $-12ab$ удвоенное произведеніе перваго члена корня на второй, а $-2b\times-2b=4b^2$ квадратъ втораго члена. Это произведеніе $-12ab+4b^2$ вычтемъ изъ дѣлимаго. Въ остаткѣ нуль; слѣдовательно данное количество $9a^2-12ab+4b^2$ полный квадратъ, происходящій отъ корня $3a-2b$. Посему, можно написать:

$$\sqrt{9a^2-12ab+4b^2}=3a-2b.$$

*Примѣръ*. Извлечь квадратный корень изъ

$$8ab^3-4a^3b+4b^4+a^4.$$

Расположивъ этотъ многочленъ по степенямъ буквы $a$,

| **Квадратъ.** | **Корень.** |
|---|---|
| $a^4-4a^3b+8ab^3+4b^4$ | $a^2-2ab-2b^2$ |
| $-a^4$ | |
| $-4a^3b+8ab^3+4b^4$ | $2a^2-2ab$ |
| $+4a^3b-4a^2b^2$ | $-2ab$ |
| $-4a^2b^2+8ab^3+4b^4$ | $2a^2-4ab-2b^2$ |
| $+4a^2b^2-8ab^3-4b^4$ | $-2b^2$ |
| $0$ | |

говорю: корень квадратный изъ перваго члена $a^4$ даннаго количества есть $a^2$;— это первый членъ корня. Беру $(a^2)^2=a^4$, вычитаю изъ даннаго многочлена, и весь остатокъ сношу подъ горизонтальную черту. Первый членъ $-4a^3b$ дѣлю на $2a^2$; нахожу второй членъ $-2ab$ корня. Этотъ членъ записываю на своемъ мѣстѣ; сверхъ того, придаю его къ дѣлителю $2a^2$, сумму $2a^2-2ab$ помножаю на $-2ab$, и произведеніе $-4a^3b+4a^2b^2$ вычитаю изъ дѣлимаго. Остатотъ $-4a^2b^2+8ab^3+4b^4$ дѣлю на $2(a^2-2ab)=2a^2-4ab$; получаю $-2b^2$ третій членъ корня. Этотъ членъ приписываю къ $2a^2-4ab$, сумму $2a^2-4ab-2b^2$ помножаю на $-2b^2$, и произведеніе вычитаю изъ дѣлимаго. Въ остаткѣ нуль; слѣдовательно искомый квадратный корень

$$a^2-2ab-2b^2.$$

*Примѣръ.*

| **Квадратъ.** | **Корень.** |
|---|---|
| $\frac{4}{9}a^2b^4-\frac{2}{3}ab^3c^2-\frac{4}{3}ab^2+\frac{1}{4}b^2c^4+bc^2+1$ | $\frac{2}{3}ab^2-\frac{1}{2}bc^2-1$ |
| $-\frac{4}{9}a^2b^4$ | |
| $-\frac{2}{3}ab^3c^2-\frac{4}{3}ab^2+\frac{1}{4}b^2c^4+bc^2+1$ | $\frac{4}{3}ab^2-\frac{1}{2}bc^2$ |
| $+\frac{2}{3}ab^3c^2-\frac{1}{4}b^2c^4$ | $-\frac{1}{2}bc^2$ |
| $-\frac{4}{3}ab^2+bc^2+1$ | $\frac{4}{3}ab^2-bc^2-1$ |
| $+\frac{4}{3}ab^2-bc^2-1$ | $-1$ |
| $0$ | |

---

# ГЛАВА ПЯТАЯ.

## А. УРАВНЕНІЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ СЪ ОДНОЮ НЕИЗВѢСТНОЮ.

**153.** *Уравненіями второй степени* называются такія, которыя, по освобожденіи отъ знаменателей, имѣютъ въ своихъ членахъ неизвѣстную $x$ не выше какъ во второй степени. Онѣ бываютъ *полныя* и *неполныя*. Полное уравненіе состоитъ *изъ трехъ членовъ:* въ первомъ находится квадратъ неизвѣстной, во второмъ членѣ первая степень неизвѣстной, и третій членъ независимый отъ этой неизвѣстной. Слѣдовательно оно имѣетъ видъ

$$ax^2+bx+c=0.$$

Если же будетъ $c=0$, или $b=0$, то оно сдѣлается *двучленнымъ*, *неполнымъ*:

$$ax^2+bx=0, \text{ либо } ax^2+c=0.$$

### Уравненія двучленныя.

**154.** Двучленное уравненіе $ax^2+bx=0$ разлагается на два множителя:

$$(ax+b)x=0,$$

и можетъ быть удовлетворено, полагая $x=0$, либо $ax+b=0$; откуда $x=-\frac{b}{a}$. Слѣдовательно, оно имѣетъ два корня:

$$0, \text{ и } -\frac{b}{a}.$$

Двучленное уравненіе $ax^2-b=0$ также имѣетъ два корня, и разрѣшается очень просто. Изъ него находимъ:

$$x^2-\frac{b}{a}=0.$$

Возьмемъ $\frac{b}{a}=\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$; тогда будетъ

$$x^2-\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=0.$$

Разность квадратовъ равна суммѣ корней, помноженной на ихъ разность; посему,

$$x^2-\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=\left(x+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=0.$$

Этому уравненію можно удовлетворить, полагая:

$$x-\sqrt{\frac{b}{a}}=0, \text{ либо } x+\sqrt{\frac{b}{a}}=0; \text{ откуда}$$

$$x=\sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ и также } x=-\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Таковы два корня уравненія; они оба вмѣстѣ пишутся формулою:

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}},$$

и получаются просто, чрезъ извлеченіе квадратнаго корня изъ обѣихъ частей уравненія $x^2=\frac{b}{a}$.

Эти корни могутъ быть оба дѣйствительные, или оба мнимые, смотря по тому, будетъ ли извѣстный членъ $b$ отрицательнымъ или положительнымъ въ данномъ уравненіи.

*Примѣръ 1.* Возмемъ численное уравненіе:

$$\frac{3-2x^2}{x}=\frac{15}{x}-5x;$$

освободимъ отъ знаменителей:

$$3-2x^2=15-5x^2, \text{ или}$$
$$3x^2=12 \text{ ; отсюда}$$
$$x^2=4, \text{ или } x^2-4=(x+2)(x-2)=0.$$

Этому удовлетворимъ, полагая $x=2$, или $x=-2$. Таковы корни даннаго уравненія. Они пишутся одною формулою:

$$x=\pm\sqrt{4}=\pm2.$$

*Примѣръ 2.* Уравненіе $3x^2+12=5x^2+62$ даетъ

$$-2x^2=50, \text{ или } x^2=-25; \text{ откуда}$$
$$x=\pm5\sqrt{-1}.$$

Здѣсь оба корня *мнимые*. Они произошли отъ явной нелѣпости въ уравненіи, гдѣ требуется, чтобы $3x^2+12$ было равно $5x^2+62$, когда $3x^2<5x^2$, и $12<62$.

Однакоже оба корня удовлетворяютъ уравненію. Наприм., если взять $x=-5\sqrt{-1}$, и подставить въ данное уравненіе, то найдется тожественное равенство:

$$-3.25+12=-5.25+62$$
$$-63=-63.$$

### Полное уравненіе второй степени.

**155.** Оно содержитъ въ себѣ члены со степенями $x^2$, $x$, $x^0$ неизвѣстной; таково

$$ax^2+bx+cx^0=0, \text{ или, просто}$$
$$ax^2+bx+c=0.$$

Его можно сдѣлать проще, освободивъ $x^2$ отъ коефиціента $a$:

$$x^2+\frac{b}{a}.x+\frac{c}{a}=0,$$

и, для краткости, положивъ $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$; тогда найдется

$$x^2+px+q=0,$$

общее уравненіе 2-й степени въ самомъ простомъ его видѣ.

Для примѣра, приведемъ къ этому виду уравненіе $\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}x^2=\frac{1}{2}-2x$. Сперва освободимъ отъ знаменателей:

$$4x-5x^2=3-12x;\text{ отсюда}$$

$$0=5x^2-4x+3-12x,\text{ или}$$

$$5x^2-16x+3=0,\text{ и, наконецъ,}$$

$$x^2-\frac{16}{5}x+\frac{3}{5}=0.$$

Это уравненіе совершенно сходствуетъ съ $x^2+px+q=0$.

**156.** *Рѣшеніе общаго уравненія второй степени.* — Сперва надобно данное уравненіе $ax^2+bx+c=0$ привесть къ общему виду

$$x^2+px+q=0,$$

полагая $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$ ; потомъ перенести извѣстный членъ $q$ во вторую часть:

$$x^2+px=-q,$$

и *сдѣлать первую часть полнымъ квадратомъ* отъ $x+\frac{1}{2}p$, что возможно, потому что

$$\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2=x^2+px+\frac{1}{4}p^2.$$

Сюда внесемъ $x^2+px=-q$, и получится тотчасъ:

$$\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2=-q+\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}p^2-q.$$

Это можно написать:

$$\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2=\left(\sqrt{\frac{1}{2}p^2-q}\right)^2,\text{ или}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2-\left(\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}\right)^2=0.$$

Разность этихъ квадратовъ разложимъ на сумму и разность ихъ корней:

$$\left(x+\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}\right)\left(x+\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}\right)=0.$$

Этому уравненію удовлетворимъ, полагая

$$x+\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=0,\text{ или }x+\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=0,$$

откуда

$$x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q},\text{ либо }x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}.$$

Таковы два корня даннаго уравненія; ихъ пишутъ общею формулою:

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}\ ^{*)}.$$

Рѣшеніе полнаго уравненіе 2-й степени такъ часто встрѣчается, что учащимся поставляется въ обязанность знать на память формулу:

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q},$$

которою выражаются оба корня уравненія. Она выговаривается такъ: *Неизвѣстная равна половинѣ коефиціента предъ первою степенью x, взятаго съ противнымъ знакомъ, плюсъ или минусъ корень квадратный изъ квадрата этой половины безъ извѣстнаго члена q.*

Для уравненія $x^2-px-q=0$, гдѣ $p$ и $q$ отрицательные, корнями будутъ:

$$x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}.$$

Для уравненія $x^2-px+q$, гдѣ одно $p$ отрицательное, корнями будутъ:

$$x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q},$$

и проч.

Если на мѣсто $p$ и $q$ взять $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$, найдется:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\text{, или}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

самый общій выводъ для выраженія обоихъ корней уравненія $ax^2+bx+c=0$.

*Примѣръ 1*. Разрѣшить $x^2-6x+5=0$.

Здѣсь $x=3\pm\sqrt{9-5}=3\pm2$. Слѣдовательно, $x=5$, либо $x=1$.

*Примѣръ 2.* Найти корни уравненія:

$$3x^2+7x-6=0.$$

Освободимъ сперва $x^2$ отъ коефиціента 3:

$$x^2+\frac{7}{3}x-2=0\text{; отсюда}$$

$$x=-\frac{7}{6}\pm\sqrt{\frac{49}{36}+2}\text{, или}$$

$$x=\frac{-7\pm11}{6}$$

Посему, корни уравненія: $\frac{2}{3}$ и $-3$.

---

*) Открытіе сего рѣшенія Карданъ приписываетъ арабу Могамеду Бенъ Муза, жившему въ 9-мъ вѣкѣ по Р. Х., въ царствованіе Алмамуна.

*Примѣръ 3.* $\frac{5}{9}x^2-2x=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-8.$

Освобождаю отъ знаменателей:

$$5x^2-18x=3x^2+6x-72, \text{ или}$$
$$x^2-12x+36=0; \text{ отсюда}$$
$$x=6\pm\sqrt{36-36}=6\pm0.$$

Здѣсь оба корня получились равные: одинъ $6+0=6$, другой $6-0=6$. Слѣдовательно, данное уравненіе $(x-6)^2=0$.

*Примѣръ 4.* Дано $9x^2-12x+8=0$, или

$$x^2-\frac{4}{3}x+\frac{8}{9}=0; \text{ отсюда}$$
$$x=\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{8}{9}}, \text{ или}$$
$$x=\frac{2}{3}(1\pm\sqrt{-1}).$$

Оба корня мнимые.

**157.** *Составъ квадратнаго уравненія изъ его корней.*

Теперь мы знаемъ, что общее уравненіе $x^2+px+q=0$ имѣетъ два корня, которые, для краткости, назовемъ буквами $k$, $k'$:

$$x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=k,$$
$$x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=k',$$

и состоитъ изъ произведенія множителей:

$$x+\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=0, \text{ или } x-k=0,$$
$$x+\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=0, \quad x-k'=0, \text{ то есть:}$$
$$x^2+px+q=(x-k)(x-k')=x^2-(k+k')x+kk'=0;$$

отсюда заключаемъ, что

$$p=-(k+k'),\ q=kk'.$$

Стало-быть, *коефиціентъ p втораго члена уравненія равенъ суммѣ корней, взятой съ противнымъ знакомъ, а извѣстный членъ q равенъ произведенію корней.*

Этотъ выводъ показываетъ легкій способъ составлять всякое уравненіе 2-ой степени изъ данныхъ его корней.

Положимъ, что надобно составить уравненіе, котораго корни 5 и $-2$. Полагая $k=5$, $k'=-2$, найдется:

$$p=-(k+k')=-(5-2)=-3,$$
$$q=kk'=-10;$$

это подставимъ въ общее уравненіе:

$x^2+px+q=0$; получится уравненіе

$x^2-3x-10=0$,

котораго корни 5 и $-2$.

*Примѣръ.* Составить уравненіе изъ корней $k=3+2\sqrt{-1}$, $k'=3-2\sqrt{-1}$.
Здѣсь $p=-6$, $q=13$; посему,

$$x^2-6x+13=0.$$

### *Изслѣдованіе корней полнаго уравненія второй степени.*

**158.** Мы знаемъ, что оба корня уравненія $x^2+px+q=0$ выражаются формулою:

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

Эти корни могутъ быть дѣйствительные или мнимые, оба положительные или оба отрицательные, одинъ положительный, а другой отрицательный, равные или неравные.

Оба корня бываютъ дѣйствительными, если подкоренное количество $p^2-4q>0$, или $p^2-4q=0$, какой бы знакъ ни былъ предъ $p$; въ противномъ случаѣ, они оба мнимые. Это очевидно.

**159.** Положимъ, что уравненіе содержитъ *корни дѣйствительные;* тогда остается еще опредѣлить, какіе они: положительные или отрицательные. Знаки предъ дѣйствительными корнями совершенно зависятъ отъ знаковъ предъ коефиціентами $p$ и $q$, слѣдовательно отъ знаковъ предъ членами уравненія; это знаемъ мы изъ самаго состава уравненія $x^2+px+q=0$, гдѣ $p=-(k+k')$, $q=kk'$. Намъ остается еще открыть очевидные признаки, по которымъ бы можно было, при одномъ взглядѣ на уравненіе, узнавать эти знаки предъ корнями.

Для этого замѣтимъ предварительно, что во всякомъ уравненіи, *расположенномъ по степенямъ его неизвѣстной*, всякіе два члена, взятые сряду, могутъ имѣть *знаки противные* (+ — либо — +), или *знаки равные* (+ + или — —). Послѣдованіе членовъ съ противными знаками называется *перемѣною*, а послѣдованіе членовъ съ равными знаками называется *повтореніемъ*.

Такъ, уравненіе $x^2+px+q=0$ имѣетъ только повторенія знаковъ, и ни одной перемѣны. Уравненіе $x^2-px+q=0$ имѣетъ двѣ перемѣны, и ни одного повторенія. Уравненіе $x^2\pm px-q=0$ имѣетъ одну перемѣну и одно повтореніе, какой бы ни былъ знакъ предъ $px$.

**160.** *Въ полномъ уравненіи второй степени число дѣйствительныхъ положительныхъ корней всегда равно числу въ немъ перемѣнъ, а число корней отрицательныхъ равно числу повтореній.* Это общее правило легко и просто вытекаетъ изъ разсматриванія состава $p$ и $q$.

1) Когда уравненіе имѣетъ *двѣ перемѣны*, т. е. когда $p$ отрицательное, а $q$ положительное; тогда *оба корня* $k$, $k'$, *положительные:* во-первыхъ, потому, что ихъ произведеніе $kk'=+q$ положительное, слѣдовательно, оба корня съ равными знаками; а во-вторыхъ, чтобы $p=-(k+k')$ было отрицательнымъ, надобно, чтобъ $k$, $k'$, были положительными.

2) Когда уравненіе имѣетъ два повторенія, или ни одной перемѣны, т. е. когда $p$ и $q$ *оба положительные;* тогда оба корня $k$, $k'$, отрицательные. Ибо, положительное произведеніе $kk'=+q$ показываетъ, что *оба корня съ равными знаками;* а чтобы $p=-(k+k')$ сдѣлалось также положительнымъ, надобно, чтобы $k$, $k'$, были *отрицательными;* тогда

$$p=-(-k-k')=+(k+k').$$

3) Если уравненіе имѣетъ *одну перемѣну* и одно повтореніе, слѣдовательно $q$ *отрицательное;* то, каковъ бы ни былъ знакъ предъ $p$, *одинъ корень уравненія будетъ положительнымъ, а другой отрицательнымъ.* Ибо, произведеніе двухъ дѣйствительныхъ корней,

$$kk'=-q,$$

не можетъ сдѣлаться иначе отрицательнымъ, какъ въ единственномъ случаѣ, когда эти корни съ противными знаками.

4) Если въ уравненіи $x^2+px+q=0$ найдется $p^2-4q=0$, то оно имѣетъ оба корня равные. Потому что

$$\begin{array}{l} p^2=k^2+k'^2+2kk' \\ 4q=4kk' \\ \hline p^2-4q=k^2+k'^2-2kk'=(k-k')^2=0\ ; \end{array}$$

откуда, $k=k'$.

Это, впрочемъ, видно непосредственно изъ

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=-\frac{1}{2}p\pm0.$$

Слѣдовательно, уравненіе обращается въ

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2=(x+\frac{1}{2}p)^2=0.$$

**161**. Возмемъ теперь общее уравненіе:

$$ax^2+bx+c=0,$$

и его рѣшеніе:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Здѣсь дѣйствительные корни возможны только въ случаѣ $b^2>4ac$, или $b^2=4ac$. Знаки предъ этими корнями опредѣляются числомъ *перемѣнъ* и *повтореній*, по правилу, показанному для $x^2+px+q=0$. Но, давая частныя значенія коефиціентамъ $a$, $b$, $c$, въ общей формулѣ, которою выражаются корни уравненія, мы приводимся иногда къ рѣшеніямъ символическимъ, которыя требуютъ объясненія.

1) Возмемъ $c=0$; получится:

$$x=\frac{-b\pm b}{2a};$$

корнями уравненія будутъ 0 и $\frac{-b}{a}$.

2) Для $b=0$, получится $x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

3) Если $a=0$, то формула $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ обращается въ $x=\frac{-b\pm b}{0}$. Въ этомъ случаѣ, одинъ корень $\frac{0}{0}$, а другой $\frac{-2b}{0}=\infty$.

Для объясненія этого символическаго рѣшенія, освободимъ числитель формулы

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

отъ радикала, помноживъ обѣ части дроби на $-b\mp\sqrt{b^2-4ac}$, получится:

$$x=\frac{-2c}{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}.$$

4) Теперь возмемъ $a=0$, и найдется $x=\frac{-2c}{b\pm b}$.

Слѣдовательно, одинъ корень $x=\frac{-c}{b}$, а другой

$$x=\frac{-2c}{0}=\infty.$$

И въ самомъ дѣлѣ, данному уравненію,

$$ax^2+bx+c=0,$$

можно дать видъ $a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=0$, раздѣливъ его на $x^2$. Для $a=0$, первое обращается въ $bx+c=0$, откуда $x=-\frac{c}{b}$; а второе въ $\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=0$, чему удовлетворимъ, полагая $x=\infty$.

5) Наконецъ, возмемъ $a=0$, $b=0$, въ формулѣ

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

получится $x=\frac{0}{0}$ для обоихъ корней. Чтобы понять это символическое выраженіе корней, преобразуемъ эту формулу, какъ было показано,

въ $x=\frac{-2c}{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}$,

и положимъ $a=0$, $b=0$; для обоихъ корней найдется

$$x=\frac{-2c}{0}=\infty.$$

И дѣйствительно, если $ax^2+bx+c=0$ раздѣлимъ на $x^2$, то получимъ

$$a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}=0;$$

а потомъ положимъ $a=0$, $b=0$; найдется

$$\frac{c}{x^2}=0,$$

чему удовлетворимъ, полагая только $x=\infty$.

## **162.** — ЗАДАЧИ.

Задача 1. — *Найти среднее пропорціональное число между $a$ и $b$.*

Пусть это число $x$; оно должно удовлетворять пропорціи $a : x = x : b$, изъ которой

$$x^2=ab,\quad x=\pm\sqrt{ab}.$$

Если $a=p+q\sqrt{-1}$, $b=p-q\sqrt{-1}$, то среднимъ пропорціональнымъ между этими мнимыми найдется

$$x=\sqrt{p^2+q^2}$$

число существенно дѣйствительное.

Задача 2. — *Найти такое число, котораго квадратъ, сложенный съ квадратомъ его половины и еще съ квадратомъ его трети, составилъ бы сумму 196.*

Пусть это число $x$. По условію задачи должно быть

$$x^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\frac{1}{3}x\right)^2=196,\text{ или}$$

$$x^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)=196;\text{ откуда}$$

$$x^2=\frac{196.36}{49},\text{ а } x=\pm 12.$$

Задача 3. — *Раздѣлить число 60 на двѣ части такія, чтобъ произведеніе ихъ равнялось 500.*

Пусть $x$ первая часть, то будетъ $60-x$ вторая часть; по условію должно быть

$$x(60-x)=500,\text{ или}$$

$$60x-x^2=500,\text{ или}$$

$$x^2-60x=-500;\text{ откуда}$$

$$x=30\pm\sqrt{900-500}=30\pm 20.$$

И такъ, первая часть $x=50$, либо 10,

а вторая $60-x=10$, либо 50.

Въ обоихъ случаяхъ произведеніе $50.10=500$.

Задача 4. — *Найти такое число, на которое надобно раздѣлить 130 такъ, чтобъ получить частное равное дѣлителю сложенному съ 5, и остатокъ равный тому же дѣлителю безъ 5.*

Пусть $x$ искомый дѣлитель; то

$x+5$ будетъ частное.

$x-5$ » остатокъ.

Слѣдовательно, $130=x(x+5)+x-5$, или

$$x^2+6x=135;\text{ откуда}$$

$$x=-3\pm\sqrt{9+135}=-3\pm12.$$

И такъ, $x=9$, либо $x=-15$.

**Задача 5.** — *Портной купилъ нѣсколько аршинъ сукна за 60 руб. серебромъ. Если бы за тѣ же деньги онъ купилъ 4 аршина болѣе, то каждый аршинъ обошелся бы ему половиною рубля дешевле. Спрашивается: сколько аршинъ куплено, и по какой цѣнѣ?*

Положимъ, что куплено $x$ аршинъ сукна за 60 рублей; въ этомъ случаѣ, цѣна одного аршина $=\frac{60}{x}$. А если бы куплено было 4 аршина болѣе, то есть, $x+4$ за тѣ же 60 рублей, то каждый аршинъ стоилъ бы $\frac{60}{x+4}$. По условію задачи, послѣдняя цѣна менѣе первой половиною рубля; слѣдовательно,

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+4}=0,5.$$

Освободивъ это уравненіе отъ знаменателей, найдется:

$$60x+240-60x=0,5x^2+0,5.4x,\text{ или}$$

$$x^2+4x=\frac{240}{0,5}=480;\text{ откуда}$$

$$x=-2\pm\sqrt{484}=-2\pm22.$$

Изъ найденныхъ двухъ корней 20 и $-24$ одинъ только 20 разрѣшаетъ задачу въ прямомъ смыслѣ; корень-же отрицательный надобно отбросить.

И такъ, куплено 20 аршинъ сукна, и каждый аршинъ по $\frac{60}{20}=3$ руб. серебр.

**Задача 6.** — *По окончаніи нѣкоторой работы, спросили у работниковъ: сколько ихъ было всѣхъ, и сколько они дней работали? Они отвѣчали: насъ было столько, сколько дней мы работали; а если бы къ намъ прибавили еще четырехъ работниковъ, то всю работу окончили бы въ 2 дня. Узнать, сколько же ихъ было?*

Пусть $x$ число работниковъ, и $x$ число дней; а еслибъ было $x+4$ работниковъ, то работа окончилась бы въ 2 дня. Здѣсь между числомъ работниковъ и числомъ дней должно быть отношеніе обратное, то есть:

$$x+4 : x=x : 2;\text{ откуда}$$

$$x^2=2x+8,\text{ или } x^2-2x=8,\text{ и}$$

$$x=1\pm\sqrt{1+8}=1\pm3.$$

Положительный корень 4 показываетъ, что было 4 работниковъ и 4 дня работы.

**Задача** 7. — *Банкиръ принимаетъ въ учётъ два векселя: одинъ въ 8793 рубля, которому срокъ платежа чрезъ 9 мѣсяцовъ; а другой въ 7500 рублей, которому срокъ чрезъ 8 мѣсяцовъ. При этомъ онъ даетъ за первый 1200 рублей болѣе нежели за второй. Узнать, какъ велики годовые проценты съ этихъ векселей?*

Пусть $x$ годовые проценты со 100 въ мѣсяцъ, или $12x$ проценты въ годъ; то $9x$ и $8x$ будутъ процентами за 9 и 8 мѣсяцовъ. Поэтому, каждые 100 рублей, по прошествіи 9 и 8 мѣсяцовъ, сдѣлаются $100+9x$ и $100+8x$, и которыя банкиръ принимаетъ за 100; а въ какую цѣну принимаетъ онъ вексельныя суммы 8793 и 7500 руб., это найдется изъ пропорцій:

$$100+9x : 100 = 8793 : \frac{879300}{100+9x},$$

$$100+8x : 100 = 7500 : \frac{750000}{100+8x},$$

гдѣ четвертые члены и представляютъ настоящія цѣны векселей, за которыя принимаетъ ихъ банкиръ. По условію задачи:

$$\frac{879300}{100+9x} - \frac{750000}{100+8x} = 1200, \text{ или}$$

$$\frac{2931}{100+9x} - \frac{2500}{100+8x} = 4.$$

Освободивъ отъ знаменателей, и сокративъ уравненіе на 4, останется:

$$72x^2+1463x=775, \text{ или}$$

$$x^2+\frac{1463}{72}.x=\frac{775}{72}; \text{ и наконецъ}$$

$$x=\frac{-731,5}{72}\pm\sqrt{\frac{(731,5)^2+775.72}{(72)^2}},$$

$$x=\frac{-371,5\pm768,60}{72}.$$

Посему, $12x=\frac{-731,5\pm768,60}{6}$

Возмемъ одинъ положительный корень, который рѣшаетъ задачу въ прямомъ ея смыслѣ, получится:

$$12x=6,2.$$

И такъ, оба векселя приняты въ учётъ по 6,2 процентовъ въ годъ.

## B. УРАВНЕНІЯ 2-й СТЕПЕНИ СЪ ДВУМЯ НЕИЗВѢСТНЫМИ, КОГДА ЧИСЛО УРАВНЕНІЙ РАВНО ЧИСЛУ НЕИЗВѢСТНЫХЪ. РѢШЕНІЯ ОПРЕДѢЛЕННЫЯ.

**163.** Для разрѣшенія уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными, надобно имѣть два уравненія, и, посредствомъ извѣстныхъ способовъ (**90**), исключить изъ нихъ одну неизвѣстную; останется одно уравненіе только со второю неизвѣстною. Но, чтобы это послѣднее было *не выше 2-й степени*, и могло быть разрѣшено по извѣстнымъ доселѣ правиламъ, надобно, чтобъ одно изъ данныхъ уравненій было второй степени, а другое первой степени.

**Задача 1.** — *Найти два числа, которыхъ разность 8, а произведеніе 20.*

Пусть эти числа $x$, $y$; то

$$x-y=8,$$
$$xy=20.$$

Изъ перваго уравненія находимъ $x=y+8$; это подставимъ во второе, получится:

$$y^2+8y=20; \text{ откуда}$$
$$y=-4\pm\sqrt{16+20}=-4\pm6.$$

Слѣдовательно $y=2$, либо $-10$.

Для $y=2$, найдется $x=y+8=10$;

для $y=-10$, $x=y+8=-2$.

**Задача 2.** — *Найти два числа, коихъ произведеніе $=a$, а ихъ сумма, раздѣленная на разность, $=b$.*

Пусть эти числа $x$, $y$; то должно быть

$$xy=a, \quad \frac{x+y}{x-y}=b.$$

Изъ втораго уравненія находимъ:

$$x+y=bx-by, \text{ или}$$
$$y(1+b)=x(b-1), \text{ и}$$
$$y=\frac{x(b-1)}{b+1}.$$

Это и подставимъ въ первое уравненіе:

$$\frac{x^2(b-1)}{b+1}=a; \text{ откуда}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{a(b+1)}{b-1}}.$$

Таково первое число. Второе же число $y=\frac{a}{x}$, то есть:

$$y=\pm a\sqrt{\frac{b-1}{a(b\pm1)}}=\pm\sqrt{\frac{a(b-1)}{b+1}}.$$

Наприм. если $a=7$, $b=8$, то

$$x=\pm3, \quad y=\pm\frac{7}{3};$$

слѣдовательно, $x=3$, либо $-3$;

$$y=\frac{7}{3}, \text{ либо } -\frac{7}{3}.$$

Если положить $b=1$; то найдутся $x=\pm\infty$,

$$y=\pm0.$$

Для объясненія этихъ рѣшеній, обратимся къ данному уравненію $\frac{x+y}{x-y}=b$. Для $b=1$, оно будетъ $\frac{x+y}{x-y}=1$. Очевидно, что ему иначе нельзя удовлетворить, какъ взявъ $y=0$, каковъ бы $x$ ни былъ; а чтобъ удовлетворить уравненію $xy=b$, когда $y=0$, надобно взять $x=\infty$; потому что нуль, помноженный на безконечность, выражаетъ всякое конечное число (33, 5).

**Задача 3.** — *Найти два такихъ числа, коихъ разность квадратовъ равна $q^2$, а разность между произведеніями перваго на $a$ и втораго на $b$ равна $s$.*

Назвавши чрезъ $x$, $y$, эти два числа, по условію задачи имѣемъ:

$$x^2-y^2=q^2,$$
$$ax-by=s.$$

Изъ втораго уравненія получаемъ:

$$x=\frac{by+s}{a};$$

это подставимъ въ первое, найдется:

$$\frac{b^2y^2+2bsy+s^2}{a^2}-y^2=q^2, \text{ или}$$
$$b^2y+2bsy+s^2-a^2y^2=a^2q^2, \text{ или}$$
$$(a^2-b^2)y^2-2bsy=s^2-a^2q^2; \text{ отсюда}$$
$$y=\frac{bs\pm a\sqrt{s^2-q^2(a^2-b^2)}}{a^2-b^2}.$$

Таково одно изъ чиселъ. Другое же число $x=\frac{by+s}{a}$ получится:

$$x=\frac{as\pm b\sqrt{s^2-q^2(a^2-b^2)}}{a^2-b^2}.$$

Для отстраненія символическихъ рѣшеній, могущихъ произойти въ случаѣ $a=b$, освободимъ числители отъ радикаловъ. Для этого помножимъ обѣ части дробнаго выраженія $x$ на $as\mp b\sqrt{s^2-q^2(a^2-b^2)}$, а обѣ части дробнаго выраженія $y$ на $bs\mp a\sqrt{s^2-q^2(a^2-b^2)}$, и сократимъ на $a^2-b^2$; тогда получатся:

$$x=\frac{b^2q^2+s^2}{as\mp b\sqrt{s^2-q^2(a^2-b^2)}},$$
$$y=\frac{aq^2-s^2}{bs\mp a\sqrt{s^2-q^2(a^2-b^2)}}.$$

Розыщемъ теперь, когда эти рѣшенія возможны, и въ какихъ предѣлахъ онѣ положительны.

Очевидно, что рѣшенія эти возможны только въ предположеніи $s^2>q^2(a^2-b^2)$; или $=q^2(a^2-b^2)$; въ противномъ случаѣ онѣ всѣ мнимыя.

Чтожъ касается до того, при какихъ условіяхъ, и въ какихъ предѣлахъ, *дѣй-*

*ствительные корни* $x$, $y$, будутъ *положительными*, это зависитъ отъ частныхъ величинъ для $a$, $b$, $q$, $s$

На самомъ предѣлѣ, съ котораго корни начинаютъ быть возможными, то есть, когда $s^2 = q^2(a^2 - b^2)$, получаемъ:

$$x = \frac{b^2q^2 + s^2}{as}, \quad y = \frac{a^2q^2 - s^2}{bs}.$$

Здѣсь корень $x$ положительный, а $y$ только тогда будетъ положительнымъ, когда $a^2q^2 > s^2$, или $aq > s$, каково бы ни было отношеніе между $a$ и $b$.

Для опредѣленія условій, дѣлающихъ положительными $x$, $y$, въ случаѣ $s^2 > q^2(a^2 - b^2)$, возмемъ сперва эти корни съ знакомъ $+$, то есть:

$$x = \frac{b^2q^2 + s^2}{as + b\sqrt{s^2 - q^2(a^2 - b^2)}},$$

$$y = \frac{a^2q^2 - s^2}{bs + b\sqrt{s^2 - q^2(a^2 - b^2)}}.$$

И здѣсь также, очевидно, $x$ положительный; $y$ также положительный, когда $aq > s$.

Даже, если взять $aq = s$, то найдется:

$$x = \frac{b^2q^2 + s^2}{as + b^2q} = \frac{(a^2 + b^2)q^2}{(a^2 + b^2)q} = q,$$

$$y = 0.$$

Таковъ предѣлъ положительныхъ рѣшеній для $x$, $y$, взятыхъ съ знакомъ $+$. Онѣ не зависятъ отъ $a$ и $b$, а только отъ условія $aq > s$.

Возмемъ теперь $x$ и $y$ съ знакомъ $-$, то есть:

$$x = \frac{b^2q^2 + s^2}{as - b\sqrt{s^2 - q^2(a^2 - b^2)}},$$

$$y = \frac{a^2q^2 - s^2}{bs - a\sqrt{s^2 - q^2(a^2 - b^2)}}.$$

Эти рѣшенія зависятъ отъ $a$, $b$, $q$, $s$.

Возмемъ $a > b$; тогда будетъ $as > b\sqrt{s^2}$, и подавно $as > b\sqrt{s^2 - q^2(a^2 - b^2)}$. Слѣдовательно $x$ будетъ положительнымъ.

Корень $y$ будетъ положительнымъ, когда

$$aq > s, \text{ и } bs > a\sqrt{s^2 - q^2(a^2 - b^2)}, \text{ или}$$

$$b^2s^2 > a^2s^2 - a^2q^2(q^2 - b^2), \text{ или}$$

$$a^2q^2(a^2 - b^2) > (a^2 - b^2)s^2,$$

слѣдовательно, при томъ же условіи $aq > s$.

Онъ будетъ также положительнымъ при $aq < s$.

Если взять $aq = s$; тогда $x$ будетъ положительнымъ, потому что $a > b$, $as > b\sqrt{s^2}$, и проч.; другое же число будетъ

$$y = \frac{a^2q^2 - s^2}{bs - aqb} = \frac{(aq + s)(aq - s)}{-b(aq - s)} = -\frac{2s}{b}$$

отрицательное.

А чтобъ узнать, съ какого предѣла $y$ дѣлается отрицательнымъ, уравняемъ нулю его знаменатель, т. е. возмемъ

$$bs = a\sqrt{s^2 - q^2(a^2 - b^2)}, \text{ или}$$
$$b^2s^2 = a^2s^2 - a^2q^2(a^2 - b^2), \text{ или}$$
$$0 = (a^2 - b^2)s^2 - a^2q^2(a^2 - b^2); \text{ откуда}$$
$$(s^2 - a^2q^2)(a^2 - b^2) = 0.$$

Поелику $s = aq$ не даетъ предѣла, то надобно взять $a = b$. Вотъ съ какого случая $y$ начинаетъ быть отрицательнымъ.

Для этого предѣла $a = b$, становятся

$$x = \frac{b^2q^2 + s^2}{as - as} = \infty,$$
$$y = \frac{a^2q^2 - s^2}{bs - bs} = \infty.$$

Возмемъ, наконецъ, $a < b$. Въ этомъ случаѣ,

$$x = \frac{b^2q^2 + s^2}{ab - b\sqrt{s^2 + q^2(b^2 - a^2)}},$$
$$y = \frac{a^2q^2 - s^2}{bs - a\sqrt{s^2 + q^2(b^2 - a^2)}};$$

$x$ отрицательный, потому что, для $a < b$, будетъ $as < b\sqrt{s^2}$, и подавно $as < b\sqrt{s^2 + q^2(b^2 - a^2)}$; $y$ также будетъ отрицательнымъ, ибо, необходимо

$$bs > a\sqrt{s^2 + q^2(b^2 - a^2)}, \text{ откуда}$$
$$b^2s^2 > a^2s^2 + a^2q^2(b^2 - a^2)$$
$$(b^2 - a^2)s^2 > a^2q^2(b^2 - a^2)$$
$$s^2 > a^2q^2;$$

слѣдовательно, знаменатель будетъ положительнымъ, но числитель $a^2q^2 - s^2$ дѣлается отрицательнымъ.

**Задача 4.** *Данное число а раздѣлить на двѣ такія части, чтобы квадраты ихъ находились въ данномъ отношеніи т : 1.*

Пусть первая часть $x$; то вторая часть $a - x$. По условію задачи должно быть

$$\frac{x^2}{(a - x)^2} = \frac{m}{1} = m; \text{ отсюда}$$
$$\frac{x}{a - x} = \pm\sqrt{m}$$
$$x = \pm a\sqrt{m} \mp x\sqrt{m}, \text{ или}$$
$$(1 \pm \sqrt{m})x = \pm a\sqrt{m}$$
$$x = \frac{\pm a\sqrt{m}}{1 \pm \sqrt{m}} = \frac{\pm am}{\sqrt{m} \pm m}.$$

Такова первая часть. Вторая часть будетъ

$$a - x = a \mp \frac{a\sqrt{m}}{1 \pm \sqrt{m}} = \frac{a}{1 \pm \sqrt{m}}.$$

Если взять $m=1$, то получится:

$$\text{для первой части } \frac{a}{2}, \text{ либо } \frac{-a}{0}=-\infty;$$

$$\text{для второй части } \frac{a}{2}, \text{ либо } \frac{+a}{0}=+\infty.$$

Здѣсь, очевидно, годится только одно рѣшеніе. Но, любопытно дать себѣ отчетъ въ томъ, какъ второе рѣшеніе удовлетворяетъ уравненію

$$x^2=m(a-x)^2=(a-x)^2.$$

Для этого раздѣлимъ все на $x^2$, получится:

$$1=\left(\frac{a}{x}-1\right)^2,$$

чему и нельзя иначе удовлетворить, какъ полагая $x=\pm\infty$.

Этою задачею рѣшаются нѣкоторые практическіе вопросы, какъ то: 1) *На прямой линіи, соединяющей двѣ свѣтящія точки различной яркости, найти точку, которая тѣми точками освѣщается равно.* 2) *На прямой линіи, соединяющей центры двухъ неравныхъ массъ, найти точку, которая бы равно притягивалась этими массами.* Въ такомъ случаѣ число $m$ выражаетъ данное отношеніе между яркостями свѣта точекъ, или между величинами притяженій тѣхъ массъ. Яркость же свѣта, равно какъ и притяженіе массъ, измѣняется въ обратномъ содержаніи квадратовъ разстояній отъ свѣтящихъ точекъ или центровъ массъ.

### ПРИВЕДЕНІЕ ТРИЧЛЕННЫХЪ УРАВНЕНІЙ $x^4+px^2+q=0$, И, ВООБЩЕ $x^{2m}+px^m+q=0$, ВЪ УРАВНЕНІЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ.

**164.** Уравненіе $x^4+px^2+q=0$ четвертой степени весьма просто приводится въ уравненіе 2-й степени, и легко можетъ быть разрѣшено. Для этого надобно только положить $x^2=y$, слѣдовательно $x^4=y^2$, и это подставить; получится,

$$y^2+py+q=0,$$

уравненіе второй степени, изъ котораго найдется:

$$y=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}, \text{ или}$$

$$x^2=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}; \text{ посему}$$

$$x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}}.$$

**Задача.** — *Данное число а разложить на два такіе множителя, чтобы сумма ихъ квадратовъ равнялась $b^2$.*

Пусть эти множители $x$, $y$; то, по условію задачи, должно быть:

$$xy=a,\ x^2+y^2=b^2.$$

Изъ перваго уравненія нахожу $y = \frac{a}{x}$, и это подставляю во второе:

$$x^2 + \frac{a^2}{x^2} = b^2;\ \text{отсюда}$$

$$x^4 + a^2 + b^2x^2,\ \text{или}$$

$$x^4 - b^2x^2 + a^2 = 0.$$

Для разрѣшенія этого уравненія, полагаю $x^2 = y$, и нахожу:

$$y^2 - by + a^2 = 0,\ \text{откуда}$$

$$y = \frac{1}{2}\, b \pm \sqrt{\frac{1}{4}\, b^2 - a^2};$$

$$\text{слѣдовательно,}\ x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\, b \pm \sqrt{\frac{1}{4}\, b^2 - a^2}}.$$

Послѣ сего найдется $y = \frac{a}{x} = \frac{a}{\pm \sqrt{\frac{1}{2}\, b \pm \sqrt{\frac{1}{4}\, b^2 - a^2}}}$.

Помножимъ числитель и знаменатель на $\pm \sqrt{\frac{1}{2}\, b \mp \sqrt{\frac{1}{4}\, b^2 - a^2}}$, останется:

$$y = \mp \sqrt{\frac{1}{2}\, b \mp \sqrt{\frac{1}{4}\, b^2 - a^2}}.$$

Въ этихъ выраженіяхъ заключаются четыре корня, а именно:

два для $x = + \sqrt{\frac{1}{2}\, b \pm \sqrt{\frac{1}{4}\, b^2 - a^2}}$, $y = + \sqrt{\frac{1}{2}\, b \mp \sqrt{\frac{1}{4}\, b^2 - a^2}}$;

два для $x = - \sqrt{\frac{1}{2}\, b \pm \sqrt{\frac{1}{4}\, b^2 - a^2}}$, $y = - \sqrt{\frac{1}{2}\, b \mp \sqrt{\frac{1}{4}\, b^2 - a^2}}$.

Смотря потому, будетъ ли $\frac{1}{4}\, b^2 > a^2$, или $< a^2$, всѣ корни будутъ дѣйствительные, или мнимые.

**165**. Возмемъ теперь трічленное уравненіе

$$x^{2m} + px^m + q = 0,$$

гдѣ $m$ число цѣлое положительное. Если положить $x^m = y$, взять этого квадратъ $x^{2m} = y^2$, и подставить, то получится уравненіе 2-й степени

$$y^2 + py + q = 0;\ \text{откуда}$$

$$y = \frac{1}{2}\, p \pm \sqrt{\frac{1}{4}\, p^2 - q} = x^m;$$

$$\text{и, наконецъ,}\ x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}\, p \pm \sqrt{\frac{1}{4}\, p^2 - q}}\,.$$

Въ общей теоріи уравненій мы покажемъ, сколько такое уравненіе можетъ имѣть корней дѣйствительныхъ и мнимыхъ, и какъ можно ихъ отыскивать. А теперь намъ достаточно знать, что можно уравненія такого вида понижать во вторую степень, и находить по крайней мѣрѣ два ихъ корня.

### Неопредѣленный анализъ 2-й степени. Рѣшенія наибольшія и наименьшія.

**166.** Эти уравненія, вообще, допускаютъ безчисленное множество рѣшеній, между которыми могутъ быть дѣйствительныя и мнимыя, цѣлыя и дробныя, соизмѣримыя и несоизмѣримыя, положительныя и отрицательныя. Но, это множество рѣшеній весьма часто въ задачахъ ограничивается условіями: 1) чтобы всѣ рѣшенія были дѣйствительныя, и притомъ положительныя, цѣлыя, или дробныя—соизмѣримыя; 2) чтобы одна изъ неизвѣстныхъ была не больше или не менѣе данной величины; 3) чтобы которая-нибудь изъ неизвѣстныхъ была наибольшею либо наименьшею.

**167.** Въ неопредѣленныхъ уравненіяхъ первой степени не бываетъ рѣшеній мнимыхъ, нѣтъ также конечныхъ рѣшеній наибольшихъ и наименьшихъ; но въ неопредѣленныхъ уравненіяхъ 2-й степени, и степеней высшихъ, онѣ часто случаются, а потому мы собственно займемся розысканіемъ этихъ рѣшеній, ограничиваясь уравненіями только *съ двумя неизвѣстными*.

Для примѣра, возмемъ уравненіе $x^2+y^2=5$, изъ котораго

$$y=\pm\sqrt{5-x^2}.$$

Если возмемъ $y$ съ знакомъ $+$, и будемъ перемѣнной $x$ давать возрастающія величины:

$$x=-3,\ -\sqrt{5},\ -2,\ -1,\quad 0,\ 1,\ 2,\ \sqrt{5},\quad 3,\ldots.,$$

то получимъ соотвѣтственныя рѣшенія:

$$y=\sqrt{-4},\quad 0,\quad 1,\quad 2,\ \sqrt{5},\ 2.\ 1,\quad 0,\ \sqrt{-4},\ldots$$

Здѣсь видно, что всѣ дѣйствительныя рѣшенія заключаются въ предѣлахъ отъ $x=-\sqrt{5}$ до $x=+\sqrt{5}$; а, внѣ этихъ предѣловъ, всѣ $y$ суть мнимыя. Рѣшеній цѣлыхъ положительныхъ для $x$, $y$, только два

Сверхъ того, въ ряду дѣйствительныхъ рѣшеній, $y$ имѣетъ одно наибольшее, соотвѣтственное наименьшему $x=0$, и два наименьшихъ, соотвѣтственныя $x=-\sqrt{5}$ и $+\sqrt{5}$.

Возмемъ еще уравненіе $y=3+(x-2)^2$.

Оно допускаетъ безчисленное множество рѣшеній въ числахъ цѣлыхъ и положительныхъ. Ибо, для

$$x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots.$$
$$y=12,\ 7,\ 4,\ 3,\ 4,\ 7,\ 12,\ldots.$$

Но и въ числѣ этихъ рѣшеній находится одно, $y=3$, самое меньшее. Слѣдовательно, если бы требовалось, изъ всѣхъ рѣшеній для $y$, найти наименьшее, то мы получили бы это одно.

**168.** Только та неизвѣстная, которая выражается квадратнымъ корнемъ изъ другой, можетъ сдѣлаться мнимою. Какія *дѣйствительныя величины* соотвѣтствуютъ этой неизвѣстной подкоренной, и въ какихъ предѣлахъ, найти нетрудно: стоитъ только все количество подъ корнемъ уравнять нулю, и найти отсюда вторую неизвѣстную. Величина сей неизвѣстной будетъ предѣломъ дѣйствительныхъ рѣшеній для первой неизвѣстной, и въ тоже время наибольшею либо наименьшею для второй.

Посему, чтобъ отыскать, имѣетъ ли функція

$$y=3+(x-2)^2$$

наибольшую или наименьшую величину, надобно разрѣшить это уравненіе относительно $x$, и найти предѣлъ, при которомъ $x$ становится дѣйствительнымъ:

$$(x-2)^2=y-3, \text{ отсюда}$$

$$x=2\pm\sqrt{y-3}.$$

Всѣ числа $x$ будутъ дѣйствительныя, когда станемъ $y$ брать только отъ 3 до $\infty$; менѣе 3 взять нельзя, иначе $x$ сдѣлается мнимымъ. Изъ этого видно, что для $y$ соотвѣтствуетъ *наименьшая величина* 3, которую мы и нашли бы, полагая подкоренное количество $y-3=0$. Въ этомъ случаѣ $x=2$. И такъ, для $x=2$, соотвѣтствуетъ $y=3=$ *minimum*.

*Примѣръ*. По данному уравненію

$$y^2-10xy+26x^2-49=0,$$

найти, при какихъ величинахъ $x$, перемѣнная $y$ дѣлается наибольшею или наименьшею.

Разрѣшаю это уравненіе относительно $x$:

$$x^2-\frac{10xy}{26}=\frac{49-y^2}{26},$$

$$x=\frac{5y\pm\sqrt{46\ 26-y^2}}{26}.$$

Здѣсь тотчасъ видно, что $y^2$ можно брать отъ 0 до 49.26. и не болѣе, иначе $x$ сдѣлается мнимымъ. Слѣдовательно $y$ допускаетъ *maximum*, которое найдется изъ уравненія:

$$49.26-y^2=0, \text{ или}$$

$$y=\pm\sqrt{49.26}=\pm 35 \text{ (почти)}.$$

*Примѣръ*. Опредѣлить, имѣетъ ли функція

$$y=\frac{x+a}{\sqrt{x-a}}$$

наибольшую или наименьшую величину?

Освобождаю отъ знаменателя, и возвышаю въ квадратъ:

$$x^2+2ax+a^2=y^2(x-a)=xy^2-ay^2, \text{ или}$$

$$x^2+(2a-y^2)x=-a^2-ay^2; \text{ отсюда}$$

$$x=\frac{y^2-2a\pm y\sqrt{y^2-8a}}{2}.$$

Подкоренное количество показываетъ, что $y^2$ можно брать отъ $\infty$ до $8a$, и отнюдь не менѣе; слѣдовательно $y$ имѣетъ *minimum*, которое мы найдемъ, полагая $y^2-8a=0$; откуда

$$y=\pm\sqrt{8a}=minimum.$$

Въ этомъ случаѣ $x=\frac{y^2-2a}{2}=\frac{8a-2a}{2}=3a$.

**Задача.** *Данное число a раздѣлить на два такихъ множителя, чтобы сумма ихъ была наименьшею.*

Пусть $x$ первый множитель числа $a$, то вторымъ будетъ $\frac{a}{x}$. Сумму ихъ назовемъ чрезъ $y$; получится уравненіе:

$$x+\frac{a}{x}=y; \text{ откуда}$$

$$x^2-xy+a=0,$$

$$x=\frac{1}{2}y\pm\sqrt{\frac{1}{4}y^2-a}.$$

Очевидно, что нельзя взять $\frac{1}{4}y^2<a$; слѣдовательно, сумма $y$ имѣетъ наименьшую величину, которую найдемъ, положивъ $\frac{1}{4}y^2-a=0$; откуда

$$y=\pm2\sqrt{a}.$$

Такова наименьшая сумма $y$. Въ этомъ случаѣ, первымъ множителемъ числа $a$ будетъ

$$x=\frac{1}{2}y=\pm\sqrt{a},$$

вторымъ множителемъ $\frac{a}{x}=\frac{a}{\sqrt{a}}=\pm\sqrt{a}$.

И такъ, данное число $a$ надобно раздѣлить на два равные множителя, изъ коихъ каждый $=\pm\sqrt{a}$.

**Задача.** *Данное число 2a раздѣлить на двѣ такія части, чтобы произведеніе ихъ было наибольшимъ.*

Пусть первая часть $x$, то вторую будетъ $2a-x$. Назовемъ искомое произведеніе буквою $y$; оно будетъ

$$y=x(2a-x).$$

А чтобы найти, когда это произведеніе сдѣлается наибольшимъ, отыщемъ $x$: онъ получится:

$$x=a\pm\sqrt{a^2-y}.$$

Самая большая величина для $y$ есть $a^2$; въ семъ случаѣ, $x=a$, это первая часть, и вторая $2a-x=a$. Слѣдовательно, *данное число $2a$ надобно раздѣлить на двѣ равныя части, чтобы произведеніе ихъ было наибольшее.*

**Задача.** — *Данное число $2a$ раздѣлить на двѣ такія части, чтобы сумма ихъ квадратовъ была наименьшею.*

Пусть $x$ первая часть, $2a-x$ вторая, а сумма ихъ квадратовъ $=y$; то

$$x^2+4a^2-4ax+x^2=y;\text{ отсюда}$$

$$x=a\pm\sqrt{\frac{y}{2}-a^2}.$$

Нельзя взять $\frac{1}{2}y<a^2$, или $y<2a^2$; посему, $y=2a^2$ и есть наименьшее. Въ этомъ случаѣ, $x=a$, $2a-x=a$. Слѣдовательно, и здѣсь надобно $2a$ раздѣлить пополамъ.

**169.** Можетъ случиться, что количество подкоренное будетъ трехчленное, вида $y^2+py+q$, и для $y$ найдутся двѣ величины, одна *положительная*, а другая *отрицательная:* тогда первая будетъ *minimum*, въ ряду чиселъ положительныхъ а вторая *maximum*, въ ряду чиселъ отрицательныхъ.

Обратно, если подкоренной трichленъ будетъ вида $q-py-y^2$, то положительная величина для $y$ будетъ *maximum* въ ряду чиселъ положительныхъ, а отрицательная — *minimum* въ ряду чиселъ отрицательныхъ.

Для примѣра, возмемъ $y=\frac{x^2-6x+69}{2x-10}$.

Освободимъ отъ знаменателя:

$$x^2-6x+69=(2x-10)y,\text{ или}$$

$$x^2-(6+2y)x+10y+69=0;\text{ откуда}$$

$$x=3+y\pm\sqrt{y^2-4y-60}.$$

Положимъ $y^2-4y-60=0$, и отсюда найдемъ:

$$y=10,\text{ либо }y=-6.$$

Изъ этого видно, что $y$ нельзя брать $<10$, иначе $x$ сдѣлается мнимымъ; посему, $y=10$, есть *наименьшее* въ ряду чиселъ положительныхъ. Нельзя также брать $y>-6$, наприм. $-5$, $-3$, $-1$, 0; стало-быть, $y=-6$ есть *наибольшее* въ ряду чиселъ отрицательныхъ.

# ГЛАВА ШЕСТАЯ.

## ВОЗВЫШЕНІЕ КОЛИЧЕСТВЪ ОДНОЧЛЕННЫХЪ И МНОГОЧЛЕННЫХЪ ВЪ ТРЕТЬЮ СТЕПЕНЬ.

**170.** Возвысить въ кубъ данное количество значитъ составить произведеніе изъ трехъ равныхъ ему множителей. Наприм. количество $5ab^2$ имѣетъ третью степень $5ab^2 \times 5ab^2 \times 5ab^2 = 125a^3b^6$.

При возвышеніи въ кубъ положительнаго количества или отрицательнаго, и самый кубъ получается соотвѣтственно положительный или отрицательный. Напримѣръ:

$$(-5ab^2)^3 = -125a^3b^6.$$

Здѣсь берутся въ разсмотрѣніе только дѣйствительныя количества.

**171.** Для возвышенія двучленнаго количества въ третью степень, возмемъ квадратъ двучлена $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, и помножимъ на $a+b$; получится:

$$(a+b)^2(a+b) = (a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Посему, *кубъ двучлена равенъ кубу перваго члена, сложенному съ утроеннымъ произведеніемъ квадрата перваго члена на второй, сложенному съ утроеннымъ произведеніемъ перваго члена на квадратъ втораго, и съ кубомъ втораго члена.*

Послѣ этого нетрудно получить кубъ тричлена $a+b+c$. Положимъ $a+b = A$, то сперва получится:

$$(A+c)^3 = A^3+3A^2c+3Ac^2 = c^3;$$

сюда подставимъ $A = a+b$, и выйдетъ:

$$(a+b+c)^3 = (a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3, \text{ или}$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3.$$

Слѣдовательно, кубъ тричлена равенъ кубу его первыхъ двухъ членовъ, сложенному съ утроеннымъ произведеніемъ квадрата этихъ двухъ членовъ на третій, сложенному съ утроеннымъ произведеніемъ первыхъ двухъ членовъ на квадратъ третьяго, и съ кубомъ третьяго члена.

Нашли бы также, что

$$(a+b+c+d)^3 = (a+b+c)^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+$$
$$+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3.$$

**172.** Зная законъ составленія куба изъ многочлена, можемъ его *примѣнить тотчасъ къ составленію куба всякаго многозначнаго числа.* Положимъ, что дано найти $(423)^3$. Разложимъ это число на сотни, десятки и единицы:

$$(423)^3 = (400+20+3)^3,$$

и сравнимъ съ $(a+b+c)^3$, полагая $a=400$, $b=20$, $c=3$.

Но, $(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$; посему кубъ отъ 423 долженъ быть равенъ кубу сотенъ, $+$ утроенному произведенію квадрата сотенъ на десятки, $+$ утроенному произведенію сотенъ на квадратъ десятковъ, $+$ кубу десятковъ, $+$ утроенному произведенію квадрата сотенъ и десятковъ на единицы, $+$ утроенному произведенію сотенъ и десятковъ на квадратъ единицъ, и кубу единицъ, то есть:

$$(423)^3=400^3+3.400^2.20+3.400.20^2+20^3+3.420^2.3+3.420.3^2+3^3.$$

или:

$$\begin{aligned}
400^3&=64000000\\
3.400^2.20&=\ \ 9600000\\
3.400.20^2&=\quad 280000\\
20^3&=\qquad 8000\\
3.420^2.3&=\ \ 1587600\\
3.420.3^2&=\qquad 11340\\
3^3&=\qquad\quad 27
\end{aligned}$$

Посему, $(423)^3=75486967$.

Относительно дробей замѣтимъ только: 1) что кубъ дроби равенъ кубу ея числителя, раздѣленному на кубъ знаменателя. Напр.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}=\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{64}.$$

2) Кубъ десятичной дроби составляется также, какъ изъ цѣлаго числа: для этого отбрасываютъ запятую, то есть, обращаютъ дробь въ цѣлое число, возвышаютъ оное въ третью степень; а потомъ въ произведеніи отдѣляютъ десятичныхъ знаковъ втрое болѣе, нежели сколько ихъ было въ данной дроби. Наприм.

$$(2,5)^3=15,625.$$

Здѣсь я отдѣлилъ три десятичные знака, потому что $(2,5)^3=2,5\times2,5\times2,5$; а произведеніе должно имѣть столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ находится во всѣхъ его производителяхъ.

### Извлеченіе кубичнаго корня изъ чиселъ.

**173.** Извлеченіемъ корня кубичнаго изъ даннаго количества называется дѣйствіе, посредствомъ котораго ищется такой множитель, котораго кубъ равенъ этому количеству. Этотъ искомый множитель называется *корнемъ кубичнымъ* того количества. Такъ наприм. корень кубичный изъ $27a^3$ есть $3a$; потому что $3a\times3a\times3a=27a^3$.

Когда нужно только показать, что мы беремъ кубичный корень даннаго количества; въ такомъ случаѣ употребляется коренной знакъ $\sqrt[3]{\phantom{x}}$; подъ этимъ знакомъ и пишется данное количество. Наприм.

$$\sqrt[3]{27a^3}=3a,\quad \sqrt[3]{20,}$$

и выговаривается: корень кубичный изъ $27a^3$, корень кубичный изъ 20.

**174.** *Изъ цѣлыхъ чиселъ.* — Для извлеченія кубичныхъ корней изъ цѣлыхъ чиселъ, надобно знать кубы первыхъ девяти чиселъ, кои находятся въ слѣдующей табличкѣ:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Корни:* | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10. |
| *Кубы:* | 1, | 8, | 27, | 64, | 125, | 216, | 343, | 512, | 729, | 1000. |

изъ которой видно, что кубу однозначнаго, двузначнаго или трехзначнаго числа, соотвѣтствуетъ корень только однозначный; что самому меньшему четырехзначному числу 1000 соотвѣтствуетъ корень 10, самое меньшее число двузначное; что не всякое число есть полный кубъ. Такъ наприм. число 100 заключается между полными кубами 64 и 125; слѣдовательно, корень его находится между 4 и 5. Корни изъ неполныхъ кубовъ называются *неизвлекомыми*, *ирраціональными*, *несоизмѣримыми съ единицею;* они не могутъ быть выражены точнымъ образомъ ни цѣлыми числами, ни дробями. Въ самомъ дѣлѣ $\sqrt[3]{100}>4$ и $<5$; а потому долженъ изобразиться нѣкоторымъ дробнымъ числомъ $\frac{m}{n}$, гдѣ $m$ и $n$ суть первыя между собою, и $m>n$. И такъ, пусть

$$\sqrt[3]{100}=\frac{m}{n};$$

возмемъ кубъ этого равенства:

$$100=\frac{m^3}{n^3}.$$

числа $m$, $n$, суть первыя между собою, потому что дробь $\frac{m}{n}$ несократимая; то и числа $m^3$, $n^3$, также будутъ первыми между собою. Стало-быть, дробь $\frac{m^3}{n^3}$ не можетъ быть сокращена, и не можетъ обратиться въ цѣлое число 100. А этимъ и доказывается, что $\sqrt[3]{100}$ есть число ирраціональное, несоизмѣримое съ единицею. Онъ не можетъ быть найденъ точнымъ образомъ; но, увидимъ, что можно находить его приближенныя величины, какія угодно.

**175.** Приступая къ извлеченію кубичнаго корня изъ цѣлаго числа, состоящаго изъ четырехъ, пяти или болѣе цифръ, надобно сперва опредѣлить, сколько цифръ должно быть въ этомъ корнѣ. Для сего, данное число сравниваютъ съ полными кубами

$$10^3=1000,$$
$$100^3=1000000,$$
$$1000^3=1000000000, \text{ и проч.},$$

и смотрятъ, между какими изъ этихъ кубовъ оно заключается. Положимъ, что данное число 103823. Это число находится между 1000 и 1000000 полными кубами; слѣдовательно корень его падаетъ между 10 и 100; стало быть этотъ корень двузначный, состоящій изъ десятковъ и единицъ. Посему, данное число 103823 должно содержать въ себѣ: *кубъ десятковъ корня*, *утроенное произведеніе квадрата десятковъ на единицы*, *утроенное произведеніе де-*

*сятковъ на квадратъ единицъ, и кубъ единицъ,* и можетъ быть сравнено съ кубомъ двучлена $(a+b)^3$, въ которомъ $a$ означаетъ десятки, а $b$ единицы корня, то есть,

$$103823=(a+b)^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Отыскиваніе же цифръ корня производится, начиная съ единицъ высшаго разряда, а именно: надобно сперва найти десятки $a$ корня, и кубъ десятковъ вычесть изъ 103823; получится остатокъ:

$$103823-a^3=3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Потомъ надобно взять утроенное произведеніе $3a^2b$ квадрата десятковъ на искомыя единицы $b$, и раздѣлить на утроенное произведеніе $3a^2$ квадрата десятковъ; получатся $3a^2b : 3a^2=b$ единицы корня. Для повѣрки, надобно составить $3a^2b$, $3ab^2$, и $b^3$, и вычесть изъ $103823-a^3$. Если данное число полный кубъ, то остатокъ будетъ нуль:

$$103823-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3=0.$$

Узнавши порядокъ извлеченія корня, я пишу данное число 103823, провожу съ правой стороны его вертикальную черту,

| Кубъ. | Корень. |
|---|---|
| 103,823 | 47 |
| 64 | |
| 398,23 | $3.4^2=48$ сотенъ |
| $3.4^2.7=336$ | 7 |
| 622,3 | |
| $3.4.7^2=588$ | |
| 343 | |
| $7^3=343$ | |
| 0 | |

и говорю: кубъ десятковъ производитъ не менѣе какъ тысячи, то и надобно искать его въ тысячахъ. Для этого отдѣляю въ данномъ числѣ послѣднія три цифры запятою, и нахожу, что меньшій самый близкій кубъ къ 103 есть 64, которому соотвѣтствуетъ корень 4 десятка. Число 4 десятка пишу по правую сторону вертикальной черты; а, для повѣрки, беру $4^3=64$, и вычитаю изъ 103. Къ остатку 39 сношу остальныя цифры 823. Въ этомъ остаткѣ должны быть: утроенное произведеніе квадрата десятковъ корня на его единицы, утроенное произведеніе десятковъ корня на квадратъ единицъ, и кубъ единицъ. Но, какъ утроенное произведеніе *квадрата десятковъ* производитъ не менѣе, какъ *сотни*, слѣдовательно и содержится въ сотняхъ; то я отдѣляю 23 запятою, составляю $3.4^2=48$ сотенъ, и на это число дѣлю 398; частное 7 ставлю на мѣстѣ единицъ корня. Для повѣрки, составляю:

$3(4$ дес.$)^2.7=336$ сот., вычитаю изъ сотень;

$3(4$ дес.$).7^2=588$ дес., вычитаю изъ десятковъ;

$7^3=343$ един., вычитаю изъ единицъ.

Въ остаткѣ нуль; слѣдовательно,

$$\sqrt[3]{103823}=47.$$

**136.** Точно также надобно поступать, если данное число будетъ содержать большее число цифръ.

Положимъ, что надобно извлечь кубичный корень изъ 8741816.

Напередъ я замѣчаю, что это число заключается между

$$100^3=1000000, \text{ и}$$
$$1000^3=1000000000,$$

слѣдовательно, его корень находится между 100 и 1000, то есть, содержитъ три цифры: сотни, десятки и единицы. Оно можетъ быть сравнено съ $(a+b+c)^3=$ $=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$, гдѣ $a$ означаетъ сотни корня, $b$ его десятки и $c$ единицы. А какъ $10^3=1000$, $100^3=1000000$; то кубъ его десятковъ надобно искать въ тысячахъ, которыя и отдѣлимъ запятою; кубъ его сотенъ заключается въ милліонахъ, то и 8 милліоновъ отдѣлимъ запятою. Поступая такимъ образомъ, данное число раздѣлится отъ правой руки къ лѣвой на классы по три цифры; послѣдній классъ можетъ имѣть и менѣе трехъ цифръ. Въ нашемъ примѣрѣ, послѣдній классъ имѣетъ одну цифру,

8,741,816;

при этомъ, *число классовъ всегда показываетъ число цифръ корня*. Вотъ почему поставляется за правило, прежде извлеченія кубическаго корня, дѣлить данное число на классы, чтобы тотчасъ узнать число цифръ корня, и потомъ уже дѣлать извлеченіе.

| Корень. | Кубъ. |
|---|---|
| 8,741,816 | 206 |
| $2^3=8$ | |
| 7,41 | $3.2^2=12$ |
| 7418,16 | $3.20^2=1200$ |
| $3.20^2.6=7200$ | $\times 6$ |
| 2181,6 | |
| $3.20.6^2=2160$ | |
| 216 | |
| $6^3=216$ | |
| 0 | |

Корень кубическій изъ 8 милліоновъ есть 2 сотни. Эти двѣ сотни пишу за вертикальною чертою беру $2^3=8$, и вычитаю изъ 8 милліоновъ даннаго числа.

Сношу подъ черту слѣдующій классъ 741 тысячь, въ которомъ должно быть утроенное произведеніе квадрата сотенъ корня на его искомые десятки, утроенные сотни на квадратъ десятковъ, и кубъ десятковъ. Чтобы отыскать десятки корня, беру $3.2^2$, отдѣляю 41 запятою, и дѣлю 7 на 12. А какъ 7 нельзя дѣлить нацѣло на 12, то заключаю, что десятковъ нѣтъ въ корнѣ; ставлю на мѣстѣ ихъ нуль; сношу подъ черту слѣдующій классъ 816, и отдѣляю двѣ послѣднія цифры запятою. Во всемъ числѣ 741816 должны быть: утроенное произведеніе квадрата сотенъ и десятковъ корня на его искомыя единицы, утроенное произведеніе сотенъ и десятковъ на квадратъ единицъ, и кубъ единицъ. Чтобы найти единицы, отдѣляю 16 запятою, беру $3.20^2=1200$, и на это число дѣлю 7418; нахожу частное 6 единицъ корня, которыя записываю въ корнѣ. Для повѣрки составляю:

$3.20^2.6=7200$ сотенъ, и вычитаю изъ сотенъ;
$3.20.6^2=2160$ десят., и вычитаю изъ десятковъ;
$6^3=216$ единицъ, и вычитаю изъ единицъ.

Въ остаткѣ нуль; слѣдовательно данное число полный кубъ, и что

$$\sqrt[3]{8741816}=206.$$

Но, если и послѣ этого нашелся бы остатокъ болѣе нуля, то мы заключили бы, что данное число неполный кубъ, и что онъ имѣетъ корень неизвлекомый, несоизмѣримый съ единицею.

**133**. Изъ чиселъ—неполныхъ кубовъ нельзя находить точныхъ корней, то есть, нельзя ихъ выразить ни цѣлыми числами, ни конечными дробями (**131**); однакоже всегда можно искать приближенныя величины. такихъ корней, столь близкія къ истиннымъ, сколько угодно, выражая сіи приближенія посредствомъ дробей обыкновенныхъ, или десятичныхъ.

1) Положимъ, что мы хотимъ найти $\sqrt[3]{N}$, приближенный до $\frac{1}{n}$. Въ такомъ случаѣ дѣлаемъ $\sqrt[3]{N}=\sqrt[3]{\frac{N.n^3}{n^3}}=\frac{1}{n}\sqrt[3]{Nn^3}$; извлекаемъ корень изъ $Nn^3$, приближенный только въ цѣлыхъ числахъ, отбрасывая дробь, и пусть эта цѣлая часть $=w$; то будемъ имѣть,

$$\sqrt[3]{N}>\frac{w}{n}$$
$$<\frac{w+1}{n};$$

разность $\frac{w+1}{n}-\frac{w}{n}=\frac{1}{n}$. Итакъ, взять ли $\frac{w}{n}$ или $\frac{w+1}{n}$ за приближенный корень, погрѣшность будетъ менѣе нежели на $\frac{1}{n}$.

*Примѣръ:* Найти $\sqrt[3]{10}$, приближенный до $\frac{1}{120}$.

Беру $\sqrt{10}=\sqrt[3]{\frac{10.120^3}{120^3}}=\frac{1}{120}\sqrt[3]{10.120^3}=\frac{1}{120}\sqrt[3]{17280000.}$

Нахожу $\sqrt[3]{17280000}=271+$ дробь; отбрасываю дробь, и получаю:

$$\sqrt[3]{10} > \frac{271}{120},\text{ но } < \frac{272}{120};$$

разность $\frac{272}{120}-\frac{271}{120}=\frac{1}{120}$. Посему, если за приближенный корень возмемъ $\frac{271}{120}$ или $\frac{272}{120}$, погрѣшность будетъ менѣе нежели на $\frac{1}{120}$.

2) Гораздо чаще и обыкновеннѣе разыскиваются приближенные корни изъ чиселъ—неполныхъ кубовъ посредствомъ десятичныхъ дробей. При семъ надобно помнить, что въ данномъ кубѣ надобно дѣлать или брать десятичныхъ знаковъ втрое болѣе, нежели сколько ихъ желаемъ получить въ его приближенномъ корнѣ.

Наприм. въ кубѣ

$$(2{,}34)^3=2{,}34\times2{,}34\times2{,}34$$

должно быть *шесть десятичныхъ*, потому что столько десятичныхъ во всѣхъ его множителяхъ; въ корнѣ же 2,34 находится только два десятичные знака.

*Примѣръ.*—Найти $\sqrt[3]{82{,}32}$, приближенный до двухъ десятичныхъ.

Къ данному числу 82,32 приписываю сперва четыре нуля, чтобы вышло шесть десятичныхъ; потомъ, раздѣливъ на классы, извлекаю корень, какъ изъ цѣлаго числа:

| Кубъ. | Корень. |
|---|---|
| 82,320,000 | 435 |
| $4^3=64$ | |
| 183,20 | $3.4^2=48$ |
| $3.4^2.3=144$ | 3 |
| 392,0 | |
| $3.4.3^2=108$ | |
| 2840 | |
| $3^3=\ 27$ | |
| 28130,00 | $3.43^2=5547$ |
| $3.43^2.5=27735$ | 5 |
| 3950,0 | |
| $3.43.5^2=3225$ | |
| 7250 | |
| $5^3=\ 125$ | |
| 7125 | |

Въ найденномъ корнѣ отдѣляю два десятичныхъ знака, и нахожу $\sqrt[3]{82{,}32}=4{,}35\ldots$, имѣющій точность только въ двухъ десятичныхъ.

**178.** *Изъ дробей.*—Совершенно такимъ же образомъ извлекаются приближенные корни изъ обыкновенныхъ дробей, если онѣ неполные кубы: превращаютъ данную дробь въ десятичную, и извлекаютъ изъ нея кубичный корень какъ изъ цѣлаго числа, не обращая вниманія на запятую, какъ видно изъ слѣдующаго примѣра.

*Примѣръ.*—Найти $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, приближенный до двухъ десятичныхъ.

Сперва нахожу, что $\frac{2}{3}=0,6666666...$; беру шесть десятичныхъ, откинувъ прочія, и извлекаю корень какъ изъ цѣлаго числа:

$$\begin{array}{r|l}
666,666 & 87 \\
8^3=512 & \\
\hline
1546,66 & 3.8^2=192 \\
3.8^2.7=1344 & \quad\quad\times 7 \\
\hline
2026,6 & \\
3.8.7^2=1176 & \\
\hline
8506 & \\
7^3=343 & \\
\hline
8163 &
\end{array}$$

Отдѣляю въ найденномъ корнѣ два десятичные знака, и нахожу:

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=0,87...,$$

точный только въ двухъ десятичныхъ.

*Примѣры:*

$$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}=\sqrt[3]{0,6}=0,843...$$

$$\sqrt[3]{0,0005}=0,079...$$

## Извлеченіе корня кубичнаго изъ алгебрическихъ количествъ.

**179.** Мы видѣли, что для возвышенія одночленнаго количества въ третью степень, надобно возвысить въ эту степень его предстоящее и помножить на 3 показатели всѣхъ его буквенныхъ множителей, напр.

$$(5ab^2)^3=125a^3b^6;$$

то заключаемъ обратно, что для извлеченія корня кубичнаго изъ одночленнаго количества, надобно извлечь его изъ коефиціента, а показатели буквенныхъ множителей раздѣлить на 3:

$$\sqrt[3]{125a^3b^6}=5a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{6}{3}}=5ab^2.$$

Что касается до знака предъ коефиціентомъ корня, то онъ будетъ + или —, смотря потому, будетъ ли данное количество положительное или отрицательное. Наприм.

$$\sqrt[3]{8a^3}=2a,\ \sqrt[3]{-8a^3}=-2a.$$

**180.** Одночленное количество имѣетъ корень неизвлекомый, если коефиціентъ его неполный кубъ, или показатель какого ни есть буквеннаго его множителя не дѣлится на показатель корня 3.

**181.** Для извлеченія корня кубическаго *изъ многочленовъ*, предлагаются обыкновенно такіе многочлены, которые дѣйствительно суть полные кубы. Во всякихъ другихъ случаяхъ непосредственное извлеченіе корня не представляетъ пользы. По этому надобно напередъ знать нѣкоторые признаки для многочленовъ — неполныхъ кубовъ.

1) Всякое количество двучленное или трехчленное не можетъ быть полнымъ кубомъ; потому что кубъ двучленнаго количества содержитъ уже четыре члена:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

2) Многочленное количество, расположенное по убывающимъ степенямъ одной буквы, освобожденное отъ множителей общихъ всѣмъ его членамъ, и не имѣющее коренныхъ количествъ, не будетъ полнымъ кубомъ, если его первый и послѣдній члены не будутъ полными кубами.

Другіе признаки неполноты куба открываются при извлеченіи корня.

**182.** Извлеченіе корня кубичнаго изъ многочленовъ ничѣмъ не разнится отъ извлеченія его изъ чиселъ, только гораздо проще. Оно также производится порядкомъ, совершенно обратнымъ тому, по которому составляется кубъ двучленнаго или трехчленнаго количества. Надобно послѣдовательно отыскивать члены корня, составлять изъ нихъ члены куба, и вычитать изъ даннаго количества. Если, по исключеніи всѣхъ членовъ куба, соотвѣтственнаго корню двучленному, трехчленному, или какой найдется, въ остаткѣ не получится ничего; то найденный корень и будетъ искомымъ. Самое же дѣйствіе производятъ такъ:

1) Располагаютъ данное количество по убывающимъ степенямъ одной его буквы, извлекаютъ корень кубичный изъ перваго члена; — получится *первый членъ корня*, который записываютъ съ правой стороны даннаго количества, и отдѣляютъ отъ него вертикальною чертою. 2) Возвышаютъ этотъ первый членъ корня въ третью степень, и вычитаютъ изъ даннаго количества; — получится остатокъ, въ которомъ должны находиться: утроенное произведеніе квадрата перваго члена корня на второй, утроенное произведеніе перваго члена корня на квадратъ втораго, и кубъ втораго члена. 3) Берутъ квадратъ перваго члена корня, помножаютъ его на 3, и на это произведеніе дѣлятъ первый членъ

остатка; получится *второй членъ корня.* 4) Для повѣрки, составляютъ утроенное произведеніе квадрата перваго члена корня на второй, утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ втораго и кубъ втораго члена, и сумму этихъ членовъ вычитаютъ изъ дѣлимаго числа. Если остатка не будетъ, то значитъ, что корень найденъ, и дѣйствіе кончено. Но, если получится остатокъ, то онъ долженъ содержать въ себѣ утроенное произведеніе квадрата перваго и втораго членовъ корня на третій, утроенное произведеніе перваго и втораго членовъ на квадратъ третьяго, и кубъ третьяго члена; по сему, 5) *третій членъ корня* найдется, если раздѣлимъ первый членъ остатка на утроенное произведеніе квадрата перваго и втораго членовъ корня. Для повѣрки, надобно составить утроенное произведеніе квадрата перваго и втораго членовъ корня на третій, утроенное произведеніе перваго и втораго членовъ на квадратъ третьяго, и кубъ третьяго члена, и все это вычесть изъ дѣлимаго. Если остатка не будетъ; то корень найденъ и дѣйствіе кончено. Но, если и послѣ того выйдетъ остатокъ, то онъ долженъ содержать въ себѣ утроенное произведеніе квадрата трехъ членовъ корня на четвертый неизвѣстный, утроенное произведеніе трехъ членовъ корня на квадратъ четвертаго, и кубъ четвертаго члена; а четвертый членъ найдется точно также, какъ мы отыскивали третій членъ, и проч. 6) Если, послѣ какого-нибудь вычитанія, получится остатокъ одночленный или двучленный, или, вообще, такой, въ которомъ не могутъ заключаться остальныя части куба, когда прибавится къ корню еще членъ; то заключаемъ, что данное количество не полный кубъ, котораго корень получить нельзя точнымъ образомъ.

*Примѣръ.* Извлечь корень кубичный изъ

$$27a^3-8b^3+36ab^2-54a^2b.$$

Расположивъ это количество по убывающимъ степенямъ буквы $a$,

| Кубъ. | Корень. |
|---|---|
| $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$ | $3a-2b$ |
| $-27a^3$ | |
| $-54a^2b+36ab^2-8b^3$ | $27a^2$ |
| $+54a^2b-36ab^2+8b^3$ | |
| $0$ | |

возмемъ корень кубичный изъ $27a^3$; онъ будетъ $3a$. Напишемъ его за вертикальною чертою, возвысимъ въ кубъ, и вычтемъ изъ даннаго количества. Получится остатокъ $-54a^2b+36ab^2-8b^3$, въ которомъ должны содержаться: утроенное произведеніе квадрата перваго члена $3a$ корня на неизвѣстный второй, утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ втораго, и кубъ втораго члена корня. Чтобы найти второй членъ корня, возмемъ $3(3a)^2=27a^2$, и раздѣлимъ на него первый членъ $-54a^2b$ остатка; найдется $-2b$ второй членъ корня, который и напишемъ подлѣ $3a$. А, для повѣрки, составимъ три члена куба:

$$3(3a)^2(-2b)+3(3a)(-2b)^2+(-2b)^3=$$
$$=-54a^2b+36ab^2-8b^3,$$

и все это вычтемъ изъ дѣлимаго. Въ остаткѣ нуль; слѣдовательно $3a-2b$ есть полный корень, а данное количество полный кубъ отъ $3a-2b$, и можно написать:

$$\sqrt[3]{27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3}=3a-2b.$$

Такъ надобно извлекать кубичные корни и изъ другихъ многочленовъ.

### Уравненія третьей степени.

**183.** Эти уравненія бываютъ полныя и неполныя. Полное уравненіе 3-й степени должно имѣть четыре члена, гдѣ неизвѣстная $x$ находится въ степеняхъ $x^3$, $x^2$, $x$, $x^0$. Общій видъ его:

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

Но если будетъ $a=0$, или $b=0$, или вдругъ $a=0$ и $b=0$, то получатся уравненія неполныя:

$$x^3+bx+c=0,$$
$$x^3+ax^2+c=0,$$
$$x^3+c=0.$$

Ни одно изъ нихъ не можетъ имѣть *дѣйствительнаго корня положительнаго*, когда коефиціенты $a$, $b$, $c$, положительные: ибо никакое положительное число, взятое на мѣсто $x$, не можетъ обратить въ нуль ни одно изъ этихъ уравненій. Но, если хотя только послѣдній членъ $c$ будетъ отрицательнымъ, то каждое изъ этихъ уравненій будетъ имѣть по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень, и притомъ положительный.

**184.** Рѣшеніе сихъ уравненій начнемъ съ простѣйшаго:

$$x^3-c=0.$$

Изъ него находимъ тотчасъ первый дѣйствительный корень:

$$x=\sqrt[3]{c}.$$

Слѣдовательно, $x-\sqrt[3]{c}=0$. На это равенство раздѣлимъ данное уравненіе; получится:

$$\frac{x^3-c}{x-\sqrt[3]{c}}=x^2+x\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c^2};\text{ откуда}$$
$$x^3-c=(x^2+x\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c^2})(x-\sqrt[3]{c})=0.$$

Отсюда видно, что данное уравненіе удовлетворится не только для $x-\sqrt[3]{c}=0$, но и для

$$x^2+x\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c^2}=0;$$

а изъ этого послѣдняго найдутся еще два корня:

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{c} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{c^2}}$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{c}(1 \pm \sqrt{-3})}{2}.$$

Они также удовлетворяютъ уравненію $x^3 - c = 0$, и притомъ оба *мнимые*.

**185.** Возмемъ теперь уравненіе

$$x^3 - bx - c = 0.$$

Оно имѣетъ непремѣнно одинъ дѣйствительный корень положительный, который не трудно и вычислить по приближенію, когда $c < \sqrt{b}$ *). Для этого раздѣлимъ данное уравненіе на $x$:

$x^2 = b + \frac{c}{x}$, и извлечемъ корень;

$$x = \sqrt{b + \frac{c}{x}};$$

во вторую часть подставимъ $\sqrt{b + \frac{c}{x}}$ вмѣсто $x$,

$$x = \sqrt{b + \frac{c}{\sqrt{b + \frac{c}{x}}}},$$

сюда опять подставимъ $\sqrt{b + \frac{c}{x}}$ вмѣсто $x$,

$$x = \sqrt{b + \frac{c}{\sqrt{b + \frac{c}{\sqrt{b + \frac{c}{x}}}}}},$$

и такъ далѣе. Этимъ способомъ корень уравненія выразится посредствомъ радикальной непрерывной дроби, и можетъ быть вычисленъ по приближенію до произвольной степени точности, какъ видно изъ слѣдующаго примѣра:

$$x^3 - 4x - 1 = 0.$$

---

*) Если $c > \sqrt{b}$, то надобно преобразовать уравненіе, положивъ $x = mz$; получится:

$$z^3 = \frac{b \, . \, z}{m^2} + \frac{c}{m^3} \cancel{=0}.$$

Теперь сдѣлаемъ $\frac{c}{m^3} < \frac{b}{m^2}$, или $c < bm$; отсюда

$$m > \frac{c}{b}.$$

Слѣдовательно, если взять $m = \frac{10c}{b}$, то получится уравненіе:

$$z^3 = \frac{b^3 . z}{100c^2} + \frac{b^3}{1000c^2},$$

въ которомъ $\frac{b^3}{1000c^2} < \frac{b^3}{100c^2}$.

Этому уравненію можно найти $z$, какъ теперь же увидимъ; а потомъ найдется корень

$$x = mz = \frac{10c}{b} . z$$

и для самаго даннаго уравненія.

Это уравненіе имѣетъ дѣйствительный корень между числами 2 и 3; потому что

$x=2$ обращаетъ уравненіе въ $-1$,
$x=3$ — — въ $+14$.

А чтобы вычислить этотъ корень, раздѣлимъ уравненіе на $x$, и извлечемъ квадратный корень:

$$x^2=4+\frac{1}{x},$$

$$x=\sqrt{4+\frac{1}{x}}.$$

Корень $x$ заключается между 2 и 3, то, для перваго приближенія, возмемъ $x=2$, и подставимъ во вторую часть, получится:

$$x=\sqrt{4,5}=2,1213\ldots$$

Это приближеніе подставимъ въ $\sqrt{4+\frac{1}{x}}$, получится новое приближеніе къ корню:

$$x=\sqrt{4+\frac{1}{2,1213}}=2,11345\ldots,$$

которое, въ свою очередь, внесемъ въ $\sqrt{4+\frac{1}{x}}$, и найдется:

$$x=\sqrt{4+\frac{1}{2,11345}}=2,1149\ldots$$

Такъ получился приближенный корень даннаго уравненія, точный въ трехъ десятичныхъ; а продолжая дѣйствіе, можемъ его вычислить до какой угодно степени точности.

**186.** И такъ, уравненіе $x^3-bx-c=0$ имѣетъ дѣйствительный корень; пусть этотъ корень $x=\alpha$, $x-\alpha=0$, и

$$\alpha^3-\alpha b-c=0.$$

Вычтемъ послѣднее равенство изъ даннаго уравненія:

$$x^3-\alpha^3-b(x-\alpha)=0;$$

раздѣлимъ на $x-\alpha=0$, останется:

$$x^2+\alpha x+\alpha^2-b=0; \text{ откуда}$$

$$x=\frac{-\alpha\pm\sqrt{4b-3\alpha^2}}{2}.$$

Таковы остальные два корня. Они оба мнимые, когда возмется коефиціентъ $b$ съ противнымъ знакомъ, и даннымъ уравненіемъ будетъ $x^3+bx-c=0$. Но въ уравненіи,

$$x^3-bx-c=0,$$

эти два корня дѣйствительные, когда

$$4b>3\alpha^2, \text{ или } 4b=3\alpha^2, \text{ или вообще } 4b \nless 3\alpha^2.$$

Сему условію можно дать другой, самый общій видъ, помноживъ обѣ части равенства на $\alpha$, и внеся $\alpha^3=b\alpha+c$:

$$4b\alpha=3\alpha^3,$$

$$4b\alpha=3b\alpha+3c;\ \text{откуда}$$

$$b\alpha=3c,\ \text{и}\ \alpha=\frac{3c}{b}.$$

Теперь это внесемъ въ $4b\not<3\alpha^2$, получится:

$$4b\not<\frac{27c^2}{b^2},\ \text{или}$$

$$\frac{b^3}{27}\not<\frac{c^2}{4}.$$

Вотъ условіе, при которомъ остальные два корня будутъ дѣйствительными; въ противномъ же случаѣ, когда $\frac{c^2}{4}>\frac{b^3}{27}$, уравненіе имѣетъ одинъ первый корень дѣйствительный, а прочіе два мнимые.

Повторимъ здѣсь наши выводы: 1) *когда уравненіе* $x^3+bx\pm c=0$ *имѣетъ коефиціентъ* $b$ *положительный, то содержитъ въ себѣ одинъ корень дѣйствительный и два мнимые;* 2) *если же* $b=-$, *и при томъ* $\frac{b^3}{27}\not<\frac{c^2}{4}$, *то въ уравненіи всѣ корни дѣйствительные.* Что касается до послѣдняго члена $c$, то корни вовсе не зависятъ отъ его знака, потому что, въ условіи, членъ этотъ входитъ во второй степени.

**187.** Третье неполное уравненіе,

$$x^3+ax^2+c=0,$$

легко приводится къ предыдущему, взявши $x=\frac{1}{z}$; отчего получится:

$$\frac{1}{z^3}+a\,.\frac{1}{z^2}+c=0,\ \text{или}$$

$$1+az+cz^3=0,\ \text{или}$$

$$z^3+\frac{a}{c}.z+\frac{1}{c}=0,\ \text{или, наконецъ,}$$

$$z^3+b'z+c'=0,$$

полагая $\frac{a}{c}=b'$, $\frac{1}{c}=c'$.

Корни этого уравненія всѣ дѣйствительные, когда $\frac{1}{4}\,.\,c'^2\not>\frac{b'^3}{27}$; въ противномъ случаѣ, одинъ дѣйствительный и два мнимые. А подставивъ на мѣсто $b'$ и $c'$ ихъ значенія, найдется:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{c^2}\not>\frac{1}{27}\cdot\frac{a^3}{c^3},\ \text{то есть:}$$

$$27c<4a^3,\ \text{или}=4a^3.$$

Таково условіе для даннаго уравненія $x^3+ax^2+c=0$, чтобы всѣ его корни были дѣйствительные; въ противномъ случаѣ, оно имѣетъ два корня мнимые.

**188.** Рѣшеніе полнаго уравненія

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

приводитъ къ рѣшенію предыдущаго уравненія $x^3+b'x+c'=0$, потому что второй

второй членъ всегда можно исключить изъ уравненія. Для этого довольно взять $x=z-\frac{a}{3}$, то есть, *равною новой неизвѣстной z безъ коефиціента втораго члена, раздѣленнаго на степень 3 уравненія*, и поставить въ данное уравненіе:

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & z^3-az^2+\frac{1}{3}a^2z-\frac{a^3}{27} \\ +ax^2 & = & \quad +az^2-\frac{2}{3}a^2z+\frac{a^3}{9} \\ +bx & = & \qquad\qquad bz-\frac{ab}{3} \\ +c & = & \qquad\qquad\quad +c \\ \hline \end{array}$$

$$z^3-(\frac{1}{3}a^2-b)z+\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c=0.$$

Такимъ образомъ получилось уравненіе, вида

$$z^3+b'z+c'=0,$$

не имѣющее втораго члена. Если разрѣшить оное, нашедши его корни $z$, то получатся и корни полнаго уравненія

$$x=z-\frac{a}{3}.$$

Корни $x$ будутъ дѣйствительные или мнимые, смотря по тому, будутъ ли таковыми корни $z$.

**189.** *Кардановъ способъ.* — Можно выразить корни уравненія 3-й степени посредствомъ извѣстной связи коефиціентовъ различныхъ его членовъ, подобно тому, какъ выражаются корни уравненій 2-й степени.

Для этого берется уравненіе

$$x^3+bx+c=0,$$

освобожденное отъ втораго члена по способу, предъ симъ показанному.

Положимъ, что одинъ изъ его корней будетъ

$$x=y+z \;\;{}^{*}),$$

---

*) Можно и не исключать второй членъ изъ уравненія $x^3+ax^2+bx+c=0$; но тогда надобно положить, что его корень $x=y+z+u$; потомъ взять $x-y=z+u$, возвысить въ кубъ:

$$\begin{array}{rl} x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 & =z^3+3zu(z+u)+u^3 \\ & =z^3+3zu(x-y)+u^3. \end{array}$$

Отсюда

$$x^3-3x^2y+3x(y^2-zu)=z^3-3zuy+u^3+y^3.$$

Сравнивъ это уравненіе съ даннымъ, получимъ:

$$-3y=a,\;\; 3(y^2-zu)=b,\;\; z^3+u^3+y^3-3zuy=-c.$$

Изъ этихъ трехъ уравненій найдутся:

$$y=-\frac{a}{3},\quad z=\sqrt[3]{-\frac{a^3}{27}+\frac{ab-3c}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{-a^3}{27}+\frac{ab-3c}{6}\right)^2-\left(\frac{a^2-3b}{9}\right)^3}},$$

$$u=\sqrt[3]{-\frac{a^3}{27}+\frac{ab-3c}{6}\mp\sqrt{\left(\frac{-a^3}{27}+\frac{ab-3c}{6}\right)^2-\left(\frac{a^2-3b}{9}\right)^3}};$$

гдѣ $y$ и $z$ двѣ его неизвѣстныя части, которыя надобно отыскать. Возвысимъ это въ кубъ; получится:

$$x^3 = y^3 + 3yz(y+z) + z^3, \text{ или}$$
$$x^3 = y^3 + 3yzx + z^3, \text{ или}$$
$$x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = 0.$$

Это уравненіе во всемъ должно быть тожественно съ даннымъ $x^3+bx+c=0$; слѣдовательно должно быть:

$$-3yz = b, \text{ или } z = \frac{-b}{3y}, \text{ и}$$
$$y^3+z^3 = -c.$$

Въ послѣднее подставимъ на мѣсто $z$ его величину, получится:

$$y^3 - \frac{b^3}{27y^3} = -c, \text{ или}$$
$$y^6 + cy^3 = \frac{b^3}{27}.$$

Для разрѣшенія этого уравненія, положимъ $y^3=t$, $y^6=t^2$, получится:

$$t^2+ct = \frac{b^3}{27}, \text{ откуда}$$
$$t^2 = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}; \text{ и, наконецъ,}$$
$$y = \sqrt[3]{t} . = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}.$$

Такова первая часть корня; а подставивъ ее въ уравненіе $y^3+z^3=-c$, найдется вторая часть:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} \mp \sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}.$$

Взявъ только верхній знакъ для $y$ и $z$, получится:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}, \text{ *)}$$

полное выраженіе корня даннаго уравненія. Корень этотъ дѣйствительный, когда $b=+$; но, въ семъ случаѣ, два другіе корня мнимые, какъ мы это видѣли выше.

Онъ будетъ дѣйствительнымъ и тогда, когда $b=-$, и притомъ когда $\frac{c^2}{4} < \frac{b^3}{27}$; и знаемъ, что чѣмъ $c$ менѣе относительно $b$, тѣмъ скорѣе можно его вычислять изъ выраженія

---

такимъ образомъ составится корень $x=y+z+u$.

Полагая $a=0$, нашли бы: $y=0$,

$$z = \sqrt{-\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}, \quad u = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} \mp \sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}.$$

*) *Іеронимъ Карданъ*, уроженецъ миланскій, врачъ и математикъ болонскій, 16 го вѣка, сдѣлалъ только извѣстнымъ это рѣшеніе. Открытіе же онаго самъ онъ приписываетъ *Сципіону Феррео*, болонскому ученому.

$$x=\sqrt{b+\frac{c}{\sqrt{b+\frac{c}{\sqrt{b+\ldots}}}}}$$

Въ этомъ случаѣ и два остальные корня будутъ дѣйствительные, что также намъ извѣстно (**186**). Отсюда заключаемъ, что формула

$$x=\sqrt[3]{-\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}\pm\frac{b^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}\pm\frac{b^3}{27}}}$$

всегда представляетъ корень дѣйствительный, не смотря на то, что обѣ части его, въ случаѣ $\frac{c^2}{4}-\frac{b^3}{27}<0$, кажутся мнимыми. Слѣдовательно, она допускаетъ такое преобразованіе, отъ котораго ея мнимость уничтожается, въ чемъ и дѣйствительно увѣримся скоро, когда будемъ говорить о возвышеніи двучленовъ и многочленовъ въ различныя степени цѣлыя и дробныя.

Одинъ взглядъ на эту формулу показываетъ, что вычисленіе корня посредствомъ ея не только затруднительно, но, безъ преобразованія, даже невозможно, когда $\frac{c^2}{4}<\frac{b^3}{27}$..

### **190.** Рѣшеніе общаго уравненія 4-й степени.

Есть нѣсколько способовъ для разрѣшенія полнаго уравненія 4-й степени. *Феррари*, ученикъ Кардановъ, и *Рафаель Бомбелли*, въ 16-мъ вѣкѣ, открыли первые къ тому способы; въ 17-мъ вѣкѣ *Декартъ*, и въ концѣ 18-го вѣка *Эйлеръ* представили свои. Посредствомъ всѣхъ ихъ рѣшеніе уравненія 4-й степени приводится къ рѣшенію уравненія 3-й степени. Мы разсмотримъ *способъ Декартовъ*.

Для этого возмемъ уравненіе $x^4+ax^2+bx+c=0$ безъ втораго члена, который всегда можно исключить по тому же правилу, какое показано было (**188**) при разрѣшеніи уравненія 3-й степени. Попытаемся разложить это уравненіе на два квадратныхъ, вида:

$$x^2+mx+n=0,\ x^2-mx+p=0, \text{ полагая}$$

$$x^4+ax^2+bx+c=(x^2+mx+n)(x^2-mx+p)=0$$

$$=x^4+(n+p-m^2)x^2+(mp-mn)x+np=0.$$

Чрезъ сравненіе коефиціентовъ равныхъ степеней отъ $x$, получаемъ:

$$1)\ n+p-m^2=a,\quad 2)\ mp-mn=b,\quad 3)\ np=c.$$

Изъ 1) находимъ $n+p=a+m^2$, | сложимъ и потомъ
 - 2) $p-n=\frac{b}{m}$. | вычтемъ:

$$2p=(a+m^2)+\frac{b}{m}\ \Big(\text{ перемножимъ и}$$

$$2n=(a+m^2)-\frac{b}{m}\ \Big)\text{ подставимъ } np=c$$

$$4c=a^2+2am^2+m^4-\frac{b^2}{m^2};\text{ откуда}$$

$$m^6+2am^4+(a^2-4c)m^2-b^2=0.$$

Послѣ этого, возмемъ $m^2=y$, получится:

$$y^3+2ay^2+(a^2-4c)y-b^2=0.$$

Такимъ образомъ опредѣленіе $y$ приведено къ рѣшенію уравненія 3-й степени. Изъ этого уравненія найдется по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный и притомъ положительный корень $y$, потому что послѣдній членъ $-b^2$ существенно отрицательный; посредствомъ этого корня опредѣлится дѣйствительная величина $m=\sqrt{y}$, и получится:

$$n=\frac{1}{2}(a+m^2)-\frac{b}{2m},\quad p=\frac{1}{2}(a+m^2)+\frac{b}{2m},$$

стало-быть, опредѣлятся уравненія

$$x^2+mx+n=0,\quad x^2-mx+p=0,$$ и ихъ корни

$$x=-\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\frac{1}{4}m^2-n}=-\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\frac{b}{2m}-\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}a},$$

$$x=+\frac{1}{2}m\pm\sqrt{-\frac{b}{2m}-\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}a},$$

которые будутъ корнями даннаго уравненія.

*Примѣръ.* Пусть дано уравненіе

$$x^4+3x^2+6x+10=0,$$

въ которомъ $a=3$, $b=6$, $c=10$, что и подставимъ въ

$$y^3+2ay^2+(a^2-4c)y-b^2=0;$$ найдется

$$y^3+6y^2-31y-36=0.$$

Корни этого уравненія суть: $-1$, $+4$, и $-9$;
стало-быть, $m=\sqrt{y}=\sqrt{-1}$, либо $=2$, либо $=3\sqrt{-1}$.

Взявъ $m=2$, получатся:

$$x=-\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\frac{b}{2m}-\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}a}=-1\pm\sqrt{-1},$$

$$x=+\frac{1}{2}m\pm\sqrt{-\frac{b}{2m}-\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}a}=+1\pm\sqrt{-1},$$

четыре корня даннаго уравненія.

Замѣчательно, что если взять $m=\sqrt{-1}$, или $-3\sqrt{-1}$, то и въ этихъ случаяхъ корни будутъ тѣ же.

Такъ, для $m=\sqrt{-1}$, корень

$$x=-\frac{1}{2}m+\sqrt{\frac{b}{2m}-\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}a}=-\frac{1}{2}\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\sqrt{-12\sqrt{-1}-5}$$

только по виду различается отъ $-1+\sqrt{-1}$, но въ сущности ему равенъ, въ чемъ легко увѣриться слѣдующею повѣркою: положимъ

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\sqrt{-12\sqrt{-1}-5}=-1+\sqrt{-1},$$ или

$$\sqrt{-12\sqrt{-1}-5}=-2+3\sqrt{-1};$$

это возвысимъ въ квадратъ:

$$-12\sqrt{-1}-5=4-9-12\sqrt{-1}=-5-12\sqrt{-1}.$$

Слѣдовательно, уравненіе 4-й степени допускаетъ не болѣе какъ четыре корня.

Задача.—*Найти три числа, составляющія непрерывную геометрическую пропорцію, коихъ сумма* $=10$, *а произведеніе перваго на второе* $=6$.

Пусть второе число $=x$, то первымъ будетъ $\frac{6}{x}$; третье число найдется изъ пропорціи

$$\frac{6}{x}:x=x:\text{трет. число},$$

именно, будетъ $=\frac{x^3}{6}$. Сумма чиселъ $=10$, посему,

$$x+\frac{6}{x}+\frac{x^3}{6}=10, \text{ откуда}$$

$$x^4+6x^2-60x+36=0.$$

Сравнивъ съ общимъ уравненіемъ,

$$x^4+ax^2+bx+c=0, \text{ получимъ:}$$

$$a=6,\ b=-60,\ c=36; \text{ отъ этого}$$

$$y^3+2ay^2+(a^2-4c)y-b^2=0 \text{ обращается въ}$$

$$y^3+12y^2-108y-3600=0.$$

Отсюда исключимъ второй членъ, полагая $y=z-4$; найдется:

$$z^3-156z-3040=0.$$

Корень этого уравненія, по формулѣ Кардана, будетъ

$$z=\sqrt[3]{1520+\sqrt{1520^2-52^3}}+\sqrt[3]{1520-\sqrt{1520^2-52^3}}.$$

$$=18,0\ldots.$$

Посему, $y=m^2=z-4=14$,

$$m=\sqrt{14}=3,74\ldots.$$

$$x=\frac{1}{2}m+\sqrt{\frac{-b}{2m}-\frac{1}{4}m^2-\frac{a}{2}}=1,87+\sqrt{\frac{30}{3,74}-6,5}$$

$$=3,10\ldots$$

Таково первое число. Вторымъ числомъ будетъ $\frac{6}{x}=1,94\ldots.$, третьимъ $\frac{x^3}{6}=4,96\ldots..$

Сумма чиселъ $=3,10+1,94+4,96=10$.

*Примѣчаніе.* Безполезно останавливать учащихся надъ рѣшеніемъ задачъ, относящихся къ уравненіямъ 3-й и 4-й степени, по правиламъ Кардана и Декарта. Алгебра имѣетъ превосходные способы рѣшенія численныхъ уравненій всякихъ степеней, которые будутъ изложены въ своемъ мѣстѣ.

# ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

## I. О ВОЗВЫШЕНІИ ВЪ СТЕПЕНИ ОДНОЧЛЕННЫХЪ АЛГЕБРИЧЕСКИХЪ КОЛИЧЕСТВЪ, И ИЗВЛЕЧЕНІИ КОРНЕЙ ВООБЩЕ.

**200.** Извѣстно, что степени происходятъ отъ помноженія количества самаго на себя, и различаются по числу равныхъ множителей, изъ которыхъ они составляются чрезъ это умноженіе.

Одно количество $a$ представляетъ первую его степень; произведеніе двухъ такихъ количествъ $a\times a=a^2$ составляетъ вторую степень или квадратъ отъ $a$; произведеніе трехъ множителей $a\times a\times a=a^3$ составляетъ третью степень отъ $a$, и такъ далѣе; наконецъ, произведеніе, составленное изъ $n$ такихъ множителей, то есть, $aaaa....=a^n$, называется $n$-ю степенью отъ $a$.

Количество, возвышаемое въ степень, называется *корнемъ* этой степени. Оно можетъ быть цѣлое или дробь, положительное или отрицательное, и вообще какое угодно. Показатели степеней также бываютъ положительные или отрицательные, цѣлые или дробные, и даже во всякихъ возможныхъ видахъ.

### Степени одночленныхъ количествъ съ показателями цѣлыми.

**201.** Наблюдая правила знаковъ, предстоящихъ и показателей буквъ, извѣстныя намъ изъ умноженія, и примѣняя ихъ къ возвышенію одночленовъ въ различныя степени, само собою открывается слѣдующее правило:

*Для возвышенія одночленнаго количества въ степень, надобно: 1) возвысить въ эту степень коефиціентъ его; 2) умножить показатель каждой его буквы на показатель степени; 3) поставить предъ выводомъ знакъ* $+$, *если показатель степени чётный; если же онъ нечётный, то поставить тотъ знакъ, какой былъ предъ количествомъ, возвышаемымъ въ степень.*

Положимъ, что надобно возвысить количества $2abc$, $a^3$, $a^m$, первое въ третью степень, второе въ четвертую, а третье въ $n$–ю.

Сіи степени будутъ:

$$(2abc)^3=2abc\times 2abc\times 2abc=2^3a^3b^3c^3;$$
$$(a^3)^4=a^3\times a^3\times a^3\times a^3=a^{12}=a^{3.4};$$
$$(a^m)^n=a^m.\,a^m.\,a^m.....=a^{mn}.$$

Примѣры:

| Степени четныя. | Степени нечетныя. |
|---|---|
| $(3ab^2c^3)^2=9a^2b^4c^6,$ | $(3ab^2c^3)^3=27a^3b^6c^9,$ |
| $(2ab^3)^4=16a^4b^{12},$ | $(2ab^3)^5=32a^5b^{15},$ |
| $(-4a^2b^3)^2=16a^4b^6,$ | $(-4a^2b)^3=-64a^6b^3,$ |
| $(-5a^2b^3)^{-2}=\frac{1}{25a^4b^6}$ | $(-4a^2b)^{-3}=\frac{1}{(-4a^2b)^3}$ |
| $=5^{-2}.a^{-4}.b^{-6}.$ | $=\frac{1}{-64a^6b^3}.$ |

И вообще, пусть $n$ означаетъ всякое цѣлое число, то $2n$ будетъ изображать всякое число четное, а $2n+1$ всякое число нечетное; по этоту условію,

$$(\pm a)^{2n}=a^{2n}, \qquad (\pm a)^{2n+1}=\pm a^{2n+1},$$

$$(\pm a)^{-2n}=\frac{1}{a^{2n}}. \qquad (\pm a)^{-(n+1)}=\frac{1}{\pm a^{2n+1}}.$$

Къ этому присовокупимъ еще:

$$(a^m)^{-n}=\frac{1}{(a^m)^n}=a^{-mn};$$

$$(a^{-m})^n=\frac{1}{(a^m)^n}=a^{-mn};$$

$$(a^{-m})^{-n}=\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{-mn}}=a^{mn}.$$

**202.** *Дробь возвысится въ данную степень, если возвысимъ ея числитель и знаменатель въ эту степень*, наблюдая тоже правило относительно знаковъ.

*Примѣры:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}\ldots\ldots=\frac{a^m}{b^m};$$

$$\left(\frac{2a^2b}{3cd^3}\right)^2=\frac{2a^2b}{3cd^3}\times\frac{2a^2b}{3cd^3}=\frac{4a^4b^2}{9c^2d^6};$$

$$\left(\frac{2a^2b}{3cd^3}\right)^3=\frac{8a^6b^3}{27c^3d^9}; \qquad \left(-\frac{3h^2k}{4gf^3}\right)^3=-\frac{27h^6k^3}{64g^3f^9};$$

$$\left(\frac{-5p^2q^3}{rs^2}\right)^4=\frac{625.\,p^8q^{12}}{r^4s^8}; \qquad \left(\frac{3b^2c^3}{5d^3f}\right)^{-2}=\frac{25d^6f^2}{9b^4c^6}.$$

## ПЕРЕХОДЪ ОТЪ СТЕПЕНЕЙ ОДНОЧЛЕННЫХЪ КОЛИЧЕСТВЪ КЪ ИХЪ КОРНЯМЪ.

**203.** Обратный переходъ отъ степени къ ея корню называется *извлеченіемъ корня*. Это дѣйствіе изображается *коренным знакомъ* $\sqrt{\ }$, который ставятъ съ лѣвой стороны количества, изъ коего желаютъ извлечь корень. А какъ степени бываютъ различны, то и корни, извлекаемые изъ нихъ, также бываютъ различны. Для этого различія ставится надъ корнемъ *показатель*, то есть, число, показывающее какой степени нужно получить корень. Наприм. $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$; это выговаривается: корень третьей степени, корень пятой степени. Только не ставится показатель надъ корнемъ второй степени; но его всегда надобно подразумѣвать, наприм. $\sqrt{a}=\sqrt[2]{a}$.

**204.** Вообще, *извлечь корень $n$-ой степени* изъ даннаго количества значитъ найти тотъ его производитель, который, будучи возвышенъ въ $n$-ю степень, превратился бы въ это количество. Такимъ образомъ находимъ, что

$$\sqrt{4}=2,\ \sqrt{9a^2}=3a,\ \sqrt[3]{37}=3,\ \sqrt[3]{125a^3b^6}=5ab^2.$$

здѣсь $2$, $3a$, $3$, $5ab^2$ суть искомые корни, потому что $2^2=4$, $(3a)^2=9a^2$, $3^3=27$, $(5ab^2)^3=125a^3b^6$.

**205.** Количество, стоящее подъ знакомъ корня, называется *подкореннымъ*. Оно можетъ быть цѣлое или дробь, положительное или отрицательное. *Показатель корня* можетъ быть чётный или нечётный, и также положительный, либо отрицательный. *Коефиціентъ* и буквенные множители подкореннаго количества могутъ быть полными степенями искомаго корня, или неполными.

### А. КОРНИ ИЗЪ ПОЛНЫХЪ СТЕПЕНЕЙ, ПОКАЗАТЕЛИ ЦѢЛЫЕ; КОРНИ РАЦІОНАЛЬНЫЕ И МНИМЫЕ.

**206.** Поелику извлеченіе корня составляетъ переходъ отъ степени къ ея корню, то оно и производится дѣйствіемъ совершенно обратнымъ возвышенію количества въ степень, а именно:

*Чтобъ извлечь корень изъ одночленнаго количества положительнаго,* 1) *надобно извлечь этотъ корень изъ численнаго коефиціента;* 2) *раздѣлить показатель каждой буквы на показатель корня;* 3) *поставить предъ выводомъ два знака* $\pm$, *если показатель корня чётный; если же онъ нечётный, то поставить знакъ* $+$.

Это правило очевидно: ибо извѣстно, что для возвышенія количества въ степень, надобно возвысить въ эту степень коефиціентъ его, и помножить показатели буквъ на показатель степени; то, обратно, при извлеченіи корня, должно найти корень изъ коефиціента, и раздѣлить показатели каждой буквы на показатель корня. Наприм.

$$\sqrt[3]{27a^3b^6}=3ab^2.$$

Предъ корнемъ нечётной степени ставится знакъ $+$; потому что положительное количество, возвышаемое въ нечётную степень, даетъ количество также положительное. Но предъ корнемъ чётной степени надобно поставить $\pm$, наприм.

$$\sqrt{4}=\pm 2;$$

потому что $(+2)^2=4$, и $(-2)^2=4$, то есть, оба числа $+2$, $-2$, даютъ ту же степень $4$, и оба должны быть считаемы корнями второй степени изъ $4$.

Точно также извлекаются *нечётные корни изъ количествъ отрицательныхъ;* но тогда и предъ выводомъ ставится знакъ $-$, потому что отрицательный корень, въ какую бы нечётную степень возвышенъ ни былъ, даетъ степень отрицательную.

*Примѣры:*

$$\sqrt{9a^2b^4c^6}=\pm 3ab^2c^3;\quad \sqrt[3]{27a^3b^6c^9}=+3ab^2c^3.$$

$$\sqrt[4]{81a^4b^8c^{12}}=\pm 3ab^2c^3;\quad \sqrt[3]{-27a^3b^6c^9}=-3ab^2c^3.$$

$$\sqrt[-2]{4b^2c^6}=\pm\frac{1}{2bc^3}.$$

**207.** Но, *изъ отрицательнаго количества нельзя извлечь ни одного корня съ чётнымъ показателемъ;* потому что нѣтъ такого числа, положительнаго или отрицательнаго, котораго бы чётная степень была отрицательною. Такіе корни называются *невозможными, мнимыми*. Наприм. для $\sqrt{-9}$ нельзя взять ни $+3$, ни $-3$; потому что $3^2=9$, $(-3)^2=+9$. Стало-быть, $\sqrt{-9}$ невозможенъ, и представляетъ выраженіе мнимое.

**208.** *Для извлеченія корня изъ дроби, надобно извлечь этотъ корень изъ числителя и знаменателя;* потому что всякая дробь возвышается въ степень чрезъ возвышеніе въ степень ея числителя и знаменителя.

*Примѣры:*

$$\sqrt[3]{\frac{8a^3b^6}{27c^6h^9}}=\frac{\sqrt[3]{8a^3b^6}}{\sqrt[3]{27c^6h^9}}=\frac{2ab^2}{3c^2h^3}.$$

$$\sqrt[4]{\frac{16a^4}{81b^4c^8}}=\pm\frac{2a}{3bc^2};\quad \sqrt[5]{\frac{-a^5b^{10}}{32p^{10}q^{20}}}=-\frac{ab^2}{2p^2q^4}.$$

### в. КОРНИ ИЗЪ НЕПОЛНЫХЪ СТЕПЕНЕЙ, ПОКАЗАТЕЛИ ДРОБНЫЕ, ЧИСЛА И КОЛИЧЕСТВА НЕИЗВЛЕКОМЫЯ.

**209.** Корень называется *неизвлекомымъ*, если все подкоренное количество не будетъ степенью кратною радикальнаго показателя. Такихъ корней находится безчисленное множество; ихъ называютъ также *ирраціональными, несоизмѣримыми съ единицею*, потому что ихъ величины не могутъ быть выражены *точнымъ образомъ* ни цѣлыми числами, ни дробями. — Это было доказано (**174**) относительно корней квадратныхъ и кубичныхъ; но точно также доказывается и относительно всякихъ неизвлекомыхъ корней.

Корень изъ буквеннаго количества также называется *неизвлекомымъ*, если показатели его буквъ не дѣлятся точнымъ образомъ на показатель извлекаемаго корня. — Тогда это дѣленіе только обозначается: пишутъ подкоренное количество безъ радикала, *съ дробнымъ показателемъ, какой получится отъ раздѣленія показателя подкореннаго количества на показатель корня.* Наприм.:

$$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}},\quad \sqrt[4]{-a}=(-a)^{\frac{1}{4}},\quad \sqrt[5]{-ba^2b^3}=-b^{\frac{1}{5}}a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{5}}.$$

**210.** Докажемъ, что, вообще, $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

Положимъ, что $\sqrt[n]{a^m}=a_x$, гдѣ $x$ есть неизвѣстный показатель, который надобно найти. Возвысимъ это равенство въ $n$-ю степень; получится:

$$a^m=(a^x)^n=a^{nx}.$$

Для этого равенства необходимо нужно

$$nx=m;\text{ откуда}$$

$$x=\frac{m}{n}.$$

Слѣдовательно, $\sqrt[n]{a^m}=a^x=a^{\frac{m}{n}}$.

Если $n$ показатель отрицательный, то

$$\sqrt[-n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{-m}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=a^{\frac{-m}{n}}.$$

И, вообще, для *чётныхъ корней*

$$\sqrt[2n]{a^m}=\pm a^{\frac{m}{2n}};$$

для *нечётныхъ корней*

$$\sqrt[2n+1]{a^m}=+a^{\frac{m}{2n+1}}.\ \sqrt[2n+1]{-a^m}=-a^{\frac{m}{2n+1}}.$$

Изъ этого видно, что знаменатель всякаго дробнаго показателя замѣняетъ коренной знакъ, у котораго показателемъ этотъ самый знаменатель, и что оба эти знакоположенія служатъ къ выраженію несоизмѣримыхъ, ирраціональныхъ количествъ.

**211.** Докажемъ еще, что *корень изъ произведенія равенъ произведенію корней изъ всѣхъ его множителей:*

$$\sqrt[n]{a^m b^r}=n^{\frac{r}{n}}.b^{\frac{r}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.\ \sqrt[n]{b^r}.$$

Для сего положимъ, что

$$\sqrt[n]{a^m b^r}=s;\text{ возвысимъ въ степень } n,$$

$$a^m b^r=s^n;\text{ раздѣлимъ на } b^r,$$

$$a^m=\frac{s^n}{b^r};\text{ извлечемъ } \sqrt[n]{\ },$$

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{\frac{s^n}{b^r}}=\frac{\sqrt[n]{s^n}}{\sqrt[n]{b^r}}=\frac{s}{\sqrt[n]{b^r}}.$$

Отсюда: $s=\sqrt[n]{a^m}.\sqrt[n]{b^r}=a^{\frac{m}{n}}.\ b^{\frac{r}{n}}=\sqrt[n]{a^m b^r}.$

*Слѣдствіе.* Если $m=n$, то

$$\sqrt[n]{a^n b^r}=\sqrt[n]{a^n}.\sqrt[n]{b^r}=a\sqrt[n]{b^r}=ab^{\frac{r}{n}}.$$

Это показываетъ, что, *если подкоренное количество можно разложить на двѣ группы множителей, изъ коихъ одни — полныя степени, и дру-*

*гіе неполныя; то изъ первыхъ можно извлечь корень особо, и, что получится, вынесть за радикалъ въ видѣ множителя*, а послѣдніе оставить подъ радикаломъ, либо дать имъ дробныхъ показателей безъ радикала.

*Примѣры:*

$$1)\quad \sqrt[3]{24a^4b^5c^3}.$$

Здѣсь я замѣчаю, что $24 = 2^3.3$, $a^4 = a^3.a$, $b^5 = b^3.b^2$; посему:

$$\sqrt[3]{24a^4b^5c^3} = \sqrt[3]{2^3.3 \times a^3.a \times b^3.b^2 \times c^3} = \sqrt[3]{2^3a^3b^3 \times 3ab^2 \times c^3}$$
$$= 2abc\sqrt[3]{3ab^2}.$$

$$2)\quad \sqrt{\frac{8ab^5}{9c^3d^7}} = \sqrt{\frac{2^2.2a\ b^4\ b}{3^2.c^2.cd^6d}} = \pm\frac{2b^2}{3cd^3}\sqrt{\frac{2ab}{cd}}.$$

$$3)\quad \sqrt[4]{-a^5} = \sqrt[4]{a^4(-a)} = \pm\ a\sqrt[4]{-a}.$$

**212.** При извлеченіи корня изъ дроби неполной степени, *можно всегда дѣлать, чтобы коренной знакъ оставался только въ числителѣ, или въ одномъ знаменателѣ;* потому что подкоренная дробь не перемѣнитъ величины своей, если оба члена ея помножить на знаменатель, либо на числитель, столько разъ, сколько нужно, чтобы тотъ либо другой сдѣлался полною степенью.

*Примѣры:*

$$1)\quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{1}{b}\sqrt[3]{ab^2};\ \text{или}\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{a^2b}} = \frac{a}{\sqrt[3]{a^2b}}.$$

$$2)\quad \frac{2b}{3cd}\sqrt{\frac{5a}{2bd}} = \frac{2b}{3cd}\sqrt{\frac{5a.2bd}{4b^2d^2}} = \frac{\sqrt{10abd}}{3cd^2}.$$

$$3)\quad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}\sqrt[n]{b}} = \frac{\mathrm{A}\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\mathrm{B}\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{\mathrm{A}\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\mathrm{B}b}.$$

**213.** *Подведеніе подъ коренной знакъ.* — Мы уже знаемъ, что $\sqrt[n]{a^n} = a$, $\sqrt[n]{p^m} = p^{\frac{m}{n}}$, и обратно, $a = \sqrt[n]{a^n}$, $p^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{p^m}$; изъ этого заключаемъ, что всякое количество можно внести подъ коренной знакъ: для этого надобно только возвысить оное въ такую степень, каковъ показатель надъ коренным знакомъ, и написать подъ этимъ радикаломъ. Это дѣйствіе часто нужно бываетъ дѣлать съ числами и буквенными множителями, помножающими корни. Такъ, наприм.

$$2\sqrt{a} = \sqrt{4a},\ 3ab^2\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{27a^3b^6c}.$$

Если показатель корня *нечётный*, то знакъ —, буде онъ есть, можно вносить подъ корень или оставлять за корнемъ. Наприм.

$$-2a^2\sqrt[3]{b^2} = -\sqrt[3]{8a^6b^2} = \sqrt[4]{-8a^6b^2}.$$

Но, при *чётномъ* показателѣ корня, знакъ —, если онъ есть, надобно всегда оставлять за радикаломъ; иначе этотъ знакъ можетъ исчезнуть, и выводъ потеряетъ настоящій смыслъ.

**214.** Коренное количество не перемѣнитъ величины своей, если помножить (или раздѣлить) на одно и то же число показатель корня и показатели всѣхъ множителей, составляющихъ все подкоренное количество. Наприм.

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$, потому что $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mk}{nk}}$; а это все тоже, что

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}.$$

Также и обратно: $\sqrt[n^2]{a^{mn}}=\sqrt[n]{a^m}$; потому что

$$\sqrt[n^2]{a^{mn}}=a^{\frac{mn}{nn}}=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

*Примѣръ.* $\sqrt[4]{a^2b^4c^6}=\sqrt[2]{ab^2c^3}=bc\sqrt{ac}.$

Отсюда видно, что *коренныя количества, у которыхъ коренные знаки съ разными показателями, могутъ быть приводимы къ одному общему коренному показателю,* подобно тому, какъ приводятся дроби къ общему знаменателю. Для этого надобно помножить показатель каждаго отдѣльнаго корня и показатели подкоренныхъ его множителей на произведеніе показателей прочихъ корней; отъ этого, какъ знаемъ, не перемѣнится величина кореннаго количества.

*Примѣръ.* Привесть $\sqrt[3]{a^5}$ и $\sqrt[4]{b^7}$ къ одному коренному показателю. Для этого помножимъ оба показателя перваго количества на 4, а оба показателя втораго на 3, и получится:

$$\sqrt[3]{a^5}=\sqrt[12]{a^{20}},\ \sqrt[4]{b^7}=\sqrt[12]{b^{21}}.$$

Это приведеніе часто бываетъ нужно въ Алгебрѣ.

### Счисленіе коренныхъ количествъ.

**215**. Оно показываетъ способы дѣлать сложеніе, вычитаніе, умноженіе дѣленіе, возвышеніе въ степени, и проч., надъ коренными количествами какъ несоизмѣримыми, такъ и мнимыми.

**216**. *Сложеніе и вычитаніе.* — Количества, состоящія изъ коренныхъ членовъ, слагаются и вычитаются по тѣмъ же правиламъ, какія показаны для сложеніе и вычитанія одночленовъ и многочленовъ, неимѣющихъ корней. Напр., чтобы сложить $\sqrt{a}$ съ $\sqrt[3]{b}-\sqrt[5]{c}$, надобно только написать $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[5]{c}$; а если бы требовалось вычесть послѣднее изъ перваго, то надлежало бы перемѣнить знаки предъ его членами, и написать:

$$\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}+\sqrt[5]{c}.$$

Если встрѣтятся *подобные* коренные члены, то надобно ихъ *сокращать*, чрезъ сложеніе или вычитаніе ихъ коефиціентовъ, стоящихъ предъ радикалами. Здѣсь *подобными членами* называются тѣ, у которыхъ корни съ равными показателями, и подкоренныя количества, состоящія только изъ множителей неизвлекомыхъ, также равныя. Таковы, наприм.

$$2a\sqrt{b} \text{ и } 3b^2\sqrt{b}, \text{ или } \frac{3}{4}p\sqrt[3]{5q^2} \text{ и } 2cd^2\sqrt[3]{5q^2}.$$

Слагая два первыя, найдемъ сумму:

$$2a\sqrt{b}+3b^2\sqrt{b}=(2a+3b^2)\sqrt{b}:$$

а сдѣлавъ вычитаніе между двумя послѣдними, получимъ:

$$\tfrac{3}{4}p\sqrt[3]{5q^2}-2cd^2\sqrt[3]{5q^2}=(\tfrac{3}{4}p-2cd^2)\sqrt[3]{5q^2}.$$

*Примѣръ.* $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+3\sqrt{a}-5\sqrt[3]{b}=4\sqrt{a}-4\sqrt[3]{b}=4(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}).$

*Примѣръ.* $\sqrt[3]{ab^2}-p\sqrt[3]{ab^2}+q\sqrt[3]{ab^2}=(1-p+q)\sqrt[3]{ab^2}.$

**217.** Подобные коренные члены не всегда бываютъ очевидны; а потому, для открытія ихъ, надобно всякой разъ приводить всѣ коренные члены, слагаемые или вычитаемые, къ простѣйшему виду, вынося за радикалы все, изъ чего можно извлечь соотвѣтствующій корень: тогда подобные члены, если они есть, сами собою обнаружатся.

*Примѣры:*

1) $\sqrt{75}-2\sqrt{3}=\sqrt{3.25}-2\sqrt{3}=3\sqrt{3}.$

2) $2b\sqrt{ab^2}+3\sqrt{a^3}=(2b^2+3a)\sqrt{a}.$

3) $6\sqrt[3]{a^3b^5}-ab\sqrt[3]{27b^2}=6ab\sqrt[3]{b^2}-3ab\sqrt[3]{b^2}=2ab\sqrt{b^2}.$

4) $a\sqrt[n]{\frac{p}{b^nq}}+\frac{1}{d}\sqrt[n]{\frac{c^np}{q}}=\frac{ad+bc}{bd}.\sqrt[n]{\frac{p}{q}}.$

**218.** *Умноженіе* и *дѣленіе.* — При умноженіи, а также и при дѣленіи одночленныхъ коренныхъ количествъ, надобно смотрѣть, имѣютъ ли коренные знаки ихъ равныхъ показателей, или нѣтъ; сверхъ того, эти корни дѣйствительные или мнимые. Разсмотримъ сперва корни *дѣйствительные:*

Извѣстно, 1) что корень изъ произведенія равенъ произведенію корней изъ всѣхъ его множителей $(\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b})$; 2) что корень изъ дроби получается, извлекая его отдѣльно изъ числителя и знаменателя $\left(\sqrt[n]{\frac{p}{q}}=\frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}\right)$: отсюда заключаемъ обратно, что

$$\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}, \text{ и } \frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}=\sqrt[n]{\frac{p}{q}}.$$

Изъ этого видно, что, *для умноженія и раздѣленія коренныхъ количествъ съ равными коренными показателями, надобно помножить или раздѣлить однѣ ихъ подкоренныя количества; предъ произведеніемъ, или частнымъ числомъ, поставить общій радикалъ съ тѣмъ же показателемъ, и потомъ сократить, если можно. Предстоящія предъ коренными знаками перемножаются, или дѣлятся, только между собою, и, что получится, ставится за радикаломъ въ видѣ множителя.*

*Примѣры:*

1) $\sqrt{6}\times\sqrt{10}=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$.

2) $3a\sqrt[3]{2a^2b}\times 4b\sqrt[3]{4ab^2}=12ab\sqrt[3]{8a^3b^3}=24a^2b^2$.

3) $\dfrac{\sqrt{12}}{3\sqrt{24}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{12}{24}}=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

4) $15b^3c\sqrt[3]{a^2} : 3b^2\sqrt[3]{a}=5bc\sqrt[3]{a}$.

5) $p^r\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} : p^s\sqrt[n]{\dfrac{c}{d}}=p^{r-s}\sqrt[n]{\dfrac{ad}{bc}}$.

**219.** Для перемноженія или раздѣленія коренныхъ количествъ *съ разными показателями*, надобно сперва привесть ихъ *къ общему коренному показателю* (**214**), и потомъ дѣлать умноженіе или дѣленіе по сказанному правилу (**218**).

*Примѣры:*

1) $\sqrt[m]{p}\times\sqrt[n]{q}=\sqrt[mn]{p^n}.\sqrt[mn]{q^m}=\sqrt[mn]{p^nq^m}$.

2) $\sqrt{2ab^2}.\sqrt[3]{12a^2b^3}=\sqrt[6]{8a^3b^6}.\sqrt[6]{144a^4b^6}$
$=\sqrt[6]{2^3.2^4.9a^7b^{12}}=2ab^2\sqrt[6]{18a}$.

3) $\sqrt[m]{p}:\sqrt[n]{q}=\sqrt[mn]{p^n}:\sqrt[mn]{q^m}=\sqrt[mn]{\dfrac{p^n}{q^m}}$.

4) $\sqrt[3]{a^2b^3}:\sqrt[5]{ab^2}=\sqrt[15]{\dfrac{a^{10}b^{15}}{a^3b^6}}=\sqrt[15]{a^7b^9}$.

5) $\dfrac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{b}.\sqrt[5]{a^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^3b^2}}{\sqrt[10]{a^6b^5}}=\sqrt[30]{\dfrac{a^{30}b^{20}}{a^{18}b^{15}}}=\sqrt[30]{a^{12}b^5}$.

**220.** *Возвышеніе въ степени.* — Для возвышенія одночленнаго кореннаго количества въ степень, надобно возвысить въ эту степень его предстоящее и подкоренную величину, оставить эту послѣднюю подъ тѣмъ же радикаломъ, и потомъ сократить, буде можно. Напримѣръ:

$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$; потому что

$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a}....$, $n$ разъ,

$= \sqrt[m]{a.a.a....} = \sqrt[m]{a^n}$.

*Примѣры:*

1) $(3a\sqrt[3]{2b^2})^2 = 9a^2\sqrt[3]{4b^4} = 9a^2b\sqrt[3]{4b}$.

2) $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^m = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}}$.

**221.** *Извлеченіе корней.*—Для извлеченія корня изъ кореннаго количества, надобно написать подкоренное количество подъ однимъ радикало~~д~~мъ, только радикальный показатель умножить на показатель новаго извлекаемаго корня. Наприм.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[mn]{p}.$$

Для доказательства, положимъ, что

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{p}} = r;$$

возвысимъ это равенство въ степень $m$, найдется

$$\sqrt[n]{p} = r^{m};$$

а это возвысимъ въ степень $n$, и будетъ

$$p = r^{mn}.$$

Изъ послѣдняго равенства извлечемъ корень степени $mn$, получится

$$r = \sqrt[mn]{p} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{p}};$$

чѣмъ и доказано правило извлеченія.

*Примѣры:*

1) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2a^3}} = \sqrt[15]{2a^3}$;

2) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^2b^6}}} = \sqrt[30]{a^2b^6} = \sqrt[15]{ab^3}$.

3) $\sqrt[4]{25} = \sqrt{\sqrt{25}} = \sqrt{5} = 2,236....$

4) $\sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[3]{2} = 1,259....$

5) $\sqrt[12]{27} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{27}}} = \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt{1,732...}$

Поелику $\sqrt[m]{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[mn]{p}$, и $\sqrt[n]{\sqrt[m]{p}} = \sqrt[nm]{p}$, то

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{p}}.$$

Отсюда заключаемъ, что, все равно, извлечь ли изъ даннаго количества сначала корень $n$-ой степени и потомъ корень $m$-ой степени, или на оборотъ, выводъ получится одинъ и тотъ же.

*Примѣръ:*

$$\sqrt[3]{\sqrt{a^6}} = \sqrt[3]{a^3} = a, \text{ и}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt{a^2} = a.$$

**222.** При умноженіи, дѣленіи, возвышеніи въ степени, и проч. радикальныхъ количествъ, мы вездѣ употребляли коренные знаки вмѣсто дробныхъ показателей. Но, если бы мы хотѣли употребить дробные показатели вмѣсто радикаловъ, то съ ними надлежало бы поступить точно также, какъ и съ цѣлыми показателями, то есть: при умноженіи равныхъ буквъ, надобно слагать ихъ дробные показатели; при дѣленіи равныхъ буквъ надобно вычитать показатель дѣлителя изъ показателя дѣлимаго, и проч. Все это легко доказать слѣдующимъ образомъ:

a) мы знаемъ, что $a^{\frac{1}{m}} . a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[m]{a} . \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^n} . \sqrt[mn]{a^m} =$

$$= \sqrt[mn]{a^{m+n}} = a^{\frac{m+n}{mn}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}.$$

b) Извѣстно также, что $a^{\frac{1}{m}} : a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[mn]{a^n} : \sqrt[mn]{a^m} =$

$$= \sqrt[mn]{a^{n-m}} = a^{\frac{n-m}{mn}} = a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}.$$

c) Что $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$, это ясно изъ того, что

$$\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = a^{\frac{1}{m}} . a^{\frac{1}{m}} . a^{\frac{1}{m}} \ldots\ldots, \; n \text{ разъ},$$

$$= a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\ldots\ldots} = a^{\frac{n}{m}}.$$

d) Для доказательства же того, что $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$, положимъ, что $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^x$, и это возвысимъ въ степень $n$; найдется:

$$a^{\frac{1}{m}} = (a^x)^n = a^{nx}.$$

Но это равенство возможно только тогда, когда

$$nx = \frac{1}{m}; \text{ откуда}$$

$$x = \frac{1}{mn}.$$

Таковъ искомый показатель.

*Примѣры:*

1) $a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{5}{4}} = a^{1+\frac{1}{4}} = a . a^{\frac{1}{4}} = a\sqrt[4]{a}.$

2) $a^{\frac{2}{3}} . a^{-\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}} = a^{\frac{7}{15}} = a\sqrt[15]{a^7}.$

3) $a^{\frac{4}{5}} : a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{15}} = a\sqrt[15]{a^2}.$

4) $a^{\frac{5}{6}}.b^{-\frac{1}{2}} : a^{\frac{3}{4}}.b^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{3}{4}} : b^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{12}} : b^{-\frac{5}{8}} = \sqrt[24]{\frac{a^2}{b^{15}}}$.

5) $(3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}})^3 = 27ab^{\frac{3}{2}} = 27ab\,.\,b^{\frac{1}{2}} = 27ab\sqrt{b}$.

6) $(16a^2b^3c^6)^{\frac{1}{3}} = (2^3.2a^2b^3c^6)^{\frac{1}{3}} = 2bc^2(2a^2)^{\frac{1}{3}} = 2bc^2\sqrt[3]{2a^2}$.

**223.** *Примѣчаніе.* Относительно возвышенія въ степени и извлеченія корней сдѣлаемъ еще нѣкоторыя замѣчанія.

1) Отъ постепеннаго возвышенія цѣлаго числа $a$ въ цѣлыя степени, оно безпрестанно увеличивается, и когда показатель $n = \infty$, то и $a^n = \infty$.

2) Отъ постепеннаго возвышенія правильной дроби $\frac{1}{a}$ въ цѣлыя степени $n$, получаются числа, безпрерывно уменьшающіяся, и приближающіяся къ нулю. Когда степень $n = \infty$, то $a^n = \infty$, а $(\frac{1}{a})^n = \frac{1}{a^n} = 0$.

3) Отъ послѣдовательнаго извлеченія корней *изъ цѣлаго числа* $a$, получаются корни постепенно меньшіе, которые безпрестанно приближаются къ 1-цѣ, никогда ее не достигая. Надобно извлечь корень безконечно большой степени, чтобы онъ сдѣлался равенъ *единицѣ*. Въ самомъ дѣлѣ, если въ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ положить $n = \infty$, то получится $\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$, и оттого $a^0 = 1$.

4) Отъ послѣдовательнаго извлеченія корней *изъ правильной дроби* $\frac{1}{a}$, пополучаются числа увеличивающіяся и приближающіяся къ 1-цѣ, которую и имѣютъ своимъ *предѣломъ*. Ибо, если въ $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$ положить $n = \infty$, то $\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$, $a^0 = 1$, $\frac{1}{a^0} = 1$.

Всѣ сіи замѣчанія отнесятся собственно къ корнямъ дѣйствительнымъ.

**224.** *Возвышеніе въ степени, умноженіе и дѣленіе корней мнимыхъ.*— Сложеніе и вычитаніе между корнями мнимыми дѣлается совершенно такъ же, какъ между корнями дѣйствительными. Возвышеніе въ степени, умноженіе и дѣленіе между этими корнями производится по тѣмъ же правиламъ, какія видѣли мы для корней дѣйствительныхъ: только здѣсь должно наблюдать большую осторожность относительно знаковъ (—) подъ радикаломъ, безъ которой учащіеся легко могутъ войти въ недоразумѣніе, и потерять истинную дорогу. Вотъ правила для этого:

*Возвышеніе въ чётную степень надобно сначала изобразить знакомъ, сократить показатель корня съ показателемъ степени, и послѣ того дѣйствительно возвысить уже подкоренное количество въ степень, какая останется послѣ этого сокращенія.—Но если мнимый корень возвышается въ нечётную степень* $2n+1$, *то надобно сперва возвысить* *его въ четную степень $2n$, и эту степень помножить еще на данный корень.*

*Примѣры:*

$$\sqrt{-a} = (\sqrt{-a})^1 = \sqrt{-a},$$
$$(\sqrt{-a})^2 = \sqrt{(-a)^2} = -a,$$
$$(\sqrt{-a})^3 = (\sqrt{-a})^2\sqrt{-a} = -a\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-a})^4 = (\sqrt{-a})^2(\sqrt{-a})^2 = -a \times -a = a^2,$$
$$(\sqrt{-a})^5 = (\sqrt{-a})^{4+1} = a^2\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-a})^6 = (\sqrt{-a})^{4+2} = -a^3, \text{ и проч.}$$

**225.** Чрезъ умноженіе или дѣленіе дѣйствительнаго корня на мнимый всегда получается выраженіе мнимое; но, отъ взаимнаго перемноженія или раздѣленія двухъ мнимыхъ *одночленовъ*, могутъ получиться количества какъ дѣйствительныя, такъ и мнимыя.

*Примѣры для умноженія:*

1) $\sqrt{-a}.\sqrt{b} = \sqrt{-ab}$.

2) $\sqrt{-a}.\sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} \times \sqrt{b}.\sqrt{-1} = \sqrt{ab}.(\sqrt{-1})^2 = -\sqrt{ab}$.

3) $\sqrt{-a}.\sqrt[3]{-b^2} = -\sqrt[3]{b^2}.\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt[6]{a^3b^4}.\sqrt{-1}$.

4) $\sqrt{-a}.\sqrt[4]{-a} = \sqrt[4]{-a^3}$.

5) $\sqrt{-a}.\sqrt[4]{b} = \sqrt{a}.\sqrt[4]{b}.\sqrt{-1} = \sqrt[4]{a^2b}.\sqrt{-1}$.

6) $\sqrt{-a}.\sqrt[6]{-b} = \sqrt[6]{-a^3}.\sqrt[6]{-b} = \sqrt[6]{a^3b}(\sqrt[6]{-1})^2 = -\sqrt[6]{a^3b}$.

7) $\sqrt[6]{-a}.\sqrt[10]{-b} = \sqrt[30]{-a^5}.\sqrt[30]{-b^3} = \sqrt[30]{a^5b^3}.\sqrt[30]{(-1)^2} = -\sqrt[30]{a^5b^3}$.

*Примѣры для дѣленія:*

1) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}} = \sqrt{-1}$; 2) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

3) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt[3]{-b}} = \dfrac{\sqrt{a}.\sqrt{-1}}{-\sqrt[3]{b}.} = -\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{b^2}}.\sqrt{-1}$;

4) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt[4]{b}} = \dfrac{\sqrt{a}.\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{\dfrac{a^2}{b}}.\sqrt{-1}$;

5) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt[4]{-b}} = \sqrt[4]{\dfrac{-a^2}{b}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt[6]{-b}} = \sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b}}$.

**226.** *Дѣйствія надъ мнимыми выраженіями, вида* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

Отъ сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія таковыхъ количествъ между собою, получаются результаты того же самаго вида:

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})+(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=(\alpha+\alpha')+(\beta+\beta')\sqrt{-1};$$

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})-(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta')\sqrt{-1};$$

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta\sqrt{-1})\times(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})&=\alpha\alpha'+\beta\alpha'\sqrt{-1}+\alpha\beta'\sqrt{-1}-\beta\beta'\\&=(\alpha\alpha'-\beta\beta')+(\beta\alpha'+\alpha\beta')\sqrt{-1};\end{aligned}$$

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\alpha'+\beta'\sqrt{-1}}=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'-\beta'\sqrt{-1})}{(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})(\alpha'-\beta'\sqrt{-1})}=\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'+(\beta\alpha'-\alpha\beta')\sqrt{-1}}{\alpha'^2+\beta'^2}=$$

$$=\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'}{\alpha'^2+\beta'^2}+\frac{(\beta\alpha'-\alpha\beta')}{\alpha'^2+\beta'^2}.\sqrt{-1}.$$

Всѣ сіи выводы суть вида $a+b\sqrt{-1}$.

Очевидно также, что, и отъ возвышенія $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ въ цѣлыя степени, получатся выводы того же вида. Потому что возвысить $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ въ $n$-ю степень, надобно это количество помножить само на себя $n-1$ разъ.

Впослѣдствіи мы увидимъ, что и отъ извлеченія корней изъ $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, т. е. отъ возвышенія этого количества въ степени дробныя, получается выводъ $a+b\sqrt{-1}$ того же вида.

**227.** *Модуль выраженія* $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$. *Свойства модулей.* — При извлеченіи квадратнаго корня изъ суммы двухъ количествъ $\alpha$ и $\beta$, выводъ $+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ называется модулемъ выраженія $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Такимъ образомъ, для $3+4\sqrt{-1}$ модуль $=+\sqrt{9+16}=+5$. Онъ есть не что иное, какъ среднее пропорціональное между $3+4\sqrt{-1}$ и $3-4\sqrt{-1}$.

Два мнимыя выраженія $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, различающіяся между собою только знакомъ предъ коефиціентомъ $\beta$ мнимаго члена, называются *сопряженными;* потому что онѣ имѣютъ одинъ и тотъ же модуль.

Эти модули имѣютъ нѣкоторыя замѣчательныя свойства:

1) *Модуль произведенія двухъ мнимыхъ множителей равняется произведенію ихъ модулей.*

Въ самомъ дѣлѣ, мы уже знаемъ, что

$(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=(\alpha\alpha'-\beta\beta')+(\alpha\beta'+\beta\alpha')\sqrt{-1}$; а модуль этого произведенія равенъ

$$\begin{aligned}\sqrt{(\alpha\alpha'-\beta\beta')^2+(\alpha\beta'+\beta\alpha')^2}&=\sqrt{\alpha^2\alpha'^2+\beta^2\beta'^2+\alpha^2\beta'^2+\beta^2\alpha'^2}\\&=\sqrt{\alpha^2(\alpha'^2+\beta'^2)+\beta^2(\alpha'^2+\beta'^2)}\\&=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}.\end{aligned}$$

2) *Модуль частнаго числа двухъ мнимыхъ выраженій* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$, *равняется частному числу ихъ модулей.*

Пусть $\alpha''+\beta''\sqrt{-1}$ частное число отъ раздѣленія $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ на $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$; то будетъ

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})(\alpha''+\beta''\sqrt{-1}),$$

и, стало-быть,

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}\,.\,\sqrt{\alpha''^2+\beta''^2};\ \text{откуда}$$

$$\sqrt{\alpha''^2+\beta''^2}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}\,.$$

3) *Чтобы мнимое выраженіе* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ *было равно нулю, надобно чтобы было, въ одно время,* $\alpha=0$ *и* $\beta=0$, *или чтобы его модуль* $+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=0$.

Для доказательства, положимъ

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=0,\ \text{или}$$
$$\alpha=-\beta\sqrt{-1};\ \text{откуда}$$
$$\alpha^2+\beta^2=0;$$

Пусть также $\dfrac{\alpha}{\beta}=n$, или $\alpha=\beta n$; стало-быть,

$$\beta^2n^2+\beta^2=\beta^2(n^2+1)=0.$$

Но, $n^2+1$, какъ дѣйствительное отвлеченное число, не можетъ быть $=0$, то должно быть $\beta=0$, а слѣдовательно и $\alpha=0$, и $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=0$. И обратно, если модуль $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=0$, то очевидно, что $\alpha=0$, $\beta=0$, и $\alpha+\beta\sqrt{-1}=0$.

4) *Чтобы произведеніе мнимыхъ множителей равнялось нулю, достаточно, если одинъ изъ этихъ множителей сдѣлается нулемъ.*

Ибо, произведеніе многихъ мнимыхъ множителей имѣетъ видъ $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; а чтобъ это произведеніе уничтожилось, довольно если модуль его обратится въ нуль. Но, мы знаемъ, что этотъ модуль равняется произведенію модулей всѣхъ множителей, составляющихъ данное произведеніе; а эти модули суть количества дѣйствительныя, такъ что ихъ произведеніе не можетъ сдѣлаться нулемъ, пока одинъ изъ нихъ не обратится въ нуль; но тогда и мнимый множитель, соотвѣтственный сему множителю, будетъ равенъ нулю, и уничтожитъ все данное произведеніе.

### *О значеніи выраженій* $\frac{a^n-b^n}{a-b}$, $\frac{a^{-n}-b^{-n}}{a-b}$, $\frac{a^{-\frac{m}{n}}-b^{-\frac{m}{n}}}{a-b}$, *въ случаѣ* $a=b$.

**228.** Хотя каждая изъ этихъ дробей, для $a=b$, обращается въ $\frac{0}{0}$; однако же это не означаетъ ихъ неопредѣленности, потому что каждая дробь содержитъ множитель $a-b$ въ своемъ числителѣ и знаменателѣ. Надобно только исключить этотъ множитель, и тогда дробь, для $a=b$, получитъ настоящее свое значеніе.

*Доказательство.* — 1) Пусть показатель $n$ число цѣлое, положительное; то знаемъ (**43**, 2), что

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots\ldots+b^{n-1},$$

гдѣ число членовъ $n$. Теперь положимъ $b=a$; получится

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=na^{n-1},$$

количество опредѣленное.

2) Возмемъ теперь дробь

$$\frac{a^{-m}-b^{-m}}{a-b},$$

въ которой показатель $-m$ число цѣлое, отрицательное. Мы знаемъ, что $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, $b^{-m}=\frac{1}{b^m}$; подставимъ это, и сократимъ, найдется:

$$\frac{a^{-m}-b^{-m}}{a-b}=-\frac{1}{a^m b^m}\cdot\frac{a^m-b^m}{a-b}.$$

Теперь положимъ $b=a$, и припомнимъ изъ предыдущаго, что въ этомъ случаѣ дробь $\frac{a^m-b^m}{a-b}$ обратится въ $ma^{m-1}$; отъ этого получится

$$\frac{a^{-m}-b^{-m}}{a-b}=-\frac{1}{a^{2m}}.ma^{m-1}=-ma^{-m-1}.$$

3) Далѣе: возмемъ дробь

$$\frac{a^m-b^m}{a^n-b^n},$$

въ которой $m$, $n$, числа цѣлыя положительныя. Эту дробь написать такъ:

$$\frac{a^m-b^m}{a^n-b^n}=\frac{(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+b^{m-1})}{(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})}.$$

Исключивъ общій множитель $a-b$, положимъ $b=a$, получится:

$$\frac{a^m-b^m}{a^n-b^n}=\frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}}=\frac{m}{n}.a^{m-n}.$$

4) Наконецъ, дробь съ показателями дробными

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}-b^{\frac{m}{n}}}{a-b}=\frac{a^{\left(\frac{1}{n}\right)^m}-b^{\left(\frac{1}{n}\right)^m}}{a^{\left(\frac{1}{n}\right)^n}-b^{\left(\frac{1}{n}\right)^n}},$$

очевидно, приводится къ случаю 3); слѣдовательно она, для $b=a$, обращается въ

$$\frac{m}{n}\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m-n}=\frac{m}{n}.a^{\frac{m}{n}-1},$$

выраженіе также опредѣленное.

## II. СТЕПЕНИ КОЛИЧЕСТВЪ ДВУЧЛЕННЫХЪ И МНОГОЧЛЕННЫХЪ. НЬЮТОНОВЪ БИНОМЪ.

**229.** Двучленное количество $a+x$, будучи возвышаемо послѣдовательно въ степени цѣлыя, даетъ:

$$(a+x)^1=a+x,$$
$$(a+x)^2=a^2+2ax+x^2,$$
$$(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Это показываетъ, что степень двучлена, вообще, изображается рядомъ, расположеннымъ по степенямъ обоихъ его членовъ, а именно: по убывающимъ степенямъ перваго члена $a$, и по возрастающимъ степенямъ втораго члена $x$. Слѣдовательно, для возвышенія двучлена $a+x$ въ степень $n$, должна быть нѣкоторая общая формула, вида:

$$(a+x)^n=a^n+Aa^{n-1}x+Ba^{n-2}x^2+Ca^{n-3}x^3+\ldots+x^n,$$

гдѣ $n$ показатель степени, A,B,C,.... нѣкоторые постоянные коефиціенты, незасисимые отъ $x$ и $a$, и которые остается только опредѣлить.

Такая формула дѣйствительно есть, и притомъ она одна и таже, каковъ бы ни былъ показатель $n$, цѣлый или дробный, положительный или отрицательный. Постараемся вывесть эту формулу въ самомъ общемъ ея видѣ, т. е. *принимая $n$ какимъ угодно числомъ*. А чтобы проще и удобнѣе этого достигнуть, вынесемъ $a^n$ внѣ скобокъ:

$$(a+x)^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n=a^n\left(1+\frac{Ax}{a}+\frac{Bx^2}{a^2}+\frac{Cx^3}{a^3}+\ldots+\frac{x^n}{a^n}\right);$$

отбросимъ на время общій множитель $a^n$, и положимъ $\frac{x}{a}=y$; получится:

$$(1+y)^n=1+Ay+By^2+Cy^3+\ldots\ldots+y^n.$$

Здѣсь коефиціенты $A, B, C, \ldots$ также независимы отъ $y$, но они зависятъ отъ показателя $n$; слѣдовательно они останутся совершенно тѣ же, если $y$ перемѣнится въ $z$, а $n$ останется тотъ же:

$$(1+z)^n=1+Az+Bz^2+Cz^3+\ldots\ldots+z^n.$$

Вычтемъ этотъ рядъ изъ предыдущаго, и разность раздѣлимъ на $y-z$:

$$(1+y)^n-(1+z)^n=A(y-z)+B(y^2-z^2)+C(y^3-z^3)+\ldots+(y^n-z^n);$$

$$\frac{(1+y)^n-(1+z)^n}{y-z}=A+B(y+z)+C(y^2+yz+z^2)+\ldots\ldots$$

Теперь, для краткости, положимъ:

$$\left.\begin{array}{l}1+y=u\\ 1+z=u_1\end{array}\right\}\text{ и вычтемъ,}$$

$$y-z=u-u_1\text{ ; то будетъ}$$

$$\frac{u^n-u_1^n}{u-u_1}=A+B(y+z)+C(y^2+yz+z^2)+\ldots\ldots$$

Но, поелику $z$ взято произвольно, то и положимъ $z=y$; тогда будетъ $u_1=u$, и, каково бы ни была степень $n$, цѣлая или дробная, положительная или отрицательная, дробь $\frac{u^n-u_1^n}{u-u_1}$ обратится въ $nu^{n-1}$, какъ было доказано (**228**). Слѣдовательно, мы получимъ

$$nu^{n-1}=A+2By+3Cy^2+4Dy^3+\ldots$$

Это равенство помножимъ на $u$, и потомъ подставимъ $1+y=u$:

$$nu^n=u(A+2By+3Cy^2+4Dy^3+\ldots),$$

$$n(1+y)^n=(1+y)(A+2By+3Cy^2+4Dy^3+\ldots),\text{ или}$$

$$n(1+Ay+By^2+Cy^3+\ldots)=\begin{array}{l|l|l|l}A+2B & y+3C & y^2+4D & y^3+\ldots\ldots\\ \quad+A & +2B & +3C & +\ldots\end{array}$$

Такимъ образомъ, мы получили два равные многочлена, расположенные по степенямъ одной и той же буквы $y$. Коефиціенты ихъ вовсе независимы отъ $y$; а потому, для равенства сихъ многочленовъ, должны быть равны коефиціенты равныхъ степеней отъ $y$ (**101**), то есть:

$$\begin{aligned} &A=n, &&\text{откуда}\quad A=n\\ &2B+A=An, &&B=\frac{A(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,,\\ &3C+2B=Bn, &&C=\frac{B(n-2)}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&D=\ldots\ldots=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,,\\ & &&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Такъ опредѣляются коефиціенты A,B,C,....; законъ ихъ составленія изъ показателя $n$ столь простъ и очевиденъ, что не имѣетъ надобности въ объясненіи. Посему,

$$(1+y)^n=1+ny+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,y^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\ldots.$$

Теперь возмемъ опять $y=\frac{x}{a}$, и помножимъ обѣ части равенства на $a^n$; получится:

$$a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n=a^n\left(1+n.\frac{x}{a}+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}.\frac{x^2}{a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}.\frac{x^3}{a^3}+\ldots.\right),\ \text{или}$$

$$(A)\ldots.(a+x)^n=a^n+n.a^{n-1}x+\frac{n(n-1}{1\,.\,2}\,a^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}x^3+\ldots.$$

Такова общая формула, служащая для возвышенія всякаго двучлена въ какія угодно степени. Она извѣстна подъ именемъ *Ньютонова бинома;* потому что была открыта славнымъ англійскимъ ученымъ Ньютономъ.

**230.** Разсматривая эту формулу находимъ:

1) Показатели буквы $a$, начиная съ перваго члена $a^n$ ряда, въ каждомъ его послѣдующемъ членѣ уменьшаются единицею, а показатели буквы $x$ на столько же увеличиваются, такъ что сумма показателей остается постоянна и равна $n$,

2) Каждый послѣдующій членъ ряда составляется изъ предшествующаго

(наприм. изъ 3-го члена $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}x^2$ составленъ

4-й членъ $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}x^3$)

такимъ образомъ, что членъ предшествующій помножается на показатель его буквы $a$, и дѣлится на число членовъ, предшествующихъ искомому члену послѣдующему; степень буквы $a$ единицею уменьшается, а степень буквы $x$ единицею увеличивается.

3) Во всякомъ членѣ число вычитаемое изъ показателя буквы $a$, степень буквы $x$, и наибольшій множитель въ знаменателѣ, равны числу членовъ предшествующихъ, и потому равны между собою; а наибольшая цифра, вычитаемая изъ $n$ въ численномъ коефиціентѣ, единицею менѣе. Слѣдовательно, если взять $r$ членовъ сряду, то слѣдующій $(r+1)^й$ членъ будетъ:

$$(\alpha)\ldots.T_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\ldots r}\,a^{n-r}x^r.$$

Онъ называется *общимъ членомъ*, потому что посредствомъ его можно находить всякій членъ, занимающій какое угодно мѣсто въ ряду Ньютонова бинома. Наприм. для полученія 4–го члена, должно положить $r=3$, и найдется:

$$T_4=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}.\ a^{n-3}x^3.$$

4) *При показателѣ $n$ цѣломъ и положительномъ*, рядъ A не безконеченъ: онъ оканчивается членомъ $x^n$ и содержитъ $n+1$ членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, общій членъ $(\alpha)$ возможенъ до тѣхъ поръ, пока въ его коефиціентѣ самый меньшій множитель $n-r+1>0$, или когда $n+1>r$. Если же взять $r=n+1$, то этотъ коефиціентъ обратится въ нуль, и соотвѣтственнаго члена не будетъ, Послѣдующихъ членовъ также не будетъ, потому что всякій послѣдующій членъ составляется изъ предшествующаго. Послѣдній членъ ряда получится, взявъ $r=n$; тогда

$$T_{n+1}=\frac{n(n-1)(n-2),\ldots.2\ .\ 1}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots n-1)n}a^0x^n=x^n.$$

А какъ здѣсь $n$ показываетъ число всѣхъ членовъ предшествующихъ, то во всемъ ряду находится $n+1$ членовъ. Очевидно, что, при показателѣ $n$ чётномъ, число членовъ должно быть нечётное; а, при показателѣ нечётномъ — число членовъ чётное.

5) При показателѣ $n$ цѣломъ и положительномъ, всякіе два члена ряда (A), равно отстоящіе отъ его концовъ, имѣютъ равные коефиціенты; это видно изъ того, что $a+x=x+a$, и

$$(a+x)^n=(x+a)^n.\ \text{Но},$$

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}\ a^{n-2}x^2+\ldots.+Ra^2x^{n-2}+Sax^{n-1}+x^n,$$

$$(x+a)^n=x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}\ x^{n-1}a^2+\ldots.+Rx^2a^{n-2}+Sxa^{n-1}+a^n$$

$$=a^n+Sxa^{n-1}+Rx^2a^{n-2}+\ldots.+\frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}\ x^{n-2}a^2+nx^{n-1}a+x^n.$$

Эти многочлены расположены теперь по степенямъ буквы $x$, и должны оставаться равными для всякой величины $x$; а потому коефиціенты равныхъ степеней $x$ должны быть равны между собою. Слѣдовательно $S=n$, $R=\frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}$, и т. д., и потому

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}\ a^{n-2}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}\ a^2x^{n-2}+nax^{n-1}+x^n.$$

6) Сверхъ того, коефиціенты $1$, $n$, $\frac{n(n-1)}{1.2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$,....., слѣдуя отъ обоихъ концовъ ряда, возрастаютъ до его средины; такъ что, при показателѣ $n$ чётномъ, наибольшій коефиціентъ находится въ среднемъ членѣ, а при $n$ нечётномъ, два средніе члена имѣютъ равные наибольшіе коефиціенты. Сумма же всѣхъ коефиціентовъ равна $2^n$; она получится, взявъ $a=x=1$, отчего $(a+x)^n$ обратится въ рядъ

$$2^n=1+n+\frac{n(n-1)}{1\ .2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}+\ldots..+\frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}+n+1,$$

состоящій изъ однихъ коефиціентовъ общаго ряда. А полагая

$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ldots,$$

получатся величины коефиціентовъ каждаго члена, соотвѣтственныя степенямъ 1, 2, 3, 4,.... бинома $(a+x)^n$, которые здѣсь найдены, и расположены въ *вертикальныхъ строкахъ*:

$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ldots.$$

коефиціенты для всѣхъ членовъ:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 1, | 1, | 1, | 1, | 1, | 1, | 1, | 1, | 1, |
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10, |
| | 1, | 3, | 6, | 10, | 15, | 21, | 28, | 36, | 45, |
| | | 1, | 4, | 10, | 20, | 35, | 56, | 84, | 120, |
| | | | 1, | 5, | 15, | 35, | 70, | 126, | 210, |
| | | | | 1, | 6, | 21, | 56, | 126, | 251, |
| | | | | | 1, | 7, | 28, | 84, | 210, |
| | | | | | | 1, | 8, | 36, | 120, |

.................

**231.** И такъ, *при показателѣ n цѣломъ и положительномъ*, рядъ биноміи Ньютона будетъ:

$$A)\ldots(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}x^2+\ldots\ldots+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^2x^{n-2}+nax^{n-1}+x^n$$

$$=a^n\Big[1+n.\frac{x}{a}+\frac{n(n-1)}{1.2}\Big(\frac{x}{a}\Big)^2+\ldots+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\Big(\frac{x}{a}\Big)^{n-2}+n.\Big(\frac{x}{a}\Big)^{n-1}+\frac{x^n}{a^n}\Big].$$

Для возвышенія бинома $a+x$ *въ отрицательную степень*, надобно взять только $-n$ вмѣсто $n$, и получится:

$$B)\ldots\ldots(a+x)^{-n}=\frac{1}{a^n}\Big[1-\frac{n.x}{a}+\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\,.\,\frac{x^2}{a^2}-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{x^3}{a^3}+\ldots\Big].$$

Для возвышенія *въ дробную степень*, надобно въ рядъ A) подставить $\frac{m}{n}$ вмѣсто $n$, и будетъ:

$$C)\ldots(a+x)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\Big[1+\frac{m}{n}\,.\,\frac{x}{a}+\frac{\frac{m}{n}\big(\frac{m}{n}-1\big)}{1\,.\,2}\,.\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{\frac{m}{n}\big(\frac{m}{n}-1\big)\big(\frac{m}{n}-2\big)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{x^3}{a^3}+\ldots\Big]$$

Двѣ послѣднія формулы имѣютъ безчисленное множество членовъ: потому что въ первой ни одинъ изъ ея коефиціентовъ $n$, $\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$, $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$,.... не можетъ сдѣлаться нулемъ, сколько бы членовъ мы ни взяли; а во второй, коефиціенты составляются изъ множителей $\frac{m}{n}$, $\frac{m}{n}-1$, $\frac{m}{n}-2,\ldots$, изъ коихъ также ни одинъ не можетъ обратиться въ нуль, потому что $\frac{m}{n}<1$.

**232.** *Приложеніе Ньютонова биномическаго ряда къ возвышенію въ степени количествъ двучленныхъ, трехчленныхъ, четыречленныхъ, и, вообще, многочленныхъ.*

*Примѣръ.* Найти 3-ю и 5-ю степени двучлена $a+x$.

Беру формулу:

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}x^3 + \ldots,$$

и полагаю сперва $n=3$, а потомъ $n=5$; нахожу:

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3;$$

$$(a+x)^5 = a^5 + 5a^4x + \frac{5\,.\,4}{1\,.\,2}.\,a^3x^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}\,a^2x^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}\,ax^4 + \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}\,a^0x^5;$$

или:

$$(a+x)^5 = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x\ ^{*}).$$

*Примѣръ*. Возвысить двучленъ $(a+x)$ въ степень $\frac{2}{3}$.

Беру формулу C), и полагаю $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$.

$$(a+x)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\left[1 + \frac{2}{3}\,.\,\frac{x}{a} - \frac{1}{9}\,.\,\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{81}\,.\,\frac{x^3}{a^3} - \ldots\right].$$

*Примѣръ*. Возвысить $a-x$ въ степень $n$.

Для этого въ ряду A) надобно только взять $-x$ вмѣсто $x$, и получится

$$(a-x)^n = a^n - na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}x^3 + \ldots \pm x.$$

**233.** Положимъ теперь, что *дано трехчленное количество* $a+b+c$ *для возвышенія въ степень* $n$, то есть, требуется найти $(a+b+c)^n$.

---

[*] Сдѣлаемъ здѣсь одно полезное замѣчаніе. Въ ряду $(a+x)^5$ возмемъ какой ни есть членъ, напримѣръ,

$$\frac{5.4.3}{1.2.3}\,.\,a^2x^3,$$

внесемъ въ его числитель всѣ множители 5, 4, 3, 2, 1, и, какіе множители войдутъ лишніе, тѣ введемъ въ знаменатель, чтобы величина члена не перемѣнилась; тогда получится:

$$\frac{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,1\,.\,2}\,.\,a^2x^3.$$

Тотчасъ видно, что, въ знаменателѣ, множители 3 и 2, которыми оканчиваются двѣ группы 1.2.3, 1.2, произведеній, равны показателямъ буквъ $x$ и $a$ этого члена. Согласно съ этимъ, можно написать общій членъ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ \ldots\ldots 2.1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots r.1.2.3\ldots(n-r)}\,.\,a^{n-r}x^r.$$

Это замѣчаніе употребляется иногда для опредѣленія коефиціента, когда извѣстно только произведеніе $a^{n-r}x^r$ для члена изъ ряда биноміи Ньютона. Для этого надобно помнить, что сумма показателей $n-r+r=n$, равна степени бинома, и потомъ поставить въ числителѣ всѣ множители $n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$, а въ знаменателѣ—произведеніе изъ $n(n-1)(n-2)\ldots r$, и $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r)$, и сократить. Положимъ, наприм., что надобно найти предстоящее къ $a^3x^5$ члена, взятаго изъ биноміи Ньютона. Для этого, слагаю $3+5=8$, и получаю степень; потомъ беру

$$\frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} = 56.$$

Таковъ будетъ искомый коефиціентъ; а искомый членъ будетъ $=56a^3x^5$.

Для этого положимъ сперва $b+c=x$, получится:

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-2}x+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3.}a^{n-3}x^3+\ldots;$$

а потомъ внесемъ сюда $x=b+c$:

$$(a+b+c)^n=a^n+na^{n-1}(b+c)+\frac{n(n-1)}{2\,.\,1}a^{n-2}(b+c)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-3}(b+\overset{c}{\cancel{b}})^3+.$$

Наконецъ, составимъ степени

$$(b+c)^2=b^2+2bc+c^2,$$
$$(b+c)^3=b^3+3b^2c+3bc^2+c^3,$$

..................................

подставимъ и сократимъ, и то получится весь рядъ, выражающій $n$-ю степень трочлена $a+b+c$. А этотъ рядъ послужитъ для возвышенія въ ту же степень количества четыречленнаго $a+b+c+d$. Для этого надобно только во всемъ ряду подставить $c+d$ вмѣсто $c$, и найдется $(a+b+c+d)^n$; и такъ далѣе.

*Примѣчаніе.* — Не входя въ подробное разсмотрѣніе закона происхожденія послѣдовательныхъ членовъ ряда $(a+b+c+d+\ldots)^n$, я замѣчу только, что, по даннымъ буквеннымъ множителямъ какого ни есть члена этого ряда, численный коефиціентъ его найдется по тому же правилу, какое показано въ замѣчаніи (**232**) для членовъ биноміи Ньютона. Положимъ, что надобно найти коефиціентъ для $a^3b^2c^2$ одного изъ членовъ $(a+b+c)^7$. Составимъ четыре произведенія, соотвѣтственно числамъ 7, 3, 2, 2, а именно:

$$7.6.5.4.3.2.1,\ 3.2.1,\ 2.1,\ 2.1;$$

поставимъ первое въ числителѣ, и всѣ прочіе въ знаменателѣ, и найдется искомый коефиціентъ

$$\frac{7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1\ 2.1.2.1}=210.$$

Коефиціентъ для произведенія $a^5bc$ нашли бы

$$\frac{7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.1.1}=42;$$

коефиціентъ для $a^4bc^2$ будетъ

$$\frac{7.6.5.4.3.2\ 1}{1.2.3.4.1.1.2}=105.$$

Справедливость этого закона не трудно повѣрить, надобно только дѣйствительно возвысить $a+b+c$ въ $n$-ю степень, и сравнить члены подобные тѣмъ, какіе мы брали.

**231.** Формула $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\ldots+mx^{m-1}+x^m$, гдѣ $m$ *цѣлое число первоначальное,* приводитъ къ замѣчательному свойству чиселъ. Перенесемъ 1, $x^m$, въ первую часть равенства

$$(1+x)^m-1-x^m=mx+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}.x^2+\ldots+mx^{m-1},$$

найдется, что вторая часть дѣлится безъ остатка на $m$, а слѣдовательно $(1+x)^m-1-x^m$ также дѣлится на $m$.

Положимъ, что $1+x=A$, $x=A-1$, и подставимъ:

$$A^m-1-(A-1)^m.$$

Это выраженіе дѣлится на $m$ для всякой величины цѣлаго числа $A$; слѣдовательно для $A-1$, $A-2$, $A-3\ldots$, $A-A$. Взявъ эти числа вмѣсто $A$ въ выраженіе

$$\begin{array}{r} A^m-1-(A-1)^m, \\ (A-1)^m-1-(A-2)^m \\ (A-2)^m-1-(A-3)^m \\ (A-3)^m-1-(A-4)^m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline (A-A+1)^m-1-(A-A)^m \end{array}$$

найдется рядъ выраженій, дѣлимыхъ на $m$, которыя и сложимъ;

получится сумма $A^m-A-(A-A)^m=A^m-A$, раздѣлимая на $m$.

Итакъ, $\frac{A^m-A}{m}=\frac{A(A^{m-1}-1)}{m}=$ цѣлому числу.

Если $m$ число первоначальное, $A$ цѣлое неспособное раздѣлиться на $m$, то долженъ раздѣлиться на $m$ двучленъ $A^{m-1}-1$. При этихъ условіяхъ, $\frac{A^{m-1}-1}{m}=$ цѣлому.

*Примѣръ.* Полагая $m=3$, $A=10$, найдется $\frac{10^2-1}{3}=\frac{99}{3}=33$.

Это замѣчательное свойство дѣлимости открыто *Ферматомъ*, остроумнѣйшимъ французскимъ математикомъ 17-го вѣка. Изъ него слѣдуетъ, что поелику

$$A^{m-1}-1=(A^{\frac{m-1}{2}}+1)(A^{\frac{m-1}{2}}-1);$$

то одинъ изъ двучленныхъ множителей, на которые разлагается $A^{m-1}-1$, непремѣнно дѣлится на первое число $m$. Наприм. пусть $A=10$, $m=7$; то

$$\frac{A^{m-1}-1}{m}=\frac{10^6-1}{7}=\frac{(10^3+1)(10^3-1)}{7};$$

множитель $10^3+1=1001$ дѣлится на 7.

Если изъ $A^{m-1}-1$ вычесть выраженіе $B^{m-1}-1$, гдѣ также $A$ и $B$ не дѣлятся на $m$, то получится разность $A^{m-1}-B^{m-1}$, дѣлимая на $m$.

*Примѣръ.* Пусть $A=10$, $B=5$, $m=3$;

$$\frac{A^{m-1}-B^{m-1}}{m}=\frac{10^2-5^2}{3}=\frac{75}{3}=25.$$

Пусть $A=3$, $B=2$, $m=5$, то

$$\frac{A^{m-1}-B^{m-1}}{m}=\frac{3^4-2^4}{5}=\frac{81-16}{5}=\frac{65}{5}=13.$$

Очевидно также, что, отъ раздѣленія $A^{m-1}$ на $m$, въ остаткѣ получится $+1$; стало быть, и отъ раздѣленія $(A^{m-1})^q$ остатокъ будетъ $+1^q=1$. Если отъ раздѣленія $A^r$ на $m$, остатокъ $=R$; то и отъ раздѣленія $A^r(A^{m-1})^q$ остатокъ будетъ $R$. Если $A^r(A^{m-1})^q=A^s$, то $A^s$, раздѣленный на первое число $n$, дастъ также остатокъ $R$.

**235.** *Вычисленіе всякихъ корней изъ чиселъ посредствомъ ряда Ньютонова бинома.*

Для полученія желаемаго корня изъ даннаго числа, разлагаютъ оное на двѣ части, изъ коихъ первая, сколько возможно большая, была бы полною степенью, а другая меньшая, служащая дополненіемъ первой къ данному числу; подставимъ ихъ на мѣсто $a$ и $x$ въ формулу

$$(a+x)^n = a^n + n.a^{n-1}x + \frac{n(n-1}{1\,.\,2}a^{n-2}x^2 + \ldots$$

$$= a^n\left[1 + \frac{nx}{a} + \frac{n(1-n)}{1\,.\,2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{n(1-n)(2-n)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \ldots\right].$$

Положимъ, что $a=\alpha^r$, $x=\delta$, $n=\frac{1}{r}$, получится:

$$(\alpha^r+\delta)^{\frac{1}{r}} = \alpha\left[1 + \frac{1}{r}\,.\,\frac{\delta}{\alpha^r} - \frac{1.(r-1)}{1\,.\,2.r^2}\,.\left(\frac{\delta}{\alpha^r}\right)^2 + \frac{1.(r-1)(2r-1)}{1\,.\,2\,.\,3.r^3}\,.\left(\frac{\delta}{\alpha^r}\right)^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1.(r-1)(2r-1)(3r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4.r^4}\,.\left(\frac{\delta}{\alpha^r}\right)^4 + \ldots\right].$$

*Примѣръ.* Найти $\sqrt[3]{10}$.

Кубъ, ближайшій къ 10, есть $8=2^3$; посему можно взять $\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{8+2}=$ $=(8+2)^{\frac{1}{3}}$, и положить $\alpha^r=8$, $\delta=2$, $r=3$. Сдѣлавъ подстановленіе, получимъ.

$$(8+2)^{\frac{1}{3}} = 2\left(1 + \frac{1}{3}\,.\,\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\,.\,\frac{1}{16} + \frac{5}{81}\,.\,\frac{1}{64} - \ldots\right).$$

Четыре члена, вычисленные, даютъ корень

$$\sqrt[3]{10}=2,1547\ldots.$$

который имѣетъ всю точность только въ тысячныхъ доляхъ.

*Примѣръ.* Найти $\sqrt[5]{240}$.

равно 243-3

Здѣсь я замѣчаю, что 240 близко къ 243—3, то и беру $\sqrt[5]{240}=$ $\sqrt[5]{243-3}=(243-3)^{\frac{1}{5}}$.

Полагая $\alpha=243$, $\delta=-3$, $r=5$; нахожу:

$$(243-3)^{\frac{1}{5}} = 3\left[1 - \frac{1}{5.81} - \frac{2}{25}.\left(\frac{1}{81}\right)^2 - \frac{6}{125}\left(\frac{1}{81}\right)^3 - \ldots\right].$$

Для вычитанія, беру только три первые члена ряда, и получаю

$$\sqrt[5]{240}=2,9925515\ldots,$$

корень точный въ шести десятичныхъ.

**236.** По видимому, трудность этого способа извлеченія корней становится велика, когда коренной показатель великъ, а подкоренное число мало и разлагается на двѣ части невыгодно для вычисленія.

Положимъ, что нужно получить $\sqrt[5]{10}$. Здѣсь ближайшее разложеніе:

$$10=1^5+9, \text{ или}$$

$$10=32-22=2^5-22;$$

изъ нихъ первое совсѣмъ нельзя употребить, а второе невыгодно для вычисленія.

Въ такомъ случаѣ надобно данное число 10 обратить въ дробь, помноживъ и раздѣливъ оное на 5-ю степень другаго однозначнаго или двузначнаго числа; отчего числитель сдѣлается довольно великъ, и можетъ быть раздѣленъ на двѣ части, изъ коихъ одна, самая большая, будетъ полною пятою степенью. Такъ, если помножить 10 на $12^5=248832$ (см таблицу степеней чиселъ двузначныхъ, приложенную въ концѣ книги); то выйдетъ дробное число

$$10=\frac{2488320}{123},$$

котораго числитель $24883230=19^5+12221=2476099+12221$;

следовательно, $$\sqrt[5]{10}=\sqrt[5]{\frac{19^5+12221}{12^5}}.$$

Теперь положимъ $\alpha=19$, $\delta=12221$, $r=5$,

$$\frac{\delta}{\alpha^5}=\frac{12221}{2476099}=0,004935587\ldots.;\text{ найдется}$$

$$\sqrt[5]{10}=\frac{1}{12}\sqrt[5]{\alpha^5+\delta}=\frac{19}{12}\left[1+\frac{1}{5}\cdot\frac{\delta}{\alpha^5}-\frac{2}{25}\left(\frac{\delta}{\alpha^5}\right)^2+\frac{6}{125}\left(\frac{\delta}{\alpha^5}\right)^3-\ldots.\right].$$

Ограничившись только четырьмя членами этого ряда, получимъ:

$$\sqrt[5]{10}=1,5848931924\ldots.=10^{0,2}.$$

точный въ 10-ти десятичныхъ; а взявъ большее число членовъ нашли бы корень:

$10^{0,2}=1,58489.31924.61113.4851$, въ которомъ точны всѣ 20 цифръ.

Чтобы видѣть всю выгоду этого способа извлеченія корней, предложимъ себѣ примѣръ: найти $\sqrt[100]{10}=10^{0,01}$. Для этого возмемъ сперва

$$\sqrt{10^{0,2}}=10^{0,1}=\sqrt{1,58489.31924.61113.4851\ldots.},$$

и нашедши его точнымъ до четырехъ десятичныхъ, 1,2589, составимъ $(1,2589)^2=1,58482921$, и разложимъ подкоренное количество такъ:

$$10^{0,1}=\sqrt{(1,2589)^2+0,00006398246111134851}$$
$$=1,2589\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\alpha^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{\delta}{\alpha^2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{\delta}{\alpha^2}\right)\ldots\right],$$

где $\alpha^2=1,58482921$, $\delta=0,00006.39824.61113.4851$.

$$\frac{\delta}{\alpha^2}=0,00004.03718.33577.$$

Чрезъ вычисленіе трехъ членовъ ряда, найдется

$$10^{0,1}=1,25892.54117.94167.2104$$

корень, точный въ 13-ти десятичныхъ. Здѣсь онъ вычисленъ до 20-ти цифръ, принимая большее число членовъ ряда.

Изъ этого числа извлечемъ квадратный корень

$$\sqrt{10^{0,1}}=10^{0,05}=\sqrt{1,25892.54117.94167.2104}$$
$$=1,12201845430196 3....$$

Остается теперь найти

$$\sqrt[5]{10^{0,05}}=10^{0,01}=\sqrt[5]{1,1220184543....}$$

Здѣсь можно было-бы взять $1,122018...=1^5+0,122018...$, и вычислять искомый корень посредствомъ ряда

$$1+\frac{1}{5}.0,122018...-\frac{2}{25}(0,122018...)^2+...;$$

но приближеніе къ этому корню будетъ медленное; а потому, вычисливши только два члена этого ряда, которые даютъ 1,0244...., возмемъ отсюда 1,02, возвысимъ это въ пятую степень *):

$$(1,02)^5=1,1040808032,\text{ и составимъ}$$
$$\sqrt[5]{1,1220184543....}=\sqrt[5]{(1,02)^5+0,0179376511....}=$$
$$=1,02\left[1+0,2.\frac{\delta}{\alpha^5}-0,08.\left(\frac{\delta}{\alpha^5}\right)^2+0,048\left(\frac{\delta}{\alpha^5}\right)^3....\right],$$

где $\alpha^5=(1,02^5=1,1040808032,\ \delta=0,0179376511....$

$$\frac{\delta}{\alpha^5}=0,01624667....,\ \left(\frac{\delta}{\alpha^5}\right)^2=0,000263954....,$$
$$\left(\frac{\delta}{\alpha^5}\right)^3=0,0000042884....$$

Вычисливши четыре члена, получимъ:

$$10^{0,01}=1,0232929946....,$$

гдѣ вѣрны восемь десятичныхъ **).

Этотъ способъ надобно употреблять всякой разъ, когда требуется получить корень точный во многихъ десятичныхъ. Если же нужно имѣть корень небольше, какъ о шести цифрахъ, въ такомъ случаѣ легче и благонадежнѣе вычислять его посредствомъ логариѳмовъ, о которыхъ скоро говорить будемъ.

**237.** *Степени двучлена* $a\pm b\sqrt{-1}$. — Всякая степень двучлена $a\pm b\sqrt{-1}$ приводится къ виду $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, гдѣ $\alpha$ и $\beta$ суть величины дѣйствительныя. Ибо, если взять рядъ

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}a^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)\ (n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^{n-3}x^3+....,$$

---

*) Смотри таблицу степеней трехзначныхъ чиселъ, помѣщенную въ концѣ книги.

**) Извлекая квадратн. корень изъ $10^{0,01}$, и потомъ корень пятой степени, мы получили бы $10^{0,001}$; такимъ же способамъ нашли бы $10^{0,0001}$, $10^{0,00001}$, и т. д. Такимъ образомъ *Д. Шюрманъ* (въ Оснабрюкѣ) вычислилъ таблицу степеней числа 10 отъ $10^{0,1}$ до $10^{0,0000000001}$. См. Handbuch der allgemeinen Arithmetik von P. R. C. *Egen*. Berlin. 1846.

и, положивъ $x=b\sqrt{-1}$, слѣдовательно $x^2=-b^2$, $x^3=-b^3\sqrt{-1}$, $x^4=b^4$, $x^5=b^5\sqrt{-1}$,...., подставить, и отдѣлить члены дѣйствительные отъ мнимыхъ, то найдется:

$$(a+b\sqrt{-1})^n=a^n-\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^{n-4}b^4....$$

$$+b\,[na^{n-1}-\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-3}b^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5.}a^{n-5}b^5....]\sqrt{-1};$$

то есть, $(a+b\sqrt{-1})^n=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, означая чрезъ $\alpha$ алгебрическую сумму всѣхъ членовъ дѣйствительныхъ, и чрезъ $\beta$ сумму членовъ, помноженныхъ на $\sqrt{-1}$.

Отъ перемѣны $b$ на $-b$, ничего не перемѣнится, кромѣ знака предъ $\beta$, и слѣдовательно получится:

$$(a-b\sqrt{-1})^n=\alpha-\beta\sqrt{-1}.$$

Изъ этого заключаемъ далѣе, что сумма

$$(a+b\sqrt{-1})^n+(a-b\sqrt{-1})^n=2\alpha=$$
$$=2a^2\,[1-\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left(\frac{b}{a}\right)^4-....]$$

есть количество дѣйствительное; а разность

$(a+b\sqrt{-1})^n-(a-b\sqrt{-1})^n=2\beta\sqrt{-1}$ выраженіе мнимое.

*Примѣры*:

$(a+b\sqrt{-1})^2+(a-b\sqrt{-1})^2=2(a^2-b^2)$.

$(a+b\sqrt{-1})^2-(a-b\sqrt{-1})^2=4ab\sqrt{-1}$.

$(a+b\sqrt{-1})^3+(a-b\sqrt{-1})^3=2a(a^2-3b^2)$.

$(a+b\sqrt{-1})^3-(a-b\sqrt{-1})^3=2(3a^2b-b^3)\sqrt{-1}$.

$(a+b\sqrt{-1})^4+(a-b\sqrt{-1})^4=(a^2-b^2+2ab)(a^2-b^2-2ab)$.

$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=2a^{\frac{1}{3}}[1+\frac{1}{9}\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{10}{243}\left(\frac{b}{a}\right)^4-\frac{154}{6561}\left(\frac{b}{a}\right)^6....]$

Послѣднее выраженіе совершенно сходствуетъ съ выраженіемъ корня уравненій 3-й степени (**189**). Оно показываетъ, что этотъ корень всегда дѣйствительный, потому что не зависитъ отъ $\sqrt{-1}$.

**238.** *Приведеніе суммы* $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}\pm\sqrt{a-b\sqrt{-1}}$ *къ виду*, $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, *гдѣ* A *и* B *суть количества дѣйствительныя.*

Назовемъ эту сумму буквою $x$:

$$x=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}\pm\sqrt{a-b\sqrt{-1}},$$

и возвысимъ въ квадратъ; получится:

$$x^2=2a\pm2\sqrt{a^2+b^2},\text{ откуда}$$

$$x=\sqrt{2a\pm2\sqrt{a^2+b^2}},\text{ то есть,}$$

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}\pm\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=\sqrt{2a\pm2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Здѣсь $2\sqrt{a^2+b^2}>2a$; стало-быть, для знака +, эта сумма есть количество дѣйствительное, а для знака —, оно представляетъ выраженіе мнимое.

*Примѣры:*

$$\sqrt{3+2\sqrt{-1}}+\sqrt{3-2\sqrt{-1}}=\sqrt{6+2\sqrt{13}}.$$

$$\sqrt{3+4\sqrt{-1}}+\sqrt{3-4\sqrt{-1}}=4.$$

$$\sqrt{2+\sqrt{\pm5}}\pm\sqrt{2-\sqrt{\pm5}}=\sqrt{4\pm2\sqrt{4\mp5}}.$$

**239.** *Непосредственное приведеніе формулы* $\sqrt{\mathrm{A}\pm\mathrm{B}\sqrt{-1}}$ *къ виду* $a\pm b\sqrt{-1}$.

Для этого положимъ

$$\sqrt{\mathrm{A}\pm\mathrm{B}\sqrt{-1}}=a\pm b\sqrt{-1},$$

гдѣ $a$ и $b$ суть нѣкоторыя числа, которыя найти надобно. Возвысимъ это равенство въ квадратъ:

$$\mathrm{A}\pm\mathrm{B}\sqrt{-1}=a^2-b^2\pm2ab\sqrt{-1}.$$

Сравнимъ члены дѣйствительные съ дѣйствительными, и мнимые съ мнимыми:

$$a^2-b^2=\mathrm{A},\ 2ab=\mathrm{B}.$$

Изъ втораго равенства находимъ $b^2=\frac{\mathrm{B}^2}{4a^2}$; это подставимъ въ первое:

$$a^2-\frac{\mathrm{B}^2}{4a^2}=\mathrm{A};\ \text{отсюда}\ a^4-\mathrm{A}a^2=\frac{\mathrm{B}^2}{4},$$

$$a^2=\frac{1}{2}\mathrm{A}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2},$$

$$a=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}{2}};$$

А изъ $a^2-b^2=\mathrm{A}$, получаемъ $b^2=a^2-\mathrm{A}$, или

$$b^2=\frac{\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}{2}-\mathrm{A};\ \text{откуда}$$

$$b=\pm\sqrt{\frac{-\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}{2}}.$$

Здѣсь $\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}>\mathrm{A}$; слѣдовательно, для знака +, найденныя числа $a$, $b$, суть дѣйствительныя; а для знака —, онѣ оба мнимыя. Но, какой бы знакъ ни былъ, въ обоихъ случаяхъ

$$\sqrt{\mathrm{A}\pm\mathrm{B}\sqrt{-1}}=a\pm b\sqrt{-1},$$

какъ это выведено было посредствомъ ряда Ньютоновой биноміи. Настоящее преобразованіе приводитъ къ нѣкоторымъ замѣчательнымъ слѣдствіямъ.

*Слѣдствіе 1.* Если $\sqrt{A\pm B\sqrt{-1}}=a\pm b\sqrt{-1}$, то и

$$\sqrt{A\pm B\sqrt{-1}}=\sqrt{a\pm b\sqrt{-1}}=a'\pm b'\sqrt{-1},\text{ и}$$

$$\sqrt{A\pm B\sqrt{-1}}=\sqrt{a'\pm b'\sqrt{-1}}=a''\pm b''\sqrt{-1},$$

и такъ далѣе, гдѣ $a$, $b$, $a'$, $b'$, $a''$, $b''$, числа дѣйствительныя, положительныя или отрицательныя.

*Слѣдствіе* 2. Положимъ $A=0$, $B=1$, получатся:

$$\sqrt{A+B\sqrt{-1}}=\sqrt{\sqrt{-1}},\quad \sqrt{A-B\sqrt{-1}}=\sqrt{-\sqrt{-1}}.$$

При семъ найдутся:

$$a=\pm\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$b=\pm\sqrt{\frac{-A\pm\sqrt{A^2+B^6}}{2}}=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}};$$

отъ сего, $\sqrt{A+B\sqrt{-1}}=a+b\sqrt{-1}$, и

$\sqrt{A-B\sqrt{-1}}=a-b\sqrt{-1}$, сдѣлаются:

$$\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt[4]{-1}=\pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1}\right).$$

$$\sqrt{-\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1}\right).$$

Замѣтимъ далѣе, что

$$\sqrt[3]{\sqrt{-1}}=\sqrt{\sqrt[3]{-1}}=\sqrt{-1},$$

$$\sqrt[3]{-\sqrt{-1}}=-\sqrt[3]{\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1}.$$

Если изъ этихъ двухъ выраженій извлечь квадратный корень, то найдется:

$$\sqrt[6]{\sqrt{-1}}=\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1},$$

$\sqrt[6]{-\sqrt{-1}}=\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1}$, какъ сей часъ это видѣли.

$$\sqrt[8]{-1}=\sqrt{\sqrt[4]{-1}}=\sqrt{\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}}$$

$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)}+\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)}\times\sqrt{-1},$$

и такъ далѣе.

Отсюда заключаемъ вообще, что всякое выраженіе $\sqrt[2m]{\pm\sqrt{-1}}$, гдѣ $2m$ цѣлое четное число, приводится къ виду $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, гдѣ $\alpha$ и $\beta$ суть числа дѣйствительныя.

### **240.** *Возвышеніе въ цѣлыя степени мнимыхъ выраженій* $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt{-\sqrt{-1}}$, $\sqrt[8]{-1}$, и т. д.

Руководствуясь правиломъ, показаннымъ для возвышенія въ степени мнимыхъ одночленовъ, первыя *четыре степени* для $\sqrt{-1}$ найдутся:

$$(+\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1};(+\sqrt{-1})^2=-1;(+\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1};(+\sqrt{-1})^4=1;$$

слѣдующія четыре степени: 5, 6, 7, 8, которыя составляются изъ $4+1$, $4+2$, $4+3$, $4+4$, будутъ также

$$+\sqrt{-1},\ -1,\ -\sqrt{-1},\ +1;$$

степени 9, 10, 11, 12, опять будутъ соотвѣтственно тѣ же, и, вообще, *каждыя четыре слѣдующія степени* будутъ соотвѣтственно періодически всё тѣ же самыя четыре, и могутъ быть изображены общими формулами:

$$(+\sqrt{-1})^{4n+1}=+\sqrt{-1};\ (+\sqrt{-1})^{4n+2}=-1;$$
$$(+\sqrt{-1})^{4n+3}=-\sqrt{-1};\ (+\sqrt{-1})^{4n+4}=+1.$$

Для возвышенія въ цѣлыя степени $-\sqrt{-1}$, найдутся также четыре формулы:

$$(-\sqrt{-1})^{4n+1}=-\sqrt{-1};\ (-\sqrt{-1})^{4n+2}=-1;$$
$$(-\sqrt{-1})^{4n+3}=+\sqrt{-1};\ (-\sqrt{-1})^{4n+4}=+1.$$

И выраженія $\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\sqrt{-1}}$, и $\sqrt{-\sqrt{-1}}$, имѣютъ степени цѣлыя возвращающіяся *періодически*, только *чрезъ каждыя восемь*, а именно:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{\sqrt{-1}})^1=\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1},\\
&(\sqrt{\sqrt{-1}})^2=\sqrt{-1},\\
&(\sqrt{\sqrt{-1}})^3=-\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1},\\
&(\sqrt{\sqrt{-1}})^4=-1,\\
&(\sqrt{\sqrt{-1}})^5=-\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1},\\
&(\sqrt{\sqrt{-1}})^6=-\sqrt{-1},\\
&(\sqrt{\sqrt{-1}})^7=\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1}\\
&(\sqrt{\sqrt{-1}})^8=+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1},\\
&(\sqrt{-\sqrt{-1}})^2=-\sqrt{-1},\\
&(\sqrt{-\sqrt{-1}})^3=-\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1}\\
&(\sqrt{-\sqrt{-1}})^4=-1,\\
&(\sqrt{-\sqrt{-1}})^5=-\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1},\\
&(\sqrt{-\sqrt{-1}})^6=+\sqrt{-1},\\
&(\sqrt{-\sqrt{-1}})^7=\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{-1},\\
&(\sqrt{-\sqrt{-1}})^8=+1.
\end{aligned}$$

Слѣдующія степени 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, совершенно тѣ же, что 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, какъ для $\sqrt{\sqrt{-1}}$, такъ и для $\sqrt{-\sqrt{-1}}$, потому что $9=8+1$, $10=8+2$,....

Не худо замѣтить, что во всякой степени отъ $\sqrt{\sqrt{-1}}$ и $\sqrt{-\sqrt{-1}}$ дѣйствительныя части ихъ совершенно тѣ же, а всѣ мнимыя отличаются только противными знаками.

**241.** Степени, найденныя для $\pm\sqrt{-1}$, $\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$, суть вмѣстѣ степенями и для $\sqrt[3]{\pm\sqrt{-1}}$, $\sqrt[6]{\pm\sqrt{-1}}$; потому что

$$\sqrt[6]{-1}=\sqrt[3]{\sqrt{-1}}=\sqrt[2]{\sqrt[3]{-1}}=\sqrt{-1};$$

$$\sqrt[3]{-\sqrt{-1}}=-\sqrt[3]{\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1};$$

$$\sqrt[12]{-1}=\sqrt[6]{\sqrt{-1}}=\sqrt{\sqrt[6]{-1}}=\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1};$$

$$\sqrt[6]{-\sqrt{-1}}=\sqrt{\sqrt[3]{-\sqrt{-1}}}=\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1}.$$

Гораздо сложнѣе выражаются степени количества

$$\sqrt[8]{-1}=\sqrt{\sqrt[4]{-1}}=\sqrt{\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1}},\ (\mathbf{239},\ \text{слѣдс. } 2).$$

$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}})}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{\tfrac{1}{2}})}\times\sqrt{-1};$$

$$(\sqrt[8]{-1})^2=\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1};$$

$$(\sqrt[8]{-1})^3=\sqrt{(\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1})^3}=\sqrt{-\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{-1}}$$

$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}})}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{\tfrac{1}{2}})}\times\sqrt{-1},$$

и такъ далѣе.

# ГЛАВА ОСЬМАЯ.

## ТЕОРІЯ ЛОГАРИѲМОВЪ.

**242.** Всякое уравненіе $a^x=y$, въ которомъ неизвѣстная $x$ находится показателемъ степени, называется *неопредѣленно-степеннымъ*. Оно показываетъ, что *можно получать всякія числа y чрезъ возвышеніе даннаго числа a въ нѣкоторыя опредѣленныя степени, лишь бы число a было больше или меньше единицы*. Для примѣра, возмемъ частный случай $10^x$, и будемъ полагать:

$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\dots\dots$; найдется

$a^x=1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\dots\dots$

Измѣняя надлежащимъ образомъ показатель $x$, можно получить всѣ числа промежуточныя между 1 и 10, между 10 и 100, и т. д. Напримѣръ, если намѣсто $x$ возмемъ дроби 0,1; 0,2; 0,3; 0,4;.... 0,9, между 0 и 1, и воспользуемся примѣрами, показанными въ (**236**), то получимъ довольно легко:

$$10^0=1$$
$$10^{0,1}=1,25892541\dots.$$
$$10^{0,2}=1,58489319\dots.=(10,^{0,1})^2$$
$$10^{0,3}=1,99526231\dots.=(10,^{0,1})^3$$
$$10^{0,4}=2,51188642\dots.=(10,^{0,1})^4$$
$$10^{0,5}=3,16227766\dots.=\sqrt{10}$$
$$10^{0,6}=3,98107170\dots.=(10^{0,1})^6$$
$$10^{0,7}=5,01187336\dots.=10^{0,5}\times 10^{0,2}$$
$$10^{0,8}=6,30957344\dots.=$$
$$10^{0,9}=7,94328234\dots.$$
$$10^1=10.$$

Можно получить числа, когда показатель $x$ измѣняется отъ одной до одной сотой, потому что мы нашли $10^{0,01}=1,02329299\dots..$:

$$10^{0,11}=10^{0,1}.10^{0,01}\qquad 10^{0,21}=10^{0,2}.10^{0,01}$$
$$10^{0,12}=10^{0,1}.10^{0,02}\qquad 10^{0,22}=10^{0,2}.10^{0,02}$$
$$10^{0,13}=10^{0,1}.10^{0,03}\qquad 10^{0,23}=10^{0,2}.10^{0,03}$$

..................................................................

Точно также можно получить и числа промежуточныя между 10 и 100, полагая $x=1,1$; 1,2; 1,3; 1,4;....1,9:

$$10^{1,1}=10.10^{0,1}=12,5892541\dots$$
$$10^{1,2}=10.10^{0,2}=15,8489319\dots$$
$$10^{1,3}=10.10^{0,3}=19,9526231\dots$$

..........................................

$$10^{1,9}=10.10^{0,9}=79,4328234\dots.$$

**243.** Въ общемъ выраженіи $a^x$ число $a$ можетъ быть цѣлое или дробь, степень $x$ можетъ быть положительною или отрицательною.

*Когда $a$ больше единицы, то всѣ числа $y$, большія единицы, получатся чрезъ возвышеніе $a$ въ положительныя степени, цѣлыя или дробныя, въ естественномъ порядкѣ ихъ послѣдованія.* Напрім.

$$\text{для } x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ \text{найдемъ числа,}$$

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ldots$$

*Всѣ числа, меньшія единицы, получатся чрезъ возвышеніе $a$ въ степени отрицательныя, цѣлыя или дробныя.* Потому что, для

$$x=0,\ -1,\ -2,\ -3,\ldots\ldots$$

$$a^x=1,\ a^{-1},\ a^{-2},\ a^{-3},\ldots\ldots \text{ или}$$

$$1,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a^3},\ldots\ldots$$

*Когда $a$ меньше единицы, то, отъ возвышенія его въ степени положительныя* (цѣлыя или дробныя), *получатся всѣ числа дробныя.* Ибо, если $a$ дробь равная $\frac{1}{b}$; то, полагая

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots \text{ найдемъ}$$

$$a^x=\frac{1}{b^x}=1,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{b^2},\ \frac{1}{b^3},\ldots\ldots;$$

А *отъ возвышенія дроби $a=\frac{1}{b}$ въ степени отрицательныя, получатся всѣ числа, большія 1-цы.*

$$\text{Ибо, для}\quad x=0,\ -1,\ -2,\ -3,\ldots \text{ будетъ}$$

$$a^x=\frac{1}{b^x}=1,\ \frac{1}{b^{-1}},\ \frac{1}{b^{-2}},\ \frac{1}{b^{-3}},\ldots\ldots, \text{ или}$$

$$1,\ b,\ b^2,\ b^3\ldots\ldots$$

**244.** *Степень $x$, въ которую надобно возвысить постоянное число $a$, чтобъ получить данное число $y$, называется логариѳмомъ этого числа $y$.* Постоянное же число $a$ называется *основаніемъ логариѳмовъ.* А какъ всякое число, большее либо меньшее единицы, можно взять за основаніе, то *различныхъ системъ логариѳмовъ находится безчисленное множество.*

Логариѳмъ, для сокращенія, пишется знакомъ log или $l$. Сряду подлѣ этого знака ставится то число, которое должно получиться отъ возвышенія основанія въ степень, равную этому логариѳму.

**245.** *Свойства логариѳмовъ.* — 1) *Во всякой системѣ логариѳмовъ, логариѳмъ основанія равенъ единицѣ, а логариѳмъ единицы равенъ нулю.* Ибо, если въ уравненіи $a^x=y$
положить $x=1$, то $y=a^1$,
$x=0$, $y=a^0=1$;
а какъ $\log y=x$, то $\log a=1$, $\log 1=0$.

2) *Если основаніе* $a > 1$, *то логариѳмы для цѣлыхъ чиселъ* $y$ *положительные, а логариѳмы дробей — отрицательные.* Потому что всѣ цѣлыя числа

$$y=1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ldots\ldots\infty,$$

получатся не иначе, какъ полагая

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots\infty;$$

а для полученія всѣхъ дробей надобно брать показатель $x$ отрицательнымъ:

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x}=\text{дроби } y.$$

3) *Во всякой системѣ, гдѣ основаніе* $> 1$, *логариѳмъ безконечно большаго числа также безконечно великъ, а логариѳмъ нуля равенъ отрицательной безконечности.* — Очевидно, что если въ уравненіи $a^x=y$ положить $x=\infty$, то выйдетъ число $y=\infty$; а какъ $x=\log y$, то $\log\infty=\infty$.

Также, если въ $a^{-x}=\frac{1}{a^x}=y$, положить $x=\infty$, то будетъ $y=\frac{1}{\infty}=0$; стало-быть,

$$\log y=-x \text{ обратится въ}$$
$$\log 0=-\infty.$$

*Логариѳмъ произведенія нѣсколькихъ множителей равенъ суммѣ логариѳмовъ этихъ множителей,* то есть:

$$\log yy'y''=\log y+\log y'+\log y''.$$

Для доказательства примемъ $a$ за основаніе системы логариѳмовъ, и положимъ, что

$$a^x=y,\quad a^{x'}=y',\quad a^{x''}=y'', \text{ гдѣ}$$
$$x=\log y,\ x'=\log y',\ x''=\log y'';$$

перемножимъ $a^x$ на $a^{x'}$ и на $a^{x''}$, получится:

$$a^{x+x'+x''}=yy'y'', \text{ гдѣ также}$$
$$x+x'+x''=\log yy'y'', \text{ или}$$
$$\log yy'y''=\log y+\log y'+\log y''.$$

5) *Логариѳмъ частнаго числа, или дроби* $\frac{y}{y'}$, *равенъ логариѳму дѣлимаго безъ логариѳма дѣлителя, или логариѳму числителя безъ логариѳма знаменателя.*

Возмемъ $a^x=y$, $a^{x'}=y'$, гдѣ $x=\log y$, $x'=\log y'$; и раздѣлимъ $a^x$ на $a^{x'}$, будетъ:

$$a^{x-x}=\frac{y}{y'}.$$

Откуда, слѣдуетъ, что $x-x'=\log\frac{y}{y'}$, или

$$\log\frac{y}{y'}=\log y-\log y'.$$

6) *Логариѳмъ степени какого ни есть числа равенъ логариѳму этого числа, помноженному на показатель степени, то есть:*

$$\log y^n = n.\log y.$$

Это слѣдуетъ изъ того, что

$$\log yy'y''.... = \log y + \log y' + \log y'' + .....$$

Положимъ, что число всѣхъ множителей $n$, и что $y = y' = y'' = ...$; то и выйдетъ

$$\log y^n = \log y + \log y + \log y + .... = n.\log y.$$

7) *Логариѳмъ всякаго корня равенъ логариѳму подкореннаго числа, раздѣленнаго на показатель корня,* то есть:

$$\log \sqrt[n]{y} = \frac{1}{n}.\log y.$$

Для объясненія, положимъ, что $\sqrt[n]{y} = x$, возвысимъ это въ степень $n$, и возмемъ логариѳмъ степени:

$$y = x^n,\ \log y = n\log x;\ \text{откуда}$$

$$\log x \ \text{или}\ \log \sqrt[n]{y} = \frac{1}{n}.\log y.$$

**216.** Эти свойства показываютъ, что если принять за основаніе кокое-нибудь одно число $a$, и вычислить какимъ нибудь образомъ логариѳмы $x$ для всякихъ чиселъ $y$, такъ чтобы по данному логариѳму, можно было тотчасъ находить число ему соотвѣтственное, и, по данному числу, находить его логариѳмъ; то можно будетъ всѣ трудныя вычисленія замѣнить простѣйшими:

a) *Умноженіе сложеніемъ.* Положимъ, что я желаю найти произведеніе $yy'y'$: беру

$$\log yy'y'' = \log y + \log y' + \log y'';$$

отыскиваю въ таблицѣ $\log y$, $\log y'$, $\log y''$, и складываю; получится $\log yy'y''$. Этому логариѳму нахожу соотвѣтственное число въ таблицѣ; оно и будетъ $= yy'y''$.

b) *Дѣленіе замѣнится вычитаніемъ логариѳмовъ.* Такъ, чтобы найти частное $\frac{y}{y'}$, возмемъ

$$\log \frac{y}{y'} = \log y - \log y';$$

въ таблицѣ найдемъ $\log y$, $\log y'$, и возмемъ ихъ разность, получится $\log \frac{y}{y'}$; тогда останется только найти число, этому логариѳму соотвѣтственное, изъ таблицы; оно и будетъ $\frac{y}{y'}$.

c) *Возвышеніе числа въ степень замѣнится умноженіемъ его логариѳма на показатель степени;* потому что

$$\log y^n = n.\log y.$$

Взявъ произведеніе $n.\log y$, мы получимъ $\log y^n$; а число ему соотвѣтственное, пріисканное въ таблицѣ, и будетъ $y^n$.

d) *Извлеченіе корней приведется къ дѣленію логариѳма подкоренного числа на показатель корня.*

$$\log \sqrt[n]{y} = \frac{1}{n} . \log y.$$

Раздѣливши $\log y$ на показатель $n$, мы получимъ искомый логариѳмъ; а число, ему соотвѣтственное, найденное въ таблицѣ, будетъ $\sqrt[n]{y}$.

**217.** Логариѳмы имѣютъ еще то замѣчательное свойство, что *логариѳмы одной системы легко могутъ быть превращаемы въ логариѳмы другой* (вычисляемые по другому основанію).

Положимъ, что данъ логариѳмъ числа N, вычисленный по основанію $a$, изъ уравненія $a^x = N$; а мы хотимъ имѣть логариѳмъ этого же числа изъ уравненія $b^{x'} = N$, гдѣ $b$ другое основаніе, которое и должно быть возвышено въ иную степень $x'$, чтобы могло обратиться въ тоже число N.

Означивши логариѳмы первой системы чрезъ log, а логариѳмы второй чрезъ lóg, будемъ имѣть:

$$x = \log N, \text{ по основанію } a.$$

$$x' = \text{lóg}\, N, \text{ по основанію } b,$$

Возмемъ еще логариѳмъ уравненія $b^{x'} = N$, принимая $a$ за основаніе:

$$x' \log b = \log N; \text{ отсюда}$$

$$x' = \text{lòg}\, N = \frac{1}{\log b} . \log N.$$

И такъ, показатель $x'$ или lógN, въ который надобно возвысить другое основаніе $b$, чтобъ получить то же число N, найдется, если взять logN и $\log b$ по первому основанію, и раздѣлить первый на послѣдній.

Постоянную дробь $\frac{1}{\log b}$ называютъ *модулемъ*, и означаютъ буквою $M = \frac{1}{\log b}$. Слѣдственно, *для перехода отъ одной системы $a^x = N$ логариѳмовъ къ другой $b^{x'} = N$, надобно логариѳмъ первой системы помножить на модуль.*

Посему, довольно имѣть одну таблицу логариѳмовъ чиселъ, по какой ни есть опредѣленной системѣ; посредствомъ ея можно будѣтъ находить логариѳмы тѣхъ же чиселъ по всякой другой.

## СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНІЯ ЛОГАРИѲМОВЪ.

### А. Посредствомъ непрерывныхъ дробей.

**218.** По данному основанію, можно находить логариѳмъ всякаго числа точно, или приближенно, съ помощію *непрерывныхъ дробей,* какъ видно изъ слѣдующаго примѣра.

Возмемъ за основаніе число 10, и поищемъ степень $x$, въ которую надобно возвысить это число, чтобы оно превратилось въ 17. Для этого надобно разрѣшить уравненіе

$$10^x=17,$$

или найти $\log 17=x$.

Будемъ число 10 возвышать послѣдовательно въ степени 1, 2, 3,..., и смотрѣть, не обратится ли оно въ 17; тогда показатель и былъ бы найденъ. Но это, вообще, случается очень рѣдко; а потому надобно возвышать основаніе въ эти степени до тѣхъ поръ, пока получатся два числа: одно ближайшее меньшее 17-ти, а другое ближайшее къ нему бо́льшее.

Взявъ $x=1$, $x=2$, найдемъ числа

$$10^1=10,\ 10^2=100.$$

Данное число 17 заключается между 10 и 100; стало-быть, искомый показатель $x$ находится между 1 и 2, то есть, онъ долженъ быть равенъ единицѣ съ нѣкоторою дробью. Назовемъ эту дробь чрезъ $\frac{1}{y}$, слѣдоват. $x=1+\frac{1}{y}$; тогда уравненіе $10^x=17$ обратится въ

$$10^{1+\frac{1}{y}}=10.10^{\frac{1}{y}}=17, \text{ откуда } 10^{\frac{1}{y}}=1,7; \text{ а отсюда}$$

$$(1,7)^y=10.$$

Такъ мы получили новое уравненіе, того же вида, что и данное. Изъ него точно также будемъ искать показатель $y$.

Полагая $y=1$, 2, 3, 4, 5, найдется что

$$(1,7)^4<10,\ (1,7)^5>10;$$

слѣдовательно, $y>4$, но $<5$, и можно положить:

$$y=4+\frac{1}{z}:$$

$$(1,7)^y=(1,7)^4.(1,7)^{\frac{1}{z}}=10, \text{ и}$$

$$(1,7)^{\frac{1}{z}}=\frac{10}{(1,7)^4}=1,1973;$$

$$\text{откуда } 1,1973^z=1,7.$$

Въ этомъ новомъ уравненіи беремъ $z=1$, 2, 3,...., и находимъ что

$$1,1973^2<1,7;\ 1,1973^3>1,7;$$

откуда заключаемъ, что $z=2+\frac{1}{u}$, то есть:

$$1,1973^2.\,1,1973^{\frac{1}{u}}=1,7; \text{ откуда}$$

$$1,1973^{\frac{1}{u}}=\frac{1,7}{1,433}=1,1863, \text{ и}$$

$$(1,1863)^u=1,1973.$$

Здѣсь снова беру $u=0$, 1, 2,...., и нахожу

$$1,1863 < 1,1973,$$
$$1,1863^2 > 1,1973.$$

Слѣдовательно $u = 1 + \frac{1}{v}$, и такъ далѣе.

Такимъ образомъ мы получимъ рядъ чиселъ:

$$x=1+\frac{1}{y},\ y=4+\frac{1}{z},\ z=2+\frac{1}{u},\ u=1+\frac{1}{v},\ldots,$$

которыя, чрезъ подстановленіе, совокупляются въ одну непрерывную дробь

$$x=1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{v}}}}$$

Для приближенія, откинемъ дробь $\frac{1}{v}$; найдется послѣдовательно:

$$u=1,$$
$$z=2+\frac{1}{u}=2+\frac{1}{1}=3,$$
$$y=4+\frac{1}{z}=4+\frac{1}{3}=\frac{13}{3},$$
$$x=1+\frac{1}{y}=1+\frac{3}{13}=1,2307\ldots.$$

Такова приближенная величина показателя $x$; въ эту степень надобно возвысить число 10, чтобъ получить число весьма близкое къ 17. Чѣмъ болѣе возмемъ членовъ приближенія для непрерывной дроби, тѣмъ вѣрнѣе получится $x$. Въ нашемъ примѣрѣ $x=1,2307\ldots.$ имѣетъ всю точность въ тысячныхъ доляхъ.

Впрочемъ этотъ непосредственный способъ вычисленія логариѳмовъ, повидимому самый простой, до крайности утомителенъ, особливо когда въ уравненіяхъ, вида $a^x=y$, числа $a$ и $y$ велики.

### В. Посредствомъ разложенія логариѳма въ рядъ.

**249**. Возмемъ число $1+x$, въ которомъ $x$ есть членъ перемѣнный. Испытаемъ, нельзя ли логариѳмъ этого числа разложить въ убывающій рядъ, расположенный по степенямъ перемѣнной $x$, вида:

$$\log(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots.$$

Въ этомъ ряду не должно быть члена, несодержащаго $x$, потому что для $x=0$, $\log(1+0)=0$. Его неизвѣстные коефиціенты A, B, C, D,.... предполагаются независимыми отъ перемѣнной $x$; они остаются тѣми же, какъ бы $x$ ни измѣнялся. Слѣдовательно, если вмѣсто $x$ взять $z$, получится также

$$\log(1+z)=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\ldots.$$

Вычтемъ этотъ рядъ изъ перваго:

$$\log(1+x)-\log(1+z)=\log\frac{1+x}{1+z}=A(x-z)+B(x^2-z^2)+C(x^3-z^3)+\ldots$$

Но, $\log\frac{1+x}{1+z}=\log(1+\frac{x-z}{1+z})$; посему этотъ послѣдній разложится въ рядъ точно также, какъ и первые:

$$\log(1+\frac{x-z}{1+z})=A(\frac{x-z}{1+z})+B(\frac{x-z}{1+z})^2+C(\frac{x-z}{1+z})^3+\ldots,$$

и мы будемъ имѣть равенство

$$A(\frac{x-z}{1+z})+B(\frac{x-z}{1+z})^2+C(\frac{x-z}{1+z})^3+\ldots=A(x-z)+B(x^2-z^2)+C(x^3-z^2)+\ldots;$$

а раздѣливъ обѣ части уравненія на $x-z$, останется:

$$\frac{A}{1+z}+\frac{B(x-z)}{(1+z)^2}+\frac{C(x-z)^2}{(1+z)^3}+\ldots=A+B(x+z)+C(x^2+xz+z^2)+\ldots$$

Число $z$ взято произвольно, то и положимъ $z=x$; останется:

$$\frac{A}{1+x}=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ldots$$

А какъ $\frac{A}{1+x}=A-Ax+Ax^2-Ax^3+\ldots$, то

$$A-Ax+Ax^2-Ax^3\ldots=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ldots$$

Для равенства этихъ многочленовъ необходимо нужно, чтобы коефиціенты равныхъ степеней отъ $x$ были равны между собою (**101**), то есть:

$$A=A,\ 2B=-A,\ 3C=A,\ 4D=-A,\ldots,$$

$$\text{или: } A=A,\quad B=-\frac{1}{2}A,\quad C=\frac{1}{3}A,\quad D=-\frac{1}{4}A,\ldots$$

Законъ составленія коефиціентовъ изъ А очевиденъ; посему

$$\log(1+x)=Ax-\frac{1}{2}Ax^2+\frac{1}{3}Ax^3-\ldots$$

$$=A(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots)$$

Въ этомъ ряду осталось одно только предстоящее А неопредѣленнымъ: такъ и быть должно, потому что мы получили рядъ, независимый отъ системы логариѳмовъ, въ которомъ необходимо долженъ быть такой множитель, который бы отличалъ одну систему логариѳмовъ отъ другой, посредствомъ котораго можно было бы переходить отъ одной системы къ другой. Таковъ и есть здѣсь множитель А; онъ не что иное, какъ *модуль*.

**250.** Найденный рядъ

$$\log(1+x)=A(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots)$$

надобно еще сдѣлать сколь возможно болѣе убывающимъ, для удобнѣйшаго вычисленія логариѳмовъ по какой нибудь системѣ. Для этого возмемъ въ немъ $-x$ вмѣсто $x$:

$$\log(1-x)=A(-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\ldots),$$

и этотъ рядъ вычтемъ изъ предыдущаго:

$$\log(1+x)-\log(1-x)=2A(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots.),\text{ или}$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2A(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots.).$$

Послѣ сего положимъ $\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{z}{n}$; откуда найдемъ

$$n+nx=n+z-nx-xz,\text{ и}$$

$$x=\frac{z}{2n+z}.$$

Это подставимъ въ послѣднее выраженіе логариѳма:

$$\log(1+\frac{z}{n})=2A(\frac{z}{2n+z}+\frac{z^3}{3(2n+z)^3}+\frac{z^5}{5(2n+z)^5}+\ldots.);\text{ отсюда}$$

$$\log(n+z)=\log n+2A(\frac{z}{2n+z}+\frac{z^3}{3(2n+z)^3}+\frac{z^5}{5(2n+z)^5}+\ldots.).$$

А какъ величины $n$ и $z$ произвольны, то одну изъ нихъ можно взять равною чему угодно. Мы положимъ $z=1$, отчего рядъ сдѣлается весьма убывающимъ:

$$\log(n+1)=\log n+2A(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots.),$$

и совершенно удобнымъ для вычисленія логариѳмовъ чиселъ 2, 3, 4,...., слѣдующихъ въ естественномъ порядкѣ, по какой угодно системѣ.

**251.** Найденная формула показываетъ, что логариѳмы всѣхъ системъ отличаются только модулемъ A. Для вычисленія логариѳмовъ мы возмемъ сперва такую систему, въ которой $A=1$; для отличія означимъ ихъ чрезъ $l'$; тогда будемъ имѣть

$$l'(1+n)=l'n+2(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots.).$$

Полагая послѣдовательно:

$n=1$, найдется $l'2=0,6931.4718\ldots$
$n=2$, - $l'3=1,0986.1228\ldots$
$n=3$, - $l'4=1,3862.9436\ldots$
$n=4$, - $l'5=1,6094.3791\ldots$
$n=5$, - $l'6=1,7917.5946\ldots$
$n=6$, - $l'7=1,9459.1014\ldots$
$n=7$, - $l'7=2,0794.4154\ldots$
$n=8$, - $l'9=2,1972.2457\ldots$
$n=9$, - $l'10=2,3025.8509\ldots$ *).

---

*) Вычисленіе становится тѣмъ легче, чѣмъ болѣе число $n$; напримѣръ для $n=100$, получили бы:

$$l'101=l'100+2(\frac{1}{201}+\frac{1}{3(201)^3}+\frac{1}{5(201^5)}+\ldots.)$$

Въ этомъ ряду довольно взять *одну первую дробь*, чтобъ получить логариѳмъ, точный въ 6 десятичныхъ.

Непосредственно изъ этой формулы довольно вычислить логариѳмы первыхъ чиселъ: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23....; потому что прочія цѣлыя числа происходятъ отъ перемноженія первыхъ чиселъ между собою, а логариѳмы ихъ отъ сложенія логариѳмовъ множителей. Наприм.

$$l'4=l'2^2=2l'2,$$
$$l'6=l'2.3=l'2+l'3,$$
$$l'8=l'2^3=3l'2,$$
$$l'10=l'2.5=l'2+l'5,$$ и такъ далѣе.

**252.** Система логариѳмовъ, вычисленная по формулѣ, въ которой $A=1$, называется *натуральною,* также *Неперовою,* по имени шотландскаго барона *Непера,* который считается изобрѣтателемъ логариѳмовъ (1614 года). Какое основаніе оныхъ логариѳмовъ, это мы увидимъ скоро.

Помножая эти логариѳмы на такой или другой модуль, мы легко перейдемъ отъ неперовыхъ логариѳмовъ ко всякой другой системѣ ихъ, напримѣръ: помножая ихъ на модуль $\frac{1}{l'3}$, получится новая система логариѳмовъ отъ основанія 3; помножая неперовы логариѳмы на $\frac{1}{l'5}$ или на $\frac{1}{l'10}$, получится система логариѳмовъ отъ основанія 5 либо 10.

**253.** *Во всякой системѣ логариѳмовъ, разности между числами* (если только онѣ очень малы) *пропорціональны разностямъ между логариѳмами тѣхъ чиселъ.*

Для вывода этого полезнаго свойства, возмемъ общую формулу:

$$\log(n+z)-\log n=2A\left(\frac{z}{2n+z}+\frac{z^3}{3(2n+z)^3}+\ldots.\right).$$

Отъ этого логариѳма перейдемъ къ другому, взявши $y$ вмѣсто $z$; будемъ имѣть также

$$\log(n+y)-\log n=2A\left(\frac{y}{2n+y}+\frac{y^3}{3(2n+y)^3}+\ldots.\right).$$

Если числа $y$, $z$, суть малыя дроби, то въ этихъ рядахъ можно отбросить всѣ степени $z$ и $y$, высшія первой, а въ членахъ $\frac{z}{2n+z}$, $\frac{y}{2n+y}$, выпустить $y$, $z$, въ знаменателяхъ, предполагая, что они весьма малы сравнительно съ $2n$. Сдѣлавъ это, раздѣлимъ одну формулу на другую, то и получится отношеніе:

$$\frac{\log(n+z)-\log n}{\log(n+y)-\log n}=\frac{z}{y}=\frac{(n+z)-n}{(n+y)-n},$$

то есть: разности между логариѳмами пропорціональны разностямъ между числами ихъ.

### *Обыкновенные* или *Бригговы логариѳмы.*

**254.** Логариѳмы, принятые для всѣхъ вычисленій, имѣютъ основаніемъ число 10. Они называются *обыкновенными*, также *Бригговыми*, по имени Генриха Бригга, лондонскаго профессора, который большую часть ихъ вычислилъ (съ 1618 по 1624 годъ), и ввелъ въ употребленіе.

Ихъ можно вычислять непосредственно чрезъ разрѣшеніе уравненія $10^x=N$, но гораздо проще чрезъ помноженіе неперовыхъ логариѳмовъ на модуль $\frac{1}{l'10}=\frac{1}{2,30258509}=0,43429.44819\ldots$ Такъ, напримѣръ, мы видѣли, что неперовъ $l'2=0,69314718$; то обыкновенный логариѳмъ числа 2 будетъ

$$\log 2=\frac{l'2}{l'10}=\frac{0,69314718}{2,30258509}=0,30102999;$$

$$\log 3=\frac{l'3}{l'10}=\frac{1,09861228}{2,30258509}=0,4771215,$$

и такъ далѣе.

**255.** Преимущества этихъ логариѳмовъ легко открыть, разсматривая ихъ производство изъ уравненія

$$10^x=N.$$

Если брать $x=0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ldots,$

найдутся: $\quad N=1,\quad 10,\quad 100,\quad 1000,\quad 10000,\ldots$

А полагая $x=0,\quad -1,\quad -2,\quad -3,\quad -4,\ldots$

получимъ: $\quad N=1;\ 0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ 0,0001;\ldots$

Посему, $\log 1=0$, $\log 10=1$, $\log 100=2$, $\log 1000=3,\ldots$

$\log 0,1=-1$, $\log 0,01=-2$, $\log 0,001=-3$, $\log 0,0001=-4$, и такъ далѣе.

Отсюда заключаемъ: 1) что логариѳмы всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, возрастающихъ отъ 1 до $\infty$, суть числа *положительныя*, также возрастающія отъ 0 до $\infty$; а логариѳмы дробей — *отрицательныя*.

2) Всякое цѣлое *однозначное* число, взятое между 1 и 10, имѣетъ логариѳмъ дробный, заключающійся между 0 и 1. Всякое цѣлое число *двузначное*, взятое между 10 и 100, имѣетъ логариѳмъ между 1 и 2, который долженъ быть $=1+$дробь. Всякое цѣлое трехзначное число, взятое, между 100 и 1000, имѣетъ логариѳмъ между 2 и 3, который долженъ быть $=2+$ дробь, и т. д. И вообще, если цѣлое число (исключая полныя степени основанія 10) содержитъ $n$ цифръ, то логариѳмъ его состоитъ изъ $n-1$ единицъ, сопровождаемыхъ несоизмѣримою десятичною дробью. Наприм. число 3578, которое заключается между 1000 и 10000, или между $10^3$ и $10^4$, имѣетъ логариѳмъ $=3+$дробь.

Цѣлая часть логариѳма называется *характеристикою;* потому что она вѣрно показываетъ, какой высшій разрядъ единицъ содержитъ въ себѣ число, этому логариѳму соотвѣтственное, т. е. сколько цифръ содержитъ оно въ своей цѣлой части. Наприм., если у даннаго логариѳма характеристика 3, то ему соотвѣтствуетъ число, содержащее четыре цифры, т. е. *одною болѣе противъ числа цифръ характеристики.* — Посему-то почти во всѣхъ таблицахъ обыкновенныхъ логариѳмовъ совсѣмъ не ставятъ характеристики, и нѣтъ въ томъ надобности, она и безъ того всегда очевидна. Десятичная дробь логариѳма, сопровождающая характеристику, называется *мантиссою.*

3) Если извѣстенъ логариѳмъ какого ни есть числа, то логариѳмъ этого же числа, увеличеннаго въ 10, 100, 1000,... разъ, получится, придавъ къ его характеристикѣ 1, 2, 3,... Положимъ, что извѣстенъ $\log a$; то

$$\log 10a = \log 10 + \log a = 1 + \log a,$$
$$\log 10^2a = \log 10^2 + \log a = 2 + \log a,$$
$$\log 10^3a = \log 10^3 + \log a = 3 + \log a.$$

*Примѣръ:*
$$\log 345600000 = \log 3456.10^5 =$$
$$= \log 10^5 + \log 3456 = 5 + \log 3456.$$

И обратно: по извѣстному $\log a$, можемъ тотчасъ найти логариѳмъ числа въ 10, 100, 1000,... разъ меньшаго, надобно только изъ его характеристики вычесть 1, 2, 3,...; ибо

$$\log\frac{a}{10} = \log a - \log 10 = \log a - 1,$$
$$\log\frac{a}{10^2} = \log a - 2\log 10 = \log a - 2,$$
$$\log\frac{a}{10^n} = \log a - n\log 10 = \log a - n.$$

*Примѣръ:*

$$\log 3578 = 3{,}5536403, \text{ то}$$
$$\log 35780 = 4{,}5536403,$$
$$\log 357800 = 5{,}5536403,$$
$$\log 357{,}8 = 2{,}5536403,$$
$$\log 3{,}578 = 0{,}5536403,$$
$$\log 0{,}3578 = 3{,}5536403 - 4 = 0{,}5536403 - 1,$$
$$\log 0{,}0003578 = 3{,}5536403 - 7 = 0{,}5536403 - 4.$$

Отсюда видно, что въ этихъ случаяхъ *одна характеристика измѣняется, а десятичная часть логариѳма остается постоянною.*

**256.** При вычисленіяхъ не вычитаютъ всего положительнаго логариѳма изъ отрицательнаго большаго числа, но только одну его характеристику; отъ этого получится *одна только характеристика отрицательная.* Ее пишутъ на своемъ мѣстѣ, а надъ нею ставятъ знакъ минусъ. Въ нашемъ послѣднемъ примѣрѣ будетъ

$$3,5536403-7=\bar{4},5536403.$$

Употребленіемъ сего знака и показывается, что здѣсь одна характеристика отрицательная, а мантисса положительная.

**257.** *Ариѳметическое дополненіе.* — Мы знаемъ, что, вообще,

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b.$$

Если $b>a$, то и $\log b>\log a$; слѣдовательно, $\log\frac{a}{b}$ будетъ отрицательнымъ. Въ вычисленіяхъ избѣгаютъ логариѳмовъ отрицательныхъ, на тотъ конецъ, чтобы не дѣлать вычитанія между десятичными долями логариѳмовъ, а только одно сложеніе. Для этого употребляется такъ называемое *ариѳметическое дополненіе*, которое дѣлается такъ: къ вычитаемому логариѳму придается 10 и отнимается 10:

$$\log\frac{a}{b}=\log a+10-\log b-10;$$

берется на самомъ дѣлѣ разность $10-\log b$, она-то и называется дополненіемъ $\log b$ до 10 и пишется доп. $\log b$: такимъ образомъ получится

$$\log\frac{a}{b}=\log a+\text{доп.}\log b-10,$$

и вычитаніе между логариѳмами обратится въ сложеніе.

Дополненіе же даннаго логариѳма до 10 получается, вычитая первую съ правой стороны значущую цифру изъ 10, а всѣ прочія изъ 9. Если логариѳмъ оканчивается нулями, то они пишутся и въ дополненіи. Это дѣйствіе такъ просто, что дополненіе пишутъ обыкновенно прямо, смотря на данный логариѳмъ. Наприм.

для 3,4012306
дополненіе $=6,5987694$.

Повѣрка здѣсь самая легкая: она дѣлается чрезъ сложеніе логариѳма съ дополненіемъ отъ лѣвой руки къ правой. При этомъ сумма единицъ каждаго разряда должна выйти 9, а послѣдняго разряда 10.

### РАСПОЛОЖЕНІЕ И УПОТРЕБЛЕНІЕ ТАБЛИЦЪ ОБЫКНОВЕННЫХЪ ЛОГАРИѲМОВЪ.

**258.** Въ употребленіи находится нѣсколько логариѳмическихъ таблицъ. Лучшими признаются таблицы *Каллета* и *Вега*, вычисленныя до семи десятичныхъ, и малыя таблицы *Лаланда*, вычисленныя до пяти десятичныхъ. Всѣ онѣ имѣютъ однообразное расположеніе; а потому довольно разсмотрѣть однѣ которыя нибудь: мы возмемъ таблицы Каллета.

**259.** Таблицы логариѳмовъ Каллета вычислены для чиселъ отъ 1 до 108000. Начиная отъ 1 до 1200 онѣ вычислены до 8 десятичныхъ, и расположены такъ, что во всякой вертикальной графѣ подъ литерою N (nombre число) находятся числа, а въ слѣдующей графѣ подъ знакомъ *log*, противъ каждаго числа находится его логариѳмъ безъ характеристики, потому что она и безъ таблицъ всегда извѣстна. Разностей между логариѳмами не показано.

Далѣе принято расположеніе другое. Въ колоннѣ подъ литерою N, слѣдуютъ, какъ и прежде, всѣ числа отъ 1020 до 10800, а въ слѣдующей колоннѣ, подъ цифрою 0, ихъ логариѳмы, какъ видно здѣсь въ табличкѣ.

| N. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2583 | 412.1244 | 1412 | 1580 | 1748 | 1917 | 2085 | 2253 | 2421 | 2589 | 2757 | |
| 84 | 2925 | 3093 | 3261 | 3429 | 3597 | 3765 | 3933 | 4101 | 4269 | 4437 | 168 |
| 2585 | 4605 | 4773 | 4941 | 5109 | 5277 | 5445 | 5613 | 5781 | 5949 | 6117 | 1 17 |
| 86 | 6285 | 6453 | 6621 | 6789 | 6957 | 7125 | 7293 | 7461 | 7629 | 7796 | 2 34 |
| 87 | 7964 | 8132 | 8300 | 8468 | 8636 | 8804 | 8971 | 9139 | 9307 | 9475 | 3 50 |
| 88 | 9643 | 9811 | 9978 | | | | | | | | 4 67 |
| | 413. | | | 0146 | 0314 | 0482 | 0649 | 0817 | 0985 | 1153 | 5 84 |
| 89 | 1321 | 1488 | 1656 | 1824 | 1991 | 2159 | 2327 | 2495 | 2662 | 2830 | 6 101 |
| 2590 | 2998 | 3165 | 3333 | 3501 | 3668 | 3836 | 4004 | 4171 | 4339 | 4507 | 7 118 |
| 91 | 4674 | 4842 | 5009 | 5177 | 5345 | 5512 | 5680 | 5847 | 6015 | 6182 | 8 134 |
| 92 | 6350 | 6518 | 6685 | 6853 | 7020 | 7188 | 7355 | 7523 | 7690 | 7858 | 9 151 |
| 93 | 8025 | 8193 | 8360 | 8528 | 8695 | 8863 | 9030 | 9197 | 9365 | 9531 | |

Поелику три первыя десятичныя для нѣсколькихъ послѣдовательныхъ чиселъ остаются однѣ и тѣ же, то онѣ поставлены только противъ перваго изъ этихъ чиселъ, а прочія четыре десятичныя поставлены противъ каждаго числа особо, и должны быть присоединяемы къ тремъ первымъ. Наприм.

$$\log 2\overset{5}{\cancel{7}}85=3,412.4605$$
$$\log 2589=3,413.1321.$$

Для чиселъ 10801, 10802, 10803,... до послѣдняго 108000, единицы ихъ 1, 2, 3, 4,.... 9, находятся въ первой верхней горизонтальной графѣ на каждой страницѣ. Для каждаго такого числа первыя три десятичныя логариѳма его находятся въ вертикальной колоннѣ подъ цифрою 0, а послѣднія четыре въ одной же съ нимъ горизонтальной строкѣ, только въ вертикальной колоннѣ подъ цифрою его единицъ. Напримѣръ:

log 25853=4,412.5109
log 25886=4,413.0649
log 25929=4,413.7858.

Такъ находятся логариѳмы всѣхъ чиселъ отъ 10800 до 108000.

**260.** Эта же табличка служитъ и для нахожденія логариѳмовъ чиселъ, большихъ 108000. Пусть требуется найти логариѳмъ числа 2588274. Этого числа нѣтъ въ таблицахъ Каллета. Чтобы найти его логариѳмъ, надобно отдѣлить запятою пять цифръ съ лѣвой руки; отчего выйдетъ число 25882,73; потомъ найти въ таблицѣ числа 25883, 25882, ближайшее большее и ближайшее меньшее къ 25882,73, выписать ихъ логариѳмы, и замѣтить табличную разность D между сими логариѳмами:

log 25883=4,413.0146
log 25882=4,412.9978

D=168 десятимилліонныхъ.

Число 25882,73 заключается между 25803 и 25882, то и логариѳмъ его находится между 4,413.0146 и 4,412.9978; онъ менѣе перваго, но болѣе втораго. А чтобъ отыскать дробь, которую надобно придать къ меньшему логариѳму, и получить log.25882,73, надобно составить пропорцію по тому свойству (**253**), что *разности между числами* (если онѣ малы) *пропорціональны разностямъ между ихъ логариѳмами*. Но разности:

25883—25882=1,
25882,73—25822=0,73,
log 25883—log 25882=D=168; назовемъ неизвѣстную разность log 25882,73—log 25882=$d$. Эта послѣдняя разность найдется изъ пропорціи:

1 : 0,73=D : $d$=168 : $d$; откуда
$d$=168.0,73=122,64, или, приближенно,
=123 десятимилліонныхъ.

Придавъ 123 къ логариѳму 4,412.9978 ближайшаго меньшаго числа, получится:
log 25882,73=4,413.0101; и наконецъ,
log 2588273=6,413.0101.

**261.** Таблицы Каллета и Вега облегчаютъ вычисленіе D и $d$. Въ нихъ, въ послѣдней вертикальной колоннѣ, подъ знакомъ *diff.* показана табличная разность D=168 между послѣдовательными логариѳмами. Подъ нею находятся двѣ малыя вертикальныя графы, изъ коихъ въ первой цифры 1, 2, 3,.... 9 означаютъ одну десятую, двѣ десятыхъ, три десятыхъ, и т. д. единицы, а во второй — разности имъ пропорціональныя, которыя надобно придавать къ ближайшому меньшему логариѳму, если данное число содержитъ шесть цифръ или болѣе. Такимъ образомъ, чтобы получить логариѳмъ числа 25882,73, я ищу логариѳмъ ближайшаго меньшаго числа

$$\log 25882=4,412.9978;$$

потомъ, въ колоннѣ diff. нахожу, что для 7 десятыхъ соотвѣтствуетъ приращеніе логариѳма $118=168\times0,7$, для 3 сотыхъ — приращеніе $5,0=1.68\times0,03$, а для 0,73 сотыхъ оно $=118+5=123$ десятимилліонныхъ, которое и надобно придать къ 4,412,9978; получится:

$$\log 25882,73=4,413.0101,$$

и слѣдовательно,

$$\log 2588273=6,413.0101.$$

**262.** *Логариѳмы дробей.*—Если дана обыкновенная дробь, напр. $\frac{5}{167}$, то надобно взять логариѳмъ ея числителя, и вычесть изъ него логариѳмъ знаменателя, или, лучше, придать къ нему дополненіе логариѳма знаменателя до 10:

$$\log\frac{5}{167}=\log 5-\log 167$$
$$=0,698.97000-2,222.71647;$$

логариѳмъ получится отрицательный. Но тутъ всегда лучше дѣлать одну характеристику отрицательною, бравъ дополненіе вычитаемаго логариѳма до 10, а именно *):

$$\log\frac{5}{167}=0,698.97000+10-2,222.71647-10,\text{ или}$$
$$=0,698.97000+7,777.28353-10$$
$$=8,476,25353-10=\bar{2},476.25353.$$

*Примѣчаніе.* Если бы этотъ логариѳмъ понадобилось раздѣлить еще на 7, то есть, получить

---

*) Можно, если угодно, употребить и вычитаніе логариѳма знаменателя изъ логариѳма числителя; только надобно напередъ придать къ характеристикѣ логариѳма числителя столько единицъ, чтобы онъ сдѣлался болѣе логариѳма знаменателя, но за то столько же единицъ поставить съ знакомъ минусъ, и потомъ вычитать. Напримѣръ: найти $\log\frac{2}{3}$, $\log\frac{8}{9243}$:

$$\log 2=0,301.0300=1,301.0300-1$$
$$\log 3=0,477.1212=0,477.1212$$
$$\log\frac{2}{3}=0,823.9088-1$$
$$\log 8=0,903\ 0900=4,903\ 0900-4$$
$$\log 9243=3,965.8130=3,965.8130$$
$$\log\frac{8}{9243}=0,937.2770-4$$

Но, при вычисленіяхъ по логариѳмамъ, сложеніе предпочитается вычитанію, какъ по большей простотѣ, такъ и для единообразія.

$$\frac{1}{7}\log\frac{5}{167}=\frac{8,476.25353-10}{7},$$

то непремѣнно надобно измѣнить характеристику 8 и вычитаемое 10, такъ чтобы это послѣднее раздѣлилось на 7 безъ остатка.

Въ нашемъ примѣрѣ довольно для этого отнять по 3 отъ 8 и 10, и выйдетъ:

$$\frac{1}{7}\log\frac{5}{167}=\frac{5,476.25353-7}{7}$$

$$=0,782.32197-1.$$

Положимъ теперь, что надобно *найти логариѳмъ десятичной дроби*, напримѣръ: 0,00437582.

Эта дробь $0,00437582=\frac{437582}{100000000}$;

$$\text{а }\log\frac{437582}{100000000}=\log 437582-8.$$

Слѣдовательно, *надобно у десятичной дроби отнять запятую, найти логариѳмъ цѣлаго числа, какое получится, и изъ него вычесть столько единицъ, сколько было всѣхъ десятичныхъ знаковъ.*

Чтобъ отыскать log 437582, беру только log 43748,2; нахожу въ таблицахъ ближайшій меньшій логариѳмъ

$$\log 43758\ =4,641.0575$$

придаю $0,2\ldots\ldots\ldots\ldots20=d$, и получаю

$$\log 43758,2=4,641.0595;\text{ посему}$$

$$\log 437582=5,641.0595,\text{ и наконецъ}$$

$$\log 0,00437582=5,641.0595-8$$

$$=\bar{3},641.0595.$$

**263.** *Вопросъ обратный.* — Найти число, соотвѣтственное данному логариѳму.

1) *Когда характеристика положительная.* — Не обращая вниманія на характеристику, надобно искать данный логариѳмъ между логариѳмами чиселъ о пяти цифрахъ: его три первыя цифры искать въ вертикальной колоннѣ подъ цифрою 0, а четыре послѣднія въ ближайшихъ строкахъ между числами, стоящими въ колоннахъ подъ цифрами 0, 1, 2, 3,.... 9. Быть можетъ, что сыщется весь логариѳмъ въ таблицѣ; тогда тотчасъ найдется и число ему соотвѣтственное: его десятки, сотни, тысячи, и проч. будутъ находиться въ колоннѣ подъ литерою N въ той горизонтальной строкѣ, въ которой стоятъ его четыре послѣднія цифры, а единицы — надъ вертикальною колонною; въ которой находятся эти послѣднія цифры. Тогда останется только отдѣлить въ немъ столько цифръ для цѣлаго, сколько того требуетъ характеристика даннаго логариѳма.

Положимъ, что данъ логариѳмъ

1,735.2794;

этотъ логариѳмъ я нахожу весь въ таблицахъ, и именно:

$$4,735.2794 = \log 54360;$$

посему, $1,735.2794 = \log 54,360$.

И такъ, искомое число $= 54,36$.

Рѣдко однако же случается, чтобы данный логариѳмъ находился весь въ таблицахъ: тогда надобно искать, между какими смежными логариѳмами онъ заключается; его число будетъ заключаться между числами этихъ логариѳмовъ, и найдется, если *къ ближайшему меньшему числу придать разность между даннымъ и ближайшимъ меньшимъ логариѳмами, раздѣленную на табличную разность логариѳмовъ ближайшаго большаго и ближайшаго меньшаго*, какъ видно изъ слѣдующаго примѣра:

Данъ $\log N = 3,412.3687$, найти число $N$.

Не обращая вниманія на характеристику, я ищу десятичную часть логариѳма между логариѳмами, соотвѣтственными *числамъ о пяти цифрахъ*, и нахожу что мантисса даннаго логариѳма заключается между

$$\begin{array}{rlr} 412.3765, & \text{при нихъ числа} & 25845 \\ 412.3597 & & 25844 \\ \hline D = 168 & & 1 \end{array}$$

Беру разность $d = 90$ между логариѳмомъ даннымъ и ближайшимъ меньшимъ, и составляю пропорцію:

$$168 : 90 = 1 : \delta, \text{ откуда}$$

$$\delta = \frac{90}{168} = 0,54.$$

Придаю эту дробь къ числу 25844 ближайшему меньшему, и нахожу 25844,54. А какъ данный логариѳмъ имѣетъ характеристику 3, то искомое число будетъ

$$N = 2584,454.$$

Табличная разность и пропорціональныя числа, помѣщенныя въ таблицахъ Каллета подъ знакомъ diff., облегчаютъ вычисленіе прибавочной дроби $\delta$ къ ближайшему меньшему числу, слѣдующимъ образомъ: нашедши разность $d = 90$ между логариѳмомъ даннымъ и ближайшимъ меньшимъ, я ищу ее во второй малой графѣ въ колоннѣ diff., и тамъ нахожу ближайшее меньшее число 84, соотвѣтственное 5 десятымъ; а разность $90 - 84 = 6$ близка къ 6,7, чему соотвѣтствуетъ 4 сотыхъ. Придавъ $0,5 + 0,04 = 0,54$ къ ближайшему меньшему цѣлому числу 25844, найдется 25844,54. А какъ характеристика даннаго логариѳма $= 3$, то искомое число

$$N = 2584,454.$$

2) Если у даннаго логариѳма *характеристика отрицательная*, то соотвѣтственное число будетъ нѣкоторою правильною *дробью*. Чтобы найти эту

дробь, надобно отбросить характеристику, поставивъ нуль на ея мѣсто, и этому логариѳму отыскать соотвѣтственное число; потомъ въ этомъ числѣ *перенесть запятую влѣво на столько знаковъ, сколько находилось единицъ въ отрицательной характеристикѣ;* то и получится число, соотвѣтственное данному логариѳму.

*Примѣръ.* Данъ логариѳмъ $\overline{3},413.6305=\log N$; найти его число N.

Откинувъ его характеристику $\overline{3}$, или лучше, написавъ $\overline{3},413.6305=$ $=0,413.6305-3$, ищу число, соотвѣтственное 0,413.6305.

Этого логариѳма нѣтъ въ таблицахъ; посему беру логариѳмъ ближайшій меньшій

0,413.6182, при немъ число 25919

и разность $d=123$ между этимъ логариѳмомъ и даннымъ. Ищу эту разность въ колоннѣ подъ знакомъ diff. во второй малой графѣ; нахожу число 118 ближайшее меньшее, соотвѣтственное приращенію 7 десятымъ; остатокъ $123-118=5,0$ соотвѣтствуетъ приращенію 3 сотымъ. Наконецъ, придаю сумму сихъ приращеній $0,7+0,03=0,73$ къ ближайшему меньшему числу 25919, что составитъ 25919,73. Слѣдовательно,

$$0,413.6305=\log 2,591973,$$

$$\text{а}\ \overline{3},413.6305=\log 2,591973-\log 1000$$

$$=\log\frac{2,591973}{1000}=\log.\ 0,002591973.$$

И такъ, искомая дробь $N=0,002591973$.

**261.** Въ заключеніе, разрѣшимъ вопросъ, какъ *найти основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ.*

Пусть это основаніе $=e$; основаніе обыкновенныхъ логариѳмовъ $=10$. Составимъ уравненіе

$$e^x=10;$$

возмемъ его логариѳмъ по таблицамъ Непера,

$$x=\text{l\`og}\ 10=2,302.5851,$$

и логариѳмъ $x\log e=\log 10=1$, по таблицамъ Бригга.

Отсюда найдется:

$$\log e=\frac{1}{x}=\frac{1}{2,3025851}=0,4342945....$$

Остается теперь найти число $e$, соотвѣтственное найденному логариѳму. По таблицамъ находимъ ближайшій меньшій логариѳмъ 0,4342814, которому соотвѣтствуетъ число 27182. Разность между этимъ логариѳмомъ и даннымъ $=131=128+3$. Въ колоннѣ diff. находимъ, что для 128 соотвѣтствуетъ прибавокъ 0,8 къ числу 27182, а для 3 прибавокъ 0,018. Посему, искомое число $e$, то есть, основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ

$$=2,7182818.....$$

вѣрное въ 7 десятичныхъ.

### ПРИМѢНЕНІЕ ЛОГАРИѲМОВЪ КЪ АРИѲМЕТИЧЕСКИМЪ ИСЧИСЛЕНІЯМЪ.

**265.** За исключеніемъ сложенія и вычитанія, логариѳмы употребляются съ величайшею пользою для скораго исполненія всякихъ другихъ ариѳметическихъ дѣйствій, какъ бы онѣ сложны ни были; потому что, съ помощію логариѳмовъ, умноженіе приводится къ сложенію логариѳмовъ, дѣленіе къ вычитанію, возвышеніе въ степени къ простому умноженію, а извлеченіе корней къ дѣленію (**216**).

A. *Умноженіе и дѣленіе.* — Положимъ, что надобно найти произведеніе

$$x=\frac{389}{1748}\times\frac{2456}{3725}.$$

Возмемъ логариѳмъ этого произведенія:

$$\log x=\log 389+\log 2456+\text{доп.}\log 1748+\text{доп.}\log 3725-20.$$

$$\begin{array}{r} \log 389=2{,}589.9496 \\ \log 2456=3{,}390.2284 \\ \text{доп.}\log 1748=6{,}757.4586 \\ \text{доп.}\log 3725=6{,}428.8737 \\ \hline 19{,}166.5103 \end{array}$$

$$\text{Посему }\log x=19{,}166.5103-20$$
$$=0{,}166.5103-1$$

Отыщемъ число этому логариѳму. Въ таблицахъ найдется ближайшій меньшій логариѳмъ 0,166.4893=log 1,4672; разность табличная D=296, а разность между этимъ логариѳмомъ и даннымъ =210. Слѣдовательно, прибавокъ къ числу 1,4672 будетъ

$$\delta=\frac{210}{296}=0{,}7.$$

Это же мы нашли бы въ колоннѣ *diff.* во второй малой графѣ, подъ табличною разностью 296, гдѣ находится число 207, весьма близкое къ 210, и которому соотвѣтствуетъ прибавочное число 7 десятыхъ.

И такъ, $\log x=\log 1{,}46727-\log 10$
$=\log 0{,}146727$,

и требуемое произведеніе $x=0{,}146727$, вѣрное только въ этихъ десятичныхъ.

*Примѣры:*

$$\frac{0{,}042837}{11{,}799}=\frac{42{,}837}{11799}=0{,}003630562;$$

$$\frac{356{,}28.41{,}7145}{2160{,}75}=0{,}6878185;$$

$$\frac{42{,}6.\ 1{,}531}{0{,}629.0{,}0359}=\frac{426.153{,}1}{6{,}29.\ 3{,}59}=2888{,}283.$$

B. *Возвышеніе въ степени.*—Оно производится по формулѣ

$$\log a^n=n\log a.$$

*Примѣръ.* Найти приближенно пятую степень числа 3,567. Положимъ

$x=(3{,}567)^5$, и возмемъ

$$\log x=5\log 3{,}567.$$

$$\log 3{,}567=0{,}552.3031$$

$$5\log 3{,}567=2{,}761.5155=\log x$$

Въ таблицѣ находимъ $2{,}761.5144=\log 577{,}45$

$$\overline{\phantom{2{,}761.5144}}$$
$$d=11$$

Таблич. разность $D=76$; прибавокъ къ ближайшему меньшему числу $=\frac{11}{76}=0{,}14$. Слѣдовательно, искомое число

$$x=3{,}567^5=577{,}4514....$$

*Примѣръ.* Найти $x=0{,}05754^{\,0,7}$.

$$\log x=\frac{7}{10}(3{,}759.9699-5)$$
$$=\frac{7}{10}(8{,}759.9699-10)$$
$$=7(0{,}875.99699-1)$$
$$=6{,}131.9789-7$$
$$=0{,}131.9789-1.$$

Этому найдется число $x=0{,}0135123$.

С. *Извлеченіе корней.* — Оно дѣлается по формулѣ

$$\log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}.\log a.$$

*Примѣръ.* Найти $x=\sqrt[5]{375{,}743}$.

$$\log x=\frac{1}{5}.\log 375{,}743.$$

Въ таблицахъ Каллета нахожу

$$\log 375.74=2{,}574.8874.$$

Табличная разность $D=116$, разность чисел $d=0{,}3$, которой соотвѣтствуетъ пропорціональный прибавокъ $116.0{,}3=35$; посему,

$$\begin{array}{r}2{,}574.8874\\ 35\\ \hline 2{,}574.8909\end{array}=\log 375{,}743.$$

$$\log x=\frac{1}{5}.\log 375{,}743=\frac{1}{5}.\,2{,}574{,}8909$$
$$=0{,}514{,}9982;$$

и найдется $x=3{,}27339...$

*Примѣръ.* Вычислить $x=15\sqrt[5]{\left(\frac{3}{3575}\right)^3}$.

$$\log x=\log 15+\frac{3}{5}(\log 3+\text{доп. }\log 3575-10).$$

Сначала вычислимъ послѣдній членъ:

$$\left.\begin{array}{r} \log 3 = 0,477.1213 \\ \text{доп.}\ \log 3575 = 6,446.7240 \end{array}\right\} -10$$

$$\begin{array}{r} 6,923.8453 - 10 \\ \times 3 \\ \hline 20,771.5359 - 30,\ \text{или} \\ 0,771,5359 - 10 \end{array}$$

$$\tfrac{1}{5}\,(0,771.5359-10) = 0,154.3072 - 2;$$

сюда придадимъ $\log 15 = 1,176.0913$

$$\log x = 0.330.3985 - 1$$

въ таблицахъ нахожу $0,330.3935 = \log 2,1399$

$$\left.\begin{array}{r} d = 50 \\ D = 203 \end{array}\right| \frac{d}{D} = 0,25;$$

посему, $x = 0,2139925.$

*Примѣры:*

$$1)\ \log\sqrt[5]{\frac{4}{9}} = \frac{0,647.8175-1}{5} = \frac{4,647.8175-5}{5} = 0,929.\ 5635-1,$$

найдется

$$\sqrt[5]{\frac{4}{9}} = 0,850283.$$

$$2)\ \log\sqrt[35]{\frac{803}{91056}} = \frac{0,9454076-3}{35} = \frac{32,9454076-35}{35}$$

$$= 0,941.2973-1.$$

Этому соотвѣтствуетъ число $0,873569.$

$$3)\ \sqrt[5]{\frac{0,74}{\sqrt[3]{9}}} = 0,8132616;$$

$$4)\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{4\sqrt{14,73625}} = 1,242761;$$

126

$$5)\ \frac{\sqrt[3]{\overset{26}{\cancel{169}}\sqrt[5]{8135,724}}}{\sqrt{2}} = 6,461020.$$

**266.** Мантисса у всякаго логариѳма, вообще, есть нѣкоторая несоизмѣримая дробь, имѣющая безчисленное множество десятичныхъ. Въ логариѳмическихъ же таблицахъ это число десятичныхъ ограничено. Такъ, въ таблицахъ Каллета есть обыкновенные и Неперовы логариѳмы чиселъ отъ 1 до 1097, имѣющіе 61 десятичныхъ, и логариѳмы чиселъ отъ 1 до 1200 о двадцати десятичныхъ; но самые обширные и наиболѣе употребительные логариѳмы обыкновенные чиселъ отъ 1 до 108000 съ семью десятичными. Осьмая же десятичная со всѣми прочими, за малостію, отброшена; только если она была 5 или болѣе, то седьмая десятичная увеличена единицею своего разряда. Слѣдовательно, была ли просто отброшена 8-я десятичная, если она $<5$, или при этомъ увеличена 7-я единицею, въ обоихъ случаяхъ сдѣлана погрѣшность, которой высшій предѣлъ $=\pm 0,00000005$. Эта погрѣшность имѣетъ вліяніе только на седьмую цифру числа, соотвѣтственнаго логариѳму, и не болѣе. Но она можетъ сдѣлаться гораздо большею: 1) *отъ сложенія нѣсколькихъ логариѳмовъ*. Напримѣръ, если сложить 10 логариѳмовъ, то погрѣшность перейдетъ на шестую десятичную, и, въ самомъ невыгодномъ случаѣ, можетъ сдѣлаться равною 0,000001; а погрѣшность въ числѣ начнется съ шестой или седьмой цифры. 2) *Отъ помноженія логариѳма на большія числа*. Такимъ образомъ, отъ помноженія на 100, погрѣшность въ логариѳмѣ будетъ ощутительна въ пятой десятичной, а въ числѣ она начнется съ пятой или шестой цифры.

Болѣе точные логариѳмы можно брать изъ таблицы съ 20-ю десятичными; но все же нельзя изъ таблицъ получить числа вѣрнаго даже только съ 8-ю цифрами. Для примѣра, возвысимъ число 2 въ 64-ю степень съ помощію логариѳмовъ:

$$\log 2^{64}=64 \log 2=64\times 0,3010300$$
$$19,265.9200.$$

Этому логариѳму соотвѣтствуетъ число

$$2^{64}=18446.75000.00000.00000,$$

въ которомъ погрѣшность начинается съ седьмой цифры.

Взявши логариѳмъ съ девятью десятичными:

$$\log 2=0,301029995,$$
$$64 \log 2=19,2059197,$$

мы получимъ число 18446,74000.00000.00000, въ которомъ вѣрны всѣ семь цифръ; мѣста же недостающихъ цифръ заняты нулями.

**267.** Есть однакоже довольно удобный способъ *вычислять* логариѳмъ какого ни есть числа $a$ до многихъ десятичныхъ. Для этого въ Каллетовыхъ таблицахъ находятся таблицы I, II и III логариѳмовъ съ 20-ю десятичными для чиселъ, тамъ показанныхъ; надобно только умѣть логариѳмъ всякаго даннаго числа выразить посредствомъ какого нибудь изъ этихъ логариѳмовъ, и придать надлежащую поправку.

Возмемъ число $a$, котораго нѣтъ въ таблицахъ I, II и III, и которое не начинается первыми пятью цифрами, составляющими числа второй таблицы; отдѣлимъ пять цифръ у этого числа отъ лѣвой руки къ правой; это отдѣленное число раздѣлимъ на 1,01, до трехъ десятичныхъ въ частномъ числѣ, и на это частное $q$ раздѣлимъ данное число $a$. Пусть

$$\frac{a}{q}=n,\ \log a=\log q+\log n.$$

Такимъ образомъ искомый логариѳмъ отъ $a$ выразится посредствомъ $\log q$, находящагося въ таблицѣ I, и $\log n$, который надобно вычислить. Для этого, изъ таблицы II возмемъ число $n+z$ ближайшее большее къ $n$; возмемъ ихъ сумму и разность:

$$n+z+n=2n+z,\ n+z-n=z,$$

и въ ряду (**250**)

$$\log(n+z)=\log n+2\mathrm{M}[\frac{z}{2n+z}+\frac{z^3}{3(2n+z)^3}+\ldots.],$$

или, $\log(n+z)=\log n+2\mathrm{MS}$, полагая

$$\frac{z}{2n+z}+\frac{z^3}{3(2n+z)^3}+\ldots.=\mathrm{S},$$

вычислимъ S, ограничиваясь однимъ, или только двумя членами: тогда найдется:

$$\log n=\log(n+z)-2\mathrm{MS},\text{ и слѣдовательно}$$

$$\log a=\log q+\log(n+z)-2\mathrm{MS}.$$

Для облегченія помноженій модуля M на 2S, у Каллета находится табличка (почти предъ самымъ началомъ таблицъ логариѳмовъ синусовъ, косинусовъ и проч.) подъ заглавіемъ: *Tablè pour convertir les logarithmes hyperboliques en logarithmes vulgaires,* въ которой помѣщены всѣ произведенія модуля

$$\mathrm{M}=0,43429.44819.03251.82765$$

на цѣлыя однозначныя и двузначныя числа.

*Примѣръ.* Найти логариѳмъ числа

$$a=3,14159.26535.89793.23846\ldots.,$$

точный въ 15-ти десятичныхъ.

Беру 3,1415 и дѣлю на 1,01; получаю частное $q=3,11$. На это частное дѣлю данное число:

$$\frac{a}{3,11}=1,01015.84095.14402.97057=n;$$

въ таблицѣ II нахожу ближайшее большее число $1,01016=n+z$. Слѣдовательно,

$$2n+z=2,02031.84095.14402.97057,$$

$$z=0,00000.15904.85597.02943,$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{z}{2n+z}=0,00000.07872.45015.21110,3\\ \dfrac{z^3}{3(2n+z)^3}=0,00000.00000.00000.00016,3\end{array}\right\}=\mathrm{S}$$

$$\mathrm{S}=0,00000.07872.45015.21126,6$$

$$2\mathrm{S}=0,00000,15744.90030.42253.$$

Этимъ числомъ помножаю модуль M, ограничиваясь 15-ю десятичными, и нахожу

$$2\mathrm{MS}=0,00000.06837.92331.6\ldots.$$

Изъ формулы $\log\,(n+z)=\log\,n+2\mathrm{MS}$ получаю

$$\log\,n=\log\,(n+z)-2\mathrm{MS};$$

а изъ $\frac{a}{3{,}11}=n$, имѣю $\log\,a=\log\,3{,}11+\log\,n$:

$$\log\,3{,}11=0{,}49276.03890.26837, \text{ (изъ таб. I)},$$
$$\log\,(n+z)=0{,}00439.01674.59628, \text{ (изъ таб II)}$$
$$\overline{\phantom{2\mathrm{MS}=}0{,}49715.05564.86465}$$
$$2\mathrm{MS}=0{,}00000.06837.92332$$
$$\overline{\phantom{2\mathrm{MS}=}0{,}49714.98726.94133}$$

Таковъ логариомъ даннаго числа, точный въ 15-ти десятичныхъ.

Розысканіе логариома будетъ короче, если его первыя пять или шесть цифръ составляютъ число, находимое въ таб. II; ибо тогда $q=1$, $\log q=0$, $\log a=\log n$. Слѣдовательно, надобно только будетъ найти къ числу $a=n$, въ таб. II, число $n+z$ ближайшее большее, вычислить S, потомъ 2MS, и проч.

**268.** Есть также способъ находить и весьма многозначное число $x$, соотвѣтственное данному логариому. Вотъ въ чемъ онъ заключается:

Если первыя пять десятичныхъ даннаго $\log x$ не находятся между 00432 и 00509, чѣмъ начинаются мантиссы всѣхъ логариомовъ таблицы II, то надобно изъ этого логариома вычесть первыя пять цифръ 0,00432 логариома числа 1,01; къ остатку $\log x-0{,}00432$ пріискать ближайшій меньшій $\log(x-z)$ въ таб. II или I, и вычесть его изъ даннаго $\log x$.

Пусть $\log x-\log(x-z)=\mathrm{R}$.

Къ этому остатку пріискать въ таб. II логариомъ $\log(x-z-z')$ ближайшій меньшій, вычесть изъ него, и положить

$$\log x-\log(x-z)-\log(x-z-z')=\log n,$$

что составитъ: $\log x=\log(x-z)(x-z-z')n$,

слѣдовательно, $x=(x-z)(x-z-z')n$.

Послѣ этого, надобно только найти $n$, что уже не трудно сдѣлать по формулѣ

$$n=1+\frac{\log n}{\mathrm{M}}+\frac{1}{1.2}\cdot\left(\frac{\log n}{\mathrm{M}'}\right)^2+\frac{1}{1.2.3}\cdot\left(\frac{\log n}{\mathrm{M}}\right)^3+\ldots,$$

которую мы выведемъ впослѣдствіи; а теперь возмемъ ее безъ вывода только для того, чтобы послѣ не возвращаться къ предмету, познаніе котораго теперь же особенно полезно и кстати.

*Примѣръ.* Пусть данъ

$$\log x=0{,}49714.98726.94133\ldots$$
$$-0{,}00432$$
$$\overline{0{,}49282.98726.94133\ldots}$$

Изъ таб. II нахожу ближайшій меньшій логариомъ:

$$\log\,3{,}11=0{,}49276.03890.26837.5055;$$

беру разность

$$\log x - \log 3{,}11 = 0{,}00438.94836.67926\ldots$$

Отсюда вычитаю ближайшій меньшій логариѳмъ, взятый изъ таб. II, именно:

$$\log 1{,}01015 = 0{,}00438.58681.74054{,}309,$$

и получаю остатокъ

$$\log x - \log.3{,}11 - \log 1{,}01015 = 0{,}00000.36154.93243{,}039\ldots = \log n.$$

Отсюда: $\log x = \log(3{,}11 \times 1{,}01015 \times n)$, и

$$x = 3{,}11 \times 1{,}01015 \times n.$$

Раздѣливши $\log n$ на модуль $M = 0{,}43429\ldots.$ (что дѣлать легко при помощи другой таблички у Каллета, подъ заглавіемъ: *Table pour convertir les logarithmes vulgaires en log. hyperboliques*), получимъ:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\log n}{M} &= 1{,}00000.83249.80842.94014.4 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\log n}{M}\right)^2 &= 0{,}00000.00000.34652.65301{,}5 \\ \frac{1}{2.3}\left(\frac{\log n}{M}\right)^3 &= 0{,}00000.00000.00000.09616.1 \\ \hline n &= 1{,}00000.83250.15495.68932. \end{aligned}$$

Взявъ произведеніе $x = 3{,}11 \times 1{,}01015 \times n$, найдется искомое число

$$x = 3{,}14159.26535.89793.23846\ldots.$$

точное въ 20-ти десятичныхъ.

**269.** Гораздо проще можно найти число, соотвѣтственное такому логариѳму, котораго первыя пять цифръ находятся въ таб. II между 00432 и 00509. Изъ логариѳма такого числа $x$ надобно вычесть логариѳмъ числа ближайшаго меньшаго $x - z$, и остатокъ означить чрезъ $\log n$:

$$\log x - \log(x - z) = \log n; \text{ откуда}$$

$$\log x = \log(x - z)n, \text{ и } x = (x - z)n.$$

Пусть, $\log x = 5{,}00446.59127.70547.507\ldots$

$$\begin{aligned} \log(x - z) = \log 101033 &= 5{,}00446.32488.03359.618 \\ \hline \log x - \log(x + z) &= 0{,}00000.26639.67187.889 = \log n \end{aligned}$$

$$x = 101033.n$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\log n}{M} &= 1{,}00000.61740.11133 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\log n}{M}\right)^2 &= 0{,}00000.00000.18813 \\ \hline & 1{,}00000.61740.29946\ldots. = n; \end{aligned}$$

посему, $x = 101033 \times 1{,}000006174029946$

$$= 101033{,}619739447\ldots.,$$

число, точное во всѣхъ 15-ти цифрахъ.

### **230.** *Примѣненіе логариѳмовъ къ вычисленію алгебрическихъ формулъ.*

1. Когда формула данная разлагается на простѣйшіе одночленные или многочленные множители. Примѣръ:

$$x = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)3a}}{\sqrt[3]{(p+q)b^2}}.$$

Замѣчая, что $a^2+b^2=(a+b)(a-b)$, легко найдется

$$\log x = \log \sqrt{(a^2-b^2)3a} - \log \sqrt[3]{(p+q)b^2} =$$

$$= \frac{\log(a+b)+\log(a-b)+\log 3+\log a}{2} - \frac{\log(p+q)-2\log b}{3}.$$

2. Когда формула не разлагается на простѣйшіе одночленные и многочленные множители и дѣлители, какъ наприм.

$$x = \frac{a^3b+c^4}{3p^2b-4q^2c};$$

тогда въ числителѣ и знаменателѣ надобно вынесть внѣ скобокъ такіе одночленные множители, чтобы сдѣлать внутри скобокъ однобуквенными хотя по одному члену. Такъ, можно взять

$$x = \frac{a^3\left(b+\frac{c^4}{a^3}\right)}{p^2\left(3b-\frac{4q^2c}{p^2}\right)};$$

потомъ для краткости положить $\frac{c^4}{a^3} = m$, $\frac{4q^2c}{p^2} = n$; составится

$$x = \frac{a^3}{p^2} \times \frac{b+m}{3b-n}, \text{ и}$$

$$\log x = 3 \log a + \log(b+m) - 2 \log p - \log(3b-n).$$

Что касается до $m$ и $n$, то ихъ надобно напередъ вычислить каждое особо изъ условныхъ уравненій, то есть:

$$\log m = 4\log c - 3 \log a,$$

$$\log n = \log 4 + 2 \log q + \log c - 2 \log p.$$

Отсюда найдутся числа $m$, $n$; а послѣ того уже легко найти $\log x$, и самое $x$. Впрочемъ, всѣ формулы, состоящія изъ алгебрической суммы членовъ, неразложимыя на простѣйшіе множители и дѣлители, вообще, считаются *неудобными для вычисленія по логариѳмамъ*, потому что вычисленіе становится продолжительнымъ. Оттого, гдѣ можно, стараются замѣнить ихъ другими, болѣе къ тому способными.

### **231.** *Примѣненіе къ рѣшенію неопредѣленно-степенныхъ уравненій.*

Неопредѣленно-степенныя уравненія бываютъ различныхъ порядковъ и степеней. Такъ:

$a^x = p$ уравненіе первой степени и перваго порядка,

$a^{b^x} = q$ – – – втораго порядка,

$$\left.\begin{array}{l} a^{x^2} = r \ldots\ldots \\ a^{x^2+bx+c} = s \end{array}\right\} \text{уравненія второй степени.}$$

Уравненія этихъ порядковъ и степеней очень легко рѣшаются при помощи логариомовъ.

1) Для рѣшенія $a_x=p$, announced возмемъ $x\log a=\log p$;

$$\text{отсюда } x=\frac{\log p}{\log a}.$$

2) Для рѣшенія $a^{x^2}=r$, возмемъ также $x^2\log a=\log r$; откуда

$$x=\pm\sqrt{\frac{\log r}{\log a}}.$$

3) Для $a^{x^2+bx+c}=s$, находимъ

$$x^2+bx+c=\frac{\log s}{\log a};\text{ откуда}$$

$$x=-\frac{1}{2}b\pm\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{\log s}{\log a}-c}.$$

4) Наконецъ, изъ $a^{b^x}=q$, получимъ $b^x\log a=\log q$; возмемъ вторично логариомъ:

$$x\log b+\log.\log a=\log\log q;\text{ а отсюда}$$

$$x=\frac{\log\log q-\log\log a}{\log b}.$$

*Примѣры для упражненія*:

$$a^{mx+n}b^{px+q}=h;\text{ отсюда } x=\frac{\log h-n\log a-q\log b}{m\log a+p\log b}.$$

$$a^{x-2}=\sqrt[x]{\frac{b^4}{a^6}};\text{ отсюда } x=1\pm2\sqrt{\frac{\log b-\log a}{\log a}}.$$

$$0{,}96^x=0{,}6382393;\qquad x=11.$$

$$25{,}5^r=\sqrt{25549.25614};\quad x=3{,}133902.$$

$$\sqrt{1{,}024}=\sqrt[x]{752{,}31}\qquad;\ x=558{,}5236.$$

$$3^{2x-1}.0{,}17^{2x}=3.0{,}25^{x-1};\qquad x=90{,}48.$$

**232.** Даны уравненія:

$$a^xb^yc^z=h,\ a_1^xb_1^yc_1^z=h_1,\ a_2^xb_2^yc_2^z=h_2,$$

найти $x$, $y$, $z$.

Для этого возмемъ логариомы уравненій:

$$x\log a+y\log b+z\log c=\log h,$$

$$x\log a_1+y\log b_1+z\log c_1=\log h_1,$$

$$x\log a_2+y\log b_2+z\log c_2=\log h_2.$$

Отсюда уже не трудно найти $x$, $y$, $z$, по извѣстнымъ намъ способамъ (**91**) рѣшенія трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными.

# ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

## О ПРОГРЕССІЯХЪ.

### А. Прогрессія ариѳметическая.

**273.** *Ариѳметическою* или *равноразностною прогрессіею* называется такой рядъ чиселъ, или членовъ вообще, въ которомъ всякія два смежныя члена имѣютъ *одну и ту же разность.*

Она бываетъ *возрастающею* или *убывающею*, смотря потому, возрастаютъ или убываютъ ея послѣдовательные члены. Въ прогрессіи возрастающей разность эта *положительная*, потому что въ ней каждый послѣдующій членъ составляется изъ члена предшествующаго, сложеннаго съ разностью; а въ прогрессіи убывающей разность *отрицательная*, потому что каждый ея членъ послѣдующій равенъ предшествующему безъ этой разности. Такимъ образомъ, рядъ

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots.$$

представляетъ прогрессію возрастающую, въ которой разность между послѣдовательными членами равна 2. А рядъ

$$25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1,$$

представляетъ прогрессію убывающую, въ которой разность между послѣдовательными членами $= -3$.

**274.** Когда хотятъ показать, что рядъ чиселъ составляетъ прогрессію ариѳметическую, то пишутъ эти числа въ одну строку, отдѣляютъ ихъ точками, и предъ рядомъ ставятъ знакъ $\div$. Наприм.

$$\div\ 1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13\ldots.,$$
$$\div\ 25.\ 22.\ 19.\ 16.\ 13.\ 10.\ 7.\ 4.\ 1,$$

или, вообще,

$$\div\ a.\ b.\ c.\ d.\ e\ldots\ldots k.\ l.$$

если члены $a$, $b$, $c$, $d$, $e$,..... $k$, $l$, составляютъ прогрессію ариѳметическую. Такая прогресія выговаривается: *$a$ безъ $b$ равно $b$ безъ $c$, равно $c$ безъ $d$, равно $d$ безъ $e$,* и проч., такъ что въ ней всякіе три члена, сряду взятые, составляютъ ариѳметическую пропорцію *).

---

*) О пропорціяхъ ариѳметической и геометрической достаточно излагается въ начальной Ариѳметикѣ; оттого онѣ и пропущены въ Алгебрѣ.

**235**. При общемъ разсмотрѣніи этой прогрессіи, мы всегда будемъ изображать ея члены буквами, какъ показано; будемъ означать всегда:

чрезъ $a$ первый членъ прогрессіи,
$l$ послѣдній ея членъ,
$n$ число всѣхъ ея членовъ,
$r$ разность между послѣдовательными членами,
$S$ сумма всѣхъ членовъ прогрессіи.

По этому, въ возрастающей прогрессіи

$\div a.\ b.\ c.\ d\ldots\ldots k.\ l$, будемъ имѣть:

$$b=a+r=a+r,$$
$$c=b+r=a+2r,$$
$$d=c+r=a+3r,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

гдѣ видно, что каждый членъ равенъ первому, сложенному съ разностью, помноженною на число предшествовавшихъ ему членовъ. Слѣдовательно, *послѣдній,* т. е. *n-й членъ* будетъ

$$1)\quad l=a+r(n-1).$$

Онъ въ убывающей прогрессіи будетъ $l=a-r(n-1)$.

Послѣдній членъ называется также *общимъ членомъ,* потому что служитъ для опредѣленія величины каждаго члена вообще. Для примѣра, положимъ, что надобно найти десятый членъ прогрессіи

$$\div 1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11\ldots.,$$

гдѣ $a=1$, $r=2$, $n=10$. Сдѣлавъ подстановленія въ $l=a+r(n-1)$, найдется $l=1+2(10-1)=19$. Таковъ десятый членъ этой прогрессіи.

**236.** Всякая возрастающая прогрессія, будучи написана въ обратномъ порядкѣ, превращается въ убывающую. Наприм.

$$\div\ 1.\ \ 3.\ \ 5.\ 7.\ 9.\ 11.\ 13.\ 15,$$
$$\div 15.\ 13.\ 11.\ 9.\ 7.\ \ 5.\ \ 3.\ \ 1.$$

Если эти двѣ прогрессіи сложить почленно, то получится рядъ равныхъ членовъ:

$$\div\ 16.\ 16.\ 16.\ 16\ldots..$$

И вообще, *въ ариѳметической прогрессіи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ двухъ какихъ угодно членовъ, равно отъ нихъ отстоящихъ.*

Потому что сумма крайнихъ $=a+l$,
второй членъ отъ начала $=a+r$
— — отъ конца $=l-r$
сумма $=a+l$;

$$\begin{array}{rl} \text{третій членъ отъ начала} & = a+2r \\ \text{—} \quad \text{—} \quad \text{отъ конца} & = l-2r \\ \hline \text{сумма} & = a+l, \end{array}$$

и такъ далѣе.

**237.** Найти сумму извѣстнаго числа членовъ прогрессіи

$$\div a.\ b.\ c.\ d. \dots .\ i.\ k.\ l,$$

гдѣ $a$ первый членъ, $l$ послѣдній, разность $r$, число членовъ $n$.

Означивъ эту сумму чрезъ S, она должна быть

$$S = a+b+c+d+\dots .+i+k+l, \text{ или}$$

$$S = l+k+i+\dots\dots .+c+b+a.$$

Сложимъ эти два ряда почленно

$$2S = (a+l)+(b+k)+(c+i)+\dots .+(k+b)+(l+a);$$

а какъ $a+l=b+k=c+i=\dots .$, а число членовъ $n$, то будетъ:

$$2S = n(a+l), \text{ откуда}$$

$$2) \dots .\ S = \frac{(a+l)}{2}.n$$

И такъ, *сумма членовъ ариѳметической прогрессіи равна полусуммѣ перваго члена съ послѣднимъ, умноженной на число членовъ*.

*Примѣръ*. Найти сумму 20-ти членовъ прогрессіи $\div 1.\ 4.\ 7.\ 10.\ 13 \dots .$, въ которой $a=1$, $r=3$, $n=20$.

Вопервыхъ, ищу послѣдній членъ

$$l = a+r(n-1) = 1+3(20-1) = 58;$$

а потомъ, $S = (\frac{1+58}{2})20 = 590$.

Такова сумма 20-ти членовъ этой прогрессіи.

**238.** Формулы $l=a+r(n-1)$, $S=(\frac{a+l}{2})n$, содержатъ въ себѣ пять количествъ: $a$, $l$, $r$, $n$, S, и служатъ для рѣшенія всѣхъ вопросовъ относительно прогрессіи ариѳметической, гдѣ, по даннымъ тремъ изъ этихъ количествъ, ищутся два остальныя. А чтобы рѣшенія были возможныя и прямыя, необходимо нужно, чтобы эти количества были *дѣйствительныя*, и сверхъ того, чтобы $n$ было цѣлое положительное. Такихъ вопросовъ *десять;* рѣшеніе ихъ вообще очень просто, а потому мы ограничимся только случаями болѣе сложными.

1. *Даны* $r$, $n$, S, *найти* $a$ *и* $l$.

Беремъ уравненія $l=a+r(n-1$, $S=(\frac{a+l}{2})n$;

$$\left.\begin{array}{r} \text{изъ перваго находимъ } l-a=r(n-1) \\ \text{изъ втораго } a+l=\frac{2S}{n} \end{array}\right\} \text{сложимъ}$$

$$2l = \frac{2S+nr(n-1)}{n};$$

отсюда $l=\frac{2S+nr(n-1)}{2n}$;

а если вычтемъ верхнее изъ нижняго, то получится:

$$2a=\frac{2S-nr(n-1)}{n}\text{, и}$$

$$a=\frac{2S-r(n-1)n}{2n}.$$

2. *Даны $l$, $n$, $S$, найти $a$, $r$.*

Изъ втораго уравненія имѣемъ $a+l=\frac{2S}{n}$, и

$$a=\frac{2S-ln}{n},$$

а изъ перваго уравненія: $r=\frac{l-a}{n-1}=\frac{2(nl-S)}{n(n-1)}$.

3. *Даны $a$, $r$, $S$, найти $l$, $n$.*

Изъ второй формулы получаемъ $n(a+l)=2S$; сюда внесемъ $l=a+r(n-1)$:

$$n(2a+nr-r)=2S\text{, или}$$

$$2an+n^2r-nr=2S\text{, или}$$

$$n^2+\frac{(2a-r)}{r}n=\frac{2S}{r}\text{; откуда}$$

$$n=\frac{r-2a\pm\sqrt{(r-2a)^2+8rS}}{2r}.$$

А послѣ сего найдется и $l=a+r(n-1)$.

4. *Даны $l$, $r$, $S$, найти $a$ и $n$.*

Изъ 1) беру $l=\frac{2S+nr(n-1)}{2n}$, и нахожу

$$n=\frac{r+2l\pm\sqrt{(r+2l)^2-8rS}}{2r},$$

а потомъ, $a=l+r(n-1)$.

**239.** Задача.—*Даны два числа $a$ и $l$, вставить между ними $m$ членовъ, которые бы, вмѣстѣ съ данными, составили ариѳметическую прогрессію.*

Здѣсь извѣстны члены: первый $a$, послѣдній $l$, и число $n$ всѣхъ членовъ, которое $=m+2$; надобно только найти разность $r$, которую тотчасъ получимъ изъ формулы $l=a+r(n-1)$:

$$r=\frac{l-a}{n-1}=\frac{l-a}{m+1}.$$

Отсюда заключаемъ, что если первый членъ $a$, то второй $=a+\frac{l-a}{m+1}$, третій $=a+\frac{2(l-a)}{m+1}$, и т. д.

*Примѣръ*. Вставить три члена между 1 и 2.

Тутъ $a=1$, $l=2$, $m=3$; посему

$$r=\frac{l-a}{m+1}=\frac{1}{4}.$$

Стало-быть, выйдетъ погрессія:

$$\div 1\,.\,1\tfrac{1}{4}\,.\,1\tfrac{2}{4}\,.\,1\tfrac{3}{4}\,.\,2.$$

**Задача.**—Работники нанялись вырыть колодезь, съ такимъ условіемъ, чтобы за первый аршинъ *глубины колодца было имъ заплачено 25 коп. серебромъ; за второй 25+10 коп. сер., за третій 25+20 коп. серебр., и т. д., прибавляя за каждый аршинъ углубленія все по 10 коп. серебр. По окончаніи работы они получили 16 руб. серебромъ за весь свой трудъ. Спрашивается, сколько аршинъ глубины они вырыли?*

Здѣсь платы за каждый аршинъ углубленія возрастаютъ въ прогрессіи

$$\div 25\,.\,35\,.\,45\ldots.,$$

въ которой даны $a=25$, $r=10$, и сумма $S=16$ руб. $=1600$ коп. серебр., выданная работникамъ; требуется найти число $n$ членовъ, то есть, число аршинъ глубины колодца, и послѣдній членъ $l$. Для этого имѣемъ формулы:

$$n=\frac{r-2a\pm\sqrt{(r-2a)^2+8rS}}{2r}, \text{ и}$$

$$l=a+r(n-1).$$

Сдѣлавъ подстановленіе, найдется

$n=16$ аршинъ, и

$l=175$ коп. серебромъ.

И такъ, глубина колодца была 16 аршинъ.

**Задача.** — Лѣсной участокъ, содержащій въ себѣ 50000 кубич. футовъ лѣснаго запасу съ $2^0_0$ годоваго прироста, назначается въ равномѣрную вырубку въ теченіе 10 лѣтъ, по равной части, т. е. по $\frac{50000}{10}=5000$ кубич. футовъ въ годъ; сюда надобно еще причислить годовой приростъ, $50000\times0{,}2=1000$, который уменьшается по мѣрѣ уменьшенія запаса: требуется найти весь 10-лѣтній приростъ и полную годовую вырубку лѣса.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Въ концѣ | 1-го | года | приростъ | 1000 | отъ | 50000 |
| – | 2-го | – | – | 900 | » | 45000 |
| – | 3-го | – | – | 800 | » | 40000 |
| – | 4-го | – | – | 700 | » | 35000 |
| – | 5-го | – | – | 600 | » | 30000 |
| – | 6-го | – | – | 500 | » | 25000 |
| – | 7-го | – | – | 400 | » | 20000 |
| – | 8-го | – | – | 300 | » | 15000 |
| – | 9-го | – | – | 200 | » | 10000 |
| – | 10-го | – | – | 100 | » | 5000 |
| – | 11-го | – | – | 0 | » | 0 |

Здѣсь годовые приросты составляютъ убывающую прогрессію. Хотя число членовъ ея 11, но, для исчисленія всего прироста, надобно взять только 10 членовъ, потому что вырубка производится не въ концѣ каждаго года, но въ его продолженіе, слѣдовательно, въ промежутки между 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4,...., а такихъ промежутковъ 10. Посему, сумма приростовъ

$$(1000+0)\frac{10}{2}=5000,$$

да всего лѣсу, безъ прироста, было 50000; стало-быть, вырублено будетъ всей массы дерева 55000 кубич. футовъ. Годовая вырубка $=\frac{55000}{10}=5500$ кубическихъ футовъ.

**Задача.** *Поденщикъ нанялся работать съ такимъ условіемъ, чтобы ему за первый день работы заплатили 1 копѣйку серебромъ, за второй 4 копѣйки, за третій 7 копѣекъ, и т. д. все увеличивая плату по 3 копѣйки серебромъ за каждый послѣдующій день. По прошествіи 26 дней, онъ кончилъ работу; спрашивается: сколько денегъ надобно ему выдать?*

Въ этой задачѣ также находится прогрессія

$$\div 1 . 4 . 7 . 10 \ldots.,$$

въ которой $a=1$, $n=26$, $r=3$. Посему

$$l=1+3(26-1)=76,$$

$$S=(1+76)\frac{26}{2}=1001 \text{ коп. сереб.}$$

Слѣдовательно, ему надобно заплатить почти ровно 10 руб. серебромъ.

### СУММОВАНІЕ СТЕПЕНЕЙ ЧЛЕНОВЪ ПРОГРЕССІИ АРИѲМЕТИЧЕСКОЙ.

**280.** Возмемъ ариѳметическую прогрессію

$$\div a.b.c.d.......l,$$

въ которой число членовъ $n$, разность $r$, послѣдній членъ

$$l=(a+r(n-1);$$

$$\text{и сумма } S=(\frac{a+l}{2})n;$$

возвысимъ всѣ ея члены въ $m$-ю степень, и постараемся найти ихъ сумму

$$S_m=a^m+b^m+c^m+d^m+\ldots.+l^m.$$

Мы знаемъ, что $b=a+r$, $c=b+r$, $d=c+r$,.... $l=k+r$; посему,

$$b^m=(a+r)^m=a^m+ma^{m-1}r+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}r^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}r^3+\ldots.$$

$$c^m=(b+r)^m=b^m+mb^{m-1}r+\frac{m(m-1)}{1.2}b^{m-2}r^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}b^{m-3}r^3+\ldots.$$

$$d^m=(c+r)^m=c^m+mc^{m-1}r+\frac{m(m-1)}{1.2}c^{m-2}r^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}c^{m-3}r^3+\ldots.$$

.............................................................................................

$$l^m=(k+r)^m=k^m+mk^{m-1}r+\frac{m(m-1)}{1.2}k^{m-2}r^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}k^{m-3}r^3+\ldots$$

Сложимъ всѣ сіи равенства, и, для краткости, назовемъ:

$$S_0=a^0+b^0+c^0+\ldots.+l^0=n,$$
$$S_1=a+b+c+\ldots.+l,$$
$$S_2=a^2+b^2+c^2+\ldots.+l^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{m-1}=a^{m-1}+b^{m-1}+c^{m-1}+\ldots.+l^{m-1},$$
$$S_m=a^m+b^m+c^m+\ldots+l^m;$$

то получится рядъ

$$l^m-a^m=mr(S_{m-1}-l^{m-1})+\frac{m(m-1)r^2}{1\,.\,2}(S_{m-2}-l^{m-2})+\frac{m(m-1)(m-2)r^3}{1\,.\,2\,.\,3}(S_{m-3}-l^{m-3})$$
$$+\ldots\ldots,$$

въ которомъ содержатся всѣ суммы отъ $S_{m-1}$ до $S_0$ включительно.

**281.** Посредствомъ этого ряда можно находить суммы всѣхъ степеней членовъ данной прогрессіи слѣдующимъ образомъ:

a) Возмемъ $m=1$; найдется:

$$l-a=r(S_0-l^0),\text{ откуда } S_0=\frac{l-a}{r}+1;$$

а какъ $l=a+r(n-1)$, откуда $l-a=r(n-1)$, то

$$S_0=\frac{r(n-1)+r}{r}=n.$$

b) Положимъ $m=2$; будемъ имѣть:

$$l^2-a^2=2r(S_1-l)+r^2(S_0-l^0);$$

отсюда найдемъ:

$$S_1-l=\frac{l^2-a^2}{2r}-\frac{r(l-a)}{2r}\text{; слѣдовательно,}$$
$$S_1=\frac{l^2-a^2}{2r}+\frac{r(l+a)}{2r}=\frac{(l+a)(l-a+r)}{2r};$$

но изъ $l=a+r(n-1)$ получается $l-a+r=rn$, то

$$S_1=\frac{(l+a)nr}{2r}=\frac{(a+l)n}{2}.$$

c) Полагая $m=3$, находимъ:

$$l^3-a^3=3r(S_2-l^2)+3r^2(S_1-l)+r^3(S_0-l^0),$$

откуда получится $S_2$ въ функціи отъ $S_1$ и $S_0$.

d) Для $m=4$, нашли бы:

$$l^4-a^4=4r(S_3-l^3)+6r^2(S_2-l^2)+4r^3(S_1-l)+r^4(S_0-l^0),$$

откуда $S_3$ опредѣлится посредствомъ $S_2$, $S_1$, $S_0$: и такъ далѣе.

Для примѣра, возмемъ прогрессію натуральныхъ чиселъ 1, 2, 3, 4, 5,....$n$, и поищемъ суммы квадратовъ, кубовъ,.... ея $n$ первыхъ членовъ.

Здѣсь $a=1$, $r=1$, $l=n$, $S_0=n$; посему,

1) $S_1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$.

2) $S_2 = n^2 + \frac{n^3-1}{3} - \frac{(n^2-n)}{2} - \frac{(n-1)}{3}$, или

$$S_2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

3) $S_3 = n^3 + \frac{n^4-1}{4} - \frac{(2n^3-3n^2+n)}{4} - 2\,\frac{(n^2-n)}{4} - \frac{(n-1)}{4}$, или

$$S_3 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (S_1)^2.$$

*Примѣръ.* $1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$.

**282.** *Суммованіе рядовъ чиселъ фигурныхъ.* — Такія числа получаются чрезъ сложеніе двухъ, трехъ, четырехъ, и т. д. членовъ ариѳметической прогрессіи, у которой первый членъ 1-ца, разность — цѣлое число. Изъ полученнаго ряда такимъ же образомъ составляется другой, а изъ этого третій, и т. д.

Возмемъ сперва прогрессію натуральныхъ чиселъ,

$$\div 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,9\ldots\ldots n.$$

Чрезъ постепенное сложеніе членовъ ея, получится *первый рядъ:*

1) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,....;

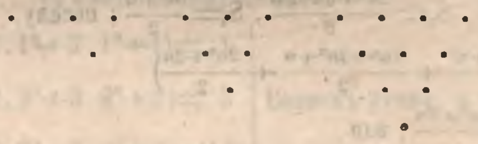
изъ этого составится *второй рядъ:*

2) 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84,....;

а отсюда *третій:*

3) 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210,....

Числа перваго ряда называются *треугольными;* потому что онѣ точно представляютъ намъ суммы равныхъ тѣлъ, напримѣръ ядеръ, расположенныхъ на плоскости въ видѣ треугольниковъ:



Числа втораго ряда называются *треугольными пирамидальными;* потому что онѣ представляютъ намъ суммы предыдущихъ слоевъ ядеръ, наложенныхъ одинъ на другой, и составляющихъ треугольныя пирамиды.

Сумма ряда, $\div 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\ldots.n$, есть

$$S_1 = \frac{(n+1)n}{1.2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Эта сумма будетъ общимъ членомъ ряда 1, 3, 6, 10,.... чиселъ треугольныхъ, которыя дѣйствительно получатся, если возмемъ 1, 2, 3,...... на мѣсто $n$:

$$\begin{array}{l|l}
\frac{1}{2}(1^2+1)=1, & \\
\frac{1}{2}(2^2+2)=3, & \text{Возмемъ сумму,} \\
\frac{1}{2}(3^2+3)=6, & \text{и означимъ ее} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \text{чрезъ } S_{\triangle} \\
\frac{1}{2}(n^2+n)=S_1 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{1}{2}(S_2+S_1)=1+3+6+\ldots+S_1=S_{\triangle}.$$

Но, $S_1=\frac{n^2+n}{2}$, $S_2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$, какъ это видѣли (**281**) выше; посему,

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\frac{n^2+n}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2n^3+6n^2+4n}{6}\right), \text{ или}$$

$$S_{\triangle}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Такова сумма ряда членовъ треугольныхъ чиселъ. Эта сумма необходимо будетъ общимъ членомъ ряда чиселъ треугольныхъ пирамидальныхъ, въ чемъ легко увѣриться, подставляя числа 1, 2, 3, 4,.... на мѣсто $n$:

$$\begin{array}{l|l}
\frac{1}{6}(1^3+3\,.\,1^2+2\,.\,1)=1 & \\
\frac{1}{6}(2^3+3\,.\,2^2+2\,.\,2)=4 & \text{Возмемъ сумму, и дадимъ ей} \\
\frac{1}{6}(3^3+3\,.\,3^2+2\,.\,3)=10 & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \text{знакъ } S_{\triangle}. \\
\frac{1}{6}(n^3+3\,.\,n^2+2\,.\,n)=S_{\triangle} & \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{1}{6}(S_3+3S_2+2S_1)=1+4+10+\ldots+S_{\triangle}=S_{\triangle}.$$

Но, $S_3=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$, $S_2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$, $S_1=\frac{n^2+n}{2}$; посему,

$$S_{\triangle}=\frac{1}{6}\left(\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}+\frac{2n^3+3n^2+n}{2}+\frac{2n^2+2n}{2}\right)$$

$$=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}, \text{ или}$$

$$S_{\triangle}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}.$$

Это и есть сумма чиселъ треугольныхъ пирамидальныхъ.

**283.** Возмемъ теперь прогрессію

$$\div 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.....\,2n-1.$$

Она даетъ происхожденіе фигурнымъ числамъ другаго класса, а именно:

1) 1, 4, 9, 16, 25, 36....
2) 1, 5, 14, 30, 55, 91....

Числа перваго ряда называются *квадратными;* потому что ими можно представлять суммы круглыхъ тѣлъ (напримѣръ ядеръ), раскладывающихся на плоскости точно въ видѣ квадратовъ:

$$\begin{array}{cccc} \bullet, & \bullet\;\bullet, & \bullet\;\bullet\;\bullet, & \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet, \\ & \bullet\;\bullet & \bullet\;\bullet\;\bullet & \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ & & \bullet\;\bullet\;\bullet & \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \\ & & & \bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet \end{array}$$

Числа же втораго ряда называются *квадратными пирамидальными;* потому что, чрезъ сложеніе тѣхъ квадратныхъ слоевъ одинъ на другой, начиная съ послѣдняго до перваго, составляется пирамида съ квадратнымъ основаніемъ.

Сумма прогрессіи $\div$ 1.3.5.7....$2n$—1, имѣющей число членовъ $n$, будетъ $S_1 = \left(\frac{1+2n-1}{2}\right)n = n^2$. Она будетъ общимъ членомъ ряда чиселъ фигурныхъ квадратныхъ 1, 4, 9, 16,....$n^2$, которыя мы дѣйствительно получимъ, подставляя въ нее числа 1, 2, 3, 4,.... на мѣсто $n$:

$$\begin{array}{c|l} 1^2=1 & \\ 2^2=4 & \text{Возмемъ сумму, и да-} \\ 3^2=9 & \\ \ldots\ldots & \text{димъ ей знакъ } S_{\Box}. \\ n^2=n^2 & \\ \hline \end{array}$$

$$S_2 = 1+4+9+\ldots.+n^2 = S_{\Box}.$$

Но, видѣли выше, что $S_2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$, то и

$$S_{\Box} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\;.\;2\;.\;3}.$$

Такова *сумма чиселъ квадратныхъ;* она будетъ общимъ членомъ для ряда чиселъ четыреугольныхъ пирамидальныхъ 1, 5, 14, 30,..... И дѣйствительно, взявъ 1, 2, 3,.... на мѣсто $n$, получаемъ:

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{6}(2.1^3+3.1^2+1) = 1 & \\ \frac{1}{6}(2.2^3+3.2^2+2) = 5 & \text{Возмемъ сумму, и для нее} \\ \frac{1}{6}(2.3^3+3.3^2+3) = 14 & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;\ldots\ldots & \text{знакъ } S_{\boxdot} \\ \frac{1}{6}(2.n^3+3.n^2+n) = S_{\Box} & \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{6}(2S_3+3S_2+S_1) = 1+5+14+\ldots.+S_{\Box} = S_{\boxdot}, \text{ или}$$

$$S_{\boxdot} = \frac{1}{6}\left(\frac{2n^4+4n^3+2n^2}{4} + \frac{6n^3+9n^2+3n}{6} + \frac{n^2+n}{2}\right).$$

Сдѣлавъ сокращеніе, получимъ сумму

$$S_{\boxdot} = \frac{n^4+3n^3+5n^2+2n}{1.2} = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{3.4}$$

чиселъ квадратныхъ пирамидальныхъ.

**284.** Послѣ этого можно найти сумму членовъ ряда

$$S=a+2a^2+3a^3+4a^4+\ldots+na^n.$$

Этотъ рядъ разлагается на два:

$$S=a+a^2+a^3+\ldots+a^n+a[a+2a^2+3a^3+\ldots+(n-1)a^{n-1}].$$

А какъ $a+a^2+a^3+\ldots+a^n=\frac{a-a^{n+1}}{1-a}$, въ чемъ можемъ увѣриться посредствомъ дѣленія, сверхъ того, рядъ

$$a+2a^2+3a^3+\ldots+(n-1)a^{n-1}=S-na^n;\text{ то}$$

$$S=\frac{a-a^{n+1}}{1-a}+a(S-na^n);\text{ откуда}$$

$$aS-S=na^{n+1}-\frac{a^{n+1}-a}{a-1}=\frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{a-1},$$

и, наконецъ,

$$S=\frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(a-1)^2}.$$

**285.** Здѣсь предложимъ себѣ вопросъ о разложеніи цѣлаго положительнаго числа на данное число цѣлыхъ частей всевозможными образами, и о нахожденіи суммы таковыхъ разложеній.

1) *Данное число a разложить на два цѣлыя и положительныя числа всевозможными образами, и найти сумму разложеній.*

Пусть $x$, $y$, эти цѣлыя части; то

$$x+y=a,\text{ откуда}$$
$$y=a-x.$$

Если $x$ должно быть цѣлымъ положительнымъ числомъ, то его можно взять только $x=1, 2, 3, \ldots\ldots a-1$,

и тогда, $y=a-1, a-2, a-3, \ldots\ldots 2, 1$.

Слѣдовательно, число $n$ всѣхъ разложеній $=a-1$.

2) *Данное число a разложить на три цѣлыя положительныя части всевозможными образами, и найти сумму таковыхъ разложеній.*

Пусть эти цѣлыя части $x$, $y$, $z$, то

$$x+y+z=a,\text{ откуда}$$
$$z=a-x-y.$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Возмемъ сперва: | $x=1$, | 1, | 1, | $\ldots\ldots 1$ | |
| | $y=1$, | 2, | 3, | $\ldots\ldots a-2$ | Число рѣшеній |
| то | $z=a-2$, | $a-3$, | $a-4$, | $\ldots\ldots 1$ | $a-2$. |
| Потомъ возмемъ: | $x=2$, | 2, | 2, | $\ldots\ldots 2$ | |
| | $y=1$, | 2, | 3, | $\ldots\ldots a-3$ | $a-3$. |
| то | $z=a-3$, | $a-4$, | $a-5$, | $\ldots\ldots 1$ | |
| Послѣ того: | $x=3$, | 3, | 3, | $\ldots\ldots 3$ | |
| | $y=1$, | 2, | 3, | $\ldots\ldots a-4$ | $a-4$. |
| | $z=a-4$, | $a-5$, | $a-6$, | $\ldots\ldots 1$ | |

И такъ далѣе продолжаемъ, пока получится предпослѣднее число рѣшеній $a-(a-2)=2$, а послѣднее $a-(a+1)=1$. Посему, искомое число рѣшеній

$$S=1+2+3+\ldots+(a-4)+(a-3)+(a-2)$$
$$=\frac{(a-1)(a-2)}{1\ .\ 2}=\frac{n(n+1)}{1\ .\ 2},\text{ полагая } a-2=n.$$

Если раздѣляемое число $a=7$, то сумма его разложеній на три цѣлыя числа будетъ $\frac{6.5}{1.2}=15$, а именно:

Числа рѣшеній.

| | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x=$ | 1, 1, 1, 1, 1 | 2, 2, 2, 2, | 3, 3, 3, | 4, 4 | 5 |
| $y=$ | 1, 2, 3, 4, 5 | 1, 2, 3, 4 | 1, 2, 3 | 1, 2 | 1 |
| $z=$ | 5, 4, 3, 2, 1 | 4, 3, 2, 1 | 3, 2, 1 | 2, 1 | 1 |

И такъ, число рѣшеній $=1+2+3+4+5=15$.

3) *Цѣлое число a раздѣлить на четыре части цѣлыя и положительныя, и найти сумму разложеній.* — Если эти части $x$, $y$, $z$, $u$, то

$$x+y+z+u=a;\text{ откуда}$$
$$u=a-x-y-z.$$

Числа рѣшеній.

| | $1.(a-3)$ | $a-4+a-4=2(a-4)$ | |
|---|---|---|---|
| Беру: | $x=1,\quad 1,\ldots\ldots 1$ | $1,\quad 1,\ldots\ldots 1$ | $2,\quad 2,\ldots\ldots 2$ |
| | $y=1,\quad 1,\ldots\ldots 1$ | $2,\quad 2,\ldots\ldots 2$ | $1,\quad 1,\ldots\ldots 1$ |
| | $z=1,\quad 2,\ldots\ldots a-3$ | $1,\quad 2,\ldots\ldots a-4$ | $1,\quad 2,\ldots\ldots a-4$ |
| то | $u=a-3, a-4,\ldots 1$ | $a-4,\ a-5\ldots 1$ | $a-4,\ a-5,\ldots 1$ |

| $a-5+a-5+a-5=3(a-5)$ | | |
|---|---|---|
| $x=1,\ 1,\ldots\ldots 1$ | $2,\ 2,\ldots\ldots 2$ | $3,\ 3,\ldots\ldots$ |
| $y=3,\ 3,\ldots\ldots 3$ | $2,\ 2,\ldots\ldots 2$ | $1,\ 1,\ldots\ldots$ |
| $z=1,\ 2\ldots\ldots a-5$ | $1,\ 2\ldots\ldots a-5$ | $1,\ 2,\ldots\ldots a-5$ |
| $u=a-5,\ a-6\ldots 1$ | $a-5,\ a-6\ldots 1$ | $a-5,\ a-6,\ldots 1$ |

и такъ далѣе. Послѣднее число рѣшеній будетъ $(a-3)[a-(a-1)]=(a-3)1$, тоже что первое, а предпослѣднее $(a-4)[a-(a-2)]=(a-4)2$, тоже что второе. А потому, сумма всѣхъ рѣшеній

$$S=1(a-3)+2(a-4)+3(a-5)+\ldots+(a-4)2+(a-3)1.$$

Этотъ рядъ разлагается на слѣдующіе:

$$\left.\begin{array}{r}(a-3)+(a-4)+(a-5)+\ldots+3+2+1\\ +(a-4)+(a-5)+\ldots+3+2+1\\ +(a-5)+\ldots+3+2+1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +3+2+1\\ +2+1\\ +1\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{число рядовъ}\\ a-3.\end{array}$$

Слагая суммы этихъ рядовъ снизу вверхъ, получимъ:

$$S = 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{(a-2)(a-3)}{1 \, . \; 2}.$$

Но мы уже знаемъ, (**282**), что эта сумма

$$S = \frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{1 \, . \; 2 . \; 3}, \text{ или}$$

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \, . \; 2 \; . \; 3}, \text{ полагая } a-3=n.$$

Нашли бы также, что сумма рѣшеній, отъ раздѣленія цѣлаго числа $a$ на 5 цѣлыхъ частей, будетъ

$$\frac{(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)}{1 \; . \; 2 \; . \; 3 \; . \; 4},$$

и такъ далѣе.

*Примѣръ.* Разложить число 9 на четыре цѣлыя, положительныя числа всевозможными образами, и найти сумму этихъ разложеній.

Эта сумма будетъ $= \dfrac{(a-1)(a-2)(a-3)}{1. \; 2. \; 3} = \dfrac{8.\,7.\,6}{1.\,2.\,3} = 56.$

### B. Прогрессія геометрическая.

**286.** Геометрическою прогрессіею называется такой рядъ чиселъ, въ которомъ каждый членъ послѣдующій равенъ предшествующему, помноженному на постоянное число, называемое *знаменателемъ содержанія*. Она бываетъ *возрастающею* или *убывающею*, смотря потому, каковъ ея знаменатель содержанія, больше единицы, или $<1$. Такимъ образомъ, рядъ:

$$1, 3, 9, 27, 81, \ldots.$$

есть прогрессія геометрическая возрастающая, въ которой знаменатель содержанія $=3$;

$$\text{ряды:} \quad 16, \quad 4, \quad 1, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{16}, \ldots.$$

$$6; \quad 0{,}6; \quad 0{,}06; \quad 0{,}006; \ldots.$$

$$0{,}54; \quad 0{,}0054; \quad 0{,}000054; \ldots.$$

суть прогрессіи убывающія; въ первомъ знаменатель содержанія $\frac{1}{4}$, во второмъ 0,1, а въ третьемъ 0,01.

**286.** Для отличія отъ прогрессіи ариѳметической, члены геометрической прогрессіи пишутся въ одну строку, и отдѣляются знаками дѣленія, а передъ рядомъ ставится знакъ $\div\div$, то есть:

$$\div\div \; 1 : 3 \div 9 : 27 : 81 : \ldots.$$

$$\div\div \; 16 : 4 : 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{16} : \ldots.$$

И вообще, если числа $a, b, c, d, \ldots. l$, составляютъ прогрессію геометрическую, то она пишется:

$$\div\div \; a : b : c : d : \ldots.. l,$$

и выговаривается: $a$ *относится къ* $b$, *какъ* $b$ *къ* $c$, *какъ* $c$ *къ* $d$, и проч., такъ что въ ней всякіе три члена, взятые сряду, составляютъ непрерывную геометрическую пропорцію:

$$a : b = b : c = c : d = \ldots\ldots$$

Впередъ всегда будетъ означать:

чрезъ $a$ первый членъ прогрессіи,
$l$ послѣдній ея членъ,
$q$ знаменатель содержанія,
$n$ число членовъ прогрессіи, и
$S$ сумму ея членовъ.

**287.** *Въ геометрической прогрессіи каждый членъ равенъ первому ея члену, помноженному на знаменатель содержанія, возвышенный въ степень равную числу предшествующихъ членовъ.* Это очень просто выводится изъ разсматриванія происхожденія каждаго члена прогрессіи

$$\div\div\, a : b : c : d : \ldots\ldots l,$$

изъ перваго ея члена:

Если знаменатель содержанія $q$, и число членовъ $n$, то имѣемъ:

$$\begin{aligned} a &= a = a, \\ b &= aq = aq, \\ c &= bq = aq^2, \\ d &= cq = aq^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Законъ составленія членовъ изъ перваго очевиденъ; такъ, наприм. *третій членъ* $c$ составленъ изъ $a$, помноженнаго на $q$ *второй степени; четвертый членъ* $d$ равенъ также $a$, помноженному на $q$ *третьей степени*, и т. д. Слѣдовательно, *послѣдній* или $n$-ый членъ $l$ будетъ

$$1) \ldots l = aq^{n-1}.$$

Послѣдній членъ называется также *общимъ*, потому что служитъ для нахожденія всякаго члена прогрессіи, когда $a$, $q$ и $n$ даны. Положимъ, что хотимъ найти 7-ой членъ прогрессіи,

$$\div\div\, 3 : 6 : 12 : \ldots\ldots,$$

въ которой $a=3$, $q=2$, $n=7$; то

$$l = aq^{n-1} = 3.2^{6-1} = 192.$$

*Примѣръ.* Найти 10-й членъ прогрессіи

$$\div\div\, 25 : 5 : 1 : \frac{1}{5} : \ldots\ldots,$$

гдѣ $a=25$, $q=\frac{1}{5}$, $n=10$. Онъ будетъ

$$l = 25\left(\frac{1}{5}\right)^9 = \frac{1}{78125}.$$

**288.** *Найти сумму всѣхъ членовъ прогрессіи геометрической.*

$$\div\!\div\, a : b : c : d : \ldots\ldots k : l,$$

въ которой послѣдній членъ $l$, $n$ число членовъ, и знаменатель содержанія $q$. Искомая сумма должна быть

$$S = a + b + c + d + \ldots . + k + l.$$

Составимъ равенства:

$$b = aq,\ c = bq,\ d = cq,\ e = dq, \ldots .,\ l = kq,$$ и сложимъ;

получится: $$b + c + d + \ldots . + l = (a + b + c + \ldots . + k)q;$$

а это все тоже, что $S - a = (S - l)q$, откуда

$$2) \ldots . S = \frac{lq - a}{q - 1}, \text{ или } S = \frac{a - lq}{1 - q}.$$

Этому выраженію суммы можно дать еще иной видъ, подставивъ $l = aq^{n-1}$; отчего найдется:

$$3) \ldots S = \frac{lq - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ или}$$

$$4) \ldots S = \frac{a - lq}{1 - q} = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Формула 3) служитъ для нахожденія суммы прогрессіи возрастающей, въ которой $q > 1$; а формула 4) служитъ для вычисленія суммы членовъ прогрессіи убывающей, гдѣ $q < 1$.

*Примѣръ*. Найти сумму десяти членовъ прогрессіи

$$\div\!\div\, 3 : 6 : 12 : 24 : \ldots .,$$

въ которой $a = 3$, $q = 2$, $n = 10$. Она будетъ

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 3069.$$

*Примѣръ*. — Найти сумму семи членовъ прогрессіи

$$\div\!\div\, 18 : 6 : 2 : \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \ldots .$$

$$S = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{18(1 - \frac{}{2187})}{1 - \frac{1}{3}} = 26\frac{80}{81}.$$

**289.** Найденныя формулы:

$$l = aq^{n-1},\ S = \frac{lq - a}{q - 1},\ S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1},$$

содержатъ пять величинъ: $a$, $l$, $q$, $n$, $S$, и служатъ для рѣшенія всѣхъ задачь, относящихся къ прогрессіямъ геометрическимъ, гдѣ, по даннымъ тремъ величинамъ, требуется найти двѣ остальныя. Такихъ задачь десять.

1) Даны $a$, $l$, $n$, найти $q$ и $S$.

Изъ первой формулы нахожу $q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$, и вычисляю по логариѳмамъ:

$$\log q = \frac{1}{n-1}(\log l - \log a);$$

а потомъ беру $S = \frac{ql - a}{q - 1}$.

2) Даны $a$, $l$, $q$, найти $n$, S.

Вторая формула даетъ прямо $S=\frac{lq-a}{q-1}$.

Возмемъ логариѳмъ первой формулы:

$$\log l=\log a+(n-1)\log q;\text{ отсюда}$$

$$n=1+\frac{\log l-\log a}{\log q}.$$

3) Даны $a$, $l$, S, найти $n$ и $q$.

Изъ второй формулы получается $q=\frac{S-a}{S-l}$; а потомъ, изъ первой

$$n=1+\frac{\log l-\log a}{\log q}.$$

4) Даны $a$, $n$, $q$, найти $l$, и S.

$$l=aq^{n-1},\ S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

5) Даны $a$, $q$, S, найти $n$, $l$.

Изъ второй формулы находимъ $l=\frac{a+(q-1)S}{q}$; а

изъ первой $$n=\frac{\log l-\log a}{\log q}+1.$$

6) Даны $a$, $n$, S, найти $l$ и $q$.

Изъ третьей формулы выводится:

$$aq^n-Sq+S-a=0.$$

Отсюда надобно искать $q$; а потомъ $l=aq^{n-1}$.

7) Даны $l$, $n$, S, найти $a$ и $q$.

Изъ первой формулы нахожу $a=\frac{l}{q^{n-1}}$; это подставляю въ третью, и получаю:

$$S=\frac{l}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right);\text{ а отсюда}$$

$$(S-l)q^n-Sq^{n-1}+l=0.$$

Нашедши $q$ изъ этого уравненія, получится:

$$a=\frac{l}{q^{n-1}}.$$

8) Даны $l$, $n$, $q$, найти $a$, S.

$$a=\frac{l}{q^{n-1}},\ S=\frac{ql-a}{q-1}.$$

9) Даны $l$, $q$, S, найти $a$, $n$.

Изъ втораго уравненія найдется: $a=ql-(q-1)S$; а потомъ

изъ перваго $$n=1+\frac{\log l-\log a}{\log q}.$$

10) Даны $n$, $q$, S, найти $a$, $l$.

Беру $a=\frac{l}{q^{n-1}}$, подставляю въ третью формулу, и получаю:

$$S=\frac{l}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right);\ \text{откуда}$$

$$l=\frac{Sq^{n-1}(q-1)}{q^n-1}$$

Послѣ чего найдется $a=\frac{l}{q^{n-1}}$. Послѣднее вычисляю по логариѳмамъ:

$$\log a=\log l-(n-1)\log q.$$

Только задачи 6-я и 7-я не могутъ быть теперь разрѣшены, потому что ихъ неизвѣстныя зависятъ отъ рѣшенія уравненій высокихъ степеней, о которыхъ мы еще ничего не знаемъ.

**Задача.** *Даны два числа a и l, вставить между ними m членовъ, которые бы совокупно съ тѣми составили геометрическую прогрессію.*

Въ этой прогрессіи первый членъ $a$, послѣдній $l$, число членовъ $m+1=n$; знаменатель содержанія найдется изъ формулы $l=aq^{n-1}$, и будетъ

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}.$$

Посредствомъ его легко уже составятся всѣ члены прогрессіи, которыя надобно вставить между $a$ и $l$, а именно:

$$a,\ a\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}},\ a\sqrt[m+1]{\frac{l^2}{a^2}},\ a\sqrt[m+1]{\frac{l^3}{a^3}},\ldots..l$$

Если $a=1$, $l=2$, $m=11$, то $n=13$, и $q=\sqrt[13]{2}$;

$$\log q=\frac{1}{13}.\log 2=0{,}0231562,$$

$$q=1{,}05946\ldots.$$

И такъ, членами прогрессіи будутъ:

∺ 1 : 1,05946 : 1,18921 : 1,25992 : 1,33484 : 1,41421 :
1,49831 : 1,58780 : 1,68169 : 1,78180 : 1,88775 : 2.

Эти числа выражаютъ высоты всѣхъ 13-ти полутоновъ, заключающихся въ октавѣ хроматической гаммы, т. е. числа сотрясеній, ихъ производящихъ отъ перваго полутона $C_1$ до послѣдняго $C_2$ включительно.

**290.** Прогрессіи, какъ возрастающія такъ и убывающія, могутъ состоять изъ опредѣленнаго или безконечнаго числа членовъ.

Формула $S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ показываетъ, что въ прогрессіи возрастающей; гдѣ $q>1$, съ увеличеніемъ числа членовъ $n$, увеличивается $q^n$, а слѣдовательно и $S$, такъ что эта сумма можетъ превзойти всякое данное число. Для $n=\infty$, будетъ $q^n=\infty$, и $S=\infty$.

**291.** Формула $S=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$, опредѣляющая сумму прогрессіи убывающей, гдѣ $q<1$, показываетъ, что, съ увеличеніемъ числа $n$ членовъ, дробь $q^n$ безпрестанно уменьшается, и можетъ сдѣлаться менѣе всякаго даннаго числа. Отъ этого сумма S приближается къ предѣлу $\frac{a}{1-q}$, никогда его не достигая. Развѣ когда возмемъ $n=\infty$, тогда $q^n$ обратится въ нуль, и сумма прогрессіи сдѣлается равна сему предѣлу,

$$S=\frac{a}{1-q}.$$

Впрочемъ можно получить ее и непосредственно; надобно только помножить рядъ

$$S=a+aq+aq^2+aq^3+\ldots \text{ на } q, \text{ и}$$

вычесть изъ него произведеніе

$$qS=aq+aq^2+aq^3+\ldots;$$

получится остатокъ $S-qS=a$, изъ котораго

$$S=\frac{a}{1-q}.$$

Справедливость этого вывода можно повѣрить чрезъ непосредственное раздѣленіе $a$ на $1-q$. Отъ этого получится также

$$\frac{a}{1-q}=a+aq+aq^2+aq^3+\ldots=S,$$

геометрическая прогрессія безконечная, и притомъ убывающая, потому что $q<1$.

Слѣдовательно, *сумма всѣхъ членовъ безконечной геометрической прогрессіи, убывающей, равна первому ея члену, раздѣленному на единицу безъ знаменателя содержанія.*

*Примѣръ.* Найти сумму прогрессіи

$$S=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}\ldots.$$

Положивъ $a=2$, $q=\frac{1}{3}$, найдется $S=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$.

Если вмѣсто $q$ взять $-q$, то получится:

$$\frac{a}{1+q}=a-aq+aq^2-aq^3+\ldots$$

**292.** Эти два ряда могутъ быть употреблены для выраженія всякаго числа $a$ посредствомъ безконечнаго ряда, котораго члены убываютъ въ прогрессіи геометрической и расположены по степенямъ какой угодно дроби $q$; потому что изъ перваго ряда мы тотчасъ имѣемъ

$$a=(1-q)(a+aq+aq^2+aq^3+\ldots), \text{ или}$$
$$1=(1-q)(1+q+q^2+q^3+\ldots).$$

Полагая $q=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$, найдется:

$$1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)$$
$$1=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\right)$$
$$1=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots\right)$$
$$1=\frac{4}{5}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots\right)$$

..................................

а помножая тотъ или другой рядъ на какую угодно дробь, мы выраз~~а~~имъ ее рядомъ, расположеннымъ по степенямъ дроби этого ряда; наприм.:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots\right)$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\dots\right)$$

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\dots\right)$$

Положимъ, что надобно дробь $\frac{1}{5}$ изобразить рядомъ, расположеннымъ по степенямъ дроби $\frac{2}{7}$; тогда надобно взять $q=\frac{2}{7}$ въ ряду

$$1=(1-q)(1+q+q^2+q^3+\dots),$$

и все помножить на $\frac{1}{5}$; найдется:

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{7}\left[1+\frac{2}{7}+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{2}{7}\right)^3+\dots\right].$$

Этимъ же способомъ дроби $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$,..... легко обращаются въ десятичныя:

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\dots\right)$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\dots=0,11111\dots$$

$$\frac{1}{99}=\frac{1}{99}\left(1-\frac{1}{100}\right)\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3}+\dots\right)$$

$$=0,010101\dots,$$

и такъ далѣе.

**293.** Рядъ $a+aq+aq^2+aq^3+\dots=\frac{a}{1-q}$ служитъ также *для обращенія всякой періодической дроби въ конечную*, изъ которой она произошла; потому что періодическая дробь состоитъ изъ періодовъ, слѣдующихъ въ безконечной убывающей прогрессіи. Напримѣръ: дробь

$$0,232323\dots=\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\frac{23}{100^3}+\dots$$

очевидно есть прогрессія, гдѣ $a=\frac{23}{100}$, $q=\frac{1}{100}$; стало быть,

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{23}{99}.$$

Такова обыкновенная дробь, изъ которой произошла та періодическая.

**294.** Рядъ $\frac{a}{1+q}=a-aq+aq^2-aq^3+\dots$

приводитъ насъ къ общему заключенію, что всякая алгебрическая дробь вида:

$$\frac{a}{a'+b'x},\ \frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2},\ \frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3},\dots$$

можетъ быть разложена въ рядъ, въ которомъ каждый членъ равенъ алгебрической суммѣ извѣстнаго числа предыдущихъ ему членовъ, умноженныхъ на нѣкоторое постоянное количество. Такъ,

$$\frac{a}{a'+b'x}=\frac{\frac{a}{a'}}{1+\frac{b'x}{a'}}=\frac{a}{a'}-\frac{ab'x}{a'^2}+\frac{ab'^2x^2}{a'^3}-\ldots.$$

Здѣсь каждый членъ состоитъ изъ предыдущаго, помноженнаго на $-\frac{b'x}{a'}$.

Дробь $\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}=\frac{a}{a'+px}+\frac{bx}{a'+px}$, полагая $p=b'+c'x$.

Но, $\frac{a}{a'+px}=\frac{a}{a'}-\frac{a}{a'}\cdot\frac{px}{a'}+\frac{a}{a'}\cdot\frac{p^2x^2}{a'^2}-\ldots,$

$\frac{bx}{a'+px}=\frac{bx}{a'}-\frac{bx}{a'}\cdot\frac{px}{a'}+\frac{bx}{a'}\cdot\frac{p^2x^2}{a'^2}-\ldots$; то

$$\frac{a}{a'+px}+\frac{bx}{a'+px}=\frac{a}{a'}+\frac{bx}{a'}-\left(\frac{a}{a'}+\frac{bx}{a'}\right)\frac{px}{a'}+\left(\frac{a}{a'}+\frac{bx}{a'}\right)\frac{p^2x^2}{a'^2}-\ldots.$$

или:

$$\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}=\frac{a+bx}{a'}-\left(\frac{a+bx}{a'}\right)\left(\frac{b'x+c'x^2}{a'}\right)+\left(\frac{a+bx}{a'}\right)\left(\frac{b'x+c'x^2}{a'}\right)^2-\ldots$$

Явно, что этотъ рядъ есть прогрессія, въ которой знаменатель содержанія $=-\frac{b'x+c'x^2}{a'}$.

Ряды такого рода называются *возвратными*. Но объ нихъ я ничего болѣе говорить не буду.

# ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

## ПРИЛОЖЕНІЕ ПРОГРЕССІЙ И ЛОГАРИѲМОВЪ КЪ ВЫЧИСЛЕНІЮ ПРОЦЕНТОВЪ.

**295.** Нельзя исчислить всѣхъ случаевъ употребленія геометрической прогрессіи въ наукахъ и общежитіи: довольно, если покажемъ ихъ употребленіе при вычисленіи процентовъ. Это вычисленіе встрѣчается во множествѣ случаевъ: при денежныхъ вкладахъ на приращеніе процентами; при ссудѣ капиталовъ частнымъ лицамъ по векселямъ или подъ залоги; при постепенной уплатѣ долговъ и при учетѣ процентовъ; при расчетѣ доходовъ отъ фабрикъ и мануфактуръ; при опредѣленіи выгодъ различныхъ компаній, составляющихся на акціяхъ; при исчисленіи временныхъ или пожизненныхъ доходовъ отъ капиталовъ, вносимыхъ въ страховыя общества, или другія учрежденія, въ пользу какихъ ни есть лицъ; въ лѣсоводствѣ, для исчисленія прироста и размноженія лѣса, и при продажѣ или покупкѣ онаго съ уплатою по срокамъ, и проч. и проч. Алгебра не входитъ въ разсмотрѣніе всего этого, но показываетъ только начала; подробное же развитіе и примѣненіе ихъ надобно читать въ особыхъ сочиненіяхъ, показывающихъ частное примѣненіе прогрессій и логариѳмовъ къ тому или другому роду случаевъ. Къ сочиненіямъ этого рода относятся: *Руководство къ Политической Ариѳметикѣ, составленное Г. Бруномъ*. Одесса 1845,— сочиненіе весьма замѣчательное и полезное; *Лѣсная Математика*, съ изложеніемъ правилъ межеванія, таксаціи и вычисленія цѣнности лѣсовъ, Г. *Кенига*, переведенная съ нѣмецкаго *Грешищевымъ*. С.-Петербургъ. 1841.

**296.** Вопросъ первый. — *Капиталъ А рублей отданъ въ ростъ на приращеніе своими процентами, по* $r\frac{0}{0}$ *съ одного рубля въ годъ; найти какъ великъ сдѣлается этотъ капиталъ черезъ n годовъ?*

По прошествіи перваго года, 1 рубль превратится въ $1+r$, а капиталъ A превратится въ $A(1+r)$; эта сумма остается на второй годъ. Послѣ втораго года также 1 рубль сдѣлается $1+r$, а капиталъ $A(1+r)$ превратится въ $A(1+r)(1+r)=A(1+r)^2$. Послѣ третьяго года, капиталъ $A(1+r)$ получитъ цѣну $A(1+r)^3$, и т. д. Слѣдовательно, послѣ $n$ годовъ, начальный капиталъ A превратится въ

$$S=A(1+r)^n\ldots\ldots(1).$$

Изъ четырехъ количествъ S, A, $r$, $n$, входящихъ въ эту формулу, можно находить каждое, когда три прочія извѣстны. Вычисленіе же дѣлается всегда по логариѳмамъ:

$$\log S = \log A + n \log(1+r) \ldots . (2).$$

Отсюда:

$$\log A = \log S - n \log(1+r) \ldots . (3);$$

$$n = \frac{\log S - \log A}{\log(1+r)} \ldots\ldots\ldots\ldots (4);$$

$$\log(1+r) = \frac{\log S - \log A}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

**Задача 1.** — *Найти будущую цѣну капитала 20000 рублей, положеннаго въ Коммерческій Банкъ для приращенія процентами на 12 лѣтъ, по 0,04% съ одного рубля.*

$$\text{Здѣсь } A = 20000,\ n = 12,\ r = 0{,}04;$$

$$\log S = \log 20000 + 12 \log(1{,}04).$$

$$\begin{array}{r} \log 20000 = 4{,}301.0300 \\ 12.\log 1{,}04 = 0{,}204.4001 \\ \hline 4{,}505.4301 = \log S; \end{array}$$

откуда $S = 32020{,}64$ рублей. Таковъ будетъ капиталъ A по прошествіи 12 годовъ.

Если же этотъ капиталъ A будетъ въ обращеніи 12 лѣтъ + 156 дней; то, превративъ дни въ годы, найдемъ:

$$n = 12 + \frac{156}{360} = 12 + \frac{13}{30} \text{ годъ *)};$$

будущая цѣна капитала получится изъ

$$\begin{aligned} \log S &= \log A + \left(12 + \frac{13}{30}\right) \log(1{,}04) \\ &= \log A + 12 \log 1{,}04 + \frac{13}{30} \log 1{,}04 \\ &= 4{,}505.4301 + \frac{13}{30} \log 1{,}04 = 4{,}512.8112, \end{aligned}$$

чему соотвѣтствуетъ число 32569,50 рублей.

**Задача 2.** — *Лѣсной округъ, содержащій 68760 квадратныхъ саженей лѣсу, и большое количество земли для лѣсонасажденія, стараніемъ лѣсовода увеличивается каждогодно на $4\frac{3}{4}$%; требуется узнать, какъ великъ этотъ лѣсъ сдѣлается чрезъ 12 годовъ, если его не вырубаютъ?*

$$\begin{aligned} S &= 68760(1{,}0475)^{12} = 120000 \text{ квадр. саж.} \\ &= 50 \text{ десятинъ.} \end{aligned}$$

---

*) Въ Коммерческомъ Банкѣ, для разсчета процентовъ, принимается мѣсяцъ въ 30 дней, слѣдовательно годъ въ 360 дней.

**Задача 3.** — *Колонія изъ 1000 человѣкъ, поселившаяся въ мѣстѣ удобномъ для жительства, умножается въ каждый мѣсяцъ по* $\frac{1}{1000}$ *долѣ на человѣка; спрашивается: какъ она будетъ многолюдна чрезъ 100 лѣтъ?*

$$S=1000(1,001)^{1200}=1318 \text{ человѣкъ.}$$

**Задача 4.** — *Опредѣлить настоящій капиталъ A, который надобно отдать въ ломбардъ для приращенія процентами, по 0,04% съ рубля въ годъ, чтобы онъ, по прошествіи 10 годовъ обратился въ 6000 рублей.*

Здѣсь $S=6000$, $n=10$, $r=0,04$, а искомый капиталъ A, который найдемъ изъ (3):

$$\log A=\log S-n\log(1+r)=\log 6000-10.\log 1,04.$$

$$\begin{array}{r} \log 6000=3,778.1513 \\ 10\log 1,04=0,170.3334 \\ \hline 3,607.8179=\log A; \text{ откуда} \end{array}$$

$$A=4053,39 \text{ рублей.}$$

**Задача 5.** — *Найти, во сколько лѣтъ капиталъ 15000 рублей, отданный въ ростъ по 0,04% съ рубля въ годъ, обратится въ 20000 рублей?*

Здѣсь $A=15000$, $S=20000$, $r=0,04$, а неизвѣстно время $n$ годовъ; то изъ (4) найдется:

$$n=\frac{\log S-\log A}{\log(1+r)}=\frac{\log 20000-\log 15000}{\log 1,04}$$
$$=\frac{0,124.9887}{0,017.0333}=7\tfrac{1}{3} \text{ года.}$$

*Примѣчаніе.* Обыкновенные проценты съ рубля въ годъ бываютъ 0,025; 0,03; 0,035; 0,04; 0,045; 0,05; 0,055; 0,06. Логариѳмы годовой цѣны 1-го рубля въ задачахъ этого рода встрѣчаются безпрестанно. Для облегченія дѣйствій, эти логариѳмы помѣщаются здѣсь:

$\log 1,025=0,010.7238.65$; $\log 1,045=0,019.1162.90$
$\log 1,03=0,012.8372.25$; $\log 1,05=0,021.1892.99$
$\log 1,035=0,014.9403.50$; $\log 1,055=0,023.2524.60$
$\log 1,04=0,017.0333.39$; $\log 1,06=0,025.3058.65$

**Задача 6.** — *Найти, во сколько лѣтъ капиталъ A, отданный въ ростъ по r% съ рубля, удвоится?*

Будущій капиталъ долженъ быть $=2A$; посему надобно положить

$$S=A(1+r)^n=2A \text{ откуда}$$
$$(1+r)^n=2, \text{ и}$$
$$n=\frac{\log 2}{\log(1+r)}.$$

Если $r=0,04$, то $n=\frac{0,301.0300}{0,017.0333}=17,673$ года.

Во столько времени капиталъ удвоится.

**Задача 7.** — *Два капитала 2735 руб. и 2260 руб. отданы въ ростъ въ одно время, первый по $0,04\frac{0}{0}$, а второй по $0,06\frac{0}{0}$ съ рубля въ годъ; найти, чрезъ сколько лѣтъ второй капиталъ, возрастающій быстрѣе, сдѣлается равенъ первому, и какъ великъ будетъ каждый изъ нихъ?*

Положимъ, что они сдѣлаются равными чрезъ $n$ годовъ: тогда первый капиталъ превратится въ $2735.1,04^n$, а второй въ $2260.1,06^n$, и будетъ

$$2735.1,04^n=2260.1,06^n. \text{ Отсюда}$$

$$n=\frac{\log 2735-\log 2260}{\log 1,06-\log 1,04}$$

$$=\frac{0,082.8489}{0,008.2725}=10,02 \text{ годовъ.}$$

Слѣдовательно второй капиталъ сдѣлается равенъ первому почти ровно чрезъ 10 лѣтъ. Величину же капитала въ это время найдемъ изъ $2260.1,06^{10,02}$, взявши логариѳмъ этого произведенія:

$$\log 2260+10,02 \log 1,06$$

$$=3,354.1084+10,02\times0,025.30587$$

$$=3,607.6732,$$

чему соотвѣтствуетъ число 4052,03 рубля. Такимъ сдѣлается каждый капиталъ чрезъ 10 годовъ.

**297.** Если изъ будущаго капитала $S=A(1+r)^n$ вычесть начальный капиталъ A, то найдется весь *доходъ*

$$S-A=A[(1+r)^n-1]=R.........(6),$$

который получится чрезъ $n$ годовъ съ капитала A. Отсюда найдется

$$A=\frac{R}{(1+r)^n-1}.................(7)$$

настоящій капиталъ A, который можетъ принести доходъ R чрезъ $n$ годовъ. Можно искать также число годовъ, или годовые проценты изъ выраженія:

$$(1+r)^n=\frac{A+R}{A}, \text{ взявъ}$$

$$n \log(1+r)=\log(A+R)-\log A......(8).$$

**Задача 1.** — *Капиталъ 2514 рублей, находясь въ обращеніи 12 годовъ, принесъ доходу 2000,76 рублей; узнать, какіе были проценты $r\frac{0}{0}$ съ рубля въ годъ?*

$$\begin{array}{r} \text{Сложивъ } A=2514 \\ \text{съ } R=2000,73 \\ \hline A+R=4514,73, \end{array}$$

подставляю въ (8), и нахожу:

$$\log(1+r)=\frac{0,254.2718}{12}=0,021.1893;$$

$$1+r=1,05;\ r=0,05.$$

Таковы были искомые проценты.

Задача 2.—*Съ недвижимаго имѣнія получался постоянно доходъ R чрезъ каждые n годовъ; а теперь этотъ же доходъ полученъ въ концѣ n—k лѣтъ, то есть, k годами ранѣе срока; требуется найти настоящую цѣну этому имѣнію?*

Доходъ R, который полученъ чрезъ $n-k$ годовъ, въ концѣ $n$-го года, то есть, по прошествіи остальныхъ $k$ годовъ, будетъ стоить

$$R(1+r)^k=R'.$$

Настоящая же цѣна его найдется по (7):

$$A=\frac{R'}{(1+r)^n-1}=\frac{R(1+r)^k}{(1+r)^n-1}\ \ldots\ldots(9).$$

Вотъ чего стоитъ теперь это имѣніе, предполагая, что доходъ R постоянно будетъ съ него получаться чрезъ $n-k$ годовъ, или доходъ $R'$ чрезъ каждые $n$ годовъ.

Задача 3.—*Лѣсоводъ, производя правильно лѣсонасажденіе и порубку лѣса, находитъ, что шесть его мелкихъ лѣсосѣковъ, въ продолженіе каждыхъ 20 годовъ, будутъ приносить ему слѣдующіе перемежающіеся доходы:*

въ 4, 5 и 6-й годы......... по 100 руб. серебр.
въ 14 и 15-й годы......... по 160 – –
въ 20-й годъ................ по 85 – –

*Онъ желаетъ знать настоящую цѣну всѣмъ этимъ лѣсосѣкамъ, въ началѣ наступающаго 20ти-лѣтняго періода, считая по 0,05% съ рубля въ годъ.*

Доходъ 100 рублей 4-го года, въ концѣ 20ти-лѣтняго періода, то есть, по прошествіи 16-ти лѣтъ, дѣлается ............$100(1,05)^{16}=218,287$
100 руб. 5-го года сдѣлается $100(1,05)^{15}=207,893$
– – 6-го – – $100(1,05)^{14}=197,993$
160 – 14-го – – $160(1,05)^{6}=214,416$
– – 15-го – – $160(1,05)^{5}=204,2048$
85 – 20-го – – $85\times1=85$

Сумма.......=1127,7938

Этотъ 20ти-лѣтній перемежающійся доходъ, въ началѣ сего періода имѣетъ настоящую цѣну:

$$\frac{1127,7938}{(1,05)^{20}-1}=\frac{1127,7938}{1,6533}=676,1 \text{ рублей.}$$

**Задача 4.**—*Найти капаталъ* S, *который надобно положить въ Ломбардъ въ пользу четырехъ наслѣдниковъ, изъ коихъ первому* $n'$ *лѣтъ, второму* $n''$, *третьему* $n'''$, *четвертому* $n''''$, *чтобы каждый изъ нихъ, достигши возраста* $n$ *годовъ, могъ получить* $s$ *рублей.*

Пусть $a$, $b$, $c$, $d$, настоящія цѣны участковъ этихъ наслѣдниковъ, ихъ сумма $a+b+c+d=\mathrm{S}$ настоящая цѣна капитала. Возрастъ $n$ лѣтъ совершится: первому наслѣднику чрезъ $n-n'$ годовъ, второму чрезъ $n-n''$, третьему чрезъ $n-n'''$, четвертому чрезъ $n-n''''$. При этомъ возрастѣ сдѣлаются:

участокъ перваго$=a(1,04)^{n-n'}=s$, или: $a(1,04)^n=s(1,04)^{n'}$,
 - втораго$=b(1,04)^{n-n''}=s$, $b(1,04)^n=s(1,04)^{n''}$,
 - третьяго$=c(1,04)^{n-n'''}=s$, $c(1,04)^n=s(1,04)^{n'''}$,
 - четвертаго$=d(1,04)^{n-n''''}=s$, $d(1,04)^n=s(1,04)^{n''''}$,

Отсюда:

$$(a+b+c+d)(1,04)^n=\mathrm{S}(1,04)^n=s(1,04^{n'}+1,04^{n''}+1,04^{n'''}+1,04^{n''''}),$$

$$\mathrm{S}=\frac{s(1,04^{n'}+1,04^{n''}+1,04^{n'''}+1,04^{n''''})}{(1,04)^n}$$

Таково отношеніе между S и $s$, въ которомъ, по данному $s$, всегда найдется S, и обратно.

Пусть первому наслѣднику $n'=16$ лѣтъ, второму $12\frac{1}{2}=\frac{25}{2}$, третьему 10 и четвертому $7\frac{2}{3}=\frac{23}{3}$ года; и положимъ, что они, при двадцатилѣтнемъ возрастѣ, должны получить по 10000 рублей каждый; то будетъ $n=20$, и $s=10000$. Искомый капиталъ будетъ:

$$\mathrm{S}=\frac{10000}{(1,04)^{20}}(104^{16}+(1,04)^{\frac{25}{2}}+1,04^{10}+1,04^{\frac{23}{3}}).$$

$\log 1,04=0,017.03334$
$16 \log 1,04=0,272,5334$, его число $1,87299$;
$\frac{25}{2} \log 1,04=0,212,9167$,............$1,63274$;
$10 \log 1,04=0,170,3334$,............$1,48024$;
$\frac{23}{3} \log 1,04=0,130,5889$,............$1,35079$;
Сумма$=6,33676$

$$\mathrm{S}=\frac{63367,6}{(1,04)^{20}}.$$

$\log 63367,6=4,801.8672$
$20 \log 1,04=0,340.6668$
$4,461.2004=\log\mathrm{S}$.

Отсюда, $\mathrm{S}=28920,14$.

Таковъ искомый капиталъ, который теперь надобно положить на приращеніе процентами, чтобы каждый наслѣдникъ, при 20ти-лѣтнемъ возрастѣ, могъ получить 10000 рублей.

Настоящія же цѣны $a$, $b$, $c$, $d$, участковъ найдутся изъ отношеній:

$$a(1{,}04)^{20}=s(1{,}04)^{16},\ \ b(1{,}04)^{20}=s(1{,}04)^{\frac{25}{2}},$$

$$c(1{,}04)^{20}=s(1{,}04)^{10},\ \ d(1{,}04)^{20}=s(1{,}04)^{\frac{23}{3}},$$

а именно: $a=8548{,}04$

$b=7451{,}61$

$c=6755{,}64$

$d=6164{,}84$.

**298.** Когда уплачивается какой ни есть вексель до срока, въ немъ означеннаго, то, при этомъ, должнику дѣлается соразмѣрное вознагражденіе, называемое *учётомъ*. Учётъ состоитъ въ исключеніи процентовъ изъ вексельной суммы за все остальное время до срока, или дѣлается по какому ни есть иному условію съ кредиторомъ.

Положимъ, что вексель, который чрезъ $n$ лѣтъ стоитъ S рублей, уплачивается $k$ годами ранѣе срока, то есть, по прошествіи $n-k$ годовъ. Назовемъ чрезъ $r\frac{0}{0}$ его проценты съ рубля въ годъ, которые надобно исключить изъ вексельной суммы S за остальное время до срока; то настоящая цѣна векселю, которую надобно заплатить кредитору, найдется, раздѣливъ S на $(1+r)^k$.

Въ самомъ дѣлѣ, начальный капиталъ A, чрезъ $n$ годовъ, сдѣлался бы $S=A(1+r)^n$; онъ же чрезъ $n-k$ годовъ былъ бы только $S'=A(1+r)^{n-k}$. Отсюда

$$\frac{S}{S'}=(1+r)^k,\ \ S'=\frac{S}{(1+r)^k}.$$

Такова должна быть плата за вексель. Разность $S-S'$ покажетъ величину учёта.

Задача 1. — *Вексель въ 4572,5 рублей уплачивается тремя годами раньше срока, съ учётомъ по 0,05$\frac{0}{0}$ съ рубля въ годъ; требуется найти его цѣну къ этому времени уплаты.*

$$S'=\frac{4572{,}5}{(1{,}05)^3}$$

$$\log S'=\log 4572{,}5-3\log(1{,}05)$$

$$=3{,}596.5858$$

$$S'=3949{,}89 \text{ рублей}.$$

Такова цѣна векселю за три года до срока.

Величина же учёта $=S-S'=622{,}61$ рублей.

Задача 2. — *Лѣсной участокъ, отъ насажденія въ немъ лѣса, чрезъ 10 лѣтъ имѣетъ цѣну 400 рублей серебромъ. Этотъ же участокъ, чрезъ каждые 20 лѣтъ потомъ можетъ приносить доходу 700 руб. серебромъ, и требуетъ каждогоднаго расхода 7 руб. серебромъ. Спрашивается: какъ велика настоящая цѣна этому участку, т. е. цѣна въ началѣ перваго года.*

Перемежающійся доходъ 700 рублей, имѣющій поступить чрезъ 30, 50, 70,.... лѣтъ, въ началѣ 10-го года, при 0,05$\frac{0}{0}$ процентахъ въ годъ, имѣетъ цѣну (стран. 260, зад. 3.)

$$\frac{700}{(1,05)^{20}-1}=\frac{700}{1,6533}=423,395 \text{ руб}$$

Сюда придадимъ цѣну участка $=400$ » »

получится 823,395 руб.

вся цѣна участка въ концѣ 10-го года. Теперь, чтобы найти его цѣну въ началѣ перваго года, надобно сдѣлать учётъ за 10 лѣтъ:

$$\frac{823,395}{(1,05)^{10}}=\frac{823,395}{1,62889}=505,50 \text{ рублей.}$$

Изъ этого надобно исключить расходъ $7\times20=140$ рублей во всѣ 20 лѣтъ, то и получится

$$505,50-140=365,50 \text{ руб. сер.,}$$

настоящая цѣна лѣснаго участка.

**299.** Вопросъ второй. — *Капиталъ A отданъ въ ростъ по r*$\frac{0}{0}$ *съ рубля въ годъ, и сверхъ того увеличивается (либо уменьшается) въ концѣ 1-го, 2-го, 3-го,.... года соотвѣтственно количествами* $a_1$, $a_2$, $a_3$,....$a_n$, *рублей, кромѣ процентовъ, которые къ нему причисляются; найти, какъ великъ сдѣлается весь этотъ капиталъ по прошествіи n годовъ?*

Капиталъ A чрезъ $n$ годовъ сдѣлается $A(1+r)^n$;
– – $a_1$ – $n-1$ – – $a_1(1+r)^{n-1}$,
– – $a_2$ – $n-2$ – – $a_2(1+r)^{n-2}$,
..........................................................................
– – $a_{n-1}$ – 1 – – $a_{n-1}(1+r)$,
– – $a_n$ – 0 – – $a_n$.

Слѣдовательно, весь капиталъ, въ концѣ $n$ годовъ будетъ:

$$S=A(1+r)^n\pm\left\{a_1(1+r)^{n-1}+a_2(1+r)^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}(1+r)+a_n\right\},$$

или, полагая для краткости $1+r=w$, будетъ:

$$S=Aw^n\pm(a_1w^{n-1}+a_2w^{n-2}+\ldots+a_{n-1}w+a_n).$$

Если $a_1=a_2=a_3=\ldots=a$, то

$$S=Aw^n\pm a(w^{n-1}+w^{n-2}+\ldots\ldots+w+1), \text{ или}$$

$$S=Aw^n\pm\frac{a}{r}(w^n-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Знакъ $+$ соотвѣтствуетъ случаю, когда капиталъ A каждогодно увеличивается постоянною суммою $a$; если же онъ каждогодно уменьшается этою суммою, то надобно взять знакъ $-$.

Если, по прошествіи $n$ годовъ, не вносится прибавочная сумма $a$, то изъ найденнаго капитала S надобно будетъ вычесть одно $a$.

Принимая формулу съ знакомъ $+$, получаемъ:

$$S = Aw^n + \frac{a}{r}(w^n - 1) = \frac{(Ar+a)w^n - a}{r} \dots\dots\dots\dots (2)$$

Отсюда:

$$A = (S + \frac{a}{r})\frac{1}{w^n} - \frac{a}{r} \dots\dots (3)$$

$$a = \frac{r(S - Aw^n]}{w^n - 1} \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

$$w^n = \frac{Sr+a}{Ar+a}, \text{ и}$$

$$n = \frac{\log(Sr+a) - \log(Ar+a)}{\log w} \dots (5)$$

**300.** Но, положимъ, что *капиталъ S составляется только изъ суммъ a, a, a,...., вносимыхъ въ началѣ каждаго года,* то эти деньги, *по прошествіи годовъ*

$$n, \quad n-1, \quad n-2, \dots\dots\dots 3, \quad 2, \quad 1, \text{ обратятся въ}$$

$$aw^n, \quad aw^{n-1}, \quad aw^{n-2}, \dots\dots aw^3, \; aw^2, \; aw,$$

и, въ сложности, составятъ

$$S = aw(w^{n+1} + w^{n+2} + \dots\dots + w^2 + w + 1)$$

$$= \frac{aw(w^n - 1)}{w - 1}, \text{ или}$$

$$S = \frac{a}{r}(w^{n+1} - w) \dots\dots\dots\dots (6)$$

Отсюда: $$a = \frac{Sr}{w^{n+1} - w} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

Когда равныя суммы $a$, $a$, $a$,..... вносятся *въ началѣ каждаго мѣсяца;* тогда $n$ будетъ означать число мѣсяцовъ, $r\frac{\circ}{\circ}$ проценты съ рубля за каждый мѣсяцъ, и окончательный капиталъ S найдется по формулѣ (6).

**301.** Если бы нужно было знать величину капитала не по прошествіи $n$ годовъ, *но въ началѣ n-го года;* то, въ началѣ годовъ

$$n, \; n-1, \; n-2, \dots\dots\dots 3, \; 2, \; 1,$$

капиталы $a$, $a$, $a$,...., вносимые каждогодно, сдѣлаются:

$$aw^{n+1}, \; aw^{n+2}, \; aw^{n+3}, \dots\dots aw^2, \; aw, \; a,$$

и, въ сложности, составятъ

$$S = a(w^{n-1} + w^{n-2} + w^{n-3} + \dots\dots + w + 1), \text{ или}$$

$$S = \frac{a}{r}(w^n - 1) \dots\dots\dots\dots (8)$$

Отсюда: $$a = \frac{Sr}{w^n - 1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

$$w^n = \frac{Sr+a}{a}, \text{ и}$$

$$n \log w = \log(Sr+a) - \log a \dots\dots (10)$$

**302.** Положимъ теперь, что капиталъ A, отданный въ ростъ по $r\frac{0}{0}$ съ рубля въ годъ, *уменьшается каждогодно количествомъ $a$, и требуется знать, во сколько лѣтъ онъ совсѣмъ уничтожится.*

Тогда надобно взять формулу (2) съ знакомъ — предъ $a$, и положить $S=0$; найдется:

$$(Ar-a)w^n+a=0; \text{ откуда}$$

$$w^n=\frac{a}{a-Ar}, \text{ и}$$

$$n=\frac{\log a-\log(a-Ar)}{\log w} \text{......}(11)$$

$$A=\frac{a}{r}\left(1-\frac{1}{w^n}\right) \text{..........}(12).$$

$$a=\frac{Ar}{1-\frac{1}{w^n}} \text{..............}(13).$$

**303.** Перейдемъ теперь къ рѣшенію частныхъ задачь.

Задача 1. — *Капиталъ 8000 руб. сереб. отданъ въ Ломбардъ на приращеніе процентами по 0,04$\frac{0}{0}$ съ рубля въ годъ, и послѣ каждаго года увеличивается постояннымъ взносомъ 600 рублей; узнать, какъ великъ онъ будетъ чрезъ 10 лѣтъ?*

Возмемъ формулу (2), и въ нее подставимъ $A=8000$, $a=600$, $n=10$, $r=0,04$, $w=1+r=1,04$; получится:

$$S=\frac{(Ar+a)w^n-a}{r}=\frac{(8000.0,04+600)1,04^{10}-600}{0,04}$$

$$=23000.1,04^{10}-15000.$$

$$\log 23000.1,04^{10}=\log 23000+10\log 1,04$$

$$=4,532.0612;$$

этому соотвѣтствуетъ число 34045,60.

И такъ, $S=34045,60-15000=19045,60$ рублей. Такимъ сдѣлается весь капиталъ чрезъ 10 лѣтъ.

Если въ концѣ 10-го года не внесено 600 рублей, то ихъ надобно выключить; и получится:

$$19045,60-600=18445,60 \text{ рублей.}$$

Задача 2. — *Найти, какой капиталъ надобно отдать въ ростъ, по 0,04$\frac{0}{0}$ съ рубля въ годъ, чтобы онъ, по прошествіи 8 годовъ обратился въ 10000 рублей, предполагая, что, послѣ каждаго года, онъ не только будетъ увеличиваться своими процентами, но еще постояннымъ взносомъ по 300 рублей.*

Искомый капиталъ A найдется изъ формулы (3),

$$A=\left(S+\frac{a}{r}\right)\frac{1}{w^n}-\frac{a}{r},$$

подставивъ въ нее $S=10000$, $a=300$, $r=0,04$, $w=1,04$, $n=8$:

$$A=\frac{17500}{(1,04)^8}-7500=5287,10 \text{ рублей.}$$

**Задача 3.** — *Капиталъ 3600 рублей положенъ въ ломбардъ на приращенiе процентами по 0,04%; требуется найти, по скольку а рублей надобно вносить каждогодно, чтобы по прошествiи 10 годовъ составился капиталъ 10000 рублей.*—Это рѣшается формулою (4):

$$a=\frac{r(S-Aw^n)}{w^n-1}.$$

подставляя въ нее $S=10000$, $A=3600$, $n=10$, $r=0,04$, $w=1,04$.

$$a=\frac{0,04(10000-3600.1,04^{10})}{1,04^{10}-1};$$

$$\log 1,04^{10}=10 \log 1,04=0,170.3334,$$

$$1,04^{10}=1,480244; \text{ посему}$$

$$a=\frac{10000-5328,8784}{12,0061}=389,06 \text{ руб.}$$

По столько надобно вносить каждогодно, чтобы составился капиталъ 10000 рублей чрезъ 10 лѣтъ.

**Задача 4.** — *Найти во сколько лѣтъ капиталъ 12000 рублей, отданный въ ростъ по 0,04% съ рубля въ годъ, и къ которому каждогодно прибавляется постоянная сумма 600 рублей, обратится въ 30000 рублей.*—Неизвѣстное число лѣтъ опредѣляется формулою (5):

$$n=\frac{\log(Sr+a)-\log(Ar+a)}{\log w},$$

подставляя въ нее $S=30000$, $A=12000$, $a=600$, $r=0,04$, $w=1,04$. Найдется:

$$n=\frac{\log 1800-\log 1080}{\log 1,04}=\frac{0,221.8487}{0,017.0333}$$

$$n=13,024 \text{ года.}$$

Во столько лѣтъ составится капиталъ въ 30000 рублей.

**Задача 5.** — *Извощикъ вноситъ 10 рублей серебромъ каждый мѣсяцъ въ сберегательную кассу на приращенiе процентами, по 0,04% съ рубля въ годъ, и это продолжаетъ непрерывно 12 лѣтъ; спрашивается, какъ великъ составится его капиталъ въ концѣ этого времени?*

Если 0,04 проценты въ годъ, то проценты въ мѣсяцъ найдутся, розыскивая, во что обратится 1 рубль въ мѣсяцъ или въ $\frac{1}{12}$ часть года, изъ

$$(1,04)^{\frac{1}{12}}=1+r_1.$$

$$\log(1+r_1)=\frac{1}{12}.0,017.03334=0,001.41944;$$

$$1+r_1=1,003273$$

$$r_1=0,003273.$$

Послѣ этого, по формулѣ (6) найдется капиталъ

$$S = \frac{a}{r_1}(w^{n+1} - w),$$

подставивъ $a = 10$, $r_1 = 0,003273$, $w = 1,003273$, $n = 12$ годовъ $= 144$ мѣсяцовъ, а именно:

$$S = \frac{10.(1,003273^{145} - w)}{0,003273} = \frac{10.0,602827}{0.003273}$$

$$= 1841,87 \text{ рублей серебромъ.}$$

Таковъ составится капиталъ чрезъ 12 лѣтъ.—Если въ послѣдній мѣсяцъ не было внесено 10-ти рублей, то ихъ надобно исключить изъ этой суммы, и будетъ 1831,87 руб.

**Задача 6.**—*Вдова, получившая въ наслѣдство капиталъ 9875 руб. серебромъ, отдаетъ его въ ломбардъ по 0,04% съ рубля въ годъ, и, по прошествіи каждаго года, намѣрена получать обратно для своего содержанія по 720 руб. серебромъ. Спрашивается: во сколько лѣтъ весь этотъ капиталъ съ процентами уничтожится* (выплатится)?

Годовой процентъ съ этого капитала

$$= 9875 \times 0,04 = 395 \text{ рублей.}$$

Если брать, по прошествіи каждаго года, менѣе 395 рублей, то капиталъ все еще будетъ увеличиваться. Онъ останется неизмѣннымъ, если бы стали брать одни его проценты годовые 395; но онъ будетъ уменьшаться, если брать $>$ 395 рублей послѣ каждаго года. По условію задачи, требуется получать обратно по 720 рублей, по прошествіи каждаго года; стало-быть, капиталъ 9875, не смотря на его приращеніе процентами, будетъ уменьшаться. Чтобъ узнать, во сколько лѣтъ онъ весь истощится, возмемъ формулу (11):

$$n = \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log w},$$

и въ нее подставимъ $A = 9875$, $a = 720$, $r = 0,04$, $w = 1,04$; получится:

$$n = \frac{\log 720 - \log(720 - 395)}{\log 1,04}$$

$$= \frac{0,345.4491}{0,017.0333} = 20 \text{ год.} + 3\tfrac{1}{4} \text{ мѣсяца.}$$

Слѣдовательно, этотъ капиталъ съ процентами уничтожится чрезъ 20 лѣтъ и $3\frac{1}{4}$ мѣсяца.

**Задача 7.** — *Фабрикантъ желаетъ опредѣлить, какую сумму денегъ можетъ онъ занять для поправленія своей фабрики, по 0,06% съ рубля въ годъ, съ тѣмъ, чтобы погасить весь этотъ долгъ въ 5 лѣтъ, уплачивая по 1500 руб. серебромъ по истеченіи каждаго года?*

Тутъ надобно употребить формулу (12):

$$A = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{w^n}\right),$$

и въ нее подставить $a=1500$, $r=0,06$, $w=1,06$, $n=5$; получится:

$$A=25000-\frac{25000}{1,06^5}.$$

$$\log 25000=4,397.9400$$
$$10 \log 1,06=0,126.5295$$
$$\overline{\phantom{0}4,271.4105;}$$

этому соотвѣтствуетъ число 18681,46; слѣдовательно,

$$A=25000-18681,40=6318,6 \text{ рублей.}$$

Такія деньги можно занять по условіямъ задачи.

Задача 8. — *Купленъ домъ за 10000 рублей серебромъ на такомъ условіи, чтобы при покупкѣ заплатить только 1500 рублей, а остальной долгъ 8500 рублей съ его процентами, по 0,05%, уплатить равными частями въ теченіе 10 лѣтъ, представляя деньги по прошествіи каждаго года; требуется найти эту каждогодную уплату.* — Мы найдемъ ее по формулѣ (13):

$$a=\frac{Ar}{1-\frac{1}{w^n}},$$

подставивши $A=8500$, $r=0,05$, $w=1,05$, $n=10$; и будетъ

$$a=\frac{8500.0,05}{1-\frac{1}{(1,05)^{10}}}=\frac{425}{1-0,61391}=1100,80 \text{ рублей серебромъ.}$$

Такова должна быть каждогодная уплата для погашенія долга 8500 рублей въ десять лѣтъ.

Задача 9.—*Для прорытія и устройства судоходнаго канала исчисленъ расходъ въ 1000000 рублей серебромъ. Компанія капиталистовъ беретъ на себя исполненіе этого предпріятія, а въ вознагражденіе за это получаетъ отъ правительства право пользоваться на 100 лѣтъ пошлиною съ судовъ, которыя будутъ ходить по этому каналу. Спрашивается: какъ великъ долженъ быть годовой доходъ отъ сей пошлины для компаніи?*

Эта компанія должна каждогодно выручать по крайней мѣрѣ проценты съ употребленнаго ею милліона рублей, и еще доходъ для возвращенія этого капитала. Слѣдовательно, вся предполагаемая выручка должна быть $Sr+a$, означая чрезъ $S$ употребленный милліонъ рублей, чрезъ $a$ сумму каждогодную для его погашенія. Эту послѣднюю сумму надобно вычислять по формулѣ (7), потому что деньги на устройство канала потребны вначалѣ каждаго года:

$$a=\frac{Sr}{w^{n+1}-w}.$$

Положивъ $S=1000000$, $r=0,05$, $n=100$, $w=1,05$, найдемъ:

$$a=\frac{1000000\times0,05}{1,05^{101}-1,05}$$

$$101 \log 1,05=2,140.1192$$

$$1,05^{101}=138,076; \text{ посему,}$$

$$a=\frac{50000}{137,026}=364,91 \text{ руб.}$$

$$Sr+a=50000+364,91=50364,91 \text{ рублей.}$$

Такова должна быть годовая выручка отъ этого канала, чтобы можно было чрезъ 100 лѣтъ возвратить милліонъ рублей съ его процентами.

Но, положимъ, что, не смотря на сдѣланную смѣту, правительство приглашаетъ капиталистовъ къ торгу, посредствомъ котораго желаетъ выиграть себѣ уступку въ числѣ годовъ сбора пошлины съ судовъ по тому каналу. Компанія, находя смѣту въ 1000000 рублей серебромъ выгодною для себя даже и при уменьшеніи времени, дѣлаетъ сбавку на 15 лѣтъ. Спрашивается: сколько выигрываетъ казна отъ этой сбавки во времени, и какъ велика уступка отъ компаніи?

Назовемъ чрезъ $S'$ сумму на устройство канала послѣ сбавки во времени. А поелику компанія все же должна употребить 1000000 рублей на эту постройку; то выручка съ судоходства по каналу должна остаться та же 50364,91 руб. серебромъ, только эта выручка теперь должна состоять изъ годовыхъ процентовъ съ капитала $S'$ и суммы $a'$, которою къ ней надобно придать, чтобъ возвратить этотъ капиталъ въ 85 лѣтъ:

$$S'r+a'=50364,91, \text{ откуда}$$

$$a'=50364,91-S'r.$$

Капиталъ $S'$ найдется по формулѣ (6):

$$S'=\frac{a'}{r}(w^{n+1}-w) \text{ изъ которой}$$

$$S'r=a'(w^{n+1}-w);$$

да изъ $a'=50364,91-S'r$, имѣетъ тоже

$$S'r=50364,91-a'; \text{ стало-быть,}$$

$$a'(w^{n+1}-w)=50364,91-a'; \text{ откуда}$$

$$a'=\frac{50364,91}{w^{n+1}-r}.$$

Теперь положимъ $n=85$, $r=0,05$, $w=1,05$:

$$a'=\frac{50364,91}{(1,05)^{86}-0,05}$$

$$86 \log 1,05=1,822.2798; \; 1,05^{86}=66,41707;$$

$$a'=\frac{50364,91}{66,36707}=758,88.$$

Послѣ сего найдутся проценты:

$$S'r=50364,91-758,88=49606,03,$$

$$S'=\frac{49606,03}{0,05}=992120,6 \text{ рублей.}$$

Разность 1000000—992120,6=7879,4 рублей серебромъ представляетъ сбавку отъ компаніи, и выигрышъ въ пользу казны. Она менѣе $\frac{4}{5}$ процента съ милліона рублей.

**Задача 10.** — *Мужъ, въ продолженіе 25 годовъ, вносилъ каждогодно по 32 рубля серебромъ во вдовью кассу* *), *съ тѣмъ, чтобы, послѣ его смерти, жена его, четыре года сряду, могла получать нѣкоторый постоянный доходъ изъ этихъ денегъ и ихъ процентовъ. Чрезъ 25 лѣтъ мужъ умираетъ; вдова его, 4 года сряду, получаетъ изъ этой кассы, по 368 рублей серебромъ. Спрашивается: сколько выигрываетъ чрезъ это вдовья касса?*

Не обращая вниманія на проценты, мы нашли бы, что мужъ внесъ въ кассу 32×25=800 рублей серебромъ, а жена его въ 4 года получила 368×4=1472 рубля, и вывели бы изъ этого совсѣмъ ложное заключеніе, что вдовья касса чрезъ это потеряла 1472—800=672 рубля. Но, принимая въ соображеніе проценты по 0,05% съ рубля въ годъ, найдется, что, въ теченіе 25 годовъ, отъ каждогодныхъ взносовъ по 32 рубля, составился въ кассѣ капиталъ (8):

$$S=\frac{a}{r}(w^n-1)=\frac{32(1,05^{25}-1)}{0,05}=640.2,386355$$

$$=1527,2672 \text{ рублей.}$$

Эта сумма остается еще на 4 года, по 0,05%, только изъ нея выдается вдовѣ каждогодно по 368 рублей. По прошествіи 4 лѣтъ, изъ этой суммы останется (1):

$$S'=1527,2672.1,05^4-\frac{368(1,05^4-1)}{0,05}$$

$$\begin{array}{r} 4\log 1,05=4\times 0,021.1893=0,084.7572 \\ \log 1527,2672=3,183.9150 \\ \hline 3,268.6722 \\ \text{число}=1856,402, \\ 1,05^4=1,21551; \end{array}$$

$$S'=1856,402-1586,154=270,25 \text{ рублей.}$$

Слѣдовательно, вдовья касса не только не потеряла, но еще пріобрѣла $270\frac{1}{4}$ рублей.

---

*) Кассою вдовьею, сиротскою, пенсіонною, называется такое заведеніе, кдуа всякій можетъ вносить каждогодно опредѣленную сумму денегъ, чтобы, по прошествіи условнаго срока либо извѣстнаго числа лѣтъ, пріобрѣсть право себѣ или другому лицу (напримѣръ вдовѣ по смерти ея мужа, сиротѣ, оставшейся послѣ отца или покровителя, который вносилъ деньги въ кассу для будущаго ихъ обезпеченія, и проч.) получить отъ этого заведенія опредѣленный доходъ (пенсіонъ). Такіе доходы называются *временными*, если они простираются на опредѣленное число сроковъ; но они называются *пожизненными*, если прекращаются съ жизнію особы, которая пользуется доходомъ. Съ этою цѣлію въ Россіи существуетъ *Общество застрахованія единовременныхъ капиталовъ* или *пожизненныхъ доходовъ*. См. въ *Руководствѣ къ Политической Ариѳметикѣ*, Бруна. Одесса. 1845.

**Задача 11.** — *Какой капиталъ должно отдать въ сохранную казну на 15 лѣтъ на приращеніе процентами, чтобы послѣ того 20 лѣтъ пользоваться каждогоднымъ доходомъ 1000 рублей серебромъ.*

Назовемъ этотъ капиталъ чрезъ $S'$, $r=0,05$ проценты съ рубля въ годъ. Онъ, по прошествіи 15 лѣтъ сдѣлается $=S'(1+r)^{15}=S'1,05^{15}$; а чтобы онъ уничтожился чрезъ 20 лѣтъ, когда будемъ брать каждогодно по 1000 рублей. надобно чтобъ удовлетворялась формула (12), то есть, чтобъ было

$$S'1,05^{15}=\frac{1000}{0,05}\left(1-\frac{1}{1,05^{20}}\right).$$

Чрезъ вычисленіе по логариѳмамъ, или по таблицамъ процентовъ, найдется:

$$1,05^{15}=2,07893;\ \frac{1}{1,05^{20}}=0,37689;$$

$$S'.2,07893=20000.0,62311,$$

$$S'=6000 \text{ руб. сер. (почти).}$$

**Задача 12.** — *По скольку рублей $x$ надобно вносить каждогодно въ сохранную казну въ продолженіе $n$ лѣтъ, чтобы потомъ за это можно было получать каждогодно доходъ $a$ въ продолженіе $m$ лѣтъ, и притомъ въ началѣ каждаго года?*

Пусть $r\frac{0}{0}$ проценты съ рубля въ годъ, $1+r=w$. Каждогодный взносъ $x$ рублей, вначалѣ $n$-го года, составитъ (8) капиталъ

$$\frac{x}{r}(w^n-1);$$

а каждогодный доходъ $a$, который за тѣмъ надобно получить въ продолженіе $m$ годовъ, соотвѣтствуетъ (12) капиталу

$$\frac{a}{r}\left(1-\frac{1}{w^m}\right),$$

который долженъ быть равенъ предыдущиму; посему

$$x(w^n-1)=a\left(1-\frac{1}{w^m}\right)$$

$$x=\frac{a\left(1-\frac{1}{w^m}\right)}{w^n-1}\ \ldots\ldots\ldots(14).$$

Пусть $n=25$ годовъ, $m=20$, $a=700$ руб. серебромъ, $r=0,05$; то

$$x=\frac{700\left(1-\frac{1}{1,05^{20}}\right)}{1,05^{25}-1}$$

$$1,05^{25}=3,38636;\ \frac{1}{1,05^{20}}=0,376885;$$

$$x=\frac{700.0,623115}{2,38636}=182,78 \text{ руб.}$$

Таковъ долженъ быть каждогодный вносъ 25 лѣтъ, чтобы можно было послѣ того получать доходъ 700 рублей серебромъ каждогодно въ продолженіе 20 годовъ.

*Примѣчаніе.* Если эту сумму вносилъ мужъ во вдовью кассу для обезпеченія своей жены, и умеръ по прошествіи 25 годовъ, то касса обязана 20 лѣтъ сряду производить его вдовѣ пенсію по 700 рублей серебромъ въ годъ.

Если въ формулу (15) подставить, на мѣсто $n$, вѣроятное продолженіе жизни мужа, опредѣляемое по *таблицамъ смертности*, а вмѣсто $m$ вѣроятное продолженіе жизни вдовы послѣ него, то опредѣлится годовой взносъ $x$ рублей, которые мужъ долженъ вносить въ страховое общество или во вдовью кассу, чтобы вдовѣ, по смерти его, выдавался пожизненный пенсіонъ 700 рублей серебромъ каждогодно.

**Задача 13.** — *Годовой доходъ $a$ рублей, продолжающійся $n$ лѣтъ, промѣнять на другой доходъ $a'$, уплатимый въ $m$ лѣтъ.*

Пусть $r^0_0$ проценты съ рубля въ годъ; то будетъ

$$\text{цѣна перваго дохода} = \frac{a}{r}\left(1-\frac{1}{w^n}\right),$$

$$\text{– втораго –} = \frac{a'}{r}\left(1-\frac{1}{w^m}\right).$$

Они равны; слѣдовательно,

$$a : a' = 1-\frac{1}{w^m} : 1-\frac{1}{w^n},$$

$$a' = \frac{a\left(1-\frac{1}{w^n}\right)}{1-\frac{1}{w^m}}.$$

*Примѣръ:* Годовой доходъ 360 руб. серебромъ, простирающійся на 12 лѣтъ, замѣнить другимъ $a'$, уплатимымъ въ 7 лѣтъ.—Здѣсь $n=12$, $m=7$, $a=360$, $r=0,04$, $w=1,04$;

$$a' = \frac{360\left(1-\frac{1}{1,04^{12}}\right)}{1-\frac{1}{1,04^7}}.$$

$$\frac{1}{1,04^{12}} = 0,624597;\ \frac{1}{1,04^7} = 0,759918,$$

$$a' = \frac{360.0,375403}{0,240082} = 562,91 \text{ рублей}.$$

Такой доходъ можно получать въ теченіе 7 годовъ на мѣсто 360 рублей.

**Задача 14.** — *Для обезпеченія чиновниковъ послѣ 32-лѣтней ихъ службы пожизненною пенсіею, равною половинѣ ихъ жалованья, какіе проценты надобно удерживать изъ ихъ жалованья во все это время службы?*

Предположимъ, что производство общественныхъ дѣлъ (служба) находится въ самомъ началѣ своего учрежденія, что въ службу вступаютъ имѣющіе возрастъ 23 года, и примемъ за 1-цу средній окладъ жалованья чиновнику. Таблица смертности *Зюсмильха* и *Баумана* [*]) показываетъ, что изъ 1000 человѣкъ родившихся, чрезъ 23 года остаются въ живыхъ 476. Возмемъ это число 476 за полный комплектъ чиновниковъ. Та же таблица смертности показываетъ, что изъ этихъ чиновниковъ, чрезъ 32 года, останутся только 255, имѣющихъ возрастъ 55 лѣтъ. Это число чиновниковъ, по всей вѣроятности, доживетъ до пожизненной пенсіи. Такимъ образомъ, спустя 32 года послѣ начала службы, число пожизненныхъ пенсій будетъ простираться до $\frac{255}{2}=128$ окладовъ жалованья.

Для приведенія въ дѣйствительность этихъ пенсій, надобно, чтобы пенсіонная касса, въ 32 года, чрезъ обращеніе вычетовъ изъ жалованья, пріобрѣла капиталъ S, котораго годовой процентъ равнялся бы 128 окладамъ жалованья, безъ суммы $a$ всѣхъ вычетовъ за послѣдній годъ, то есть:

$$Sr=128-a.$$

Тогда годичная сумма $a$ вычетовъ опредѣлится уравненіемъ:

$$a=\frac{Sr}{w^{n+1}-w}=\frac{128-a}{w^{n+1}-w}.$$

Сюда подставимъ $n=32$ года, $w=1,05$; получимъ

$$a=\frac{128-a}{3,9532}; \text{ откуда}$$

$$a=\frac{128}{4,9532}=25,85$$ окладовъ жалованья, что составляетъ почти $5\frac{1}{2}\,\frac{0}{0}$ со всей штатной массы 476 окладовъ.

Разумѣется, что только, по прошествіи 32 лѣтъ, пенсіонная касса должна начать производить выдачи пенсій; и если она къ этому времени дѣйствительно въ томъ успѣетъ, то ея дѣйствіе обезпечено будетъ на будущее время.

**304.** *Случай.* — Если капиталъ A, отданный въ ростъ по $r\frac{0}{0}$ съ рубля въ годъ, увеличивается или уменьшается по $a$ рублей не каждогодно, а періодически чрезъ $\delta$ годовъ, такъ что первый взносъ послѣдуетъ не послѣ $n-1$, но послѣ $n-\delta$ годовъ; то, для вычисленія будущей цѣны S этого капитала, составится рядъ:

$$S=Aw^n\pm a(w^{n-\delta}+w^{n-2\delta}+w^{n-3\delta}+\ldots\ldots..+w^{\delta}+1)$$
$$=Aw^n\pm a\left(\frac{w^n-1}{w^{\delta}-1}\right).$$

Если $a$ означаетъ періодическую *уплату*, то надобно взять знакъ —. Чтобы сумма S вся выплатилась, должно положить $S=0$; тогда найдется:

$$Aw^n=\frac{a(w^n-1)}{w^{\delta}-1}; \text{ откуда } a=\frac{A(w^{\delta}-1)}{1-\frac{1}{w^n}}.$$

---

[*]) Собраніе такихъ таблицъ см. въ ***Руководствѣ къ Политической Ариѳметикѣ Бруна.***

*Примѣръ.*—Купленъ лѣсъ за 3000 рублей серебромъ, съ условіемъ, чтобы покупщикъ выплатилъ эти деньги въ три равные срока, а именно: въ концѣ 4, 8 и 12 годовъ; узнать, сколько онъ долженъ платить въ эти сроки, полагая проценты 0,04 съ рубля въ годъ?

Здѣсь $n=12$ лѣтъ всей уплаты.

$\delta=4$—годичные сроки;

$$a=\frac{3000(1,04^4-1)}{1-\frac{1}{1,04^{12}}}=\frac{3000.0,16986}{1-0,62460}=1357,4 \text{ руб. серебромъ.}$$

Такова должна быть періодическая уплата чрезъ каждые 4 года, чтобы погасить весь долгъ въ 3000 рублей серебромъ.

## ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.

### ПЕРЕЛОЖЕНІЯ, СОЧЕТАНІЯ, И РАЗЛИЧНЫЯ СОЕДИНЕНІЯ ИЗЪ ДАННАГО ЧИСЛА БУКВЪ, И ОПРЕДѢЛЕНІЕ ИХЪ СУММЫ.

**305.** Въ наукѣ, искусствахъ, и частной жизни вообще, не рѣдко встрѣчаются такіе вопросы, для разрѣшенія которыхъ необходимо нужно знать: сколько изъ даннаго числа $a$, $b$, $c$,.... предметовъ можно сдѣлать различныхъ перемѣщеній, располагая ихъ одинъ за другимъ; сколько можно сдѣлать всякихъ сочетаній изъ этихъ предметовъ, совокупляя ихъ по два, по три, и т. д., или сколько различныхъ соединеній. Часть Алгебры, въ которой содержится ученіе объ этомъ предметѣ, называется *Синтактикою.* Предметы для переложеній или совокупленія изображаются буквами, а въ частныхъ случаяхъ цифрами.

**306.** Между данными предметами $a$, $b$, $c$,.... можно дѣлать перестановленія, сочетанія безъ повтореній или съ повтореніями, и различныя соединенія безъ повтореній либо также съ повтореніями.

*Перемѣщеніями* (переложеніями, перестановленіями, Permutations) называются выводы, получаемые отъ расположенія даннаго числа предметовъ или буквъ, однѣхъ за другими, всевозможно различными образами. Въ каждомъ выводѣ находятся всѣ данныя буквы, но ихъ расположеніе различно. Напримѣръ двѣ буквы $a$, $b$, даютъ только два перемѣщенія $ab$, $ba$; изъ трехъ буквъ $a$, $b$, $c$, можно сдѣлать только шесть перестановленій $abc$, $acb$, $bac$, $bca$, $cab$, $cba$.

*Сочетаніями* (Variations, arrangemens) называются всѣ выводы, какіе можно получить изъ даннаго числа буквъ, совокупляя ихъ всевозможными образами по двѣ, по три,.... *), напримѣръ изъ трехъ буквъ $a$, $b$, $c$, совокупляя ихъ по двѣ, можно сдѣлать шесть сочетаній:

$$ab,\ ac,\ bc,$$
$$ba,\ ca,\ cb,$$

безъ повторенія той же буквы.

*Соединеніями* (Combinaisons), или *различными произведеніями* называются такія сочетанія изъ даннаго числа буквъ по двѣ, или по три, и т. д., которыя состоятъ изъ равнаго числа буквъ, но различаются одно отъ другаго хотя одною буквою. Напримѣръ изъ трехъ буквъ $a$, $b$, $c$ можно составить двойныхъ соединеній, безъ повторенія той же буквы, только три $ab$, $ac$, $bc$; изъ четырехъ буквъ $a$, $b$, $c$, $d$, не дѣлая повторенія буквъ, можно составить шесть двойныхъ сединеній:

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd;$$

а тройныхъ соединеній будетъ только четыре:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

### 307. А. Найти число перемѣщеній изъ даннаго числа $m$ буквъ.

1) *Когда всѣ m буквъ различны.* — Въ этомъ случаѣ число или сумма перемѣщеній всегда равна произведенію чиселъ, составляющихъ прогрессію 1, 2, 3,.... до $m$, то есть:

$$P(m)=1.2.3....m.$$

И дѣйствительно, изъ двухъ буквъ $a$, $b$, можно сдѣлать два перемѣщенія $ab$, $ba$, то есть:

$$P(2)=1.2.$$

Изъ трехъ буквъ $a$, $b$, $c$, можно сдѣлать только шесть перемѣщеній: ибо мы знаемъ, что буквы $b$, $c$, даютъ два перемѣщенія $bc$, $cb$; приписавъ къ нимъ на первомъ мѣстѣ букву $a$, получатся также два переложенія $abc$, $acb$. А какъ всякая буква можетъ быть поставлена на первомъ мѣстѣ, а всѣхъ буквъ три; то очевидно, что число всѣхъ перемѣщеній изъ трехъ буквъ $a$, $b$, $c$, будетъ *два повторенное три раза*, то есть,

$$P(3)=2\times3=1.2.3.$$

Изъ четырехъ буквъ можно сдѣлать 24 перестановленія. Потому что изъ трехъ буквъ $b$, $c$, $d$, получаются 6 переложеній; столько же будетъ, если при каждомъ изъ нихъ поставимъ букву $a$ на первомъ мѣстѣ. А какъ всѣхъ буквъ 4,

---

*) Такія сочетанія дѣлаются или чрезъ сложеніе буквъ по двѣ, по три,.... или только чрезъ вычитаніе между ними, чрезъ умноженіе, и проч.

и каждая можетъ быть на первомъ мѣстѣ относительно прочихъ, то число всѣхъ перемѣщеній будетъ шесть взятое 4 раза, то есть,

$$P(4)=6\times4=1.2.3.4.$$

Такимъ же образомъ найдемъ, что изъ пяти буквъ $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, можно составить

$$P(5)=1.2.3.4.5 \text{ переложеній.}$$

И, наконецъ, вообще изъ $n$ буквъ число переложеній будетъ:

$$P(n)=1.2.3.4....n.$$

2) *Когда между данными n буквами находятся нѣкоторыя равныя.*—Возмемъ сочетаніе $aaabcde$, въ которомъ изъ семи буквъ находятся три равныя. Если бы три первыя буквы $aaa$ были различны, то онѣ сами по себѣ дали бы *шесть* разныхъ переложеній. А приписавъ остальныя четыре буквы $bcde$ на послѣднемъ мѣстѣ каждаго изъ этихъ переложеній, мы получили бы *шесть* же переложеній изъ всѣхъ 7-ми буквъ, въ которыхъ сочетаніе $bcde$ занимало бы послѣднее мѣсто. Но эти шесть, при равенствѣ трехъ первыхъ, обращаются только въ одно переложеніе. То же самое произойдетъ и со всѣми переложеніями, въ которыхъ буквы $b$, $c$, $d$, $e$ будутъ расположены въ другомъ порядкѣ, и будутъ занимать другія мѣста. Изъ этого слѣдуетъ, что въ нашемъ примѣрѣ число перемѣщеній будетъ въ шесть разъ менѣе, нежели въ томъ случаѣ, когда бы всѣ буквы были разныя. Посему, искомое число переложеній будетъ

$$\frac{P(7)}{P(3).1^3}=\frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.1.1.1}.$$

Для втораго примѣра возмемъ сочетаніе $aaabbde$. Въ немъ, кромѣ трехъ первыхъ буквъ равныхъ, находятся еще двѣ равныя буквы $b$, $b$, вмѣсто различныхъ $b$, $c$, какъ было въ предыдущемъ примѣрѣ; а потому два переложенія $bc$, $cb$, обращаются въ одно, и уменьшаютъ предыдущее число переложеній въ два раза. Отчего, искомое число переложеній будетъ

$$\frac{P(7)}{P(3)P(2).1^2}=\frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.1.2.1.1}.$$

И вообще, если между $n$ буквами находится одна буква $r$ разъ, другая $p$ разъ, третья $q$ разъ, то число перемѣщеній будетъ

$$\frac{P(n)}{P(p)P(q)P(r)}=\frac{1.2.3.4.....n}{1.2..p\times1.2...q\times1.2...r}.$$

*Примѣръ.* — Сочетаніе 111122233333, состоящее изъ 12 цифръ, допускаетъ число переложеній:

$$\frac{P(12)}{P(4)P(3)P(5)}=\frac{1.2.3.4.........12}{1.2.3.4\times1.2.3\times1.2.3.4.5}=27720.$$

*Примѣръ.*—Слово «***Математика***» имѣетъ 10 буквъ, изъ которыхъ *м* и *т* находятся по два раза, и *а* три раза. А потому изъ этихъ буквъ можно сдѣлать число переложеній:

$$\frac{P(10)}{P(2)P(2)P(3)}=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.1.2.1.2.3.1.1.1}=151200.$$

*Примѣръ.* — Найти число переложеній изъ буквъ имени *Lucullus.*

Это число будетъ:

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.1.2.3.1.1}=1120.$$

### B. НАЙТИ ЧИСЛО ВСѢХЪ СОЧЕТАНІЙ ИЗЪ $n$ БУКВЪ, ВЗЯТЫХЪ ПО ДВѢ, ПО ТРИ, ПО ЧЕТЫРЕ, И, ВООБЩЕ, ПО $r$ БУКВЪ.

1) *Безъ повторенія той же буквы въ каждомъ отдѣльномъ сочетаніи.*

Возмемъ число $n$ буквъ $a$, $b$, $c$, $d$,.... для составленія разныхъ сочетаній. Считая по одной буквѣ, получаемъ $n$ разныхъ количествъ.

А чтобы найти всѣ сочетанія этихъ буквъ *по двѣ,* безъ повтореній, возмемъ сперва букву $a$, и припишемъ ее къ каждой изъ прочихъ $n-1$ буквъ:

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$, $c$, $d$, $e$........ | получатся $n-1$ сочетаній<br>$ab$, $ac$, $ad$,.... по двѣ буквы. |

Потомъ возмемъ букву $b$, и припишемъ ее къ каждой изъ прочихъ $n-1$ буквъ:

| | | |
|---|---|---|
| $b$ | $a$, $c$, $d$, $e$........ | получается еще $n-1$ сочетаній<br>$ba$, $bc$, $bd$....., по двѣ буквы. |

Отдѣляя такимъ образомъ каждую букву, и соединяя съ каждою изъ прочихъ, получимъ столько разъ $n-1$ двойныхъ сочетаній, сколько всѣхъ буквъ, то есть, $n(n-1)$. Это число сочетаній изображается знакомъ

$$V_2(n)=n(n-1).$$

Въ немъ находятся не только различныя двойныя соединенія, но и одинакія, различающіяся только перестановкою буквъ, таковы: $ab$, $ba$, $ac$, $ca$, $bc$, $cb$,...

Для полученія всевозможныхъ сочетаній изъ $n$ буквъ *по три,* безъ повтореній, будемъ брать каждое двойное сочетаніе $ab$, $ba$, $ac$...., и ко всякому приписывать каждую изъ остальныхъ $n-2$ буквъ:

| | | $n-2$ сочетаній въ каждой строкѣ |
|---|---|---|
| $ab$ | $c$, $d$, $e$.......... | $abc$, $abd$, $abe$..... |
| $ba$ | $c$, $d$, $e$.......... | $bac$, $bad$, $bae$..... |
| $ac$ | $b$, $d$, $e$.......... | $acb$, $acd$, $ace$..... |
| $bc$ | $a$, $d$, $e$.......... | $bca$, $bcd$, $bce$..... |

..................................................

Въ каждой строкѣ получится $n-2$ сочетаній по три буквы; этихъ строкъ будетъ $n(n-1)$, потому что столько всѣхъ сочетаній двойныхъ изъ $n$ буквъ; слѣдовательно число всѣхъ тройныхъ сочетаній будетъ $n-2$, повторенное $n(n-1)$ разъ, то есть:

$$V_3(n)=n(n-1)(n-2).$$

Такимъ же образомъ нашли бы, что число сочетаній изъ $n$ буквъ *по четыре* равно

$$V_4(n)=n(n-1)(n-2)(n-3).$$

И наконецъ, вообще, число сочетаній изъ $n$ буквъ по $r$, безъ повтореній, очевидно, будетъ

$$Vr(n)=n(n-1)(n-2).....(n-r+1).$$

2) *Число сочетаній изъ $n$ буквъ $a$, $b$, $c$, $d$,...., съ повтореніями каждой.*

Для полученія *двойныхъ сочетаній* съ повтореніями, беру букву $a$, и къ ней приписываю каждую изъ $n$ буквъ:

$$\begin{array}{c|l|l}
a & a,\ b,\ c,\ldots\ldots & \text{получаю } aa,\ ab,\ ac,\ldots \text{ всего } n, \\
b & a,\ b,\ c,\ldots\ldots & \quad - \quad ba,\ bb,\ bc,\ldots \quad - \quad n,
\end{array}$$

.......................................................... ....

И такъ, отъ совокупленія каждой буквы, получается $n$ сочетаній; а какъ всѣхъ буквъ $n$, то число двойныхъ сочетаній съ повтореніями будетъ $n\times n=n^2$. Это будемъ писать такъ:

$$V_2((n))=n^2.$$

Всѣ сочетанія по три буквы, съ повтореніями, найдутся, если ко всѣмъ двойнымъ сочетаніямъ припишемъ сперва $a$, потомъ $b$, $c$,....; отъ этого числа $n^2$ двойныхъ сочетаній, при переходѣ ихъ въ тройныя, повторится столько разъ, сколько всѣхъ буквъ $a$, $b$, $c$,...., то есть, $n$ разъ; и найдется всѣхъ сочетаній тройныхъ, съ повтореніями, $n^2\times n=n^3$, или

$$V_3((n))=n^3;$$

и такъ далѣе. Наконецъ, число всѣхъ сочетаній съ повтореніями, изъ $n$ буквъ по $r$, очевидно, будетъ

$$V_r((n))=n^r.$$

### С. Найти число различныхъ совокупленій или произведеній (combinaisons) двойныхъ, тройныхъ,..... изъ даннаго числа $n$ буквъ.

1) *Число различныхъ совокупленій безъ повтореній.*—Оно всегда равно числу сочетаній, взятыхъ безъ повтореній, раздѣленному на число перемѣщеній, какое даютъ буквы, входящія въ каждое сочетаніе. Такъ будетъ число различныхъ произведеній, безъ повтореній,

$$\text{двойныхъ} = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2},$$

$$\text{тройныхъ} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$\text{четверныхъ} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

..........................................................

Въ самомъ дѣлѣ, мы уже знаемъ, что число всѣхъ двойныхъ сочетаній (безъ повтореній) изъ $n$ буквъ $=V_2(n)=n(n-1)$; но каждыя двѣ буквы даютъ $1.2=2$ одинакихъ произведеній ($ab$, $ba$, $ac$, $ca$,....), то очевидно, что различныхъ двойныхъ произведеній или совокупленій будетъ вдвое менѣе, то есть, $\frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}$. Это выражается знакомъ

$$C_2(n)=\frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}\ .$$

Число всѣхъ сочетаній по три буквы, безъ повторенія, $=n(n-1)(n-2)$. Но каждыя три буквы даютъ $1.2.3=6$ равныхъ перемѣщеній, то есть, равныхъ тройныхъ сочетаній, отличающихся одною перестановкою буквъ; посему различныхъ тройныхъ совокупленій должно быть въ 6 разъ менѣе, а именно:

$$C_3(n)=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ .$$

Найдется также число различныхъ произведеній, безъ повторенія, изъ $n$ буквъ по 4,

$$C_4(n)=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\ .$$

И, наконецъ, вообще, число различныхъ совокупленій изъ $n$ буквъ по $r$, будетъ

$$C_r(n)=\frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ ..........n}\ .$$

*Примѣръ*. Найти различныя двойныя и тройныя произведенія изъ чиселъ 1, 2, 3, 4, 5, 6, безъ повтореній.

Число двойныхъ произведеній будетъ $C_2(1„6)=\frac{6.5}{1.2}=15$, а именно:

$$\begin{array}{r}
1.2,\ 1.3,\ 1.4,\ 1.5,\ 1.6\\
2.3,\ 2.4,\ 2.5,\ 2.6\\
3.4,\ 3.5,\ 3.6\\
4.5,\ 4.6\\
5.6
\end{array}$$

Число тройныхъ произведеній $C_3(1„6)=\frac{6.5.4}{1.2.3}=20$, а именно:

$$\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r}
1.2.3,\ 1.2.4,\ 1.2.5,\ 1.2.6\\
1.3.4,\ 1.3.5,\ 1.3.6\\
1.4.5,\ 1.4.6\\
1.5.6
\end{array}\right\}=10\\
\left.\begin{array}{r}
2.3.4,\ 2.3.5,\ 2.3.6\\
2.4.5,\ 2.4.6\\
2.5.6
\end{array}\right\}=\ 6\\
\left.\begin{array}{r}
3.4.5.\ 3.4.6\\
3.5.5
\end{array}\right\}=\ 3\\
\left.\begin{array}{r}
4.5.6
\end{array}\right\}=\ 1
\end{array}$$

2) *Число всевозможно различныхъ совокупленій или произведеній изъ числа n буквъ, съ повтореніями каждой.*

Здѣсь поступимъ такъ:

1. Напишемъ данныя буквы $a$, $b$, $c$,... одну подъ другою въ одной вертикальной графѣ; число ихъ $=n$.

2. Будемъ совокуплять каждую букву самое съ собою, и съ каждою изъ буквъ строкъ *предшествующихъ:* получатся всѣ двойныя совокупленія съ повтореніями. Число ихъ будетъ $=1+2+3+....n=\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$.

3. Потомъ будемъ совокуплять начальную букву (что въ вертикальной первой графѣ) каждой горизонтальной строки съ соединеніями двойными, *находящимися только въ этой строкѣ и во всѣхъ строкахъ предшествовавшихъ:* получатся всѣ соединенія тройныя съ повтореніями. Число ихъ будетъ $=1+3+6+10+....=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$; и т. д.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | $aa$; | 1 | $aaa$; | 1 |
| $b$ | 1 | $bb$, $ab$; | 2 | $bbb$, $abb$, $aab$; | 3 |
| $c$ | 1 | $cc$, $bc$, $ac$; | 3 | $ccc$, $bc^2$, $ac^2$, $b^2c$, $abc$, $aac$; | 6 |
| $d$ | 1 | $dd$, $cd$, $bd$, $ad$; | 4 | $ddd$, $cd^2$, ........................... | 10 |
| . | . | ........................ | . | ............................................ | . |
| . | . | ........................ | $n$ | ............................................ | . |

Вездѣ число строкъ $=n$.

Одинъ взглядъ на эту табличку показываетъ, что въ послѣдовательныхъ строкахъ числа различныхъ двойныхъ соединеній, съ повтореніями, составляются чрезъ суммованіе ряда членовъ первой степени, изображенныхъ единицами; числа тройныхъ соединеній въ каждой строкѣ получаются чрезъ суммованіе чиселъ соединеній двойныхъ, выраженныхъ прогрессіею 1, 2, 3,....$n$; и т. д. Стало-быть, сумма различныхъ совокупленій, съ повтореніями,

по одной буквѣ;....$=n$;

Сумма двойныхъ совокупленій $=1+2+3+....n$

$$=\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}; \qquad \textbf{(282)}$$

Сумма тройныхъ совокупленій $=1+3+6+10+....$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3};$$

и такъ далѣе.

Для этихъ соединеній, мы употребимъ знаки:

$$C_1((n))=n,$$

$$C_2((n))=\frac{n(n+1)}{1\,.\,2},$$

$$C_3((n))=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}, \text{ и вообще,}$$

$$C_r((n))=\frac{n(n+1)(n+2)+....(n+r-1)}{1\,.\,2\,.\,3..............n},$$

*Примѣръ*. Найти число двойныхъ и тройныхъ совокупленій изъ пяти чиселъ 1, 2, 3, 4, 5, съ повтореніями.

Число двойныхъ соединеній будетъ

$$C_2((1,,5))=\frac{5.6}{1.2}=15,\text{ а именно:}$$

11, 12, 13, 14, 15,
22, 23, 24, 25
33, 34, 35
44, 45
55.

А число тройныхъ совокупленій будетъ

$$C_3((1,,5))=\frac{5.6.7}{1.2.3}=35,\text{ таковы:}$$

111, 112, 113, 114, 115,
122, 123, 124, 125
133, 134, 135
144, 145
155

222, 223, 224, 225
233, 234, 235
244, 245
255

333, 334, 335
344, 345
355

444, 445, и 555
455

## 308. ЗАДАЧИ.

*1. Найти число переложеній изъ пяти буквъ, abcde, гдѣ буква a занимаетъ первое мѣсто, и число тѣхъ, гдѣ ab находится на первомъ мѣстѣ.*

Если $a$ занимаетъ постоянное мѣсто, то остальныя четыре буквы $b$, $c$, $d$, $e$, дадутъ 1.2.3.4=24 переложенія; а если $ab$ занимаетъ первое мѣсто, то буквы $c$, $d$, $e$, дадутъ 1.2.3=6 перемѣщеній.

*2. Даны буквы aabbbc; найти, сколько можно сдѣлать перемѣщеній, которыя начинаются буквою a, сколько перемѣщеній начинаются буквою b, и сколько буквою c.*

Если отнять букву $a$, то остальныя пять дадутъ $\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.1.1}=20$ перемѣщеній; столько же перемѣщеній будетъ, если къ каждому изъ нихъ приписать сначала отнятую букву. Если же поставить букву $b$ на первомъ мѣстѣ, то она съ прочими пятью даетъ $\frac{1.2.3.4.5}{1.2.1\ 2.1}=30$ перемѣщеній. Буква $c$, поставленная на первомъ мѣстѣ, даетъ

$$\frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2.3}=20\text{ перемѣщеній.}$$

*3. Изъ восьми тоновъ $C_1DEFGAHC_2$ діатонической гаммы сколько можно сдѣлать различныхъ перестановленій?*

Отвѣтъ: 1.2.3.4.5.6.7.8=40320 перестановленій.

*4. Изъ четырехъ тоновъ C, E, D, G, въ одной октавѣ сколько можно сдѣлать разныхъ перемѣщеній, предполагая, что каждый изъ нихъ долженъ войти по два раза?*

Всѣхъ тоновъ, совокупно съ повторяющимися, будетъ восемь: CCEEDDGG, а потому число перемѣщеній будетъ

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.1.2.1.2.1.2}=2520.$$

*5. Сколькими способами можно раздѣлить между шестью отличившимися воспитанниками шесть наградъ, изъ коихъ одна перваго достоинства, двѣ—втораго, и три третьяго достоинства?*

Отвѣтъ: $\frac{P(6)}{P(2).P(3)}=\frac{1.2.3.4.5.6}{1.1\ 2.1.2.3}=60$-ю способами.

*6. Найти, сколько разныхъ видовъ получитъ флагъ, если раскрасить его на три горизонтальныя поля осьмью главными красками, употребляя при этомъ либо краски различныя, либо же и одинакія?*

Отвѣтъ: въ первомъ случаѣ $V_3(8)=8.7.6=336$;

а во второмъ $V_3((8))=\ 8^3\ =512.$

*7. Изъ 12 членовъ общества избираются по жребію четверо для какой ни есть должности; найти, сколько здѣсь можетъ быть разныхъ случаевъ выбора?*

Отвѣтъ: $C_4(12)=\frac{12.11.10.9}{1\ .\ 2\ .\ 3.\ 4}=495$ случаевъ.

*8. Даны 10 точекъ въ пространствѣ, расположенныхъ такъ, что изъ нихъ нѣтъ даже трехъ, которыя бы находились на одной прямой линіи: узнать, сколько можно провесть прямыхъ линій отъ каждой ко всѣмъ прочимъ, или, сколько можно провесть плоскостей чрезъ каждыя три точки?*

Отвѣтъ: всѣхъ линій $C_2(10)=\frac{10.9}{1\ .\ 2}=45,$

и всѣхъ плоскостей $C_2(10)=\frac{10.9.8}{1\ .\ 2\ .\ 3}=120.$

*9. Подрядчикъ, имѣя 6 работниковъ, отпускаетъ каждодневно на нѣкоторую постоянную работу только четверыхъ. Онъ платитъ всѣмъ работникамъ вдругъ всякій разъ, когда они всѣ побываютъ на этой работѣ по равному числу дней. Найти, чрезъ сколько дней надобно имъ выдавать деньги?*

Отвѣтъ: чрезъ $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}=15$ дней.

Если бы при этомъ требовалось узнать, сколько разъ въ эти 15 дней каждый работникъ долженъ быть на работѣ? отвѣчаю: столько, сколько можно сдѣлать различныхъ совокупленій изъ остальныхъ пяти работниковъ по три, къ которымъ этотъ шестой присоединяется, то есть, чрезъ

$$\frac{5.4.3}{1.2.3}=10 \text{ дней.}$$

# ГЛАВА ДВѢНАДЦАТАЯ.

## НАЧАЛЬНЫЯ ПОНЯТІЯ ОБЪ ИСЧИСЛЕНІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

**309.** Въ природѣ находится множество ожидаемыхъ событій, которыхъ болѣе или менѣе скорое появленіе (исполненіе) зависитъ отъ извѣстнаго числа случаевъ или обстоятельствъ, равно возможныхъ. О томъ, что извѣстное явленіе или событіе скорѣе произойдетъ, нежели не произойдетъ, мы судимъ по числу случаевъ, благопріятныхъ его сбыточности, и такимъ образомъ приводимся къ болѣе или менѣе вѣроятному ожиданію того явленія. Исчисленіе вѣроятностей состоитъ въ опредѣленіи степени вѣроятности ожидаемаго происшествія. Это исчисленіе основано въ половинѣ 17-го вѣка Паскалемъ, Ферматомъ, Гюйгенсомъ; потомъ оно болѣе развито Яковомъ Бернулли, Монмартромъ, Моавромъ, Д'Аламбертомъ, Эйлеромъ въ 18-мъ вѣкѣ; а въ 19-мъ вѣкѣ усовершенствовано преимущественно Лапласомъ, Гауссомъ, Лежандромъ и Пуасономъ.

**310.** Для исчисленія вѣроятностей, надобно имѣть способъ выражать всякую вѣроятность пропорціональнымъ ей числомъ. Для этого, *простую, абсолютную вѣроятность* ожидаемаго событія (явленія, происшествія, приключенія) согласились выражать отношеніемъ всѣхъ случаевъ, благопріятныхъ этому событію, ко всѣмъ случаямъ, отъ которыхъ оно зависитъ и которые *всѣ равно возможны*. Стало-быть, ее изображаютъ дробью, у которой числитель показываетъ число всѣхъ случаевъ (статочностей), благопріятныхъ исполненію событія, а знаменатель — число всѣхъ случаевъ возможныхъ. Для примѣра, возмемъ костяной кубъ, котораго грани отмѣчены очками 1, 2, 3, 4, 5, 6, и бросимъ его; то вѣроятность, что на верхней грани куба вскроется опредѣленная цифра, наприм. 3, равна $\frac{1}{6}$; потому что число случаевъ, благопріятныхъ выходу этой цифры, равно 1-цѣ, а число всѣхъ случаевъ возможныхъ $=6$. Но, вѣроятность, что на кубѣ вскроется которое нибудь *изъ двухъ* данныхъ чиселъ (наприм. 2 или 4), равна $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, и т. д.

Отсюда видно, что вѣроятность исполненія желаемаго или ожидаемаго происшествія становится тѣмъ больше, чѣмъ болѣе становится числитель, приближаясь къ равенству съ знаменателемъ, то есть, чѣмъ ближе подходитъ число случаевъ благопріятныхъ къ равенству съ числомъ всѣхъ статочностей равновозможныхъ. Когда между всѣми возможными случаями не будетъ ни одного неблагопріятнаго ожидаемому происшествію, т. е. когда всѣ случаи благопріятны;

тогда дробь становится единицею, и вѣроятность обращается въ *достовѣрность*, такъ что *единица служитъ символомъ достовѣрности*, къ которой чистая вѣроятность можетъ только приближаться болѣе или менѣе.

**311.** Много находится такихъ явленій въ различныхъ происшествіяхъ, сбыточность которыхъ въ данное время зависитъ отъ извѣстныхъ намъ всѣхъ случаевъ благопріятныхъ и всѣхъ случаевъ равно-возможныхъ: къ такимъ событіямъ относится вышеприведенный примѣръ. Опредѣленіе степеней вѣроятности такихъ событій составляетъ то, что называются *исчисленіемъ вѣроятностей, въ тѣсномъ смыслѣ взятомъ*, и объ немъ собственно мы говорить будемъ. Но, если число случаевъ благопріятныхъ, или возможныхъ, или тѣхъ и другихъ не совсѣмъ извѣстно, а только извѣстны предѣлы, между которыми всѣ статочности заключаются, и требуется найти вѣроятность изъ многихъ данныхъ наблюденій, приближенно выражающихъ ходъ событія; тогда вопросъ обсуживается совсѣмъ иначе, *по способу наименьшихъ квадратовъ*, о чемъ говорить не будемъ, какъ о предметѣ, требующемъ знаніе высшей Математики [*]).

Даже и тогда, когда число случаевъ благопріятныхъ событію и число статочностей возможныхъ бываетъ вполнѣ извѣстно, вѣроятность имѣетъ разные виды; она бываетъ: простою, относительною, сложною, и проч.

### 1. Простая или абсолютная вѣроятность.

**312.** *Простая* или *абсолютная вѣроятность* выражается отношеніемъ числа всѣхъ случаевъ, благопріятныхъ ожидаемому событію, къ числу всѣхъ случаевъ равно-возможныхъ. Посему, ежели изъ числа N случаевъ, равно возможныхъ, находится только $n$ случаевъ, благопріятныхъ исполненію какого нибудь ожидаемаго происшествія, а $n'=N-n$ число случаевъ ему неблагопріятныхъ; то абсолютная вѣроятность W въ пользу происшествія будетъ

$$W=\frac{n}{N}.$$

Вѣроятность же, что этого происшествія не воспослѣдуетъ, но будутъ случаи ему противные, и потому называемая *вѣроятностью противною* ожидаемому событію, будетъ

$$W'=\frac{n'}{N}=\frac{N-n}{N}=1-\frac{n}{N}.$$

Сумма этихъ обѣихъ вѣроятностей равна единицѣ,

$$W+W'=1,$$

---

[*]) Подробное изложеніе о вѣроятностяхъ можно найти въ превосходномъ сочиненіи: *Основанія математической теоріи вѣроятностей*, Академика В. Я. Буняковскаго. С. Петербургъ, 1846 года.

то есть, извѣстности; ибо совершенно извѣстно, что изъ всѣхъ возможныхъ случаевъ одинъ какой ни есть, благопріятный или неблагопріятный, долженъ выйти, если только самое происшествіе должно быть необходимо.

Гаданіе объ исполненіи событія, опредѣляемое вѣроятностію, называется *вѣроятнымъ*, *сомнительнымъ*, или *мало вѣроятнымъ*, смотря потому, будетъ ли эта вѣроятность $>\frac{1}{2}$, или $=\frac{1}{2}$, или $<\frac{1}{2}$.

*Примѣръ*. Дана полная, хорошо перемѣшанная колода, состоящая изъ 52 игральныхъ картъ, найти слѣдующія вѣроятности:

1) Вынуть изъ нее карту чернаго цвѣта. Здѣсь вѣроятность $W=\frac{1}{2}$, потому что картъ чернаго цвѣта во всей колодѣ половина.

2) Вынуть карту трефовую. Здѣсь $W=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$; потому что всѣхъ трефовыхъ картъ 13. Противная же вѣроятность, что вынется карта не трефовая, $W'=\frac{52-13}{52}=\frac{3}{4}$.

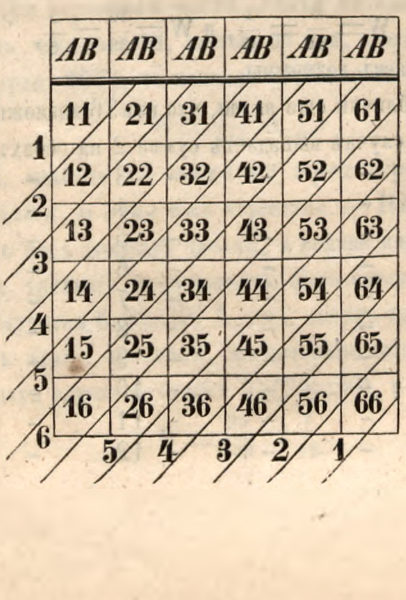
3) Вынуть фигуру. $W=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$; потому что всѣхъ фигуръ въ колодѣ 12. Вѣроятность $W'$ противнаго, то есть, что фигура не вынется, будетъ $W'=\frac{40}{52}=\frac{10}{13}$.

4) Вынуть тузъ. $W=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. Противная вѣроятность, что тузъ не вынется, $W'=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$.

5) Вынуть тузъ пиковый. $W=\frac{1}{52}$.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ $W'=1-W$, или $W+W'=1$.

*Примѣръ*.—Возмемъ два игральныхъ куба A и B, которыхъ грани отмѣчены по порядку очками или цифрами 1, 2, 3, 4, 5. 6. Если кидать эти два куба вмѣстѣ, то, вообще, могутъ выпасть на обоихъ кубахъ слѣдующія 36 паръ цифръ или 36 случаевъ:



| AB | AB | AB | AB | AB | AB |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 |
| 12 | 22 | 32 | 42 | 52 | 62 |
| 13 | 23 | 33 | 43 | 53 | 63 |
| 14 | 24 | 34 | 44 | 54 | 64 |
| 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 |
| 16 | 26 | 36 | 46 | 56 | 66 |

Впрочемъ, и безъ этой таблички знаемъ, что изъ шести цифръ можно сдѣлать число сочетаній по двѣ, съ повтореніями, равное

$$V_2((1,,6))=6^2=36.$$

По этому, вѣроятность, что за одинъ разъ выпадутъ: цифра 2 на кубѣ А, и цифра 5 на В, будетъ $W=\frac{1}{36}$; потому что всѣхъ случаевъ 36, а 2 и 5 соотвѣтствуютъ одному случаю.

Вѣроятность, что за одинъ разъ на обоихъ кубахъ вскроются числа 2 и 5, на какомъ бы кубѣ эти числа ни получились, будетъ $W=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$; потому что благопріятныхъ случаевъ можетъ быть два:

можетъ выйти на А число 2, либо 5,
– – – B – 5, – 2.

Противная вѣроятность, что за одинъ разъ не вскроются цифры 2 и 5 на обоихъ кубахъ, будетъ

$$W'=\frac{34}{36}=\frac{17}{18}.$$

Но, для частнаго случая, чтобы на обоихъ кубахъ вышли за-разъ два равныя числа (пашъ), на прим. 2 и 2, вѣроятностью будетъ $W=\frac{1}{36}$.

Для случая, чтобы сумма чиселъ, выпавшихъ на обоихъ кубахъ, равнялась 7, имѣется шесть благопріятныхъ случаевъ (см. въ табличкѣ по діагональной строкѣ подъ n⁰ 6); а потому

$$W=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}, \text{ и } W'=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}.$$

Для случая, чтобы эта сумма равнялась 5, будетъ $W=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, и $W'=\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$; потому что возможны 4 случая благопріятныхъ (см. въ діагональной строкѣ подъ n⁰ 4). И такъ далѣе.

Вѣроятность, что на двухъ кубахъ выпадетъ такъ называемый пашъ (два какія ни есть равныя числа), очевидно,

$$W=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}, \text{ и } W'=\frac{30}{36}=\frac{5}{6},$$

потому что шесть случаевъ возможны.

Изъ предыдущей таблички еще видно, что изъ 36 возможныхъ случаевъ только

въ одномъ случаѣ выпадаетъ сумма 2 на обоихъ кубахъ,
въ 2-хъ – – – 3 – –
– 3-хъ – – – 4 – –
– 4-хъ – – – 5 – –
– 5-ти – – – 6 – –
– 6-ти – – – 7 – –
– 5-ти – – – 8 – –
– 4-хъ – – – 9 – –
– 3-хъ – – – 10 – –
– 2-хъ – – – 11 – –
– 1-мъ – – – 12 – –

Откуда видно, что наибольшая вѣроятность соотвѣтствуетъ суммѣ 7, а наименьшая суммамъ 2 и 12.

*Примѣръ*. — Возмемъ теперь три игральные куба A, B, C, и поищемъ вѣроятности для случаевъ: 1) *чтобы на всѣхъ кубахъ, брошенныхъ во одно время, выпала сумма 9;* 2) *чтобы въ этой суммѣ выпали два равныя числа;* 3) *чтобы выпали три равныя числа;* 4) *чтобы выпали числа 2, 3, 4, на трехъ кубахъ вообще.*

1) Число 9 разлагается на три суммы 28 разъ (по формулѣ $\frac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{1\ .\ 2}=\frac{8.7}{1.2}=$ $=28$, (см. **284**, 2), изъ которыхъ надобно выключить суммы $7+1+1$, $1+7+1$, $1+1+7$, потому что на кубахъ нѣтъ цифры 7; стало-быть, всѣхъ благопріятныхъ случаевъ 25, а всѣхъ случаевъ равновозможныхъ на трехъ кубахъ$=6^3=216$, потому что столько можно сдѣлать сочетаній по три, съ повтореніями, изъ 6 предметовъ. И такъ, $W=\frac{25}{216}<\frac{1}{8}$ и $>\frac{1}{9}$.

2) Чтобы сумма 9 на трехъ брошенныхъ кубахъ состояла изъ двухъ чиселъ равныхъ, и одного имъ неравнаго, надобно взять только двѣ пары равныхъ чиселъ $2+2$, $4+4$ (потому что $1+1+7$ не можетъ быть), и придать къ нимъ соотвѣтственно числа 5 и 1. Сверхъ того, на каждомъ изъ трехъ кубовъ можетъ выйти одна цифра неравная, и одна изъ цифръ равныхъ, которыхъ число 6; то $W=\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$.

3) Сумма 9 только одинъ разъ составляется изъ трехъ равныхъ цифръ, $3+3+3$; а потому $W=\frac{1}{216}$.

4) Поелику числа 2, 3, 4, даютъ шесть перемѣщеній 1.2.3; а потому онѣ на трехъ кубахъ могутъ выпасть шестью различными образами; то и $W=\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$.

Сюда же присоединимъ и розысканія слѣдующихъ случаевъ вѣроятности:

*Вѣроятность, чтобы на трехъ кубахъ,* A, B, C, *брошенныхъ въ одно время, выпали три неравныя числа, какія ни есть.*

Такъ какъ шесть чиселъ куба, взятыя по три, даютъ $6.5.4=120$ сочетаній безъ повтореній (стран. 277), то искомая вѣроятность будетъ

$$W=\frac{120}{216}=\frac{5}{9}.$$

*Вѣроятность, чтобы на тѣхъ же трехъ кубахъ выпали два какія нибудь числа равныя, и одно имъ неравное.* — На двухъ кубахъ могутъ выпасть только шесть паръ равныхъ чиселъ, а всякая пара съ каждою изъ остальныхъ пяти цифръ третьяго куба можетъ быть соединена; то такихъ сочетаній благопріятныхъ получится $6.5=30$. А какъ, сверхъ того, каждый изъ трехъ кубовъ можетъ быть этимъ третьимъ, на которомъ выпадетъ неравное число, то всѣхъ благопріятныхъ случаевъ будетъ $3\times30=90$, и потому

$$W=\frac{90}{216}=\frac{5}{12}.$$

Если бъ мы желали, чтобы при этомъ выпали *по крайней мѣрѣ* двѣ равныя цифры (т. е. могутъ быть и всѣ равныя), то къ предыдущимъ 90 случаямъ надлежало бы придать еще 6, когда всѣ три равныя числа выпадутъ, и будетъ

$$W = \frac{96}{216} = \frac{4}{9}.$$

*Вѣроятность, чтобы на трехъ кубахъ выпала сумма по крайней мѣрѣ 14* (она не менѣе, но можетъ быть 15, 16, 17 и 18). — Поелику здѣсь возможны только пять различныхъ суммъ, то число всѣхъ благопріятныхъ случаевъ $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,\,.\,\,3} = \frac{5.6.7}{1.2.3} = 35$, гдѣ $n$ означаетъ число суммъ (стран. 281). Посему,

$$W = \frac{35}{216} = \text{почти } \frac{1}{6}.$$

*Вѣроятность, чтобы на трехъ кубахъ выпали три послѣдовательныя числа* 123, 234, 345, 456, *въ какомъ ни есть порядкѣ.* — Каждое изъ этихъ чиселъ даетъ шесть перемѣщеній безъ повторенія, слѣдовательно число всѣхъ благоп~~олуч~~ріятныхъ случаевъ будетъ $4 \times 6 = 24$, и искомая вѣроятность

$$W = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}.$$

Вѣроятность получить на трехъ брошенныхъ кубахъ четное число, $= \frac{1}{2}$.

*Вѣроятность, чтобы на трехъ кубахъ выпала сумма менѣе 9.* Такихъ суммъ шесть: 8, 7, 6, 5, 4, 3. Посему, здѣсь число всѣхъ благопріятныхъ случаевъ $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,\,.\,\,3} = \frac{6.7.8}{1.2.3} = 56$, и случаевъ возможныхъ 216; слѣдовательно $W = \frac{56}{216} = \frac{7}{27}$.

*Вѣроятность, что на трехъ кубахъ выйдетъ сумма болѣе 12.* Такихъ суммъ также шесть: 13, 14, 15, 16, 17, 18, и также благопріятныхъ случаевъ 56; а потому $W = \frac{7}{27}$.

*Вѣроятность, что на трехъ кубахъ выпадетъ сумма между 8 и 13.* Такихъ суммъ четыре: 9, 10, 11, 12. Сумма 9 составляется изъ сочетаній 333, 441, 522, 342, 351, 621, которыя доставляютъ $1+3+3+6+6+6=25$ перемѣщеній; сумма 10 составляется также изъ шести сочетаній: 334, 442, 622, 541, 532, 631, которыя доставляютъ $3+3+3+6+6+6=27$ перемѣщеній; сумма 11 составляется изъ шести сочетаній: 335, 344, 551, 542, 641, 632, изъ которыхъ получается число перемѣщеній $3+3+3+6+6+6=27$; а сумму 12 дѣлаютъ шесть сочетаній: 444, 552, 633, 435, 426, 651, изъ которыхъ находимъ $1+3+3+6+6+6=25$ перемѣщеній. Слѣдовательно всѣхъ случаевъ благопріятныхъ $25+27+27+25=104$, и вѣроятность

$$W = \frac{104}{216} = \frac{13}{27} \left(\text{почти } \frac{1}{2}\right).$$

*Примѣръ. — Найти вѣроятность вынуть изъ полной колоды 52 картъ четыре карты одного цвѣта.* — Изъ 13 картъ одного цвѣта, взятыхъ по четыре, можно сдѣлать различныхъ соединеній $\frac{13.12.11.10}{1.2.3.4}$; а какъ всѣхъ цвѣтовъ четыре, то всѣхъ такихъ соединеній будетъ вчетверо болѣе, то есть, $\frac{4\times13.12.11.10}{1.2.3.4}$. Всѣхъ же случаевъ возможныхъ столько, сколько можно сдѣлать разныхъ соединеній изъ 52 картъ по 4, а именно: $\frac{52.51.50.49}{1.2.3.4}$; посему,

$$W=\frac{4\times13.12.11.10}{52.51.50.49}=\frac{44}{4165}.$$

*Вѣроятность вынуть четыре карты трефъ,* или вообще одной масти, будетъ вчетверо менѣе, то есть: $\frac{11}{4165}$.

*Вѣроятность вынуть четыре какія нибудь фигуры?* — Всѣхъ фигуръ 12; посему благопріятныхъ случаевъ столько, сколько можно сдѣлать различныхъ соединеній изъ 12 по 4, и именно: $\frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}$; а число случаевъ возможныхъ $=\frac{52.51.50.49}{1.2.3.4}$, посему

$$W=\frac{12.11.10.9}{52.51.50.49}=\frac{99}{54145}.$$

*Найти вѣроятность вынуть туза, короля, даму и валета.* — Здѣсь число случаевъ благопріятныхъ столько, сколько можно сдѣлать сочетаній съ повтореніями изъ 4 картъ по 4, то есть, $=4^4=4.4\ 4.4$; слѣдовательно,

$$W=\frac{4.4.4.4\times1.2\ 3.4}{52.51.50.49}=\frac{128}{541450}.$$

*Примѣръ.* — Французская лот~~а~~ерея состоитъ изъ 20 билетовъ съ померами отъ 1 до 90. Участвующій въ ней избираетъ для себя одинъ или нѣсколько померовъ, и на каждый ставитъ сколько нибудь денегъ съ какимъ ни есть условіемъ, принятымъ въ лот~~а~~ерейной игрѣ, и отъ котораго зависитъ количество его выигрыша. Въ каждую игру вынимаются 5 билетовъ изъ 90. Чьи номера будутъ въ числѣ вынутыхъ, тѣ получаютъ отъ лотареи суммы, болѣе или менѣе значительныя, соотвѣтственно условіямъ, какія кто избралъ для себя. Напротивъ, чьи номера не выйдутъ, тѣ лишаются ставочныхъ денегъ.

Условія, употребительнѣйшія въ этой лотареи, слѣдующія:

*Одиночка (эстрато)* — простой выходъ номера, взятаго играющимъ; тогда онъ получаетъ въ 15 разъ болѣе ставки.

*Амба,* — когда условіе выигрыша состоитъ въ выходѣ обоихъ взятыхъ номеровъ въ одинъ тиражъ; и тогда лот~~а~~ерея платитъ въ 270 разъ болѣе ставки.

*Терна,* — когда условіе выигрыша состоитъ въ выходѣ трехъ номеровъ, взятыхъ играющимъ, въ одинъ тиражъ: тогда ему платится въ 5500 разъ болѣе ставки.

*Кватерна,* — когда условіемъ выигрыша будетъ выходъ четырехъ номеровъ въ одинъ тиражъ: тогда лот~~а~~ерея платитъ въ 75000 разъ болѣе ставки.

*Квинтерна,*—условіе выхода всѣхъ пяти номеровъ взятыхъ. Въ такомъ случаѣ лотарея платитъ въ 1000000 разъ болѣе ставки.

Любопытно знать, какія вѣроятности соотвѣтствуютъ каждому изъ этихъ выигрышей?

Для *эстрато:* всѣхъ возможныхъ случаевъ столько, сколько можно сдѣлать различныхъ соединеній изъ 90 номеровъ по 5; а случаевъ благопріятныхъ, чтобъ изъ 90 номеровъ вышелъ одинъ, столько, сколько можно сдѣлать различныхъ соединеній изъ остальныхъ 89 номеровъ по 4, къ которымъ этотъ пятый номеръ присоединяется:

$$W=C_4(89):C_5(90)=\frac{89.88.87.86\times5}{90.89.88.87.86}=\frac{1}{18}.$$

Такимъ же образомъ найдется:

для *амбо,* $W=C_3(88):C_5(90)=\frac{88.87.86\times4.5}{90.89.88.87.86}=\frac{2}{801},$

для *терно,* $W=C_2(87):C_5(90)=\frac{87.86\times3.4.5}{90.89.88.87.86}=\frac{1}{11748},$

для *кватерно,* $W=C_1(86):C_5(90)=\frac{86.2.3.4.5}{90.89.88.87.86}=\frac{1}{511038},$

и такъ далѣе.

См. *Политическую Ариѳметику* Бруна. Одесса. 1845.

*Примѣръ.* — Въ урнѣ находятся $b$ шаровъ голубыхъ и $g$ зеленыхъ; найти вѣроятность съ одного разу вынуть $\beta$ шаровъ голубыхъ и $\gamma$ зеленыхъ.—Случаи равно возможные — это соединенія изъ $b+g$ шаровъ по $\beta+\gamma$. Число $\beta$ шаровъ голубыхъ можетъ быть вынуто столько разъ, сколько можно сдѣлать различныхъ соединеній изъ $b$ голубыхъ шаровъ урны по $\beta$ элементовъ; а число $\gamma$ шаровъ зеленыхъ можетъ быть вынуто столько разъ, сколько можно сдѣлать различныхъ соединеній изъ $g$ зеленыхъ шаровъ по $\gamma$ элементовъ. А поелику каждое соединеніе шаровъ зеленыхъ съ каждымъ сочетаніемъ шаровъ голубыхъ составляетъ случай благопріятный для выигрыша, то всѣхъ такихъ случаевъ будетъ $C_\beta(b)\ .\ C_\gamma(g)$; число же случаевъ равновозможныхъ $C_{(\beta+\gamma)}.(b+g)$; посему,

$$W=\frac{C^\beta(b)\ .\ C^\gamma(g)}{C^{\beta+\gamma}(b+g)}.$$

Вѣроятность такого случая, чтобы за одинъ разъ вынуть $\beta$ шаровъ голубыхъ, $\gamma$ зеленыхъ, и $\delta$ шаровъ красныхъ изъ числа $b$ шаровъ голубыхъ, $g$ зеленыхъ и $r$ красныхъ, положенныхъ въ одну урну, найдется точно такимъ же образомъ:

$$W=\frac{C^\beta(b)\ .\ C^\gamma(g)\ .\ C^\delta(r)}{C^{\beta+\gamma+\delta}.(b+g+r)}.$$

**313.** *Пари.* — Рисковать на какое ни есть предпріятіе, держать *пари* (закладъ) о какомъ нибудь ожидаемомъ произшествіи, что ему будутъ соотвѣтствовать такіе благопріятные случаи, а не другіе, всегда основывается на степени его вѣроятности. Такъ, если W вѣроятность случая, благопріятнаго исполненію произшествія, и $1-W$ вѣроятность случая неблагопріятнаго; то можно держать пари W противъ $1-W$ въ томъ, что для меня выйдетъ скорѣе случай благопріятный. Для поясненія, положимъ, что въ урнѣ находятся 100 шаровъ, изъ которыхъ 90 бѣлыхъ и 10 черныхъ: вѣроятность, что изъ этой урны вынется шаръ бѣлый $=\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$; а противоположная вѣроятность, то есть, что вынется первый шаръ черный $=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$. Очевидно, что первая вѣроятность въ 9 разъ болѣе второй, т. е. въ 9 разъ вѣроятнѣе, что изъ урны вынется скорѣе шаръ бѣлый, нежели черный, такъ что можно держать пари *девять противъ одного*, что въ первый разъ вынется шаръ бѣлый. Денежная ставка въ этомъ случаѣ должна быть пропорціональна вѣроятности, если хотимъ, чтобы пари было безобидное, т. е. для обѣихъ партій равно выгодное. Слѣдовательно, въ нашемъ примѣрѣ, я долженъ ставить 9 рублей противъ 1 рубля, или 18 противъ 2, и т. д. Это значитъ, что мой соперникъ обязуется платить мнѣ всякой разъ 1 рубль, когда изъ урны вынется шаръ бѣлый, между тѣмъ какъ я ему всякой разъ 9 рублей, какъ вынется шаръ черный. При такомъ условіи, счастіе и несчастіе, выигрышъ и проигрышъ теоретически дѣлятся равно между обѣими партіями. И дѣйствительно, положимъ, что, согласно съ вѣроятностями, въ 10 игоръ вынется бѣлый шаръ 9 разъ, а черный шаръ одинъ разъ; то, по условію, я получу отъ соперника 9 рублей за девять выигрышей, и ему заплачу 9 рублей за одинъ проигрышъ: стало-быть, ни одна сторона не выиграетъ и не проиграетъ. Но это такъ надлежитъ расчислять по степени вѣроятностей; а на самомъ дѣлѣ всегда будетъ между выигрышемъ и проигрышемъ нѣкоторая разность: только эта разность будетъ становиться тѣмъ менѣе, чѣмъ игра повторяется болѣе. Напримѣръ, если, послѣ 25 игоръ, разность въ выигрышѣ будетъ 4 рубля, то, послѣ 50, она сдѣлается наприм. 2 рубля, а послѣ 100 будетъ только 1 рубль, и т. д. Изъ этого видно, что денежныя ставки, пропорціональныя вѣроятностямъ, дѣлаютъ равенство между выигрышемъ и проигрышемъ не при маломъ числѣ игоръ или отдѣльныхъ случаевъ, но при числѣ весьма большомъ.

**314.** Такъ надобно понимать и всѣ выводы, получаемые изъ вычисленія по вѣроятностямъ, къ какимъ бы случаямъ оно ни было приложено. Наприм. въ извѣстныхъ *таблицахъ смертности* Баумана находимъ, что изъ числа людей, родившихся въ одинъ и тотъ же годъ, по истеченіи 18 лѣтъ, въ живыхъ останется только половина. При этомъ однако же отнюдь нельзя сказать, чтобы изъ двухъ человѣкъ, родившихся въ одинъ годъ, послѣ 18 лѣтъ остался живъ только одинъ; ни того, что изъ 100 человѣкъ, рожденныхъ въ одно время, послѣ 18 лѣтъ будутъ живы ровно 50 человѣкъ. Въ послѣднемъ случаѣ разность можетъ быть до 10 или болѣе человѣкъ. Но, если взять 10000 человѣкъ, родившихся въ одинъ годъ, то послѣ 18 лѣтъ разность между числомъ живыхъ и умершихъ будетъ значительно меньшая; а для милліона людей она можетъ сдѣлаться совсѣмъ ничтожною, какъ это и дѣйствительно находятъ въ государствахъ обширныхъ и многолюдныхъ.

Здѣсь предполагается, что въ ряду годовъ, взятыхъ для вывода степени смертности, не было большой перемѣны въ обстоятельствахъ, имѣющихъ вліяніе на размноженіе людей и ихъ смертность. Но, если эти обстоятельства измѣнятся отъ войны, моровой язвы, повальныхъ болѣзней, отъ перемѣны физическихъ и нравственныхъ причинъ, имѣющихъ вліяніе на рожденіе и смертность людей, тогда, съ измѣненіемъ причинъ, и послѣдствія выйдутъ другія, на короткое или продолжительное время.

## 2. Вѣроятность относительная.

**315.** Относительною вѣроятностію называется та, которая опредѣляется чрезъ сравненіе только двухъ или нѣсколькихъ случаевъ, благопріятныхъ ожидаемому происшествію, вовсе не обращая вниманія на прочіе случаи, могущіе произойти въ то же время.

Пусть $N = n + n'$ число всѣхъ сбыточностей возможныхъ, изъ коихъ $n$ случаевъ одного рода, и $n'$ случаевъ другаго: то абсолютная вѣроятность, что произойдетъ случай перваго рода, будетъ, какъ уже знаемъ, $W = \frac{n}{n+n'}$; и также абсолютная вѣроятность, что выйдетъ случай втораго рода, $W' = \frac{n'}{n+n'}$. Отсюда слѣдуетъ, что *относительная вѣроятность* для выхода случаевъ перваго рода,

$$\frac{W}{W'} = \frac{n}{n'}, \text{ откуда}$$

$$\frac{n}{n+n'} = \frac{W}{W+W'}.$$

Она для случаевъ втораго рода отсюда же найдется:

$$\frac{n'}{n+n'} = \frac{W'}{W+W'}.$$

Посему, *относительная вѣроятность какого ни есть случая равна его абсолютной вѣроятности, раздѣленной на сумму абсолютныхъ вѣроятностей сравниваемыхъ случаевъ.*

*Примѣръ.* Двое играютъ двумя кубами на слѣдующихъ условіяхъ: первый долженъ выиграть, когда ему выпадетъ сразу 7, а другой — когда у него вскроется 4 очка, не обращая вниманія на всѣ прочіе случаи. Въ этомъ предположеніи абсолютная вѣроятность, что выиграетъ первый, $W = \frac{6}{36}$, и вѣроятность, что выиграетъ второй, $W' = \frac{3}{36}$ (см. табличку стр. 285, на которой видны числа случаевъ, возможныхъ для того и другаго игрока въ діагональныхъ строкахъ). Отсюда, относительная вѣроятность, что выиграетъ первый,

$$\frac{W}{W+W'}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3},$$

и что выиграетъ второй, $\frac{W'}{W+W'}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$;
такъ что относительная вѣроятность, перваго къ относительной вѣроятности втораго содержится, какъ 2 : 1.

*Примѣръ.* Въ урнѣ находятся $a$ шаровъ бѣлыхъ, $a'$ красныхъ, $a''$ синихъ, $a'''$ зеленыхъ, и т. д., коихъ сумма $=a+a'+a''+a'''+\ldots=A$. Простая вѣроятность, что, въ первый разъ, вынется шаръ бѣлый, равна $\frac{a}{A}$; она для шара краснаго $=\frac{a'}{A}$, для синяго $=\frac{a''}{A}$, и т. д. Но относительная вѣроятность, что вынется скорѣе шаръ бѣлый, нежели красный, равна

$$\frac{a}{A}:\left(\frac{a}{A}+\frac{a'}{A}\right)=\frac{a}{a+a'}.$$

а относительная вѣроятность, что вынется прежде шаръ красный, нежели бѣлый, равна

$$\frac{a'}{A}:\left(\frac{a}{A}+\frac{a'}{A}\right)=\frac{a'}{a+a'};$$

Сумма этихъ обѣихъ вѣроятностей также всегда равна *единицѣ*.

Пусть $a=6$ шаровъ бѣлыхъ, $a'=8$ красныхъ, $a''=14$ синихъ, $a'''=12$ черныхъ, а всего 40: то вѣроятность, что вынется скорѣе шаръ бѣлый, нежели синій, $=\frac{6}{6+14}=\frac{3}{10}$; вѣроятность противнаго $=\frac{14}{6+14}=\frac{7}{10}$; а обѣ вмѣстѣ $=\frac{3}{10}+\frac{7}{10}=1$, ибо совершенно извѣстно, что который нибудь изъ этихъ случаевъ выйдетъ прежде. Но, если вынется шаръ красный или черный, то этимъ не рѣшается ни чего, и выемъ продолжается.

*Примѣръ. Найти вѣроятность, что на трехъ брошенныхъ кубахъ скорѣе вскроется пашъ, нежели сумма 17.* — Всѣхъ случаевъ для пашъ находится 6, а всѣхъ случаевъ для суммы 17 три (665, 656, 566): посему, вѣроятность, что скорѣе вскроется пашъ, $=\frac{6}{6+3}=\frac{2}{3}$; а вѣроятность скорѣе получить 17, нежели пашъ, $=\frac{3}{6+3}=\frac{1}{3}$.

Вѣроятность получить скорѣе чётное число, нежели пашъ, $=\frac{18}{19}$.

### 3. Вѣроятности сложныя.

**316.** Разсмотрѣнныя нами вѣроятности двухъ родовъ простираются только на одиночные случаи изъ числа всѣхъ возможныхъ какого ни есть событія; но можно соединять однѣ вѣроятности съ другими по двѣ, по три, и проч. двоякимъ образомъ: 1) Взявши два, три, или болѣе случаевъ, искать вѣроятность, что одинъ, который нибудь изъ нихъ, произойдетъ; — эта вѣроятность найдется чрезъ сложеніе простыхъ вѣроятностей для выхода этихъ случаевъ. 2) Либо, искать вѣроятность, что эти случаи произойдутъ въ одно время по два, по три,..... или одинъ за другимъ также по два, по три,.....; въ такомъ случаѣ находятъ ее чрезъ умноженіе простыхъ вѣроятностей для этихъ случаевъ.— Сверхъ того, можно искать вѣроятность, что изъ этихъ парныхъ, тройныхъ,.... случаевъ произойдетъ который нибудь; тогда ее находятъ чрезъ умноженіе и сложеніе ихъ вѣроятностей. — Всѣ сіи вѣроятности называются *сложными;* размотримъ тѣ и другія.

**I случай.**—Положимъ, что въ ходу какого нибудь событія считается число N всѣхъ случаевъ равно возможныхъ; что между ними $n$ случаевъ благопріятныхъ одному явленію, $n'$ случаевъ благопріятныхъ другому, $n''$—третьему, и т. д.; назовемъ чрезъ $W=\frac{n}{N}$, $W'=\frac{n'}{N}$, $W''=\frac{n''}{N}$,... простыя вѣроятности для этихъ разныхъ случаевъ: то вѣроятность, что изъ этихъ явленій случится первое либо второе, $=W+W'$; что произойдетъ первое, второе либо третье,

$$=W+W'+W'', \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно, *вѣроятность, что, изъ нѣсколькихъ равно возможныхъ явленій, произойдетъ хотя одно, равна суммѣ простыхъ вѣроятностей сихъ явленій.*

*Примѣръ.* — Простая вѣроятность, что на двухъ брошенныхъ кубахъ вскроется сумма 7, есть $W=\frac{6}{36}$ (см. табличку на стран. 285 по діагональной строкѣ), она для суммы 8 равна $W'=\frac{5}{36}$, а для суммы 9 она $W''=\frac{4}{36}$; посему, вѣроятность, что на двухъ кубахъ сразу вскроется сумма 7 или 8, будетъ

$$W+W'=\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36};$$

что выпадетъ сумма 8 или 9, вѣроятность будетъ

$$W'+W''=\frac{5}{36}+\frac{4}{36}=\frac{1}{4};$$

что появится сумма 7 или 9,

$$W+W''=\frac{6}{36}+\frac{4}{36}=\frac{10}{36}.$$

Вѣроятность, что надвухъ брошенныхъ кубахъ вскроется сумма 7, 8 либо 9, будетъ

$$W+W'+W''=\frac{6+5+4}{36}=\frac{15}{36}.$$

Вѣроятность, что на тѣхъ же кубахъ выпадетъ сумма 6, 7, 8 или 9, равна

$$\frac{5+6+5+4}{36}=\frac{20}{36}, \text{ и т. д.}$$

**II случай.** *Вѣроятность встрѣчи случаевъ въ ходу двухъ или нѣсколькихъ современныхъ событій.*

Возмемъ сначала *два событія.* Пусть N число всѣхъ возможныхъ, а $n$ число благопріятныхъ случаевъ въ первомъ событіи. Означимъ чрезъ N$'$, $n'$, такія же числа во второмъ событіи. Простая вѣроятность, что выйдетъ какой ни есть случай въ пользу перваго событія, не обращая вниманія на случаи втораго, есть

$$w=\frac{n}{N},$$

и такая же вѣроятность для выхода случая въ пользу втораго событія,

$$w'=\frac{n'}{N'}.$$

Для большой простоты, положимъ, что $N=4$ возможныхъ случая въ первомъ событіи, которые означимъ буквами $a$, $b$, $c$ и $d$; а изъ нихъ только $n=3$ въ нашу пользу, а именно: $a$, $b$, $c$. Во второмъ же событіи $N'=3$ случая возможныхъ $a'$, $b'$, $c'$, изъ которыхъ только $n'=2$ въ нашу пользу, именно: $a'$ и $b'$. Отъ встрѣчи каждаго изъ $N$ возможныхъ случаевъ перваго событія съ каждымъ изъ $N'$ возможныхъ случаевъ втораго попарно, могутъ произойти $NN'=12$ возможныхъ паръ; а отъ встрѣчи каждаго изъ $n$ случаевъ перваго событія съ каждымъ изъ $n'$ случаевъ втораго, получится $nn'=6$ такихъ встрѣчъ (изъ всѣхъ 12-ти паръ равно возможныхъ): то, вѣроятность $W$, что какая нибудь встрѣча, или пара, благопріятная нашему ожиданію, дѣйствительно произойдетъ, должна быть

$$W=\frac{n}{N}\cdot\frac{n'}{N'}\,,\ \text{или}\ W=w.w';$$

то есть, *вѣроятность встрѣчи двухъ такихъ случаевъ равна произведенію $ww'$ простыхъ вѣроятностей этихъ отдѣльныхъ случаевъ.*

Къ этимъ двумъ событіямъ присоединимъ еще третіе, которое содержитъ $N''$ случаевъ равно возможныхъ, $n''$ случаевъ благопріятныхъ, и, стало быть, $w''=\frac{n''}{N''}$ простая вѣроятность для выхода одного изъ этихъ благопріятныхъ случаевъ; то встрѣчу благопріятныхъ случаевъ перваго и втораго событія можно разсматривать за отдѣльный случай, котораго вѣроятность $=ww'$. Слѣдовательно, вѣроятность, что эти три случая встрѣтятся въ одно время (или послѣдуютъ не иначе какъ одинъ за другимъ), изобразится равенствомъ:

$$(\mathrm{A})\ldots\ldots\ldots W=\frac{n}{N}\cdot\frac{n'}{N'}\cdot\frac{n''}{N''}\,,\ \text{или}\ W=w.w'.w'';$$

и такъ далѣе, для встрѣчи случаевъ четырехъ, пяти, и проч. событій.

Если во всѣхъ этихъ событіяхъ находится равное число $N$ возможныхъ случаевъ, а $\frac{n}{N}$, $\frac{n'}{N'}$, $\frac{n''}{N''}$,.... простыя вѣроятности для благопріятныхъ случаевъ перваго, втораго,.... событій; то для встрѣчи этихъ случаевъ, т. е. для современнаго ихъ появленія, получится вѣроятность.

$$(\mathrm{B})\ldots\ldots\ldots W=\frac{n.n'.n''.n'''\ldots}{N.N.\,N.\,N\ldots.}$$

*Примѣръ*. Въ двухъ урнахъ A и B находятся:

| | | | |
|---|---|---|---|
| въ A | 3 шара бѣлыхъ, | въ B | 4 шара бѣлыхъ, |
| | 2 черныхъ, | | 5 черныхъ, |
| | 5 голубыхъ; | | 3 красныхъ; |

найти вѣроятность, что изъ обѣихъ урнъ вынутся сразу шаръ голубой изъ A и шаръ бѣлый изъ B.

Найдемъ сперва всѣ случаи совокупленія каждаго шара изъ A съ каждымъ изъ B, равно возможные. Отъ совокупленія одного шара изъ A съ каждымъ изъ B (гдѣ 12 шаровъ) получается 12 паръ; а какъ въ A находится всѣхъ шаровъ 10, то, отъ соединенія ихъ съ шарами B, попарно, получится $12 \times 10 = 120$ паръ. Это и есть число всѣхъ случаевъ возможныхъ.

Отъ совокупленія одного голубаго шара изъ A съ каждымъ бѣлымъ шаромъ изъ B, получатся 4 пары; а какъ въ A находится 5 шаровъ голубыхъ, то, отъ совокупленія ихъ съ каждымъ бѣлымъ шаромъ въ B, попарно, составится $4 \times 5 = 20$ паръ, благопріятныхъ нашему ожиданію. Посему, искомая вѣроятность

$$W = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

Вѣроятность, что сразу вынется шаръ черный изъ A и красный изъ B, найдется $\frac{2 \times 3}{120} = \frac{1}{20}$.

Вѣроятность, что изъ обѣихъ урнъ вынется по одному бѣлому шару въ одно время $\frac{3 \times 4}{120} = \frac{1}{10}$.

Слѣдовательно, можно держать пари, $\frac{1}{10} : \frac{1}{20} = 2:1$, что скорѣе выйдетъ послѣдній случай, нежели предпослѣдній.

**317.** Если въ разныхъ событіяхъ, происходящихъ въ одно время, будетъ равно не только число N случаевъ возможныхъ, но и число $n$ случаевъ благопріятныхъ каждому явленію, то въ уравненіи (A) всѣ N и также всѣ $n$ будутъ между собою равны; а потому, вѣроятность W, что случай, котораго простая вѣроятность $w = \frac{n}{N}$, произойдетъ $m$ разъ сряду (либо $m$ разъ вдругъ), будетъ

$$(C) \ldots\ldots\ldots\ldots W = \left(\frac{n}{N}\right)^m, \text{ или } W = w^m.$$

*Примѣръ.* Простая вѣроятность, что на одной кубической кости выпадетъ число 3, равна $\frac{1}{6}$; то вѣроятность, что это же число выпадетъ *два раза сряду*, по уравненію (C), будетъ

$$W = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36};$$

а вѣроятность, что это же число 3 и на томъ же кубѣ вскроется 10 разъ сряду, будетъ

$$W = \frac{1}{6^{10}} = \frac{1}{60466176}.$$

Вотъ какъ мала вѣроятность, чтобы могъ выйти такой случай.—Вѣроятность же противнаго, т. е. что этого случая не будетъ, равна

$$1 - W = \frac{60466175}{60466176}$$

и чрезвычайно близка къ единицѣ, такъ что соперникъ мой можетъ держать пари, 60 милліоновъ противъ 1, что первый случай, мнѣ благопріятный, не выйдетъ.

*Примѣръ*. Простая вѣроятность, что на двухъ брошенныхъ кубахъ выпадутъ сразу числа 3 и 3, какъ извѣстно (стран. 286), равна $\frac{1}{36}$; а потому вѣроятность, что на тѣхъ же кубахъ вскроются два раза сряду числа 3 и 3, будетъ

$$W = \frac{1}{36^2} = \frac{1}{1296}.$$

*Примѣръ*. Простая вѣроятность, чтобы на двухъ брошенныхъ кубахъ получилась сумма очковъ 5 равна $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; а вѣроятность, что этотъ случай повторится шесть разъ сряду, будетъ

$$W = \frac{1}{9^6} = \frac{1}{531441}.$$

*Примѣръ*. Положимъ, что какое ни есть происшествіе, чрезъ изустныя преданія отъ одного лица къ другому, отъ этого къ третьему, и т. д., дошло до насъ отъ 20-го лица; спрашивается, какъ велика вѣроятность этого преданія?

Хотя простая вѣроятность, что каждое изъ сихъ лицъ передавало происшествіе вѣрно и полно, будетъ велика, и равняется, наприм. $w = \frac{9}{10} = 0,9$; но сложная вѣроятность переданнаго такимъ образомъ повѣствованія будетъ только

$$W = (0,9)^{20} = 0,1216;$$

такъ что можно держать закладъ 1 противъ 8 (почти), что преданіе, полученное нами отъ 20-го лица, имѣетъ достовѣрность.

*Примѣръ*. Простая вѣроятность, что на двухъ брошенныхъ кубахъ выпадетъ сразу сумма 8, какъ извѣстно, равна $\frac{5}{36}$; а такая же вѣроятность для суммы 9 равна $\frac{4}{36}$; то вѣроятность, что на двухъ кубахъ, брошенныхъ два раза сряду, получится однажды 8 и однажды 9, по формулѣ (A) найдется:

$$W = \frac{5}{36} \cdot \frac{4}{36} = \frac{5}{324} = 0,0154.$$

*Примѣръ*. Два игрока A и B бросаютъ по два куба, а третій C бросаетъ одинъ кубъ; найти вѣроятность, что, въ одно и то же время, A получитъ на своихъ кубахъ два равныя числа, B не получитъ равныхъ чиселъ, а C получитъ число 6.

Простая вѣроятность для A равна $\frac{1}{6}$,
для B – $\frac{5}{6}$,
для C – $\frac{1}{6}$,

а сложная вѣроятность, что эти три случая встрѣтятся въ одно время, будетъ

$$W = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216} = 0,0231.$$

**318.** Слѣдующіе примѣры представляютъ случаи совокупленія вѣроятностей I съ вѣроятностями II.

*Примѣръ.* Въ одной урнѣ находятся 1 шаръ черный и 2 бѣлыхъ, а въ другой урнѣ—одинъ шаръ черный и 4 бѣлыхъ; найти, какъ велика вѣроятность, что изъ которой нибудь урны въ первый разъ вынется шаръ бѣлый?

Простая вѣ$\overset{\text{оятн}}{\text{р}}$ность, что мы опустимъ руку въ первую урну, равна $\frac{1}{2}$; а вѣроятность, что изъ нее вынемъ бѣлый шаръ, равна $\frac{2}{3}$; посему вѣроятность встрѣчи этихъ обоихъ случаевъ, или послѣдованія одного за другимъ, будетъ, по формулѣ (A), равна

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Такимъ же образомъ найдется вѣроятность встрѣчи такихъ же двухъ случаевъ при второй урнѣ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}.$$

А какъ обѣ вѣроятности $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{5}$ соотвѣтствуютъ одному нашему ожиданію, т. е. одному благопріятному для насъ случаю; то, по 316, искомая сложная вѣроятность должна быть,

$$W=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}.$$

*Примѣръ.* Три урны содержатъ шары:

первая 1 черный и 1 бѣлый,
вторая 1 черный и 2 бѣлые,
третья 3 бѣлые шара;

найти вѣроятность, что изъ которой нибудь урны въ первый разъ вынется шаръ бѣлый.

Найдется: $$W=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{6}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=0{,}722.$$

*Примѣръ.* 52 карты разложены на четыре кучки такъ, что находится

*въ первой:* 10 картъ красныхъ, *во второй:* 5 красныхъ,
5 черныхъ; 13 черныхъ;
*въ третьей:* 5 красныхъ, *въ четвертой:* 6 красныхъ,
4 черныхъ; 4 черныхъ;

найти, какъ велика вѣроятность, что изъ которой нибудь кучки наудачу вынется съ перваго разу красная карта.

Вѣроятность, что я положу руку на какую нибудь изъ этихъ кучекъ $=\frac{1}{4}$; а вѣроятность, что я выну изъ нее красную карту, будетъ

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{15}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{18}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{9}+\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{10}=\frac{1}{4}\cdot\frac{21}{10}=0{,}525.$$

Рѣшенію этихъ задачъ можно дать общій видъ, полагая, что находится число урнъ $a$, изъ коихъ каждая содержитъ $m$ шаровъ бѣлыхъ и $n$ черныхъ, и число урнъ $a'$, изъ коихъ каждая содержитъ $m'$ шаровъ бѣлыхъ и $n'$ черныхъ; то вѣроятность, что изъ какой ни есть урны, въ первый разъ, на удачу вынется шаръ бѣлый, равна

$$W=\frac{a}{a+a'}\cdot\frac{m}{m+n}+\frac{a'}{a+a'}\cdot\frac{m}{m'+n'}.$$

### 4. Вѣроятность для явленій одно другимъ замѣняемыхъ.

**319.** Положимъ, что въ послѣдовательномъ ходу извѣстныхъ событій находится число N случаевъ равно возможныхъ, изъ нихъ $n$ случаевъ благопріятныхъ для сбыточности явленія А, и $n'$ случаевъ благопріятныхъ явленію В *); то, назвавъ чрезъ $w$ простую вѣроятность того, что произойдетъ явленіе А, и $w'$ вѣроятность въ пользу В, имѣемъ:

$$w=\frac{n}{N}, \text{ или } w'=\frac{n'}{N}.$$

Опредѣлимъ теперь, какъ велика вѣроятность W, что либо произойдетъ явленіе А, либо явленіе В, если А не случится.

Вѣроятность, что произойдетъ А, $=w$, стало-быть, вѣроятность, что его не будетъ, $=1-w$; а вѣроятность, что, въ одно время, не случится А, но произойдетъ В, по II случаю, будетъ

$$(1-w)w'.$$

По этому, искомая вѣроятность W, что либо произойдетъ событіе А, либо, когда его не будетъ, то произойдетъ В, изобразится (стран. 294) равенствомъ

$$\begin{aligned}W&=w+(1-w)w'\\&=1-(1-w)(1-w').\end{aligned}$$

Пояснимъ это слѣдующимъ примѣромъ:

Вѣроятность, что на двухъ брошенныхъ кубахъ выпадетъ въ первый разъ сумма 9, или, когда этого не случится, то, по крайней мѣрѣ, во второй разъ выпадетъ 9.

Тутъ простая вѣроятность $w=w'=\frac{4}{36}$,
потому что благопріятныхъ случаевъ четыре: 3+6, 4+5, 5+4, 6+3. Посему, искомою вѣроятностью будетъ

$$W=1-(1-\frac{4}{36})(1-\frac{4}{36})=0,210.$$

Но, вѣроятность, что на этихъ двухъ кубахъ вскроется сначала сумма 9, а если она не выйдетъ, то, по крайней мѣрѣ, сумма 8, будетъ

$$W=1-(1-\frac{4}{36})(1-\frac{5}{36})=0,234;$$

потому что здѣсь второму явленію соотвѣтствуетъ пять случаевъ; 2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2.

---

*) Здѣсь разумѣется, что $N > n+n'$.

**320.** Положимъ теперь, что находятся *три событія,* появленію коихъ соотвѣтствуютъ простыя вѣроятности:

$$w = \frac{n}{N},\ w' = \frac{n'}{N},\ w'' = \frac{n''}{N};$$

то вѣроятность W, что выйдетъ случай въ пользу перваго событія, либо, когда этого не будетъ, то пусть выйдетъ въ пользу втораго, а когда не случится и этого, то пусть, по крайней мѣрѣ, выйдетъ случай выгодный для третьяго, найдется весьма легко слѣдующимъ образомъ.

Положимъ для краткости (**319**)

$$x = 1-(1-w)(1-w');$$

то, очевидно, что искомою вѣроятностью буудетъ:

$$W = 1-(1-x)(1-w'');$$

куда надобно только подставить на мѣсто $x$ его величину, и получится

$$W = 1-(1-w)(1-w')(1-w'').$$

Такимъ же образомъ опредѣлится вѣроятность для четырехъ и болѣе событій одно другимъ замѣняемыхъ.

*Примѣръ.* Урна содержитъ 20 шаровъ, изъ коихъ 3 бѣлыхъ, 4 черныхъ и 5 голубыхъ; найти вѣроятность, что съ перваго раза вынется шаръ бѣлый, а если не онъ, то голубой.

Простыя вѣроятности для выхода бѣлаго шара

$$w = \frac{3}{20},$$

для голубаго $w' = \frac{5}{20}$, для чернаго $w'' = \frac{4}{20}$.

Посему, искомая вѣроятность:

$$W = 1-(1-w)(1-w')$$

$$= 1-\left(1-\frac{3}{20}\right)\left(1-\frac{5}{20}\right) = 1-\frac{17}{20}\cdot\frac{15}{20} = \frac{29}{80}.$$

Вѣроятность, что вынется шаръ черный, а если не онъ, то голубой, будетъ:

$$1-(1-w'')(1-w') = 1-\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{20} = 0{,}4.$$

Вѣроятность, что вынется шаръ бѣлый, а если не онъ, то черный, а если не этотъ, то голубой, найдется:

$$1-(1-w)(1-w'')(1-w') = 1-\frac{17}{20}\cdot\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{20} = 0{,}49.$$

*Примѣръ.* Взята колода въ 36 картъ, по 9 листовъ каждой масти; найти вѣроятность, что, послѣ 2, 3, 4,.... разовъ, вынется карта пиковой масти, предполагая, что, послѣ каждаго выема, эта вынутая карта откладывается въ сторону, и, стало-быть, число всѣхъ картъ уменьшается одною, двумя, тремя, и т. д.

Вѣроятность, что въ первый разъ вынется пиковая карта, $w_1 = \frac{9}{36}$. Вѣроятности, что она вынется во второй, въ третій, и т. д. разъ, будутъ: $w_2=\frac{9}{35}$, $w_3=\frac{9}{34}$, ….; а противныя вѣроятности, что такая карта не вынется:

$$1-w_1=1-\frac{9}{36},\ 1-w_2=1-\frac{9}{35},\dots$$

Искомая же сложная вѣроятность W будетъ

$$W=1-(1-w_1)(1-w_2)(1-w_3)$$
$$=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{26}{35}\cdot\frac{25}{34}=1-\frac{195}{476}=\frac{281}{476}=0{,}6.$$

Если бъ мы искали вѣроятность, что послѣ пяти разъ вынется пиковая карта, то нашли бы:

$$W=1-\frac{195}{476}\cdot\frac{24}{33}\cdot\frac{23}{32}=1-\frac{4485}{20244}=\frac{4}{5}.$$

*Примѣръ.* Лотерея аллегри состоитъ изъ 100 билетовъ, изъ коихъ 80 пустыхъ и 20 съ выигрышами; узнать, какъ велика вѣроятность, что изъ пяти билетовъ, вынимаемыхъ одинъ за другимъ, выиграетъ хотя одинъ?

Здѣсь простыя вѣроятности, что выиграетъ хотя одинъ билетъ, суть:

$$w_1=\frac{20}{100},\ w_2=\frac{20}{99},\ w_3=\frac{20}{98},\ w_4=\frac{20}{97},\ w_5=\frac{20}{96};$$

а вѣроятности противныя:

$$1-w_1,\ 1-w_2,\ 1-w_3,\dots$$

Искомая же вѣроятность будетъ

$$W=1-\left(1-\frac{20}{100}\right)\left(1-\frac{20}{99}\right)\left(1-\frac{20}{98}\right)\left(1-\frac{20}{97}\right)\left(1-\frac{20}{96}\right).$$
$$=1-\frac{80}{100}\cdot\frac{79}{99}\cdot\frac{78}{98}\cdot\frac{77}{97}\cdot\frac{76}{96}=1-\frac{19513}{61110}=\frac{41597}{61110}=\frac{2}{3}\ \text{(почти)}.$$

*Примѣръ.* Найти вѣроятность, что на двухъ брошенныхъ кубахъ выпадетъ въ первый разъ сумма 7; если же этого не случится, то второй разъ, а когда и здѣсь она не получится, то, по крайней мѣрѣ, въ третій разъ.

Такихъ случаевъ, когда на двухъ кубахъ вскроется сумма 7, находится шесть:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Простая вѣроятность, что вскроется сумма 7, будетъ $=\frac{6}{36}$; она остается таже при каждомъ бросаніи кубовъ; посему искомая вѣроятность будетъ:

$$W=1-\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)=1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^3=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}.$$

**321.** Отъ этого частнаго примѣра можно перейти къ общему. Положимъ, что, въ какой ни есть игрѣ такого же рода, я имѣю въ свою пользу $a$ случаевъ благопріятныхъ, а противъ себя $b$ случаевъ неблагопріятныхъ, то вѣроятность, что, повторяя игру $n$ разъ, я выиграю хотя одинъ разъ, будетъ

$$W=1-\left(1-\frac{a}{a+b}\right)^n=\frac{(a+b)^n-b^n}{(a+b)^n}.$$

Изъ этого выраженія можно, обратно, искать $n$, если $W$, $a$ и $b$ даны.

Положимъ, что требуется знать, во сколько партій вѣроятность выиграть хотя одну сдѣлается $=\frac{1}{2}$. По этому условію имѣемъ:

$$\frac{(a+b)^n-b^n}{(a+b)^n}=\frac{1}{2}\text{, или } (a+b)^n=2b^n;$$

отсюда,

$$n \log (a+b)=\log 2+n \log b\text{, и}$$

$$n=\frac{\log 2}{\log(a+b)-\log b}.$$

Для частнаго случая, положимъ, что нужно знать, на сколько игоръ можно держать пари, что на двухъ игральныхъ кубахъ выпадетъ сумма 12. Здѣсь $a=1$, $b=35$, потому что $a+b=36$, и суммѣ 12 соотвѣтствуетъ только одинъ случай:

$$n=\frac{\log 2}{\log 36-\log 35}=\frac{0,301030}{0,012234}=25.$$

И такъ, можно держать пари на 25 игоръ.

Если бы требовалась вѣроятность

$$\frac{(a+b)^n-b^n}{(a+b)^n}=\frac{2}{3},$$

то нашли бы $n=39$ игоръ.

**322.** Выраженіе сложной вѣроятности событій, одно другимъ замѣняемыхъ,

$$W=1-(1-w)(1-w')(1-w'')$$

прилагается непосредственно къ опредѣленію вѣроятнаго продолженія жизни двухъ, или больше, лицъ въ какой ни есть періодъ времени, при учрежденіи вдовьихъ либо сиротскихъ кассъ, обществъ для застрахованія капиталовъ или пожизненныхъ доходовъ, а съ тѣмъ вмѣстѣ для вычисленія преміи, какую долженъ каждогодно вносить страхователь, или покровитель, въ это общество въ пользу застраховываемаго лица, чтобы, въ случаи смерти страхователя въ теченіе условнаго періода времени, общество обязано было выдать этому лицу извѣстный капиталъ единовременно, или выдавать ему пожизненный пенсіонъ.

Пусть $w$ вѣроятность, что лицо A, имѣющее $a$ лѣтъ, проживетъ еще $p$ годовъ; $w'$ вѣроятность, что лицо B, имѣющее $b$ годовъ, проживетъ также $p$ годовъ, и $w''$ вѣроятность, что лицо C, имѣющее $c$ лѣтъ, также проживетъ $p$ годовъ, и т. д. (Эти вѣроятности можно получать изъ извѣстныхъ таблицъ смертности); то будемъ имѣть:

$ww'$ вѣроятность, что A и B проживутъ оба $p$ годовъ, которая и принимается за *продолженіе союза* этихъ двухъ лицъ: слѣдовательно,

$1-ww'$ будетъ вѣроятностью, что этотъ союзъ не продолжится $p$ лѣтъ, но что одно изъ двухъ лицъ, A или B, умретъ въ теченіе $p$ годовъ. Далѣе:

$w(1-w')$ вѣроятность, что чрезъ $p$ годовъ, лицо A будетъ жить, а B будетъ умершимъ;

$w'(1-w)$ вѣроятность, что, послѣ $p$ годовъ, А будетъ умершимъ, а В будетъ еще жить;

$(1-w)(1-w')$ вѣроятность, что, послѣ $p$ годовъ, оба лица будутъ умершими; и наконецъ,

$1-(1-w)(1-w')$ вѣроятность, что, послѣ $p$ годовъ, не оба лица будутъ умершими, но что по крайней мѣрѣ одно изъ нихъ будетъ жить.

Такимъ же образомъ найдется:

$ww'w''$ вѣроятность, что, послѣ $p$ годовъ, всѣ три лица будутъ живыми;

$ww'(1-w'')$ вѣроятность, что, послѣ того же времени, только А и В останутся живы, и С будутъ умершимъ;

$(1-w)(1-w')w''$ вѣроятность, что А и В будутъ умершими, а С будетъ жить;

$1-ww'w''$ вѣроятность, что одно какое нибудь изъ трехъ лицъ умретъ;

$1-(1-w)(1-w')1-w'')$ вѣроятность, что не всѣ три лица умрутъ, но что по крайней мѣрѣ одно изъ нихъ будетъ жить;

$(1-w)(1-w')1-w'')$ вѣроятность, что, послѣ $p$ годовъ, не будетъ ни одного въ живыхъ, и т. д.

*Бауманова* таблица смертности *) показываетъ, что изъ 1000 человѣкъ, родившихся въ одинъ годъ, остаются живыми:

$491=A_{20}$, послѣ 20 лѣтъ,
$439=A_{30}$, - 30 -
$374=A_{40}$, - 40 -
$300=A_{50}$, - 50 -
$210=A_{60}$, - 60 -

Вѣроятность, что проживетъ еще 20 годовъ человѣкъ, имѣющій въ настоящее время

20 лѣтъ, будетъ $\frac{A_{20}+20}{A_{20}}=\frac{374}{491}=0,8=w$,
30 - - $\frac{A_{30}+20}{A_{30}}=\frac{300}{439}=0,7=w'$,
40 - - $\frac{A_{40}+20}{A_{40}}=\frac{210}{374}=0,6=w''$.

Слѣдовательно, для одновременной жизни двухъ первыхъ лицъ, изъ коихъ одному 20, а другому 30 годовъ, получаются вѣроятности:

$ww'=0,56$ $w'(1-w)=0,14$
$1-ww'=0,44$ $(1-w)(1-w')=0,06$
$w(1-w')=0,24$ $1-(1-w)(1-w')=0,96$

Но, если первое лицо А, которому теперь 20 лѣтъ, застраховывается двумя лицами В и С, изъ коихъ одному 20, а другому 30 лѣтъ; то, для совокупной ихъ жизни, и разновременной или одновременной ихъ смерти, найдутся

---

*) См. въ *Политической Ариѳметикѣ Бруна*, стран. 153. Одесса, 1845 года.

слѣдующія вѣроятности, на основаніи которыхъ можно вычислять преміи, платимыя страхователями:

$$ww'w''=0,34 \qquad w(1-w')(1-w'')=0,10$$

$$ww'(1-w'')=0,22 \qquad (1-w)(1-w')(1-w'')=0,02$$

$$(1-w)(1-w')w''=0,04 \qquad 1-ww'w''=0,66$$

$$(1-w)w'(1-w'')=0,06 \qquad 1-(1-w)(1-w')(1-w'')=0,98$$

и такъ далѣе.

### 5. Вѣроятности явленій въ повторяемыхъ опытахъ.

**323.** Положимъ, что, при повтореніи какого нибудь опыта, возможны только явленія A и B, что явленіе A возможно въ $m$ случаяхъ, а явленіе B въ $n$ случаяхъ, и что, при каждомъ повтореніи опыта, отношеніе между числами этихъ обоихъ случаевъ остается постояннымъ; то вѣроятность, что, послѣ извѣстнаго числа повтореній, выйдетъ тотъ или другой случай, легко можно находить изъ весьма замѣчательнаго ея выраженія.

Начнемъ съ частнаго случая. Возмемъ правильный многогранникъ, имѣющій $m+n$ равныхъ граней, изъ которыхъ $m$ граней отмѣчены буквою A, и $n$ граней — буквою B, и положимъ, что этотъ многогранникъ будетъ брошенъ *три раза сряду;* то, ясно, что могутъ на немъ вскрыться слѣдующіе случаи:

Можетъ выйти A три раза......................AAA,

можетъ выйти A два раза, и B однажды.......AAB,

(а если порядокъ послѣдованія граней не опредѣленъ, произволенъ, то это сочетаніе можетъ выйти три раза: AAB, ABA, BAA);

можетъ выйти однажды A и два раза B...,ABB,

(и здѣсь имѣетъ мѣсто предыдущее замѣчаніе);

можетъ выйти B три раза......................BBB.

Означимъ вѣроятности для A и B, соотвѣтственно, буквами $a$ и $b$, то есть: $a=\frac{m}{m+n}$, $b=\frac{n}{m+n}$ (это противная вѣроятность относительно A). Сложныя вѣроятности будутъ:

для 1-го случая.....$=aaa=a^3$;

– 2-го – $=aab=a^2b$, а когда порядокъ граней произволенъ, то $=3a^2b$;

– 3-го – $=abb=ab^2$, а если порядокъ граней произволенъ, то $=3ab^2$;

– 4-го – $=bbb=b^3$

И такъ, предполагая *произвольнымъ* порядокъ граней многогранника, при *троекратномъ* повтореніи опыта, вѣроятности, соотвѣтственныя всѣмъ возможнымъ случаямъ ихъ выхода, изображаются рядомъ $a^3$, $3a^2b$, $3ab^2$, $b^3$ членовъ, составляющихъ разложеніе $(a+b)^3$.

**324.** Разсуждая такимъ же образомъ, легко найти отдѣльныя вѣроятности для всѣхъ случаевъ, могущихъ выйти, когда опытъ повторяется $n$ разъ, по опредѣленному порядку вскрытія граней, а именно:

Чтобы А вышло $n$ разъ и В ни разу..................................$a^n$;
либо, чтобы сначала А вышло $n-1$ разъ и потомъ В однажды.....$a^{n-1}b$;
либо, чтобы сперва А вышло $n-2$ разъ и потомъ В два раза....$a^{n-2}b^2$;
либо, чтобы сперва А вышло $n-3$ раза, и за тѣмъ В три раза...$a^{n-3}b^3$,
и такъ дал.; или, наконецъ, чтобы А вышло $n-p$ разъ и В $p$ разъ...$a^{n-p}b^p$.

Сложная же вѣроятность, чтобы точно въ этомъ же порядкѣ, при повтореніи опыта $n$ разъ, А вышло не менѣе $n-p$ и В не болѣе $p$ разъ, найдется (**323**), сложивъ всѣ сіи вѣроятности:

$$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots\ldots+a^{n-p}b^p.$$

Если же порядокъ выхода граней произволенъ, то отдѣльныя вѣроятности изобразятся членами ряда $(a+b)^n$, то есть, будутъ:

$$a^n,\ \frac{n}{1}a^{n-1}b,\ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}b^2,\ldots\ldots,\ b^n,$$

гдѣ общій членъ $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots..p}a^{n-p}b^p$ изображаетъ вѣроятность того случая, въ которомъ, при произвольномъ порядкѣ граней, во время $n$ опытовъ, А можетъ выйти $n-p$ разъ, а В $p$ разъ. А сложная вѣроятность, что, въ этомъ случаѣ, выйдетъ А неменѣе $n-p$ разъ, а В не болѣе $p$ разъ, изобразится суммою:

$$a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}b^2+\ldots..+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\ldots p}a^{n-p}b^p.$$

И такъ, если ищется вѣроятность, чтобъ, во время $n$ опытовъ, вышло А не менѣе $n-2$ раза, то въ составъ этой вѣроятности должны также входить случаи $n-1$ и $n$ выходовъ А. При такомъ условіи, ожидаемая вѣроятность изобразится *суммою первыхъ трехъ членовъ* помянутаго ряда $(a+b)^n$; ибо хотимъ, чтобы А вышло $n$ разъ, или $n-1$, или $n-2$ раза, и не менѣе. — Напротивъ, вѣроятность, что, во время $n$ опытовъ, А выйдетъ *не болѣе* $n-2$ раза, равняется суммѣ членовъ всего ряда $(a+b)^n$ безъ двухъ его первыхъ членовъ.— Это же разсужденіе примѣняется и къ В.

**325.** Поелику $a+b=1$, стало-быть и $(a+b)^n=1$, то вѣроятность, что А вскроется не менѣе $n-p$ разъ и не болѣе $n-p-1$ разъ, во время $n$ опытовъ, всегда равна 1-цѣ, то есть, достовѣрности, чему и быть должно.

Очевидно, что, когда, для опредѣленія вѣроятности, потребуется взять сумму больше половины членовъ ряда $(a+b)^n$, то ее гораздо легче найти чрезъ вычитаніе суммы меньшаго числа остальныхъ его членовъ изъ единицы.

Сверхъ того, поелику коефиціенты $1,\ n,\ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2},\ldots.,n,\ 1$, биномическаго ряда $(a+b)^n=1$ увеличиваются отъ концовъ его къ серединѣ, такъ что наибольшій изъ нихъ соотвѣтствуетъ среднему члену этого ряда при $n$ четномъ, и два равныхъ наибольшихъ соотвѣтствуютъ двумъ среднимъ членамъ при $n$ нечётномъ, то и вѣроятности, представляемыя сими членами, бываютъ меньшими или большими.

1. *Примѣръ.* Найти вѣроятность, что, бросая *четыре раза* кубическую кость, мы получимъ: a) число 6 однажды, стало-быть, три раза иныя числа; b) тоже число 6 не менѣе двухъ разъ; и, наконецъ, c) тоже число не болѣе двухъ разъ.

*Рѣшеніе.*—Здѣсь простая вѣроятность ожидаемаго событія A равна $\frac{1}{6}=a$, а вѣроятность противнаго событія B есть $b=\frac{5}{6}$, и $n=4$; посему,

$$(a+b)^n=(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

a) Вѣроятность перваго явленія выражается однимъ четвертымъ членомъ этого ряда, а именно:

$$4ab^3=4.\frac{1}{6}.\frac{125}{216}=\frac{125}{324} \text{ (между } \frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{3}\text{)}.$$

b) Вѣроятность втораго случая выражается суммою трехъ первыхъ членовъ предыдущаго ряда, то есть:

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2=\frac{1}{6^4}+\frac{4.5}{6^4}+\frac{6.25}{6^4}=\frac{19}{144}.$$

c) Вѣроятность третьяго случая опредѣляется суммою трехъ послѣднихъ членовъ помянутаго ряда, то есть:

$$6a^2b^2+4ab^3+b^4=\frac{6.25+4.125+625}{6^4}=\frac{425}{432}.$$

При этомъ, вѣроятность противнаго, что выпадетъ число 6 *не менѣе* трехъ разъ, будетъ $\frac{1}{6^4}+\frac{4.5}{6^4}=\frac{21}{1296}=\frac{7}{432}$. Обѣ же вмѣстѣ $\frac{425}{432}+\frac{7}{432}=1$.

2. *Примѣръ.* При игрѣ тремя костяными кубами A, B, C, требуется найти вѣроятность, что, при всякомъ бросаніи кубовъ, на каждомъ изъ нихъ вскроется: 1) число менѣе 3 или число 6; 2) два раза менѣе 3 и одинъ разъ 6; или 3) одинъ разъ менѣе 3, и два раза 6; или 4) три раза 6.

Всѣ сіи вѣроятности изображаются членами ряда $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, гдѣ $a=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ (ибо менѣе 3 находятся два случая: 1, 2), $b=\frac{1}{6}$.

При этомъ, $a^3+3a^2b$ вѣроятность, что вскроется три раза сряду число менѣе 3, а если этого не случится, то, по крайней мѣрѣ, два раза менѣе 3 и одинъ разъ 6; она $=\frac{5}{54}$. Далѣе: $3a^2b+3ab^2$ вѣроятность, что выпадетъ два раза число менѣе 3 и одинъ разъ 6, либо 1 разъ менѣе 3 и два раза 6.

3. **Примѣръ.** Найти вѣроятность, что выпадетъ число 6 по крайней мѣрѣ одинъ разъ, бросая кубъ 5 разъ сряду.

Она выражается суммою всѣхъ членовъ ряда $(a+b)^5$ безъ послѣдняго, то есть:

$$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4.$$

Чтобы это же число получить *не менѣе трехъ разъ* въ пять игоръ, вѣроятность

$$=a^5+5a^4b+10a^3b^2;$$

а вѣроятность получить число 6 *не болѣе трехъ разъ* $=10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4$, гдѣ $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{5}{6}$.

4. *Примѣръ.* Урна содержитъ въ себѣ 4 шара бѣлыхъ и 6 черныхъ; найти вѣроятность: a) что, въ шесть разъ сряду, вынутся два шара бѣлыхъ и 4 черныхъ, предполагая, что, послѣ каждаго выема, шаръ опять кладется въ урну; и b) что, въ эти шесть разъ, вынется по крайней мѣрѣ однажды шаръ бѣлый.

Здѣсь простая вѣроятность вынуть бѣлый шаръ $a=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ (вѣроятность событія A); а вѣроятность вынуть шаръ черный $b=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ (это для событія B).

a) Вѣроятность перваго случая выражается пятымъ членомъ ряда $(a+b)^6$. Этотъ членъ будетъ вида $ka^2b^4$; его коефиціентъ

$$k=\frac{6.5.4.3\ 2.1}{1.2.1.2.3.4}=15, \text{ (см. 232)}.$$

Стало-быть, эта вѣроятность

$$=15.\frac{4}{25}\cdot\frac{81}{625}=\frac{972}{3125} \text{ (между } \frac{1}{3} \text{ и } \frac{1}{4}).$$

b) Вѣроятность втораго случая получится изъ суммы четырехъ членовъ ряда $(a+b)^6$, то есть:

$$\frac{2^6+6.2^5.3+15.2^4.3^2+20.2^3.3^3}{6^6}=\frac{7120}{15625}=\frac{1424}{3123},$$

немного менѣе $\frac{1}{2}$.

5. *Примѣръ.* При игрѣ въ *орлянку,* бросаютъ монету, на которой изображенъ съ одной стороны орелъ, а на другой находится надпись (рѣшетка), и которая не представляетъ ни какой разницы для паденія на тотъ или на другой бокъ; спрашивается, какъ велика вѣроятность, что, въ двѣ игры сряду, выпадетъ хотя однажды орелъ?

Искомая вѣроятность, очевидно, состоитъ изъ суммы $a^2+2ab$; при чемъ $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, потому что для обоихъ событій A и B, то есть, для паденія тою или другою стороною вверхъ, простыя вѣроятности равны. Посему,

$$a^2+2ab=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}.$$

6. *Примѣръ.* Въ урнѣ положено 6 шаровъ синихъ, 8 красныхъ и 10 зеленыхъ: найти вѣроятность, что, въ пять разъ сряду, вынется шаръ опредѣленнаго цвѣта, и который опять опускается въ урну.

Простыя вѣроятности для выема шаровъ: синяго $a=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$, краснаго $b=\frac{1}{3}$, зеленаго $c=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$. Посему, вѣроятность:

a) Не вынуть ни одного зеленаго, стало-быть, вынуть только синіе и красные:

$$(a+b)^5 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)^5.$$

b) Не вынуть ни одного зеленаго, но не менѣе какъ одинъ разъ синій, слѣдовательно, не болѣе какъ четыре раза красный:

$$(a+b)^5 - b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)^5 - \left(\frac{1}{3}\right)^5.$$

c) Ни одного зеленаго, но не больше какъ 4 раза синій, слѣдовательно, не менѣе какъ одинъ разъ красный:

$$(a+b)^5 - a^5 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)^5 - \left(\frac{1}{4}\right)^5.$$

d) Вѣроятность вынуть сперва красный шаръ три раза, а потомъ синій два раза; а если этого не случится, то 2 раза красный и три раза синій въ какомъ угодно порядкѣ:

$$w = b^3a^2 + 10b^2a^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 10\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 \text{ *)}.$$

**326.** До сихъ поръ мы брали въ разсмотрѣніе повтореніе только двухъ событій, и, для опредѣленія вѣроятностей, соотвѣтственныхъ различнымъ случаямъ выхода этихъ событій, употребляли степень $(a+b)^n$ бинома; но точно также надобно употреблять степени многочленовъ для опредѣленія вѣроятностей, когда нѣсколько событій повторяются.

Положимъ, напримѣръ, что въ урнѣ находятся 3 шара бѣлыхъ, 5 черныхъ, и 4 красныхъ; то вѣроятности всѣхъ возможныхъ случаевъ выхода шаровъ, при повтореніи выема 4 раза, (предполагая при семъ, что каждый вынутый шаръ

---

*) Если, при повтореніи опыта, послѣ каждаго раза, будетъ уменьшаться число всѣхъ случаевъ равно возможныхъ (напримѣръ когда шары, послѣдовательно вынимаемые изъ урны, въ нее не опускаются), то, для опредѣленія вѣроятности событія, употребляются другія формулы. Положимъ, что появленіе A возможно въ $m$ случаяхъ, а B въ $n$ случаяхъ, и $m+n=s$, то вѣроятность получить A $p-q$ разъ, B $q$ разъ, во время $p$ опытовъ, была бы:

$$k.a^{p-q}\ b^q = k.\left(\frac{m}{s}\right)^{p-q}\left(\frac{n}{s}\right)^q,$$

предполагая, что послѣ всякаго выема шаръ опускается опять въ урну. Но, когда, послѣ каждаго выема, сумма шаровъ уменьшается единицею; тогда, вмѣсто $\left(\frac{m}{s}\right)^{p-q}$ надобно будетъ взять:

$$\frac{m}{s} \cdot \frac{m-1}{s-1} \cdot \frac{m-2\ldots\ldots[m-(p-q)+1]}{s-2\ldots\ldots(s-p+q+)},$$

а вмѣсто $\left(\frac{n}{s}\right)^q$, взять:

$$\frac{n \quad . \quad (n-1) \quad . \quad (n-2)\ldots\ldots\ (n-q+1)}{(s-p+q)(s-p+q-1)(s-p+q-2)\ldots.(s-p+1)},$$ и получили бы

$$W = \frac{p(p-1)\ldots.(p-q+1)}{1\ .\ 2\ldots\ldots\ldots\ldots q} \times \frac{m(m-1)\ldots[m-(p-q)+1]n(n-1)\ldots.(n-q+1)}{s(s-1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots.(s-p+1)},$$

гдѣ $\frac{p(p-1)(p-2)\ldots.(p-q+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots\ldots q} = k$ коефиціентъ, который мы вездѣ употребляли.

опять опускается въ урну) выразятся, соотвѣтственно каждому, членами ряда $(a+b+c)^4$, гдѣ $a$, $b$, $c$ суть простыя вѣроятности для выема шаровъ бѣлаго, чернаго и краснаго.

Такимъ образомъ нашли бы вѣроятность въ эти четыре раза вынуть одинъ шаръ бѣлый, 2 черныхъ, и 1 красный, равною $kab^2c$, гдѣ $k=\frac{4.3.2.1}{1.2.1.1}=12$, (см. 232), то есть:

$$w=12ab^2c.$$

Вѣроятность, что вынется шаръ бѣлый не менѣе двухъ разъ, нашли бы изъ суммы:

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4a^3c+12a^2bc+6a^2c^2,$$

и такъ далѣе. Для вычисленія, остается только подставить:

$$a=\frac{3}{12},\ b=\frac{5}{12},\ c=\frac{4}{12}.$$

Положимъ, наконецъ, что повторяются событія A, B, C, D,...., для выхода коихъ находятся простыя вѣроятности соотвѣтственно $a$, $b$, $c$, $d$,....; то вѣроятность, что, во время $n$ опытовъ, A выйдетъ $\alpha$ разъ, B $\beta$ разъ, C $\gamma$ разъ, D $\delta$ разъ, и т. д. въ произвольномъ порядкѣ, полагая $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots.=S$, выразится членомъ:

$$ka^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots.,$$

въ которомъ коефиціентъ

$$k=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots.3.2.1}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times\ldots.}$$

Если положить $k=1$, то вѣроятность будетъ $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots.$ Она соотвѣтствуетъ тому условію, чтобы событія A, B, C, D,.... появлялись одно за другимъ въ порядкѣ опредѣленномъ самою этою формулою.

## ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ.

## О ФУНКЦІЯХЪ ВООБЩЕ, ИХЪ РАЗДѢЛЕНІИ, И ПРОЧ.

**327.** *Функціею* вообще называется всякое алгебрическое выраженіе, состоящее изъ совокупленія постоянныхъ количествъ съ одною или нѣсколькими величинами перемѣнными. Въ ней *постоянныя количества* обыкновенно означаются числами, или начальными буквами $a$, $b$, $c$,....; и *количества перемѣнныя*— буквами $x$, $y$, $z$,.... Величина функціи измѣняется съ измѣненіемъ ея перемѣнныхъ.

**328.** Для различія одной функціи отъ другой употребляются общіе знаки F, $f$, $\theta$, $\varphi$, $\psi$. Такимъ образомъ, функціи $\sqrt{2ax-x^2}$, $\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$, можно, для различія, отмѣтить знаками:

$$\sqrt{2ax-x^2}=f(x),$$

$$\frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}=\mathrm{F}(x).$$

Такъ изображаются функціи съ одною перемѣнною. Подобнымъ же образомъ означается функція съ двумя перемѣнными, только при общемъ знакѣ пишутся обѣ перемѣнныя. Напримѣръ:

$$2x-3y^2+b=\varphi(x,\ y).$$

**329.** Функціи раздѣляются на алгебрическія и трансцендентныя. *Алгебрическія функціи* тѣ, въ которыхъ количества постоянныя совокуплены съ перемѣнными сложеніемъ, вычитаніемъ, умноженіемъ, возвышеніемъ въ степени цѣлыя или дробныя, имѣющія постоянныхъ показателей. Таковы, напримѣръ:

$$ax^n+\frac{b}{x}-3a\sqrt[3]{x^2}=f(x),$$

$$2x^{\frac{1}{2}}-y\log a=f(x,y).$$

Функція называется *трансцендентною,* если находится въ ней хотя одинъ членъ, въ которомъ перемѣнная соединена съ постоянными какимъ ни есть другимъ дѣйствіемъ, не принадлежащимъ функціи алгебрической. Сюда относятся функціи *неопредѣленно-степенныя*, *логариѳмическія*, и проч. Напримѣръ:

$$a+2\log x=\theta(x),$$

$$2x^2-a^x=\mathrm{F}(x).$$

**330.** Алгебрическія функціи раздѣляются еще на *цѣлыя* и *дробныя,* и сверхъ того на *соизмѣримыя* (раціональныя) и *несоизмѣримыя* (ирраціональныя).

*Цѣлая функція* ни въ одномъ изъ своихъ членовъ не содержитъ перемѣнной въ знаменателѣ; а *функція дробная* содержитъ перемѣнную въ знаменателѣ одного или нѣсколькихъ ея членовъ.

Соизмѣримыя функціи не имѣютъ ни дробныхъ показателей, ни коренныхъ знаковъ надъ количествами перемѣнными; но функціи несоизмѣримыя имѣютъ ихъ, и никакими дѣйствіями не могутъ отъ нихъ освободиться.

Такимъ образомъ:

$\frac{a}{b}x^2-cx+d$ есть функція цѣлая раціональная,

$\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}$ – – дробная раціональная,

$\sqrt{a^2-x^2}$ – – цѣлая ирраціональная,

$a^2-\frac{3b}{2-x}+\frac{\sqrt[3]{a^2+x^2}}{\sqrt{x}}$ – – дробная ирраціональная.

**331.** Всякая функція называется *непрерывною,* если она, отъ непрерывнаго возрастанія ея перемѣнной $x$, обращается въ результаты дѣйствительные и конечные, которые возрастаютъ или убываютъ отъ наибольшихъ значеній къ наименьшимъ также непрерывно, не пропуская ни одной промежуточной величины, и не дѣлаясь мнимою или безконечною для всѣхъ конечныхъ величинъ ея перемѣнной.

Это свойство принадлежитъ всякой *цѣлой раціональной функціи;* потому что она не содержитъ перемѣнной въ знаменателѣ, ни коренныхъ знаковъ надъ перемѣнною. Слѣдовательно, члены этой функціи отъ непрерывнаго возрастанія $x$ или убыванія, могутъ только возрастать или убывать непрерывно, и отъ взаимнаго совокупленія давать результаты положительные, отрицательные, или равные нулю; но для конечныхъ величинъ $x$, и конечнаго числа членовъ, эта функція не сдѣлается безконечною, неопредѣленною или мнимою. Для примѣра возмемъ:

$$f(x)=x^3-x^2-3x-9;$$

будемъ въ нее подставлять:

$$x=-2,\ -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ldots \text{ получится}$$
$$f(x)=-15,\ -8,\ -9,\ -12,\ -11,\quad 0,\quad 27,\ldots$$

Непрерывность этой функціи очевидна.

**332.** Всякая *дробная функція* раціональная не всегда бываетъ непрерывною; она, содержа перемѣнную въ знаменателѣ, нерѣдко, для конченныхъ ея величинъ дѣлается безконечною. Напримѣръ:

$$\mathrm{F}(x)=\frac{10-4x}{2-x}$$

для $x = -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2.\ \ \frac{9}{4},\ \ \frac{10}{4},\ \ 3,\ldots,$ дѣлается

$$F(x) = \frac{14}{3},\ \ 5,\ \ 6,\ \ \infty,\ \ -4,\ \ 0,\ \ 2,\ldots$$

*Примѣръ.* $$f(x) = \frac{x}{(2-x)^2}$$

для $x=1,\ 2,\ 3,\ldots,$ дѣлается

$$f(x) = 1,\ \infty,\ 3,\ldots$$

Сверхъ того, функція дробная раціональная очень часто выражается безконечнымъ рядомъ, составляющимъ прогрессію. Наприм.

$$\frac{ax}{b+x} = \frac{a}{b}\,x - \frac{a}{b^2}\,x^2 + \frac{a}{b^3}\,x^3 - \ldots$$

**333.** *Функція цѣлая ирраціональная*, вообще, не бываетъ непрерывна; разрывъ ея непрерывности часто происходитъ отъ перехода ея изъ дѣйствительной въ мнимую. Но, въ частныхъ предѣлахъ, бываетъ непрерывна.

*Примѣры:*

$f(x) = \sqrt[3]{2-x}$ есть функція непрерывная, потому что, для всякой дѣйствительной величины $x$, корень нечетной степени изъ $2-x$ не можетъ сдѣлаться ни безконечнымъ, ни мнимымъ.

Но функція $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ не непрерывна; ибо, для

$x = -3,\ \ -2,\ \ -1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ldots$ находимъ:

$$f(x) = \sqrt{-3},\quad 0,\quad \sqrt{3},\quad 2,\quad \sqrt{3},\quad 0,\quad \sqrt{-3},\ldots$$

Она непрерывна только между предѣлами $x=+3$, $x=-3$; а далѣе сихъ предѣловъ становится мнимою, чѣмъ и нарушается ея непрерывность.

Функція дробная ирраціональная можетъ терять непрерывность не только отъ того, что дѣлается иногда мнимою, но и отъ того, что становится безконечною для конечныхъ величинъ ея перемѣнной. Это очевидно.

Сверхъ того, всякая функція ирраціональная, цѣлая или дробная, весьма часто выражается безконечнымъ рядомъ. Наприм.

$$f(x) = \sqrt[n]{a+x} = (a+x)^{\frac{1}{n}}$$

$$= a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\cdot a^{\frac{1}{n}-1}\,x + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\,.\,2}.\,a^{\frac{1}{n}-2}\,x^2 + \ldots$$

Число членовъ этого ряда безконечное.

**334.** Трансцендентныя функціи также очень часто бываютъ не непрерывны. Для примѣра возмемъ

$$f(x) = 3^{\frac{1}{2-x}}$$

Для $x = 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ldots$ найдется

$$f(x) = 3,\ \infty,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ldots$$

Сверхъ того, мы увидимъ, что всякую трансцендентную функцію можно разложить въ рядъ, расположенный по степенямъ ея перемѣнной.

## 1. Общій видъ и свойства цѣлой раціональной функціи съ одною перемѣнною.

**335.** Самый общій видъ цѣлой раціональной функціи выражается многочленомъ, расположеннымъ по убывающимъ степенямъ его перемѣнной:

$$f(x)=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Tx+U,$$

гдѣ A, B, C,.... T, U, суть числа цѣлыя, дробныя, даже ирраціональныя, имѣющія предъ собою знаки + либо —; нѣкоторыя изъ нихъ могутъ быть равными нулю. Мы не ставимъ коефиціента предъ $x^n$, потому что его всегда можно отдѣлить и вынесть за скобки. Разсмотримъ свойства этой функціи.

**336.** *Если уменьшать перемѣнную $x$, то послѣдній членъ можетъ сдѣлаться болѣе суммы всѣхъ первыхъ; если же увеличивать $x$, то первый членъ можетъ быть сдѣланъ болѣе суммы всѣхъ прочихъ.*

Справедливость этого можно видѣть изъ того, что, для $x=0$, данная функція обращается въ послѣдній членъ U. Если же въ данной функціи вынесть $x^n$ внѣ скобокъ,

$$x^n\left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\ldots+\frac{T}{x^{n-1}}+\frac{U}{x^n}\right),$$

и потомъ взять $x=\infty$; то уничтожатся всѣ члены, кромѣ перваго $x^n$, который сдѣлается безконечно великъ.

Сверхъ того, *первый членъ функціи сдѣлается болѣе суммы всѣхъ прочихъ ея членовъ, если на мѣсто $x$ подставить самый большій ея коефиціентъ N, сложенный съ единицею, или больше.* Это условіе пишется такъ:

$$x \not< N+1.$$

Для краткости положимъ

$$Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Tx+U=P;$$

а для доказательства предложенія, возмемъ случай самый невыгодный, когда A, B, C,.... T, U, всѣ равны между собою, и равны N; тогда будетъ

$$Nx^{n-1}+Nx^{n-2}+\ldots+Nx+N=P',$$

и, очевидно, что $P'>P$.

Посему, если успѣемъ доказать, что, для $x=N+1$, сдѣлается $x^n>P'$, то и подавно будетъ $x^n>P$.

Но $Nx^{n-1}+Nx^{n-2}+\ldots Nx+N=N(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$

$$=\frac{N(x^n-1)}{x-1}=P'.$$

Теперь подставимъ $x=N+1$ въ $x^n$ и $\frac{N(x^n-1)}{x-1}=P'$, и сравнимъ между собою; найдется:

$$x^n=(N+1)^n,\ P'=\frac{N[(N+1)^n-1]}{N+1-1}=(N+1)^n-1;$$

Откуда видно, что $x^n>P'$, а слѣдовательно и
$x^n>P$.

*Примѣръ*. Въ функціи $x^3-5x^2-6x-7$ наибольшій коефиціентъ 7: полагая $x=7+1=8$, найдется $512-320-48-7>0$; то есть, первый членъ сдѣлался болѣе суммы всѣхъ прочихъ.

**337.** Но, если въ функціи,

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Tx+U,$$

гдѣ U *не меньше единицы*, подставить $\frac{1}{N+1}$, означая чрезъ N также наибольшій коефиціентъ; то *послѣдній членъ* U *сдѣлается болѣе суммы всѣхъ прочихъ*.

Для доказательства, положимъ

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Tx=Q,$$

и возмемъ $Nx^n+Nx^{n-1}+Nx^{n-2}+\ldots+Nx=Q'$

многочленъ той же степени, но котораго коефиціенты всѣ равны самому большому N. Очевидно, что $Q'>Q$; а потому если успѣемъ доказать, что, для $x=\frac{1}{N+1}$, сдѣлается $U>Q'$, то и подавно будетъ $U>Q$.

Но, $Q'=Nx^n\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^{n-1}}\right)=\dfrac{Nx^n\left(\frac{1}{x^n}-1\right)}{\frac{1}{x}-1}$;

сюда подставимъ $x=\frac{1}{1+N}$, найдется:

$$Q'=\frac{N}{(1+N)^n}\cdot\frac{[(1+N)^n-1]}{1+N-1}=1-\frac{1}{(1+N)^n}.$$

Мы предполагали, что $U\not<1$; слѣдовательно получили:

$U>Q'$, и также
$U>Q$,

что и требовалось доказать.

*Примѣръ*. Въ функціи,

$$5x^3+8x^2+9x-1,$$

наибольшій коефиціентъ 9. Взявъ $x=\frac{1}{9+1}=\frac{1}{10}$, получится:

$$0,005+0,08+0,9-1, \text{ или}$$
$$0,985-1;$$

послѣдній членъ сдѣлался болѣе суммы всѣхъ прочихъ.

**338.** *Производные многочлены.* — Разсмотримъ теперь, какое измѣненіе получитъ многочленная, цѣлая, раціональная функція

$$f(x)=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Tx+U,$$

если на мѣсто $x$ подставимъ $x+h$. Она сдѣлается:

$$f(x+h)=(x+h)^n+A(x+h)^{n-1}+B(x+h)^{n-2}+\ldots+T(x+h)+U;$$

или, разложивъ степени двучлена $x+h$ въ ряды по формулѣ Ньютонова бинома, и расположивъ всё по возрастающимъ степенямъ буквы $h$:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
x^n \quad + \quad nx^{n-1} & h+\dfrac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,x^{n-2} & h^2+\ldots+\dfrac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,x^2 & h^{n-2}+nx & h^{n-1}+h^n \\
+Ax^{n-1}+(n-1)Ax^{n-2} & +\dfrac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\,Ax^{n-3} & +\ldots+(n-1)Ax & +A & \\
+Bx^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3} & +\dfrac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}\,Bx^{n-4} & +\ldots+ \quad B & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
+Tx+ \qquad T & & & & \\
+U. & & & &
\end{array}$$

Вся эта функція приводится къ виду:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{1}{1}f'(x).h+\frac{1}{1.2}f''(x).h^2+\frac{1}{1.2.3}f'''(x).h^3+\ldots+h^n,$$

или, короче:

$$f(x+h)=\theta+\theta_1h+\theta_2h^2+\theta_3h^3+\ldots+\theta_{n-2}h^{n-2}+\theta_{n-1}h^{n-1}+h^n,$$

если, для краткости, означимъ коефиціенты различныхъ степеней буквы $h$, какъ разныя функціи отъ $x$, чрезъ

$$f(x)=\theta=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Tx+U,$$

$$f'(x)=\theta_1=nx^{n-1}+(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}+\ldots+T,$$

$$\frac{1}{1.2}f''(x)=\theta_2=\frac{1}{1.2}\left[n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)Ax^{n-3}+(n-2)(n-3)Bx^{n-4}+\ldots\right]$$

$$\frac{1}{1.2.3}f'''(x)=\theta_3=\frac{1}{1.2.3}\left[n(n-1)(n-2)x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)Ax^{n-4}+(n-2)(n-3)(n-4)Bx^{n-5}+\ldots\right]$$

……………………………………………………………………

$$\theta_{n-2}=\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^2+(n-1)Ax+B,$$

$$\theta_{n-1}=nx+A,$$

$$\theta_n=1.$$

Происхожденіе и составъ этихъ функцій подлежитъ простому и замѣчательному закону, а именно:

$f(x)$ есть самая данная функція: она, для простоты и единообразія, означена также чрезъ $\theta$;

$f'(x)$, помножающая $h$, составляется изъ $f(x)$: каждый ея членъ множится на показатель буквы $x$ этого члена, а показатель надъ $x$ уменьшается единицею;

$f''(x)$, помножающая $h^2$, производится изъ $f'(x)$ также: каждый членъ ея множится на показатель буквы $x$ того члена, а показатель надъ $x$ уменьшается единицею;

$f'''(x)$, помножающая $h^3$, производится изъ $f''(x)$ точно также, какъ эта изъ $f'(x)$; и такъ далѣе.

Отъ этого однообразнаго закона происхожденія всякой послѣдующей функціи изъ предшествующей, функціи $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$,.... называются *производными,* также *многочленами производными.*

Получивши эти производныя функціи, для составленія полныхъ коефиціентовъ $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$,.... ряда, надобно $f'(x)$ раздѣлить на единицу, $f''(x)$ раздѣлить на 1.2, $f'''(x)$.... на 1.2.3, и т. д.

Мы чаще будемъ называть производными функціями коефиціенты $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$,....

Составленіе производныхъ функцій изъ данной столь важно для всего послѣдующаго, что всякому учащемуся непремѣнно должно знать оное, и усвоить себѣ механизмъ произвожденія функцій, передѣлавъ нѣсколько примѣровъ.

*Примѣръ.* Дана функція:

$$f(x)=\theta=x^4-4x^3+5x^2-3x+2,$$

найти всѣ ея производныя, и также ея преобразованіе, когда вмѣсто $x$ возмется $x+h$.

Онѣ будутъ: $f'(x)=4x^3-12x^2+10x-3$,

$$f''(x)=12x^2-24x+10,\ f'''(x)=24x-24,\ f''''(x)=24.$$

Отсюда: $\theta_1=f'(x)$, $\theta_2=\frac{1}{1.2}.f''(x)=6x^2-12x+5$, $\theta_3=\frac{1}{1.2.3}f'''(x)=4x-4$, $\theta_4=\frac{1}{1.2.3.4}f''''(x)=1$ *).

Такимъ образомъ опредѣлится все преобразованіе данной функціи, то есть, рядъ

$$f(x+h)=\theta+\theta_1h+\theta_2h^2+\theta_3h^3+\theta_4h^4.$$

Если вмѣсто $h$ возмемъ $-h$, то $f(x)$ измѣнится, и получитъ видъ:

$$f(x-h)=\theta-\theta_1h+\theta_2h^2+\theta_3h^3+\dots.$$

---

*) Для избѣжанія большихъ чиселъ и дѣйствій надъ ними, въ практикѣ легче поступать такъ: по полученіи первой производной $\theta_1$ изъ $\theta$, возми производную изъ $\theta_1$ и раздѣли на 2, получится $\theta_2$; имѣя $\theta_2$, возмемъ отъ нее производную, раздѣлимъ на 3, получится $\theta_3$, и проч. Такъ, нашедши $\theta_1=4x^3-12x^2+10x-3$, говорю:

$$\theta_2=\frac{\text{произв. отъ } \theta_1}{2}=\frac{12x^2-24x+10}{2}=6x^2-12x+5;$$

$$\theta_3=\frac{\text{произв. отъ } \theta_2}{3}=\frac{12x-12}{3}=4x-4;$$

$$\theta_4=\frac{\text{произв. отъ } \theta_3}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

Я вездѣ буду употреблять этотъ способъ.

**339.** Разсмотримъ теперь самое измѣненіе функціи $f(x)$ при переходѣ ея въ $f(x+h)$. Это измѣненіе равняется разности:

$$f(x+h)-f(x)=f'(x).h+\frac{1}{1.2}f''(x).h^2+\frac{1}{1.2.3}f'''(x).h^3+\ldots.+h^n$$
$$=\theta_1 h+\theta_2 h^2+\theta_3 h^3+\ldots.+h^n.$$

Возмемъ на мѣсто $x$ какую нибудь частную величину $a$; тогда всѣ функціи $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$,.... обратятся въ числа, и получится разность:

$$f(a+h)-f(a)=\theta_1 h+\theta_2 h^2+\theta_3 h^3+\ldots.+h^n,$$

зависящая только отъ перемѣнной $h$. А какъ число членовъ этого ряда опредѣленное, то приращенію $h$ всегда можно дать такую малую величину, что *сумма* $\theta_1 h+\theta_2 h^2+\theta_3 h^3+\ldots.+h^n$, то есть, *разность* $f(a+h)-f(a)$ *можетъ быть сдѣлана менѣе всякаго даннаго количества* $\varepsilon$. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что для $h=\delta$, весь рядъ въ $m$ разъ больше $\varepsilon$, то есть, будетъ:

$$\theta_1\delta+\theta_2\delta^2+\ldots.=m\varepsilon,\text{ гдѣ } m>1,\text{ или}$$
$$\theta_1\frac{\delta}{m}+\theta_2\frac{\delta^2}{m}+\ldots.=\varepsilon;$$

тогда стóитъ только взять $\frac{\delta}{m}$ вмѣсто $\delta$, и необходимо сдѣлается:

$$\theta_1.\frac{\delta}{m^2}+\theta_2.\frac{\delta^2}{m^3}+\ldots.<\varepsilon.$$

**340.** *Если цѣлая раціональная функція $f(x)$, отъ какихъ нибудь двухъ подстановленій $x=a$, $x=a+h$, обращается въ два результата $-\mathrm{R}$ и $+\mathrm{R}'$, съ противными знаками, то, между подстановленіями $a$, $a+h$, находится по крайней мѣрѣ одно такое, при которомъ эта функція обращается въ нуль.*

Положимъ, что, для $x=a$, будетъ $f(a)=-\mathrm{R}$, а для $x=a+h$, будетъ

$$f(a+h)=f(a)+f'(a).\,h+\frac{1}{1.2}f''(a).h^2+\ldots.=+\mathrm{R}',\text{ или}$$
$$=-\mathrm{R}+\theta_1 h+\theta_2 h^2+\ldots.=+\mathrm{R}'$$

Поелику $f(x)$ непрерывная, то, уменьшая $h$, можемъ сдѣлать $\theta_1 h+\theta_2 h^2+\ldots.$ меньше всякаго даннаго числа, слѣдственно и меньше R, такъ что $f(a+h)$ обратится въ результатъ отрицательный, прежде нежели уничтожится $h$. А какъ цѣлая раціональная функція не иначе переходитъ изъ положительнаго результата въ отрицательный, какъ переступая чрезъ нуль, то необходимо должно быть такое подстановленіе $a+h'<a+h$, при которомъ $f(a+h')=0$.

**341.** Обратно: если число $x=a$ уничтожаетъ данную $f(x)$, не уничтожая первой ея производной $\theta_1$, то, при этомъ переходѣ чрезъ нуль, функція перемѣняетъ знакъ свой. Ибо, тогда:

$$f(x)=f(a)=0;$$

она, для $a-h$, сдѣлается $f(a-h)=-\theta_1h+\theta_2h^2-\ldots.$,
а для $a+h$, она будетъ $f(a+h)=+\theta_1h+\theta_2h^2+\ldots.$

Приращеніе $h$ всегда можно взять столь малымъ, что первые члены $-\theta_1h$, $+\theta_1h$, сдѣлаются болѣе суммы всѣхъ послѣднихъ; и тогда знаки для $f(a-h)$, $f(a+h)$, будутъ одинаки съ знаками этихъ членовъ, т. е. получатся:

$$f(a-h)=-,\ f(a+h)=+.$$

Слѣдовательно, если, для $x=a$, будетъ $f(a)=0$, а $\theta_1$ не нуль, то данная функція, при переходѣ чрезъ нуль, должна перемѣнить знакъ — на +, и обратно.

Но, если подстановленіе $x=a$ уничтожаетъ не только $f(a)$, но и $\theta_1$, не уничтожая $\theta_2$; то будемъ имѣть:

$$f(a)=0, \text{ и } \theta_1=0,$$
$$f(a-h)=\theta_2h^2-\theta_3h_3+\ldots.,$$
$$f(a+h)=\theta_2h^2+\theta_3h^3+\ldots..$$

Для приращенія $h$, довольно малаго, первые члены этихъ рядовъ превзойдутъ сумму всѣхъ послѣднихъ, и тогда будетъ

$$f(a-h)=+\text{ , и } f(a+h)=+\text{ .}$$

Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, данная функція, при переходѣ чрезъ нуль, не перемѣняетъ своего знака, но остается положительною или отрицательною, смотря по тому, какой знакъ будетъ у $\theta_2$, плюсъ или минусъ.

Разсуждая такимъ образомъ, легко опредѣлить знаки для $f(a-h)$, $f(a+h)$, когда уничтожаются сряду $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, или $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, и такъ далѣе.

***Примѣръ.*** Функція $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$, которой первая производная $\theta_1=3x^2-4x-5$, при подстановленіяхъ:

$x=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$ дѣлается
$f(x)=-24,\ 0,\ 8,\ 6,\ 0,\ -4,\ 0,\ 18,$
$\theta_1=34,\ 15,\ 2,\ -5,\ -4,\ -1,\ -10,\ 27.$

Она уничтожается три раза, переходя изъ положительнаго результата въ отрицательный, и обратно. При этомъ ея первая производная не уничтожается.

***Примѣръ.*** Возмемъ еще функцію

$f(x)=x^4+x^3-11x^2-5x+30$, и ея первую
производную $\theta_1=4x^3+3x^2-22x-5$,
и будемъ подставлять въ ту и другую

$x=-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots.$
$f(x)=66,\ 0,\ 4,\ 24,\ 30,\ 16,\ 0,\ 24,\ldots.$
$\theta_1=-125,\ -20,\ 19,\ 16,\ -5,\ -20,\ -7,\ 64,\ldots.$

По видимому, эта функція перешла чрезъ нуль два раза, не перемѣнивъ своего знака; но, поелику подстановленія $x=-3$ и 2 не уничтожили $\theta_1$, то слѣдуетъ заключить, что, для нѣкоторыхъ среднихъ подстановленій между

—3, —2, и между 2, 3, $f(x)$ должна имѣть величины отрицательныя. Для испытанія, беру $x = -\sqrt{5}$ и $= \sqrt{5}$, и получаю:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} x = & -4, & -3, & -\sqrt{5}, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & \sqrt{5}, & 3, \ldots \\ f(x) = & 66, & 0, & 0, & 4, & 24, & 30, & 16, & 0, & 0, & 24, \ldots \end{array}$$

$$\theta_1 = \ \ldots\ldots -20,\quad -14{,}46; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -7,\quad 5{,}54, \ldots\ldots$$

Случайность, что $f(x)$, перешла два раза чрезъ два нуля, не перемѣнивъ своего знака, и безъ уничтоженія $\theta_1$, показываетъ, что между —3, $-\sqrt{5}$, и между 2 и $\sqrt{5}$ есть еще числа, для которыхъ $f(x)$ перемѣняетъ свой знакъ. И въ самомъ дѣлѣ, если взять $x = -2{,}5$ и $x = 2{,}1$, тотчасъ найдутся:

$$f(x) = -2{,}8\ldots,\ f(x) = -0{,}3,$$

и такимъ образомъ откроется, что $f(x)$, при всѣхъ ея переходахъ чрезъ нуль, перемѣняетъ знакъ свой.

**342.** *Наибольшія (maxima) и наименьшія (minima) величины этихъ функцій.*

Если $f(x)$, при непрерывномъ ея возрастаніи перемѣнной $x$, въ какихъ ни есть предѣлахъ отъ $a$ до $b$, сперва увеличивается, а потомъ уменьшается, то, разумѣется, что, для какого нибудь опредѣленнаго числа между $a$ и $b$, эта функція получаетъ *наибольшую величину* (maximum) относительно ея величинъ, *сопредѣльныхъ* съ этою. Если же $f(x)$ сначала уменьшается, а потомъ увеличивается между предѣлами $a$ и $b$ ея перемѣнной; то она въ этихъ предѣлахъ получаетъ величину самую меньшую (minimum) относительно величинъ къ ней ближайшихъ, сопредѣльныхъ.

Случается также, что $f(x)$, при непрерывномъ возрастаніи $x$, сперва увеличивается, потомъ уменьшается, а послѣ того снова возрастаетъ и опять начинаетѣ убывать, и т. д. Такая функція бываетъ нѣсколько разъ наибольшею и наименьшею.

Но функція не имѣетъ ни наибольшей, ни наименьшей величины, если она, съ возрастаніемъ $x$, сама возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, либо наоборотъ.

**343.** Опредѣленіе условій, при которыхъ данная $f(x)$ дѣлается наибольшею или наименьшею, составляетъ особенную важность въ математическомъ анализѣ. Для этого на мѣсто $x$ возмемъ ближайшія (сопредѣльныя) къ нему величины $x+h$, $x-h$. Если тогда окажется, что

$$\left.\begin{array}{r} f(x+h) < f(x) \\ \text{и } f(x-h) < f(x) \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{то между этими предѣлами} \\ f(x) \text{ имѣетъ } maximum; \end{array}$$

а если найдется, что будетъ

$$\left.\begin{array}{r} f(x+h) > f(x) \\ f(x-h) > f(x) \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{то она имѣетъ} \\ \quad minimum. \end{array}$$

Въ первомъ случаѣ, разности:

$$\left.\begin{array}{l} f(x+h)-f(x) \\ f(x-h)-f(x) \end{array}\right\} \text{ обѣ отрицательныя,}$$

а во второмъ, онѣ обѣ положительныя. Эти условія мы легко откроемъ, взявши

$$f(x+h)-f(x)=+\theta_1h+\theta_2h^2+\theta_3h^3+\ldots.,$$
$$f(x-h)-f(x)=-\theta_1h+\theta_2h^2-\theta_3h^3+\ldots..$$

Очевидно, что, для малѣйшихъ приращеній $h$, эти разности будутъ съ противными знаками: первая будетъ положительною, а вторая отрицательною, если только не уничтожится $\theta_1$; слѣдовательно будетъ:

$$f(x+h)>f(x),\ f(x-h)<f(x).$$

Въ этомъ случаѣ $f(x)$ не имѣетъ величины ни самой большей, ни самой меньшей; но, она будетъ *maximum* или *minimum*, когда, при этомъ уничтожится первая производная безъ уничтоженія второй; ибо, для $\theta_1=0$, будетъ:

$$f(x+h)-f(x)=\theta_2h^2+\theta_3h^3+\ldots.,$$
$$f(x-h)-f(x)=\theta_2h^2-\theta_3h^3+\ldots..$$

Для $h$ довольно малаго, обѣ разности будутъ положительныя или отрицательныя, смотря потому, $\theta_2=+$, или $=-$.

Слѣдовательно, всякая величина $x$, обращающая $f(x)$ въ наибольшую или наименьшую, должна дѣлать $\theta_1=0$, то есть, быть корнемъ этого уравненія.

Нельзя заключать обратно, что всякій корень уравненія $\theta_1=0$ обращаетъ $f(x)$ въ *maximum* или *minimum*; ибо, можетъ случиться, что одинъ или нѣсколько такихъ корней дѣлаютъ не только $\theta_1=0$, но и $\theta_2=0$, не уничтожая $\theta_3$; отчего разности функцій сдѣлаются:

$$f(x+h)-f(x)=+\theta_3h^3+\theta_4h^4+\ldots.,$$
$$f(x-h)-f(x)=-\theta_3h^3+\theta_4h^4-\ldots.,$$

и, для $h$ довольно малаго, будутъ съ разными знаками: тогда опять $f(x)$ не будетъ ни наибольшею, ни наименьшею, однакоже сдѣлается таковою, когда тотъ же корень уничтожитъ въ тоже время и $\theta_3$, не уничтожая $\theta_4$; и т. д.

И такъ, вообще, *чтобы корни уравненія* $\theta_1=0$ *обращали* $f(x)$ *въ maximum* или *minimum*, *надобно, чтобъ отъ ихъ подставленія въ* $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, $\theta_4$,.... *первая неуничтожающаяся производная была четнаго порядка;* въ противномъ случаѣ, $f(x)$ не имѣетъ ни наибольшей, ни наименьшей величины.

**344.** Остается еще найти признакъ, по которому можно узнавать, когда корень $x$, найденный изъ $\theta_1=0$, и удовлетворяющій предыдущимъ условіямъ, обращаетъ $f(x)$ въ *maximum*, и когда въ *minimum*. Въ этихъ случаяхъ будутъ разности:

$$f(x+h)-f(x)=\theta_2h^2+\theta_3h^3+\ldots,$$
$$f(x-h)-f(x)=\theta_2h^2-\theta_3h^3+\ldots., \text{ либо}$$
$$f(x+h)-f(x)=\theta_4h^4+\theta_5h^5\ldots.,$$
$$f(x-h)-f(x)=\theta_4h^4-\theta_5h^5+\ldots$$

Знаки ихъ членовъ $\theta_2h^2$, $\theta_4h^4$, будутъ зависѣть только отъ знаковъ предъ $\theta_2$, $\theta_4$. Если $\theta_2=-$, $\theta_4=-$, то, для $h$ довольно малаго, будетъ

$$f(x+h)<f(x),\ f(x-h)<f(x).$$

Если же $\theta_2=+$, $\theta_4=+$, то

$$f(x+h)>f(x),\ f(x-h)>f(x).$$

Въ первомъ случаѣ $f(x)$ обращается въ *maximum*, а во второмъ въ *minimum*. Этотъ признакъ и открыть нужно было.

***Примѣръ***. $f(x)=x^2+4x+2$, имѣетъ производныя: $\theta_1=2x+4$, $\theta_2=1$. Чтобъ найти, имѣетъ ли эта функція величину наибольшую или наименьшую, возмемъ $\theta_1=2x+4=0$; отсюда найдемъ $x=-2$. А поелику $\theta_2=1$ есть положительная, то $f(x)$ допускаетъ *minimum* для $x=-2$, которое и найдется:

$$x^2+4x+2=4-8+2=-2.$$

***Примѣръ***. $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+12$, имѣетъ

$$\theta_1=4x^3-24x^2+44x-24,$$
$$\theta_2=6x^2-24x+22.$$
$$\theta_3=4x-8,\quad \theta_4=1.$$

Для опредѣленія ея наибольшихъ и наименьшихъ величинъ, возмемъ $\theta_1=0$, то есть, уравненіе

$$x^3+6x^2+11x-6=0.$$

Оно имѣеть корни 1, 2, 3. Подставимъ эти корни въ $\theta_2$; найдется:

для корня 1, $\theta_2=\ \ 4$, $f(x)$ дѣлается *maximum*;
для корня 2, $\theta_2=-2$, $f(x)$ дѣлается *minimum*;
для корня 3, $\theta_2=\ \ 4$, — — опять *maximum*.

***Примѣръ***. $f(x)=a+b(x-c)^4$, или

$$f(z)=a+bz^4, \text{ полагая } x-c=z;$$
$$\theta_1=4bz^3=4b(x-c)^3,$$
$$\theta_2=6bz^2=6b(x-c)^2,$$
$$\theta_3=4bz=4b(x-c),$$
$$\theta_4=b\ =\ b. \quad ?>0$$

Полагая $\theta_1=4b(x-c)^3=0$, найдется $x=c$; отчего сдѣлаются $f(x)=a$, $\theta_1=0$, $\theta_2=0$, $\theta_3=0$, $\theta_4=b$. Слѣдовательно, $f(x)=a$ есть *maximum*.

***Примѣръ***. Но $f(x)=a+b(x-c)^3$, не имѣетъ ни наибольшей, ни наименьшей величины; оттого что, для $x=c$, дѣлается $f(x)=a$, $\theta_1=0$, $\theta_2=0$, $\theta_3=b$, гдѣ первая неуничтожающаяся производная нечетнаго порядка.

## II. Разложеніе цѣлой, многочленной, раціональной функціи въ непрерывную дробь.

**345.** Функціи какъ раціональныя, такъ ирраціональныя и трансцендентныя, будучи развернуты въ ряды, расположенные по степенямъ ихъ перемѣнной, вообще, имѣютъ видъ:

$$f(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+\dots..$$

Всякая такая функція можетъ быть выражена непрерывною дробью, вида:

$$f(x)=C_0+\cfrac{\alpha_1x}{1+\cfrac{\alpha_2x}{\alpha_1+\cfrac{\alpha_3x}{\alpha_2+\cfrac{\alpha_4x}{\alpha_3+\dots.}}}}$$

Для этого надобно только неизвѣстные коëфиціенты $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$,.... выразить посредствомъ данныхъ $C_0$, $C_1$, $C_2$, $C_3$,...., что и не трудно исполнить, составивъ равенство:

$$C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+\dots.=\cfrac{\alpha_1}{1+\cfrac{\alpha_2x}{\alpha_1+\cfrac{\alpha_3x}{\alpha_2+\dots.}}}$$

Откуда,

$$1)\ C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+\dots.+\cfrac{\alpha_2C_1x+\alpha_2C_2x^2+\dots.}{\alpha_1+\cfrac{\alpha_3x}{\alpha_2+\cfrac{\alpha_4x}{\alpha_3+\dots}}}=\alpha_1.$$

Это равенство имѣетъ мѣсто для всякаго $x$, а слѣдовательно и для $x=0$; стало-быть,

$$\alpha_1=C_1$$

Отбросивъ $C_1$ и $\alpha_1$ изъ равенства 1), и раздѣливъ на $x$, останется:

$$C_2+C_3x+C_4x^2+\dots.+\cfrac{\alpha_2C_1+\alpha_2C_2x+\alpha_2C_3x^2+\dots.}{C_1+\cfrac{\alpha_3x}{\alpha_2+\cfrac{\alpha_4x}{\alpha_2+\dots}}}=0$$

или:

$$2)\ C_1C_2+C_1C_3x+C_1C_4x^2+\dots.+\frac{\alpha_3C_2x+\alpha_3C_3x^2+\alpha_3C_4x^3}{\alpha_2+\frac{\alpha_4x}{\alpha_3}+\dots}+\dots.+$$

$$+\alpha_2C_1+\alpha_2C_2x+\alpha_2C_3x^2+\dots.=0.$$

Полагая $x=0$, имѣемъ отсюда $C_1C_2+\alpha_2C_1=0$, или

$$\alpha_2=-C_2.$$

Выпуствиъ члены $C_1C_2+\alpha_2C_1=0$ изъ равенства 2), и сокративъ на $x$, останется:

$$C_1C_3+C_1C_4x+C_1C_5x^2+\ldots+\cfrac{\alpha_3C_2+\alpha_3C_3x+\alpha_3C_4x^2+\ldots}{-C_2+\cfrac{\alpha_4x}{\alpha_3+\ldots}}$$

$$-C_2^2-C_2C_3x-C_2C_4x^2-\ldots=0;$$ откуда

3) $\alpha_3C_2+\alpha_3C_3x+\alpha_3C_4x+\ldots=-(C_2^2-C_1C_3)C_2-(C_2C_3-C_1C_4)C_2x-$

$$-(C_2C_4-C_1C_4)C_2x^2+\ldots+\cfrac{\alpha_4(C_2-C_1C_3)x+\alpha_4(C_2C_3-C_1C_4)x^2+\ldots}{\alpha_3+\cfrac{\alpha_5x}{\alpha_4+\ldots}}$$

Здѣсь также, полагая $x=0$, найдется:

$$\alpha_3C_2=-(C_2^2-C_1C_3)C_2;$$ откуда,

$$\alpha_3=C_1C_3-C_2^2.$$

Выпуствиъ равные члены изъ равенства 3), и сокративъ на $x$, получимъ:

4) $\alpha_3C_3+\alpha_3C_4x+\ldots=-(C_2C_3-C_1C_4)C_2-(C_2C_4-C_1C_2)C_2x-\ldots$

$$\ldots+\cfrac{\alpha_4(C_2^2-C_1C_3)+\alpha_4(C_2C_3-C_1C_4)x+\ldots}{\alpha_3+\cfrac{\alpha_5x}{\alpha_4+\ldots}}$$

Отсюда, для $x=0$, найдется:

$$(C_1C_3-C_2^2)C_3=-(C_2C_3-C_1C_4)-\alpha_4,$$ и

$$\alpha_4=C_1(C_2C_4-C_4^2);$$

и такъ далѣе.

Слѣдовательно, искомая непрерывная дробь будетъ:

$$f(x)=C_0+\cfrac{C_1x}{1-\cfrac{C_2x}{C_1+\cfrac{(C_1C_3-C_2^2)x}{-C_2+\cfrac{C_1(C_2C_4-C_3^2)x}{C_1C_3-C_2^2+\ldots}}}}$$

Эта дробь имѣетъ свои послѣдовательныя приближенія, между которыми она заключается; изъ нихъ первое: $\frac{m_1}{n_1}=\frac{C_1x}{1}=C_1x,$

второе: $\frac{m_2}{n_2}=\frac{C_1^2x}{C_1-C_2x},$

посредствомъ которыхъ найдется третье приближеніе: для этого помножимъ числитель и знаменатель дроби $\frac{m_2}{n_2}$ на знаменатель $-C_2$ третьяго члена приближенія, а числитель и знаменатель дроби $\frac{C_1x}{1}$ на числитель $(C_1C_3-C_2^2)$ того члена, потомъ возмемъ сумму числителей и раздѣлимъ на сумму знаменателей; тогда, по сокращеніи, получится:

$$\frac{m_3}{n_3}=\frac{-C_1C_2x+(C_1C_3-C_2^2)x^2}{-C_2+C_3x}.$$

Такимъ же образомъ нашли бы $\frac{m_4}{n_4}$, и, наконецъ, послѣднее $\frac{m_r}{n_r}$ равное всей непрерывной дроби. Слѣдовательно, имѣли бы:

$$f(x)=C_0+\frac{m_r}{n_r}.$$

## III. О РАЗЛОЖЕНИИ НЕОПРЕДѢЛЕННО-СТЕПЕННОЙ ФУНКЦІИ $a^x$ ВЪ РЯДЪ, РАСПОЛОЖЕННЫЙ ПО СТЕПЕНЯМЪ ЕЯ ПЕРЕМѢННОЙ $x$.

**346.** Мы знаемъ (**333**), что функціи дробныя и функціи ирраціональныя могутъ разлагаться въ безконечные ряды; но и функціи трансцендентныя также изображаются рядами.

Такъ, мы видѣли, что логариѳмическая функція,

$$f(x)=\log(1+x)=A(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots),$$

изображается безконечнымъ рядомъ. Покажемъ здѣсь, что всякая неопредѣленно-степенная функція $a^x$, не смотря на всю ея простоту, также разлагается въ рядъ, расположенный по степенямъ ея перемѣнной $x$.

Пусть этотъ рядъ будетъ:

$$a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots\ldots(1),$$

гдѣ A, B, C, D,.... коефиціенты, независимые отъ $x$, которые надобно опредѣлить. Первый членъ ряда $=1$, потому что, для $x=0$, $a^x=a^0=1$. Но, если предстоящія независимы отъ $x$, то онѣ останутся тѣ же, когда возмемъ $z$ на мѣсто $x$:

$$a^z=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\ldots\ldots(2).$$

Вычтемъ этотъ рядъ изъ предыдущаго:

$$a^x-a^z=A(x-z)+B(x^2-z^2)+C(x^3-z^3)+\ldots., \text{ или}$$

$$a^z(a^{x-z}-1)=A(x-z)+B(x^2-z^2)+C(x^3-z^3)+\ldots.(3).$$

Но, необходимо также будетъ и

$$a^{x-z}=1+A(x-z)+B(x-z)^2+C(x-z)^3+\ldots.;$$

подставимъ это въ (3) строку, найдется:

$$a^z[A(x-z)+B(x-z)^2+C(x-z)^3+..]=A(x-z)+B(x^2-z^2)+C(x^3-z^3)+..$$

Исключивъ общій множитель $x-z$, останется:

$$a^z[A+B(x-z)+C(x-z)^2+\ldots.]=A+B(x+z)+C(x^2+xz+z^2)+\ldots.$$

Перемѣнная $z$ произвольна, а потому можемъ взять $z=x$; получится:

$$a^xA=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ldots.$$

Сюда подставимъ $a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots.$:

$$A+A^2x+ABx^2+\ldots.=A+2Bx+3Cx^2+\ldots.$$

Для равенства этихъ многочленовъ, необходимо должно быть:

$$A=A,\ 2B=A^2,\ 3C=AB,\dots;\ \text{откуда}$$

$$B=\frac{A^2}{1.2},\ C=\frac{A^3}{1.2.3},\ D=\frac{A^4}{1.2.3.4},\ \text{и т. д.}$$

Посему,

$$a^x=1+Ax+\frac{A^2x^2}{1.2}+\frac{A^3x^3}{1.2.3}+\dots\dots..(4).$$

**347.** Въ этомъ ряду предстоящее A не могло опредѣлиться, потому что оно зависитъ отъ частной величины $a$, и съ ея перемѣною должно измѣняться. А какъ оно не зависитъ отъ $x$, то оно останется тѣмъ же, если взять $x=1$; тогда найдется:

$$a=1+A+\frac{A^2}{1.2}+\frac{A^3}{1.2.3}+\dots.$$

Но, чтобъ найти простѣйшее выраженіе зависимости A отъ $a$, возмемъ сначала $A=1$; при этомъ $a$ измѣнится и получитъ опредѣленную величину, которую означимъ чрезъ $e$:

$$e=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\dots$$
$$=2{,}718281828459\dots.$$

Число это тѣмъ замѣчательно, что есть не что иное, какъ основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ (**264**).

Это же самое получится, если въ ряду (4) положить $Ax=1$, или $x=\frac{1}{A}$; то есть, будетъ

$$a^{\frac{1}{A}}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\dots;$$

слѣдовательно,

$$a^{\frac{1}{A}}=e,\ \text{или}\ e^A=a.$$

Логариѳмъ этого равенства, по системѣ Непера, найдется

$$A=\text{lóg}\,a;$$

т. е., предстоящее A всегда равно Неперову логариѳму отъ $a$. Вставивъ это въ рядъ

$$a^x=1+Ax+\frac{A^2x^2}{1.2}+\frac{A^3x^3}{1.2.3}+\dots,\ \text{получимъ:}$$

$$a^x=1+\frac{l'a}{1}.x+\frac{l'^2a}{1.2}.x^2+\frac{l'^3a}{1.2.3}.x^3+\dots.$$

Таковъ искомый рядъ, въ который разлагается неопредѣленно-степенная функція $a^x$.

Если положить $a=e=$ основанію Неперовыхъ логариѳмовъ, слѣдовательно $l'a=1$, то получится рядъ

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\dots\dots..(5),$$

весьма употребительный въ высшей математикѣ.

**348.** Въ найденномъ ряду,

$$a^x=1+\frac{x.l'a}{1}+\frac{x^2.l'^2a}{1\ .\ 2}+\frac{x^3.l'^3a}{1.2.3}+.....,$$

котораго $l'a$ не зависитъ отъ $x$, поставимъ $z$ вмѣсто $x$; будемъ имѣть:

$$a^z=1+\frac{z.l'a}{1}+\frac{z^2.l'^2a}{1\ .\ 2}+\frac{z^3.l'^3a}{1.2.3}+....$$

Вычтемъ послѣдній рядъ изъ перваго, и разность раздѣлимъ на $x-z$, найдется:

$$\frac{a^x-a^z}{x-z}=l'a+\frac{(x+z)}{1\ .\ 2}\ .\ l'^2a+\frac{(x^2+xz+z^2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ .\ l'^3a+....$$

Теперь положимъ $z=x$, получится выводъ

$$\frac{0}{0}=l'a(1+xl'a+\frac{x^2}{1.2}.l'^2a+\frac{x^3}{1.2.3}.l'^3a+....).$$

Но, мы видѣли, что $1+\frac{xl'a}{1}+\frac{x^2.l'^2a}{1.2}+.....=a^x$, то

$$\frac{0}{0}=l'a.a^x=a^x.l'a.$$

**349.** И обратно, если въ рядъ,

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+.....\ (\mathbf{250}),$$

подставить $z$ вмѣсто $x$,

$$\log(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+....,$$ вычесть

послѣдній изъ перваго, и разность раздѣлить на $x-z$; получится:

$$\frac{\log(1+x)-\log(1+z)}{x-z}=1-\frac{1}{2}(x+z)+\frac{1}{3}(x^2+xz+z^2)-\frac{1}{4}(x^3+x^2z....)+...;$$

и потомъ положить $z=x$; найдется также

$$\frac{0}{0}=1-x+x^2-x^3+x^4-....=\frac{1}{1+x}.$$

Въ обоихъ этихъ случаяхъ, выраженіе $\frac{0}{0}$ получило опредѣленное значеніе.

*Примѣчаніе.* — О рядахъ различныхъ функцій и ихъ подробномъ разсмотрѣніи надобно читать въ пространныхъ курсахъ Алгебры. Здѣсь же мы ограничимся только случаями, наиболѣе нужными, для достиженія предположенной цѣли въ этомъ начальномъ курсѣ Алгебры.

## IV. ОБРАЩЕНІЕ РЯДОВЪ ФУНКЦІЙ СЪ ОДНОЮ ПЕРЕМѢННОЮ.

**350.** Обращеніе рядовъ показываетъ способъ, какъ данную функцію, вида

$$y=ax+bx^2+cx^3+dx^4+....=f(x),$$

расположенную по степенямъ ея перемѣнной $x$, преобразовать въ другую, въ которой бы перемѣнная $x$ обратно была выражена рядомъ расположеннымъ по степенямъ $y$.

Пусть этотъ новый рядъ будетъ:

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \ldots,$$

въ которомъ A, B, C, D, E,… постоянныя предстоящія, независимыя отъ $x$, $y$, и которыя надобно опредѣлить. Для этого составимъ различныя степени $y$, $y^2$, $y^3$,…. посредствомъ даннаго ряда:

$$\begin{array}{l|l}
y^2 = a^2x^2 + 2abx^3 + b^2 & x^5 + (2ae + 2bd + c^2)x^6 + \ldots, \\
\qquad\qquad\qquad\quad + 2ac & \\
y^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^4 + 3ab^2 & x^5 + (3a^2d + 6abc + b^3)x^6 + \ldots, \\
\qquad\qquad\qquad\quad + 3ac &
\end{array}$$

$$y^4 = a^4x^4 + 4a^3bx^5 + (6a^2b^2 + 4a^3c)x^6 + \ldots,$$

$$y^5 = a^5x^5 + 5a^4bx^6 + \ldots,$$

$$y^6 = a^6x^6 + \ldots;$$

вставимъ ихъ во второй рядъ, и расположимъ всё по степенямъ $x$:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
0 = Aa & x + Ab & x^2 + \ Ac & x^3 + \ Ad & x^4 + \ldots\ldots \\
-1 & + Ba^2 & + 2Bab & + \ Bb^2 & \\
 & & + \ Ca^3 & + 2Bac & \\
 & & & + 3Ca^2b & \\
 & & & + \ Da^4 &
\end{array}$$

Но, чтобы это равенство могло существовать независимо отъ величины $x$, надобно, чтобъ было:

$$Aa - 1 = 0,\ Ab + Ba^2 = 0,\ Ac + 2Bab + Ca^3 = 0,$$

$$Ad + Bb^2 + 2Bac + 3Ca^2b + Da^4 = 0, \text{ и проч.}$$

Отсюда найдутся:

$$A = \frac{1}{a},\quad B = \frac{-Ab}{a^2} = \frac{-b}{a^3},\quad C = \frac{2b^2 - ac}{a^5},$$

$$D = \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7} = -\frac{(5b^3 + a^2d - 5abc)}{a^7}, \text{ и далѣе,}$$

$$E = \frac{14b^4 - a^3e - 21ab^2c + 3a^2c^2 + 6a^2bd}{a^9},$$

$$F = -\frac{(42b^5 - 84ab^3c + 28a^2bc^2 + 28a^2b^2d - 7a^3be - 7a^3cd + a^4f)}{a^{11}},$$

и такъ далѣе.

Слѣдовательно, искомый рядъ будетъ:

$$x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a^3}y^2 + \left(\frac{2b - ac}{a^5}\right)y^3 - \left(\frac{3b^3 + a^2d - 5abc}{a^7}\right)y^4 +$$

$$+ \frac{(14b^4 - 21ab^2c + 3a^2c^2 + 6a^2bd - a^3e)}{a^9}y^5 - \ldots$$

Если бы данный рядъ былъ

$$y = ax + bx^3 + cx^5 + \ldots,$$

то, поступая точно также, нашли бы

$$x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a^4}y^2 + \left(\frac{3b^2 - ac}{a^7}\right)y^5 - \left(\frac{62b^3 + a^2d - 8abc}{a^{10}}\right)y^7 + \ldots$$

*Примѣръ 1*. Извѣстно, что

$$y = \log(1+x) = \mathrm{M}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots\right),$$ гдѣ

$\mathrm{M} = 0{,}43429.44819.03251.8\ldots =$ модуль. Если бы мы пожелали выразить число $x$ рядомъ, расположеннымъ по степенямъ $y = \log(1+x)$; то, отдѣливъ модуль $\mathrm{M}$,

$$\frac{y}{\mathrm{M}} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots,$$

сравнимъ этотъ рядъ съ рядомъ

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots,$$ полагая

$a = 1,\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{3},\ d = -\frac{1}{4}\ldots,$ и взявъ $\frac{y}{\mathrm{M}}$ на мѣсто $y$, подставимъ въ рядъ

$$x = \frac{1}{a}.y - \frac{b}{a^3}.y^2 + \left(\frac{2b - ac}{a^5}\right)y^3 - \ldots,$$ найдется:

$$x = \frac{y}{\mathrm{M}} + \frac{y^2}{1.2.\mathrm{M}^2} + \frac{y^3}{1.2.3.\mathrm{M}^3} + \ldots,$$ или

$$x = \frac{\log(1+x)}{\mathrm{M}} + \frac{\log^2(1+x)}{1.2.\mathrm{M}^2} + \frac{\log^3(1+x)}{1.2.3.\mathrm{M}^3} + \ldots$$

А если взять $1 + x = z$, или $x = z - 1$, то получимъ

$$z = 1 + \frac{\log z}{\mathrm{M}} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\log z}{\mathrm{M}}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\log z}{\mathrm{M}}\right)^3 + \ldots,$$

число расположенное по степенямъ своего логариѳма.

*Примѣръ 2*. Пусть требуется данный рядъ

$$y = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

обратить въ $x = f(y)$. Взявъ рядъ $y = ax + bx^3 + cx^5 - \ldots,$ сравнимъ коефиціенты, полагая:

$$a = 1,\ b = -\frac{1}{1.2.3},\ c = \frac{1}{1.2.3\ 4.5},\ldots,$$ и подставимъ въ рядъ

$$x = \frac{1}{a}.y - \frac{b}{a^4}.y^3 + \left(\frac{3b^2 - ac}{a^7}\right)y^5 - \ldots,$$ найдется:

$$= \frac{1.y^3}{2.3} + \frac{1.3.y^5}{2.3.5} + \frac{1.3\ 5.y^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

Мы воспользуемся обращеніемъ рядовъ при разрѣшеніи численныхъ уравненій высокихъ степеней съ одною неизвѣстною.

## ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ.

## ТЕОРІЯ УРАВНЕНІЙ, ВЫСШИХЪ СТЕПЕНЕЙ, СЪ ОДНОЮ НЕИЗВѢСТНОЮ.

**351.** Уравненія высшихъ степеней съ одною неизвѣстною, несодержащія трансцендентныхъ функцій въ членахъ своихъ, бываютъ раціональныя и ирраціональныя. *Раціональное уравненіе* имѣетъ видъ цѣлой раціональной функціи; члены его содержатъ неизвѣстную $x$, возвышенную только въ различныя цѣлыя степени. Оно, будучи расположено по степенямъ неизвѣстной, приводится къ общему виду:

$$x^n+Ax^{n-1}+B^{n-2}+\ldots.Tx+U=0,$$

гдѣ $n$ цѣлое число, A, B, C,....T, U, коефиціенты, независимые отъ $x$, которые здѣсь предполагаются дѣйствительными, цѣлыми или дробными, положительными или отрицательными; въ числѣ ихъ могутъ быть и несоизмѣримые, и даже равные нулю. — *Уравненіе ирраціональное* состоитъ изъ членовъ, между которыми есть такіе, гдѣ неизвѣстная имѣетъ дробныхъ показателей.

Настоящимъ нашимъ предметомъ будутъ *уравненія раціональныя*, а цѣлью — ихъ *разрѣшеніе*. Раціональное уравненіе называется *полнымъ*, когда содержитъ всѣ члены отъ степени $x^n$ до $x^0$; въ противномъ случаѣ, оно *неполное*.

**352.** *Корнемъ уравненія* называется всякое количество, дѣйствительное или мнимое, которое, бывъ подставлено на мѣсто $x$, удовлетворяетъ уравненію, т. е. дѣлаетъ первую часть его равною второй.

**353.** Рѣшеніе уравненій бываетъ *алгебрическое* и *численное*. Рѣшить уравненіе алгебрически значитъ найти формулу, въ которой бы всѣ корни его выражались въ функціи его коефиціентовъ. Такія формулы до сихъ поръ извѣстны только для полныхъ уравненій первой, второй, третьей и четвертой степени. Но, уже формулы, выражающія корни уравненій 3-й и 4-й степени такъ сложны, что остаются почти безъ употребленія; а между тѣмъ часто бываетъ нужно рѣшать уравненія, которыхъ степень выше второй. Это обстоятельство заставило искать общій способъ рѣшенія *всякихъ численныхъ уравненій* посредствомъ вычисленія каждаго его корня отдѣльно. Для этого надлежало разсмотрѣть общія свойства уравненій и составить *общую теорію*, которая бы показывала: законъ составленія всякаго уравненія изъ его корней, возможность давать ему различныя преобразованія чрезъ однообразное измѣненіе корней, отдѣлять корни одинъ отъ другаго частными предѣлами, и, наконецъ, вычислять ихъ. Изъ этой теоріи найдено, что, для вычисленія какого ни есть корня, отдѣленнаго отъ прочихъ своими предѣлами, надобно сперва дать уравненію особое преобразованіе; нашедши этотъ корень, надобно снова преобразовать уравненіе, сдѣлать его удобнымъ къ вычисленію другаго корня, и т. д.

Рѣшеніе такого рода называется *численнымъ*, и совершенно отличается отъ *алгебрическаго*, гдѣ всѣ корни выражаются общею формулою, состоящею изъ связи коефиціентовъ даннаго уравненія, и отыскиваются чрезъ одно подстановленіе сихъ коефиціентовъ. Для примѣра, возмемъ уравненія:

$$x^2 - 2ax - b = 0, \text{ и } x^6 - 2ax - b = 0.$$

Каковы бы ни были $a$ и $b$ въ первомъ уравненіи, оно рѣшается алгебрически; оба его корня выражаются общею формулою:

$$x = a \pm \sqrt{a^2 + b},$$

и получаются чрезъ одно подставленіе чиселъ вмѣсто $a$ и $b$. Но вовсе не таково другое уравненіе: для него нѣтъ общей формулы, которая бы сразу опредѣляла всѣ его корни. Впрочемъ, одинъ корень этого уравненія найти можемъ, если $b \overset{<}{\cancel{>}} \sqrt[5]{2a}$; потому что ему можно дать видъ

$$x^5 = 2a + \frac{b}{x}, \text{ а отсюда } x = \sqrt[5]{2a + \frac{b}{x}};$$

$$\text{слѣдовательно, } x = \sqrt[5]{2a + \frac{b}{\sqrt[5]{2a + \frac{b}{\sqrt[5]{2a + \dots}}}}}$$

и этотъ корень можетъ быть вычисленъ; но, все же этимъ способомъ нельзя отыскать прочихъ корней.

При изложеніи теоріи раціональныхъ уравненій, мы часто будемъ принимать ихъ за цѣлыя раціональныя функціи отъ $x$; а потому, для краткости, будемъ означать ихъ чрезъ $f(x) = 0$, или $f(x)^m = 0$, если нужно будетъ показать и самую степень $m$ уравненія.

**351.** Основаніемъ теоріи уравненій служитъ слѣдующая теорема:

*Всякое уравненіе, имѣющее видъ цѣлой-раціональной фунціи, имѣетъ корень, вида* $a + b\sqrt{-1}$, *гдѣ* $a$, $b$, *числа дѣйствительныя, которыя, въ частныхъ случаяхъ, могутъ быть нулями.*

А. Возмемъ сперва двучленное уравненіе

$$z^m \pm N = 0;$$

приведемъ въ простѣйшій видъ, полагая $z = x\sqrt[m]{N}$; тогда это уравненіе получитъ видъ

$$x^m \pm 1 = 0,$$

откуда непосредственно имѣемъ

$$x=\sqrt[m]{+1},\quad x=\sqrt[m]{-1}.$$

Для *m нечётнаго*, найдутся: $x=+1$, $x=-1$; то есть, $+1$ корень для $x^m-1=0$, $-1$ корень для $x^m+1=0$.

Если показатель *m чётный*, то онъ можетъ быть или степень числа 2, или степень числа 2, помноженная на нечетное число $2n+1$, то есть:

$$m=2^r.\ \text{или}\ m=2^s.(2n+1);$$

и двучленнымъ уравненіемъ будетъ

$$x^{2^r}=\pm 1,\ \text{либо}\ x^{2^s(2n+1)}=\pm 1.$$

Уравненія $x^{2^r}=+1$, $x^{2^s(2n+1)}=+1$, очевидно, имѣютъ корнями $+1$, $-1$.

Изъ уравненія $x^{2^r}=-1$ непосредственно находимъ

$$x=\pm\sqrt[2^r]{-1}.$$

Но, извѣстно, что корень *такой чётной степени* (**240**, **241**) изъ $-1$ имѣетъ видъ $a+b\sqrt{-1}$.

Что касается до $x^{2^s(2n+1)}=-1$, то здѣсь надобно сперва извлечь корень нечетной степени $2n+1$ изъ обѣихъ частей уравненія, и мы перейдемъ къ предыдущему случаю, то есть:

$$x^{2^s}=\sqrt[2n+1]{(-1)}=-1;$$

а отсюда корень четной степени $2^s$ опять будетъ вида

$$x=\pm\sqrt[2^s]{(-1)}=\alpha+\beta\sqrt{-1}.$$

B. Теперь докажемъ, что и *всякое уравненіе*,

$$f(x)=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0,$$

*котораго коефиціенты* A, B,....U, *суть числа дѣйствительныя, или мнимыя, имѣетъ корень того же вида* $a+b\sqrt{-1}$.

Возмемъ $x=p+q\sqrt{-1}$, подставимъ въ $f(x)=0$, разложимъ (**237**) всѣ члены уравненія въ ряды, отдѣлимъ дѣйствительные члены отъ мнимыхъ, назовемъ первые чрезъ $U=F(p,q)$, а вторые чрезъ $V\sqrt{-1}=F'(p,q).\sqrt{-1}$; то будемъ имѣть:

$$f(p+q\sqrt{-1})=U+V\sqrt{-1}.$$

Если $p+q\sqrt{-1}$ корень уравненія $f(x)=0$, то должно выйти $U+V\sqrt{-1}=0$, то есть, $U=0$, $V=0$, или модуль $\sqrt{U^2+V^2}=0$ (**227**, 3). Остается доказать, что есть такія числа $p$, $q$, которыми производится это равенство.

Вообще говоря, числа, произвольно взятыя на мѣсто $p$, $q$, измѣняютъ величину модуля $\sqrt{U^2+V^2}$, дѣлая его то больше, то меньше. Но, какъ бы малъ онъ ни сдѣлался для какихъ ни есть подстановленій $p$, $q$, всегда можно найти другія величины для $p$ и $q$, и другой модуль $\sqrt{U'^2+V'^2}$, который будетъ менѣе $\sqrt{U^2+V^2}$; такъ что наименьшею величиною модуля не можетъ быть другая, кромѣ нуля, и что $f(x)=0$ должно имѣть корень, вида $p+q\sqrt{-1}$.

Для этого возмемъ $x=p+q\sqrt{-1}+et$, гдѣ $e$ количество перемѣнное, способное сдѣлаться менѣе всякой данной величины, а $t$ неопредѣленная, которою мы могли бы располагать по нашему произволу. Для подстановленія этой величины $x$ въ $f(x)=0$, мы перемѣнимъ сначала $x$ въ $x+h$; отчего получится:

$$f(x+h)=f(x)+f_1(x).h+f_2(x).\frac{h^2}{1.2}+f_3(x).\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots.+h^m;$$

потомъ, подставимъ въ эту формулу $p+q\sqrt{-1}$ вмѣсто $x$, и $et$ вмѣсто $h$. Отъ этого членъ $f(x)$, какъ знаемъ, обратится въ $U+V\sqrt{-1}$; при чемъ нѣсколько производныхъ: $f_1(x)=f_1(p+q\sqrt{-1})$, $f_2(x)=f_2(p+q\sqrt{-1}),\ldots.$ могутъ уничтожиться, однакоже не всѣ; по крайней мѣрѣ $h^m$, не содержащій $x$, останется. Пусть $f_n(x).\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}$ первый послѣ $f(x)$ неуничтожившійся членъ; слѣдовательно, будетъ:

$$f(p+q\sqrt{-1}+h)=U+V\sqrt{-1}+\frac{f_n(p+q\sqrt{-1}+h)}{1.2.3\ldots n}.h^n+\ldots+h^m.$$

Теперь подставимъ $et$ на мѣсто $h$, и положимъ, что сдѣлаются:

$$f(p+q\sqrt{-1}+et)=U'+V'\sqrt{-1},$$

$$\frac{f_n(p+q\sqrt{-1}+et)}{1.2.3\ldots.n}=R+S\sqrt{-1};$$

то будемъ имѣть:

$$U'+V'\sqrt{-1}=U+V\sqrt{-1}+(R+S\sqrt{-1})e^nt^n+Ge^{n+1}t^{n+1},$$

гдѣ $Ge^{n+1}t^{n+1}$ означаетъ, для краткости, сумму всѣхъ членовъ, помноженныхъ на количество $et$, котораго степень выше $n$-ой.

Поелику $t$ произвольно, то дадимъ ему величину, вида $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, такую, какая получится изъ равенства $t^n=\pm1$; отдѣлимъ дѣйствительные члены отъ мнимыхъ; найдется:

$$U'=U\pm Re^n+G'e^{n+1},$$

$$V'=V\pm Se^n+G''e^{n+1},$$

откуда легко получится:

$$U'^2+V'^2=U^2+V^2\pm2(UR+VS)e^n+Ke^{n+1}, \text{ или}$$

$$\sqrt{U'^2+V'^2}=\sqrt{U^2+V^2+[\pm2(UR+VS)+Ke]e^n}.$$

Величину для $e$ можно взять столь малою, что членъ $2(UR+VS)$ сдѣлается больше суммы всѣхъ членовъ послѣдующихъ, а для $t^n=+1$, либо $t^n=-1$, можетъ быть сдѣланъ всегда *отрицательнымъ*; тогда сумма $\alpha^2$ всѣхъ членовъ, слѣдующихъ послѣ $U^2+V^2$, будетъ отрицательною, и мы будемъ имѣть:

$$\sqrt{U'^2+V'^2}=\sqrt{U^2+V^2-\alpha^2}, \text{ то есть,}$$

$$\sqrt{U'^2+V'^2}<\sqrt{U^2+V^2};$$

что и доказать было нужно.

Можетъ случиться, что членъ $2(UR+VS)$, то есть, $UR+VS$ уничтожится: тогда, вмѣсто его, надобно взять членъ, за нимъ слѣдующій, и, чрезъ надлежащее измѣненіе $et$, сдѣлать его *отрицательнымъ* и большимъ суммы всѣхъ послѣдующихъ за нимъ членовъ ряда: результатъ получимъ опять тотъ же.

Если, для $x=p+q\sqrt{-1}+et$, получится модуль $\sqrt{U'^2+V'^2}>0$; то опять тѣмъ же способомъ, можемъ найти для $x$ другую величину $p'+q'\sqrt{-1}+e't'$, и другой модуль $\sqrt{U''^2+V''^2}$, который будетъ меньше $\sqrt{U'^2+V'^2}$. Продолжая такимъ образомъ, можно сдѣлать модуль менѣе всякой величины; а это показываетъ, что необходимо находится такое подстановленіе $x=p''+q''\sqrt{-1}+e''t''$, которое уничтожаетъ модуль, то есть дѣлаетъ $U=0$ и $V=0$; оно и будетъ корнемъ даннаго уравненія. А какъ $t''$, вообще, имѣетъ видъ $\alpha''+\beta''\sqrt{-1}$, то корень отъ этого будетъ

$$x=(p''+\alpha''e'')+(q''+\beta''e'')\sqrt{-1}, \text{ или}$$
$$x=a+b\sqrt{-1}, \text{ *)}$$

полагая $p''+\alpha''e''=a$, $q''+\beta''e''=b$. Въ этомъ видѣ онъ и останется, если не уничтожатся ни $a$, ни $b$. Но, если члены $p''$ и $\alpha''e''$, либо члены $q''$ и $\beta''e''$, будутъ равны и съ противными знаками, отчего сдѣлается $a=0$, или $b=0$; то найденный корень будетъ вида $x=b\sqrt{-1}$, либо $x=a$. Даже можетъ случиться, что въ одно время уничтожатся $a$ и $b$, и тогда корень $x=0$.

Слѣдовательно, корни уравненія могутъ быть дѣйствительные и мнимые, такого же вида, какого вида получаются они отъ разрѣшенія уравненій второй и третьей степени, каковы бы ни были коефиціенты даннаго уравненія. При дальнѣйшемъ разсмотрѣніи, мы постоянно будемъ брать уравненія безъ мнимыхъ коефиціентовъ.

**355.** *Если $x=a$ корень уравненія,*

$$f(x)^n=Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Tx+U=0,$$

*то оно необходимо дѣлится безъ остатка на двучленъ $x-a=0$, и обратно.*

Пусть $\varphi(x)^{n-1}$ частное число, которое получится отъ раздѣленія $f(x)^n$ на $x-a$, и остатокъ $R$, не содержащій $x$; то будемъ имѣть равенство,

$$f(x)^n=(x-a)\varphi(x)^{n-1}+R=0.$$

Но $x=a$ есть корень уравненія; посему

$$f(a)^n=(a-a)\varphi(a)^{n-1}+R=0, \text{ откуда}$$
$$R=0.$$

Слѣдовательно $f(x)^n=0$ дѣлится на $x-a$ безъ остатка, такъ что

$$f(x)^n=(x-a)\varphi(x)^{n-1}=0.$$

---

*) Этимъ простымъ и остроумнымъ доказательствомъ Алгебра обязана французскому математику *Коши*.

Иначе это доказывается такъ: подставляютъ въ данное уравненіе $f(x)^n=0$ его корень $a$,

$$Aa^n+Ba^{n-1}+Ca^{n-2}+\ldots\ldots+Ta+U=0,$$

и это равенство вычитаютъ изъ самаго уравненія:

$$A(x^n-a^n)+B(x^{n-1}-a^{n-1})+C(x^{n-2}-a^{n-2})+\ldots.+T(x-a)=0.$$

Здѣсь всѣ двучлены $x^n-a^n$, $x^{n-1}-a^{n-1}$,....., $x-a$, дѣлятся на $x-a$ безъ остатка (**43**); стало-быть, и данное уравненіе $f(x)^n=0$ дѣлится безъ остатка на $x-a$. Частное,

$$\frac{A(x^n-a^n)}{x-a}+\frac{B(x^{n-1}-a^{n-1})}{x-a}+\frac{C(x^{n-2}-a^{n-2})}{x-a}+\ldots+T=0,$$

будетъ полиномъ, одною степенью ниже даннаго уравненія $f(x)^n=0$, вида

$$f(x)^{n-1}=A_1x^{n-1}+B_1x^{n-2}+C_1x^{n-3}+\ldots+T_1=0,$$

который, для сокращенія, назовемъ чрезъ $f(x)^{n-1}$. А какъ дѣлимое равно дѣлителю, помноженному на частное, то

$$f(x)^n=(x-a)\,f(x)^{n-1}=0.$$

**356.** *Всякое уравненіе n-ой степени имѣетъ n корней, и не можетъ имѣть ихъ болѣе.*

Пусть данное уравненіе $f(x)^n=0$. Мы знаемъ, что всякое уравненіе имѣетъ корень, вида $x=p+q\sqrt{-1}$, который, для краткости, назовемъ $x=a$, и что оно дѣлится безъ остатка на двучленъ $x-a$. Пусть $f(x)^{n-1}$ частное отъ раздѣленія $f(x)^n$ на $x-a$; то

$$f(x)^n=(x-a)\,f(x)^{n-1}=0.$$

Это равенство удовлетворяется двоякимъ образомъ: полагая $x=a$, либо $f(x)^{n-1}=0$.

Но, уравненіе $f(x)^{n-1}=0$ само необходимо имѣетъ хотя одинъ корень $x=b$; а потому оно раздѣлится на $x-b$ безъ остатка, и дастъ частное, вида $f(x)^{n-2}$, еще одною степенью ниже. Посему, будемъ имѣть:

$$f(x)^{n-1}=(x-b)f(x)^{n-2}=0,\text{ и слѣдовательно}$$
$$f(x)^n=(x-a)f(x)^{n-1}=(x-a)(x-b)f(x)^{n-2}=0,$$

чему удовлетворимъ, полагая:

$$x=a,\ x=b,\text{ либо } f(x)^{n-2}=0.$$

Уравненіе $f(x)^{n-2}=0$, въ свою очередь, имѣетъ корень $x=c$, и можетъ разложиться на множителей $x-c$, $f(x)^{n-3}$, такъ что

$$f(x)^{n-2}=(x-c)f(x)^{n-3}=0;\text{ отчего}$$
$$f(x)^n=(x-a)(x-b)(x-c)f(x)^{n-3}=0.$$

Этому удовлетворимъ, полагая

$$x=a,\ x=b,\ x=c,\text{ либо } f(x)^{n-3}=0.$$

Такимъ образомъ можно продолжать до тѣхъ поръ, пока послѣднее частное будетъ въ себѣ содержать $x$ только первой степени, и будетъ, напримѣръ, вида $x-k$. Тогда уравненіе $f(x)^n=0$ разложится на $n$ множителей первой степени, и будетъ:

$$f(x)^n=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)=0.$$

Оно удовлетворится; взявъ на мѣсто $x$ какую ни есть изъ $n$ его величинъ, $a, b, c, \ldots k$, и потому имѣетъ $n$ корней $a, b, c, \ldots k$. *Другихъ корней оно не можетъ имѣть никакихъ*, во-первыхъ, потому, что многочленъ $f(x)^n$ одинакимъ образомъ разлагается на простыхъ своихъ множителей (стр. 27); а во-вторыхъ, если бы находился хотя одинъ множитель $w$, различный отъ $a, b, c, \ldots k$, то произведеніе,

$$f(x)^n=(w-a)(w-b)(w-c)\ldots(w-k)$$

не могло бы сдѣлаться нулемъ, и потому число $w$ не удовлетворило бы уравненію.

И такъ, данное уравненіе имѣетъ ровно столько корней, различныхъ или равныхъ, сколько находится единицъ въ его показателѣ степени: уравненіе первой степени имѣетъ одинъ корень, уравненіе 2-й степени — два корня, уравненіе 3-й степени — три корня, и т. д. Изъ нихъ нѣкоторые могутъ быть дѣйствительными, а другіе мнимыми.

**357.** Существованіе мнимыхъ корней въ уравненіяхъ, *неимѣющихъ мнимыхъ коефиціентовъ*, подлежитъ замѣчательному условію.

*Ежели уравненіе* $f(x)=0$, *безъ мнимыхъ коефиціентовъ, содержитъ въ себѣ корень* $p+q\sqrt{-1}$, *то оно необбдимо имѣетъ и корень* $p-q\sqrt{-1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, отъ подстановленія корня $x=p+q\sqrt{-1}$, это уравненіе приводится къ виду $U+V\sqrt{-1}=0$, гдѣ многочленъ $U$ содержитъ однѣ четныя степени $q$, а многочленъ $V$—нечетныя степени $q$. Но уравненіе получитъ точно тотъ же видъ и отъ подстановленія $x=p-q\sqrt{-1}$; разность будетъ только въ томъ, что перемѣнится знакъ предъ членами нечетныхъ степеней $q$, то есть передъ $V$, и найдется:

$$U-V\sqrt{-1}.$$

Но, чтобы $U+V\sqrt{-1}$ равнялось нулю, надобно $U=0$ и $V=0$; а это условіе дѣлаетъ, въ то же время,

$$U-V\sqrt{-1}=0.$$

И такъ, $f(x)=0$ удовлетворяется корнемъ $p+q\sqrt{-1}$ и корнемъ $p-q\sqrt{-1}$. Слѣдовательно, мнимые корни въ уравненіяхъ бываютъ не иначе, какъ попарно. Корни, составляющіе такую пару, называются *сопряженными*.

**358.** Изъ каждой пары сопряженныхъ корней составляются въ уравненіи простые множители:

$$x-p-q\sqrt{-1},$$
$$x-p+q\sqrt{-1},$$

которые, въ совокупности, даютъ произведеніе дѣйствительное. то есть, квадратный многочленъ

$$(x-p)^2+q^2=x^2-2px+p^2+q^2,$$

на который уравненіе дѣлится безъ остатка.

Это произведеніе $(x-p)^2+q^2$ существенно *положительное,* и не можетъ сдѣлаться отрицательнымъ ни для какихъ дѣйствительныхъ величинъ $p$ и $q$.

### Составъ уравненія изъ его корней.

**359.** Чтобъ открыть законъ, по которому составляются коефиціенты послѣдовательныхъ членовъ уравненія изъ его корней, возмемъ, для большей простоты и очевидности, уравненіе 4-й степени:

$$f(x)^4=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0,$$

содержащее четыре корня $a$, $b$, $c$, $d$, и состоящее изъ четырехъ двучленныхъ: множителей. Сдѣлавъ умноженіе, получимъ:

$$\begin{array}{r|l|l|l}
x^4-a & x^3+ab & x^2-abc & x+abcd=0. \\
-b & +ac & -abd & \\
-c & +ad & -acd & \\
-d & +bc & -bcd & \\
 & +bd & & \\
 & +cd & &
\end{array}$$

Еслибъ взяли уравненіе *пятой степени*, состоящее изъ пяти множителей,

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)=0,$$

то нашлись бы коефиціенты:

2-го члена, $-(a+b+c+d+e)$,

3-го члена, $+(ab+ao+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)$,

4-го члена, $-(abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde)$,

5-го члена, $+(abcd+abce+abde+acde+bcde)$,

6-го члена, $-\ abcde$.

Изъ этихъ примѣровъ видно, что:

1) Коефиціентъ 2-го члена уравненія равенъ суммѣ корней, взятой съ отрицательнымъ знакомъ;

2) Коефиціентъ 3-го члена равенъ суммѣ всѣхъ различныхъ произведеній корней, взятыхъ по два;

3) Коефиціентъ 4-го члена равенъ суммѣ всѣхъ различныхъ произведеній корней, взятыхъ по три, и съ противнымъ знакомъ; и т. д.

4) Коефиціентъ послѣдняго члена, то есть, послѣдній членъ равенъ произведенію всѣхъ корней. Его знакъ будетъ + или —, смотря по тому, будетъ ли уравненіе чётной или нечётной степени.

Изъ этого видно, что въ уравненіи, состоящемъ изъ положительныхъ корней, члены имѣютъ поперемѣнно знаки +, —; а въ уравненіи, состоящемъ изъ корней отрицательныхъ, всѣ члены положительные.

Для повѣрки, что этотъ законъ составленія коефиціентовъ справедливъ вообще, возмемъ уравненіе, состоящее изъ положительныхъ корней,

$$x^n - Ax^{n-1} + B^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots + Tx - U = 0;$$

введемъ въ него новый корень $k$, то есть, помножимъ на $x-k$; получится:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} x^{n+1} - A & x^n + B & x^{n-1} - C & x^{n-2} + \ldots - U & x \\ -k & +Ak & -Bk & + \quad -Tk & +Uk = 0. \end{array}$$

Вторая строка этого произведенія, зависящая отъ $k$, показываетъ ясно, что всякій новый множитель $x-k$, введенный въ уравненіе, прибавляетъ ко второму коефиціенту $-A = -(a+b+c\ldots\ldots)$ членъ $-k$; къ третьему коефиціенту $+B = ab+ac+ad+\ldots+bc+bd+\ldots$ прибавляетъ $Ak = (a+b+c\ldots)k$ сумму двойныхъ произведеній корней $a$, $b$, $c$,… на $k$; и такъ далѣе. Въ послѣднемъ членѣ корень $k$ входитъ просто какъ множитель.

**360.** Числа членовъ, изъ которыхъ составляются коефиціенты 2-й, 3-й,…, могутъ быть повѣрены слѣдующимъ образомъ. Возмемъ уравненіе

$$f(x)^n = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k) = 0,$$

состоящее изъ $n$ корней. Отъ перемноженія его двучленныхъ множителей получится:

$$x^n - (a+b+c\ldots)x^{n-1} + (ab+ac+\ldots+bc+\ldots)x^{n-2} - (abc+abd+\ldots+bcd+\ldots)x^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots \pm abcde\ldots = 0.$$

Сдѣлавъ это, положимъ, что всѣ его корни равны между собою, $a=b=c=d=\ldots$; тогда будемъ имѣть:

$$(x-a)^n = x^n - (a+a+a\ldots)x^{n-1} + (a^2+a^2+a^2+\ldots)x^{n-2} - (a^3+a^3+a^3+\ldots)x^{n-3} + \ldots \pm a^n.$$

Но, мы знаемъ, что

$$(x-a)^n = x^n - nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^2x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{n-3} + \ldots\ldots \pm a^n;$$

слѣдовательно: $a+a+a+\ldots\ldots = na$,

$$a^2+a^2+a^2+\ldots\ldots = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^2,$$

$$a^3+a^3+a^3+\ldots\ldots = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3,$$

……………………………………

Отсюда заключаемъ, что въ общемъ уравненіи,

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots\ldots + Tx - U = 0,$$

*коефиціентъ* A *втораго члена состоитъ изъ суммы всѣхъ* $n$ *корней, взятой съ противнымъ знакомъ;*

*коефиціентъ* B *третьяго члена состоитъ изъ суммы различныхъ произведеній корней, взятыхъ по два* (стр. 279); эта сумма $=\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$;

*коефиціентъ* C *состоитъ изъ суммы произведеній корней, взятыхъ по три,* которая $=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$; и такъ далѣе.

*Примѣръ.* Составить уравненіе изъ корней 2, —3, 5.

Это уравненіе третьей степени; оно равно произведенію

$$(x-2)(x+3)(x-5)=0.$$

Его первый членъ $=x^3$,

коефиціентъ 2-го члена $=-(2-3+5)=-4$;

коефиціентъ 3-го члена $=+(-2.3+2.5-3.5)=-11$;

- - 4-го члена $=-2(-3.5)=30$.

Итакъ, это уравненіе

$$x^3-4x^2-11x+30=0.$$

Для повѣрки, возмемъ $x=-3$, найдется:

$$-27-36+33+30=0,$$

тожественное равенство.

*Слѣдствіе.* Если уравненіе $f(x)=0$ не имѣетъ втораго члена; это значитъ, что въ немъ сумма корней положительныхъ равна суммѣ отрицательныхъ. Если же у него нѣтъ послѣдняго члена со степенью $x^0$, то оно имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень $=0$. Наприм. $x^3-4x=0$ не имѣетъ ни втораго члена, ни послѣдняго: оно удовлетворяется, полагая $x=0$, и также $x=\pm 2$. И очевидно, что сумма корней $0+2-2=0$, а произведеніе корней $2(-2).0=0$.

### ЗАВИСИМОСТЬ ЗНАКОВЪ ПРЕДЪ ЧЛЕНАМИ УРАВНЕНІЯ ОТЪ ЕГО ДѢЙСТВИТЕЛЬНЫХЪ КОРНЕЙ, И ОБРАТНО.

**361.** Коефиціенты различныхъ членовъ уравненія состоятъ изъ совокупленія его корней; слѣдовательно, знаки предъ ними должны зависѣть отъ того, будутъ ли эти корни положительные или отрицательные, отъ числа и величины тѣхъ и другихъ.

**362.** Всякіе два члена въ уравненіи, стоящіе сряду, могутъ имѣть знаки различные, или знаки равные. Такой порядокъ знаковъ называется, въ первомъ случаѣ, *перемѣною*, а во второмъ случаѣ — *повтореніемъ*.

Въ полномъ уравненіи $n$-ой степени, состоящемъ *изъ полнаго числа* $n+1$ *членовъ*, находится $n$ промежутковъ между послѣдовательными знаками его членовъ; слѣдовательно, въ немъ сумма перемѣнъ и повтореній также равна $n$, то есть, равна его степени, или числу всѣхъ его корней.

Такъ, напримѣръ, въ уравненіи,

$$+x^5-2x^4-3x^3+x^2-4x-5=0,$$

находятся три перемѣны знаковъ, и два повторенія, а всего пять.

**363.** Если послѣдній членъ уравненія (полнаго или неполнаго) *положительный*, то оно можетъ не имѣть ни одной перемѣны, или имѣетъ 2, 4, 6,... и вообще четное число перемѣнъ. Потому что всякій переходъ отъ положительнаго члена къ положительному чрезъ отрицательный членъ даетъ двѣ перемѣны. Наприм.

$$Ax^n-Bx^{n-p}+Cx^{n-q}.$$

Если же послѣдній членъ уравненія *отрицательный*, то оно будетъ имѣть 1, или 3, или 5, или вообще *нечётное число перемѣнъ*. Потому что въ немъ отъ перваго члена положительнаго до послѣдняго положительнаго число перемѣнъ четное, а отъ послѣдняго положительнаго до послѣдняго отрицательнаго находится еще одна перемѣна; стало-быть, число всѣхъ перемѣнъ *нечётное*.

**361.** *Всякое уравненіе, состоящее изъ дѣйствительныхъ корней отрицательныхъ, имѣетъ однѣ повторенія знаковъ.* Наприм. уравненіе, котораго корни $x=-a$, $x=-b$, $x=-c$, то есть,

$$(x+a)(x+b)(x+c)=0,$$

очевидно, имѣетъ всѣ члены положительные, слѣдовательно имѣетъ однѣ повторенія.

*Всякое уравненіе, состоящее изъ дѣйствительныхъ корней положительныхъ, имѣетъ однѣ перемѣны знаковъ*, и ни одного повторенія. Наприм. уравненіе $(x-a)(x-b)(x-c)=0$, котораго корни $x=a$, $x=b$, $x=c$, имѣетъ однѣ перемѣны, а именно:

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0;$$

объ этомъ узнали мы еще ранѣе сего, говоря о составѣ уравненія изъ его корней (**359**).

**365.** Отсюда непосредственно открывается легкій способъ, какъ, *по данному уравненію $f(x)=0$, найти другое, котораго корни были бы тѣ же, только съ противными знаками. Для этого довольно только перемѣнить знаки въ $f(x)=0$ предъ членами, занимающими чётныя мѣста* (2-е, 4-е, 6-е,....), считая отъ лѣвой руки къ правой.

Ибо, если въ уравненіи *чётной степени* $2n$,

$$x^{2n}+Ax^{2n-1}Bx^{2n-2}+Cx^{2n-3}+\ldots.+Tx+U=0,$$

взять $-x$ вмѣсто $x$, то перемѣнятся знаки только предъ членами нечётныхъ степеней, занимающихъ чётныя мѣста, и получатся:

$$x^{2n}-Ax^{2n-1}+Bx^{2n-2}-C^{2n-3}+\ldots-Tx+U=0.$$

Послѣдній членъ U не перемѣнитъ знака, потому что полное уравненіе чётной степени имѣетъ нечётное число членовъ, и потому, послѣдній членъ занимаетъ мѣсто нечётное.

Если же данное уравненіе *нечётной степени*,

$$x^{2n+1}+Ax^{2n}+Bx^{2n-1}+Cx^{2n-2}+\ldots+Tx+U=0;$$

то, при перемѣнѣ $+x$ въ $-x$, получится:

$$-x^{2n+1}+Ax^{2n}-Bx^{2n-1}+Cx^{2n-2}-\ldots-Tx+U=0;$$

а перемѣнивъ знаки во всѣхъ членахъ, найдется, какъ и прежде,

$$x^{2n+1}-Ax^{2n}+Bx^{2n-1}-Cx^{2n-2}+\ldots+Tx-U=0$$

уравненіе, въ которомъ перемѣнились только знаки членовъ, занимающихъ *чётныя мѣста*; послѣдній членъ также получилъ перемѣну знака. Корнями этого уравненія будутъ $-a$, $-b$, $-c,\ldots$, если данное $f(x)=0$ имѣло корни $a$, $b$, $c,\ldots$

*Примѣръ*. — Уравненіе $x^3+4x^2+x-6=0$ имѣетъ корни $+1$, $-2$, $-3$. Если перемѣнить знаки его втораго и четвертаго членовъ, то получится:

$$x^3-4x^2+x+6=0$$

уравненіе, котораго корни $-1$, $+2$, $+3$. Для повѣрки, возмемъ $x=3$, и найдется тожественное равенство

$$27-36+3+6=0.$$

Это преобразованіе случается очень часто, а потому, впередъ мы будемъ означать данное уравненіе чрезъ $f(x)=0$, а уравненіе, котораго корни тѣ же, только съ противными знаками, будемъ изображать чрезъ $f(-x)=0$.

**366.** *Полное число перемѣнъ въ данномъ уравненіи $f(x)^m=0$ и въ его $f(-x)^m=0$, никогда не можетъ быть болѣе показателя m степени уравненія, или болѣе числа его корней.*

Для доказательства, возмемъ изъ даннаго уравненія *два какіе ни есть смежные члена чётной степени*, или *оба нечётной степени*. Наименьшая разность между показателями этихъ членовъ $=2$ (когда между ними не будетъ только одного члена). Отъ перемѣны $x$ въ $-x$, *чётные члены* сохранятъ свои знаки; отчего въ $f(x)^m$ и $f(-x)^m$ между ними не будетъ перемѣны, либо будутъ двѣ, если эти члены были съ противными знаками.

*Члены нечётной степени*, при перемѣнѣ $x$ въ $-x$, оба перемѣнятъ знаки, отчего въ $f(x)^m$ и $f(-x)^m$ между ними либо не будетъ перемѣны, если они были съ равными знаками, либо составятся двѣ перемѣны, если они были съ противными знаками. Слѣдовательно, въ обоихъ случаяхъ, число перемѣнъ будетъ не больше самой меньшей разности 2 показателей, а и подавно, если эта разность $>2$.

Возмемъ смежные члены, *одинъ чётной, а другой нечётной степени:* самая меньшая разность между ихъ показателями $=1$ (когда между ними не пропускается ни одного члена). Если они съ *равными знаками*, то, при перемѣнѣ $x$ въ $-x$, одинъ только членъ перемѣнитъ свой знакъ, отчего въ $f(x)^m$ и $f(-x)^m$ между ними будетъ одна перемѣна. Если же они съ *противными знаками*, стало-быть, имѣютъ перемѣну въ $f(x)^m$; то, для $-x$, эта перемѣна въ $f(-x)^m$ исчезнетъ; слѣдовательно и здѣсь въ $f(x)^m$ и $f(-x)^m$ между этими членами будетъ одна перемѣна. Посему и здѣсь, въ обоихъ случаяхъ, число перемѣнъ не бываетъ больше самой меньшей разности между показателями смежныхъ членовъ, а и подавно, если эта разность больше 1-цы.

Пусть данное уравненіе

$$f(x)^m=x^m+Ax^{m-n}+Bx^{m-n-n'}+Cx^{m-n'-n''}+\ldots+Ux^0=0.$$

Пусть $v$, $v'$, $v''$,.... числа перемѣнъ между членами первымъ и вторымъ, вторымъ и третьимъ, третьимъ и четвертымъ,.... какъ въ $f(x)^m=0$, такъ и въ $f(-x)^m=0$, $n$, $n'$, $n''$,.... разности между ихъ показателями; то будемъ имѣть:

$$v\ngtr n,\ v'\ngtr n',\ v''\ngtr n'',\ldots;\ \text{откуда}$$
$$v+v'+v''+\ldots.\ \ngtr n+n'+n''+\ldots.,\ \text{или}$$
$$v+v'+v''+\ldots.\ \ngtr m;$$

потому что въ послѣднемъ членѣ $Ux^0$ показатель нуль, то есть, $m-n-n'-$ $-n''-n'''\ldots=0$, отчего $n+n'+n''+\ldots=m$.

И такъ, вообще, если V число перемѣнъ въ $f(x)^m=0$,
и V' – – въ $f(-x)=0$,
то $V+V'\ngtr m$, что и доказать надлежало.

Эти предварительныя объясненія приводятъ къ заключенію, что число перемѣнъ знаковъ уравненія $f(x)=0$, и его $f(-x)=0$, можетъ приблизительно, или точно, показывать намъ число дѣйствительныхъ его корней, положительныхъ или отрицательныхъ. Начнемъ съ простѣйшихъ случаевъ.

**367.** *Уравненіе, котораго всѣ члены положительные,* и въ которомъ нѣтъ ни одной перемѣны знака, *не можетъ имѣть ни одного дѣйствительнаго корня положительнаго.* Потому что всякое число $+a$, подставленное на мѣсто неизвѣстной $x$, обращаетъ это уравненіе всегда въ результатъ положительный, а не въ нуль. Слѣдовательно, оно можетъ имѣть только дѣйствительные корни отрицательные, и корни мнимые.

*Всякое полное уравненіе* $f(x)=0$, *въ которомъ находятся однѣ перемѣны знаковъ*, въ которомъ, слѣдовательно, всѣ члены чётнаго порядка отрицательные, а члены нечётнаго порядка положительные, *не можетъ имѣть ни одного дѣйствительнаго корня отрицательнаго.* Потому что всякое число $-a$, подставленное на мѣсто $x$ въ это уравненіе, перемѣнитъ знаки предъ всѣми членами—чётными степенями отъ $x$; отчего во всемъ уравненіи получатся члены съ равными знаками; сумма ихъ никогда не можетъ быть равна нулю. Сталобыть, въ этомъ уравненіи $f(x)=0$ могутъ быть корни только положительные и корни мнимые.

**368.** *Всякое полное уравненіе $f(x)=0$ можетъ имѣть положительныхъ корней не болѣе того, сколько въ $f(x)=0$, и не болѣе отрицательныхъ корней, сколько въ $f(-x)=0$ находится перемѣнъ знаковъ. А если всѣ его корни дѣйствительные, то оно имѣетъ точно такое число положительныхъ корней, сколько перемѣнъ въ $f(x)=0$, и столько отрицательныхъ корней, сколько находится перемѣнъ въ $f(-x)=0$.*

Для доказательства этого важнаго правила, открытаго *Декартомъ* *), возмемъ какое ни есть уравненіе, котораго всѣ члены расположены по убывающимъ степенямъ его неизвѣстной $x$, и въ которомъ нѣтъ ни одного недостающаго члена:

$$(x^n+\ldots+Px^{p+1})-(P'x^p+\ldots+Qx^{q+1})+(Q'x^q+\ldots+Rx^{r+1})-\ldots$$
$$\ldots\mp Sx^{s+1}\pm(S'x^s+\ldots+U)=0.$$

Въ немъ находится сперва рядъ членовъ $x^n+\ldots+Px^{p+1}$ положительныхъ, потомъ рядъ $P'x^p+\ldots+Qx^{q+1}$ членовъ отрицательныхъ, за нимъ рядъ $Q'x^q+\ldots+Rx^{r+1}$ членовъ положительныхъ, и такъ далѣе. Послѣдняя группа членовъ $\pm(S'x^s+\ldots+U)$ можетъ быть положительною или отрицательною; она имѣетъ предъ собою группу членовъ съ противнымъ ей знакомъ, изъ которыхъ удержанъ только послѣдній $\mp Sx^{s+1}$.

Помножимъ все это уравненіе на $x-a=0$, то есть, [illegible] въ него *положительный корень $x=a$*, и разсмотримъ, какую перемѣну произведетъ онъ въ знакахъ уравненія. При этомъ мы удержимъ *въ произведеніи* одни первые члены, которыми явнымъ образомъ начинаются ряды членовъ положительные или отрицательные, получаемые отъ помноженія каждой группы членовъ на $x$; а отъ умноженія на $-a$, удержимъ члены, которыми каждая группа оканчивается; и такимъ образомъ найдется:

$$\begin{array}{l}
(x^n+\ldots+Px^{p+1})-(P'x^p+\ldots+Qx^{q+1})+(Q'x^q+\ldots+Rx^{r+1})-\ldots\mp Sx^{s+1}\pm(S'x^s+\ldots+U)\\
\qquad\qquad x-a\,.\\
\hline
\end{array}$$
$$\begin{array}{r|r|r|r}
+x^{n+1}+\ldots-\;P' & x^{p+1}-\;-\ldots+\;Q' & x^{q+1}+\;+\ldots\pm\;S' & x^{s+1}\pm\ldots\pm Ux\\
-\ldots-aP & +\;+\ldots+aQ & -\;-\ldots\pm aS & \pm\ldots\ldots\mp aU=0.
\end{array}$$

Въ этомъ произведеніи хотя неизвѣстно, какіе знаки находятся предъ членами промежуточными, однако же ясно видно, что, отъ перваго члена $x^{n+1}$ до члена

---

*) *Декартъ*, французскій математикъ, въ первой половинѣ 17-го вѣка.

степени $p+1$, находится по крайней мѣрѣ одна перемѣна знаковъ (потому что эти члены явно съ противными знаками); отъ члена степени $p+1$ до степени $q+1$ также находится по крайней мѣрѣ одна перемѣна, и такъ далѣе. Найдется такимъ образомъ, что число перемѣнъ въ произведеніи, отъ члена $x^{n+1}$ до члена $\pm(S'+aS)x^{s+1}$, равно по крайней мѣрѣ числу ихъ въ данномъ уравненіи отъ $x^n$ до члена $\pm S'x^s$. Но, въ данномъ уравненіи, начиная отъ члена $\pm S'x^s$ до послѣдняго включительно, нѣтъ ни одной перемѣны; а въ полученномъ произведеніи находится по крайней мѣрѣ еще одна, потому что его члены $\pm(S'+aS)x^{s+1}$ и $\mp aU$ съ противными знаками; слѣдовательно, положительный корень $x=a$, введенный въ данное уравненіе, далъ намъ произведеніе, въ которомъ число перемѣнъ *хотя одною болѣе* числа ихъ въ данномъ уравненіи.

**369.** Если число всѣхъ перемѣнъ выйдетъ болѣе числа дѣйствительныхъ корней, то разность между числомъ перемѣнъ произведенія и числомъ перемѣнъ множимаго будетъ нечётное число. Положимъ, что множимое $f(x)=0$ было *съ послѣднимъ членомъ положительнымъ;* то $f(x)(x-a)=0$ будетъ имѣть *послѣдній членъ отрицательный,* и потому будетъ имѣть нечётное число перемѣнъ: слѣдовательно, разность между первымъ числомъ перемѣнъ и послѣднимъ будетъ *нечётная.* Положимъ, что множимое $f(x)=0$ былъ *съ послѣднимъ членомъ отрицательнымъ;* тогда $f(x)(x-a)=0$ будетъ *съ послѣднимъ членомъ положительнымъ:* въ первомъ число перемѣнъ *нечётное,* а во второмъ оно *чётное;* слѣдовательно, опять разность между числомъ первымъ и послѣднимъ нечётная.

Но, если, отъ введенія положительнаго корня въ уравненіе $f(x)=0$, число его перемѣнъ сдѣлается одною, тремя, пятью,.... больше; то разность между числомъ этихъ прибылыхъ перемѣнъ и однимъ введеннымъ корнемъ, будетъ $1-1=0$, $3-1=2$, $5-1=4$,.... всегда чётная.

**370.** Теперь положимъ, что $f(x)=0$ состоитъ изъ положительныхъ корней $a$, $b$, $c$,...., а сверхъ того оно содержитъ еще корни отрицательные и мнимые; что произведеніе корней отрицательныхъ и мнимыхъ $=\varphi(x)$, и что, посему, все данное уравненіе $f(x)=\varphi(x)(x-a)(x-b)(x-c)....=0$: изъ предыдущаго слѣдуетъ, что въ $\varphi(x)(x-a)$ будетъ по крайней мѣрѣ одною перемѣною знака, въ $\varphi(x)(x-a)(x-b)$ по крайней мѣрѣ двумя перемѣнами, и т. д. болѣе, нежели сколько ихъ находится въ $\varphi(x)$. Даже, если $\varphi(x)$ не имѣетъ ни одной перемѣны знака, то все-же многочленъ $f(x)$ будетъ имѣть по крайней мѣрѣ столько такихъ перемѣнъ, сколько въ немъ находится положительныхъ корней $a$, $b$, $c$,.... Если же ихъ болѣе, то всегда чётнымъ числомъ больше противъ числа корней (**369**).

Преобразуемъ уравненіе $f(x)=0$ въ другое $f(-x)=0$, котораго корни тѣ же, только съ противными знаками; тогда всѣ отрицательные корни перваго сдѣлаются положительными во второмъ, и обратно. Слѣдовательно, уравненіе $f(-x)=0$ также должно имѣть по крайней мѣрѣ столько перемѣнъ знака, сколько будетъ всѣхъ отрицательныхъ корней въ $f(x)=0$.

И такъ, поелику всякому положительному корню уравненія $f(x)=0$ соотвѣтствуетъ одна перемѣна знака, а всякому отрицательному корню соотвѣтствуетъ перемѣна знака въ $f(-x)=0$; то заключаемъ обратно, что въ $f(x)=0$ должно быть не болѣе дѣйствительныхъ корней, сколько въ $f(x)$ и $f(-x)$, соотвѣтственно, находится перемѣнъ знака.

**371.** Если же данное уравненіе $f(x)=0$ состоитъ *изъ одних корней дѣйствительныхъ;* то въ немъ будетъ находиться точно столько положительныхъ корней, сколько перемѣнъ въ $f(x)=0$, и столько отрицательныхъ, сколько перемѣнъ въ $f(-x)=0$, такъ что сумма тѣхъ и другихъ равна степени уравненія.

Для доказательства, положимъ, что уравненіе $f(x)^m=0$ имѣетъ всѣ корни дѣйствительные, изъ коихъ $p$ число корней положительныхъ, $n$ — отрицательныхъ; то, знаемъ, что сумма ихъ равна показателю $m$ степени уравненія:

$$p+n=m.$$

Назовемъ теперь чрезъ $V$ полное число перемѣнъ въ $f(x)^m=0$, и чрезъ $V'$ полное число перемѣнъ въ $f(-x)^m=0$; сумма $V+V'$ этихъ перемѣнъ не можетъ быть больше $m$, (**366**); но она не можетъ быть и менѣе, потому что, при этихъ двухъ состояніяхъ уравненія, всѣ его корни, какъ дѣйствительные, успѣютъ быть положительными; а мы знаемъ, что каждый положительный корень производитъ въ уравненіи не меньше одной перемѣны, и, потому, число всѣхъ перемѣнъ въ $f(x)^m$ и $f(-x)^m$ не можетъ быть менѣе числа $m$ корней. А когда $V+V'$ ни больше $m$, ни менѣе, то значитъ, что

$$V+V'=m, \text{ или } V+V'=p+n.$$

Но, число перемѣнъ $V$ въ $f(x)^m=0$ не менѣе числа $p$ корней положительныхъ, и $V'$ не меньше $n$, то

$$V=p,\ V'=n;$$

въ противномъ случаѣ, для $V>p$, было бы $V'<n$, чему быть не можно.

И такъ, уравненіе полное или неполное, состоящее *изъ одних дѣйствительныхъ корней,* имѣетъ столько положительныхъ корней, сколько перемѣнъ въ $f(x)=0$, и столько отрицательныхъ, сколько перемѣнъ въ $f(-x)=0$. Сумма тѣхъ и другихъ перемѣнъ равна степени уравненія.

*Примѣръ.* Уравненіе $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$ имѣетъ корни 1, —1, 2, 3. Въ немъ три перемѣны, соотвѣтствуютъ тремъ корнямъ положительнымъ. Его $f(-x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6=0$ имѣетъ одну перемѣну, которая соотвѣтствуетъ одному корню отрицательному.

## Признаки дѣйствительныхъ корней въ уравненіяхъ.

**372.** Изъ того, что данное уравненіе имѣетъ перемѣны знаковъ въ своихъ членахъ, нельзя еще заключать о присутствіи въ немъ дѣйствительныхъ корней. Такъ, напримѣръ, полное уравненіе:

$$x^4-3x^3+6x^2-5x+3=0=(x^2-x+1)(x^2-2x+3)$$

имѣетъ однѣ перемѣны; а между тѣмъ состоитъ только изъ мнимыхъ корней.

Однакоже во многихъ уравненіяхъ представляются весьма простые, и нерѣдко явные признаки, показывающіе, что онѣ содержатъ хотя по одному дѣйствительному корню. Ближайшіе изъ этихъ признаковъ слѣдующіе.

**373.** *Если данное уравненіе,*

$$f(x)=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Tx+U=0,$$

*не содержащее мнимыхъ коефиціентовъ, отъ какихъ ни есть двухъ подстановленій $x=\alpha$, $x=\beta$, обращается въ два результата съ противными знаками; это служитъ признакомъ, что между $\alpha$ и $\beta$ находится по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень этого уравненія.*

Ибо, это уравненіе есть непрерывная раціональная функція; слѣд. и не можетъ иначе перейти изъ результата положительнаго въ отрицательный, или обратно, какъ сдѣлавшись сперва нулемъ (**310**). По этому, между $\alpha$ и $\beta$ должно быть такое подстановленіе $\alpha'$, для котораго $f(x)=0$ удовлетворяется; слѣдовательно $\alpha'$ и будетъ его корнемъ.

*Примѣръ.* Въ уравненіе

$f(x)=2x^3-5x^2-20x+50=0$, подставляя:
$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, получимъ:
$f(x)=50,\ 27,\ 6, -1,\ 18.$

Отъ подстановленій 2, 3, 4, уравненіе два раза перемѣнило свой знакъ; слѣдовательно одинъ его корень находится между 2 и 3, а другой между 3 и 4. И въ самомъ дѣлѣ, корни этого уравненія суть: $2\frac{1}{2}$, $\sqrt{10}$, $-\sqrt{10}$.

Между подстановленіями, обращающими $f(x)=0$ въ результаты съ равными знаками, корни могутъ быть или нѣтъ. Въ этомъ же примѣрѣ находимъ, что для $x=0$, $x=2$, между которыми нѣтъ корней, получились результаты $f(0)=50$, $f(2)=6$, съ равными знаками, и для $x=2$, $x=4$, результаты $f(2)=6$, $f(4)=18$, съ равными знаками; однако же между 2 и 4 находятся два дѣйствительные корня.

Знаки таковыхъ результатовъ, равные или различные, зависятъ отъ чётнаго или нечётнаго числа корней, заключающихся между подстановленіями, взятыми на мѣсто $x$, а именно:

**374.** *Всякія два числа $\alpha$, $\beta$, между которыми находится нечётное число корней, будучи подставлены въ уравненіе, обращаютъ его въ два результата съ противными знаками; но, оба результата получатся съ равными знаками, если между $\alpha$ и $\beta$ нѣтъ корней, или есть чётное число корней.*

Для доказательства, возмемъ уравненіе:

$$f(x)=(x-a)(x-b)^3(x-c)\dots(x-k).\,\varphi(x)=0,$$

котораго корни $a$, $b$, $b$, $b$, $c$,....$k$, заключаются между подстановленіями $\alpha$, $\beta$, а $\varphi(x)$ содержитъ въ себѣ всѣ его прочіе корни, которыхъ нѣтъ между $\alpha$ и $\beta$. Подставимъ $x=\alpha$, $x=\beta$; получатся результаты:

$$f(\alpha)=(\alpha-a)(\alpha-b)^3(\alpha-c)\dots(\alpha-k).\varphi(\alpha),$$
$$f(\beta)=(\beta-a)(\beta-b)^3(\beta-c)\dots(\beta-k).\varphi(\beta);$$

гдѣ $\varphi(\alpha)$; $\varphi(\beta)$, будутъ съ равными знаками; иначе между $\alpha$ и $\beta$ находился бы еще одинъ корень даннаго уравненія, чего здѣсь не предполагается. Пусть $\alpha>\beta$, и больше каждаго изъ корней $a, b, c, \dots k$; то всѣ факторы $\alpha-a$, $\alpha-b$, $\alpha-c$, $\dots\alpha-k$, будутъ *положительные*, и произведеніе ихъ $(\alpha-a)(\alpha-b)^3(\alpha-c)\dots(\alpha-k)$ будетъ положительное. Но произведеніе $(\beta-a)(\beta-b)^3(\beta-c)\dots(\beta-k)$ будетъ *отрицательное*, когда число такихъ факторовъ. т. е. число корней $a$, $b$, $b$, $b$, $c$,....$k$, будетъ *нечётное;* въ противномъ же случаѣ, оно также положительное. Слѣдовательно, результаты $f(\alpha)$, $f(\beta)$, имѣютъ противные знаки, если между $\alpha$ и $\beta$, находится нечётное число корней; но они имѣютъ знаки равные, когда между $\alpha$ и $\beta$ чётное число корней, либо совсѣмъ не будетъ корней.

**375.** Обратно: *если два числа $\alpha$ и $\beta$, взятые на мѣсто $x$ въ $f(x)=0$, даютъ два результата съ противными знаками, то между ними заключается нечётное число корней* (иначе эти результаты были бы съ равными знаками); *если же онѣ даютъ два результата съ равными знаками, то между ними нѣтъ корней, либо есть чётное число ихъ* (иначе два результата были бы съ противными знаками).

Мнимые корни, которые въ уравненіяхъ бываютъ попарно, $x=p+q\sqrt{-1}$, $x=p-q\sqrt{-1}$, не могутъ имѣть никакого вліянія на знакъ произведенія $(x-a)(x-b)^3(x-c)\dots(x-k).\varphi(x)=0$; потому что каждая пара ихъ въ уравненіи составляетъ квадратный множитель $(x-p)^2+q^2$, который остается положительнымъ для всякихъ дѣйствительныхъ величинъ, взятыхъ на мѣсто $x$.

**376.** *Всякое уравненіе, нечётной степени $2n+1$, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ дѣйствительный корень съ противнымъ знакомъ относительно знака послѣдняго члена.*

Для доказательства, возмемъ уравненія:

1) $x^{2n+1}+Ax^{2n}+Bx^{2n-1}+\dots-U=0,$
2) $x^{2n+1}+Ax^{2n}+Bx^{2n-1}+\dots+U=0,$

изъ коихъ одно съ послѣднимъ членомъ отрицательнымъ, а другое — съ положительнымъ. Пусть N наибольшій коефиціентъ въ томъ и другомъ. $N>0$. $(N<0)$?

Въ первомъ, для $x=0$, получится результатъ отрицательный $f(0)=-U$; а для $x=N+1$, первый членъ превзойдетъ сумму всѣхъ прочихъ членовъ, и получится результатъ положительный $f(N+1)=+$. Слѣдовательно, уравненіе 1) имѣетъ дѣйствительный корень между подстановленіями 0 и $N+1$.

Въ уравненіи 2), для $x=0$, получается результатъ положительный $f(0)=+U$; а, для $x=-(N+1)$, первый членъ его сдѣлается отрицательнымъ, и превзойдетъ сумму всѣхъ прочихъ членовъ; отъ чего получится отрицательный результатъ $f(-N-1)=-$. Слѣдовательно, между подстановленіями 0 и $-(N+1)$ находится отрицательный корень.

Въ обоихъ случаяхъ знакъ корня выходитъ противный знаку послѣдняго члена U.

**377.** *Всякое уравненіе чётной степени $2n$, съ отрицательнымъ послѣднимъ членомъ, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, два дѣйствительные корня, одинъ положительный, а другой отрицательный.*

Пусть это уравненіе

$$f(x)=x^{2n}+Ax^{2n-1}+Bx^{2n-2}+\ldots+Tx-U=0.$$

Возмемъ $x=0$; останется послѣдній членъ $-U$.

Если же взять $x=N+1$, или $x=-(N+1)$, то, въ обоихъ случаяхъ, первый членъ останется положительнымъ, и превзойдетъ сумму всѣхъ прочихъ членовъ; по этому, въ обоихъ случаяхъ $f(x)=0$ обратится въ результатъ положительный. Слѣдовательно, уравненіе имѣетъ два дѣйствительные корня, одинъ между 0 и $N+1$, а другой между 0 и $-(N+1)$, изъ коихъ первый—положительный, а второй отрицательный.

**378.** *Ежели $f(x)=0$, и его $f(-x)=0$, таковы, что въ томъ или другомъ сумма коефиціентовъ положительныхъ менѣе суммы отрицательныхъ, то уравненіе нечётной степени имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ положительный корень, а уравненіе чётной степени — два корня.*

Ибо, для $x=1$, уравненіе обращается въ результатъ отрицательный; а, для $x=N+1$, первый членъ уравненія превзойдетъ сумму всѣхъ прочихъ, и получится результатъ положительный.

По той же причинѣ, въ уравненіи $f(x)^{2n}=0$ чётной степени найдется положительный корень $a>1$. Но, если это уравненіе представить раздѣленнымъ на $x-a$, то въ частномъ получится уравненіе $f(x)^{2n-1}=0$ нечётной степени, которое, въ свою очередь, будетъ имѣть хотя одинъ дѣйствительный корень.

**379.** *Всякое уравненіе, въ которомъ сумма коефиціентовъ положительныхъ равна суммѣ отрицательныхъ, имѣетъ корнемъ единицу.*— Наприм. $x^3-7x+6=0$. Это очевидно.

**380.** *Всякое уравненіе нечётной степени, имѣющее послѣдній членъ положительный, и въ которомъ сумма коефиціентовъ положительныхъ менѣе суммы отрицательныхъ, имѣетъ три дѣйствительные корня. Первый* изъ этихъ корней отрицательный, по причинѣ послѣдняго члена положительнаго; *другой корень* положительный, оттого что сумма коефиціентовъ положительныхъ менѣе суммы отрицательныхъ. Если эти два корня исключить, то останется опять уравненіе нечетной степени, двумя степенями ниже, въ которомъ необходимо находится еще одинъ дѣйствительный корень.

**381.** *Признаки мнимыхъ корней, открываемые въ уравненіяхъ посредствомъ Декартова правила знаковъ.*

Пусть W сумма всѣхъ перемѣнъ въ уравненіи $f(x)^m=0$ и его $f(-x)^m=0$; число всѣхъ его корней $=m$. Извѣстно, что число всѣхъ дѣйствительныхъ корней бываетъ не больше W, а если корни всѣ дѣйствительные, то ихъ число $m=W$ (**371**). Посему, если найдется, что $m>W$, то данное уравненіе необходимо имѣетъ *по крайней мѣрѣ* $m-W$ мнимыхъ корней.

Этимъ признакомъ легко и просто узнается *нижній предѣлъ числа мнимыхъ корней въ уравненіяхъ неполныхъ.*

*Примѣръ.* Возмемъ $f(x)=x^3-1=0$, и его

$$f(-x)=x^3+1=0.$$

Здѣсь $W=1$, $m=3$, $m-W=3-1=2$. Слѣдовательно, $f(x)=0$ имѣетъ два мнимые корня. И въ самомъ дѣлѣ, одинъ корень этого уравненія $=1$; а, раздѣливши $x^3-1=0$ на $x-1$, найдется

$$x^2-x+1=0; \text{ откуда}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}, \text{ оба корня мнимые.}$$

И вообще, уравненіе *чётной степени,*

$$f(x)^m=x^m-1=0,$$

котораго $f(-x)^m=x^m-1=0$, имѣетъ $W=2$. Оно содержитъ, по крайней мѣрѣ, $m-2$ мнимыхъ корней, и только два дѣйствительные, $+1$ и $-1$.

Уравненіе *нечётной степени* $f(x)=x^m-1=0$, котораго $f(-x)=x^m+1$, имѣетъ $W=1$; оно содержитъ $m-W=m-1$ мнимыхъ корней, и только одинъ дѣйствительный корень $x=1$.

*Примѣръ.* Уравненіе $f(x)=x^8-ax^5-b=0$, котораго $f(-x)=x^8+ax^5-b=0$, имѣетъ $W=2$, и мнимыхъ корней по крайней мѣрѣ $m-W=8-2=6$.

**382.** Въ уравненіяхъ неполныхъ число $m-W$ мнимыхъ корней зависитъ отъ каждой изъ послѣдовательныхъ разностей между числомъ недостающихъ членовъ и числомъ перемѣнъ, а именно: *Разность между показателемъ $m$ степени уравненія и числомъ $W$ всѣхъ перемѣнъ въ $f(x)=0$ и $f(-x)=0$ равна суммѣ всѣхъ частныхъ разностей между показателями каждыхъ двухъ послѣдовательныхъ членовъ и числомъ перемѣнъ между ними.*

Возмемъ опять уравненіе

$$f(x)=x^m+Ax^{m-n}+Bx^{m-n-n'}+Cx^{m-n-n'-n''}+\ldots.=0;$$

означимъ чрезъ $w, w', w'',\ldots.,$ сколько найдется перемѣнъ между первымъ и вторымъ, между вторымъ и третьимъ, третьимъ и четвертымъ,.... членами въ $f(x)$ и $f(-x)$; то будемъ имѣть (**366**)

$$m=n+n'+n''+\ldots., \quad W=w+w'+w''\ldots.,$$

такъ что $m-W=(n-w)+(n'-w')+(n''-w'')+\ldots.$

Ни одна изъ этихъ разностей $n-w$, $n'-w'$,.... не можетъ сдѣлаться отрицательною (**366**); однакоже нѣкоторыя изъ нихъ могутъ уничтожиться; и тогда *число $m-W$ мнимыхъ корней будетъ равно суммѣ всѣхъ неуничтожившихся разностей.*

**383.** Такъ какъ разности $n-w$, $n'-w'$,.... независимы одна отъ другой, то, для опредѣленія $m-W$, каждую изъ нихъ можно искать отдѣльно. Правила для этого легко найти слѣдующимъ образомъ. Возмемъ двучленныя функціи:

1) $f(x)=ax^{2r+1}\pm b$, ея $f(-x)=ax^{2r+1}\mp b$,

гдѣ недостаетъ $2r$ членовъ. Въ обоихъ тутъ случаяхъ число перемѣнъ $w=1$; число мнимыхъ корней $m-w=2r+1-w=2r=$ *числу недостающихъ членовъ.*

2) $f(x)=ax^{2r}+b$, ея $f(-x)=ax^{2r}+b$.

Здѣсь недостаетъ нечетнаго числа $2r-1$ членовъ; $w=0$; число мнимыхъ корней $m-w=2r-w=2r$, *единицею больше числа недостающихъ членовъ.*

3) $f(x)=ax^{2r}-b$, ея $f(-x)=ax^{2r}-b$.

Также недостаетъ $2r-1$ членовъ; $w=2$; число мнимыхъ корней $=2r-2$, *единицею менѣе числа недостающихъ членовъ.*

Теперь, если помножить двучленныя функціи 1), 2), 3) на $x^n$, то получатся общіе виды всякихъ смежныхъ двухъ членовъ, взятыхъ гдѣ ни есть въ уравненіи:

$$x^n(ax^{2r+1}\pm b)=ax^{2r+1+n}\pm bx^n, \quad x^n(ax^{2r}\pm b)=ax^{2r+n}\pm bx^n.$$

Въ первомъ недостаетъ также $2r$, и во второмъ $2r-1$ промежуточныхъ членовъ. И обратно, легко такіе двучлены приводить къ видамъ 1), 2), 2), стоитъ только вынесть за скобки общій множитель $x^n$. Счетъ мнимыхъ корней будетъ совершенно тотъ же, а именно:

1) *Когда внутри скобокъ степень $x$ нечётная $2r+1$, то число корней равно числу $2r$ недостающихъ членовъ.*

2) *Если внутри скобокъ $x$ имѣетъ степень чётную $2r$, и недостаетъ $2r-1$ членовъ; то число мнимыхъ корней $=2r$ или $2r-2$, смотря потому, будутъ ли $a$ и $b$ съ равными знаками, или съ знаками различными.*

Слѣдовательно, *если недостаетъ одного члена между членами равныхъ знаковъ* (стало-быть, $2r-1=1$, $r=1$), то уравненіе имѣетъ $2m=2$ мнимые корня. Если же недостаетъ одного члена *между членами разныхъ знаковъ*, то этимъ не показывается ничего, потому что число мнимыхъ корней выходитъ $2m-2=2-2=0$.

*Примѣръ.* Уравненіе $f(x)=x^3+10x-28=0$, котораго $f(-x)=x^3+10x+28=0$, имѣетъ $W=1$, и число мнимыхъ корней $m-W=3-1=2$. И, въ самомъ дѣлѣ, его корни:

$$2 \text{ и } \frac{-1\pm\sqrt{-13}}{2}.$$

*Примѣръ.* Въ уравненіи $x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)=0$, въ которомъ нѣтъ втораго члена, всѣ корни дѣйствительные.

Но въ уравненіи $x^3-6x-7=0$, котораго $f(-x)=x^3-6x+7=0$, и гдѣ $W=3$, и $m-W=3-3=0$, находятся мнимые корни, какъ показываетъ извѣстный (**186**) признакъ $\frac{1}{4}c^2+\frac{b^3}{27}=\frac{7^2}{4}-\frac{6^3}{27}>0$.

**384.** Предыдущій способъ вовсе недостаточенъ для открытія мнимыхъ корней *въ уравненіяхъ полныхъ.* Такъ, напримѣръ, въ уравненіи

$$f(x)=x^4+2x^3+17x^2-20x+100=(x^2-2x+5)(x^2+4x+20)=0,$$

$$\text{и его } f(-x)=x^4-2x^3+17x^2+20x+100=0,$$

находится число перемѣнъ $W=4$; $m-W=4-4=0$; а между тѣмъ, всѣ корни этого уравненія мнимые.

Въ этихъ уравненіяхъ можно узнавать присутствіе мнимыхъ корней, и находить нижній предѣлъ числа ихъ, вводя въ уравненіе дѣйствительный корень $\pm a$, и давая ему такую величину, чтобы въ произведеніи получилось число перемѣнъ совсѣмъ не то, какое можетъ произойти отъ однихъ корней дѣйствительныхъ; особливо полезно искать условіе, чтобы въ произведеніи уничтожился хотя одинъ членъ между членами равныхъ знаковъ.

Пусть $f(x)^m=0$ имѣетъ $V$ перемѣнъ. Число дѣйствительныхъ-положительныхъ его корней не можетъ быть больше $V$; оно даже равно $V$, если корни всѣ дѣйствительные. Введемъ въ это уравненіе *положительный корень $a$*, помноживъ на $x-a$:

$$f(x)^m(x-a)=0.$$

Если это уравненіе состоитъ изъ корней дѣйствительныхъ, то, отъ введенія корня $a$, въ немъ должно быть $V+1$ перемѣнъ, и столько же дѣйствительныхъ-положительныхъ корней. Но, положимъ, что въ немъ окажется $V+k$ перемѣнъ, то есть, $V+k-(V+1)=k-1$ перемѣнами больше: ни одна изъ этихъ лишнихъ перемѣнъ не могла произойти отъ корней дѣйствительныхъ, а между тѣмъ онѣ показываютъ присутствіе нѣкоторыхъ корней; — всѣ такіе корни должны быть мнимые.

Можетъ быть, положительный корень $a$ не откроетъ присутствія мнимыхъ корней; въ такомъ случаѣ введемъ въ $f(x)^m=0$ корень отрицательный, помноживъ на $x+a$. Въ произведеніи $f(x)^m(x+a)=0$ должно остаться столько же перемѣнъ $V$, сколько ихъ было въ данномъ уравненіи $f(x)^m=0$, если это послѣднее состояло изъ однихъ дѣйствительныхъ корней. Но, положимъ, что въ $f(x)^m(x+a)=0$ окажется только $V-k$ перемѣнъ, то есть, $k$ перемѣнами меньше; это покажетъ, что въ $f(x)^m(x+a)=0$, а слѣдовательно и въ $f(x)^m=0$ должно быть дѣйствительныхъ-положительныхъ корней менѣе $V$. Потеря $k$ перемѣнъ не могла произойти отъ корней дѣйствительныхъ, а только отъ мнимыхъ, которыхъ число должно быть не меньше $k$.

*Примѣръ*. Уравненіе

$$f(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+x-1=0,$$

въ которомъ находятся *пять перемѣнъ*, помножимъ на $x+a$; получится:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l} x^6-1 & x^5+1 & x^4-1 & x^3+1 & x^2-1 & x-a=0 \\ +a & -a & +a & -a & +a & \end{array}$$

Взявъ $a=1$, найдется $x^6-1=0$, гдѣ четыре перемѣны менѣе, чѣмъ въ $f(x)=0$. Слѣдовательно, это послѣднее имѣетъ четыре мнимые корня и одинъ дѣйствительный $=1$.

*Примѣръ*. Возмемъ еще уравненіе

$$f(x)=x^3+3x^2+12x+4=0,$$

гдѣ нѣтъ ни одной перемѣны, стало-быть, ни одного положительнаго корня, и помножимъ на $x-a$:

$$\begin{array}{r|r|r|l} x^4+3 & x^3+12 & x^2+4 & x-4a=0 \\ -a & -3a & -12a & \end{array}$$

Теперь, если взять $a>3$ и $<4$, то произведеніе получитъ три перемѣны, тогда какъ, отъ введенія положительняго корня, должна бы получиться только одна. Посему, $f(x)(x-3)=0$, такъ и $f(x)=0$ должна имѣть $3-1=2$ мнимые корня.

Къ тому же заключенію придемъ, взявъ $a=3$ (либо $a=4$): ибо тогда составится уравненіе:

$$x^4+3x^2-32x-12=0,$$

въ которомъ нѣтъ члена между двумя членами равныхъ знаковъ; а это признакъ, что оно, также и $f(x)=0$, имѣетъ два мнимые корня.

*Примѣръ.* Уравненіе

$$x^4-8x^3+15x^2+10x+150=0$$

помножимъ на $x\pm a$:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} x^5-8 & x^4+15 & x^3+10 & x^2+150 & x \\ \pm a & \mp 8a & \pm 15a & \pm 10a & \pm 150a=0. \end{array}$$

Возмемъ *нижній знакъ,* и дадимъ для $a$ такую величину, чтобы сдѣлалось $15a>10$, $10a<150$, напримѣръ, $a=1$; получится произведеніе:

$$x^5-9x^4+23x^3-5x^2+140x-150=0,$$

въ которомъ пять перемѣнъ, тогда какъ должно бы выйти только три. Двѣ лишнія перемѣны показываютъ присутствіе двухъ мнимыхъ корней.

**385.** Очевидно, что посредствомъ вводнаго дѣйствительнаго корня $\pm a$ можно въ произведеніи $f(x)^m(x\pm a)=0$ уничтожить какой угодно средній членъ: но, *для открытія присутствія мнимыхъ корней, надобно, чтобъ уничтожился какой нибудь членъ между членами равныхъ знаковъ*, то есть, чтобы коефиціенты смежныхъ членовъ были оба больше нуля, или меньше нуля.

Возмемъ произведеніе $f(x)^4(x\pm a)=0$ предыдущаго примѣра, *съ верхнимъ знакомъ* второй его строки; испытаемъ уничтожить второй его членъ, полагая $a=8$. Смежные коефиціенты можно взять только $1>0$, $15-8a>0$. Но послѣднее условіе не удовлетворяется, потому что $15-8a=15-64<0$; слѣдовательно, здѣсь уничтоженіе втораго члена не показываетъ ничего.

Испытаемъ уничтожить *пятый членъ,* полагая $10a+150=0$; откуда $a=-15$. Смежные коефиціенты $10+15a<0$, $150a<0$, показываютъ, что въ данномъ уравненіи есть пара мнимыхъ корней.

Это же получится и чрезъ уничтоженіе четвертаго члена, принимая *нижній знакъ:*

$$10-15a=0;\ \text{откуда}\ a=\frac{2}{3};$$

смежные коефиціенты $15+8a>0$, $150-10a>0$, оба положительные.

**386.** Если одинъ вводный корень не показываетъ присутствія мнимыхъ корней, то введемъ въ уравненіе два дѣйствительные корня, помноживъ оное на множитель $x^2\pm ax-b=0$, состоящій изъ дѣйствительныхъ корней. Коефиціенты $a$, $b$, какъ произвольные, надобно взять такими, чтобы въ произведеніи $f(x)^m(x^2\pm ax-b)=0$ уничтожились два члена сряду или какіе нибудь *два* члена, лишъ бы хотя одинъ между членами равныхъ знаковъ.

*Примѣръ.* Возмемъ уравненіе

$$x^4+2x^3+17x^2-20x+100=0,$$

и помножимъ на $x^2 \pm ax - b$; получится

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} x^6+2 & x^5+17 & x^4-20 & x^3+100 & x^2 \\ \pm a & \pm 2a & \pm 17a & \mp 20a & \pm 100a\;x \\ & -\;b & -\;2b & -17b & +\;20b\;-100b=0 \end{array}$$

Испытаемъ уничтожить второй и третій члены этого произведенія, взявъ *нижній знакъ* второй строки, и положивъ : $2-a=0$, $17-2a-b=0$; откуда $a=2$, $b=13$. Изъ этого видно, что множитель $x^2-ax-b=x^2-2x-13=0$ содержитъ въ себѣ два корня дѣйствительные, посредствомъ которыхъ уничтожаются два члена сряду. Посему, данное уравненіе имѣетъ мнимые корни. Коефиціенты смежныхъ членовъ:

$$1>0,\ -20-17a-2b<0,$$

явно съ противными знаками; слѣдовательно, уничтоженіемъ этихъ членовъ обличается одна пара мнимыхъ корней.

Испытаемъ теперь уничтожить пятый и шестой члены произведенія, взявъ *нижній знакъ*:

$$100+20a-17b=0,\ -100a+20b=0;$$

откуда $a=\frac{20}{13}$, $b=\frac{100}{13}$. Коефиціенты смежныхъ членовъ: $-100b<0$, $-20-17a-2b<0$, имѣютъ равные знаки; слѣдовательно, уравненіе имѣетъ 4 мнимые корня.

Испытаемъ еще уничтожить члены второй и шестой, полагая $a=2$, $20b=100a$, или $b=10$. Коефиціенты ближайшихъ членовъ ко второму: $1>0$, $17-2a-b=17-4-10>0$, оба положительные; а коефиціенты, ближайшіе къ члену шестому: $-100b<0$, $100+20a-17b=140-170<0$, оба отрицательные. Это также показываетъ, что данное уравненіе имѣетъ 4 мнимые корня.

*Примѣръ.* Чрезъ введеніе одного дѣйствительнаго корня, нельзя открыть присутствіе мнимыхъ корней въ уравненіи,

$$x^4-3x^3+6x^2-5x+3=0.$$

Помножимъ оное на $x^2 \pm ax - b=0$:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l} x^6-3 & x^5+6 & x^4-5 & x^3+3 & x^2 & \\ \pm a & \mp 3a & \pm 6a & \mp 5a & \pm 3a & x \\ & -b & +3b & -6b & +5b & -3b=0, \end{array}$$

и испытаемъ уничтожить члены второй и третій, принимая верхній знакъ:

$$-3+a=0,\ 6-3a-b=0;\ \text{откуда}$$

$$a=3,\ b=-3.$$

Коефиціенты смежныхъ членовъ:

$$1>0,\ -5+6a+3a=-5+18-9>0,$$

имѣютъ равные знаки; слѣдовательно, произведеніе имѣетъ четыре мнимые корня, изъ коихъ два принадлежатъ данному уравненію, а два другіе множителю $x^2+ax-b=x^2+3x+3=0$.

## Преобразованіе уравненій.

**387.** Оно состоитъ въ томъ, чтобъ, не разрѣшая даннаго уравненія, умѣть превратить его въ другое, котораго корни съ корнями даннаго уравненія имѣли бы желаемое отношеніе.

Такъ, мы знаемъ превращать всякое уравненіе $f(x)=0$ въ другое уравненіе $f(-x)=0$, котораго корни тѣ же, только съ противными знаками. Кромѣ этого случая, можно давать уравненію многія другія преобразованія: я ограничусь только тѣми изъ нихъ, которыя состоятъ въ измѣненіи корней уравненія чрезъ совокупленіе ихъ съ какимъ ни есть числомъ посредствомъ начальныхъ алгебрическихъ дѣйствій, каковы: сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. Всѣ эти преобразованія служатъ къ тому, чтобы посредствомъ ихъ можно было открывать признаки, доставляющіе намъ ближайшее понятіе о числѣ корней дѣйствительныхъ и мнимыхъ всякаго даннаго уравненія. Онѣ же понадобятся намъ, впослѣдствіи, для нахожденія предѣловъ, между которыми находятся всѣ корни уравненія, для отдѣленія ихъ частными предѣлами и для вычисленія корней.

А. *Данное уравненіе преобразовать въ другое, котораго бы корни были въ m разъ больше или меньше корней даннаго.*

Пусть данное уравненіе

$$x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0.$$

Возмемъ $x=\frac{1}{m}y$, и подставимъ; получится:

$$y^5+mAy^4+m^2By^3+m^3Cy^2+m^4Dy+m^5E=0,$$

уравненіе, котораго корни въ $m$ разъ болѣе корней даннаго, потому что здѣсь $y=mx$.

А если въ данное уравненіе подставить $x=my$, то получится:

$$m^5y^5+Am^4y^4+Bm^3y^3+Cm^2y^2+Dmy+E=0, \text{ или}$$

$$y^5+\frac{A}{m}y^4+\frac{B}{m^2}y^3+\frac{C}{m^3}y^2+\frac{D}{m^4}y+\frac{E}{m^5}=0,$$

уравненіе, котораго корни въ $m$ *разъ менѣе* корней того даннаго; потому что здѣсь $y=\frac{x}{m}$.

Это преобразованіе можно иногда употреблять для открытія присутствія дѣйствительныхъ корней въ уравненіяхъ. Наприм., въ уравненіи

$$x^4-15x^3+20x^2+30x+60=0,$$

ни изъ чего не видно, что есть дѣйствительные корни; но стоитъ только уменьшить его корни въ 5, или 10 разъ, полагая $x=my=10y$, то получится

$$y^4-1,5y^3+0,2y^2+0,03y+0,006=0$$

уравненіе, въ которомъ сумма коефиціентовъ положительныхъ 1,236 менѣе отрицательнаго коефиціента 1,5. Слѣдовательно, $f(y)=0$ и $f(x)=0$ имѣютъ по два корня дѣйствительныхъ. Остальные же два корня мнимые, въ чемъ легко увѣриться, введя въ $f(x)=0$ множитель $x-a$, и положивъ $a=2$.

B. *Изъ даннаго уравненія исключить дробные коефиціенты, чрезъ увеличеніе его корней.*

Для этого надобно найти общій знаменатель Q всѣхъ дробныхъ коефиціентовъ даннаго уравненія $f(x)=0$, и положить $x=\frac{1}{Q}\cdot y$; получится новое уравненіе $f(y)=0$, въ которомъ не будетъ ни одного дробнаго коефиціента.

Пусть данное уравненіе

$$x^4+\frac{a}{p}x^3+\frac{b}{q}x^2+\frac{c}{r}x+\frac{d}{s}=0.$$

Общій знаменатель дробныхъ коефиціентовъ $Q=pqrs$. Возмемъ $x=\frac{y}{pqrs}$, подставимъ въ уравненіе, и получится

$$y^4+aqrsy^3+bp^2qr^2s^2y^2+cp^3q^3r^2s^3y+dp^4q^4r^4s^3=0,$$

уравненіе, въ которомъ нѣтъ дробей.

*Примѣръ.* $$x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}=0.$$

Здѣсь общій знаменатель дробей $Q=6$; посему, взявъ $x=\frac{1}{6}y$, найдемъ уравненіе

$$y^3-4y^2+18y-180=0,$$

въ которомъ нѣтъ дробей; его корни въ 6 разъ болѣе корней даннаго.

C. *Данное уравненіе преобразовать въ другое, такъ чтобы коефиціенты двухъ членовъ сдѣлались равными, или получили бы между собою данное отношеніе.*

Пусть дано уравненіе

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

Возмемъ $x=\frac{1}{m}.y$; получится

$$f(y)=y^4+amy^3+bm^2y^2+cm^3y+dm^4=0.$$

Поелику $m$ произвольно, то и можно всегда взять его такимъ, чтобы два коефиціента сдѣлались равными, или получили бы данное отношеніе. Для этого надобно ихъ сравнить, изъ равенства найти $m$, и подставить въ $f(y)=0$, то и получится желаемое преобразованіе.

Такимъ образомъ, для равенства коефиціентовъ перваго и втораго, надобно взять $1=am$, откуда $m=\frac{1}{a}$; для равенства коефиціентовъ перваго съ третьимъ, надобно взять $1=bm^2$, откуда $m=\frac{1}{\sqrt{b}}$: для равенства перваго съ четвертымъ, $1=cm^3$, откуда $m=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$, и т. д.; а для равенства коефиціентовъ втораго и четвертаго, $am=cm^3$, откуда $m=\sqrt{\frac{a}{c}}$. И дѣйствительно, если взять $x=y\sqrt{\frac{a}{c}}$, подставить въ данное уравненіе, то получится уравненіе

$$y^4+a\sqrt{\frac{a}{c}}.y^3+\frac{ab}{c}.y^2+a\sqrt{\frac{a}{c}}.y+\frac{da^2}{c^2}=0,$$

въ которомъ коефиціенты 2-го и 4-го членовъ равны.

Но, положимъ, что это же уравненіе надобно преобразовать въ другое, въ которомъ бы коефиціенты втораго и четвертаго членовъ получили между собою отношеніе 2 : 3; тогда надобно составить пропорцію,

$$am : cm^3 = 2 : 3;\ \text{отсюда найти}$$

$$m = \sqrt{\frac{3a}{2c}}.$$

Это число и надобно подставить въ $f(y) = 0$, чтобъ получить желаемое преобразованіе.

Число $m$, посредствомъ котораго уравненіе $f(y) = 0$ получаетъ тотъ или другой видъ, будемъ впередъ называть *числомъ преобразовательнымъ*.

Если преобразовать данное уравненіе такъ, *чтобы коефиціентъ перваго члена, и коефиціентъ члена, дающій наибольшее преобразовательное число m, обратились въ единицы, то коефиціенты всѣхъ прочихъ членовъ сдѣлаются дробями, меньшими единицы.*

Пусть данное уравненіе

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Для сравненія коефиціента перваго со вторымъ, либо третьимъ, либо четвертымъ, и т. д., надобно брать преобразовательныя числа, соотвѣтственно:

$$a,\ \sqrt{b},\ \sqrt[3]{c},\ \sqrt[4]{d}, \ldots$$

Положимъ, что изъ этихъ чиселъ самое большое $\sqrt{b}$. Возмемъ $x = y\sqrt{b}$, и подставимъ въ уравненіе; найдется

$$y^4 + \frac{a}{\sqrt{b}} y^3 + y^2 + \frac{c}{b\sqrt{b}} \cdot y + \frac{d}{b^2} = 0,$$

уравненіе, въ которомъ коефиціенты перваго и третьяго членовъ единицы; а прочіе коефиціенты—правильныя дроби. Въ самомъ дѣлѣ,

$$a < \sqrt{b},\ \text{а потому}\ \frac{a}{\sqrt{b}} < 1;$$

$$\sqrt[3]{c} < \sqrt{b},\ \text{или}\ c < b\sqrt{b},\ \text{а потому}\ \frac{c}{b\sqrt{b}} < 1;$$

$$\sqrt[4]{d} < \sqrt{b},\ \text{или}\ d < b^2,\ \text{а потому}\ \frac{d}{b^2} < 1.$$

D. *Данное уравненіе $f(x) = 0$ преобразовать въ другое, котораго бы корни были квадратами корней перваго.*

Это преобразованіе можно сдѣлать чрезъ одно перемноженіе даннаго уравненія $f(x) = 0$ на его $f(-x) = 0$. Ибо, если

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots = 0,\ \text{то}$$

$$f(-x) = (x + a)(x + b)(x + c) \ldots = 0;$$

$$f(x)f(-x) = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) \ldots = 0.$$

Послѣднее уравненіе имѣетъ степень вдвое выше степени даннаго; члены его содержатъ однѣ чётныя степени $x$.

Теперь положимъ $x^2=z$; то и получится

$$f(z)=(z-a^2)(z-b^2)(z-c^2)\ldots=0,$$

уравненіе, котораго корни $a^2$, $b^2$, $c^2$,..... суть квадраты корней $a$, $b$, $c$,..... даннаго $f(x)=0$.

Есть много уравненій, въ которыхъ это преобразованіе открываетъ мнимые корни. Въ уравненіи $f(x)f(-x)=0$ могутъ быть *только положительные дѣйствительные корни, и корни мнимые*; оттого, если окажутся въ немъ повторенія знаковъ, то онѣ единственно будутъ зависѣть отъ присутствія мнимыхъ корней.

*Примѣръ.*

$$f(x)=x^4-3x^3+6x^2-5x-3=0,$$
$$f(-x)=x^4+3x^3+6x^2+5x-3=0;$$
$$f(x)f(-x)=x^8+3x^6-61x^2+9=0.$$

Въ послѣднемъ уравненіи уничтожился второй членъ между членами равныхъ знаковъ; сверхъ того, уничтожились три члена сряду между $3x^6$ и $-61x^2$; слѣдовательно въ немъ находится двѣ пары мнимыхъ корней, изъ коихъ одна принадлежитъ данному уравненію $f(x)=0$, а другая для $f(-x)=0$.

*Примѣръ.*

$$x^4+2x^3+17x^2-20x+100=0=f(x),$$
$$f(-x)=x^4-2x^3+17x^2+20x+100=0;$$
$$f(x)f(-x)=x^8+30x^6+596x^4+3000x^2+10000=0.$$

Въ послѣднемъ уравненіи уничтожились четыре члена, каждый между членами равныхъ знаковъ; слѣдовательно въ немъ находится четыре пары мнимыхъ корней, изъ которыхъ двѣ пары принадлежатъ данному уравненію.

Рѣдко однако же можно пользоваться этимъ способомъ, безъ другихъ вспомогательныхъ преобразованій. Присутствіе корней дѣйствительныхъ часто скрываетъ признаки корней мнимыхъ.

E. *По данному уравненію $f(x)=0$, составить другое, котораго бы корни имѣли величины $\frac{1}{x}$, обратныя корнямъ того даннаго.*

Для этого надобно въ $f(x)=0$ подставить $\frac{1}{x}$ вмѣсто $x$, и полученное уравненіе $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ привесть въ простѣйшій видъ.

Пусть дано уравненіе $f(x)=x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$, котораго корни $a$, $b$, $c$, $d$, и гдѣ $A=-(a+b+c+d)$, $B=ab+ac+ad+bc+bd+cd$, $C=-(abc+abd+acd+bcd)$, $D=abcd$. Взявъ $\frac{1}{x}$ вмѣсто $x$, найдется:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=Dx^4+Cx^3+Bx^2+Ax+1=0, \text{ или}$$
$$x^4+\frac{C}{D}x^3+\frac{B}{D}x^2+\frac{A}{D}x+\frac{1}{D}=0.$$

Это и есть искомое уравненіе. Въ самомъ дѣлѣ, въ немъ

$$\frac{C}{D}=-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),\ \frac{B}{D}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd},$$
$$\frac{A}{D}=-\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{bcd}\right),\ \frac{1}{D}=\frac{1}{abcd}.$$

Очевидно, обратное уравненіе $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ имѣетъ столько же корней дѣйствительныхъ и мнимыхъ, сколько ихъ находится въ данномъ $f(x)=0$.

Обратное уравненіе во многихъ затруднительныхъ случаяхъ служитъ для отличія корней дѣйствительныхъ отъ мнимыхъ, и на оборотъ.

*Примѣръ.* Уравненіе $f(x)=x^3-7x+7=0$ имѣетъ одинъ корень отрицательный и два неизвѣстные корня. Чтобъ узнать ка[illegible]е они, возмемъ

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=7x^3-7x+1=0, \text{ или}$$

$$x^3-x+\frac{1}{7}=0,$$

и подставимъ $x=\frac{1}{2}$; найдется $\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ результатъ отрицательный. А если взять $x=0$ или $1$, то выйдетъ результатъ $+\frac{1}{7}$. И такъ, это уравненіе, кромѣ отрицательнаго корня, имѣетъ еще два дѣйствительные корня, одинъ между $x=0$ и $\frac{1}{2}$, другой между $\frac{1}{2}$ и $1$. Слѣдовательно и данное уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ всѣ корни дѣйствительные.

*Уравненіе возвратное.* Если помножить $f(x)=0$ на $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$, то составится уравненіе $f(x).f\left(\frac{1}{x}\right)=0$, въ которомъ для каждаго корня $x$ находится обратный ему корень $\frac{1}{x}$.

*Примѣръ.* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$;

обратное уравненіе $f\left(\frac{1}{x}\right)=dx^3+cx^2+bx+a=0$;

искомое уравненіе $f(x).f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ найдется

$$adx^6+(ac+bd)x^5+(ab+bc+cd)x^4+(a^2+b^2+c^2+d^2)x^3+$$
$$+(ab+bc+cd)x^2+(ac+bd)x+ad=0.$$

Оно отличается тѣмъ, что коефиціенты членовъ, равно отстоящіе отъ перваго и послѣдняго, равны между собою. Такія уравненія называются *возвратными,* потому что коефиціенты первой половины такого уравненія возвращаются обратнымъ порядкомъ во второй его половинѣ. Тѣмъ же

F. *Данное уравненіе преобразовать въ другое, котораго бы корни были числомъ h менѣе или болѣе корней даннаго.*

Пусть это уравненіе:

$$f(x)=C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-2}x^2+C_{n-1}x+C_n=0$$

или,

$$x^n+\frac{C_1}{C_0}x^{n-1}+\frac{C_2}{C_0}x^{n-2}+\ldots+\frac{C_{n-2}}{C_0}x^2+\frac{C_{n-1}}{C_0}x+\frac{C_n}{C_0}=0$$

или,

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Sx^2+Tx+U=0,$$

полагая $\frac{C_1}{C_0}=A$, $\frac{C_2}{C_0}=B, \ldots \frac{C_{n-1}}{C_0}=T$, $\frac{C_n}{C_0}=U$.

Въ это уравненіе подставимъ $x=h+y$:

$$(h+y)^n+A(h+y)^{n-1}+B(h+y)^{n-2}+\ldots\ldots+T(h+y)+U=0;$$

разложимъ всѣ степени двучлена $h+y$ въ ряды (**231**), и все уравненіе расположимъ по возрастающимъ степенямъ $y$:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
h^n+ \qquad nh^{n-1} & y+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}.\,h^{n-2} & y^2+\ldots+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}h^2 & y^{n-2}+nh & y^{n-1}+y^n \\
+Ah^{n-1}+(n-1)Ah^{n-2} & +\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}Ah^{n-2} & +\ldots+(n-1)Ah & +A & \\
+Bh^{n-2}+(n-2)Bh^{n-3} & +\frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}Bh^{n-3} & +\ldots+ \qquad B & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
+Th \quad + \qquad T & & & & \\
+U. & & & &
\end{array}$$

Коефиціенты при $y$, $y^2$,.... суть не что иное, какъ производные многочлены (**338**) изъ даннаго уравненія, въ которыхъ $x$ замѣненъ буквою $h$.

Для сокращеннаго ихъ выраженія, назовемъ:

$$\theta=h^n+Ah^{n-1}+Bh^{n-2}+\ldots+Th+U,$$

$$\theta_1=nh^{n-1}+(n-1)Ah^{n-2}+(n-2(Bh^{n-3}+\ldots,$$

$$\theta_2=\frac{n(n-1)h^{n-2}+(n-1)(n-2)Ah^{n-3}+\ldots}{1.2}$$

..................................................

$$\theta_{n-2}=\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}h^2+(n-1)Ah+B,$$

$$\theta_{n-1}=nh+A,$$

$$\theta_n=1.$$

Отъ этого преобразованное уравненіе приметъ видъ:

$$\theta+\theta_1y+\vartheta_2y^2+\theta_3y^3+\ldots+\vartheta_{n-2}y^{n-2}+\theta_{n-1}y^{n-1}+y^n=0,$$

или:

$$y^n+\theta_{n-1}y^{n-1}+\vartheta_{n-2}y^{n-2}+\ldots+\vartheta_3y^3+\theta_2y^2+\theta_1y+\vartheta=0.$$

Корни этого уравненія *менѣе корней даннаго* числомъ $h$; потому что равенство $x=h+y$ даетъ $y=x-h$. Слѣдовательно, если $a$, $b$, $c$,.... корни даннаго уравненія $f(x)=0$, то $a-h$, $b-h$, $c-h$,..... будутъ корнями для $f(y)=0$, такъ что

$$\theta_{n-1}=-(a-h)-(b-h)-(c-h)-\ldots$$

$$\theta_{n-2}=(a-h)(b-h)+(a-h)c-h)+\ldots\ldots$$

..................................................

Если взять $h$ съ противнымъ знакомъ, полагая $x=y-h$, то получили бы уравненіе, котораго корни $y=x+h$ *болѣе корней даннаго* числомъ $h$.

Отъ этого преобразованія не измѣняется число мнимыхъ корней въ уравненіи; но, перемѣняя величину $h$, можно всѣ положительные корни, одинъ послѣ другаго, измѣнить въ отрицательные, или наоборотъ.

*Примѣръ.* Данное уравненіе,

$$f(x)=2x^3+3x^2-4x-5=0,$$

преобразовать въ другое, котораго бы корни были *двумя единицами* болѣе корней даннаго. Здѣсь надобно взять $y=x+2$, откуда $x=y-2$, слѣдовательно $h=-2$. Искомымъ уравненіемъ будетъ:

$$\theta_3 y^3+\theta_2 y^2+\theta_1 y+\theta=0.$$

Но, $\theta=2h^3+3h^2-4h-5=-16+12+8-5=-1$,

$\theta_1=6h^2+6h-4=24-12-4=8$,

$\theta_2=6h+3=-12+3=-9$,

$\theta_3=2$.

Сдѣлавъ подстановленіе, получимъ уравненіе:

$$2y^3-9y^2+8y-1=0.$$

Оно удовлетворяется корнемъ $=1$; стало-быть, $x=y-2=1-2=-1$ есть корень даннаго уравненія.

G. *Изъ даннаго уравненія исключить второй членъ, то есть, преобразовать это уравненіе въ другое, въ которомъ бы не было втораго члена.*

Въ данное уравненіе $f(x)^n=0$ подставимъ $x=h+y$; получится

$$\theta_n y^n+\theta_{n-1}y^{n-1}+\theta_{n-2}y^{n-2}+\ldots+\theta_3 y^3+\theta_2 y^2+\theta_1 y+\theta=0,$$

гдѣ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$,.... суть функціи отъ $h$.

Послѣ сего, положимъ $\theta_{n-1}=nh+A=0$; отсюда найдется:

$$h=-\frac{1}{n}A.$$

Слѣдовательно, надобно взять $x=h+y=y-\frac{1}{n}A$, чтобъ получить преобразованное уравненіе $f(h+y)=0$, безъ втораго члена.

И такъ, *для исключенія 2-го члена изъ уравненія $f(x)=0$, надобно вмѣсто $x$ взять другую неизвѣстную $y$, придать къ ней коефиціентъ втораго члена, взятый съ противнымъ знакомъ и раздѣленный на показатель степени уравненія.*

*Примѣръ.* Исключить второй членъ изъ уравненія:

$$x^3-6x^2+4x-5=0.$$

Беру $-\frac{6}{3}$, и съ противнымъ знакомъ придаю къ новой неизвѣстной $y$; получаю $x=2+y$. Это вношу въ данное уравненіе; отъ чего оно получитъ видъ:

$$\theta_3 y^3+\theta_2 y^2+\theta_1 y+\theta=0.$$

Составляю: $\theta=h^3-6h^2+4h-5=8-24+8-5=-13$,

$\theta_1=3h^2-12h+4=12-24+4=-8$,

$\theta_2=3h-6=0$, $\theta_3=1$.

Сдѣлавъ подстановленіе, получаю

$$y^3-8y+13=0,$$

уравненіе безъ втораго члена.

*Примѣръ.* Исключить второй членъ изъ уравненія

$$3x^3+15x^2+25x-3=0.$$

Сперва освободимъ первый членъ отъ коефиціента 3, раздѣливъ на 3 все уравненіе:

$$x^3+5x^2+\frac{25}{3}x-1=0;$$

потомъ возмемъ $x=-\frac{5}{3}+y$, полагая $h=-\frac{5}{3}$, и, сдѣлавъ все вычисленіе, какъ было показано, получимъ

$$3y^3-\frac{152}{9}=0,$$

уравненіе, въ которомъ исключились два члена сряду. Слѣдовательно въ немъ, какъ и въ данномъ уравненіи, находятся мнимые корни. Дѣйствительный корень получится

$$y=\frac{\sqrt[3]{152}}{3},$$

$$x=\frac{-5}{3}+y=\frac{-5+\sqrt[3]{152}}{3}.$$

**388.** *Признаки мнимыхъ корней.* 1) Очевидно, что, если, при уничтоженіи 2-го члена уравненія, уничтожится коефиціентъ 3-го члена, или обратится въ результатъ положительный, то $f(h+x)=0$, а слѣдовательно и $f(x)=0$ будетъ имѣть хотя одну пару мнимыхъ корней. По этому, данное уравненіе имѣетъ мнимые корни, когда, въ одно время, будетъ:

$$nh+A=0, \text{ и}$$

$$\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}h^2+(n-1)Ah+B\not<0,$$

Изъ перваго условія возмемъ $h=-\frac{1}{n}A$, и подставимъ во второе, получится:

$$\left(\frac{n-1}{2n}\right)A^2-\left(\frac{n-1}{n}\right)A^2+B\not<0, \text{ или}$$

$$B\not<\frac{n-1}{2n}A^2.$$

Но, въ общемъ уравненіи,

$$C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-2}x^2+C_{n-1}x+C_n=0,$$

мы взяли $\frac{C_1}{C_0}=A$, $\frac{C_2}{C_0}=B,\ldots$; слѣдовательно условіе мнимости корней, въ самомъ общемъ видѣ, будетъ

$$\frac{C_2}{C_0}\not<\frac{n-1}{2n}\,.\,\frac{C_1^2}{C_0^2}, \text{ или}$$

$$(\alpha)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C_0\,C_2\not<\frac{n-1}{2n}\,.\,C_1^2$$

И такъ, *если произведенiе коефицiентовъ перваго и третьяго членовъ не менѣе квадрата коефицiента члена промежуточнаго, помноженнаго на* $\frac{n-1}{2n}$, *то въ уравненiи находятся мнимые корни.*

2) Изъ общаго уравненiя $f(x)=0$ составимъ обратное $f(\frac{1}{x})=0$:

$$C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + C_{n-2} x^{n-2} + \ldots + C_2 x^2 + C_1 x + C_0 = 0.$$

Оно, а слѣдовательно и $f(x)=0$ будетъ имѣть мнимые корни, если найдется въ немъ условiе

$$(\beta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C_n\, C_{n-2} \nless \frac{n-1}{2n} \,.\, C_{n-1}^2.$$

Изъ этого видно, что присутствiе мнимыхъ корней можно искать по условiю ($\alpha$) изъ трехъ первыхъ членовъ даннаго уравненiя, или по условiю ($\beta$) изъ трехъ его членовъ послѣднихъ.

Поелику условiе присутствiя мнимыхъ корней зависитъ отъ трехъ первыхъ, или трехъ послѣднихъ коефицiентовъ, то мнимость не можетъ уничтожиться отъ перемѣны степени $n$ уравненiя, отъ числа прочихъ его членовъ, и отъ всякихъ измѣненiй величины ихъ коефицiентовъ.

3) Отъ подстановленiя $x=h+y$ въ общее уравненiе $f(x)=0$ оно превращается въ

$$\theta_n y^n + \theta_{n-1} y^{n-1} + \theta_{n-2} y^{n-2} + \ldots + \theta_2 y^2 + \theta_1 y + \theta = 0,$$

уравненiе, котораго корни $y=x-h$, а коефицiенты $\theta_{n-1}$, $\theta_{n-2}$,.... суть функцiи отъ $h$, потому что состоятъ изъ извѣстнаго (стр. 359) совокупленiя двучленовъ $a-h$, $b-h$, $c-h$,...., гдѣ $a$, $b$, $c$,... корни даннаго уравненiя. Слѣдовательно, о присутствiи мнимыхъ корней въ $f(x)=0$ можно заключать изъ присутствiя таковыхъ же корней въ уравненiяхъ $\theta=0$, $\theta_1=0$, $\theta_2=0$,..., составленныхъ изъ $\theta$ и его производныхъ, а это все тоже, что изъ $f(x)=0$ и его производныхъ. Но, какъ всѣ эти уравненiя начинаются тѣми же тремя коефицiентами $C_0$, $C_1$, $C_2$, и одинакимъ образомъ производятся послѣдующiя изъ предыдущихъ; то во всѣхъ ихъ условiе мнимости остается одно и тоже $C_0\, C_2 \nless \frac{n-1}{2n} C_1^2$.

**389.** Другое дѣло, если изъ этихъ уравненiй составить ихъ обратныя $f(\frac{1}{x})^n=0$, $f_1(\frac{1}{x})^{n-1}=0$, $f_2(\frac{1}{x})^{n-2}$,..... Тутъ условiя мнимости корней будутъ другiя; потому что, съ переходомъ отъ $f(\frac{1}{x})$ къ $f_1(\frac{1}{x})$, $f_2(\frac{1}{x})$,..., теряются послѣдовательно коефицiенты $C_n$, $C_{n-1}$,..., и условiя мнимости переносятся сперва на $C_{n-1}$, $C_{n-2}$, $C_{n-3}$, потомъ на $C_{n-2}$, $C_{n-3}$, $C_{n-4}$,..., и т. д. по особенному весьма простому закону, какъ видно изъ слѣдующаго:

Данное уравненiе

$$f(x)^n = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + C_{n-4} x^4 + C_{n-3} x^3 + C_{n-2} x^2 + C_{n-1} x + C_n = 0;$$

его производныя:

$$f_1(x)^{n-1}=nC_0x^{n-1}+(n-1)C_1x^{n-2}+\ldots+4C_{n-4}x^3+3C_{n-3}x^2+2C_{n-2}x+C_{n-1},$$

$$f_2(x)^{n-2}=n(n-1)C_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)C_1x^{n-3}+\ldots+3.4.C_{n-4}x^2+2.3.C_{n-3}x+2C_{n-2},$$

$$f_3(x)^{n-3}=n(n-1)(n-2)C_0x^{n-3}+\ldots+3.4.5C_{n-5}x^2+2.3.4C_{n-4}x+1.2.3C_{n-3},$$

……………………………………………………………

Принявъ эти производныя *за уравненія*, составимъ ихъ уравненія обратныя:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)^n=C_nx^n+C_{n-1}x^{n-1}+C_{n-2}x^{n-2}+C_{n-3}x^{n-3}+C_{n-4}+^{n-4}+\ldots+C_1x+C_0=0,$$

$$f_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}=C_{n-1}x^{n-1}+2C_{n-2}x^{n-2}+3C_{n-3}x^{n-3}+4C_{n-4}x^{n-4}+\ldots+nC_0=0,$$

$$f_2\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2}=1.2C_{n-2}x^{n-2}+2.3C_{n-3}x^{n-3}+3.4C_{n-4}x^{n-4}+\ldots+n(n-1)C_0=0,$$

$$f_3\left(\frac{1}{x}\right)^{n-3}=1.2.3C_{n-3}x^{n-3}+2.3.4C_{n-4}x^{n-4}+3.4.5C_{n-5}x^{n-5}+\ldots=0.$$

……………………………………………………………

Изъ этихъ уравненій найлутся слѣдующія условія, между коефиціентами даннаго уравненія, показывающія въ немъ присутствіе корней мнимыхъ:

Изъ $f\left(\frac{1}{x}\right)^n=0,\quad C_nC_{n-2}\not<\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n}.C^2_{n-1}$;

изъ $f_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}=0,\quad C_{n-1}.C_{n-3}\not<\frac{2}{3}\cdot\frac{n-2}{n-1}.C^2_{n-2}$;

изъ $f_2\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2}=0,\quad C_{n-2}.C_{n-4}\not<\frac{3}{4}\cdot\frac{n-3}{n-2}.C^2_{n-3}$;

изъ $f_3\left(\frac{1}{x}\right)^{n-3}=0,\quad C_{n-3}.C_{n-5}\not<\frac{4}{5}\cdot\frac{n-4}{n-3}.C^2_{n-4}$;

и такъ далѣе. (Здѣсь коефиціенты $C_n$, $C_{n-1}$, $C_{n-3}$,…. $C_1$, $C_0$, берутся съ ихъ знаками, а коефиціенты недостающихъ членовъ замѣщаются нулями).

Если хотя одно изъ этихъ условій удовлетворяется, то данное уравненіе содержитъ мнимые корни. Этимъ однако же не опредѣляется дѣйствительное число мнимыхъ корней, хотя бы выполнились всѣ послѣдовательныя условія. Но, должно замѣтить, что *если найденныя условія мнимости будутъ раздѣлены условіями противными, то число паръ мнимыхъ корней откроется столько, сколько будетъ находиться группъ первыхъ изъ нихъ*. Положимъ, что въ какомъ нибудь уравненіи найдется рядъ условій

$$+-++--++,$$

(знаки + показываютъ условія мнимости, а знаки — условія противныя), гдѣ три группы условій для корней мнимыхъ раздѣлены условіями противными; то должно заключить, что въ немъ находится не менѣе трехъ паръ мимыхъ корней.

**390.** Въ доказательство этого послѣдняго заключенія, возмемъ уравненіе какой ни есть чётной степени, наприм. шестой:

$$(x^2+a)(x^2+b)(x^2+c)=x^6+(a+b+c)x^4+(ab+ac+bc)x^2+abc=0,$$

въ которомъ всѣ корни мнимые, вида $\pm\sqrt{-\alpha}$, всѣ члены положительные, и нѣтъ членовъ съ нечётными степенями $x$; назовемъ эти недостающіе члены $0.x^5$, $0.x^3$, $0.x$; откроется пять условій:

$$a+b+c>0,\ \ 0<(a+b+c)^2.\frac{8}{15},\ \ (a+b+c)(ab+ac+bc)>0,$$

$$0<\frac{8}{15}(ab+ac+bc)^2,\ \ ab+ac+bc)>0,$$

изъ коихъ три условія мнимости раздѣлены противными условіями только потому, что здѣсь три пары мнимыхъ корней, вида $\pm\sqrt{-\alpha}$.

Это же послѣдованіе условій будетъ находиться и въ уравненіи

$$(x^2+ax+\mathrm{A})(x^2+bx+\mathrm{B})(x^2+cx+\mathrm{C})=0,$$

если его трichленные множители всѣ имѣютъ мнимые корни, и если при томъ $a$, $b$, $c$, будутъ достаточно малы сравнительно съ A, B, C.

Такъ, въ уравненіи

$$(x^2+ax+\mathrm{A})(x^2+bx+\mathrm{B})=x^4+(a+b)x^3+(\mathrm{A}+\mathrm{B}+ab)x^2+(\mathrm{A}b+a\mathrm{B})x+ \\ +\mathrm{AB}=0$$

будутъ условія:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathrm{A}+\mathrm{B}+ab)>\frac{3}{8}.(a+b)^2,\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a+b)(\mathrm{A}b+a\mathrm{B})<\frac{4}{9}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+ab)^2, \\ \mathrm{AB}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+ab)>\frac{3}{8}(\mathrm{A}b+a\mathrm{B})^2 \end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{если } a,\ b,\text{ довольно} \\ \text{малы относительно} \\ \mathrm{A},\ \mathrm{B}.\end{array}$$

Назовемъ, для краткости, $a+b=\alpha$, $\mathrm{A}+\mathrm{B}+ab=\mathrm{M}$, $\mathrm{A}b+a\mathrm{B}=\beta$, $\mathrm{AB}=\mathrm{N}$, получится:

$$\begin{array}{lllllll} x^4+\alpha x^3+\mathrm{M}x^2+\beta x+\mathrm{N}=0;\ \text{и это помножимъ} \\ \text{на } x^2+px+\mathrm{P} \\ \hline x^6 & +\alpha x^5 & +\mathrm{M}x^4 & +\beta x^3 & +\mathrm{N}x^2 & & \\ & +p & +\alpha p & +\mathrm{M}p & +\beta p & +\mathrm{N}px & \\ & & +\mathrm{P} & +\alpha\mathrm{P} & +\mathrm{MP} & +\beta\mathrm{P} & +\mathrm{NP}. \end{array}$$

Взявъ $\alpha$, $\beta$, $p$, довольно малыми въ сравненіи съ M, N, P, получатся также условія мнимости:

$$(\mathrm{M}+\mathrm{P}+\alpha p)>\frac{5}{12}(\alpha+p)^2,\ (\alpha+p)(\beta+\mathrm{M}p+\alpha\mathrm{P})<\frac{8}{15}(\mathrm{M}+\mathrm{P}+\alpha p)^2,$$

$$(\mathrm{M}+\mathrm{P}+\alpha p)(\mathrm{N}+\mathrm{MP}+\beta p)>\frac{9}{16}(\beta+\mathrm{M}p+\alpha\mathrm{P})^2,$$

$$(\beta+\mathrm{M}p+\alpha\mathrm{P})(\mathrm{N}p+\beta\mathrm{P})<\frac{8}{15}(\mathrm{N}+\mathrm{MP}+\beta p)^2,$$

$$(\mathrm{N}+\mathrm{MP}+\beta p)\mathrm{NP}>\frac{5}{12}(\mathrm{N}p+\beta\mathrm{P})^2,$$

раздѣленныя условіями противными, какъ и въ первомъ примѣрѣ. Онѣ существенно зависятъ отъ мнимыхъ корней, и, бывъ раздѣлены на три группы, показываютъ присутствіе трехъ паръ этихъ корней.

Если же $\alpha$, $\beta$, $p$, не будутъ достаточно малы, то условія мнимости корней могутъ послѣдовать въ иномъ порядкѣ, раздѣлиться на меньшее число группъ условіями противными, и покажутъ меньшее число паръ мнимыхъ корней. Напримѣръ, въ уравненіи 4-й степени могутъ иногда всѣ три условія, сряду взятыя, показывать мнимость; но, составляя одну группу, онѣ показываютъ только, что въ немъ находится по крайней мѣрѣ одна пара мнимыхъ корней.

Особливо порядокъ попеременнаго послѣдованія разнородныхъ условій измѣняется въ уравненіи отъ присутствія въ немъ корней дѣйствительныхъ, отъ которыхъ часто условія мнимости совсѣмъ исчезаютъ. Напримѣръ, въ уравненіи:

$$x^4+a^2x^2+a^4=0,$$

условія: $a^2>0$, $0<\frac{3}{8}a^4$, $a^6>0$, показываютъ присутствіе двухъ паръ мнимыхъ корней; но, введите въ него положительный корень $a$, помноживъ на $x-a$, получится уравненіе:

$$x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5=0,$$

въ которомъ всѣ условія мнимости удовлетворяются:

$$a^2>\frac{2}{5}a^2,\ a^4>\frac{1}{2}a^4,\ a^6>\frac{1}{2}a^6,\ a^8>\frac{2}{5}a^8,$$

и показываютъ только, что въ этомъ уравненіи есть хотя одна пара мнимыхъ корней.

А въ уравненіи $x^3+0.x^2-bx+c=0$, гдѣ $\frac{c^2}{4}>\frac{b^3}{27}$, и гдѣ, слѣдовательно, одинъ корень дѣйствительный, а два мнимые (**186**), вовсе нѣтъ условій мнимости, о которыхъ идетъ рѣчь, потому что,

$$-b.1<\frac{1}{3}.0,\ 0.c<\frac{1}{3}b^2.$$

**391.** Вычисляя дроби:

$\frac{1}{2}.\frac{n-1}{n}$, $\frac{2}{3}.\frac{n-2}{n-1}$, $\frac{3}{4}.\frac{n-3}{n-2}$, $\frac{4}{5}.\frac{n-4}{n-3}$, $\frac{5}{6}.\frac{n-5}{n-4}$,.... для уравненій III, IV, V, VI,.... степеней, найдемъ:

для III, $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$;

IV, $\frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{3}{8}$;

V, $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$;

VI, $\frac{5}{12}, \frac{8}{15}, \frac{9}{16}, \frac{8}{15}, \frac{5}{12}$;

VII, $\frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{5}{9}, \frac{3}{7}$;

VIII, $\frac{7}{16}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{16}{25}, \frac{5}{8}, \frac{4}{7}, \frac{7}{16}$;

IX, $\frac{4}{9}, \frac{7}{12}, \frac{9}{14}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{9}{14}, \frac{7}{12}, \frac{4}{9}$;

X, $\frac{9}{20}, \frac{16}{27}, \frac{21}{32}, \frac{24}{35}, \frac{25}{36}, \frac{24}{35}, \frac{21}{32}, \frac{16}{27}, \frac{9}{20}$.

Для розысканія условій мнимости корней въ данномъ уравненіи, надобно взять рядъ дробей, соотвѣтственныхъ его степени $n$, написать ихъ, по порядку, надъ вторымъ, третьимъ, и т. д. членами уравненія, и потомъ искать всѣ тѣ условія, какъ видно изъ слѣдующихъ примѣровъ.

*Примѣръ*. Написавъ дроби $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{9}$ и $\frac{3}{8}$, надъ вторымъ, третьимъ и четвертымъ членами уравненія:

$$x^4\overset{\frac{3}{8}}{-}3x^3\overset{\frac{4}{9}}{+}6x^2\overset{\frac{3}{8}}{-}5x+3=0,$$

находимъ: $1.6>\frac{3}{8}.9,\ \ 3.5<\frac{4}{9}.36,\ \ 6.3>\frac{3}{8}.25.$

Здѣсь два условія мнимости раздѣлены условіемъ противнымъ; слѣдовательно, уравненіе имѣетъ двѣ пары мнимыхъ корней.

*Примѣръ*. Въ уравненіи:

$$x^5\overset{\frac{2}{5}}{-}3x^4\overset{\frac{1}{2}}{+}0.x^3\overset{\frac{1}{2}}{+}4x^2\overset{\frac{2}{5}}{-}5x+6=0$$

находимъ условія: $0<\frac{2}{5}.9, -3.4<0, -5.0<\frac{1}{2}.16,\ 4.6>\frac{2}{5}.25$, изъ которыхъ одно послѣднее показываетъ мнимость, слѣдовательно въ немъ есть хотя одна пара мнимыхъ корней.

*Примѣръ*. Въ уравненіи:

$$x^7\overset{\frac{3}{7}}{-}x^6\overset{\frac{5}{9}}{-}2x^5\overset{\frac{3}{5}}{-}3x^4\overset{\frac{3}{5}}{+}4x^3\overset{\frac{5}{9}}{-}5x^2\overset{\frac{3}{7}}{-}6x-7=0,$$

$$-2.1<\frac{3}{7},\ 1.3>\frac{5}{9}.4,\ -2.4<\frac{3}{5}.9,\ 3.5>\frac{3}{5}.16,$$

$$-6.4<\frac{5}{9}.25,\ 5.7>\frac{3}{7}.36,$$

три условія мнимости раздѣлены условіями противными, и обнаруживаютъ три пары мнимыхъ корней.

*Примѣръ*. Въ уравненіи:

$$x^6+0.x^5+3x^4+0.x^3+0.x^2-10x+5=0,$$

условія: $3>0,\ 0<\frac{8}{18}.9,\ 0=0,\ 0=0,\ 0<\frac{5}{12}.100$, открываютъ двѣ пары мнимыхъ корней. Въ немъ находятся еще два корня дѣйствительные, потому что сумма коефиціентовъ положительныхъ менѣе суммы отрицательныхъ (**378**).

Весь этотъ способъ открывать присутствіе мнимыхъ корней принадлежитъ *Ньютону*.

# ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ.

## РѢШЕНІЕ ЧИСЛЕННЫХЪ УРАВНЕНІЙ ВЫСШИХЪ СТЕПЕНЕЙ СЪ ОДНОЮ НЕИЗВѢСТНОЮ.

**392.** Въ уравненіяхъ высокихъ степеней корни могутъ быть дѣйствительные-соизмѣримые или несоизмѣримые, и корни мнимые; сверхъ того, тѣ и другіе всѣ неравные, или нѣкоторые изъ нихъ равные.

Полное рѣшеніе такого уравненія производится посредствомъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ дѣйствій, смотря потому, какіе корни отыскиваются первоначально, и какіе послѣ. Надобно: 1) найти предѣлы, между которыми заключаются всѣ дѣйствительные корни уравненія, и кромѣ того — предѣлы для корней положительныхъ, и отрицательныхъ. 2) Отыскать всѣ корни равные, и исключить ихъ изъ уравненія, чтобы понизить его степень; 3) отыскать всѣ соизмѣримые корни неравные, отдѣлить ихъ изъ уравненія, и чрезъ это вторично понизить его степень: тогда останутся въ уравненіи корни несоизмѣримые и мнимые. 4) Раздѣлить несоизмѣримые корни частными предѣлами для каждаго; 5) отыскать приближенную величину каждаго несоизмѣримаго корня; и 5) наконецъ, розыскать корни мнимые.

### А. Предѣлы корней.

**393.** *Предѣлами* называются два ближайшія числа, между которыми находятся всѣ дѣйствительные корни уравненія. Для примѣра, положимъ, что уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ слѣдующіе корни, расположенные въ убывающемъ порядкѣ:

$$4,\ 2,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{10},\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{2},\ -3,\ -6.$$

Весь рядъ этихъ корней заключается между ближайшими *цѣлыми* числами 5 и —7. Число 5, ближайшее большее, называется *высшимъ предѣломъ*, а число —7, ближайшее меньшее, называется *нижнимъ предѣломъ* всѣхъ дѣйствительныхъ корней. Сверхъ того, видно, что всѣ положительные корни заключаются между 5 и 0, а отрицательные—между 0 и—7. Стало-быть, 5 есть высшій предѣлъ корней положительныхъ, а 0 нижній предѣлъ ихъ; также 0 и —7 суть предѣлы высшій и низшій для корней отрицательныхъ.

Если уравненіе $f(x)=0$ преобразовать въ $f(-x)=0$, то его корни останутся тѣ же, только будутъ съ противными знаками:

$$-4,\ -2,\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{10},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{2},\ 3,\ 6;$$

и тогда прежній высшій предѣлъ 5 здѣсь будетъ нижнимъ $-5$, а низшій предѣлъ $-7$ здѣсь обратится въ высшій $+7$.

Впередъ мы часто будемъ означать буквами L, —L, высшій и низшій предѣлы для всѣхъ корней уравненія.

**394**. *Высшій предѣлъ* L *корней уравненія* $f(x)=0$ *отличается тѣмъ свойствомъ, что, будучи взятъ на мѣсто* $x$, *обращаетъ какъ это уравненіе, такъ и всѣ его производныя* $f(\mathrm{L})$, $f'(\mathrm{L})$, $f''(\mathrm{L})$,.... *въ результаты положительные.*

Пусть $a$, $b$, $c$,....., $r\pm r'\sqrt{-1}$, $s\pm s'\sqrt{-1}$,....., корни этого уравненія, дѣйствительные и мнимые; L высшій предѣлъ, который больше $a$, $b$, $c$,....: то,

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots.\ [(x-r)^2+r_1^2][(x-s)+s_1^2]\ldots.=0.$$

Если на мѣсто $x$ взять L, то всѣ двучленные множители: $x-a$, $x-b$,...., простые и квадратные, сдѣлаются *положительными*, а слѣдовательно и весь результатъ $f(\mathrm{L})$ будетъ положительнымъ. Само собою разумѣется, что всякое число, которое больше L, взятое на мѣсто $x$, и подавно обратитъ $f(x)$ въ результатъ положительный, большій прежняго.

Теперь возмемъ $x=y+\mathrm{L}$, и подставимъ $f(x)=0$; получится:

$$f(y+\mathrm{L})=f(\mathrm{L})+f'(\mathrm{L}).y+\frac{1}{1.2}.f''(\mathrm{L}).y^2+\ldots=0.$$

А какъ

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots.[(x-r)^2+r_1^2]\ldots.=0,\ \text{то и}$$

$$f(y+\mathrm{L})=(y+\mathrm{L}-a)(y+\mathrm{L}-b)\ldots.[(y+\mathrm{L}-r)^2+r_1^2][\ldots.]=0.$$

Дѣйствительные корни этого уравненія всѣ отрицательные, потому что разности $\mathrm{L}-a$, $\mathrm{L}-b$,.... всѣ положительныя; квадратные двучлены $(y+\mathrm{L}-r)^2+r_1^2$,.... также состоятъ изъ членовъ положительныхъ; и потому въ $f(y+\mathrm{L})=0$ не должно быть ни одного отрицательнаго члена, ни одной перемѣны знака; слѣдовательно, коефиціенты $f(\mathrm{L})$, $f'(\mathrm{L})$, $f''(\mathrm{L})$,.... необходимо будутъ всѣ *положительными*.

Мы видѣли, что низшій предѣлъ —L корней въ $f(x)=0$ служитъ въ $f(-x)=0$ предѣломъ высшимъ; онъ также, будучи взятъ въ $f(-x)$ на мѣсто $x$, обратитъ это уравненіе и всѣ его производныя въ положительные результаты $f(-\mathrm{L})$, $f'(-\mathrm{L})$, $f''(-\mathrm{L})$....

Обратно: если вмѣсто высшаго предѣла L взять число $\lambda$, меньшее самаго большаго корня $a$ уравненія $f(x)=0$, то въ уравненіи

$$f(y+\lambda)=(y+\lambda-a)(y+\lambda-b),\ldots=0$$

будетъ хотя одинъ первый корень положительный, потому что изъ разностей $\lambda-a$, $\lambda-b$,.... по крайней мѣрѣ первая будетъ отрицательною.

Отъ этого въ уравненіи

$$f(y+\lambda)=f(\lambda)+f'(\lambda).y+\frac{1}{1.2}f''(\lambda).y^2+\dots.=0$$

должна появиться (**368**) *по крайней мѣрѣ одна перемѣна знака*, слѣдовательно, которая нибудь изъ производныхъ $f(\lambda)$, $f'(\lambda)$, $f''(\lambda)$,... должна выйти отрицательною.

**395.** Отсюда непосредственно проистекаетъ *Ньютоновъ способъ нахожденія предѣловъ, высшаго и низшаго, для дѣйствительныхъ корней даннаго уравненія* $f(x)^n=0$.—Надобно взять всѣ производныя:

$$f'(x),\ \frac{1}{1.2}f''(x),\ \frac{1}{1.2.3}f'''(x),\dots.\frac{1}{1.2\dots n}f^n(x);$$

подставлять въ нихъ числа 0, 1, 2, 3,.... на мѣсто $x$, *начиная съ послѣдней производной;* писать знаки результатовъ отъ лѣвой руки къ правой; и это продолжать, пока найдется *самое меньшее число*, которое всѣ многочлены

$$\frac{1}{1.2\dots n}f^n(x),\ \frac{1}{1.2\dots(n-1)}f^{n-1}(x),\dots..\frac{1}{1.2}f''(x),\ f'(x),\ f(x),$$

обращаетъ въ положительные результаты: это число и будетъ высшимъ предѣломъ L для всѣхъ корней даннаго уравненія. — Потомъ надобно перемѣнить знаки предъ членами, занимающими чётныя мѣста во всѣхъ тѣхъ многочленахъ, чтобъ получить уравненіе $f(-x)^n=0$, и его производныя $f'(-x)$, $f''(-x)$,....; подставлять въ нихъ также 0, 1, 2, 3,...., пока найдется самое меньшее цѣлое число, которое обращаетъ всѣ сіи функціи въ результаты положительные; это число будетъ высшимъ предѣломъ для корней уравненія $f(-x)=0$, а низшимъ предѣломъ $-L'$ для корней уравненія $f(x)=0$. Между найденными предѣлами L, — L′, будутъ находиться всѣ дѣйствительные корни даннаго уравненія.

*Примѣръ.* Найти предѣлы корней уравненія

$$f(x)=\theta=x^4-5x^3+30x^2-12x-150=0.$$

Для этого составимъ его производныя:

$$f'(x)=\theta_1=4x^3-15x^2+60x-12,$$

$$\frac{1}{1.2}f''(x)=\theta_2=6x^2-15x+30,$$

$$\frac{1}{1.2.3}f'''(x)=\theta_3=4x-5,\ \frac{1}{1.2.3.4}f''''(x)=\theta_4=1;$$

и будемъ въ нихъ подставлять :

| | | $\theta_4$ | $\theta_3$ | $\theta_2$ | $\theta_1$ | $\theta_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$, | найдутся: | + | — | + | [illegible] | — |
| $=1$, | - | + | — | + | + | — |
| $=2$, | - | + | + | + | + | — |
| $=3$, | - | + | + | + | + | + |

Подстановленіе 3 обратило всѣ функціи въ результаты положительные; слѣдовательно, $L=3$ есть ближайшій высшій предѣлъ корней положительныхъ.

Перемѣнимъ знаки на чётныхъ мѣстахъ во всѣхъ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$,...., получатся:

$$f(-x)=\varphi=x^4+5x^3+30x^2+12x-150=0,$$

$$f'(-x)=\varphi_1=4x^3+15x^2+60x+12,$$

$$\frac{1}{1.2}f''(-x)=\varphi_2=6x^2+15x+30,$$

$$\frac{1}{1.2.3}f'''(-x)=\varphi_3=4x+5,\ \ \varphi_4=1;$$

Сюда подставимъ:

| | $\varphi_4$ | $\varphi_3$ | $\varphi_2$ | $\varphi_1$ | $\varphi_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$, получатся: | + | + | + | + | — |
| $=1$, – | + | + | + | + | — |
| $=2$, – | + | + | + | + | + |

Здѣсь число 2 высшимъ предѣломъ корней для $f(-x)=0$; а слѣдовательно $-2$ есть низшій предѣлъ корней даннаго уравненія $f(x)=0$.

**396**. Этотъ способъ имѣетъ всю желаемую точность, только часто бываетъ утомителенъ въ практикѣ, если предѣлы бываютъ слишкомъ удалены отъ 0, и, для достиженія къ нимъ, нужно дѣлать много подстановленій. Такъ, наприм., еслибъ даннымъ уравненіемъ было

$$x^4-2x^3-3x^2-8000x-10000=0,$$

то розысканіе предѣловъ, близкихъ къ его корнямъ, по способу Ньютона, составило бы продолжительную работу. Посему-то, для избѣжанія многихъ лишнихъ, безполезныхъ подстановленій, употребляются разные вспомогательные способы, посредствомъ которыхъ, въ самыхъ трудныхъ случаяхъ, весьма много сокращается число подстановленій.

1. Способъ Маклореневъ.—Мы видѣли (**336**), что всякая цѣлая, раціональная функція $f(x)$ обращается въ положительный результатъ, если взять ея наибольшій коефиціентъ N, сложить съ единицею, и сумму $N+1$ подставить въ нее на мѣсто $x$. Слѣдовательно $x=N+1$ будетъ высшимъ предѣломъ корней уравненія $f(x)=0$.

Но этотъ способъ выгоденъ лишь тогда, кигда наибольшій коефиціентъ N находится во второмъ членѣ, и когда послѣдующіе члены, по большой части, отрицательные; иначе предѣлъ $N+1$ бываетъ крайне обширенъ, слишкомъ удаленъ отъ корней *).

2. Способъ Брета.—*Высшій предѣлъ корней получится, если раздѣлить каждый отрицательный коефиціентъ даннаго уравненія на сумму*

---

*) Этому же неудобству подлежатъ способы Ролля и Вену, помѣщаемые въ курсахъ Алгебры; а потому не буду и говорить о нихъ.

*всѣхъ предшествовавшихъ ему положительныхъ коефиціентовъ, взять наибольшее частное, и сложить съ единицею.*

Замѣтимъ, что

$$x^n-1=(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1)(x-1),\ \text{откуда}$$
$$x^n=(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1)(x-1)+1,$$

и доказательство способа, для большей ясности, представимъ на уравненіи пятой степени:

$$Ax^5+Bx^4+Cx^3-Dx^2+Ex-F=0.$$

Разложимъ положительные члены его въ строки, возмемъ ихъ сумму, и къ ней придадимъ члены отрицательные, написавъ ихъ подъ членами подобными:

$$\begin{array}{l}
Ax^5=(Ax^4+Ax^3+Ax^2+Ax+A)(x-1)+A\\
Bx^4=\ldots\ldots+(Bx^3+Bx^2+Bx+B)(x-1)+B\\
Cx^3=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(Cx^2+Cx+C)(x-1)+C\\
Ex=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+E(x-1)+E\\
\hline
(Ax^4+A'x^3+A''x^2+A''x+A''')(x-1)+A'''=0\\
\qquad\qquad -Dx^2 \qquad\qquad\qquad -F
\end{array}$$

гдѣ $A'=A+B$, $A''=A+B+C$, $A'''=A+B+C+E$.

Очевидно, что все уравненіе обратится въ результатъ положительный, если взять $x$ такимъ, чтобъ уничтожились разности $A''(x-1)-D$, $A'''(x-1)-F$, либо сдѣлались больше нуля. Но, если отношеніе $\frac{D}{A''} > \frac{F}{A'''}$, то довольно положить $A''(x-1)-D=0$, найти отсюда $x=\frac{D}{A''}+1$, и подставить ее во вторую разность, которую назовемъ буквою $\delta$:

$$A'''(x-1)-F=\delta;$$

то получится $A'''(\frac{D}{A''}+1-1)-F=\delta$, откуда

$$\frac{D}{A''}-\frac{F}{A'''}=\frac{\delta}{A'''},$$

результатъ положительный; слѣдовательно, разность

$$A'''(x-1)-F>0.$$

И такъ, $\frac{D}{A''}+1$ есть высшій предѣлъ корней; онъ равенъ самому большему отношенію коефиціента отрицательнаго D къ суммѣ $A''$ всѣхъ предшествующихъ ему коефиціентовъ положительныхъ, сложенному съ единицею.

*Примѣры:* Въ уравненіи

$$3x^5-15x^4+22x^3-100x^2+80x-450=0,$$

изъ отношеній $\frac{15}{3}=5$, $\frac{100}{25}=4$, $\frac{450}{105}$, самое большее 5; стало-быть, высшій предѣлъ корней $L=5+1=6$;

по способу Ньютона, $L=5$;

\- Маклореня, онъ $=\frac{451}{3}+1=151$.

А въ уравненіи,

$$3x^5-15x^4+22x^3-150x^2+80x-600=0,$$

гдѣ изъ отношеній $\frac{15}{3}=5$, $\frac{150}{25}=6$, $\frac{600}{105}$, самое большее 6, предѣломъ будетъ $6+1=7$.

Способъ Бретовъ выгоденъ только тогда, когда въ предшествующихъ членахъ уравненія находятся довольно большіе положительные коефиціенты; въ противномъ случаѣ, онъ почти такъ же невыгоденъ, какъ и способъ Маклореневъ, чему увидимъ многіе примѣры.

3-й способъ. — *Надобно преобразовать данное уравненіе* $f(x)=0$ *такъ, чтобы первый членъ его, и членъ отрицательный, дающій наибольшее преобразовательное число* $\omega$ (стр 356), *получили коефиціенты, равные единицѣ,* (полагая $x=\omega y$); тогда составится уравненіе $f(y)=0$, въ которомъ всѣ прочіе отрицательные члены будутъ съ коефиціентами, равными единицѣ или меньшими единицъ. *Высшимъ предѣломъ корней этого уравненія будетъ 2, а для корней даннаго уравненія* $2\omega$. Сверхъ того, смотря по числу, величинѣ и расположенію членовъ положительныхъ и отрицательныхъ, предѣлъ можно брать $2\omega$, $\frac{3}{2}\omega$, $\frac{4}{3}\omega$, $\frac{5}{4}\omega,\ldots,\omega$, и менѣе.

Собственно говоря, надобно только всякой разъ искать высшее преобразовательное число $\omega$, а дѣйствительнаго преобразованія $f(x)=0$ дѣлать не нужно.

Для поясненія этого способа, возмемъ общее уравненіе, вида:

$$x^n-ax^{n-1}-a^2x^{n-2}-a^3x^{n-3}-\ldots-a^{n-1}x-a^n=0,$$

и положимъ $x=ay$; тогда оно обратится въ простѣйшее уравненіе

$$y^n-y^{n-1}-y^{n-2}-y^{n-3}-\ldots-y-1=0,$$

въ которомъ только первый членъ положительный, и всѣ коефиціенты суть единицы. По способамъ Маклореня и Брета, высшимъ предѣломъ его корней $L=2$. Стало-быть, надобно только умѣть привести всякое уравненіе къ виду такого, въ которомъ бы всѣ отрицательные коефиціенты были единицами и дробями, то 2 необходимо будетъ высшимъ предѣломъ корней уравненія, получившаго этотъ видъ, Но, извѣстно (стр. 356), что если въ уравненіи $f(x)=0$ взять $x=\omega y$, и чрезъ это уравнять коефиціентъ его перваго члена съ тѣмъ, который даетъ *наибольшее* преобразовательное число $\omega$; то уравненіе непремѣнно получитъ желаемый видъ; тогда $2\omega$ и будетъ высшимъ предѣломъ корней для $f(x)=0$.

*Примѣръ*. Найти высшій предѣлъ корней уравненія

$$x^4-6x^3-50x^2-200x-1000=0.$$

Для преобразованія этого уравненія въ другое, котораго бы первый и какой ни есть отрицательный членъ получили равные коефиціенты, беру преобразовательныя числа: 6, $\sqrt{50}$, $\sqrt[3]{200}$, $\sqrt[4]{1000}$, и нахожу, что изъ нихъ самое большее $\sqrt{50}=\omega$; отсюда заключаю, что высшій предѣлъ корней $=2\omega=2\sqrt{50}=14$.

Этотъ предѣлъ не обширенъ, потому что наибольшій корень даннаго уравненія находится между 12 и 13, въ чемъ окончательно можемъ увѣриться по способу Ньютона. Для этого составимъ:

$$\theta = x^4 - 6x^3 - 50x^2 - 200x - 1000,$$
$$\theta_1 = 4x^3 - 18x^2 - 100x - 200,$$
$$\theta_2 = 6x^2 - 18x - 50,\ \theta_3 = 4x - 6,\ \theta_4 = 1,$$

и будемъ пробовать числа меньшія 14:

|  | $\theta_4$ | 3 | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x=13$, получатся: | + | + | + | + | + |
| $=12$, – | + | + | + | + | — |

По Маклореню, Брету, Роллю, нашли бы предѣлъ 1001 крайне обширный и вовсе безполезный.

**397.** *Зависимость предѣла L отъ величины отрицательныхъ коефиціентовъ втораго и третьяго членовъ уравненія.*

Высшій предѣлъ корней значительно уменьшается отъ уменьшенія отрицательныхъ коефиціентовъ 2-го и 3 го членовъ уравненія; между тѣмъ почти не измѣняется отъ уменьшенія коефиціентовъ всѣхъ остальныхъ членовъ. Для примѣра возмемъ уравненія:

$$x^n - \frac{1}{10}ax^{n-1} - \frac{1}{10}a^2x^{n-2} - a^3x^{n-3} - a^4x^{n-4} - \ldots - a^n = 0,$$

$$x^n - ax^{n-1} - a^2x^{n-2} - \frac{1}{p}(a^3x^{n-3} + a^4x^{n-4} + \ldots + a^n) = 0.$$

Первое имѣетъ предѣлъ $L = \frac{3}{2}a$, вмѣсто $2a$; ибо ему можно дать видъ

$$x^n - \frac{1}{10}ax^{n-1} - \frac{1}{10}a^2x^{n-2} - a^3\frac{(x^{n-2} - a^{n-2})}{x-a} = 0;$$

и, по освобожденіи отъ знаменателя, получить,

$$x^{n-2}\left(x^3 - \frac{11}{10}ax^2 \overset{-}{\cancel{+}} \frac{9}{10}a^3\right) + a^{n+1} = 0.$$

Многочленъ $x^3 - \frac{11}{10}ax^2 \overset{-}{\cancel{+}} \frac{9}{10}a^3$ обращается въ нуль отъ подстановленія $x = \frac{3}{2}a$, а уравненіе—въ положительный результатъ $a^{n+1}$; слѣдовательно $L = \frac{3}{2}a$.

Что же касается до втораго уравненія, то въ немъ можно даже уничтожить всѣ члены, кромѣ трехъ первыхъ, полагая $p = \infty$, и высшій предѣлъ все таки останется $2a$ (или $\frac{5}{3}a$ въ этомъ крайнемъ случаѣ).

**398.** *Зависимость предѣла L отъ повторенія знака + предъ первыми членами уравненія.*

Если данное уравненіе имѣетъ два, три, четыре,.... первые члена положительные, то высшимъ предѣломъ корней довольно брать, соотвѣтственно: $\frac{3}{2}\omega$, $\frac{4}{3}\omega$, $\frac{5}{4}\omega$,.... Для доказательства, возмемъ общее уравненіе

$$1)\quad x^n+ax^{n-1}-a^2x^{n-2}-a^3x^{n-3}-\dots-a^n=0,$$

которое, чрезъ подстановленіе $x=ay$, обращается въ

$$y^n+y^{n-1}-y^{n-2}-y^{n-3}-\dots-1=0.$$

По способу Брета, высшимъ предѣломъ его корней будетъ $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$; а для даннаго уравненія $L=\frac{3}{2}a$.

Этотъ же предѣлъ имѣютъ уравненія, въ которыхъ нѣтъ втораго, либо втораго и третьяго членовъ, послѣ которыхъ слѣдуютъ члены отрицательные.

2) Для уравненія съ тремя первыми членами положительными,

$$y^n+y^{n-1}+y^{n-2}-y^{n-3}-y^{n-4}-\dots-y-1=0,$$

предѣломъ $L$ будетъ $\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$.

Этотъ же предѣлъ соотвѣтствуетъ корнямъ уравненій:

$$y^n+2y^{n-1}-y^{n-2}-y^{n-3}-\dots-y-1=0,$$
$$y^n+2y^{n-2}-y^{n-3}-y^{n-4}-\dots-y-1=0.$$
$$y^n+y^{n-2}-y^{n-3}-y^{n-4}-\dots-y-1=0.$$

3) Для уравненій съ четырьмя положительными членами:

$$y^n+y^{n-1}+y^{n-2}+y^{n-3}-y^{n-4}-\dots-y-1=0,$$

предѣлъ $L=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$; и такъ далѣе.

4) Очевидно, что $L=1$, когда сумма предшествовавшихъ членовъ положительныхъ равна суммѣ послѣдующихъ членовъ отрицательныхъ; но онъ меньше 1-цы, когда первая сумма болѣе второй. Напримѣръ:

$$x^4+x^3+x^2-x-1=0 \text{ имѣетъ } L=\frac{7}{8};$$
$$x^3+x^2+x-1=0 \quad - \quad L=\frac{4}{7};$$
$$x^2+x-1=0 \quad - \quad L=\frac{5}{8};$$

Все это не трудно теперь приложить и ко всякому уравненію, давая ему преобразованіе посредствомъ наибольшаго преобразовательнаго числа $\omega$, какъ сказано было въ общемъ правилѣ (стр. 372).

***Примѣръ.*** Въ уравненіи

$$x^4+3x^3-100x^2-1000x-10000=0$$

преобразовательныя числа: $\sqrt{100}$, $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[4]{10000}$, равны между собою, и каждое больше 3. Взявъ $x=10y$, нахожу:

$$y^4+0{,}3y^3-y^2-y-1=0.$$

Второй членъ положительный; слѣдовательно, въ этомъ уравненіи высшій предѣлъ корней $=\frac{3}{2}$; а въ данномъ уравненіи $L=\frac{3}{2}.10=15$.

И дѣйствительно, наибольшій корень этого уравненія находится между 14 и 15, въ чемъ окончательно можно увѣриться по способу Ньютона.

*Примѣръ.* Уравненіе

$$x^5-400x^3-1600x-10000=0$$

не имѣетъ втораго и третьяго членовъ, и подходитъ подъ случай 1). Въ немъ $\sqrt[3]{400}>\sqrt[4]{1600}$ и $>\sqrt[5]{10000}$; слѣдовательно, его $L=\frac{3}{2}\sqrt[3]{400}=\frac{3}{2}.7=10$. По Ньютону, нашли бы $L=9$.

*Примѣръ.* Но, уравненіе

$$x^5+7x^4-400x^3+10x-10000=0,$$

въ которомъ наибольшее преобразовательное число почти равно коефиціенту втораго положительнаго члена, и въ которомъ два члена положительные находятся противъ двухъ послѣдующихъ членовъ отрицательныхъ, имѣетъ предѣломъ только $\sqrt[3]{400}=7$.

По той же причинѣ, въ уравненіи

$$x^5+4x^4-15x^3+x^2-200x+1=0,$$

гдѣ $\sqrt{15}>\sqrt[4]{200}$, и весьма близокъ къ предшествующему положительному коефиціенту 4, и гдѣ также послѣ первыхъ двухъ положительныхъ членовъ находятся два отрицательные, высшимъ предѣломъ будетъ $\sqrt{15}=4$ *). Этотъ же предѣлъ нашли бы и по способу Ньютона.

*Примѣръ.* Въ уравненіи

$$x^6+10x^5+60x^4-800x^3-20000x+1=0,$$

гдѣ $\sqrt[3]{800}>\sqrt[5]{20000}$, сверхъ того, $\sqrt[3]{800}<10$ и близокъ $\sqrt{60}$, и гдѣ три первые положительные члена имѣютъ послѣ себя два отрицательные, высшимъ предѣломъ будетъ $\frac{7}{8}\sqrt[3]{800}=\frac{7}{8}.9=8$ (см. случай 4); а по Ньютону, этотъ предѣлъ $=7$.

**399.** Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію другихъ замѣчательныхъ случаевъ, имѣющихъ нѣкоторую общность.

Въ уравненіяхъ вида:

$$x^n\mp ax^{n-1}-b(x^{n-2}+x^{n-3}+x^{n-4}+\ldots.+1)=0;$$

$$x^n\mp ax^{n-1}-b\,\frac{(x^{n-1}-1)}{x-1}=0,$$

$$\text{предѣлъ } L=\pm\frac{a+1}{2}+\sqrt{b+\left(\frac{a\mp 2}{2}\right)^2}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если взять $-a$, и освободить уравненіе отъ знаменателя $x-1$, то получится:

$$x^{n-1}[x^2-(a+1)x+a-b]+b=0.$$

---

*) О прочихъ положительныхъ членахъ здѣсь вовсе не упоминаю, хотя они собственно уменьшаютъ предѣлъ.

Теперь довольно положить $x^2—(a+1)x+a—b=0$; отсюда получится предѣлъ:

$$x=\frac{a+1}{2}+\sqrt{b+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}.$$

***Примѣръ.*** Для корней уравненія,

$$x^4—3x^3—100x^2—100x—100=0,$$

$$L=\frac{3+1}{2}+\sqrt{100+\left(\frac{3-1}{2}\right)^2}=2+\sqrt{101}=12,049.$$

И въ самомъ дѣлѣ, наибольшій корень его находится между 12 и 12,049.

Такъ можно находить предѣлъ L во всѣхъ уравненіяхъ, въ которыхъ наибольшее преобразовательное число $\omega$ находится во второмъ, либо третьемъ членахъ, и гдѣ прочіе послѣдующіе отрицательные члены равны или менѣе большаго изъ тѣхъ коефиціентовъ. Вотъ примѣръ:

$$x^5—10x^4—268x^3—250x^2+170x—300=0.$$

Послѣдній членъ 300, хотя больше 268; но, поелику разность не велика, и есть положительный членъ $170x$, то предѣломъ будетъ

$$L=5,5+\sqrt{268+20}=22,5,$$

вмѣсто $2\sqrt{268}=32,6$, и весьма близокъ къ самому большему корню уравненія, потому что число 23 уже велико.

**400.** Въ уравненіяхъ, вида:

$$x^n—ax^{n-1}—bx^{n-2}—c^3(x^{n-3}+x^{n-4}+x^{n-5}+\ldots+1)=0,\text{ или}$$

$$x^n—ax^{n-1}—bx^{n-2}—c^3\frac{(a^{n-2}-1)}{x-1}=0,$$

гдѣ $b \not> ac$, даже $b=0$, предѣлъ $L=a+c$, каково бы ни было отношеніе между $a$ и $c$. Ибо, это уравненіе, по освобожденіи отъ знаменателя $x—1$, обращается въ

$$x^{n-2}[x^3—(a+1)x^2+(a—b)x+b—c^3]+c^3=0;$$

а отъ подстановленія $b=ac$, $x=a+c$, многочленъ въ скобкахъ приводится въ $(a—1)c^2$ результатъ положительный, если $a \not< 1$.

***Примѣръ.*** Такъ, уравненіе

$$x^6—6x^5—60x^4—1000(x^3+x^2+x+1)=0,$$

въ которомъ $a=6$, $c=10$, $b=60=ac$, имѣетъ $L=10+6=16$; между тѣмъ какъ по третьему общему способу $L=2\sqrt[3]{1000}=20$.

***Примѣръ.*** Уравненія:

$$x^5—2x^4—38x^3—8000(x^2+x+1)=0,$$

$$x^5—20x^4—38x^3—8(x^2+x+1)=0,$$

у коихъ, въ первомъ $a=2$, $c=20$,
во второмъ $a=20$, $c=2$,

а въ обоихъ $ac=40$, близкое къ 38, имѣютъ предѣломъ $L=a+c=22$. Таковъ онъ и по способу Ньютона.

**401.** Наконецъ, возмемъ уравненія, вида:

$$x^n-ax^{n-1}+bx^{n-2}-c^3(x^{n-3}+x^{n-4}+x^{n-5}+\ldots+1)=0, \text{ или}$$

$$x^n-ax^{n-1}+bx^{n-2}-c^3\,\frac{(x^{n-2}-1)}{x-1}=0\ldots(\mathrm{A}),$$

въ которыхъ *четыре первые члена имѣютъ только перемѣны знаковъ*. Въ нихъ ближайшій большій предѣлъ зависитъ отъ величины $a$, $b$, $c$; и его нахожденіе приводится къ слѣдующимъ замѣчательнымъ случаямъ.

a) Взявши $b$ общимъ множителемъ третьяго и всѣхъ за нимъ послѣдующихъ членовъ:

$$x^n-ax^{n-1}+b(x^{n-3}-\frac{c^3}{b}\,x^{n-4}-\frac{c^3}{b}\,x^{n-5}-\ldots-\frac{c^3}{b})=0,$$

и примѣняя сюда способъ Маклореневъ, тотчасъ видно, что $\mathrm{L}=a$ или $\frac{c^3}{b}$, смотря потому, что больше, лишь бы разность между этими числами была не меньше 1-цы; въ противномъ случаѣ, предѣломъ будетъ $a+1$ либо $\frac{c^3}{b}+1$. Такъ, въ уравненіи

$$x^5-10x^4+50x^3-600x^2-600x-600=0, \text{ или}$$

$$x^5-10x^4+50(x^3-12x^2-12x-12)=0,$$

очевидно, предѣлъ $\mathrm{L}=12$.

Надобно при семъ замѣтить, что если между числами $a$ и $\frac{c^3}{b}$ разность велика, особливо когда $\frac{c^3}{b}$ много больше $a$, то лучше искать предѣлъ по 3-му общему способу, либо по способу въ § 400.

b) Когда $b\nless(a-2)(c+1)+1$,

$\nless ac+a-2c-1$, или

$\nless pc^2+pc-2c-1$, полагая $a=pc$;

тогда ближайшимъ высшимъ предѣломъ будетъ

$$1+c.$$

Для доказательства, освободимъ уравненіе (A) отъ знаменателя $x-1$; получится

$$x^{n-2}[x^3-(a+1)x^2+(a+b)x-b-c^3]+c^3=0.$$

Отъ подстановленія $a=pc$, $b=pc^2+pc-2c-1$, $x=1+c$, многочленъ $x^3-(a+1)x^2+(a+b)x-b-c^3$ обратится въ нуль, а данное уравненіе въ положительный результатъ $c^3$.

c) Когда $a>c$ и $b\nless ac$, или хотя $b>c^2$.

Въ этомъ случаѣ полезно бываетъ вводить въ данное уравненіе отрицательный корень $\frac{b}{a}$, помноживъ оное на $x+\frac{b}{a}$; высшій предѣлъ корней оттого не перемѣнится, но уравненіе приведется въ такой видъ, что можно къ нему съ большою выгодою приложить способъ Брета. Предѣлъ L получится весьма близокъ къ наибольшему корню, въ чемъ увѣримся разными примѣрами.

*Примѣръ*. Уравненіе,

$$x^4-2x^3+8x^2-1000x-1500=0,$$

имѣетъ $a=2$, $b=8$, $c=10$. Предѣлъ L его корней найдется по случаю $b$); потому что удовлетворяется условіе

$$b \nless (a-2)(c+1)+1, \text{ и выходитъ}$$
$$b \nless 1;$$

слѣдовательно $L=1+c=1+10=11$, тоже, что и по способу Ньютона. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ:

$$\theta=x^4-2x^3+8x^2-1000x-1500=0,$$
$$\theta_1=4x^3-6x^2+16x-1000,$$
$$\theta_2=6x^2-6x+8,\ \theta_3=4x-2,\ \theta_4=1,$$

и полагая:

$$\begin{array}{llccccc} & & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ x=10, & \text{получимъ:} & + & + & + & + & - \\ 11, & - & + & + & + & + & + \end{array}$$

т. е. наибольшій корень уравненія находится между 10 и 11.

*Примѣръ*. Уравненіе

$$x^6-20x^5+200x^4-1000(x^3+x^2+x+1)=0,$$

въ которомъ $a=20$, $b=200$, $c=10$, имѣетъ условія всѣхъ трехъ случаевъ. По первому $a$) получается предѣлъ 20. По второму $b$), для котораго удовлетворяется условіе

$$b>(a-2)(c+1)+1, \text{ то есть,}$$
$$200>199,$$

имѣемъ предѣлъ $c+1=11$.

По третьему, для котораго удовлетворяются условія $a>c$ и $b>ac$, вводимъ въ уравненіе множитель $x+\frac{b}{a}=x+10$; получится:

$$\begin{array}{cccccccc} x^7 & -20x^6 & +200x^5 & -1000x^4 & -1000x^3 & -1000x^2 & -1000x & \\ & +10 & -200 & +4000 & -10000 & -10000 & -\ldots\ldots & \\ \hline x^7 & -10x^6 & + & 3000x^4 & -11000x^3 & -11000x^2 & -\ldots\ldots & \end{array}$$

Теперь, по способу Брета, имѣемъ такой же предѣлъ $L=10+1=11$.
По способу Ньютона, онъ также $=11$.

*Примѣръ*. Въ уравненіи

$$x^5-6x^4+51x^3-130x^2-130x-130=0,$$

$a=6$, $b=51$, $c=\sqrt[3]{130}=5$, $a>c$, $b>ac$, также заключаются условія всѣхъ трехъ случаевъ. По первому, $L=6+1=7$; по второму, $L=c+1=6$; по третьему, введемъ въ уравненіе множитель $x+\frac{b}{a}=x+\frac{51}{6}=8{,}5$, получится:

$$\begin{array}{l} x^6-6x^5+51x^4-130\ \ x^3-130x^2-130x \\ \quad +8,5-51\ \ +433,5\ \ -1105\ \ -1105\ \ -1105 \\ \hline x^6+2,5x^5+303,5x^3-1235x^2-1235x-1105=0 \end{array}$$

Отсюда по способу Брета находимъ

$$L=\frac{1235}{1+2,5+303,5}=\frac{1235}{307}=4.$$

*Примѣръ.* Въ уравненіи

$$x^5-12x^4+160x^3-200x^2-200x-200=0,$$

$a=12$, $b=160$, $c=\sqrt[3]{200}=6$, $a>c$, $b>ac$, выгоднѣе всего употребить способъ $c$), помноживъ уравненіе на $x+13=x+\frac{160}{12}$; получится:

$$x^6+x^5+4x^4+1880x^3-2800x^2-2800x-2600=0.$$

По способу Брета, найдемъ теперь

$$L=\frac{2800}{1886}=2,5.$$

Повѣрка способомъ Ньютона показываетъ, что дѣйствительно самый большій корень даннаго уравненія находится между 2,5 и 3.

При всякомъ такомъ случаѣ (когда $\frac{b}{a}<a$), уравненіе, отъ помноженія на $x+\frac{b}{a}$, теряетъ двѣ перемѣны знаковъ между тремя первыми членами, и въ то же время обнаруживаетъ присутствіе двухъ мнимыхъ корней.

*Примѣръ.* Въ уравненіи

$$x^5-173x^4+2356x^3-10468x^2-14101x-4183=0$$

имѣемъ $a=173$, $b=2356$, $c=\sqrt[3]{10468}=22$; притомъ $a>c$ и $b>c^2$. Помножимъ это уравненіе на $x+\frac{b}{a}=x+14$:

$$\begin{array}{l} x^6-173x^5+2356x^4-10468x^3-14101x^2-4183x \\ \quad +\ 14\ \ -2422\ \ +32984\ \ -146551\ -\ldots\ldots \\ \hline x^6-159x^5-\ \ 66x^4+22516x^3-160651x^2-\ldots\ldots \end{array}$$

Теперь, по Брету, найдется искомый предѣлъ $L=159+1=160$; а по Ньютону 159.

*Примѣръ.* Въ уравненіи

$$x^6-378x^5+38189x^4-492368x^3-572554x^2-213720x-26352=0,$$

$a=378$, $c=80$, $b=38189>ac$, $a>c$; опять выгоднѣе употребить случай $c$) для отысканія предѣла, который и найдется

$$L=1+\sqrt{38189}=197;$$

а по Ньютону $L=196$.

Изъ всего этого видно, что для полученія высшаго предѣла, *ближайшаго* къ корнямъ даннаго уравненія, не довольно прибѣгать къ самымъ общимъ способамъ, но надобно принимать въ помощь особенные пріемы, наибольше выгодные, соображаясь съ различными видами уравненій, какіе мы разсматривали въ $n^{os}$ **397**, **398**, **399**, **400** и **401**.

**402.** *Низшимъ предѣломъ положительныхъ корней даннаго уравненія* называется число ближайшее меньшее къ самому меньшему положительному корню. Чтобы найти этотъ предѣлъ, надобно въ данное уравненіе

$$f(x)=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Tx+U=0,$$

подставить $x=\frac{1}{y}$, и освободить отъ знаменателей, то получится

$$f(y)=y^n+\frac{T}{U}y^{n-1}+\frac{S}{U}y^{n-2}+\ldots+\frac{B}{U}y^2+\frac{A}{U}y+\frac{1}{U}=0.$$

Очевидно, что, если $a$, $b$, $c$,.... суть корни уравненія $f(x)=0$, то $y=\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$,.... будутъ корнями для $f(y)=0$; потому что $y=\frac{1}{x}$. Наибольшій изъ всѣхъ корней этого уравненія $\frac{1}{a}$ будетъ самымъ меньшимъ положительнымъ корнемъ даннаго $f(x)=0$, оттого что дробь $\frac{1}{a}$ будетъ самою большею, когда ея знаменатель самый меньшій. Посему, если $l$ есть высшій предѣлъ корней для $f(y)=0$, то $\frac{1}{l}$ будетъ низшимъ предѣломъ корней даннаго уравненія $f(x)=0$.

Для полученія низшаго предѣла корней отрицательныхъ, преобразуемъ данное уравненіе $f(x)=0$ въ $f(-x)=0$, и найдемъ низшій предѣлъ положительныхъ корней послѣдняго; онъ будетъ низшимъ предѣломъ корней отрицательныхъ для $f(x)=0$.

***Примѣръ.*** Въ уравненіи,

$$f(x)=x^3-12x^2+20x-5=0,$$

высшій предѣлъ положительныхъ корней 11.

Возмемъ $x=\frac{1}{y}$; найдется

$$f(y)=y^3-4y^2+\frac{12}{5}y-\frac{1}{5}=0.$$

Въ этомъ послѣднемъ, высшій предѣлъ $=4$; слѣдовательно, $\frac{1}{4}$ будетъ низшимъ предѣломъ положительныхъ корней даннаго уравненія $f(x)=0$; стало-быть, всѣ положительные корни его заключаются между 11 и $\frac{1}{4}$. Отрицательныхъ же корней нѣтъ, потому что это уравненіе полное, и содержитъ однѣ перемѣны знаковъ.

### B. Розысканіе и отдѣленіе корней соизмѣримыхъ.

**403.** Соизмѣримые корни въ уравненіяхъ бываютъ цѣлые и дробные; мы начнемъ съ первыхъ.

Предварительно докажемъ, что *всякое уравненіе, котораго первый членъ имѣетъ коефиціентомъ единицу, а коефиціенты во всѣхъ прочихъ членахъ цѣлыя числа, можетъ имѣть соизмѣримые корни только цѣлыя числа.*

Для сего возмемъ уравненіе съ *цѣлыми коефиціентами*

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0;$$

положимъ, что оно имѣетъ соизмѣримый дробный корень $\frac{a}{b}$, и подставимъ его на мѣсто $x$; получится:

$$\frac{a^m}{b^m}+P.\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}+\ldots+T.\frac{a}{b}+U=0.$$

Послѣ сего помножимъ все на $b^{m-1}$, и отдѣлимъ первый членъ:

$$\frac{a^m}{b}=-Pa^{m-1}-Qa^{m-2}b-\ldots-Tab^{m-2}-Ub^{m-1}.$$

Вторая часть этого равенства получилась вся цѣлою; по этому $\frac{a^m}{b}$ не можетъ быть дробью, а слѣдовательно и данное уравненіе не можетъ имѣть соизмѣримыхъ дробей своими корнями.

**404.** И такъ, если преобразовать (**387**, B) данное уравненіе въ другое, въ которомъ бы коефиціентомъ перваго члена была 1-ца, а всѣ прочіе коефиціенты цѣлыя числа; то всѣ его соизмѣримые корни будутъ цѣлыми числами. Но, извѣстно, что послѣдній членъ уравненія равенъ произведенію всѣхъ его корней, и потому долженъ дѣлиться безъ остатка на каждый цѣлый соизмѣримый корень; слѣдовательно, стоитъ только разложить послѣдній членъ на всѣ его цѣлые множители, подставлять каждый изъ нихъ въ уравненіе, и смотрѣть, который изъ нихъ будетъ удовлетворять ему, то и найдутся всѣ цѣлые корни по-одиначкѣ. Пусть $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$,... найденные корни: чтобъ исключить ихъ изъ даннаго уравненія $f(x)=0$, надобно раздѣлить оное на произведеніе $(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots$.

Во всѣхъ случаяхъ надобно прежде всего, искать высшій и низшій предѣлы корней положительныхъ и отрицательныхъ, дабы чрезъ это освободиться отъ лишнихъ подстановленій.

Такъ, въ уравненіи,

$$x^3-6x^2+27x-38=0,$$

дѣлителями послѣдняго члена 38 суть числа 1, 2, 19, 38, а высшій предѣлъ корней 7 (по Брету); стало-быть, надобно пробовать только 1 и 2. Изъ этихъ множителей только 2 удовлетворяетъ уравненію и есть его корнемъ. Отрицательныхъ корней нѣтъ, потому что данное уравненіе полное и не имѣетъ ни одного повторенія знаковъ.

Нашедши корень 2, раздѣлимъ уравненіе на $x-2$, получится въ частномъ уравненіе

$$x^2-4x+19=0,$$

изъ котораго получимъ остальные два корня

$$x=2\pm\sqrt{-15},\text{ оба мнимые.}$$

Но этотъ способъ, по видимому, легкій, становится утомителенъ, когда прилагается къ уравненію высокой степени, котораго послѣдній членъ разлагается на большое число множителей, и когда самый большій корень его великъ. Въ такихъ случаяхъ розысканіе цѣлыхъ корней, соизмѣримыхъ, облегчается слѣдующими способами.

1-й способъ.—Этотъ способъ мы изъяснимъ на уравненіи 4-й степени:

$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0$$

Пусть $a$ корень уравненія; подставимъ его на мѣсто $x$:

$$a^4+Pa^3+Qa^2+Ra+S=0,\text{ или}$$

$$S=-Ra-Qa^2-Pa^3-a^4;\text{ отсюда}$$

$$S:a=-R-Qa-Pa^2-a^3.$$

Частное $S:a$ должно быть цѣлымъ числомъ; потому что корень $a$ долженъ дѣлить послѣдній членъ S безъ остатка. — Перенесемъ $-R$ въ первую часть:

$$(S:a)+R=-Qa-Pa^2-a^3,$$

потомъ раздѣлимъ на $a$:

$$(S:a+R):a=-Q-Pa-a^2.$$

Здѣсь вторая часть — цѣлое число, то и первая должна быть числомъ цѣлымъ. Перенесемъ $-Q$ въ первую часть, и опять раздѣлимъ на $a$; будетъ

$$[(S:a+R):a+Q]:a=-P-a.$$

И здѣсь вторая часть—цѣлое число, то и первая должна быть этимъ же числомъ. Перенесемъ $-P$ въ первую часть, и снова раздѣлимъ на $a$; получится:

$$\{[(S:a+R):a+Q]:a+P\}:a=-1.$$

Наконецъ, къ частному, составляющему всю первую часть равенства, перенесемъ $-1$; тогда все должно сдѣлаться равнымъ нулю:

$$\{[(S:a+R):a+Q]:a+P\}:a+1=0.$$

И такъ, чтобъ узнать, будетъ ли корнемъ уравненія одинъ изъ дѣлителей $a$ его послѣдняго члена S, надобно:

1) раздѣлить послѣдній членъ S на $a$, и къ цѣлому частному числу придать кофиціентъ члена съ первою степенью неизвѣстной $x$;

2) полученную сумму $S:a+R$ опять раздѣлить на $a$, и къ частному придать кофиціентъ члена, въ которомъ находится вторая степень неизвѣстной, $x^2$;

3) эту сумму раздѣлить на $a$, и къ цѣлому частному придать коефиціентъ, помножающій $x^3$;

4) продолжать это дѣйствіе до перваго члена уравненія; и если послѣднее частное, сложенное съ единицею, то есть, коефиціентомъ перваго члена, будетъ $=0$, то $a$ непремѣнно корень уравненія.

Если какое нибудь изъ частныхъ дѣленій не будетъ безъ остатка, то надобно заключить, что $a$ не есть корень уравненія.

*Примѣръ.* Послѣдній членъ уравненія

$$x^5+3x^4-35x^3-41x^2+66x+70=0$$

имѣетъ дѣлителями 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70, и тѣ же числа, взятыя съ знакомъ *минусъ*. Высшій предѣлъ корней положительныхъ $=\sqrt{35}=6$, а для корней отрицательныхъ 10; посему, цѣлые соизмѣримые корни надобно искать только между числами

$$1,\ 2,\ 5,\ -1,\ -2,\ -5,\ -7.$$

Единица не корень уравненія, потому что изъ непосредственнаго подстановленія видно, что сумма коефиціентовъ положительныхъ не равна суммѣ отрицательныхъ:

$$1+3-35-41+66+70=140-76=64.$$

Беру дѣлитель 2; выписываю коефиціенты членовъ уравненія, и розыскиваю, какъ показываетъ правило,

| | Дѣлители: |
|---|---|
| 1, +3, —35, —41, +66, 70 | 2 не корень |
| част. 35+66= 101 | |
| част. 14+66= 80 | 5 корень |
| 16—41=—25 | |
| —5—35=—40 | |
| —8+ 3=— 5 | |
| —1+ 1= 0 | |

а именно: дѣлю 70 на 2; получаю 35 и придаю къ 66. Сумма 101 не дѣлится на 2 безъ остатка; слѣдовательно 2 не корень уравненія.

Беру слѣдующій дѣлитель 5. Ищу 70:5=14; придаю къ 14 коефиціентъ 66, и сумму 80 дѣлю на 5; къ частному +16 придаю —41, и сумму —25 дѣлю на 5; къ частному —5 придаю слѣдующій коефиціентъ —35, и сумму —40 дѣлю на 5; къ частному —8 придаю коефиціентъ +3, и сумму —5 дѣлю на 5; къ частному —1 придаю +1, и получаю нуль. Слѣдовательно 5 есть корень уравненія.

Для полученія *цѣлыхъ отрицательныхъ корней,* перемѣняю знаки на чётныхъ мѣстахъ членовъ даннаго уравненія; выписываю коефиціенты

$$1,\ -3,\ -35,\ +41,\ +66,\ -70,$$

и тотчасъ замѣчаю что 1-ца корень, потому что сумма коефиціентовъ положительныхъ равна суммѣ отрицательныхъ.

Беру дилитель 2;

| | Дѣлители: |
|---|---|
| $1,\ -3,\ -35,\ +41,\ +66,\ -70$ | 2 не корень |
| част. $-35+66=31$ | |
| $-14+66=52$ | 5 не корень |
| $-10+66=56$ | 7 корень |
| $+8+41=49$ | |
| $+7-35=-28$ | |
| $-4-3=-7$ | |
| $-1+1=0$ | |

Ищу $-70:2=-35$; къ частному $-35$ придаю слѣдующій коефиціентъ $+66$; и получаю сумму 31, которая не дѣлится безъ остатка на 2. Слѣдовательно, 2 не корень.

Беру множитель 5; ищу $-70:5=-14$; къ этому $-14$ придаю 66, и получаю сумму 52, которая также не дѣлится на 5 Слѣдовательно и 5 не есть корень.

Наконецъ, беру множитель 7. Ищу $-70:7=-10$; придаю 66, и сумму $+56$ дѣлю на 7; къ частному 8 придаю 41; и сумму 49 дѣлю на 7; частное 7 слагаю съ $-35$, и сумму $-28$ дѣлю на 7; частное $-4$ слагаю съ $-3$, и сумму $-7$ дѣлю на 7; наконецъ, частное $-1$ слагаю съ $+1$, получаю нуль. Слѣдовательно 7 корень уравненія $f(-x)=0$.

И такъ, найденные корни даннаго уравненія суть:

$$5,\ -1,\ -7.$$

А раздѣливъ $f(x)=0$ на $(x-5)(x+1)(x+7)$, получится $x^2-2=0$, откуда найдутся два остальные корня $x=\pm\sqrt{2}$, оба несоизмѣримые.

**2-й способъ.** — Въ 1838 году *Бретшнейдеръ* предложилъ другой способъ розысканія цѣлыхъ соизмѣримыхъ корней, имѣющій ту выгоду, что посредствомъ его данное уравненіе, въ то же время, и освобождается отъ этихъ корней.

Онъ основывается на томъ, что всякое уравненіе

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\ldots+a_n=0$$

можетъ быть написано такъ:

$$\Big\{[(1.x+a_1)x+a_2]x+\ldots+a_{n-1}\Big\}x+a_n=0;$$

напримѣръ: $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ есть тоже, что

$$\Big\{[(1.x+a_1)x+a_2]x+a_3\Big\}x+a_4=0$$

Разложивъ послѣдній членъ $a_4$ на его цѣлые множители 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,...., теперь легко можно каждый такой множитель испытывать чрезъ подстановленіе. Положимъ, что хотимъ пробовать множитель $\alpha$:

Надобно сперва взять $1.\alpha+a_1$, и помножить на $\alpha$; произведеніе $(1.\alpha+a_1)\alpha$ сложить со вторымъ коефиціентомъ $a_2$, и все помножить на $\alpha$, и такъ далѣе продолжать до послѣдняго члена. Если получится въ результатѣ *нуль*, это будетъ признакомъ, что $\alpha$ корень уравненія; а если выйдетъ какой нибудь результатъ $\pm R$ (онъ тотъ самый, во что обратится $f(x)=0$ при подстановленіи $\alpha$ на мѣсто $x$), то $\alpha$ не корень.

**405.** Весьма замѣчательно, что если выйдетъ результатъ $=0$, мы не только узнаемъ, что нашелся корень $\alpha$ уравненія, но что, въ тоже время, оно раздѣлилось уже на $x-\alpha$, то есть, понизилось на одну степень. Чтобъ доказать это послѣднее, возмемъ уравненіе

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0,$$

введемъ въ него корень $\alpha$, помноживъ на $x-\alpha$; получится:

$$F(x)=x^4+(a-\alpha)x^3+(b-a\alpha)x^2+(c-b\alpha)x-\alpha c=0.$$

Изъ самаго состава $F(x)$ видно, что, для перехода отъ его коефиціентовъ къ коефиціентамъ $f(x)=0$, надобно только придать $1.\alpha$, $a\alpha$, $b\alpha$, $c\alpha$, соотвѣтственно къ коефиціентамъ $a-\alpha$, $b-a\alpha$, $c-b\alpha$, $-c\alpha$. Но мы именно это самое и дѣлаемъ въ показанномъ дѣйствіи, по слѣдующему механизму:

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1, & a-\alpha, & b-a\alpha, & c-b\alpha, & -\alpha c & \\
\hline
 & 0, & +\alpha, & +a\alpha, & +b\alpha, & +\alpha c & \\
\alpha) & 1, & a, & b, & c, & 0=f(\alpha). &
\end{array}$$

Въ первой строкѣ пишутся коефиціенты даннаго уравненія $F(x)=0$, и подъ ними проводится черта. Во второй строкѣ на первомъ мѣстѣ ставится нуль. Въ третьей строкѣ на первомъ мѣстѣ ставится 1-ца, и при ней, съ лѣвой стороны, испытываемый множитель $\alpha)$. Берется $1.\alpha=\alpha$, ставится во второй строкѣ на второмъ мѣстѣ, и слагается съ коефиціентомъ $a-\alpha$; сумма $a$ ставится въ третьей строкѣ на второмъ мѣстѣ. Эта сумма $a$ помножается на $\alpha)$; произведеніе $a\alpha$ ставится во второй строкѣ на третьемъ мѣстѣ, слагается съ коефиціентомъ $b-a\alpha$, и сумма $b$ пишется на третьемъ мѣстѣ третьей строки. Это $b$ помножается опять на $\alpha)$, произведеніе $+b\alpha$ ставится во второй строкѣ подъ $c-b\alpha$, слагается съ нимъ, и сумма $c$ пишется на четвертомъ мѣстѣ третьей строки. Наконецъ, это $c$ помножено на $\alpha)$, произведеніе $+\alpha c$ подписано подъ $-\alpha c$, и сложено; въ результатѣ получился нуль. Стало-быть, $F(\alpha)=0$, и $\alpha$ есть корень уравненія. Здѣсь же находимъ, что въ третьей строкѣ получились коефиціенты 1, $a$, $b$, $c$, членовъ уравненія

$$x^3+ax^2+bx+c=0=f(x),$$

т. е. мы перешли отъ уравненія $F(x)$ четвертой степени къ уравненію $f(x)$ третьей степени, въ которое обращается первое чрезъ раздѣленіе на $x-\alpha$.

*Примѣръ*. Найти цѣлые соизмѣримые корни уравненія

$$F(x)=x^4-5x^3-11x^2+79x-84=0,$$

въ которомъ 84 дѣлится на 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84; предѣлъ положительныхъ корней $=5$ (по Ньютону), предѣлъ отрицательныхъ $=-5$. Стало-быть, надобно искать корни между числами 1, 2, 3, 4; —1, —2, —3, —4. Для этого выпишемъ коефиціенты уравненія въ одну строку, проведемъ подъ ними черту, и проч.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $1, -5, -11, +79, -84$...... | коефиціенты; | |
| | $0, +2, -6, -34, +90$...... | произведенія $1.2$, | $-3.2$,.... |
| $+2)$ | $1, -3, -17, +45, +6=f(2)$... | суммы $-5+2$, | $-11-6$,... |
| | $0, +3, -6, -51, +84$...... | произведенія $1.3$, | $-2.3$,.... |
| $+3)$ | $1, -2, -17, +28, 0=f(3)$... | суммы $-5+3$, | $-11-6$,... |
| | $0, +4, +8, -36$ | | |
| $+4)$ | $1, +2, -9, -8=\varphi(4)$ | | |

Въ третьей строкѣ послѣдняя сумма получилась $+6$; она показываетъ, во что обращается $f(x)$ при подстановленіи 2 на мѣсто $x$; отчего тамъ и означено $+6=f(2)$.

Въ четвертой строкѣ, на первомъ мѣстѣ, поставленъ опять 0, а въ пятой строкѣ на первомъ мѣстѣ 1-ца, и подлѣ нея новый множитель $+3$, взятый для испытанія. Дѣйствіе производится такъ, какъ бы не было строкъ второй и третьей, то есть: берется, $1.3=3$, ставится на второмъ мѣстѣ четвертой строки, слагается съ $-5$ первой строки; сумма $-2$ пишется въ пятой строкѣ. Далѣе, берется снова $3\times-2=-6$, ставится подъ 11, и сумма $-17$ пишется подъ $-6$, и такъ далѣе. По окончаніи дѣйствія выходитъ нуль, то есть, $f(3)=0$: слѣдовательно, 3 есть корень даннаго уравненія. Вмѣстѣ съ этимъ мы перешли къ уравненію 3-й степени, котораго коефиціенты $1, -2, -17, +28$, то есть, къ

$$x^3-2x^2-17x+28=0=\varphi(x),$$

Посему, для испытанія дѣлителя 4, взяты коефиціенты только этого уравненія:

| | |
|---|---|
| | $1, -2, -17, +28$ |
| | $0, +4, +8, -36$ |
| $4)$ | $1, +2, -9, -8=\varphi(4)$ |

Слѣдовательно, 4 не корень уравненія.

Послѣдній членъ уравненія $\varphi(x)=0$ есть $28=4.7$; а потому, для испытанія отрицательныхъ корней, беру $-4$, и коефиціенты:

$$\begin{array}{rllll}
 & 1, & -2, & -17, & +28 \\ \hline
 & 0, & -4, & +24, & -28 \\
-4) & 1, & -6, & +7, & 0=\varphi(-4) \\ \hline
\end{array}$$

Слѣдовательно, $-4$ корень уравненія; послѣ этого остается уравненіе 2-й степени,

$$x^2-6x+7=0, \text{ изъ котораго}$$

$$x=3\pm\sqrt{2}, \text{ оба корня несоизмѣримые.}$$

*Примѣръ.* Поищемъ цѣлые корни уравненія

$$f(x)=x^5-2x^4-13x^3+20x^2+30x-36=0.$$

Послѣдній его членъ 36 дѣлится на 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Предѣлы корней $+4$ и $-4$. И такъ, надобно испытывать только числа 1, 2, 3, $-1$, $-2$, $-3$.

$$\begin{array}{rllllll}
 & 1, & -2, & -13, & +20, & +30, & -36 \\ \hline
 & 0, & +1, & -1, & -14, & +6, & +36 \\
+1) & 1, & -1, & -14, & +6, & +36, & 0=f(1), \text{ корень.} \\ \hline\hline
 & 0, & +2, & +2, & -24, & -36 & \\
+2) & 1, & +1, & -12, & -18, & 0=\varphi(2), \text{ корень.} & \\ \hline\hline
 & 0, & +3, & +12, & 0 & & \\
+3) & 1, & +4, & 0, & -18=\varphi(3), \text{ не корень.} & &
\end{array}$$

Для розысканія отрицательныхъ корней, беру

$$\begin{array}{rlllll}
 & 1, & +1, & -12, & -18, & 0=\varphi(x) \\ \hline
 & 0, & -1, & 0, & +12 & \\
-1) & 1, & 0, & -12, & -6=\varphi(-1), \text{ не корень.} & \\ \hline
 & 0, & -2, & +2, & +20 & \\
-2) & 1, & -1, & -10, & +2=\varphi(-2), \text{ не корень.} & \\ \hline
 & 0, & -3, & +6, & +18 & \\
-3) & 1, & -2, & -6, & 0=\varphi(-3), \text{ корень.} & \\ \hline
\end{array}$$

Оставшееся уравненіе $x^2-2x-6=0$, по разрѣшеніи, даетъ $x=1\pm\sqrt{7}$. И такъ, корни даннаго уравненія суть: $1$, $2$, $-3$, $1+\sqrt{7}$, $1-\sqrt{7}$.

**406.** Если уравненіе имѣетъ соизмѣримые корни дробные, то оно необходимо должно быть вида:

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+U=0,$$

гдѣ A, B, C,....U, цѣлыя числа, не содержащія общаго множителя, и притомъ $A > 1$; такъ что нельзя освободить первый членъ отъ его коефиціента A, не сдѣлавъ какіе ни есть коефиціенты дробными. Уравненіе,

$$x^m + \frac{B}{A} x^{m-1} + \frac{C}{A} x^{m-2} + \ldots + \frac{U}{A} = 0,$$

необходимо будетъ имѣть дроби.

Для розысканія соизмѣримыхъ дробныхъ корней, освободимъ это уравненіе отъ дробей, положивъ $x = \frac{y}{A}$; получится

$$y^m + By^{m-1} + ACy^{m-2} + A^2Dy^{m-3} + \ldots + A^mU = 0,$$

уравненіе, въ которомъ могутъ быть только цѣлые соизмѣримые корни (кромѣ несоизмѣримыхъ и мнимыхъ). Теперь отыщемъ цѣлые корни $b$, $b'$,..... этого уравненія по какому нибудь способу: тогда изъ $x = \frac{y}{A} = \frac{b}{A}$, $x' = \frac{b'}{A'}$,.... найдутся соизмѣримые дробные корни даннаго уравненія $f(x) = 0$.

*Примѣръ.* — Уравненіе $3x^3 - 2x^2 + 9x - 6 = 0$, очевидно, имѣетъ дробные корни, изъ которыхъ нѣкоторые могутъ быть соизмѣримы. Для розысканія сихъ послѣднихъ, освободимъ первый членъ отъ коефиціента 3:

$$x^3 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{9}{3} x - \frac{6}{3} = 0;$$

исключимъ дроби, полагая $x = \frac{1}{3} y$; получится:

$$y^3 - 2y^2 + 27y - 54 = 0.$$

Отыщемъ цѣлые корни этого уравненія, разложивъ послѣдній его членъ 54 на дѣлители: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54. Высшій предѣлъ корней $= 3$; стало-быть, надобно пробовать, не будутъ ли корнями числа 1 и 2. (Отрицательныхъ корней нѣтъ, потому что уравненіе содержитъ однѣ перемѣны знаковъ).

Здѣсь 1 не корень уравненія, потому что сумма коефиціентовъ положительныхъ не равна суммѣ отрицательныхъ. Но, 2 будетъ корнемъ, потому что

$$\begin{array}{lllll} & 1, & -2, & +27, & -54 \\ \hline & 0, & +2, & 0, & +54 \\ 2) & 1, & 0, & +27, & 0 = f(2) \\ \hline \end{array}$$

Остальнымъ уравненіемъ будетъ

$$y^2 + 27 = 0, \text{ откуда}$$

$$y = \pm\sqrt{-27} = \pm 3\sqrt{-3}.$$

Слѣдовательно, $x = \frac{y}{3} = \frac{2}{3}$; также

$$x' = \frac{y}{3} = \pm\sqrt{-3}.$$

Такимъ образомъ найденъ соизмѣримый дробный корень $\frac{2}{3}$ и два мнимые $+\sqrt{-3}$, $-\sqrt{-3}$.

### С. Розысканіе и отдѣленіе равныхъ корней.

**407.** Равные корни всякаго рода можно находить и отдѣлять изъ уравненій слѣдующимъ образомъ.

Пусть $a$, $b$, $c$,.... $l$, корни даннаго уравненія

$$f(x)=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)=0.$$

Чтобъ узнать, имѣетъ ли оно нѣкоторые корни равные, подставимъ въ него $x+z$ на мѣсто $x$; получится:

$$f(x+z)=f(x)+z.f'(x)+\frac{z^2}{1.2}f''(x)+\ldots+z^{n-2}.\varphi'(x)+z^{n-1}.\varphi(x)+z^n$$

$$=(x+z-a)(x+z-b)(x+z-c)\ldots, \text{ или}$$

$$=(z+\overline{x-a})(z+\overline{x-b})(z+\overline{x-c})\ldots, \text{ или}$$

$$z^n+z^{n-1}\varphi(x)+\ldots+\frac{z^2}{1.2}f''(x)+zf'(x)+f(x)=(z+\overline{x-a})(z+\overline{x-b})\ldots.$$

Первая часть этого равенства, очевидно, состоитъ изъ произведенія $n$ такихъ биномовъ, у коихъ первый членъ $z$, а второй $x-a$, $x-b$,....; слѣдовательно, послѣдній членъ его

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots=0,$$

равенъ произведенію всѣхъ такихъ вторыхъ членовъ, и есть самое данное уравненіе.

Первый производный многочленъ $f'(x)$ въ предпослѣднемъ членѣ состоитъ изъ суммы различныхъ произведеній биномовъ $x-a$, $x-b$, $x-c$,...., взятыхъ по $n-1$. А какъ одинъ членъ этой суммы $=\frac{f(x)}{x-a}$, другой $=\frac{f(x)}{x-b}$, и т. д., то вся сумма ихъ

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\frac{f(x)}{x-c}+\ldots+\frac{f(x)}{x-l}.$$

Второй производный многочленъ $f''(x)$ долженъ состоять изъ суммы различныхъ произведеній тѣхъ же биномовъ $x-a$, $x-b$,.... взятыхъ по $n-2$; то эта сумма будетъ

$$f''(x)=\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}+\frac{f(x)}{(x-a)(x-c)}+\ldots, \text{ и т. д.}$$

Положимъ теперь, что данное уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ $m$ равныхъ корней $a=b=c=\ldots$, или $m$ равныхъ биномовъ $x-a=x-b=x-c=\ldots$; тогда будетъ:

$$f(x)=(x-a)^m(x-i)\ldots(x-l)=0, \text{ и}$$

$$f'x=\frac{mf(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-i}+\ldots+\frac{f(x)}{x-l}, \text{ или}$$

$$f'(x)=m(x-a)^{m-1}(x-i)\ldots(x-l)+(x-a)^m(\ldots)(x-l)+(x-a)^m(x-i)\ldots$$

Откуда видно, что $f(x)$ и $f'(x)$ имѣютъ общій наибольшій дѣлитель $(x-a)^{m-1}$.

Еслибы въ $f(x)=0$, кромѣ того, были еще $p$ равныхъ корней $h$; то нашли бы также, что $f(x)$ и $f'(x)$ имѣютъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ

$$(x-a)^{m-1}.(x-h)^{p-1}; \text{ и такъ далѣе.}$$

Изъ этого объясненія слѣдуетъ, что, *для отысканія равныхъ корней въ уравненіи* $f(x)=0$, *надобно взять его первый производный многочленъ* $f'(x)$, *потомъ найти между* $f(x)$ *и* $f'(x)$ *общій наибольшій дѣлитель, который и будетъ состоять изъ произведенія разныхъ степеней биномовъ, содержащихъ равные корни.* Положимъ, что этотъ дѣлитель $=(x-a)^{m-1}.(x-h)^{p-1}.(x-r)^{q-1}$; то данное уравненіе содержитъ $m$ равныхъ корней $a$, $p$ корней $h$, $q$ корней $r$. Тогда надобно будетъ уравненіе раздѣлить на этотъ общій наибольшій дѣлитель; отчего исключатся изъ него всѣ равные корни, и степень его понизится на столько единицъ, сколько было всѣхъ этихъ корней.

Уравненіе не имѣетъ равныхъ корней, если между $f(x)$ и $f'(x)$ не найдется общій наибольшій дѣлитель, зависимый отъ $x$.

*Примѣръ.*—Уравненіе $f(x)=x^4-x^3-3x^2+5x-2=0$ даетъ первый производный многочленъ $f'(x)=4x^3-3x^2-6x+5$. Общій наибольшій дѣлитель между ними найдется $x^2-2x+1=(x-1)^2$. Изъ этого слѣдуетъ, что въ данномъ уравненіи находятся три равные корня $x=1$; а, раздѣливъ $f(x)=0$ на $(x-1)^3$, получится частное $x-2=0$, откуда $x=2$. И такъ, данное уравненіе состоитъ изъ корней 1, 1, 1, 2.

Такъ сразу опредѣляются равные корни, когда общій наибольшій дѣлитель бываетъ первой или второй степени отъ $x$. Надобно только уравнять его нулю, и полученное уравненіе первой или второй степени разрѣшить. Если это уравненіе первой степени, то его корень въ данномъ уравненіи находится два раза. Если же это уравненіе второй степени, то изъ него получатся два корня неравные либо равные (дѣйствительные или мнимые): въ первомъ случаѣ, каждый изъ корней будетъ находиться два раза въ уравненіи $f(x)=0$, а во-второмъ случаѣ—три раза, какъ это видѣли въ предыдущемъ примѣрѣ.

**408.** Но, можетъ случиться, что, между даннымъ уравненіемъ $f(x)=0$ и его производною $f'(x)$, общимъ наибольшимъ дѣлителемъ найдется многочленъ высокой степени; то, для полученія равныхъ корней по-одиначкѣ, надобно употребить тотъ же способъ, какъ показываетъ слѣдующее разсмотрѣніе.

Означимъ чрезъ $X_1$ произведеніе различныхъ биномовъ первой степени уравненія $f(x)=0$, чрезъ $X_2$ произведеніе биномовъ первой степени двойныхъ корней, $X_3$ произведеніе биномовъ изъ тройныхъ корней; чрезъ $X_4$ произведеніе биномовъ изъ четверныхъ корней; и предположимъ, что нѣтъ другихъ повторяющихся корней. Тогда будетъ

$$f(x)=X_1\,X_2^2\,X_3^3\,X_4^4=0.$$

Пусть $D_1$ общій наибольшій дѣлитель между $f(x)$ и $f'(x)$; онъ будетъ

$$D_1=X_2\,X_3^2\,X_4^3$$

(въ немъ каждый множитель будетъ одною степенью ниже, чѣмъ въ данномъ уравненіи).

Возмемъ производную функцію отъ $D_1$, и между ею и $D_1$ отыщемъ общій наибольшій дѣлитель $D_2$; онъ будетъ

$$D_2=X_3\,X_4^2.$$

Взявъ отъ $D_2$ также производную, найдемъ между ею и $D_2$ общій наибольшій дѣлитель $D_3$, то есть:

$$D_3=X_4.$$

Полиномъ $X_4$ будетъ состоять изъ однихъ неравныхъ множителей; слѣдовательно $D_3$ будетъ первымъ съ своею производною.

Послѣ этого надобно будетъ дѣлить каждое изъ предшествовавшихъ равенствъ на послѣдующее, и назовемъ:

$$\frac{f(x)}{D_1}=Q_1,\ \frac{D_1}{D_2}=Q_2,\ \frac{D_2}{D_3}=Q_3,$$

гдѣ $Q_1=X_1X_2X_3X_4$, $Q_2=X_2X_3X_4$, $Q_3=X_3X_4$.

А раздѣливъ каждое изъ этихъ равенствъ на послѣдующее, а послѣднее на $D_3=X_4$, получимъ:

$$\frac{Q_1}{Q_2}=X_1,\ \frac{Q_2}{Q_3}=X_2,\ \frac{Q_3}{D_3}=X_3.$$

Такимъ образомъ опредѣлятся множители $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$, и отыщутся всѣ корни уравненія $f(x)=0$ чрезъ разрѣшеніе частныхъ уравненій:

$$X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=0,\ X_4=0.$$

Изъ перваго уравненія получатся простые (различные) корни для $f(x)=0$, изъ втораго — двойные, изъ третьяго — тройные, а изъ четвертаго — четверные.

Для примѣра, возмемъ уравненіе,

$$x^8-7x^7-2x^6-11x^5-259x^4-83x^3-612x^2-108x-432=0.$$

Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ между этимъ уравненіемъ и его производною найдется:

$$x^4-7x^3+13x^2+3x-18=D_1.$$

Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ между $D_1$ и его производною будетъ $x-3=D_2$.

Изъ этого видно, что данное уравненіе не содержитъ множителей, возвышенныхъ въ степени высшія третьей; посему,

$$f(x)=X_1X_2^2X_3^3=x^8-7x^7-2x^6+\ldots=0$$

$$D_1=X_2X_3^2=x^4-7x^3+13x^2+3x-18,$$

$$D_2=X_3=x-3.$$

Дѣля каждое предшествующее равенство на послѣдующее, получимъ:

$$X_1X_2X_3=x^4-15x^2+10x+24,$$

$$X_2X_3=x^3-4x^2+x+6;$$

а дѣля первое изъ этихъ равенствъ на второе, а это послѣднее на $X_3=x-3$, найдется

$$X_1=x+4,\ X_2=x^2-x-2.$$

Послѣ сего разрѣшимъ уравненія:

$$x+4=0,\ x^2-x-2=0,\ x-3=0;$$

первое даетъ корень $x=-4$, который только однажды входитъ въ данное уравненіе; второе даетъ корни $-1$ и $+2$, которые входятъ въ уравненіе по два раза; а третье даетъ корень 3, который входитъ въ уравненіе три раза. Посему,

$$f(x)=(x+4)(x+1)^2(x-2)^2(x-3)^3=0.$$

**409.** Поелику двойной корень уравненія $f(x)=0$ находится въ $f(x)$ и $f'(x)$, всякой тройной корень находится въ $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, всякой четверной — въ $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, и т. д.; то очевидно, что такой корень $x=a$, будучи подставленъ въ $f(x)$ и ея производныя, уничтожитъ сряду столько функцій, начиная съ $f(x)$, сколько будетъ находиться такихъ равныхъ корней въ данномъ уравненіи. Наприм. если $x=a$ тройной корень въ уравненіи, то непремѣнно получится $f(a)=0$, $f'(a)=0$, $f''(a)=0$; ни одна изъ остальныхъ функцій не уничтожится, потому что ни одна изъ нихъ не имѣетъ этого корня.—Такъ, въ уравненіи

$$f(x)=x^4+3x^3-6x^2+28x-24=0,$$

котораго производныя суть:

$$\theta_1=4x^3+9x^2-12x+28,$$
$$\theta_2=6x^2+9x-6,$$
$$\theta_3=4x+3,\ \theta_4=1,$$

корень $x=-2$ находится три раза, потому что онъ уничтожаетъ не только $f(x)$, но и двѣ его производныя, то есть, дѣлаетъ $f(-2)=0$, $\theta_1(-2)=0$, $\theta_2(-2)=0$.

Слѣдовательно, число равныхъ корней можно находить и не прибѣгая къ розысканію общаго наибольшаго дѣлителя между $f(x)$ и $\theta_1(x)$: разложивъ послѣдній членъ уравненія на его дѣлителей, искать (**404**), который изъ нихъ удовлетворяетъ уравненію. Если удовлетворяющій множитель повторяется $n$ разъ въ послѣднемъ членѣ; то надобно смотрѣть, не находится ли онъ $n-1$ разъ множителемъ послѣдняго члена функціи $\theta_1(x)$, $n-2$ раза множителемъ послѣдняго члена $\theta_2(x)$, и такъ далѣе, и потомъ пробовать, не обращаетъ ли онъ въ нуль одну первую производную $\theta_1(x)$, или двѣ производныя $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$, и проч. Сколько функцій уничтожитъ онъ, начиная съ $f(x)$, столько разъ онъ будетъ находиться въ данномъ уравненіи:

***Примѣръ.***—Въ уравненіи

$$f(x)=x^4-15x^3+84x^2-208x+192=0,$$

котораго производныя:

$$\theta_1=4x^3-45x^2+168x-208,$$
$$\theta_2=6x^2-45x+84,$$
$$\theta_3=4x-15,\ \theta_4=1,$$

послѣдній членъ $192=1.2.2.2.2.2.2.3=1.4.4.4.3=1.8.8.3$, и, сверхъ того, въ функціяхъ $\theta_1$, $\theta_2$, послѣдніе члены $-208$ и $84$ дѣлятся: первый на $4^2$, а второй на $4$; то число $4$ можно пробовать какъ тройной корень. Мы испытаемъ сперва $2$, а потомъ $4$.

$$\begin{array}{rl}
 & 1,\ -15,\ +84,\ -208,\ +192 \\ \hline
 & 0,\ +2,\ -26,\ +116,\ -184 \\
2) & 1,\ -13,\ +58,\ -92,\ +8=f(2),\ \text{не корень.} \\ \hline
 & 0,\ +4,\ -44,\ +160,\ -192 \\
+4) & 1,\ -11,\ +40,\ -48,\quad 0=f(4),\ \text{корень.} \\ \hline\hline
 & 0,\ +4,\ -28,\ +48 \\
+4) & 1,\ -7,\ +12,\quad 0=f(4),\ \text{корень.} \\ \hline\hline
 & 0,\ +4,\ -12 \\
+4) & 1,\ -3,\quad 0=f''(4),\ \text{корень.} \\ \hline
\end{array}$$

Остальное уравненіе $x-3=0$. Посему, данное уравненіе $=(x-4)^3(x-3)=0$.

## D. ИСКЛЮЧЕНІЕ РАВНЫХЪ КОРНЕЙ, ИМѢЮЩИХЪ ПРОТИВНЫЕ ЗНАКИ, КАКЪ ДѢЙСТВИТЕЛЬНЫХЪ $+\alpha$, $-\alpha$, ТАКЪ И МНИМЫХЪ, ВИДА $\pm\sqrt{-a}$.

**410.** Это розысканіе и исключеніе корней дѣлается очень просто. Если уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ корни $+\alpha$ и $-\alpha$, или корни $+\sqrt{-a}$ и $-\sqrt{-a}$, то, въ первомъ случаѣ, оно должно дѣлиться безъ остатка на двучленъ, $x^2-\alpha^2$, а во второмъ—на двучленъ $x^2+a$. И такъ, станемъ дѣлить данное уравненіе на $x^2+a$ до тѣхъ поръ, пока получится остатокъ, содержащій только первую степень буквы $x$, и члены зависящіе отъ $a$, то есть, остатокъ вида

$$x.f(a)+\mathrm{F}(a).$$

Этотъ остатокъ долженъ быть $=0$, если уравненіе содержитъ въ себѣ множитель $x^2+a=0$, что возможно только тогда, когда оба члена этого остатка уничтожатся, и слѣдовательно оба содержать будутъ въ себѣ корень $a$. Поищемъ общій наибольшій дѣлитель между $f(a)$ и $\mathrm{F}(a)$: если его не будетъ, то въ уравненіи нѣтъ множителя $x^2+a$, и нѣтъ равныхъ корней съ противными знаками; если же найдется этотъ множитель $=a-b$, такъ что будетъ

$$f(a)=(a-b)f'(a),\ \mathrm{F}(a)=(a-b)\mathrm{F}'(a),\ \text{и}$$

$$xf(a)+\mathrm{F}(a)=[xf'(a)+\mathrm{F}'(a)](a-b)=0,$$

то заключаю, что $a-b=0$, или $a=b$.

Такимъ образомъ опредѣлится искомый двучленъ $x^2\pm a=0$, и искомые два корня $x=\pm\sqrt{\pm a}$; а внеся $a=b$ въ частное число, получится уравненіе, освобожденное отъ $x^2\pm a$, слѣдовательно такое, котораго степень понижена двумя единицами.

*Примѣръ.* Пусть данное уравненіе

$$x^5-6x^3+15x^2-40x+60=0.$$

Чтобъ узнать, не имѣетъ ли оно множителя $x^2\pm a$, будемъ дѣлить оное на $x^2+a$:

$$\begin{array}{l|l}
x^5-6x^3+15x^2-40x+60 & x^2+a \\
\underline{-x^5-ax^3} & \overline{x^3-(a+6)x+15} \\
-(a+6)x^3+15x^2-40x+60 & \\
\underline{+(a+6)x^3+(a^2+6a)x} & \\
15x^2+(a^2+6a-40)x+60 & \\
\underline{-15x^2-15a} & \\
(a^2+6a-40)x-(15a-60)=0. &
\end{array}$$

Поищемъ общій наибольшій дѣлитель между $a^2+6a-40$ и $15(a-4)$. Онъ найдется $=a-4$. А какъ остатокъ $=0$, то и $a-4=0$, или $a=4$. Посему $x^2+a=x^2+4$; откуда

$$x=\pm2\sqrt{-1}.$$

Таковы два корня даннаго уравненія.

Частное число $x^3-(a+6)x+15$ теперь обращается въ

$$x^3-10x+15=0;$$

такимъ образомъ данное уравненіе 5-й степени понижено въ третью степень.

*Примѣръ.* Станемъ дѣлить на $x^2+a$ уравненіе

$$x^6-2x^5-26x^4+58x^3+13x^2-200x+300=0;$$

получится частное

$$x^4-2x^3-(a+26)x^2+(2a+58)x+a^2+26a+13,$$

и остатокъ

$$-(2a^2+58a+200)x-(a^3+26a^2+13a-300)=0.$$

Общій наибольшій дѣлитель между $2a^2+58a+200$ и $a^3+26a^2+13a-300$ найдется

$$a^2+29a+100=0, \text{ откуда}$$

$$a=-\frac{29}{2}\pm\sqrt{\frac{29^2}{4}-100}=\frac{-29\pm21}{2}; \text{ то есть,}$$

$$a=-25, \text{ или } a=-4;$$

$$x=\pm\ 5, \text{ или } x=\pm2.$$

Такъ найдены четыре корня даннаго уравненія. А раздѣливъ уравненіе на произведеніе $(x^2-25)(x^2-4)$, мы понизимъ его во вторую степень, а именно, въ $x^2-2x+3=0$, гдѣ

$$x=1\pm\sqrt{-2}.$$

Поступая такимъ же образомъ, мы нашли бы, что уравненіе,

$$x^6-3x^5+14x^4-42x^3+126x^2-135x+405=0,$$

заключаетъ въ себѣ множитель $x^2+5=0$, и понижается въ четвертую степень

$$x^4-3x^3-x^2-27x+81=0.$$

## Е. УРАВНЕНІЯ ВОЗВРАТНЫЯ, И ПОНИЖЕНІЕ ИХЪ СТЕПЕНИ.

**411.** Это такія уравненія, въ которыхъ коефиціенты членовъ, равно отстоящихъ отъ перваго и послѣдняго, равны между собою. Онѣ имѣютъ общій видъ:

$$x^n+An^{n-1}Bx^{n-2}+\ldots\pm Bx^2\pm Ax\pm 1=0.$$

Это уравненіе отличается тѣмъ свойствомъ, что если $\alpha$ есть его корень, то и $\frac{1}{\alpha}$ будетъ также его корнемъ. Всѣ такія уравненія называются *возвратными* (стр. 358).

Въ самомъ дѣлѣ, возмемъ $x=\alpha$:

$$\alpha^n+A\alpha^{n-1}+B\alpha^{n-2}+\ldots\pm B\alpha^2\pm A\alpha\pm 1=0,$$

раздѣлимъ все на $\alpha^n$, и члены уравненія напишемъ въ обратномъ порядкѣ; то получится равенство

$$\frac{1}{\alpha^n}+A.\frac{1}{\alpha^{n-1}}+B.\frac{1}{\alpha^{n-2}}+\ldots\pm B.\frac{1}{\alpha^2}\pm A.\frac{1}{\alpha}\pm 1=0,$$

совершенно тоже, что предыдущее, только въ немъ $\alpha$ замѣнено дробью $\frac{1}{\alpha}$; а это и показываетъ, что $\frac{1}{\alpha}$ есть также корень уравненія. Что доказано здѣсь относительно одного корня, то же должно разумѣть и о всѣхъ прочихъ корняхъ $\beta$, $\gamma$, $\delta$,.... даннаго уравненія.

**412.** Покажемъ теперь, какимъ образомъ возвратныя уравненія могутъ быть понижаемы въ степеняхъ своихъ. Возмемъ сперва *уравненіе чётной степени*,

$$x^6+px^5+qx^4+rx^3+qx^2+px+1=0;$$

раздѣлимъ всѣ его члены на $x^3$, то есть, *на степень въ половину меньшую*, выйдетъ:

$$x^3+px^2+qx+r+\frac{q}{x}+\frac{p}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0, \text{ или}$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+p\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+q\left(x+\frac{1}{x}\right)+r=0.$$

Теперь положимъ $x+\frac{1}{x}=z$, и отсюда найдемъ:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=z^2, \text{ и}$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2.$$

Далѣе возмемъ $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=z^3-2z;$

откуда $x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z.$

Эти выводы подставимъ въ данное уравненіе, получится:

$$z^3-3z+p(z^2-2)+qz+r=0, \text{ или}$$

$$z^3+pz^2+(q-3)z+r-2p=0.$$

Такимъ образомъ данное уравненіе 6-й степени понижено въ третью степень. Этимъ способомъ всѣ возвратныя уравненія четныхъ степеней 4, 6, 8, 10,.... можно привесть въ уравненія степеней 2, 3, 4, 5,.... въ половину меньшихъ.

Уравненіе

$$x^6-px^5+qx^4-rx^3+qx^2-px+1=0,$$

въ которомъ знаки предъ членами слѣдуютъ попеременно + —, обращается въ предыдущее возвратное, чрезъ одно подстановленіе $x=-y$: оно дѣлается

$$y^6+py^5+qy^4+ry^3+qy^2+py+1=0.$$

*Случай.*—Возвратное уравненіе

$$x^6-px^5+qx^4-qx^2+px-1=0,$$

неимѣющее средняго члена, можно написать:

$$(x^6-1)-px(x^4-1)+qx^2(x^2-1)=0.$$

Оно имѣетъ общій множитель $x^2-1=0$ дающій два корня, $x=\pm 1$. Исключивъ этотъ множитель, получимъ опять возвратное уравненіе

$$x^4-px^3+(q+1)x^2-px+1=0, \text{ или}$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-p\left(x+\frac{1}{x}\right)+q+1=0,$$

которое, отъ подстановленія $x+\frac{1}{x}=z$, $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$, обращается въ

$$z^2-pz+q-1=0;$$

отсюда получатся двѣ величины для $z$, посредствомъ коихъ изъ $x+\frac{1}{x}=z$ найдутся остальные четыре корня даннаго уравненія.

**413**. Возмемъ теперь *уравненіе нечётной степени*,

$$x^5+px^4+qx^3+qx^2+px+1=0.$$

Здѣсь тотчасъ видно, что $x=-1$ есть корень, потому что онъ обращаетъ уравненіе въ

$$-1+p-q+q-p+1=0.$$

А раздѣливъ данное уравненіе на $x+1$, получится:

$$\begin{array}{r|r|r|l} x^4-1 & x^3+1 & x^2-1 & x+1=0 \\ +p & -p & +p & \\ & +q & & \end{array}$$

опять возвратное уравненіе, и при томъ чётной степени, которое можетъ быть понижено во вторую степень, какъ видѣли (**412**).

Возмемъ еще уравненіе

$$x^5+px^4+qx^3-qx^2-px-1=0.$$

Очевидно, что оно имѣетъ корнемъ 1-цу; а раздѣливъ его на $x-1$, найдется уравненіе

$$\left.\begin{array}{r}x^4+1\\+p\end{array}\right|\begin{array}{r}x^3+1\\+p\\+q\end{array}\left|\begin{array}{r}x^2+1\\+p\end{array}\right|x+1=0$$

также возвратное, которое можно понизить во вторую степень.

**414.** *Возвратныя уравненія съ равными коефиціентами во всѣхъ членахъ.*

Таково уравненіе

$x^n+x^{n-1}+$[illegible]$^{2}+\ldots+x^2+x+1=0.$

Въ этомъ видѣ уравненія не только могутъ быть понижаемы въ степеняхъ своихъ, но даже нерѣдко со всѣмъ разрѣшаемы.

1) Если оно *чётной степени*, наприм.

$$x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

то сперва надобно его раздѣлить на $x^5$; получится:

$$\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

Положивъ $x+\frac{1}{x}=z$, найдемъ отсюда $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z$, $x^4+\frac{1}{x^4}=z^4-4z^2+2$, $x^5+\frac{1}{x^5}=z^5-5z^3+5z$; и, чрезъ подстановленіе, получимъ уравненіе пятой степени

$$z^5+z^4-4z^3-3z^2+3z+1=0.$$

2) Если это *уравненіе нечётной степени*, то оно, чрезъ разложеніе на двучленныхъ или трычленныхъ множителей, приводится въ уравненіе возвратное чётной степени, которое въ свою очередь можно понизить въ его степени, и нерѣдко дойти такимъ образомъ до его полнаго разрѣшенія.

Пусть дано уравненіе полное

$$x^{25}+x^{24}+x^{23}+x^{22}+\ldots+x^2+x+1=0;$$

оно имѣетъ чётное число членовъ $26=13.2$, и можетъ дѣлиться на $x+1$, потому что ему можно дать видъ

$$x^{24}(x+1)+x^{22}(x+1)+x^{20}(x+1)+\ldots+x^2(x+1)+x+1=0.$$

Стало-быть, одинъ его корень $x=-1$, по отдѣленіи коего, останется уравненіе

$$x^{24}+x^{22}+x^{20}+\ldots+x^4+x^2+1=0.$$

Послѣ сего, положимъ $x^2=y$, будетъ имѣть

$$y^{12}+y^{11}+y^{10}+y^9+\ldots+y^2+y+1=0.$$

опять уравненіе возвратное чётной степени, которое, для $y+\frac{1}{y}=z$, понижается въ шестую степень

$$z^6+z^5-5z^4-4z^3+6z^2+3z-1=0.$$

*Примѣръ.*—Уравненіе

$$x^{23}+x^{22}+x^{21}+x^{20}+\ldots+x^{2}+x+1=0$$

имѣетъ $24=3.8$ члена; его можно раздѣлить безъ остатка на $x^{2}+x+1$, потому что оно приводится въ

$$x^{21}(x^{2}+x+1)+x^{18}(x^{2}+x+1)+\ldots+(x^{2}+x+1)=0, \text{ или}$$

$$(x^{21}+x^{18}+x^{15}+x^{12}+x^{9}+x^{6}+x^{3}+1)(x^{2}+x+1)=0.$$

Слѣдовательно, $x^{2}+x+1=0$; откуда

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}; \text{ и также}$$

$$x^{21}+x^{18}+x^{15}+x^{12}+x^{9}+x^{6}+x^{3}+1=0.$$

Въ послѣднемъ уравненіи положимъ $x^{3}=y$, составится возвратное уравненіе

$$y^{7}+y^{6}+y^{5}+y^{4}+y^{3}+y^{2}+y+1=0,$$

печётной степени. Въ немъ число членовъ $8=2.4$; $y+1$ будетъ его дѣлителемъ, потому что онъ приводится въ

$$(y^{6}+y^{4}+y^{2}+1)(y+1)=0.$$

Здѣсь полагаю, *во-первыхъ*, $y+1=0$, или $y=-1$, и нахожу

$$x^{3}=y=-1, \text{ или } x^{3}+1=0;$$

откуда, $x=-1$. Раздѣливъ $x^{3}+1$ на $x+1$, получится

$$x^{2}-x+1=0, \text{ откуда}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

*Во-вторыхъ*, $y^{6}+y^{4}+y^{2}+1=0$.

Здѣсь, положивъ $y^{2}=z$, имѣю

$$z^{3}+z^{2}+z+1=(z^{2}+1)(z+1)=0.$$

то есть, $z+1=0$, или $z=-1$;

$z^{2}+1=0$ $z=\pm\sqrt{-1}$; а посему,

$$y=\pm\sqrt{z}=\pm\sqrt{-1}, \text{ и также}$$

$$y=\pm\sqrt{\pm\sqrt{-1}}; \text{ и наконецъ}$$

$$x=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{\pm\sqrt{-1}}, \text{ и еще}$$

$$x=\sqrt[3]{\pm\sqrt{\pm\sqrt{-1}}}.$$

Такъ найдены всѣ корни даннаго уравненія 23-й степени.

**415.** *Примѣненіе къ уравненіямъ двучленнымъ.*

Всякое двучленное уравненіе

$$y^{m}\pm a=0,$$

чрезъ подстановленіе $y=x\sqrt[m]{\pm a}$ и сокращеніе, приводится въ простѣйшее возвратное уравненіе $x^{m}\pm1=0$, допускающее пониженіе въ своей степени. Мы разсмотримъ только это послѣднее, въ его двухъ видахъ.

A) $x^m+1=0$.

Если степень *m нечётная*, наприм. $m=5$, и

$$x^5+1=0;$$

то корнемъ будетъ $x=-1$; а раздѣливъ $x^5+1$ на $x+1$, получится

$$x^4-x^3+x^2-x+1=0$$

возвратное уравненіе. Оно, чрезъ подстановленіе $x=-y$, обращается въ

$$y^4+y^3+y^2+y+1=0,\ \text{или}$$

$$y^2+\frac{1}{y^2}+y+\frac{1}{y}+1=0.$$

Если взять $y+\frac{1}{y}=z$, то $y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$, и это уравненіе получитъ видъ

$$z^2+z-1=0;\ \text{откуда}$$

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Послѣ этого, изъ $y+\frac{1}{y}=z$ найдется $y^2-yz=-1$;

слѣдовательно, $$y=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4}}{2};$$

и, наконецъ, $$x=-y=\frac{-z\mp\sqrt{z^2-4}}{2}.$$

Если степень *m чётная*, наприм. $x^{20}+1=0$, или $x^{4\cdot5}+1^{4\cdot5}=0$, то уравненіе можетъ дѣлиться безъ остатка на двучленъ четной степени, и здѣсь именно на $x^4+1$, такъ что

$$x^{20}+1=(x^{16}-x^{12}+x^8-x^4+1)(x^4+1)=0.$$

Посему, имѣемъ: 1) $x^4+1=0$, и

2) $x^{16}-x^{12}+x^8-x^4+1=0$.

Изъ перваго получаемъ $$x^2=\pm\sqrt{-1},$$

$$x=\pm\sqrt{\pm\sqrt{-1}};$$

во второе же подставляемъ $x^4=-y$, и находимъ

$$y^4+y^3+y^2+y+1=0$$

уравненіе возвратное, котораго корни находить умѣемъ (**412**), и такимъ образомъ все данное уравненіе разрѣшить можемъ.

B) $x^m-1=0$.

Для *m нечётнаго первоначальнаго числа*, $x=1$ будетъ корнемъ уравненія. А раздѣливъ на $x-1$, получимъ возвратное уравненіе чётной степени, которую можно понизить на половину. Наприм.

$$x^7-1=0,$$

по раздѣленіи на $x-1$, обращается въ

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

которое, при положеніи $x+\frac{1}{x}=z$, переходитъ въ

$$z^3+z^2-2z+1=0.$$

Когда же показатель $m$ не есть первоначальное число, но состоитъ изъ множителей $p$, $q$, то $x^m-1=x^{pq}-1=0$ можно раздѣлить на $x^p-1$ либо $x^q-1$ и проч.

*Примѣръ*. Уравненіе

$$x^{15}-1=0$$

имѣетъ показателемъ $15=3.5$; оно можетъ быть раздѣлено на двучленъ $x^3-1$, а именно будетъ

$$x^{15}-1=(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)(x^3-1)=0.$$

Отсюда имѣемъ: 1) $x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)=0$,

2) $x^{12}+x^3+x^6+x^3+1=0$.

Изъ перваго получаемъ: $x-1=0$, или $x=1$;

$x^2+x+1=0$, откуда

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2};$$

а во второмъ беру $x^3=y$, и нахожу

$$y^4+y^3+y^2+y+1=0$$

возвратное уравненіе чётной степени, котораго корни легко найти можно; а послѣ того найдутся и корни $x=\sqrt[3]{y}$ даннаго уравненія.

*Примѣчаніе*. — Въ послѣднемъ и прежнихъ примѣрахъ видѣнъ способъ пониженія степеней въ такихъ уравненіяхъ, въ которыхъ степени неизвѣстной во всѣхъ членахъ суть кратныя какого ни есть цѣлаго числа, большаго 1-цы. Напримѣръ, въ уравненіи,

$$x^{12}+ax^9+bx^6+cx^3+d=0,$$

всѣ степени неизвѣстной суть кратныя числа 3; а потому, довольно взять $x^3=z$, чтобы оно понизилось въ четвертую степень

$$z^4+az^3+bz^2+cz+d=0.$$

Но объ этомъ способѣ я не говорилъ особо, во первыхъ потому, что онъ очевидѣнъ; а во вторыхъ, онъ одинъ, безъ рѣшенія уравненій двучленныхъ, недостаточенъ. Такъ, въ этомъ примѣрѣ, нашедши корни $z$, мы должны обратиться къ рѣшенію уравненія $x^3-z=0$, чтобы найти всѣ корни $x$.

### F. Отдѣленіе корней несоизмѣримыхъ.

**116.** Возмемъ уравненіе $f(x)=0$, освобожденное отъ корней равныхъ и корней соизмѣримыхъ, состоящее только изъ корней несоизмѣримыхъ и мнимыхъ. Чрезъ одно подстановленіе чиселъ 1, 2, 3,.... или —1, —2, —3,.... въ это уравненіе рѣдко можно отдѣлить его несоизмѣримые корни, то есть, узнать, между какими частными предѣлами заключается каждый корень отдѣльно. Ибо, всякія два постановленія $\alpha$, $\beta$, обращающія уравненіе въ два результата $+R$, $-R'$, съ противными знаками, показываютъ только, что между $\alpha$ и $\beta$ находится нечётное число корней (**375**), и неизвѣстно, одинъ ли тутъ корень, или три, и болѣе; а подстановленія $\alpha'$, $\beta'$, обращающія уравненіе въ результаты $+R''$, $+R'''$, съ равными знаками, показываютъ, что между $\alpha'$ и $\beta'$ либо нѣтъ корней, либо ихъ чётное число, но, какое, тоже неизвѣстно. Посему, необходимо нужно умѣть открывать признаки, которые бы намъ показывали, при какихъ подстановленіяхъ мы переступаемъ черезъ одинъ, два, или болѣе корней даннаго уравненія, чтобъ начать потомъ раздѣлять ихъ тѣснѣйшими предѣлами.

Способы отдѣленія несоизмѣримыхъ корней представлены *Лагранжемъ, Бюданомъ, Штурмомъ* *) и *Фурье*. Всѣ они превосходны въ своихъ теоріяхъ; но, для практики, я предпочитаю способъ Фурье; а потому объ немъ собственно говорить буду.

**417.** Возмемъ общее уравненіе $f(x)=0$, котораго коефиціенты суть дѣйствительныя числа, и которое освобождено отъ равныхъ корней по извѣстнымъ способамъ (**407**); уменьшимъ корни его числомъ $a$, подставивъ $x=a+z$, то, какъ извѣстно, получится:

$$f(a+z)=f(a)+z.f'(a)+\frac{z^2}{1.2}.f''(a)+\frac{z^3}{1.2.3}.f'''(a)+\ldots+z^n=0,$$

или, короче:

$$\theta(a+z)=\theta(a)+z.\theta_1(a)+z^2.\theta_2(a)+z^3.\theta_3(a)+\ldots+z^n=0.$$

Корни этого уравненія будутъ $z=x-a$. Его $\theta(a)$, $\theta_1(a)$, $\theta_2(a)$,.... совершенно тоже, что $\theta(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$,...., только въ нихъ находится $a$ вмѣсто $x$. По этой причинѣ, впослѣдствіи, мы часто въ $f(a+z)$ будемъ употреблять букву $x$ вмѣсто перемѣнной $a$, которая служитъ для уменьшенія корней даннаго уравненія $f(x)=0$.

Станемъ подставлять сюда числа 1, 2, 3,.... $\alpha$, $\beta$, на мѣсто $a$; получится рядъ уравненій:

$$\theta(1)+z.\theta_1(1)+z^2.\theta_2(1)+\ldots+z^n=0, \text{ гдѣ корни } z=x-1;$$

$$\theta(2)+z.\theta_1(2)+z^2:\theta_2(2)+\ldots+z^n=0, \quad - \quad - \quad z=x-2;$$

..........................................................................

$$\theta(\alpha)+z.\theta_1(\alpha)+z^2.\theta_2(\alpha)+\ldots+z^n=0, \quad - \quad - \quad z=x-\alpha;$$

$$\theta(\beta)+z\ \theta_1(\beta)+z^2.\theta_2(\beta)+\ldots+z^n=0, \quad - \quad - \quad z=x-\beta.$$

Въ нихъ корни $z$ тѣ же, что и въ $f(x)=0$, только уменьшены числами 1, 2, 3,...., $\alpha$, $\beta$.

Если, при переходѣ отъ $z=x-\alpha$ къ $x-\beta$, то есть, при подстановленіяхъ $\alpha$, $\beta$, на мѣсто $a$, *уравненіе* $\theta(a+z)=0$ *потеряетъ одну перемѣну знака*, это покажетъ, что первый и притомъ самый меньшій положительный его корень

---

*) См. Теорію опредѣленныхъ алгебраическихъ уравненій, *Сомова*; стран. 182, 187, и проч. Москва, 1838.

$z$ не только истощился, но даже перешелъ изъ положительнаго въ отрицательный, и что въ $f(x)=0$ самый меньшій корень $x>\alpha$, но $<\beta$; слѣдовательно, между подстановленіями $\alpha$ и $\beta$ находится нѣкоторое число $b$, которое дѣлаетъ $z=x-b=0$, или $x=b$; оно и будетъ корнемъ даннаго уравненія, отдѣлившимся отъ прочихъ корней предѣлами $\alpha$ и $\beta$.

Если $\theta(a+z)=0$, при переходѣ отъ $z=x-\alpha$ къ $x-\beta$, потеряетъ двѣ, три или болѣе перемѣнъ въ порядкѣ знаковъ между ея членами; то два, три, и вообще столько же корней будетъ заключаться между $\alpha$ и $\beta$ въ данномъ уравненіи $f(x)=0$.

**418.** Если $f(x)=0$ содержитъ мнимые корни, которые всегда сопряжены попарно, то рядъ $\theta(a+z)$ вдругъ теряетъ столько паръ перемѣнъ, сколько паръ мнимыхъ корней находится между $\alpha$ и $\beta$. Потому что, отъ постепеннаго уменьшенія пары $p\pm q\sqrt{-1}$ мнимыхъ корней числами 1, 2, 3,...., $\alpha$, $\beta$, оба корня сразу переходятъ изъ положительныхъ въ отрицательные, и потому влекутъ за собою потерю двухъ перемѣнъ знака въ ряду $\theta(a+z)=0$.

**419**, Когда уравненіе $f(x)=0$ состоитъ *изъ однихъ дѣйствительныхъ корней, между которыми нѣтъ равныхъ*, то знаки предъ $\theta(a)$, $\theta_1(a)$, $\theta_2(a)$.... въ ряду $\theta(a+z)$, при подстановленіи чиселъ 1, 2, 3,.... на мѣсто $a$, слѣдуютъ нѣкоторому опредѣленному закону, который нужно знать; потому что всякое отступленіе отъ сего закона въ другихъ уравненіяхъ служитъ признакомъ корней мнимыхъ. Для открытія этого закона подставимъ въ $f(x)=0$ два числа $a-z$, $a+z$, на мѣсто $x$, столь близкія между собою, чтобъ между ними не было ни одного корня, то получимъ:

$$\text{для } a-z,\quad f(a-z)=\theta(a)-z.\theta_1(a)+z^2.\theta_2(a)-....,$$
$$\text{для } a+z,\quad f(a+z)=\vartheta(a)+z\ \theta_1(a)+z^2.\theta_2(a)+.....$$

Поелику $a$ не есть корень даннаго уравненія $f(x)=0$, то $\theta(a)$ не равна нулю. Число $z$ можно взять столь малымъ, что знаки для $f(a-z)$, $f(a+z)$ будутъ зависѣть отъ знака предъ ихъ первымъ членомъ $\theta(a)$; слѣдовательно, онѣ будутъ съ *равными знаками*. Изъ этого заключаемъ, что:

I. *Функція не перемѣняетъ знака отъ подстановленія въ нее чиселъ, между которыми нѣтъ ни одного ея корня.*

Но, если $a$ корень уравненія $f(x)=0$, то $\theta(a)=0$, и тогда будетъ:

$$\text{для } a-z,\ f(a-z)=-z.\theta_1(a)+z^2.\theta_2(a)-....,$$
$$a,\qquad f(a)=\theta(a)=0,$$
$$a+z,\ f(a+z)=+z.\theta(a)+z^2.\theta_1(a)+....$$

Знаки для $f(a-z)$, $f(a+z)$ будутъ зависѣть отъ знака предъ $z.\vartheta(a)$, надобно только взять $z$ довольно малымъ; сверхъ того,

| | | до уничтоженія. | послѣ уничтоженія. |
|---|---|---|---|
| если | $\theta_1(a)=+$, | то $f(a-z)=-$, | $f(a+z)=+$ |
| » | $\theta_1(a)=-$, | то $f(a-z)=+$, | $f(a+z)=-$. |

Отсюда заключаемъ:

II. *Функція $f(x)=0$, несодержащая равныхъ корней, при всякомъ переходѣ чрезъ нуль, перемѣняетъ свой знакъ + на —, или — на +.*

III. *Функція $f(x)=0$, до уничтоженія своего, имѣетъ знакъ противный съ своею производною $\theta_1(a)$, а послѣ уничтоженія — знакъ равный съ своею производною.* Отъ этого порядокъ знаковъ долженъ быть:

| | $\theta_1$ | $\theta$ | | $\theta_1$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| для $a-z$, | + | —, | либо | — | + |
| $a$, | + | 0 | | — | 0 |
| $a+z$, | + | + | | — | — |

Стало-быть, если $\theta(x)$, $\theta_1(x)$, при подстановленіи какого ни есть числа $a_3$, имѣютъ равные знаки, то $\theta(x)$ до тѣхъ поръ не можетъ уничтожиться, пока $\theta_1(x)$ напередъ не перемѣнитъ своего знака, т. е. пока между $\theta(x)$, $\theta_1(x)$ не сдѣлается перемѣны знака отъ слѣдующихъ подстановленій.

Но, чтобы $\theta_1(x)$ могла перемѣнить свой знакъ, надобно ей самой сперва обратиться въ нуль отъ какой ни есть величины $a_2 > a_3$; а чтобы она могла уничтожиться, надобно ей самой имѣть знакъ противный съ своею производною $\theta_2(x)$ при нѣкоторомъ подстановленіи $a_1 > a_2$. Послѣ этого уничтоженія функціи $\theta_1(x)$, старшая функія $\theta(x)$ будетъ имѣть возможность уничтожиться при какомъ нибудь подстановленіи $a > a_1 > a_2 > a_3$.

Напримѣръ, порядокъ знаковъ можетъ быть таковъ:

| | $\theta_2$ | $\theta_1$ | $\theta$ | Число перем. | Число корней. |
|---|---|---|---|---|---|
| для $a_3$, | + | — | — | 1 | |
| | | | | | 0 |
| $a_2$, | + | 0 | — | 1 | |
| | | | | | 0 |
| $a_1$, | + | + | — | 1 | |
| | | | | | 1 |
| $a$, | + | + | 0 | 0 | |
| | | | | | 0 |
| $b > a$, | + | + | + | 0 | |

гдѣ $\theta=\theta(x)$ не прежде получила возможность уничтожиться, какъ послѣ уничтоженія $\theta_1$ или перемѣны съ нею знака.

*Примѣръ.* Отдѣлить корни уравненія

$$\theta=x^3-7x+7=0,$$

Составимъ коефиціенты ряда $\theta(a+z)$, или, проще, ряда $\theta(x+z)$, удерживая букву $x$ вмѣсто $a$, и подразумѣвая, что здѣсь $x$ различенъ отъ $x$ въ данномъ уравненіи; они получатся:

$$\theta=x^3-7x+7,$$

$$\theta_1=3x^2-7,\ \theta_2=3x,\ \theta_3=1.$$

Предѣлы корней даннаго уравненія суть 2 и —4; и такъ беру:

| | $\theta_3$ | $\theta_2$ | $\theta_1$ | $\theta$ | Число перем. | Число корней. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$, и нахожу | $+$ | $0$ | $-$ | $+$ | 2 | |
| $=1$, - | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ | 2 | 0 |
| $={}^3/_2$, - | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | 1 | 1 |
| $=2$, - | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | 1 |

Подстановленіе $x=0$ показываетъ, что рядъ $\theta(x+z)$ имѣетъ двѣ перемѣны, и что данное уравненіе содержитъ два положительные корня.

При подстановленіи $x=1$, остались тѣ же двѣ перемѣны; онѣ показываютъ, что между предѣлами 0 и 1 нѣтъ ни одного корня уравненія.

Подстановленіе 2 уничтожило обѣ перемѣны; стало-быть, между 1 и 2 находятся два корня.

Для раздѣленія этихъ корней частными предѣлами взято $x=\frac{3}{2}$, и въ ряду $\theta(x+z)$ осталась одна перемѣна, соотвѣственная одному корню. Такимъ образомъ мы совершенно узнали, что одинъ корень уравненія находится между предѣлами 1 и $\frac{3}{2}$, а другой между $\frac{3}{2}$ и 2.

Для отдѣленія одного отрицательнаго корня, беру

$$\theta(-x)=x^3-7x-7=0;\ \text{составляю}$$

$$\theta=x^3-7x-7,$$

$$\theta_1=3x^2-7,\ \theta_2=3x,\ \theta_3=1.$$

| | $\theta_2$ | $\theta_2$ | $\theta_1$ | $\theta_0$ | Число перем. | Число корней. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Для $x=0$, нахожу | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | 1 | |
| $=2$, - | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | 1 | 0 |
| $=3$, - | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | 1 | 0 |
| $=4$, - | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | 1 |

Слѣдовательно отрицательный корень даннаго уравненія находится между —3 и —4.

*Примѣръ*. Отдѣлить корни уравненія

$$\theta=x^5-5x^3+20x-30=0,$$

котораго производныя:

$$\theta_1=5x^4-15x^2+20,$$

$$\theta_2=10x^3-15x,\ \theta_3=10x^2-5,\ \theta_4=5x,\ \theta_5=1.$$

Полагая $\theta_3=0$, $\theta_2=0$, имѣемъ отсюда $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$; эти корни возмемъ въ число подстановленій какъ отрицательныхъ, такъ и положительныхъ:

| | $\theta_5$ | $\theta_4$ | $\theta_3$ | $\theta_2$ | $\theta_1$ | $\theta$ | Число перем. | Число корней. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Для $x=-2$, | + | — | + | — | + | — | 5 | |
| $=-\sqrt{\frac{3}{2}}$, | + | — | + | 0 | + | — | 3 | 2 мним. |
| $=-1$, | + | — | + | + | + | — | 3 | 0 |
| $=-\sqrt{\frac{1}{2}}$, | + | — | 0 | + | + | — | 3 | 0 |
| $=-\frac{1}{2}$, | + | — | — | + | + | — | 3 | 0 |
| $=\ 0$, | + | 0 | — | 0 | + | — | 3 | 0 |
| $=\ \frac{1}{2}$, | + | + | — | — | + | — | 3 | 0 |
| $=\ \sqrt{\frac{1}{2}}$, | + | + | 0 | — | + | — | 3 | 0 |
| $=\ 1$, | + | + | + | — | + | — | 3 | 0 |
| $=\ \sqrt{\frac{3}{2}}$, | + | + | + | 0 | + | — | 1 | 2 мним. |
| $=\ 2$, | + | + | + | + | + | + | 0 | 1 |

Изъ пяти корней даннаго уравненія только одинъ дѣйствительный между $\sqrt{\frac{3}{2}}$ и 2, и двѣ пары мнимыхъ: одна соотвѣтствуетъ предѣлу $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, а другая предѣлу $+\sqrt{\frac{3}{2}}$, потому что въ обоихъ случаяхъ встрѣчаемъ

$$\begin{array}{ccc}\theta_3 & \theta_2 & \theta_1 \\ + & 0 & +\end{array}, \text{(см. 420)}.$$

Сверхъ того, находимъ шесть случаевъ, отмѣченныхъ скобками, гдѣ функціи при переходѣ чрезъ нуль, перемѣняютъ свой знакъ, при чемъ всякая старшая функція до уничтоженія своего имѣетъ знакъ противный съ своею производною, а послѣ уничтоженія — знакъ равный съ этою производною.

**420.** *Признаки мнимыхъ корней.* — Положимъ, что данное уравненіе $f(x)=0$, *освобожденное отъ равныхъ корней*, состоитъ изъ корней дѣйствительныхъ и мнимыхъ, или изъ однихъ мнимыхъ, то въ немъ присутствіе мнимыхъ корней обнаруживается слѣдующими признаками:

1) Когда, отъ какого ни есть подстановленія $x=a+z$, въ уравненіи

$$\theta(a+z)=\theta(a)+z.\theta_1(a)+z^2.\theta_2(a)+\ldots.+z^n=0$$

уничтожится какая нибудь средняя функція такъ, что смежныя съ нею функціи останутся съ равными знаками, наприм.

$$\begin{array}{ccc}\theta_2 & \theta_1 & \theta_0 \\ + & 0 & +,\ \text{или} \\ - & 0 & -.\end{array}$$

Это противорѣчіе закону измѣненія знаковъ, свойственному корнямъ дѣйствительнымъ (**419**), покажетъ, что $\theta(a+z)=0$ имѣетъ по крайней мѣрѣ одну пару мнимыхъ корней. Такая же пара корней будетъ и въ данномъ уравненіи $f(x)=0$; ибо, если корень $z=x-a$ будетъ мнимымъ для $\theta(a+z)=0$, то $x$ будетъ мнимымъ для $f(x)=0$.

2) Когда въ уравненіи,

$$\theta(a+z)=\theta(a)+z.\theta_1(a)+z^2.\theta_2(a)+\ldots.+z^n=0,$$

уничтожатся сряду два члена, или болѣе, отъ уничтоженія среднихъ функцій, то оно, а слѣдовательно и $f(x)=0$, имѣетъ мнимые корни (**383**).

**421.** Число функцій, сряду уничтожившихся отъ какого ни есть подстановленія $a$, ведетъ къ заключенію *о числѣ мнимыхъ корней*, соотвѣтственныхъ этому предѣлу; надобно только найти, сколько $\theta(a+z)$ въ этомъ случаѣ теряетъ перемѣнъ знаковъ между своими членами. Но тутъ встрѣчается затрудненіе: какіе знаки надобно приписать этимъ нулевымъ функціямъ, для счета потерянныхъ перемѣнъ. Для разрѣшенія этого недоумѣнія, разсмотримъ, въ какомъ случаѣ могутъ уничтожиться нѣсколько функцій сряду, и какіе знаки онѣ должны имѣть до своего уничтоженія, и послѣ уничтоженія.

Отъ частнаго подстановленія $a$ въ $\theta(a+z)=0$, уничтожаются всѣ тѣ функціи, которыя имѣютъ *равные корни* $a$, или суть кратныя двучлена $x-a$. Сего не можетъ произойти съ $\theta(x)$ и $\theta_1(x)$, потому что данное уравненіе $\theta(x)=0$ предполагается свободно отъ равныхъ корней; но можетъ быть во всѣхъ среднихъ функціяхъ.

Число множителей $x-a$ въ уничтожающихся функціяхъ не будетъ равное (**409**), напримѣръ: если уничтожились четыре функціи сряду, то старшая имѣетъ множителемъ $(x-a)^4$, вторая послѣ нее $(x-a)^3$, третья $(x-a)^2$, а младшая $x-a$. *Всѣ члены ряда* $\theta(a+z)$, *у которыхъ эти множители чётныхъ степеней* $(x-a)^2$, $(x-a)^4$,...., *не перемѣнятъ своихъ знаковъ*, но каждый членъ сохранитъ свой знакъ до и послѣ своего уничтоженія. Отъ этого происходитъ, что:

a) *уничтоженіе сряду четнаго числа среднихъ функцій уноситъ всегда столько же перемѣнъ знаковъ;* b) *а уничтоженіе нечётнаго числа функцій уноситъ число перемѣнъ единицею больше, когда у смежныхъ съ ними функцій знаки равные, или единицею меньше, когда у смежныхъ функцій знаки различные.*

Для объясненія, положимъ, что число функцій, сряду уничтожившихся, *чётное*, напрмм. четыре: $\theta_2$, $\theta_3$, $\theta_4$, $\theta_5$, и что смежныя съ ними, уцѣлѣвшія функціи $\theta_1$ и $\theta_6$, имѣютъ *знаки равные*, то порядокъ знаковъ будетъ таковъ:

| | $\theta_6$ | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| для $a-z$, | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ | или: | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $a$, | $+$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $+$ | | $-$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-$ |
| $a+z$, | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| | | | чет. | | чет. | | | | | | | | |

При этомъ смежныя, уцѣлѣвшія функціи $\theta_1$, $\theta_6$, удержатъ свой знакъ до уничтоженія $\theta_2$; $\theta_3$, $\theta_4$, $\theta_5$, и послѣ ихъ уничтоженія, потому что между предѣлами $a-z$, $a+z$, функціи $\theta_1$, $\theta_6$, не имѣютъ корней. Чтожъ касается до промежуточныхъ, то:

$\theta_5$ должна получить знакъ различный отъ знака ея производной $\theta_6$ до уничтоженія, и одинакій съ нею послѣ уничтоженія (**419**);

$\theta_4$, съ чётною степенью $(x-a)^2$ сохранитъ свой знакъ до и послѣ своего уничтоженія;

$\theta_3$, до исчезанія своего, должна получить знакъ противный съ $\theta_4$, а послѣ исчезанія знакъ съ нею равный; и такъ далѣе.

Отъ этого, число перемѣнъ знаковъ, до исчезанія, выходитъ равно числу уничтожившихся функцій, т. е. *четыре,* а послѣ исчезанія не остается ни одной.

Посему, когда смежныя, неуничтожившіяся функціи бываютъ съ равными знаками, то чётное число исчезающихъ сряду функцій уноситъ изъ ряда $\theta(x+z)$ столько же перемѣнъ знаковъ; въ нашемъ примѣрѣ было *четыре.*

Но, если, при уничтоженіи сряду *чётнаго числа* функцій, смежныя не уничтожившіяся функціи будутъ *съ разными знаками*, наприм. $\theta_1 = -$, $\theta_6 = +$; то порядокъ знаковъ будетъ:

| | $\theta_6$ | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| для $a-z$, | + | — | + | — | + | — |
| $a$, | + | 0 | 0 | 0 | 0 | — |
| $a+z$, | + | + | + | + | + | — |
| | | | чет. | | чет. | |

Здѣсь, до уничтоженія среднихъ функцій, находимъ *пять перемѣнъ* отъ $\theta_1$ до $\theta_6$, а послѣ уничтоженія *одну*; разность $=5-1=4$. Слѣдовательно и здѣсь чётное число сряду уничтожающихся функцій уноситъ столько же перемѣнъ, сколько такихъ функцій.

Теперь положимъ, что, для $x=a$, уничтожится сряду *нечётное число функцій*, наприм. *три:* $\theta_2$, $\theta_3$, $\theta_4$, и положимъ, что смежныя неуничтожившіяся функціи будутъ *съ равными знаками*, наприм. $\theta_1 = +$, $\theta_5 = +$, или обратно; то порядокъ знаковъ въ рядахъ $\theta(a-z)$, $\theta(a)$, $\theta(a+z)$, будетъ:

| | $\theta_5$ | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| для $a-z$, | + | — | + | — | + |
| $a$, | + | 0 | 0 | 0 | + |
| $a+z$, | + | + | + | + | + |
| | | | чет. | | |

Здѣсь было *четыре перемѣны* до уничтоженія среднихъ функцій, а послѣ уничтоженія—*ни одной:* слѣдовательно, *число унесенныхъ перемѣнъ единицею больше числа уничтожившихся функцій*, т. е. 4, но все же *четное число.*

Наконецъ, положимъ, что, при нечетномъ числѣ исчезающихъ функцій, смежныя неуничтожающіяся функціи $\theta_1$, $\theta_5$, имѣютъ знаки различные, наприм. $\theta_1 = -$, $\theta_5 = +$, или обратно; то порядокъ знаковъ будетъ:

$$\begin{array}{rccccc} & \theta_5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \text{для } a-z, & + & - & + & - & - \\ a, & + & 0 & 0 & 0 & - \\ a+z, & + & + & + & + & -, \end{array}$$

гдѣ видно, что, до исчезанія среднихъ функцій, было *три перемѣны*, а послѣ исчезанія — *одна;* разность $=3-1=2$. Слѣдовательно, *число унесенныхъ перемѣнъ единицею менѣе числа уничтожившихся функцій*, и есть также *чётное*.

Не трудно замѣтить, что во всѣхъ этихъ случаяхъ, начиная съ младшей неуничтожающейся функціи, въ нижнемъ ряду, подъ нулями, всѣ функціи имѣютъ знаки равные; а въ ряду верхнемъ, надъ нулями, идутъ знаки поперемѣнно, $+\ -$, либо $-\ +$; всѣ же прочія функціи не перемѣняютъ своихъ знаковъ.

**422.** Теперь видно, что, въ случаѣ уничтоженія нѣсколькихъ функцій сряду въ уравненіи $\theta(a+z)=0$, отъ какого ни есть частнаго подстановленія $a$, потерю числа перемѣнъ знаковъ надобно искать, составивши два ряда знаковъ для этихъ функцій, которые бы соотвѣтствовали предѣламъ $a-\alpha$, $a+\alpha$, безконечно близкимъ къ $a$, слѣдующимъ образомъ:

1) Написать рядъ знаковъ, полученныхъ отъ подстановленія $a$; а *подъ нимъ*, отъ лѣвой руки къ правой, повторить каждый знакъ, который не нуль. Встрѣтивши нуль, надобно поставить *подъ нимъ* знакъ предыдущій, и повторить его, пока встрѣтится не нуль. Это дѣйствіе провесть по всей строкѣ; тогда и составится рядъ знаковъ для предѣла $a+\alpha$.

2) Для составленія ряда знаковъ, соотвѣтственнаго предѣлу $a-\alpha$, надобно написать *сверху,* начиная отъ лѣвой руки, каждый знакъ ряда $(a)$, который не нуль; а *встрѣтивши нуль, поставить надъ нимъ знакъ противный предшествовавшему,* и это дѣйствіе исполнить по всей строкѣ; то и составится рядъ знаковъ для предѣла $a-\alpha$.

Положимъ, что для $x=a$, рядъ функцій получилъ знаки:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \theta_{13} & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ + & + & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & + & - & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

Замѣнимъ его слѣдующими рядами, соотвѣтственными предѣламъ $a-\alpha$, $a+\alpha$, какъ показываетъ правило:

$$\begin{array}{cccccccccccccccl} + & + & - & + & - & - & + & - & + & - & + & - & + & +, & \text{для} & a-\alpha, \\ + & + & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & + & - & 0 & - & 0 & +, & & a, \\ + & + & + & + & + & - & - & - & + & - & - & - & - & +, & & a+\alpha, \end{array}$$

или, короче:

$$++\ \overset{-}{\underset{+}{0}}\ \overset{+}{\underset{+}{0}}\ \overset{-}{\underset{+}{0}}\ -\ \overset{+}{\underset{-}{0}}\ \overset{-}{\underset{-}{0}}\ +-\ \overset{+}{\underset{-}{0}}\ -\ \overset{+}{\underset{-}{0}}\ +, \text{ для } a.$$

Разность между числомъ перемѣнъ знаковъ ряда верхняго, и числомъ перемѣнъ нижняго, покажетъ все число перемѣнъ, потерянныхъ отъ уничтоженія функцій между предѣлами $a-\alpha$, и $a+\alpha$, и такое же число мнимыхъ корней. Въ самомъ дѣлѣ, мы предполагали, что $a-\alpha$, $a+\alpha$, чрезмѣрно близки къ $a$, и что *между этими предѣлами нѣтъ ни одного дѣйствительнаго корня* даннаго уравненія; стало-быть, при переходѣ отъ $a-\alpha$ къ $a+\alpha$, уравненіе $\theta(a+z)=0$ не должно терять ни одной перемѣны, если всѣ его корни дѣйствительные. А какъ эти потери находятся, и число ихъ показываетъ число нѣкоторыхъ корней между $a-\alpha$ и $a+\alpha$, то всѣ сіи корни должны быть мнимые.

Въ нашемъ примѣрѣ, для предѣла $a-\alpha$, находится 10 перемѣнъ, а для $a+\alpha$ вышло только 4. Разность $10-4=6$ показываетъ число мнимыхъ корней между этими предѣлами.

*Примѣръ.* Отдѣлить корни уравненія,

$$\theta(x)=x^4-6x^3+12x^2-30x+35=0.$$

Здѣсь всѣ корни положительные, потому что нѣтъ повторенія знаковъ. Высшій предѣлъ корней 6. Составимъ коефиціенты ряда $\theta(x+z)=0$:

$$\theta=x^4-6x^3+12x^2-30x+35.$$

$$\theta_1=4x^3-18x^2+24x-30,$$

$$\theta_2=6x^2-18x+12,\ \theta_3=4x-6,\ \theta_4=1;$$

потомъ будемъ подставлять:

| | | $\theta_4$ | 3 | 2 | 1 | 0 | Число перем. | Число корней. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$; | получимъ | + | — | + | — | + | 4 | 2 |
| $=1$, | - | + | — | 0 | — | + | 2 | 0 |
| $=3/2$, | - | + | 0 | — | — | + | 2 | 1 |
| $=2$, | - | + | + | 0 | — | — | 1 | 0 |
| $=3$, | - | + | + | + | — | — | 1 | 0 |
| $=4$, | - | + | + | + | + | — | 1 | 1 |
| $=5$, | - | + | + | + | + | + | 0 | |

Изъ числа послѣдовательныхъ перемѣнъ и ихъ разностей видно, что данное уравненіе имѣетъ по одному дѣйствительному корню между 4 и 5, между $\frac{3}{2}$ и 2, и еще два корня между 0 и 1. Послѣдніе два корня *мнимые;* потому что, при уничтоженіи $\theta_2$, смежныя функціи $\theta_1$, $\theta_3$, остались съ равными знаками, чего не можетъ быть при корняхъ дѣйствительныхъ.

*Примѣръ.* Отдѣлить корни уравненія

$$\theta=x^5-5x^4+135x-245=0.$$

Составляю: $\theta_1=5x^4—20x^3+135$,
$\theta_2=10x^3—30x^2$,
$\theta_3=10x^2—20x$, $\theta_4=5x—5$, $\theta_5=1$.

| | $\theta_5$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | Число корней. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Беру: $x=0$, | + | — | $\overset{+}{\underset{-}{0}}$ | $\overset{-}{\underset{-}{0}}$ | + | — | 5—3=2 мним. |
| $=1$, | + | 0 | — | — | + | — | 0 |
| $=2$, | + | + | 0 | — | + | — | 0 |
| $=3$, | + | + | + | $\overset{-}{\underset{+}{0}}$ | $\overset{+}{\underset{+}{0}}$ | — | 3—1=2 мним. |
| $=4$, | + | + | + | + | + | + | 1 |

И такъ, это уравненіе имѣетъ всѣ корни положительные, изъ коихъ два мнимые между 0 и 1, два мнимые между 2 и 3, и одинъ дѣйствительный между 3 и 4.

***Примѣръ***. Возмемъ еще уравненіе,

$$\theta=x^{10}\mp310x^7\pm875x^3\mp1279x—45678=0.$$

Для отдѣленія его корней, составимъ:

$\theta_1=10x^9\mp2170x^6\pm2625x^2\mp1279$,
$\theta_2=45x^8\mp6510x^5\pm2625x$,
$\theta_3=120x^7\mp10850x^4\pm875$,
$\theta_4=210x^6\mp10850x^3$,
$\theta_5=252x^5\mp6510x^2$, $\theta_6=210x^4\mp2170x$,
$\theta_7=120x^3\mp310$, $\theta_8=45x^2$, $\theta_9=10x$, $\theta_{10}=1$.

(Верхній знакъ соотвѣтствуетъ корнямъ положительнымъ $+x$, а нижній — корнямъ отрицательнымъ $—x$). Для отдѣленія *корней положительныхъ*, будемъ брать:

| | $\theta_{10}$ | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | Число корней. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$, | + | $\overset{-}{\underset{+}{0}}$ | $\overset{+}{\underset{+}{0}}$ | — | $\overset{+}{\underset{-}{0}}$ | $\overset{-}{\underset{-}{0}}$ | $\overset{+}{\underset{-}{0}}$ | + | $\overset{-}{\underset{+}{0}}$ | — | — | 7—3=4. |
| $=1$, | + | + | + | — | — | — | — | — | — | — | — | 3—1=2. |
| $=6$, | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | — | 1 |
| $=7$, | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | |

*Для корней отрицательныхъ:*

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$, | + | $\underset{+}{0}$ | $\underset{+}{0}$ | + | $\underset{+}{0}$ | $\underset{+}{0}$ | $\underset{+}{0}$ | — | $\underset{-}{0}$ | + | — | |
| $=\frac{1}{2}$, | + | + | + | + | + | + | + | — | — | + | — | 3—1=2 |
| $=1$, | . | . | . | . | . | + | + | + | + | + | — | |
| $=3$, | . | . | . | . | . | . | . | . | + | + | — | 1. |
| $=4$, | . | . | . | . | . | . | . | . | . | + | + | |

Эти ряды знаковъ показываютъ, что данное уравненіе имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между предѣлами 6 и 7, другой — между $-3$ и $-4$; подстановленіе $x=0$ открываетъ четыре мнимые корня; сверхъ того, находятся два корня между предѣлами 0 и 1, и два между $-\frac{1}{2}$ и $-1$. Послѣдніе четыре корня должны быть также мнимые; потому что, между этими предѣлами, въ обоихъ случаяхъ $\theta_0$ не перемѣняетъ знака ($-$); оттого, при уничтоженіи $\theta_2$, $\theta_3$, между предѣлами положительными, непремѣнно имѣетъ мѣсто случай

$$-\;0\;-;$$

а между предѣлами отрицательными

$$+\;0\;+,\text{ либо}$$
$$-\;0\;-.$$

## G. Способы вычисленія несоизмѣримыхъ корней.

### 1. *Способъ Лагранжевъ.*

**423.** Лагранжъ показалъ, что можно вычислять несоизмѣримые корни, по приближенію, посредствомъ непрерывныхъ дробей. Вотъ въ чемъ состоитъ этотъ замѣчательный способъ.

Положимъ, что одинъ изъ корней даннаго уравненія $f(x)=0$ заключается между предѣлами $a$ и $a+1$, то можно положить, что этотъ корень $x=a+\frac{1}{y}$, гдѣ $\frac{1}{y}$ добавочная дробь, и гдѣ $y>1$. А подставивъ его въ уравненіе, мы получимъ:

$$\theta+\theta_1.\frac{1}{y}+\theta_2.\frac{1}{y^2}+\theta_3.\frac{1}{y^3}+\ldots.+\theta_{n-1}.\frac{1}{y^{n-1}}+\frac{1}{y^n}=0,\text{ или}$$
$$\theta.y^n+\theta_1.y^{n-1}+\theta_2 y^{n-2}+\ldots.+1=0=f(y).$$

Получивши это уравненіе, станемъ искать, между какими предѣлами $b$ и $b+1$ находится его корень, большій единицы. Этотъ корень будетъ только *одинъ:* ибо, еслибъ ихъ было два, три,.... то значило бы, что, между предѣлами $a$ и $a+1$ находится не одинъ корень, но также два либо три, чему быть нельзя. И такъ, положимъ, что, между $b$ и $b+1$, корнемъ будетъ:

$$y=b+\frac{1}{y'},$$

гдѣ $\frac{1}{y'}$ добавочная дробь, и $y'>1$. Отъ сего уравненіе $f(y)=0$ преобразуется въ $f(y')=0$, которое также будетъ имѣтъ только одинъ корень большій единицы. Если этотъ корень лежитъ между $c$ и $c+1$, то положимъ:

$$y'=c+\frac{1}{y''};$$

тогда уравненіе $f(y')=0$ превратится въ $f(y'')=0$. Въ этомъ уравненіи положительный корень, большій 1-цы, будетъ между $d$ и $d+1$; слѣдовательно, можно взять $y=d+\frac{1}{y'''}$, и такъ далѣе.

Этимъ способомъ корень даннаго уравненія выразится непрерывною дробью:

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots.}}}$$

и можетъ быть найденъ такъ приближенно, какъ будетъ угодно.

Приложимъ этотъ способъ къ уравненію

$$f(x)=x^3-3x-4=0,$$

котораго одинъ корень заключается между 2 и 3. Для сего возмемъ:

$$x=2+\frac{1}{y},$$

подставимъ въ $f(x)=0$; получится новое уравненіе, вида:

$$\theta y^3+\theta_1 y^2+\theta_2 y+\theta_3=0=f(y);$$

коефиціенты его найдутся:

$$\begin{array}{lr|l} \theta\,=x^3-3x-4= & -2 & \text{чрезъ подстановленіе} \\ \theta_1=3x^2-3 \quad = & 9 & \\ \theta_2=3x \quad = & 6 & \text{2 на мѣсто } x. \\ \theta_3=1 \quad = & 1 & \end{array}$$

Слѣдовательно:

$$f(y)=-2y^3+9y^2+6y+1=0, \text{ или}$$
$$2y^3-9y^2-6y-1=0.$$

Въ этомъ уравненіи корень, большій 1-цы, находится между 5 и 6; а потому возмемъ:

$$y=5+\frac{1}{y'},$$

подставимъ въ $f(y)=0$, получится:

$$\theta(y')=\theta y'^3+\theta_1 y'^2+\theta_2 y^3+\theta_3=0, \text{ гдѣ}$$

$$\begin{array}{lr|l} \theta\,=2y^3-9y^2-6y-1= & -6 & \text{подставляя} \\ \theta_1=6y^2-18y-6 \quad = & 54 & \\ \theta_2=6y-9 \quad . \quad = & 21 & \text{5 на мѣсто } y. \\ \theta_3=2 \quad = & 2 & \end{array}$$

Отъ сего $f(y')$ обращается въ

$$f(y')=6y'^3-54y'^2-21y'-2=0.$$

Въ этомъ уравненіи корень, большій 1-цы, находится между 9 и 10; возмемъ

$$y'=9+\frac{1}{y''}.$$

Тогда $f(y')=0$ обратится въ

$$f(y'')=\theta.y''^3+\theta_1.y''^2+\theta_2.y''+\theta_3=0,$$

гдѣ, отъ подстановленія 9 на мѣсто $y$, найдутся:

$$\theta\,=6y'^3-54y'^2-21y'-2=-191,\ \theta_1=18y'^2-108y'-21=465,$$
$$\theta_2=18y'-54=108,\ \theta_3=6; \text{ слѣдовательно,}$$
$$f(y'')=191y''^3-465y''^2-108y''-6=0.$$

Корень этого уравненія, большій 1-цы, лежитъ между 2 и 3; возмемъ

$$y''=2+\frac{1}{y'''},\text{ получится:}$$

$$f(y''')=\theta.y'''^3+\theta_1.y'''^2+\theta_2.y'''+\theta_3=0.$$

Ему найдутся коефиціенты:

$\theta=191y''^3-465y''^2-108y''-6=-574$, $\theta_1=573y''^2-930y''-108=324$, $\theta_2=573y''-465=681$, $\theta_3=191$, полагая $y''=2$.

Посему,

$$f(y''')=574y'''^3-324y'''^2-681y'''-191=0.$$

Здѣсь корень находится между 1 и 2, то есть,

$$y'''=1+\frac{1}{y''''}\text{, и такъ далѣе.}$$

Слѣдовательно,

$$y''=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y''''}}$$

$$y'=9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y''''}}}$$

$$y=5+\cfrac{1}{9-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y''''}}}}$$

$$x=2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y''''}}}}}$$

Откинувъ дробь $\frac{1}{y''''}$, нашли бы корень

$$x=2+\frac{28}{143}=2,1958\dots,$$

различающійся отъ полной его величины, менѣе нежели на $\frac{1}{(143)^2}$.

Способъ Лагранжевъ примѣняется и къ нахожденію корней соизмѣримыхъ. Въ такомъ случаѣ дробный корень изображается конечною непрерывною дробью.

Жаль, что этотъ прекрасный способъ часто бываетъ утомителенъ въ практикѣ, когда члены новыхъ уравненій $f(y)$, $f(y')$, $f(y'')$.... начинаютъ получать слишкомъ большіе коефиціенты, и число членовъ велико.

### II. Способъ Ньютоновъ исправленный.

**424.** Пусть $a$ и $b$ два предѣла, между которыми находится только *одинъ дѣйствительный корень* даннаго уравненія $f(x)=0$; положимъ, что эти предѣлы такъ близки одинъ къ другому, что разность между ними $b-a<\frac{1}{10}$, и что искомый корень больше $a$ и менѣе $b$. Означимъ чрезъ $h$ ту самую дробь, которую надобно придать къ $a$, чтобъ получить истинную величину $a+h$ корня, и вставимъ это въ данное уравненіе на мѣсто $x$, тогда получится извѣстный рядъ:

$$(1)\ldots f(a+h)=\theta(a)+h.\theta_1(a)+h^2.\theta_2(a)+h^3.\theta_3(a)+\ldots+h^n=0$$
$$=\theta+\theta_1h+\theta_2h^2+\theta_3h^3+\ldots$$

Поелику дробь $h$ довольно мала, то можно считать этотъ рядъ значительно скоро убывающимъ, и, для вывода приближенной величины $h$, отбросить всѣ члены, содержащіе степени $h^2$, $h^8$, $h^4$,....: останется уравненіе первой степени, $\theta(a)+h.\theta_1(a)=0$, откуда

$$h=-\frac{\theta(a)}{\theta_1(a)}.$$

Придавъ эту дробь къ $a$, получится первая величина, приближенная къ корню,

$$x=a+h=a-\frac{\theta(a)}{\theta_1(a)}=a'.$$

Для полученія второй величины, болѣе близкой къ корню, положимъ, что полнымъ корнемъ будетъ $x=a'+h'$; внесемъ $a'$ и $h'$ въ рядъ (1) на мѣсто $a$ и $h$, и, отбросивъ члены съ $h'^2$, $h'^3$,.... $h'^n$, получимъ вторую поправку для корня: отчего теперь второю приближенною величиною корня будетъ

$$x=a'+h'=a'-\frac{\theta(a')}{\theta_1(a')}=a-\frac{\theta(a)}{\theta_1(a)}-\frac{\theta(a')}{\theta_1(a')}.$$

Такимъ образомъ можно искать третье, четвертое, и т. д. приближенія къ корню.

Таковъ *способъ Ньютоновъ* для вычисленія корней. Недостатки его очевидны: 1) не всегда легко сблизить предѣлы $a$, $b$, до такой степени, чтобы разность $b-a$ сдѣлалась менѣе $\frac{1}{10}$; 2) не всегда также и достаточно $b-a<\frac{1}{10}$, чтобы можно было начать смѣло приближаться къ корню. Оттого всегда остается неизвѣстно, сколько десятичныхъ знаковъ дроби $h$, $h'$ или $h''$ принадлежатъ собственно корню, и откуда начинается его неточность. По этой причинѣ, почти всякой разъ надобно повѣрять найденную величину корня, вставляя ее въ $f(x)=0$, и смотрѣть, какой получится результатъ, положительный или отрицательный, большій или меньшій; а это составляетъ утомительную и нерѣдко безполезную работу.

Можно сказать, что въ Ньютоновомъ способѣ заключается только его начало, а недостаетъ продолженія и окончанія. Для пополненія его находятся разные способы, изъ которыхъ мы разсмотримъ только два: 1) обращеніе ряда $f(a+h)=0$, и 2) разложеніе его въ непрерывную дробь.

### А. *Чрезъ обращеніе ряда* $f(a+h)=0$.

**425.** Возмемъ рядъ (1), отдѣлимъ его первый членъ:

$$-\theta(a)=h.\theta_1(a)+h^2.\theta_2(a)+h^3.\theta_3(a)+\ldots+h^n,$$

или, будемъ впередъ писать короче и удобнѣе, какъ дѣлали это прежде:

$$-\theta=\theta_1h+\theta_2h^2+\theta_3h^3+\ldots.+h^n.$$

Обратимъ этотъ рядъ въ другой, расположенный по степенямъ $\theta$, какъ было показано (**350**); найдется:

$$h=\pm\frac{\theta}{\theta_1}-\frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2\pm\left(\frac{2\theta_2^2-\theta_1\theta_3}{\theta_1^2}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^3-\left(\frac{5\theta_2^3+\theta_1^2\theta_4-5\theta_1\theta_2\theta_3}{\theta_1^3}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^4\pm\ldots..$$

$$=\pm q-\frac{\theta_2}{\theta_1}.q^2\pm\left(\frac{2\theta_2^2-\theta_1\theta_3}{\theta_1^2}\right)q^3-\left(\frac{5\theta_2^3+\theta_1^2\theta_4-5\theta_1\theta_2\theta_3}{\theta_1^3}\right)q^4\pm\ldots..$$

полагая $q=\frac{\theta}{\theta_1}$.

Для сокращеннаго выраженія этого ряда, будемъ называть послѣдовательные члены его буквами A, B, C, D,...., а именно:

$$q=\frac{\theta}{\theta_1}=A,\ \frac{\theta_2}{\theta_1}.q^2=B,\ \left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)q^3=C,\ldots..$$

А какъ знаки предъ сими членами могутъ быть весьма различные, то будемъ писать алгебрическую сумму этихъ членовъ просто:

$$h=(A,\ B,\ C,\ D,\ldots).$$

Мы скоро увидимъ, какъ опредѣляются эти знаки изъ сущности даннаго уравненія и его $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$,..... Стало-быть, искомымъ корнемъ будетъ

$$x=a+h=a+\left[q,\ \frac{\theta_2}{\theta_1}.q^2,\ \left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)q^3,\ldots.\right],\text{ или:}$$

$$x=a+h=a(A,\ B,\ C,\ D,\ldots.).$$

**126.** Разсматривая этотъ рядъ, видно тотчасъ, что посредствомъ его можно находить величину корня такъ приближенную, какъ будетъ угодно; надобно только сдѣлать его довольно убывающимъ. А для этого должно сблизить предѣлы $a$ и $b$ корня до того, чтобы $\frac{\theta}{\theta_1}=q$ сдѣлать дробью близкою къ $\frac{1}{10}$; чтобы $\frac{\theta_2}{\theta_1}.q^2$ сдѣлалось дробью, не имѣющею вліянія на десятыя доли $q$, и чтобы членъ $\left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)q^3$ не имѣлъ вліянія на сотыя доли $q$ *), или, по крайней мѣрѣ, чтобы удовлетворились условія: *первое*, $\frac{\theta_2}{\theta_1}.q^2<q$, то есть,

$$(m)\ldots.\ \frac{\theta_2}{\theta_1}<\frac{\theta_1}{\theta};$$

*второе*, $\left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)q^3<\frac{\theta_2}{\theta_1}.q^2$, или $\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}<\frac{\theta_2}{\theta}$, или:

$$(n)\ldots.\frac{2\theta_2}{\theta_1}-\frac{\theta_3}{\theta_2}<\frac{\theta_1}{\theta}.$$

Достигши этихъ условій предварительными пробами, можно смѣло искать приближенную величину корня съ какого угодно предѣла, меньшаго или большаго,

---

*) Наприм. если $q=0,2$, то надобно, чтобъ $\frac{\theta_2}{\theta_1}.q^2<0,05$.

какъ будетъ выгоднѣе: послѣдовательныя цифры корня будутъ вычисляться довольно быстро. Сколько цифръ будетъ принадлежать собственно корню, это покажутъ первые три члена ряда $h=(A, B, C, \ldots)$; на какую десятичную перваго члена $A=q=\frac{\theta}{\theta_1}$ будутъ имѣть вліяніе второй и третій члены ряда, до этой десятичной корень будетъ непремѣнно точенъ. Такъ мы найдемъ *первое приближеніе*

$$x=a+h=a'.$$

Для втораго приближенія къ корню, возмемъ $x=a'+h'$, опредѣлимъ значенія для новыхъ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2, \ldots$.*), составимъ поправочный рядъ

$$h'=q,\ \frac{\theta_2}{\theta_1}q^2,\ \left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)q^3, \ldots\ldots,$$

тогда найдется *второе приближеніе къ корню*

$$x=a'+h'=a'+\left[q,\ \frac{\theta_2}{\theta_1}.q^2,\ \left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)q^3, \ldots\right], \text{ или}$$

$$x=a^1+(A, B, C, D, \ldots.)=a''$$

Если этого недостаточно, то можно, совершенно тѣмъ же путемъ, искать *третье приближеніе*, полагая $x=a''+h''$, опредѣляя новыя значенія для $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2, \ldots.$; и найдется:

$$x=a''+h''=a''+\left(q,\ \frac{\theta_2}{\theta_1}q^2, \ldots.\right).$$

При послѣдовательныхъ вычисленіяхъ поправокъ $h$, $h'$, $h''$,.... изъ ихъ рядовъ, довольно бываетъ брать только два первые члена каждаго ряда, иногда третій; а прочіе, какъ малозначащіе, отбрасывать. Впрочемъ, можно искать всю поправку $h$ и изъ одного ряда, если члены его убываютъ достаточно скоро, и числа къ тому удобны, какъ это увидимъ изъ многихъ примѣровъ.

**427.** Знаки предъ членами ряда,

$$h=q,\ \frac{\theta_2}{\theta_1}q^2,\ \left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)q^3, \ldots.=A, B, C, D, \ldots$$

зявисятъ отъ знаковъ предъ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3, \ldots.$, и на нихъ надобно обращать строгое вниманіе. А чтобы не затрудняться въ этихъ знакахъ при вычисленіи трехъ первыхъ членовъ A, B, C, какъ самыхъ важныхъ, надобно имѣть предъ собою табличку слѣдующихъ случаевъ, могущихъ встрѣтиться:

I.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Когда } \theta=-,\ \theta_1=+,\ \theta_2=+\\ \text{или } \theta=+,\ \theta_1=-,\ \theta_2=-\end{array}\right\}\ \text{тогда } h=A-B+C-\ldots.$$

---

*) Только для простоты и единообразія какъ во второмъ, такъ и въ слѣдующихъ вычисленіяхъ приближеній, буду употреблять всё тѣ же буквы $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2, \ldots.$, что и въ начальномъ ряду; но ихъ дѣйствительныя значенія теперь будутъ совсѣмъ другія.

II.

Когда $\theta = +$, $\theta_1 = +$, $\theta_2 = +$
или $\theta = -$, $\theta_1 = -$, $\theta_2 = -$ } тогда $h = -A - B - C \ldots$

III.

Когда $\theta = +$, $\theta_1 = -$, $\theta_2 = +$
или $\theta = -$, $\theta_1 = +$, $\theta_2 = -$ } тогда $h = A + B + C \ldots$

IV.

Когда $\theta = +$, $\theta_1 = +$, $\theta_2 = -$
или $\theta = -$, $\theta_1 = -$, $\theta_2 = +$ } тогда $h = -A + B - C \ldots$

Во всѣхъ этихъ случаяхъ предполагается, что $\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2} - \frac{\theta_3}{\theta_1}$ величина положительная: въ противномъ случаѣ знакъ предъ членомъ C перемѣнится. По этому, при вычисленіи членовъ A, B, C, соотвѣтственно тому или другому встрѣтившемуся случаю, надобно только $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, принимать за положительные, а $\theta_3$ должно вводить въ третій членъ съ своимъ знакомъ.

### **428.** *Примѣры для вычисленія корней изъ одного ряда,* $x = a + h = a + (A,\ B,\ C, \ldots)$.

1. *Примѣръ.* — Уравненіе $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ имѣетъ дѣйствительный корень между предѣлами 2 и 3; поищемъ его приближенную величину, составивъ:

$$\theta = x^3 - 2x - 5 = 0, \quad \theta_1 = 3x^2 - 2, \quad \theta_2 = 3x, \quad \theta_3 = 1.$$

Подстановленіе $x = 2$ даетъ:

$$\theta = -1, \quad \theta_1 = 10, \quad \theta_2 = 6, \quad \theta_3 = 1.$$

Этому случаю соотвѣтствуетъ поправочной рядъ,

$$h = A - B + C - \ldots, \text{ или}$$

$$h = \frac{\theta}{\theta_1} - \frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2 + \left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2} - \frac{\theta_3}{\theta_1}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^3 - \left(\frac{5\theta_2^3}{\theta_1^3} - \frac{5\theta_2\theta_3}{\theta_1^2}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^4 + \ldots;$$

слѣдовательно число 2, взятое вмѣсто корня $x$, мало, и должно быть увеличено рядомъ $h$.

Члены этого ряда убываютъ быстро, потому что условія убыванія:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} < \frac{\theta_1}{\theta}, \quad \frac{6}{10} < \frac{10}{1}, \quad \text{или } 0{,}06 < 1,$$

$$\frac{2\theta_2}{\theta_1} - \frac{\theta_3}{\theta_2} < \frac{\theta_1}{\theta}, \quad \frac{12}{10} - \frac{1}{6} < \frac{10}{1}, \quad \text{или } \frac{61}{600} < 1,$$

весьма выгодно удовлетворяются. Посему, испытаемъ вычислить $x = 2 + h$ изъ одного ряда для $h$. А для этого заготовимъ:

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{1}{10} = 0{,}1; \quad \frac{\theta_2}{\theta_1} = 0{,}6; \quad \frac{\theta_3}{\theta_1} = 0{,}1; \text{ отчего}$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2 = 0{,}006; \quad \left(\frac{2\theta_2^2 - \theta_1\theta_3}{\theta_1^2}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^3 = 0{,}00062;$$

$$\left(\frac{5\theta_2^3 - 5\theta_1\theta_2\theta_3}{\theta_1^3}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^4 = 0{,}000078, \text{ и проч.}$$

Ограничиваясь этими четырьмя членами, получаемъ

$$x=2+0,1-0,006+0,00062-0,000078$$
$$=2,094542,$$

корень приближенный въ четырехъ десятичныхъ.

Если бы мы съ самаго начала взяли 2,1 вмѣсто 2 для перваго приближенія; то нашли бы $\theta=0,062$; $\theta_1=11,23$; $\theta_2=6,3$; $\theta_3=1$, и сразу получили бы

$$x=2,1-\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{C}-\text{ (см. II случай)}$$
$$=2,1-\frac{61}{11230}-\frac{6,3}{11,23}\left(\frac{61}{11230}\right)^2-\ldots.$$
$$=2,1-0,00543188-0,00001655-\ldots$$
$$=2,0945517\ldots.$$

корень точный во всѣхъ семи десятичныхъ, въ чемъ можно увѣриться чрезъ вычисленіе слѣдующаго члена поправки.

2. *Примѣръ.*—Въ уравненіи

$$x^3-4x-1=0.$$

Наибольшій положительный корень заключается между предѣлами 2 и 3, и весьма близокъ къ 2,

потому что, для $x=2$, получается $\theta=-1$,
а для $x=3$, — $\theta=14$.

И такъ, взявъ $\theta=x^3-4x-1$, и его производныя:

$$\theta_1=3x^2-4,\ \theta_2=3x,\ \theta_3=1,$$

внесемъ $x=2$; получатся:

$$\theta=-1,\ \theta_1=8,\ \theta_2=6,\ \theta_3=1.$$

Этому случаю соотвѣтствуетъ поправочный рядъ

$$h=\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{D}+\ldots.,$$

которымъ надобно увеличить взятое число 2, чтобъ получить искомый корень. Члены этого ряда также достаточно убываютъ, потому что условія убыванія:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1}>\frac{\theta_1}{\theta},\ \frac{6}{8}<8 \text{ или } 0,094<1,$$
$$\frac{2\theta_2}{\theta_1}-\frac{\theta_3}{\theta_2}<\frac{\theta_1}{\theta},\ \frac{12}{8}-\frac{1}{6}<\frac{8}{1}, \text{ или } \frac{1}{6}<1,$$

выгодно удовлетворяются; слѣдовательно можно пробовать, нельзя ли вычислить корень $x=2+h$ изъ одного ряда, составивъ:

$$\frac{\theta}{\theta_1}=\frac{1}{8}=\mathrm{A},\ \ \frac{\theta_2}{\theta_1}=\frac{3}{4},\ \ \frac{\theta_3}{\theta_1}=\frac{1}{8};$$
$$\frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2=\frac{3}{256}=0,01172=\mathrm{B};$$
$$\left(\frac{2\theta_2^2-\theta_1\theta_3}{\theta_1^2}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^3=\frac{1}{64.8}=0,001953=\mathrm{C};$$
$$\left(\frac{5\theta_2^3-5\theta_1\theta_2\theta_3}{\theta_1^3}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^4=\frac{105}{262144}=0,0004005=\mathrm{D}.$$

Слѣдовательно, $x=2+A-B+C-D+\ldots$ будетъ

$$x=2+0,125-0,01172+0,001953-0,000406+\ldots$$
$$=2,114827\ldots,$$

гдѣ точны по крайней мѣрѣ три десятичныхъ.

Это розысканіе корня бываетъ неудобно въ тѣхъ случаяхъ, когда приближеніе слѣдуетъ медленно, что замѣтно уже при вычисленіи послѣдняго корня. Въ такомъ случаѣ, нашедши величину корня, приближенную до одной или до двухъ ея десятичныхъ, надобно внести ее въ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$,.... и искать слѣдующее приближеніе изъ новаго ряда

$$x=a'+h'=a'+\left[\frac{\theta}{\theta_1},\ \frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2,\ \left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^3,\ldots\right],$$

ограничиваясь вычисленіемъ поправки $h$ изъ ея первыхъ двухъ членовъ, а иногда изъ трехъ.

*Примѣръ для упражненія:*

$$x^5-5x^3+20x-30=0.$$

Это уравненіе имѣетъ (стр. 404) одинъ дѣйствительный корень между 1 и 2. Предположеніе $x=2$, даетъ $\theta=2$, $\theta_1=40$, $\theta_2=50$, $\theta_3=35$; $\frac{\theta}{\theta_1}=\frac{1}{20}=0,05=A$, $B=0,003125$, $C=0,00028125$, и проч., и получится корень $x=1,94659\ldots$ вѣрный въ четырехъ десятичныхъ.

*Примѣчаніе.*—При разрѣшеніи уравненій высокихъ степеней, обыкновенно представляется утомительное дѣло возвышать въ степени числа однозначныя и двузначныя. Употребленіе логариѳмовъ для этой цѣли весьма полезно, только часто бываетъ недостаточно. По этой причинѣ, въ концѣ книги приложена *таблица пяти первыхъ степеней чиселъ отъ 1 до 1000, и десяти степеней чиселъ отъ 1 до 100,* составленная съ большою тщательностію. Съ ея пособіемъ легко точнымъ образомъ находить $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$,...., если только степень уравненія не выше десятой; а тогда уже, для полученія отношеній $\frac{\theta}{\theta_1}$, $\frac{\theta_2}{\theta_1}$, $\frac{\theta_3}{\theta_1}$,.... и членовъ A, B, C,.... можно употребить и логариѳмы, предполагая, что ищемъ корень, приближенный не болѣе, какъ въ 5 или 6 десятичныхъ. Все это мы увидимъ изъ слѣдующихъ примѣровъ.

### **429.** *Примѣры для вычисленія корней посредствомъ двухъ и болѣе приближеній.*

1. *Примѣръ.* — Возмемъ уравненіе

$$\theta=x^3-7x+5=0,$$

котораго производныя суть:

$$\theta_1=3x^2-7,\quad \theta_2=3x,\quad \theta_3=1,$$

и котораго два дѣйствительные положительные корня находятся между 0 и 1, между 2 и 3, какъ видно изъ слѣдующей таблички знаковъ предъ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$,....

$$\begin{array}{lcccc}
 & \theta_3 & \theta_2 & \theta_1 & \theta \\
\text{Для } x=0, & + & 0 & - & + \\
=1, & + & + & - & - \\
=2, & + & + & + & - \\
=3, & + & + & + & +
\end{array}$$

Корень между 0 и 1 ближе къ 1-цѣ, нежели къ 0; потому что,

$$\text{для } x=0, \text{ получается } \theta=5,$$
$$\text{а для } x=1, \quad - \quad \theta=-1.$$

Сверхъ того, $x=1$ обращаетъ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, въ

$$\theta=-1,\ \theta_1=-4,\ \theta_2=3,\ \theta_3=1.$$

Этому случаю соотвѣтствуетъ (стр. 417) поправка

$$h=-A+B-C+\ldots.$$

Ея члены убываютъ, однакоже не слишкомъ быстро, потому что условія убыванія

$$\frac{\theta_2}{\theta_1}<\frac{\theta_1}{\theta},\ \frac{3}{4}<\frac{4}{1},\ \text{или}\ \frac{3}{16}<1,\ \text{и}$$

$$\frac{2\theta_2}{\theta_1}-\frac{\theta_3}{\theta_2}<\frac{\theta_1}{\theta},\ \frac{6}{4}-\frac{1}{3}<\frac{4}{1},\ \text{или}\ \frac{7}{24}<1$$

удовлетворяются не довольно выгодно для вычисленія корня изъ одного ряда $h$. По этому, для перваго приближенія, вычислимъ только два первые члена сего ряда:

$$A=\frac{\theta}{\theta_1}=\frac{1}{4}=0,25;\quad B=\frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2=\frac{3}{64}=0,047\ldots;$$

получится

$$x=1-0,25+0,047\ldots=0,80\ldots$$

Для вычисленія второй величины, приближенной къ корню, возмемъ $x=0,8$; $x^2=0,64$; $x^3=0,512$; подставимъ это въ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, получатся:

$$\theta=-0,088;\ \theta_1=-5,08;\ \theta_2=2,4;\ \theta_3=1.$$

И здѣсь поправка остается того же вида,

$$h=-A+B-C\ldots;$$

члены ея и подавно убываютъ; для вычисленія ихъ употребимъ логариѳмы.

$$\begin{array}{rl}
\log\theta = & 1,041.3927 \\
\text{д. }\log\theta_1 = & 7,197.2263-10 \\
\hline
\log A = & 0,238.6190-\ 2 \\
\log A^2 = & 0,477.2380-\ 4 \\
A = & 0,01732280
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log\theta_2 = & 2,477.1213 \\
 & 7,197.2263-10 \\
\hline
\log\frac{\theta_2}{\theta_1} = & 0,674.3476-\ 1 \\
 & 0,477.2380-\ 4 \\
\hline
\log B = & 0,151.5856-\ 4 \\
B = & 0,000141760
\end{array}$$

Членъ C= будетъ весьма малъ, потому что $\log A^3=0,715.8570-6$ даетъ $A^3=0,0000052$; посему корень

$$x=0,800141760-0,01732280$$
$$=0,78281896,$$

долженъ быть точенъ въ пяти десятичныхъ, чѣмъ и ограничимся.

Для полученія приближенной величины *корня между предѣлами 2 и 3*, нахожу сперва, что

$$x=2 \text{ даетъ } \theta=-1,$$
$$x=3 \quad - \quad \theta=11,$$

и заключаю, что этотъ корень близокъ къ 2.

Взявши $x=2$, нахожу:

$$\theta=-1,\ \theta_1=5,\ \theta_2=6,\ \theta_3=1.$$

Этому случаю соотвѣтствуетъ коренная поправка $h=A-B+C\ldots$, которой члены убываютъ не очень быстро, потому что уже первое условіе убыванія:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1}<\frac{\theta_1}{\theta},\ \frac{6}{5}<5, \text{ или } \frac{6}{25}<1,$$

удовлетворяется не довольно выгодно.

Первый членъ этого ряда $A=\frac{\theta}{\theta_1}=0,2$. Если ограничимся этимъ членомъ, то найдется *первое приближеніе* къ корню

$$x=2,2,$$

которое возмемъ для отысканія втораго приближенія. При семъ найдутся:

$$x^2=4,84;\ x^3=10,648;\ \theta=0,248;\ \theta_1=7,520;\ \theta_2=6,6;\ \theta_3=1.$$

Здѣсь поправочнымъ рядомъ будетъ:

$$h=-A-B-C-\ldots..;$$

для вычисленія его членовъ употребимъ логариѳмы:

$$\begin{aligned} \log\theta&=0,394.4517-1\\ \text{д. } \log\theta_1&=0,123.7826-1\\ \hline \log A&=0,518.2343-2\\ 2\log A&=0,036.4686-3\\ 3\log A&=0,554.7521-5\\ A&=0,03297880 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\theta_2&=0,819.5439\\ &\phantom{=}0,123.7826-1\\ \hline \log\frac{\theta_2}{\theta_1}&=0,943.3265-1\\ &\phantom{=}0,036.4686-3\\ \hline \log B&=0,979.7951-4\\ B&=0,00095454 \end{aligned}$$

Вычислимъ и третій членъ $\left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^3=(\alpha-\beta)A^3=C$:

$$\begin{aligned} 2\log\frac{\theta_2}{\theta_1}&=0,886.6530-1\\ &=0,301.0300\\ \hline \log\alpha&=0,187.6830\\ \alpha&=1,540571\\ &-0,132979=\beta\\ \hline \alpha-\beta&=1,407592, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\frac{\theta_3}{\theta_1}&=0,123.7826\\ \frac{\theta_3}{\theta_1}&=0,132979=\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(\alpha-\beta)&=0,183.9167\\ 3\log A&=0,554.7521-5\\ \hline \log C&=0,738.6688-5\\ C&=0,000054785. \end{aligned}$$

$$\text{Посему } x=2,2-\left\{\begin{array}{l}0,0329785\\0,00095454\\0,000054786\end{array}\right.$$

$$\overline{\phantom{x=2,}0,033987826}$$

$$x=2,166012174$$

корень точный по крайней мѣрѣ въ пяти десятичныхъ.

Остается найти *отрицательный корень* даннаго уравненія. А для этого возмемъ:

$$f(-x)=x^3-7x-5=0, \text{ откуда}$$

$$\theta_1=3x^2-7,\ \theta_2=3x,\ \theta_3=1.$$

$$\begin{array}{lccccc} & & 3 & 2 & 1 & 0\\ \text{Для } x=0, & \text{получится} & + & + & - & -\\ \phantom{\text{Для } x}=2, & - & + & + & + & -\\ \phantom{\text{Для } x}=3, & - & + & + & + & + \end{array}$$

Слѣдовательно корень находится между 2 и 3, и притомъ ближе къ 3, потому что, для $x=3$, находимъ:

$$\theta=1,\ \theta_1=20,\ \theta_2=9,\ \theta_3=1.$$

Здѣсь коренная поправка такъ же

$$h=-A-B-C-\ldots;$$

ея члены быстро убываютъ; потому что условіе убыванія $\frac{\theta_2}{\theta_1}<\frac{\theta_1}{\theta}$, $\frac{9}{20}<20$, или $0,022<1$, очень выгодно удовлетворяется. А какъ при этомъ числа для $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, весьма просты и удобны для вычисленія членовъ A, B, C,.... даже безъ помощи логариѳмовъ; то будемъ вычислять корень изъ одного ряда. Для этого найдутся:

$$\frac{\theta}{\theta_1}=0,05=A;\ \left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2=0,0025;\ \left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^3=0,000125;$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1}=0,45;\ \frac{\theta_3}{\theta_1}=0,05;\ B=\frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2=0,001125;$$

$$C=\left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^3=0,000043775.$$

$$\text{Посему, корень } x=3-\left\{\begin{array}{l}0,05\\0,001125\\0,000043775\end{array}\right.$$

$$x=3-0,051168775=2,948831225;$$

а для даннаго уравненія $f(x)=0$,

$$x=-2,948831225,$$

гдѣ вѣрны по крайней мѣрѣ пять десятичныхъ.

Точность рѣшенія этого уравненія оправдывается тою повѣркою, что сумма его корней, взятая съ противнымъ знакомъ, почти точно равна коефиціенту втораго члена уравненія, то есть, нулю:

$$\left.\begin{array}{r}0{,}78281895\\ 2{,}166012174\end{array}\right\}\text{корни положительные}$$

$$\text{сумма}=2{,}948831124$$

$$-2{,}948831225\ \text{корень отрицательный}$$

$$\text{сумма почти}=0.$$

*2. Примѣръ.* — Пусть данное уравненіе:

$$\theta=x^4+20x^3-72x^2-850x+625=0,$$

и его производныя:

$$\theta_1=4x^3+60x^2-144x-850,$$
$$\theta_2=6x^2+60x-72,$$
$$\theta_3=4x+20,\quad \theta_4=1.$$

Для отдѣленія его корней, подставляю:

| | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$, | + | + | — | — | + | 1 корень |
| $=1$, | + | + | + | — | — | |
| $=6$, | + | + | + | + | — | 1 корень |
| $=7$, | + | + | + | + | + | |

и нахожу, что оно имѣетъ два положительные корня между предѣлами 0, 1, и между 6 и 7. Отыщемъ эти корни.

Подстановленіе $x=0$ даетъ $\theta=625$,
- $x=1$ - $\theta=280$;

стало-быть, корень ближе къ 1 нежели къ 0; а испытывая подстановленія 0,6; 0,7; 0,8, найдется, что самое выгоднѣйшее изъ нихъ 0,7, потому что дѣлаетъ самымъ меньшимъ отношеніе $\frac{\theta}{\theta_1}$, а именно даетъ:

$$\theta=+1{,}8201;\quad \theta_1=-920{,}028;\quad \theta_2=-27{,}06.$$

Этому подстановленію соотвѣтствуетъ коренная поправка

$$h=A-B+C\ldots.\ (\text{стр. } 416),$$

которой члены столь быстро убываютъ, что смѣло можно вычислять ее съ одного раза.

$$\begin{array}{rl}\log\theta &=0{,}260.0952\\ \text{д. }\log\theta_1 &=7{,}036.1989-10\\ \hline \log A &=0{,}296.2941-3\\ 2\log A &=0{,}592.5882-6\\ A &=0{,}00197831\end{array}\qquad\begin{array}{rl}\log\theta_2 &=1{,}432.3278\\ \text{д. }\log\theta_1 &=7{,}036.1989-10\\ \hline & 0{,}468.5267-2\\ 2\log A &=0{,}592.5882-6\\ \hline \log B &=0{,}061.1149-7\\ B &=0{,}0000011511.\end{array}$$

Посему, $x=0{,}70197831-0{,}000000115$
$=0{,}70197819{,}5$

корень, точный въ осьми десятичныхъ.

*Второй корень*, между предѣлами 6 и 7, ближе къ 7, потому что

$$x=6 \text{ даетъ } \theta=-1451$$
$$x=7 \quad - \quad \theta=+408.$$

И такъ, взявъ $x=7$, находимъ:

$$\theta=408,\ \theta_1=2454,\ \theta_2=642,\ \theta_3=48;$$

слѣдовательно, коренная поправка

$$h=-\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{C}\ldots.$$

Ея члены очевидно убываютъ, однако же не довольно быстро; а потому, нашедши первый членъ $\mathrm{A}=\frac{\theta}{\theta_1}=0,166\ldots.$, воспользуемся имъ однимъ для полученія первой приближенной величины къ корню:

$$x=7-0,166\ldots.=6,8\ldots.,$$

и, для полученія втораго приближенія, возмемъ $x=6,8$. Степени этого числа найдемъ въ таблицѣ:

$$x^2=46,24;\quad x^3=314,432;\quad x^4=2138,1376;$$

а сдѣлавъ подстановленія, получимъ:

$$\theta=-57,5024;\ \theta_1=2202,928;\ \theta_2=613,44;\ \theta_3=47,2.$$

Коренная поправка:

$$h=\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}-\ldots.=\frac{\theta}{\theta_1}-\frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2+\left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^3-\ldots.$$

Члены ея такъ быстро убываютъ, что можно смѣло вычислять ея три члена:

$\log\theta=1,759.6860$

д. $\log\theta_1=6,656.9996-10$

$\log\mathrm{A}=0,416.6856-2$

$2\log\mathrm{A}=0,833.3712-4$

$3\log\mathrm{A}=0,250.0568-4$

$\mathrm{A}=0,02610270$

$\log\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^2=0,889.5434-2$

$\log 2=0,301.0300$

$0,190.5734-1$

$\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}=0,155086=\alpha$

$-0,021426=\beta$

$0,133660=\alpha-\beta$

$\log(\alpha-\beta)=0,126.0015-1$

$3\log\mathrm{A}=0,250.0568-5$

$0,376.0583-6=\log\mathrm{C}$

$\mathrm{C}=0,0000023826.$

$\log\theta_2=2,787.7721$

д. $\log\theta_1=6,656.9996-10$

$0,444.7717-1$

$2\log\mathrm{A}=0,833.3712-4$

$\log\mathrm{B}=0,278.1429-4$

$\mathrm{B}=0,000189723$

$\log\theta_3=1,673.9420$

д. $\log\theta_1=6,656.9996-10$

$0,330.9416-2$

$\frac{\theta_3}{\theta_1}=\beta=0,021426$

Слѣдовательно,

$$x=6,8261027-0,00018972+0,00000238$$
$$=6,82591536$$

корень точный почти во всѣхъ десятичныхъ.

Для вычисленія *отрицательныхъ корней,* беру:

$$f(-x)=x^4-20x^3-72x^2+850x+625=0=\theta,$$
$$\theta_1=4x^3-60x^2-144x+850,$$
$$\theta_2=6x^2-60x-72,\quad \theta_3=4x-20,\quad \theta_4=1.$$

Здѣсь корни находятся между предѣлами 6 и 7, и предѣлами 21 и 22.

Испытывая подстановленія $x=6$, $x=7$, найдется, что корень между этими предѣлами ближе къ 6, нежели къ 7; потому что $x=6$ дѣлаетъ:

$$\theta=+109,\ \theta_1=-1310,\ \theta_2=-216,$$

чему соотвѣтствуетъ поправка:

$$h=A-B+C\ldots\ldots$$

Хотя члены этой поправки убываютъ, потому что условіе $\frac{\theta_2}{\theta_1}<\frac{\theta_1}{\theta}$ убыванія хорошо удовлетворяется; но, чтобъ ускорить вычисленіе, возмемъ $\frac{\theta}{\theta_1}=0,0832..$ за первую приближенную поправку, найдемъ первую приближенную величину корня:

$$x=6,0832\ldots,$$

и, для вычисленія второй приближенной величины, положимъ $x=6,08$. Въ таблицѣ найдемъ:

$$x^2=36,9664;\ x^3=224,755712;\ x^4=1366,51472896;$$

а чрезъ подстановленіе получимъ:

$$\theta=2,81968896;\ \theta_1=-1344,481152;\ \theta_2=-215,0016;\ \theta_3=4,32.$$

Этому подстановленію соотвѣтствуетъ поправка $h=A-B+C$; мы можемъ смѣло вычислять ея члены, потому что они убываютъ весьма быстро:

$$\begin{array}{rlcrl}
\log\theta & =0,450.2012 & \qquad & \log\theta_2 & =2,332.4400 \\
\text{д.}\ \log\theta_1 & =0,871.4453-4 & & & 0,871.4453-4 \\
\hline
\log A & =0,321.6465-3 & & \log\frac{\theta_2}{\theta_1} & =0,203.8853-1 \\
2\log A & =0,643.2930-6 & & & 0,643.2930-6 \\
\hline
 & & & \log B & =0,847.1783-7 \\
A & =0,002097233; & & B & =0,0000007034
\end{array}$$

$$\text{Посему.}\quad x=6,08+A-B$$
$$=6,0820965288.$$

Послѣдній корень находится между предѣлами 21 и 22, и притомъ нѣсколько ближе къ 21, потому что подстановленіе $x=21$ дѣлаетъ:

$$\theta=-4016,\ \theta_1=8410,\ \theta_2=1314,\ \theta_3=64,\ \theta_4=1,$$

чему соотвѣтствуетъ поправка:

$$h = A - B + C \ldots,$$

которой члены убываютъ, потому что условіе убыванія $\frac{\theta_2}{\theta_1} < \frac{\theta'}{\theta}$ удовлетворяется, но убываютъ медленно. Слѣдующая цифра корня $\frac{\theta}{\theta_1} = 0,5$ (около). Чтобъ освободить себя отъ лишнихъ цифръ при розысканіи слѣдующихъ приближеній, уменьшимъ корни уравненія предѣломъ 21, полагая $x = 21 + z$, что сдѣлать уже легко, потому что $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, $\theta_4$ всѣ готовы; найдется:

$$z^4 + 64z^3 + 1314z^2 + 8410z - 4016 = 0,$$

$$\theta_1 = 4z^3 + 192z^2 + 2628z + 8410,$$

$$\theta_2 = 6z^2 + 192z + 1314, \quad \theta_3 = 4z + 64, \quad \theta_4 = 1.$$

Возмемъ $z = 0,5$, получится:

$$\theta = 525,5625; \quad \theta_1 = 9772,5; \quad \theta_3 = 1411,5.$$

Коренная поправка будетъ:

$$h = -A - B - C - \ldots$$

Хотя ея члены довольно хорошо убываютъ, потому что уже первый членъ $A = \frac{\theta}{\theta_1} = 0,054\ldots$; однакоже, чтобы воспользоваться всею выгодою таблицъ степеней для быстрѣйшаго вычисленія искомаго корня, возмемъ лучше за первую приближенную величину корня:

$$z = 0,5 - 0,054\ldots = 0,446;$$

выпишемъ изъ нашей таблицы:

$$z^2 = 0,198916; \quad z^3 = 0,088716536; \quad z^4 = 0,039567575056;$$

тогда легко получатся:

$$\theta = 1,953049879; \quad \theta_1 = 9620,546738; \quad \theta_2 = 1400,8255.$$

Соотвѣтственная поправка того же вида

$$h = -A - B - C;$$

быстрое убываніе членовъ ея показываетъ, что можно сразу вычислить искомый корень, вѣрный до пяти или шести десятичныхъ:

$$\log \theta = 0,290.7133$$

$$\text{д.} \log \theta_1 = 0,016.8003 - 4$$

$$\log A = 0,307.5136 - 4; \quad A = 0,00020301$$

$$2 \log A = 0,615.0272 - 8.$$

Не вычисляю второй членъ B, потому что онъ начнется съ девятой десятичной. Слѣдовательно,

$$z = 0,446 - 0,00020301 = 0,44579699;$$

$$x = 21 + z = 21,44579699.$$

Точность рѣшенія повѣряется тѣмъ, что сумма корней, взятая съ противнымъ знакомъ, почти равна коефиціету 20 втораго члена уравненія:

| Корни положительные. | Корни отрицательные. |
|---|---|
| 0,70197819 | — 6,08209654 |
| 6,82591536 | —21,44579699 |
| 7,52789355 | —27,52789353; |

сумма —(7,52789355—27,52789353) почти точно равна 20.—Большей точности отъ употребленія логариѳмовъ и ожидать нельзя, да и едвали гдѣ нужно.

Превращеніе $f(x)=0$, въ $f(z)=0$, чрезъ уменьшеніе корней перваго уравненія предѣломъ 21 ясно показываетъ оборотъ, который надобно дать вычисленію корня, если хотимъ пользоваться таблицами степеней двузначныхъ чиселъ, сдѣлать весь трудъ легкимъ и даже занимательнымъ. Этотъ простой оборотъ мы вездѣ будемъ употреблять, гдѣ онъ понадобится.

3. *Примѣръ.*—Возмемъ уравненіе

$$\theta = x^5 - 420x \pm 800 = 0,$$

котораго $\theta_1 = 5x^4 - 420$, $\theta_2 = 10x^3$, $\theta_3 = 10x^2$, $\theta_4 = 5x$, $\theta_5 = 1$. Отдѣлимъ его корни:

Для корней положительныхъ:

| | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$, | + | $\overset{-}{\underset{+}{0}}$ | $\overset{+}{\underset{+}{0}}$ | $\overset{-}{\underset{+}{0}}$ | — | + | 2 мнимые |
| $=1$, | + | + | + | + | — | + | 1 |
| $=2$, | + | + | + | + | — | — | |
| $=3$, | + | + | + | + | — | — | 1 |
| $=4$, | + | + | + | + | + | + | |

Для корней отрицательныхъ

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=4$, | + | + | + | + | + | — | 1 |
| $x=5$, | + | + | + | + | + | + | |

Слѣдовательно, данное уравненіе имѣетъ два мнимые корня между 0 и 1, и три корня дѣйствительные, изъ коихъ два положительные между предѣлами 1 и 2, между 3 и 4, и отрицательный корень между —4 и —5.

Чтобы найти *первый дѣйствительный корень* между 1 и 2, дѣлаю подстановленія:

$x=1$, и нахожу: $\theta = 381$, $\theta_1 = -415, \ldots .$

$x=2$, - - $\theta = -8$, $\theta_1 = -340$, $\theta_2 = 80$, $\theta_3 = 40$.

Тотчасъ видно, что корень весьма близокъ къ 2; коренная поправка здѣсь

$$h = -A + B - C + \ldots\ldots$$

$$= -\frac{\theta}{\theta_1} + \frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2 - \left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2} - \frac{\theta_3}{\theta_1}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^3 + \ldots\ldots$$

Члены ея убываютъ такъ быстро, что смѣло можемъ вычислять ее изъ одного ряда.

$$\begin{array}{rl}
 & \log\ \theta = 0{,}903.0900 \\
\text{д.} & \log \theta_1 = 7{,}468.5211-10 \\
\hline
 & \log A = 0{,}371.6111-2 \\
 & 2\log A = 0{,}743.2222-4 \\
 & 3\log A = 0{,}114.8333-5 \\
 & A = 0{,}0235294 \\
 & 2\log\frac{\theta_2}{\theta_1} = 0{,}743.2222-2 \\
 & 0{,}301.0300 \\
\hline
 & \log\alpha = 0{,}044.2522-1 \\
 & \alpha = 0{,}100727 \\
 & \beta = 0{,}117647 \\
\hline
 & \alpha-\beta = -0{,}016920,
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log \theta_2 = 1{,}903.0900 \\
7{,}468.5211-10 \\
\hline
\log\frac{\theta_2}{\theta_1} = 0{,}371.6111-1 \\
2\log A = 0{,}743.2222-4 \\
\hline
\log B = 0{,}114.8333-4 \\
B = 0{,}000130266 \\
\log \theta_3 = 1{,}602.0600 \\
7{,}468.5211-10 \\
\hline
\log\beta = 0{,}070.5811-1 \\
\beta = 0{,}117647 \\
\\
\log(\beta-\alpha) = 0{,}228.4004-2 \\
3\log A = 0{,}114.8333-5 \\
\hline
\log C = 0{,}343.2337-7 \\
C = -0{,}00000220411.
\end{array}$$

Поелику C получилось отрицательное, то коренная поправка сдѣлается

$$h = -A+B+C, \text{ и слѣдовательно}$$

$$\begin{array}{rl}
x = & 2-0{,}0235294+0{,}000130266 \\
 & \qquad\qquad\qquad +0{,}0000002204 \\
x = & 1{,}97660754,
\end{array}$$

гдѣ вѣрны всѣ десятичныя.

*Второй корень* уравненія находится между 3 и 4, и близокъ къ 4, потому что подстановленія

$$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ x=4 \end{array}\right| \text{ дают}ъ\text{:} \quad \begin{array}{l} \theta = -217,\ \theta_1 = -215, \\ \theta = \quad 144,\ \theta_1 = \quad 660,\ \theta_2 = 640. \end{array}$$

Для $x=4$, поправочный рядъ будетъ (стр. 417),

$$h = -A-B-C-\ldots;$$

но онъ убываетъ слабо, хотя условіе убыванія $\frac{\theta_2}{\theta_1} < \frac{\theta_1}{\theta}$ и удовлетворяется. Поэтому, ограничившись первымъ членомъ $A = \frac{\theta}{\theta_1} = \frac{144}{660} = 0{,}21\ldots$, возмемъ за первое приближеніе къ корню

$$x = 4-0{,}2 = 3{,}8;$$

изъ таблицы найдемъ степени:

$$x^2 = 14{,}44;\quad x^3 = 54{,}872;\quad x^4 = 208{,}5136;\quad x^5 = 792{,}35168.$$

Отъ этого получатся:

$$\theta = -3{,}64832;\quad \theta_1 = 622{,}568;\quad \theta_2 = 548{,}72;\quad \theta_3 = 144{,}4, \text{ и проч.}$$

Коренною поправкою будетъ рядъ

$$h = A - B + C \ldots .,$$

котораго члены быстро убываютъ, и подаютъ надежду вычислить корень окончательно:

$$\log \theta = 0{,}562.0929$$
$$\text{д. } \log \theta_1 = 7{,}205.8132 - 10$$
$$\log A = 0{,}767.9061 - 3$$
$$2 \log A = 0{,}535.9122 - 5$$
$$3 \log A = 0{,}303.8183 - 7$$
$$A = 0{,}0058601$$
$$2 \log \frac{\theta_2}{\theta_1} = 0{,}890.3280 - 1$$
$$0{,}301.0300$$
$$\log \alpha = 0{,}191.3580$$
$$\alpha = 1{,}55368$$
$$\alpha - \beta = 1{,}32174,$$

$$\log \theta_2 = 2{,}739.3508$$
$$7{,}205.8132 - 10$$
$$\log \frac{\theta_2}{\theta_1} = 0{,}945.1640 - 1$$
$$2 \log A = 0{,}535.9122 - 5$$
$$\log B = 0{,}481.0762 - 5$$
$$B = 0{,}000030274$$
$$\log \theta_3 = 2{,}159.5672$$
$$7{,}205.8132 - 10$$
$$\log \beta = 0{,}365.3804 - 1$$
$$\beta = 0{,}23194$$
$$\log (\alpha - \beta) = 0{,}121.1461$$
$$3 \log A = 0{,}303.8183 - 7$$
$$\log C = 0{,}424.9644 - 7$$
$$C = 0{,}0000026605$$

Посему $x = 3{,}8058601 - 0{,}0000303 + 0{,}000000266;$
$x = 3{,}80583246.$

Отрицательный корень уравненія находится между предѣлами 4 и 5, и притомъ ближе къ 5, потому что подстановленіе $x = 5$ даетъ:

$$\theta = 225,\ \theta_1 = 2705,\ \theta_2 = 1250,\ \theta_3 = 250, \text{ и проч.}$$

Коренная поправка изображается рядомъ

$$h = -A - B - C - \ldots$$

котораго члены явно убываютъ значительно быстро. Но чтобы сразу вычислить корень, мы воспользуемся только первымъ членомъ $A = \frac{\theta}{\theta_1} = 0{,}07947 \ldots$, найдемъ первое приближеніе къ корню

$$x = 5 - 0{,}0831 - = 4{,}916 \ldots .$$

А какъ отсюда вычитаются еще члены B и C, то, для слѣдующаго приближенія, возмемъ $x = 4$, найдемъ въ таблицахъ степени этого числа:

$$x^2 = 24{,}01;\ x^3 = 117{,}649;\ x^4 = 576{,}4801;\ x^5 = 2824{,}75249.$$

Сдѣлавъ подстановленія, получимъ:

$$\theta = -33{,}24751;\ \theta_1 = 2462{,}4005;\ \theta_2 = 1176{,}46;\ \theta_3 = 240{,}1; \text{ и проч.}$$

Этому соотвѣтствуетъ коренная поправка

$$h = A - B + C \ldots$$

$$\begin{array}{r}
\log\frac{\theta}{\theta_1}=0{,}130.4006-2\\
2\log\frac{\theta}{\theta_1}=0{,}260.8012-4\\
3\log\frac{\theta}{\theta_1}=0{,}391.2018-6\\
\frac{\theta}{\theta_1}=A=0{,}01350205\\
2\log\frac{\theta_2}{\theta_1}=0{,}358.4596-1\\
0{,}301.0300\\ \hline
\log\alpha=0{,}659.4896-1;\\
\alpha=0{,}456551\\
0{,}097872=\beta\\ \hline
\alpha-\beta=0{,}358679;
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log\frac{\theta_2}{\theta_1}=0{,}679.2298-1\\
0{,}260.8012-4\\ \hline
\log B=0{,}940.0310-5\\
B=0{,}0000871026.\\
\log\theta_3=2{,}382.0170\\
6{,}608.6414-10\\ \hline
\log\beta=0{,}990.6584-2\\
\beta=0{,}097872\\
\log(\alpha-\beta)=0{,}554.7061-1\\
3\log A=0{,}391.2018-6\\ \hline
\log C=0{,}945.9079-7\\
C=0{,}00000088289
\end{array}$$

Посему, $x=4{,}91350205-0{,}0000871026$

$$+0{,}0000008829$$

$$x=4{,}91341583.....$$

Остаются два корня мнимые. Но, если уравненіе имѣетъ не болѣе, какъ *одну пару* этихъ корней, то ихъ всегда можно найти изъ его втораго и послѣдняго членовъ съ помощію всѣхъ найденныхъ дѣйствительныхъ корней.

Пусть $p+q\sqrt{-1}$, $p-q\sqrt{-1}$, эти мнимые корни: они опредѣлятся, если успѣемъ найти двѣ ихъ неизвѣстныя $p$ и $q$.

Для этого возмемъ всѣ дѣйствительные корни: $1{,}97660754$; $3{,}80583246$; $-4{,}91341583$.

Данное уравненіе не имѣетъ втораго члена; слѣдовательно, сумма его корней должна быть $=0$, то есть:

$$2p+1{,}97660754+3{,}80583246-4{,}91341583=0;$$

откуда $p=-0{,}43451209$.

Послѣдній членъ уравненія равенъ произведенію всѣхъ корней, взятому съ противнымъ знакомъ, то есть:

$$(p^2+q^2).1{,}97660754\ .\ 3{,}80583246\ .\ 4{,}91341583=800.$$

Отсюда, $p^2+q^2=21{,}6440....$

Но, $p^2=1{,}88801....$; слѣдовательно,

$$q^2=21{,}6440....\ -1{,}88801....\ =19{,}75599,$$

$$q=\pm\sqrt{19{,}755990}=\pm4{,}44477....$$

Посему искомою парою корней будетъ

$$x=-0{,}43451209\pm4{,}44477....\sqrt{-1}.$$

4. *Примѣръ*. — Уравненіе

$$x^{10}-310x^7+875x^3-1279x-45678=0,$$

котораго производныя:

$$\theta_1=10x^9-2170x^6+2625x^2-1279,$$
$$\theta_2=45x^8-6510x^5+2625x,$$
$$\theta_3=120x^7-10850x^4+875,\quad \theta_4=210x^6-10850x^3,$$
$$\theta_5=252x^5-6510x^2,\quad \theta_6=210x^4-2170x,$$
$$\theta_7=120x^3,\quad \theta_8=45x^2,\quad \theta_9=10x,\quad \theta_{10}=1,$$

имѣтъ только два дѣйствительные корня между 6 и 7, и между —3 и —4, а всѣ прочіе мнимые (стр. 410). Поищемъ корень между 6 и 7.

Этотъ корень ближе къ 7, нежели къ 6; потому что подстановленіе $x=6$ даетъ $\theta=-$, $\theta_1=+$, и, независимо отъ знаковъ, $\theta>\theta_1$.

Подстановленіе $x=7$ даетъ:

$$\theta=27422413;\ \theta_1=148365086;\ \theta_2=150020850,\ \text{гдѣ}\ \theta<\theta_1.$$

Коренною поправкою здѣсь будетъ рядъ $h=-\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{C}-$, котораго члены убываютъ, однакоже не быстро; а потому, на первый разъ, вычислимъ только два члена A и B:

| | |
|---|---|
| $\log\theta=7{,}438.1057$ | $\log\theta_2=8{,}176.1515$ |
| д. $\log\theta_1=1{,}828.6683-10$ | $1{,}828.6683-10$ |
| $\log \mathrm{A}=0{,}266.7740-1$ | $0{,}004.8198$ |
| $2\log \mathrm{A}=0{,}533.5480-2$ | $0{,}533.5480-2$ |
| $\mathrm{A}=0{,}18483....$ | $\log \mathrm{B}=0{,}539.3678-2$ |
| | $\mathrm{B}=0{,}034543.$ |

$$\text{Посему } x=7-\left\{\begin{matrix}0{,}18483...\\0{,}03454...\end{matrix}\right.$$
$$x=7-\ 0{,}21937=6{,}7806....$$

гдѣ вѣрна только первая десятичная.

Хотя второй десятичной мы собственно не знаемъ, однакоже она, вѣроятно, больше 0,05; а потому, для вычисленія второй приближенной величины корня, возмемъ

$$x=6{,}8;$$

отыщемъ въ таблицахъ степени этого числа, сохраняя при нихъ цѣлыя числа, и столько десятичныхъ знаковъ, сколько разрядовъ единицъ содержитъ въ себѣ коефиціентъ того или другаго вычисляемаго члена; а именно, возмемъ:

$$x^{10}=211392282{,}0;$$
$$-\ 310x^7=-310\times672298{,}881=-208412653{,}1;$$
$$+\ 875x^3=875\times314{,}432=275128{,}0;$$
$$-1279x=-1279\times6{,}8=-8697{,}2;$$

найдется $\theta=3200382$.

$$\begin{array}{l}
10x^9=310871002,96;\\
-2170x^6=-2170\times98867,4826=-214542437.24;\\
2625x^2=2625\times46,24=121380,00;\\
\qquad\qquad\theta_1=96448666,7\\
45x^8=45\times4571632,396=205723457,844;\\
-6510x^5=-6510\times14539,336=-94651075,41;\\
2625x=17850,0;\\
\qquad\qquad\theta_2=111090232.\\
120x^7=120\times672298,882=80675865,82;\\
-10850x^4=-10850\times2138,1376=-23198792,96;\\
\qquad\qquad\theta_3=57477948.
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log\theta=6,505,2017\\
\text{д. }\log\theta_1=2,015.7037-10\\
\hline
\log A=0,520\ 9054-2\\
2\log A=0,041.8108-3\\
3\log A=0,562.7162-5;\\
A=0,0331822\\
\\
2\log\frac{\theta_2}{\theta_1}=0,122.7590\\
0,301.0300\\
\hline
\log\alpha=0,423.7890\\
\alpha=2,653310\\
\alpha-\beta=2,057367;
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log\theta_2=8,045,6758\\
2,015,7037-10\\
\hline
\log\frac{\theta_2}{\theta_1}=0,061.3795\\
0,041.8108-3\\
\hline
\log B=0,103,1903-3\\
B=0,0012682\\
\log\theta_3=7,759.5012\\
2,015.7037-10\\
\hline
\log\beta=0,775.2049-1\\
\beta=0,595943\\
\log(\alpha-\beta)=0,313.3136\\
0,562.7162-5\\
\hline
\log C=0,876.0298-5\\
C=0,000075167.
\end{array}$$

Коренная поправка $h=-A-B-C\ldots$; посему

$$x=6,8-\left\{\begin{array}{l}0,0331822\\0,0012682\\0,0000752\end{array}\right.$$

$$=6,8-0,0345256$$

$$x=6,7654744.$$

Таковъ искомый корень; онъ точенъ въ пяти десятичныхъ.

*Примѣръ для упражненія:*

$$x^5-10x^3+20x^2-30x+15=0;\ \text{его корни:}$$

$$0,734881\ldots;\ -4,1067466;\ 2,4069308\ldots.;$$

$$-0,482468\pm1,40708\sqrt{-1}.$$

**430.** Иногда уравненіе имѣетъ корни столь близкіе одинъ къ другому, что различіе между ими начинается въ сотыхъ либо тысячныхъ доляхъ единицы; тогда обыкновенно считается трудностью отдѣленіе одного корня отъ другаго.

Способъ, представленный здѣсь для вычисленія корней, подаетъ однакоже возможность находить такіе корни, не имѣя надобности въ предварительномъ ихъ раздѣленіи. Для этого довольно, если мы успѣемъ найти два предѣла, между которыми находятся такіе корни, столь близкіе, что разность между этими предѣлами, а слѣдовательно между предѣломъ и ближайшимъ къ нему корнемъ, будетъ $\frac{1}{10}$ или менѣе, и будетъ выгодно удовлетворяться условіе убыванія поправочнаго ряда $h=(A, B, C, \ldots.)$. Тогда можно прямо начать приближаться къ корнямъ, взявши предѣлъ, который къ нимъ ближе, что узнать легко, потому что онъ обращаетъ данное $f(x)=0$ въ меньшій результатъ, и доставляетъ выгоднѣйшее условіе убыванія коренной поправки. Надобно только строго наблюдать за тѣмъ, какія десятичныя, получаемыя чрезъ вычисленіе, принадлежатъ искомому корню, ближайшему къ взятому предѣлу: тогда этотъ корень самъ собою отдѣлится отъ другихъ и легко можетъ быть вычисленъ. А чтобы можно было пользоваться таблицею степеней чиселъ, то, нашедши предѣлы $a$ и $b$, между которыми лежатъ корни, полезно иногда преобразовать данное уравненіе въ другое, котораго бы корни были менѣе предѣломъ $a$, и потомъ продолжать приближеніе.

*Примѣръ.* — Уравненіе

$$x^3+11x^2-102x+181=0$$

имѣетъ два дѣйствительные корня между 3 и 4; эти корни суть 3,213128; 3,229521. Они различаются менѣе чѣмъ двумя сотыми. Попробуемъ найти положеніе сихъ корней, взявши:

$$\theta=x^3+11x^2-102x+181,$$

$$\theta_1=3x^2+22x-102,\ \theta_2=3x+11,\ \theta_3=1.$$

| | 3 | 2 | 1 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x=0,$ | + | + | — | + | |
| $=1,$ | + | + | — | + | |
| $=3,$ | + | + | — | + | 2 корня неизвѣстн. |
| $=4,$ | + | + | + | + | |

Для $x=3$, получаемъ $\theta=1$; $\theta_1=-9$; $\theta_2=20$; $\theta_3=1$;

$x=4$, - $\theta=13$; $\theta_1=34$; $\theta_2=23$;

Слѣдовательно оба корня заключаются между 3 и 4, и весьма близки къ 3; а потому для перваго приближенія возмемъ сначала $x=3{,}2$, а потомъ $x=3{,}3$.

Для $x=3{,}2$; $x^2=10{,}24$; $x^3=32{,}768$, находимъ:

$$\theta=0{,}008;\ \theta_1=-0{,}880;\ \theta_2=20{,}6;\ \theta_3=1.$$

Для $x=3{,}3$; $x^2=10{,}79$; $x^3=35{,}957$, будутъ:

$$\theta=0{,}127;\ \theta_1=3{,}27;\ \theta_2=20{,}9;\ \theta_3=1.$$

Въ первомъ ряду функцій остаются двѣ перемѣны знаковъ, а во второмъ ни одной; стало-быть, оба корня находятся между предѣлами 3,2 и 3,3, и оба близки къ 3,2, потому что это подстановленіе обращаетъ $\theta$ въ результатъ 0,008, близкій къ нулю. И такъ, взявши предѣлъ 3,2, начнемъ искать ближайшій къ нему корень:

$$\frac{\theta}{\theta_1}=\frac{8}{880}=\frac{1}{110}=0,0090909....=A;$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1}=\frac{2060}{88}=\frac{515}{22};\quad \frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2=\frac{515}{22.12100}=\frac{515}{266200}.$$

$$B=0,0019346.$$

Ограничившись этими двумя членами поправки $h=A+B+C+....$, найдемъ

$$x=3,2+0,009090....+0,0019346+....$$
$$=3,211025....,$$

гдѣ можно считать вѣрными только двѣ десятичныя.

Для слѣдующаго приближенія возмемъ $x=3,21$; найдемъ въ нашихъ таблицахъ $x^2=10,3041$, $x^3=33,076161$; подставимъ въ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$; получатся:

$$\theta=0,001261;\quad \theta_1=-0,4677;\quad \theta_2=20,63;\quad \theta_3=1;$$

$$\frac{\theta}{\theta_1}=0,0026961;\quad \left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2=0,0000072693;$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1}=+44,109;\quad \frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2=0,00032064.$$

$$x=3,21+0,0026961+0,00032064=3,21301674....$$

Послѣ сего, взяли бы $x=3,\overset{2\ 1}{\cancel{12}}3$, и т. д.

Но, въ этихъ случаяхъ выгоднѣе поступать такъ: уменьшить корни уравненія ближайшимъ предѣломъ 3,2, полагая $x=3,2+z$; это весьма удобно, потому что $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, уже готовы; тогда получится:

$$z^3+20,6z^2-0,88z+0,008=0, \text{ откуда}$$
$$\theta_1=3z^2+41,2z-0,88;\quad \theta_2=3z+20,6;\quad \theta^3=1.$$

Сюда подставимъ $z=0,01$; найдутся,

$$\theta=0,001261;\quad \theta_1=-0,4677;\quad \theta_2=20,63;\quad \theta_3=1.$$

$$\begin{array}{rl}
\log\theta=0,100.7151-3 & \log\theta_2=1,314.4992 \\
\text{д. }\log\theta_1=0,330.0326 & 0,330.0326 \\
\hline
\log A=0,430.7477-3 & 1,644,5318 \\
2\log A=0,861.4954-6 & 0,861.4954-6 \\
\cline{2-2}
A=0,0026961. & \log B=0,506.0272-4 \\
 & B=0,0003206.
\end{array}$$

Слѣдовательно, $z=0,01+0,0062961+0,0003206$
$$=0,0130167.$$

Здѣсь вѣрны три десятичныя; а потому, для слѣдующаго приближенія, возмемъ $z=0,013$; изъ таблицъ найдемъ $z^2=0,000169$; $z^3=0,000002197$; и тогда получатся:

$$\theta=0,000043597;\quad \theta_1=-0,343893;\quad \theta_2=20,639.$$

$$\begin{array}{r} \log\theta=0,639.4566-5 \\ \text{д. }\log\theta_1=0,463\ 5764 \\ \hline \log A=0,103.0330-4 \\ 2\log A=0,206.0660-8 \\ A=0,00012677 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \log\theta_2=1,314.6887 \\ 0,463.5764 \\ \hline 1,778.2651 \\ 0,206\ 0660-8 \\ \hline \log B=0,984.3311-7 \\ B=0,0000096456. \end{array}$$

Поправочная формула все таже $h=A+B+C+\ldots$; посему,

$$\begin{array}{l} z=0,01312677+0,0000096456 \\ \quad=0,01312773;\ \text{и слѣдовательно} \\ x=3,2+z=3,21312773\ldots \end{array}$$

*Второй корень* находится между 3,213.... и 3,3; для приближенія къ нему, возмемъ $x=3,25$. При этомъ уменьшимъ опять корни уравненія числомъ 3,2, то есть, возмемъ уже готовое уравненіе,

$$z^3+20,6z^2-0,88z+0,008=0,$$ и его производныя:

$$3z^2+41,2.z-0,88;\quad 3z+20,6;$$ и проч., и положимъ

$$z=3,25-3,2=0,05;\quad z^2=0,0025;\quad z^3=0,000125,$$ найдутся:

$$\theta=0,015625;\quad \theta_1=1,1875;\quad \theta_2=20,75;\quad \theta_3=1.$$

Здѣсь коренная поправка $h=-A-B-C-\ldots$; члены ея очевидно убываютъ, а потому вычислимъ сперва два члена:

$$\begin{array}{r} \log\theta=0,193.8200-2 \\ \text{д. }\log\theta_1=0,925.3664-1 \\ \hline \log A=0,119.1864-2 \\ 2\log A=0,238.3728-4 \\ A=0,0131579 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \log\theta_2=1,317.0181 \\ 0,925.3664-1 \\ \hline 1,242.3845 \\ 0,238.3728-4 \\ \hline \log B=0,480.7573-3 \\ B=0,0030252 \end{array}$$

$$z=0,05-\left\{\begin{array}{l} 0,0131579 \\ 0,0030252 \end{array}\right\}=0,0338169\ldots$$

Считая вѣрными только двѣ десятичныя, возмемъ для слѣдующаго приближенія $z=0,03$; $z^2=0,0009$; $z^3=0,000027$; тогда будутъ:

$$\theta=0,000167;\ \theta_1=0,3587;\ \theta_2=20,69;\ \theta_3=1.$$

Коренная поправка опять та же $h=-A-B-C$.

$\log\theta = 0,222.7165-4$

д. $\log \theta_1 = 0,445.2686$

$\log A = 0,667.9851-4$

$2 \log A = 0,335.9702-7$

$A = 0,00046450$

$\log \theta_2 = 1,315.7605$

$0,445.2686$

$1,761.0291$

$0,335.9702-7$

$\log B = 0,096.9993-5$

$B = 0,00001252$

$$z = 0,03 - \left\{ \begin{matrix} 0,00046450 \\ 0,00001252 \end{matrix} \right\} = 0,029522\ldots.$$

Слѣдовательно, $x = 3,2 + z = 3,229522$.

Такимъ образомъ отдѣлились корни одинъ отъ другаго, хотя и не были предварительно раздѣлены частными предѣлами.

Вотъ еще примѣры такого же рода:

1) $100x^3 - 500x^2 + 600x + 63 = 0$;

2) $250x^3 - 102x + 25 + 0$;

3) $100x^3 - 1621x + 2512 = 0$.

**431.** Само собою разумѣется, что и дѣйствительные корни всякаго двучленнаго уравненія $x^r - p = 0$ можно также вычислять по общей формулѣ,

$$x = \alpha + \left\{ \frac{\theta}{\theta_1},\ \frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2,\ \left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2} - \frac{\theta_3}{\theta_1}\right)\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^3, \ldots. \right\},$$

надобно только разложить число $p$ на двѣ части $\alpha^r$ и $\delta$ (полагая $p = \alpha^r + \delta$), чтобы первая, сколь возможно большая, была полною $r$-ю степенью, а другая меньшая была ей дополненіемъ къ числу $p$. Въ этомъ случаѣ, общая формула, выражающая корень, обращается въ рядъ Ньютонова бинома, какой употребляется для возвышенія двучленныхъ количествъ въ степени дробныя, и слѣдовательно, для извлеченія корней изъ чиселъ (**235**), то есть, въ рядъ

$$x = \sqrt[r]{p} = (\alpha^r + \delta)^{\frac{1}{r}} = \alpha + \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\alpha^{r-1}} - \frac{(r-1)}{1.2.r^2} \cdot \frac{\delta^2}{\alpha^{2r-1}} + \frac{(r-1)(2r-1)}{1.2.3.r^3} \cdot \frac{\delta^3}{\alpha^{3r-1}} - \ldots,$$

$$\text{такъ что } \frac{\theta}{\theta^1} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta}{\alpha^{r-1}};\ \frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2 = \frac{r-1}{1.2.r^2} \cdot \frac{\delta^2}{\alpha^{2r-1}},$$

$$\left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2} - \frac{\theta_3}{\theta_1}\right)\left(\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)^3 = \frac{(r-1)(2r-1)}{1.2.3.r^3} \cdot \frac{\delta^3}{\alpha^{3r-1}}, \ldots..$$

Для доказательства, возмемъ:

$$\theta = x^r - p = x^r - \alpha^r - \delta = 0, \text{ и производныя}$$

$$\theta_1 = rx^{r-1},\ \theta_2 = \frac{r(r-1)}{1.2}.x^{r-2},\ \theta_3 = \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}.x^{r-3}, \text{ и такъ далѣе;}$$

и положимъ $x = \alpha$; то будетъ:

$$\theta = -\delta,\ \theta_1 = r\alpha^{r-1},\ \theta_2 = \frac{r(r-1)}{1.2}.\alpha^{r-2}$$

$$\theta_3 = \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}.\alpha^{r-3}, \ldots..$$

Коренная поправка должна быть $h=\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{D}+\ldots$, гдѣ

$$\mathrm{A}=\frac{\theta}{\theta_1}=\frac{\delta}{r.\alpha^{r-1}};$$

$$\mathrm{B}=\frac{\theta_2}{\theta_1}.\mathrm{A}^2=\frac{(r-1)}{1.2}.\frac{\alpha^{-1}.\delta^2}{r^2.\alpha^{2r-2}}=\frac{r-1}{1.2.r^2}.\frac{\delta^2}{\alpha^{2r-1}};$$

$$\mathrm{C}=\left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}\right).\mathrm{A}^3=\left\{\frac{(r-1)^2.\alpha^{-2}}{2}-\frac{(r-1)(r-2)\alpha^{-2}}{1\;.\;2\;.\;3}\right\}.\frac{\delta^3}{r^3\alpha^{3r-1}}$$

$$=\frac{(r-1)(2r-1)}{1.2.3.r^3}.\frac{\delta^3}{\alpha^{3r-1}};$$

и такъ далѣе.

Отсюда заключаемъ, что формула

$$x=\alpha+(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D},\ldots)$$

есть самая общая для вычисленія дѣйствительныхъ корней уравненій всякихъ высшихъ степеней; она заключаетъ въ себѣ и рядъ Ньютонова бинома, изображающій извлеченіе корней изъ чиселъ, какъ только частный случай. Мы скоро увидимъ, что эту же формулу можно употребить и для вычисленія корней мнимыхъ.

## *Способы отличать мнимые корни отъ дѣйствительныхъ, когда они заключаются въ тѣсныхъ предѣлахъ, и потому остаются неизвѣстными.*

**432.** При отдѣленіи корней даннаго уравненія $\theta(x)=0$ чрезъ подстановленіе чиселъ $1, 2, 3, \ldots -1, -2, -3, \ldots$ на мѣсто $x$ въ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3, \ldots$, не рѣдко въ какой ни есть строкѣ знаковъ уничтожаются сряду двѣ перемѣны, и слѣдовательно обнаруживается присутствіе двухъ корней. Пока эти корни не раздѣлены частными предѣлами, до тѣхъ поръ остается неизвѣстнымъ, какіе они, дѣйствительные или мнимые. Для разрѣшенія этого недоумѣнія, прежде всего должно къ уравненію приложить способы, показанные въ **381**, **384**, **389**, служащіе для открытія мнимыхъ корней. Если же эти способы окажутся недостаточны для указанія полнаго числа этихъ корней, тогда надобно прибѣгнуть къ сближенію предѣловъ, заключающихъ неизвѣстные корни уравненія, и къ вычисленію одного изъ сихъ корней, принимая его за дѣйствительный, и смотрѣть, какова будетъ его поправка $h=(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\ldots)$.

Если она, при каждомъ сближеніи предѣловъ, становится меньше, то здѣсь оба корня дѣйствительные, и легко могутъ быть вычислены; но они мнимые, когда эта поправка начнетъ увеличиваться и удалять насъ отъ корней, не смотря на послѣдовательное сближеніе предѣловъ, между которыми, явно, считать ихъ надобно.

*Примѣръ.* Отдѣляя положительные корни уравненія

$$\theta=x^4-5x^2+4x+2=0,\text{ гдѣ}$$

$$\theta_1=4x^3-10x+4,$$

$$\theta_2=6x^2-5,\ \theta_3=4x,\ \theta_4=1,\text{ находимъ:}$$

$$\begin{array}{rccccc|l} & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \\ \text{для } x=0, & + & 0 & - & + & + & \\ =1, & + & + & + & - & + & 2\text{ неизвѣст. корня} \\ =2, & + & + & + & + & + & \end{array}$$

два неизвѣстные корня между 1 и 2. Чтобъ узнать, какіе это корни, дѣйствительные или мнимые, станемъ сближать ихъ предѣлы, взявши $x=1,3$; получится:

$$x^2=1,69;\ x^3=2,197;\ x^4=2,8561;$$
$$\theta=1,6061;\ \theta_1=-0,212;\ \theta_2=5,14;\ \theta_3=5,2.$$

Порядокъ этихъ знаковъ показываетъ, что неизвѣстные корни находятся между 1,3 и 2, и коренная поправка

$$h=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\ldots.$$
$$=\frac{1,6061}{0,212}+\frac{5,14}{0,212}\left(\frac{1,6061}{0,212}\right)^2+\ldots.$$
$$=7,5759\ldots+1391,55\ldots.+\ldots.$$
$$x=1,3+7,5759\ldots+1391,55\ldots+\ldots=1400,426\ldots.$$

И такъ, подстановленіе 1,3, которое должно быть ближе къ корнямъ, вдругъ удалило насъ отъ нихъ на великое разстояніе. Изъ этого заключаемъ, что между предѣлами 1 и 2 находится пара корней мнимыхъ.

**433.** *Другой способъ.* — Положимъ, что между предѣлами $a$ и $b$ уничтожились двѣ перемѣны знаковъ между $\theta_n$, $\theta_{n-1}$, $\theta_{n-2}$, и чрезъ то открылось присутствіе двухъ неизвѣстныхъ корней въ данномъ уравненіи. Мы можемъ точно опредѣлить родъ этихъ корней, разыскивая *наименьшую величину*, какую принимаетъ старшая функція $\theta_n$ въ этихъ предѣлахъ. Для этого возмемъ $\theta_{n-1}=0$, отыщемъ дѣйствительный корень этого уравненія между предѣлами $a$ и $b$; подставимъ его въ $\theta_{n-2}$, и будемъ смотрѣть, не будетъ ли $\theta_{n-2}=+$; въ такомъ случаѣ $\theta_n$ имѣетъ наименьшую величину, которую и надобно найти, подставивъ этотъ корень въ $\theta_n$. Наименьшая величина получится $\theta_n=+$, 0, либо —. Два первые результата покажутъ, что, въ предѣлахъ $a$ и $b$, данное уравненіе содержитъ пару мнимыхъ корней; а результатъ $\theta_n=-$ покажетъ, что тутъ нѣтъ мнимыхъ.

Этимъ способомъ хорошо пользоваться всякой разъ, когда $\theta_{n-1}=0$ бываетъ невысокой степени отъ $x$, и легко можетъ быть разрѣшено алгебрически, не прибѣгая къ общему выраженію корня $x=a+(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\ldots.)$. Во всякомъ же другомъ случаѣ онъ затруднителенъ, и тогда лучше употребить предыдущій способъ чрезъ сближеніе предѣловъ.

*Примѣръ.* $x^3-7x+7=0$ имѣетъ

$$\theta_1=3x^2-7,\ \theta_2=3x,\ \theta_3=1.$$

$$\begin{array}{llcccc|l} & & 3 & 2 & 1 & 0 & \\ \text{Для} & x=0, & + & 0 & - & + & \\ & =1, & + & + & - & + & \text{2 неизв. корня.} \\ & =2, & + & + & + & + & \end{array}$$

Чтобъ узнать, какіе неизвѣстные корни лежатъ между предѣлами 1 и 2, беру $\theta_1=3x^2-7=0$; нахожу $x=\sqrt{\frac{7}{3}}$; это подставляю въ $\theta_2=3x$, получаю $\theta_2=+$; стало-быть, данное уравненіе имѣетъ *minimum*, а именно:

$$x(x^2-7)+7=\sqrt{\frac{7}{3}}\left(\frac{7}{3}-7\right)+7=-0,0926\ldots.$$

результатъ отрицательный; слѣдовательно въ предѣлахъ 1 и 2 находятся корни дѣйствительные.

***Примѣръ.*** Мы видѣли, что уравненіе

$$\theta=x^3+11x^2-102x+181=0, \ (\mathbf{430}),$$

имѣетъ два неизвѣстные корня между 3 и 4; но эти корни дѣйствительные, потому что $\theta_1=3x^2+22x-102=0$, будучи разрѣшено, даетъ мнимые корни, и тѣмъ показываетъ, что $\theta=0$ не имѣетъ наименьшей величины.

***Примѣръ.*** $\theta=x^5-10x^3+25x+30=0$, имѣетъ

$$\theta_1=5x^4-30x^2+25,$$
$$\theta_2=10x^3-30x,$$
$$\theta_3=10x^2-10, \ \theta_4=5x, \ \theta_5=1.$$

$$\begin{array}{llcccccc|l} & & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \\ \text{Для} & x=0, & + & 0 & - & 0 & + & + & \\ & =1, & + & + & 0 & - & 0 & + & \\ & =2, & + & + & + & + & - & + & \text{2 неизвѣстные корня.} \\ & =3, & + & + & + & + & + & + & \end{array}$$

Беру: $\theta_2=5x^4-30x^2+25=0$, или

$$x^4-6x^2+5=0; \text{ откуда}$$
$$x^2=3\pm\sqrt{9-5}=3\pm2,$$
$$x=\sqrt{5}, \text{ либо } x=1.$$

Изъ этихъ корней только $\sqrt{5}$ заключается въ предѣлахъ 2 и 3; его и подставимъ въ $\theta_2$, получится $10x^3-30x=10x(x^2-3)=10x(5-3)=+$. Положительный результатъ показываетъ, что $\theta=0$ имѣетъ *minimum* между 2 и 3, которое найдется: $\theta=x(x^4-10x^2+25)+30=x(25-50+25)+30=30$.

Этотъ положительный результатъ показываетъ, что между 2 и 3 находится пара мнимыхъ корней.

***Примѣръ.*** $\theta=x^5-10x^3+50x-100=0$;

$$\theta_1=5x^4-30x^2+50,$$
$$\theta_2=10x^3-30x,$$
$$\theta_3=10x^2-10, \ \theta_4=5x, \ \theta_5=1.$$

| | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Для $x=0$, | + | 0 | — | 0 | + | — | |
| $=1$, | + | + | 0 | — | + | — | 2 неизвѣстные корня |
| $=2$, | + | + | + | + | + | — | |
| $=3$, | + | + | + | + | + | + | 1 корень. |

Здѣсь между предѣлами 1 и 2 лежатъ два неизвѣстные корня, какъ видно изъ порядка знаковъ функцій $\theta_1$, $\theta_2$. Для опредѣленія рода этихъ корней, беру $\theta_2=10x^3-30x=0$; отсюда нахожу:

$$x^2=3,\ x=\sqrt{3} \text{ между 1 и 2.}$$

Этотъ корень дѣлаетъ $\theta_3=+$, слѣдовательно $\theta_1$ обращаетъ въ *minimum*, которое найдется положительное и $=+5$; стало-быть, неизвѣстные корни суть мнимые.

*Примѣръ.* $\theta=x^6-3x^4+10x^2-20x+30=0$,

$\theta_1=6x^5-12x^3+20x-20$,

$\theta_2=15x^4-18x^2+10$,

$\theta_3=20x^3-12x$, $\theta_4=15x^2-3$, $\theta_5=6x$, $\theta_6=1$.

| | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Для $x=0$, | + | 0 | — | 0 | + | — | + | |
| $=\frac{1}{2}$, | + | + | + | — | + | — | + | 2 неизвѣстные корня |
| $=1$, | + | + | + | + | + | — | + | 2 - - |
| $=2$. | + | + | + | + | + | + | + | |

Эти строки знаковъ показываютъ двѣ пары неизвѣстныхъ корней: одну между $^1/_2$ и 1, другую между 1 и 2. Первую опредѣлить легко, взявши $\theta_3=20x^3-12x=0$, откуда $x=\sqrt{\frac{3}{5}}$. Этотъ корень подставимъ въ $\theta_4$; найдется:

$$15x^2-3=\frac{15.3}{5}-3=6$$

результатъ положительный; слѣдовательно $\theta_2$ имѣетъ *minimum*, которое найдется также положительное:

$$15x^4-18x^2+10=\frac{15.9}{25}-\frac{18.3}{5}+10=4\frac{3}{5}.$$

И такъ, между $^1/_2$ и 1 находятся корни мнимые.

Но, для опредѣленія корней между 1 и 2, надобно прибѣгнуть къ способу сближенія этихъ предѣловъ, потому что $\theta_1$ полиномъ высокой степени.

Поелику $x=1$ даетъ $\theta=18$, а
$x=2$, - $\theta=46$,

то видно, что корни лежатъ ближе къ 1, нежели къ 2; а потому возмемъ:

$x=1,2$; $x^2=1,44$; $x^3=1,728$; $x^4=2,0736$; $x^5=2,48832$; $x^6=2,985984$;

найдутся:

$$\theta=17,166\ldots;\ \theta_1=-1,806\ldots;\ \theta_2=38,512\ldots$$

Порядокъ знаковъ показываетъ, что корни должны заключаться между 1,2 и 2; поправочная формула $h=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}\ldots$

Но, уже первый членъ $\mathrm{A}=\frac{\theta}{\theta_1}=\frac{17,166}{1,806}=9,5\ldots$ дѣлаетъ $x=1,2+9,5\ldots=10,7\ldots$, и выводитъ его не только изъ предѣловъ 1 и 2, но даже за предѣлъ всѣхъ корней уравненія. Слѣдовательно, между 1 и 2, въ уравненіи находятся также корни мнимые.

## III. Вычисленіе корней чрезъ разложеніе преобразованнаго уравненія въ непрерывную дробь.

**434.** Этотъ замѣчательный способъ представленъ Фогелемъ, лейпцигскимъ математикомъ, 1845 года *), и примѣненъ къ рѣшенію всякаго уравненія съ *одною неизвѣстною,* будетъ ли оно имѣть видъ многочленной функціи, цѣлой, раціональной, или функціи трансцендентной, лишь бы имѣло конечное число членовъ. Мы приложимъ его только къ уравненіямъ, вида

$$f(x)=x^n+\mathrm{A}x^{n-1}+\mathrm{B}x^{n-2}+\ldots+\mathrm{S}x+\mathrm{T}=0,$$

гдѣ A, B, C,.... суть числа дѣйствительныя.

Надобно, 1) отдѣлить корни этого уравненія своими предѣлами (по способу **417, 418, 419**); 2) потомъ взять между предѣлами $a$ и $b$ разыскиваемаго корня число $h$ среднее или ближайшее къ корню, и, положивъ $x=h+z$, подставить въ уравненіе $f(x)=0$; тогда это уравненіе превратится въ полное уравненіе:

$$f(h+z)=\mathrm{C}_0+\mathrm{C}_1z+\mathrm{C}_2z^2+\mathrm{C}_3z^3+\ldots+z^n,\ \text{или}$$

$$f(h+z)=\theta+\theta_1.z+\theta_2.z^2+\theta_3.z^3+\ldots+z^n,$$

означая данное уравненіе и его производныя принятымъ нами знакоположеніемъ:

$$\mathrm{C}_0=\theta,\ \ \mathrm{C}_1=\theta_1,\ \ \mathrm{C}_2=\theta_2,\ldots.$$

3) Послѣ того надобно обратить это уравненіе въ непрерывную дробь:

$$f(h+z)=\theta+\frac{m^r}{n^r}=0$$

по извѣстному намъ способу (**345**).

Послѣдовательными приближеніями къ дроби $\frac{m^r}{n^r}$ будутъ:

$$\text{первое}\ \frac{m_1}{n_1}=\mathrm{C}_1z=\theta_1z,$$

$$\text{второе}\ \frac{m_2}{n_2}=\frac{\mathrm{C}_1^2z}{\mathrm{C}_1-\mathrm{C}_2z}=\frac{\theta_1^2z}{\theta_1-\theta_2z},$$

$$\text{третье}\ \frac{m_3}{n_3}=\frac{-\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2z+(\mathrm{C}_1\mathrm{C}_3-\mathrm{C}_2^2)z^2}{-\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3z}=\frac{-\theta_1\theta_2z+(\theta_1\theta_3-\theta_2^2)z^2}{-\theta_2+\theta_3z},\ \text{и проч.}$$

---

*) См. Entdeckung einer numerischen General-Auflösung aller höheren endlichen Gleichungen, von jeder beliebigen algebraischen und transcendenten Form, von A. F. Vogel; neue Ausgabe. 1847.

Если ограничимся этими тремя приближеніями, и внесемъ ихъ въ $f(h+z)$ вмѣсто полной дроби $\frac{m^r}{n^r}$, сперва одно, потомъ другое и третье, то получимъ:

$$\theta+\theta_1 z=0, \text{ или } -\theta=\theta_1 z;$$

$$\theta+\frac{\theta_1^2 . z}{\theta_1-\theta_2 z}=0, \text{ и}$$

$$\theta+\frac{[-\theta_1\,\theta_2 . z+(\theta_1\,\theta_3-\theta_2^2)z^2]}{-\theta_2+\theta_3 z}=0;$$

а, по освобожденіи отъ знаменателей, будетъ:

1) $\theta+\theta_1 z=0$,

2) $\theta\theta_1-(\theta\theta_2-\theta_1^2)z=0$,

3) $-\theta\theta_2+(\theta\theta_3-\theta_1\theta_2)z+(\theta_1\theta_3-\theta_2^2)z^2=0$.

**435.** Этихъ трехъ уравненій достаточно для вычисленія корня $x=h+z$ до такой степени точности, до какой угодно.

Изъ уравненій 1) и 2) найдутся приближенныя поправки $z$ корня $x$, которыя для различія назовемъ $z_1$ и $z_2$:

$$z_1=\frac{-\theta}{\theta_1},$$

$$z_2=\frac{-\theta\theta_1}{-\theta\theta_2+\theta_1^2}=\frac{-\theta}{z_1\theta_2+\theta_1}.$$

Для разрѣшенія третьяго уравненія, и для отысканія третьей поправки $z_3$ раздѣлимъ его сперва на $\theta_1\theta_2$:

$$\frac{-\theta}{\theta_1}+\left(\frac{\theta}{\theta_1}.\frac{\theta_3}{\theta_2}-1\right)z_3+\left(\frac{\theta_3}{\theta_2}-\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)z_3^2=0;$$

положимъ для краткости:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1}=a,\ \frac{\theta_3}{\theta_2}=b, \text{ да возмемъ } -\frac{\theta}{\theta_1}=z_1, \text{ то получится:}$$

$$z_1-(1+z_1 b)z_3+(b-a)z_3^2=0, \text{ или}$$

$$z_3^2-\frac{(1+z_1 b)z_3}{b-a}+\frac{z_1}{b-a}=0;$$

а здѣсь положимъ $\frac{1+z_1 b}{b-a}=2c$, $\frac{z_1}{b-a}=d$; тогда уравненіе приметъ простѣйшій видъ:

$$z_3^2-2cz_3+d=0, \text{ откуда}$$

$$z_3=c\pm\sqrt{c^2-d}.$$

Такова третья поправка, дающая третье приближеніе къ корню.

При вычисленіи *дѣйствительнаго корня* $x=h+z$, ищутся только двѣ первыя его поправки $z_1$ и $z_2$, третья же необходима только при вычисленіи корней *мнимыхъ*, какъ это будетъ показано въ своемъ мѣстѣ.

**436.** *Послѣдовательныя приближенія къ корню.* — Когда уравненіе приведено къ виду:

$$f(h+z)=\theta+\theta_1 z+\theta_2 z^2+\theta_3 z^3+\ldots+z^m=0,$$

то ищутся, по предыдущимъ формуламъ, двѣ приближенныя величины $z_1$ и $z_2$, берется средняя между ими $^1/_2(z_1+z_2)=h_1$, и принимается за ближайшую къ истинной. Потомъ означается чрезъ $r$ новая поправка, дополняющая $h_1$ до $z$, т. е. полагается $z=h_1+r$; отчего получается $x=h+h_1+r=\alpha+r$. Это подставимъ въ начальное уравненіе, найдется:

$$f(\alpha+r)=\theta+\theta_1 r+\theta_2 r^2+\theta_3 r^3+\ldots=0;$$

изъ этого уравненія получатся двѣ приближенныя величины для $r$, то есть, $r$ и $r_2$ коихъ среднюю $^1/_2(r_1+r_2)$ означимъ чрезъ $h_2$. Послѣ того положимъ $r=h_2+s$, гдѣ $s$ означаетъ новую поправку; слѣдовательно, вмѣсто $x=h+h_1+r=\alpha+r$, ближайшею величиною къ корню будетъ:

$$x=h+h_1+h_2+s=\beta+s.$$

Эту новую величину для $x$ подставимъ опять въ начальное уравненіе $f(x)=0$, получится новое уравненіе:

$$f(\beta+s)=\theta+\theta_1 s+\theta_2 s^2+\theta_3 s^3+\ldots=0,$$

откуда, въ свою очередъ, найдутся двѣ приближенныя поправки $s_1$ и $s_2$, которыхъ средняя величина $^1/_2(s_1+s_2)$ пусть $=h_3$. Тогда снова надобно будетъ взять $s=h_3+t$, то есть, $x=h+h_1+h_2+h_3+t=\gamma+t$.

Продолжая такимъ образомъ, можно вычислить для $x$ величину его такъ точно, какъ будетъ надобно.

**437.** Должно замѣтить, что хотя искомая коренная поправка считается ближайшею къ полусуммѣ найденныхъ приближеній; однакожъ это не всегда справедливо. А какъ этого нельзя знать напередъ, то все же надобно брать среднее отъ обоихъ, которое во всѣхъ случаяхъ ведетъ къ желаемой цѣли.

**438.** Когда вычисленныя приближенныя поправки бываютъ правильныя дроби, тогда выгоднѣе брать вторую вмѣсто средней отъ обѣихъ; потому что послѣдующія приближенныя дроби бываютъ ближе къ той поправкѣ, которая ищется.

**439.** Что касается до знака предъ $z$, когда мы переходимъ отъ $f(x)=0$ къ $f(h+z)=0$, то онъ зависитъ отъ знаковъ предъ $\theta$ и $\theta_1$. Если эти знаки будутъ *равные*, то поправка $z_1=\frac{-\theta}{\theta_1}$ будетъ всегда *отрицательною;* если же $\theta$ и $\theta_1$ *съ противными знаками,* то поправка $z_1$ будетъ *положительною.* Изъ этихъ поправокъ, положительныхъ или отрицательныхъ, тотчасъ будетъ видно, будетъ ли $x$ малъ или великъ.

**440.** *Признаки мнимости корней.* — Если между какими ни есть близкими предѣлами окажутся неизвѣстные корни, то самое вычисленіе одного изъ нихъ покажетъ, какіе они, дѣйствительные или мнимые. 1) Положимъ, что изъ двухъ найденныхъ приближеній $z_1$ и $z_2$ одно будетъ положительное, а другое отрицательное, то *сначала* все-таки надобно взять среднее $^1/_2(z_1+z_2)=h_1$, и, подставивъ $x=h_1+r$ въ данное уравненіе, вычислить новыя приближенныя величины $r_1$ и $r_2$ поправокъ. Если и послѣ того найдутся $r_1$ и $r_2$ съ противными знаками, то должны заключить, что искомый корень *мнимый*. 2) Можетъ случиться также, что первыя величины $z_1$ и $z_2$ получатся съ равными знаками, равно какъ и вторыя приближенія $r_1$ и $r_2$ съ равными знаками; а между тѣмъ эти вторыя будутъ болѣе разниться между собою, нежели первыя, слѣдовательно будутъ насъ удалять отъ корня, а не приближать къ нему: это обстоятельство также служитъ признакомъ *мнимости* корня.

**441.** Поелику въ данномъ уравненіи $f(x)=0$ могутъ быть въ одно время корни дѣйствительные и мнимые; то сначала должно розыскать соизмѣримые дѣйствительные корни, и корни вида $+\sqrt{\pm a}$, $-\sqrt{\pm b}$, и исключить ихъ изъ уравненія; останется уравненіе съ корнями несоизмѣримыми и корнями мнимыми вида $p\pm q\sqrt{-1}$.

**442.** Приступая къ частнымъ примѣрамъ, припомнимъ себѣ, что мы означили чрезъ

$f(x)=0$ данное начальное уравненіе,

$$f(h+z)=\theta+\theta_1 z+\theta_2 z^2+\theta_3 z^3+\ldots=0$$

это же уравненіе измѣненное чрезъ подстановленіе $x=h+z$.

*Первое приближеніе къ корню*, или первая его поправка

$$z_1=\frac{-\theta}{\theta_1};$$

*второе приближеніе*, или вторая поправка

$$z_2=\frac{-\theta}{z_1\theta_2+\theta_1};$$

*третье приближеніе* $z_3=c\pm\sqrt{c^2-d}$, гдѣ

$$c=\frac{{}^1\!/_2(1+z_1 b)}{b-a},\quad d=\frac{z_1}{b-a},\quad a=\frac{\theta_2}{\theta_1},\quad b=\frac{\theta_3}{\theta_2}.$$

*Примѣръ.*—Мы нашли (стр. 410), что уравненіе

$$x^5-5x^4+135x-245=0,$$

котораго производныя:

$$\theta_1=5x^4-20x^3+135,$$

$$\theta_2=10x^3-10x^2,\ \theta_3=10x^2-20x,\ \theta_4=5x-5,\ \theta^5=1,$$

имѣетъ одинъ дѣйствительный корень между 3 и 4, а всѣ прочіе корни мнимые. Этотъ корень ближе къ 4, нежели къ 3, потому что

$x=3$ даетъ $\theta=-2$, $\theta_1=0$, $\theta_2=0$, $\theta_3=30,\ldots.$

$x=4$ - $\theta=39$, $\theta_1=135$, $\theta_2=160,\ldots.$

Пробуя числа 3,3; 3,4; 3,5, находимъ что 3,4 даетъ меньшее отношеніе $\frac{\theta}{\theta_1}$. Степени этого числа найдутся изъ таблицъ:

$$x=3{,}4;\ x^2=11{,}56;\ x^3=39{,}304;\ x^4=133{,}6336;\ x^5=454{,}35424.$$

Они даютъ $\theta=0,1868$; $\theta_1=17,088$; $\theta_2=46,24$; отсюда

первое приближеніе $\frac{-\theta}{\theta_1}=-0,01089887=z_1$;.

второе приближеніе $\frac{-\theta}{z_1\theta_2+\theta_1}=\frac{-0,1868}{16,584036}=-0,01126380$.

Взявъ второе приближеніе, какъ ближайшее къ истинной величинѣ поправки корня, нахожу

$$x=3,4-0,01126380=3,3887371....,$$

гдѣ вѣрны по крайней мѣрѣ три десятичныя; а потому, для слѣдующаго приближенія къ корню, беру $x=3,388+r=\alpha+r$.

Степени числа 3,388 нельзя найти въ нашихъ таблицахъ; посему надобно ихъ составить непосредственно, или получить посредствомъ логариѳмовъ

| | |
|---|---|
| $\log 3,388=0,529.9434$ | $3,388=\alpha$ |
| $2\log\alpha=1,059.8868$ | $11,4785\ =\alpha^2$ |
| $3\log\alpha=1,589.8302$ | $38,8893\ =\alpha^3$ |
| $4\log\alpha=2,119.7736$ | $131,757....=\alpha^4$ |
| $5\log\alpha=2,649.7170$ | $446,392\ =\alpha^5$ |

найдутся:

$$\theta=-0,013;\quad \theta_1=15,999;\quad \theta_2=44,538;$$

$$\frac{-\theta}{\theta^1}=r_1=0,0008125;\quad \frac{-\theta}{r.\theta_2+\theta_1}=0,00081066=r_2.$$

Взявъ послѣднее приближеніе, найдемъ

$$x=3,388+0,00081066=3,38881066.$$

Равенство приближеній $r_1$ и $r_2$ въ пяти десятичныхъ даетъ право заключить, что найденный корень точенъ въ пяти десятичныхъ. Но, употребивъ логариѳмы для полученія степеней числа 3,388, мы никакъ не могли съ достаточною точностію найти самый важный результатъ $\theta=-0,013$; а потому и не можемъ считать найденный корень вѣрнымъ далѣе четырехъ десятичныхъ.

*Примѣръ.*—Уравненіе

$$\theta=x^5-20x^3+10x-1=0,$$

котораго производныя

$$\theta_1=5x^4-60x^2+10,$$

$$\theta_2=10x^3-60,\quad \theta_3=10x^2-20,\quad \theta_4=5x,\quad \theta_5=1,$$

имѣетъ положительные корни между 0 и 0,5, между 0,5 и 1, между 4 и 5, и отрицательные между 0 и —1, и между —4 и —5.

Поищемъ корень между 0,5 и 1. Для этого возмемъ $x=0,7+z$; получится:

$$\theta=-0,692;\qquad z_1=\frac{-\theta}{\theta_1}=0,0380.$$

$$\theta_1=-18,200;$$

$$\theta_2=-38,570;\qquad z_2=\frac{0,692}{0,038\times 38,57-18,2}=-0,0413.$$

Беру второе приближеніе, и нахожу

$$x=0,7-0,0413=0,6587.$$

Для полученія второй приближенной величины корня, возмемъ $x=0,66+r=\alpha+r$; по таблицамъ степеней найдемъ:

$$\alpha^2=0,4356;\quad \alpha^3=0,287496;\quad \alpha^4=0,18974736;\quad \alpha^5=0,12523326;$$

получатся:

$$\theta=-0,024687,\qquad r_1=-0,001619=\frac{-\theta}{\theta}.$$

$$\theta_1=-15,187263,\qquad r_2=-0,001628.$$

$$\theta_2=-36,725040,$$

Взявши второе приближеніе, имѣю

$$x=0,66-0,001628=0,6583765,$$

корень точный, по крайней мѣрѣ, въ четырехъ десятичныхъ.

Теперь будемъ искать корень между 4 и 5, и на первый разъ возмемъ

$$x=4,5+z=\beta+z;$$

$$\beta^2=20,25;\quad \beta^3=91,125;\quad \beta^4=410,0625;\quad \beta^5=1845,28125.$$

найдутся:

$$\theta=66,78125;\quad \theta_1=845,3125;\quad \theta_2=641,25;\ \text{отсюда}$$

$$z_1=-0,0790029,$$

$$z_2=-0,084040=\frac{-\theta}{z.\theta_2+\theta_1},$$

$$\tfrac{1}{2}(z_1+z_2)=-0,08152;\ \text{посему}$$

$$x=4,5-0,08152=4,41848.$$

Для слѣдующаго приближенія беру:

$$x=4,418+r=\gamma+z;$$

вычисляю степени по логариѳмамъ:

$$\begin{array}{r|r}
\log 4,418=0,645.2257 & 4,418\ =\gamma \\
2\log=1,290.4414 & 19,5183=\gamma^2 \\
3\log=1,935.6671 & 86,2317=\gamma^3 \\
4\log=2,580.8828 & 380,9630=\gamma^4 \\
5\log=3,226.1085 & 1683,090\ =\gamma^5
\end{array}$$

$$\theta=1,637;\quad \theta_1=743,717;\quad \theta_2=597,237;$$

$$r_1=\frac{-\theta}{\theta_1}=-0,002199,$$

$$r_2=\frac{-\theta}{r_1\theta_2+\theta_1}=-0,002203;$$

посему, $x=4,418-0,002203=4,415797$, корень точный непремѣнно въ четырехъ десятичныхъ.

*Примѣръ.* — Возмемъ еще уравненіе:

$$x^5-420x+800=0,$$

которое мы рѣшали (стр. 427), и поищемъ его корень между 3 и 4. Составивъ:

$$\theta_1=5x^4-420;\quad \theta_2=10x^3;\quad \theta_3=10x^2;\quad \theta_4=5x;\quad \theta_5=1,$$

положимъ, $x=3,8+z$ (потому что корень гораздо ближе къ 4, нежели къ 3, какъ видѣли это на стран. 428); тогда получимъ (см. тамъ же):

$$\theta=-3,64832;\ \theta_1=622,568;\ \theta_2=548,720.$$

Отсюда:

$$\left.\begin{array}{l} z_1=\frac{-\theta}{\theta_1}=0,0058601 \\ z_2=\frac{-\theta}{z_1\theta_2+\theta_1}=0,005570 \end{array}\right\} \tfrac{1}{2}(z_1+z_2)=0,005715;$$

слѣдовательно $x=3,8+0,005715=3,805715$, гдѣ точны только три десятичныя.

Для слѣдующаго приближенія къ корню, беру

$$x=3,805+r=\alpha+r;$$

вычисляю степени числа 3,805 по логариѳмамъ:

$$\begin{array}{r|l} \log 3,805=0,580.3547 & 3,805\ =\alpha \\ 2\log=1,160.7094 & 14,478\ =\alpha^2 \\ 3\log=1,741.0641 & 55,0889=\alpha^3 \\ 4\log=2,321.4188 & 209,6130=\alpha^4 \\ 5\log=2,901.7735 & 797,5785=\alpha^5 \end{array}$$

$$\theta=-0,521;\ \theta_1=628,065;\ \theta_2=550,889;$$

$r_1=0,000829$; $r_2=0,000828$; слѣдовательно,

$$x=3,805828.$$

**443**. Этихъ примѣровъ достаточно, чтобъ видѣть, какъ вычисляются дѣйствительные корни по способу Фогеля. Сей способъ ничѣмъ не легче Ньютонова исправленнаго (**421**); для него также нужно искать $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$; но онъ уступаетъ ему тѣмъ, 1) что тамъ не рѣдко сразу можно найти три, четыре и болѣе членовъ приближенія, и вычислить корень изъ одного ряда; 2) что для него недостаточно имѣть таблицы степеней двузначныхъ чиселъ, а часто надобно степени чиселъ трехзначныхъ и четырезначныхъ составлять непосредственно, что весьма утомительно; либо искать ихъ посредствомъ логариѳмовъ, а они тоже не всегда достаточны ~~удовлетворительны~~. По этимъ причинамъ, для вычисленія корней дѣйствительныхъ, лучше употреблять способъ, предъ симъ изложенный, нежели этотъ.

Однако же, способъ Фогеля превосходитъ всѣ другіе тѣмъ, что подаетъ возможность довольно удобно вычислять *корни мнимые*, раздѣленные своими предѣлами, и прилагается также хорошо къ разрѣшенію трансцендентныхъ уравненій всякаго рода. Мы разсмотримъ только вычисленіе корней мнимыхъ.

## IV. Вычисленіе мнимыхъ корней уравненія съ одною неизвѣстною.

**444**. Освободивши данное уравненіе отъ корней соизмѣримыхъ, и корней вида $x=\sqrt{\pm a}$ (**410**), останется уравненіе $f(x)=0$, состоящее изъ корней несоизмѣримыхъ, и корней мнимыхъ, имѣющихъ полный видъ $p\pm q\sqrt{-1}$.

Пары мнимыхъ корней въ этомъ уравненіи могутъ случиться отдѣленныя отъ другихъ извѣстными предѣлами, или неотдѣленныя. Чтобы вычислить пару корней, открытую между какими ни есть предѣлами, возмемъ число $h$ между сими предѣлами, либо одинъ изъ этихъ предѣловъ, и, положивъ $x=h+z$, вставимъ въ $f(x)=0$; найдется:

$$f(h+z)=\theta+\theta_1 z+\theta_2 z^2+\theta_3 z^3+\ldots\ldots+z^n=0.$$

Обративъ это уравненіе въ непрерывную дробь, найдемъ ея третье приближеніе; а изъ него получимъ третью приближенную поправку корня

$$z_3=c\pm\sqrt{c^2-d}.$$

Положимъ, что сразу выйдетъ $\sqrt{c^2-d}$ мнимымъ: тогда надобно будетъ тотчасъ взять

$$x=h+c+\sqrt{c^2-d}+r=\alpha+\beta\sqrt{-1}+r,$$

составить

$$f(\alpha+\beta\sqrt{-1}+r)=\theta+\theta_1 r+\theta_2 r^2+\theta_3 r^3+\ldots=0,$$

найти двѣ первыя приближенныя поправки $r_1, r_2$, и взять $\frac{1}{2}(r_1+r_2)=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$; получится первая приближенная величина корня

$$x=(\alpha+\alpha')+(\beta+\beta')\sqrt{-1}=\alpha''+\beta''\sqrt{-1}.$$

Для отысканія втораго приближенія къ корню, возмемъ

$$x=\alpha''+\beta''\sqrt{-1}+s,$$

составимъ опять

$$f(\alpha''+\beta''\sqrt{-1}+s)=\theta+\theta_1 s+\theta_2 s^2+\theta_3 s^3+\ldots=0;$$

найдемъ двѣ новыя приближенныя поправки $s_1$ и $s_2$ корня, и $\frac{1}{2}(s_1+s_2)=\alpha'''+$ $+\beta''\sqrt{-1}$; получится вторая приближенная величина корня

$$x=(\alpha''+\alpha''')+(\beta''+\beta''')\sqrt{-1};$$

и такъ далѣе.

При этихъ вычисленіяхъ, оба члена корня довольно скоро приближаются къ своимъ истиннымъ величинамъ, и могутъ быть вычисляемы до произвольной степени точности.

Можетъ случиться, что, отъ подстановленія $x=h+z$ въ $f(x)=0$, третья поправка

$$z_3=c\pm\sqrt{c^2-d}$$

не будетъ мнимою, не смотря на то, что $h$ взято въ предѣлахъ мнимыхъ корней; тогда надобно взять $x=(h+\sqrt{-1})+z$, составить

$$f(h+\sqrt{-1}+z)=\theta+\theta_1 z=\theta_2 z^2+\ldots;$$

поправки $z_1$ и $z_2$ непремѣнно получатся мнимыми, и третья поправка $z_3$ будетъ ненужна. Такимъ образомъ найдется средняя поправка $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$, и первая приближеная величина корня $x=(h+\alpha)+(1+\beta)\sqrt{-1}=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$. Послѣ сего надобно положить $x=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}+r$, и искать вторую приближенную величину корня, какъ было сказано выше.

**445.** При этомъ весь трудъ состоять будетъ въ вычисленіи выраженій, вида: $(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})$, $\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{p+q\sqrt{-1}}$, и степеней двучлена $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

Но, $(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=(\alpha\alpha'-\beta\beta')+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\sqrt{-1}$;
$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{p+q\sqrt{-1}}=\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{p+q\sqrt{-1}}\times\frac{p-q\sqrt{-1}}{p-q\sqrt{-1}}=\frac{(\alpha p+\beta q)+(\beta p-\alpha q)\sqrt{-1}}{p^2+q^2}$;
а возвышеніе двучлена $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ въ различныя степени дѣлается по биноміи Ньютона, или, гораздо легче, по извѣстной тригонометрической формулѣ *Моавра:*

$$(\cos a+\sin a.\sqrt{-1})^n=\cos na+\sin na.\sqrt{-1}.$$

Въ этомъ случаѣ, составляютъ равенство

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\varrho(\cos v+\sin v.\sqrt{-1}),\ \text{полагая}$$
$$\alpha=\varrho\cos v,\ \beta=\varrho\sin v,\ \text{и}\ \alpha^2+\beta^2=\varrho^2;$$

отсюда вычисляютъ $\varrho$ по логариомамъ.

Внеся табличный радіусъ $R=10^{10}$ въ условныя формулы, получаютъ изъ нихъ

$$\cos v=\frac{\alpha R}{\varrho},\quad \sin v=\frac{\beta R}{\varrho},$$
$$\log\cos v=\log\alpha+10-\log\varrho,\ \log\sin v=\log\beta+10-\log\varrho:$$

отсюда находятъ величину дуги $v$ въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, не болѣе.

Получивши $v$, берутъ $2v$, $3v$, $4v$,....; ищутъ $\varrho^2\cos 2v$ и $\varrho^2\sin 2v$, $\varrho^3\cos 3v$ и $\varrho^3\sin 3v$, и т. д. Такимъ образомъ вычислятся всѣ степени:

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^2=\varrho^2\cos 2v+\varrho^2\sin 2v.\sqrt{-1},$$
$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^3=\varrho^3\cos 3v+\varrho^3\sin 3v.\sqrt{-1},$$
$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^4=\varrho^4\cos 4v+\varrho^4\sin 4v.\sqrt{-1},\ \text{и проч.};$$

послѣ чего легко найдутся $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$,....

Все это лучше можно видѣть изъ слѣдующихъ примѣровъ.

*Примѣръ* 1. Уравненіе $\theta=x^4-2x+2=0$, котораго производныя

$$\theta_1=4x^3-2,$$
$$\theta_2=6x^2,\ \theta_3=4x,\ \theta_4=1,$$

имѣетъ всѣ корни мнимые, изъ коихъ одна пара находится въ предѣлахъ 0 и 1 *); потому что подстановленіе

$$\begin{array}{llccccc} & & \theta_4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ x=0, & \text{даетъ} & + & \overset{-}{\underset{+}{0}} & \overset{+}{\underset{+}{0}} & - & + \\ x=1, & \ldots\ldots & + & + & + & + & +; \end{array}$$

Чтобы найти эту пару, возмемъ $x=1+z$; получатся:

---

*) Мнимость этихъ корней слѣдуетъ изъ того, что $f(x)=0$ и $f(-x)=0$ допускаютъ положительное *minimum*. Ибо, изъ $\theta_1=0$, получается $x=\sqrt[3]{0,5}$; отчего $\theta_2=+$; $\theta=x(x^3-2)+2=(0,5-2)\sqrt[3]{0,5}+2=-1,5\sqrt[3]{0,5}+2$.
А это результатъ положительный.

$$\theta=1;\ \theta_1=2;\ \theta_2=6;\ \theta_3=4;\ b=\frac{\theta_3}{\theta_2}=\frac{2}{3};$$

$$a=\frac{\theta_2}{\theta_1}=3;\quad b-a=-\frac{7}{3};\ z_1=-\frac{\theta}{\theta_1}=-\frac{1}{2};$$

$$d=\frac{z_1}{b-a}=\frac{3}{14},\ c=\frac{\frac{1}{2}(1+z_1b}{b-a}=-\frac{1}{7};$$

третьею приближенною поправкою корня будетъ:

$$z_3=c+\sqrt{c^2-d}=-\frac{1}{7}+\sqrt{\frac{1}{49}-\frac{3}{14}}=-0,14286+0,4403\sqrt{-1};$$

слѣдовательно, *первая приближенная величина корня* будетъ:

$$x=1+z=0,85714+0,4403\sqrt{-1}.$$

Для вычисленія слѣдующаго приближенія къ корню, возмемъ:

$$x=0,86+0,44\sqrt{-1}+r=a+r;$$

чрезъ непосредственное возвышеніе въ степени найдемъ:

$$a^2=0,546+0,7568\sqrt{-1},$$
$$a^3=0,13657+0,8911\sqrt{-1},$$
$$a^4=-0,27463+0,82643\sqrt{-1}.$$

Эти степени подставимъ въ $\theta,\ \theta_1,\ \theta_2,\dots$ на мѣсто $x$, получатся:

$$\theta=0,00537-0,05357\sqrt{-1},$$
$$\theta_1=-1,45372+3,5644\sqrt{-1},$$
$$\theta_2=3,27600+4,5408\sqrt{-1}.$$

Отсюда, первою поправкою корня будетъ:

$$r_1=\frac{0,00537-0,05357\sqrt{-1}}{1,43372-3,5644\sqrt{-1}}=\frac{m-n\sqrt{-1}}{p-q\sqrt{-1}}\times\frac{p+q\sqrt{-1}}{p+q\sqrt{-1}}=\frac{(mp+nq)+(mq-nn)\sqrt{-1}}{p^2+q^2}$$

$$\begin{array}{lcl} \log m=0,729.9743-3, & \qquad & \log n=0,728.9216-2 \\ \log p=0,162.4808 & & \log q=0,551.9864 \\ \hline \quad 0,892.4551-3 & & \quad 0,280.9080-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} mp=0,0078065 \\ nq=0,1909450 \\ \hline 0,1987515=mp+nq. \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \log m=0,729,9743-3, & \qquad & \log n=0,728.9216-2 \\ \log q=0,551.9864 & & \log p=0,162.4808 \\ \hline \quad 0,281.9607-2 & & \quad 0,891.4024-2 \\ mq=0,019140 & & np=0,077876 \\ & & \quad 0,019140 \\ \cline{3-3} & & mq-np=-0,058736 \end{array}$$

$$2\log p=0,324.9616,\qquad 2\log q=1,103.9728$$

$$p^2=2,11330\qquad q^2=12,7051$$

$$p^2+q^2=14,8184.$$

$$r_1 = \frac{0{,}198751 - 0{,}05874\sqrt{-1}}{14{,}8184} = \frac{k - l\sqrt{-1}}{d}.$$

$$\begin{array}{rlrl}
\log k = & 0{,}298.3071-1, & \log l = & 0{,}768.9339-2 \\
\text{доп. } \log d = & 0{,}829.1986-2 & & 0{,}829.1986-2 \\
\hline
& 0{,}127.5057-2 & & 0{,}598.1325-3 \\
& 0{,}013412, & & 0{,}003964.
\end{array}$$

Итакъ, *первая поправка:*

$$r_1 = 0{,}013412 - 0{,}003964\sqrt{-1}.$$

*Второю поправкою* будетъ:

$$r_2 = \frac{-0{,}00537 + 0{,}05357\sqrt{-1}}{(\underset{c}{0{,}013412} - \underset{d}{0{,}003964}\sqrt{-1})(\underset{c'}{3{,}276} + \underset{d'}{4{,}5408}\sqrt{-1}) + \theta_1}$$

Вычислимъ первый членъ знаменателя, по формулѣ:

$$(cc' + dd') + (cd' - c'd)\sqrt{-1}:$$

$$\begin{array}{rlrl}
\log c = & 0{,}127.5057-2, & \log d = & 0{,}598.1325-3 \\
\log c' = & 0{,}515.3439 & \log d' = & 0{,}657.1324 \\
\hline
& 0{,}642.8496-2 & & 0{,}255.2649-2 \\
cc' = & 0{,}043939 & dd' = & 0{,}018000
\end{array}$$

$$cc' + dd' = 0{,}061939$$

$$\begin{array}{rlrl}
\log c = & 0{,}127.5057-2 & \log d = & 0{,}598.1325-3 \\
\log d' = & 0{,}657.1324 & \log c' = & 0{,}515.3439 \\
\hline
& 0{,}784.6381-2 & & 0{,}113.4764-2 \\
cd' = & 0{,}060903 & c'd = & 0{,}012986 \\
& -0{,}012986 & & \\
\hline
& 0{,}047917 = cd' - c'd. & &
\end{array}$$

Искомымъ произведеніемъ будетъ:

$$0{,}04394 + 0{,}04792\sqrt{-1}; \text{ къ нему придадимъ:}$$

$$\begin{array}{rl}
\theta_1 = & -1{,}45372 + 3{,}56440\sqrt{-1} \\
\hline
& -1{,}40978 + 3{,}61232\sqrt{-1}
\end{array}$$

Посему,

$$r_2 = \frac{0{,}00537 - 0{,}05357\sqrt{-1}}{1{,}40978 - 3{,}61232} = \frac{m - n\sqrt{-1}}{p - q\sqrt{-1}} \times \frac{p + q\sqrt{-1}}{p + q\sqrt{-1}} = \frac{(mp + nq) + (mq - np)\sqrt{-1}}{p^2 + q^2}.$$

$$\begin{array}{rlrl}
\log m = & 0{,}729.9743-3, & \log n = & 0{,}728{,}9216-2 \\
\log p = & 0{,}149.1514 & \log q = & 0{,}557.7850 \\
\hline
& 0{,}879.1257-3 & & 0{,}286.7066-1 \\
mp = & 0{,}0075705 & nq = & 0{,}193511 \\
mp + nq = & 0{,}201081 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\log m = 0,729.9743-3, & \log n = 0,728.9216-2 \\
\log q = 0,557.7850 & \log p = 0,149.1514 \\
\hline
\quad 0,287.7593 & \quad 0,878.0730-2 \\
mq = 0,0193981 & np = 0,075522
\end{array}$$

$$mq-np = -0,056124.$$

$$\begin{array}{ll}
2\log p = 0,298.3028, & 2\log q = 1,115.5700 \\
p^2 = 1,98748 & q^2 = 13,04880
\end{array}$$

$$p^2+q^2 = 15,03628.$$

$$r_2 = \frac{0,201081-0,056124\sqrt{-1}}{15,03628} = \frac{t-u\sqrt{-1}}{h}$$

$$\begin{array}{ll}
\log t = 0,303.3711-1, & \log u = 0,749.1486-2 \\
\text{доп.} \log h = 0,822.8597-2 & 0,822.8597-2 \\
\hline
\quad 0,126.2308-2 & 0,572.0083-3 \\
\quad 0,013373 & 0,003732
\end{array}$$

И такъ, вторая поправка корня:

$$r_2 = 0,013373-0,003732\sqrt{-1};$$

мы возмемъ ее, какъ ближайшую къ истинной, и найдется приближенная величина корня:

$$x = \left\{\begin{array}{l} 0,860000+0,44000\sqrt{-1} \\ 0,013373-0,00373\sqrt{-1} \end{array}\right.$$

$$x = 0,873373+0,43627\sqrt{-1};$$

оба члена корня имѣютъ всю точность по крайней мѣрѣ въ трехъ десятичныхъ.

**116.** *Вычисленіе той же пары корней по общей формулѣ:*

$$x = h+(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \ldots .).$$

Когда уже найдены $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3, \ldots .$, то коренную поправку можно искать по извѣстной намъ общей формулѣ,

$$x = h+\left[\frac{\theta}{\theta_1}, \ \frac{\theta_2}{\theta_1}.q^2, \ \left(\frac{2\theta_2^2}{\theta_1^2}-\frac{\theta_3}{\theta_1}\right)q^3, \ldots .\right],$$ а именно:

нашедши первую приближенную величину корня $x = 0,86+0,44\sqrt{-1}$ изъ третьяго приближенія $z_3 = c+\sqrt{c^2-d}$, и вычисливши необходимо нужныя степени этого двучлена, мы получили:

$$\begin{array}{l}
\theta = 0,00537-0,05357\sqrt{-1}, \\
\theta_1 = -1,45372+3,5644\sqrt{-1}, \\
\theta_2 = 3,27600+4,5408\sqrt{-1}.
\end{array}$$

Послѣ этого надобно найти первый членъ $\text{A} = q = \frac{\theta}{\theta_1}$ поправочнаго ряда, который и найденъ:

$$\text{A} = 0,013412-0,003964\sqrt{-1} = -r_1.$$

Второй членъ $B=-\frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^2$ поправочнаго ряда будетъ:

$$B=\frac{(3{,}276+4{,}5408\sqrt{-1})(0{,}013412-0{,}003964\sqrt{-1})^2}{1{,}45372-3{,}5644\sqrt{-1}}=$$

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{p-q\sqrt{-1}}(\alpha'-\beta'\sqrt{-1})^2=\frac{(\alpha p-\beta q)+(\alpha q+\beta p)\sqrt{-1}}{(p^2+q^2)}(\alpha'^2-\beta'^2-2\alpha'\beta'\sqrt{-1})$$

$\log\alpha=0{,}515.3439,$ $\qquad \log\beta=0{,}657.1324$

$\log p=0{,}162.4808$ $\qquad \log q=0{,}551.9864$

$0{,}677.8247$ $\qquad 1{,}209.1188$

$\alpha p=4{,}762380$ $\qquad \beta q=16{,}18520$

$\alpha p-\beta q=-11{,}48282.$

$\log\alpha=0{,}515.3439$ $\qquad \log\beta=0{,}657.1324$

$\log q=0{,}551.9864$ $\qquad \log p=0{,}162.4808$

$1{,}067.3303$ $\qquad 0{,}819.6132$

$\alpha q=11{,}67700,$ $\qquad \beta p=6{,}601055,$

$\alpha q+\beta q=18{,}27805,$

$p^2+q^2=14{,}8184$ (это найдено выше);

слѣдовательно, дробь

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{p-q\sqrt{-1}}=\frac{-11{,}48282+18{,}27805\sqrt{-1}}{14{,}8184}$$

$$=-0{,}770854+1{,}23347\sqrt{-1}, \text{ и}$$

$$B=-(0{,}770854-1{,}23347\sqrt{-1})(\alpha'^2-\beta'^2-2\alpha'\beta'\sqrt{-1}).$$

$2\log\alpha'=0{,}255.0114-4,$ $\qquad 2\log\beta'=0{,}196.2650-5$

$\alpha'^2=0{,}00017989,$ $\qquad \beta'^2=0{,}00001571$

$\alpha'^2-\beta'^2=0{,}00016418$

$\log\alpha'=0{,}127.5057-2$

$\log\beta'=0{,}598.1325-3$

$\log 2=0{,}301.0300$

$0{,}026.6682-4;$ $\quad 2\alpha'\beta'=0{,}00010633$

$$B=-(\underset{k}{0{,}770854}-\underset{l}{1{,}23347}\sqrt{-1})(\underset{m}{0{,}0001642}-\underset{n}{0{,}0001063}\sqrt{-1})$$

$$=(km-ln)-(kn+lm)\sqrt{-1}$$

$\log k=0{,}886.9721-1,$ $\qquad \log l=0{,}091.1285$

$\log m=0{,}215.3203-4,$ $\qquad \log n=0{,}026.6682-4$

$0{,}102.2924-4,$ $\qquad 0{,}117.7967-4$

$km=0{,}00012646,$ $\qquad ln=0{,}00013115,$

$km-ln=-0{,}00000469.$

$$\log k = 0{,}886.9721-1, \qquad \log l = 0{,}091.1285$$
$$\log n = 0{,}026.6682-4, \qquad \log m = 0{,}215.3203-4$$
$$\overline{0{,}913.6403-5} \qquad \overline{0{,}306.4488-4}$$
$$kn = 0{,}00008196, \qquad lm = 0{,}00020251,$$
$$kn + lm = 0{,}00028448;$$
$$\text{B} = +0{,}000005 + 0{,}0002845\sqrt{-1}.$$

Поправки A и B найдены съ тѣми знаками, какіе онѣ должны имѣть въ общемъ ряду, а потому ихъ надобно придать съ этими знаками, и будетъ:

$$x = \begin{cases} 0{,}860000 + 0{,}440000\sqrt{-1} \\ 0{,}013412 - 0{,}003965\sqrt{-1} \\ 0{,}000005 + 0{,}000286\sqrt{-1} \end{cases}$$
$$x = 0{,}873417 + 0{,}436320\sqrt{-1}$$

корень точный по крайней мѣрѣ въ трехъ десятичныхъ обоихъ его членовъ.

Представленное здѣсь подробное вычисленіе пары мнимыхъ корней показываетъ, что оно вчетверо или впятеро продолжительнѣе вычисленія двухъ корней дѣйствительныхъ, несоизмѣримыхъ, по какому угодно способу. Однакоже, нельзя сказать, чтобъ оно было трудно; потому что все дѣло состоитъ въ прінскиваніи логариѳмовъ, и чиселъ для логариѳмовъ, въ сложеніи и вычитаніи.

*Примѣръ 2.* Уравненіе $\theta = x^5 - 5x^4 + 135x - 245 = 0$, котораго производныя:

$$\theta_1 = 5x^4 - 20x^3 + 135, \quad \theta_2 = 10x^3 - 30x^2,$$
$$\theta_3 = 10x^2 - 20x, \quad \theta^4 = 5x - 5, \quad \theta_5 = 1,$$

имѣетъ пару мнимыхъ корней между предѣлами 2 и 3 (стр. 410). Чтобы найти одну пару корней, возмемъ $\frac{1}{2}(2+3) = \frac{5}{2}$, и положимъ $x = \frac{5}{2} + z$; получатся:

$$\theta\left(\frac{5}{2} + z\right) = \theta + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \theta_3 z^3 + \ldots = 0,$$
$$\theta = \frac{-163}{32}, \quad \theta_1 = \frac{285}{16}, \quad \theta_2 = \frac{-125}{4}, \quad \theta_3 = \frac{25}{2};$$
$$z_1 = -\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{11}{38}; \quad b = \frac{\theta_3}{\theta_2} = \frac{-50}{125} = \frac{-2}{5}; \quad a = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{-100}{57};$$
$$b - a = -\frac{2}{5} + \frac{100}{57} = \frac{386}{285}; \quad d = \frac{z_1}{b-a} = 0{,}21373;$$
$$c = \frac{\frac{1}{2}(1 + z_1 b)}{b-a} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{11}{38} \cdot \frac{2}{5}\right)\frac{285}{386} = 0{,}32642.$$

Третьимъ приближеніемъ ряда будетъ:

$$z_3 = c + \sqrt{c^2 - d} = 0{,}32642 + \sqrt{0{,}10655 - 0{,}21373},$$
$$= 0{,}32642 + 0{,}3274\sqrt{-1}.$$

Посему, $x = 2{,}5 + z_3 = 2{,}82642 + 0{,}3274\sqrt{-1}$.

Для розысканія слѣдующей приближенной величины корня, возмемъ:

$$x = 2{,}8 + 0{,}3\sqrt{-1} + r = a + r,$$

откинувъ всѣ прочія десятичныя дроби, на вѣрность которыхъ положиться нельзя.

Чрезъ непосредственное возвышеніе въ степени найдутся:

$$a^2=7,75+1,68\sqrt{-1},$$
$$a^3=21,196+7,02\sqrt{-1}.$$
$$a^4=57,2401+26,04\sqrt{-1},$$
$$a^5=157,46028+90,08403\sqrt{-1}.$$

Подставивъ это на мѣсто $x$, $x^2$, $x^3$,.... въ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$,...., получимъ:

$$\theta=-0,74022+0,38403\sqrt{-1},$$
$$\theta_1=-2,7195-10,3800\sqrt{-1},$$
$$\theta_2=-20,54+19,89\sqrt{-1}.$$

Отсюда первая поправка корня:

$$r_1=\frac{0,74022-0,38403\sqrt{-1}}{-(2,7195+10,38\sqrt{-1})}=\frac{1,9732+8,7273\sqrt{-1}}{115,1407}$$

$$\text{или } r_1=0,017137+0,07578\sqrt{-1}.$$

Второю поправкою будетъ:

$$r_2=\frac{0,74022-0,38403\sqrt{-1}}{(0,017137+0,07578\sqrt{-1})(-20,54+19,89\sqrt{-1})+\theta_1}$$
$$=\frac{0,74022-0.38403\sqrt{-1}}{-(4,578734+11,593663\sqrt{-1}}=\frac{1,0638+10,34172\sqrt{-1}}{155,4241}$$
$$r_3=0,0068442+0,066539\sqrt{-1}.$$

Взявъ это приближеніе, какъ болѣе вѣрное, найдемъ:

$$x=2,8+0,3\sqrt{-1}+r_2$$
$$=2,8068445+0,36639\sqrt{-1}.$$

Для полученія слѣдующей приближенной величины корня, возмемъ:

$$x=2,807+0,366\sqrt{-1}+s=\alpha+\beta\sqrt{-1}+s=k+s.$$

Отъ этого получится рядъ:

$$\theta(\alpha+\beta\sqrt{-1}+s)=\theta+\theta_1 s+\theta_2 s^2+\theta_3 s^3+\ldots=0,$$

въ которомъ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$,.... опредѣлятся, если успѣемъ вычислить степени двучлена $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Эти степени можно искать непосредственно съ помощію логариѳмовъ, или вычислять по формулѣ Моавра:

$$(\cos v+\sin v.\sqrt{-1})^n=\cos nv+\sin nv.\sqrt{-1}.$$

Мы употребимъ этотъ послѣдній способъ.

Для сего положимъ:

$\alpha=2,807$, $\beta=0,366$; отсюда найдемъ:

$$\alpha^2+\beta^2=8,013205=\varrho^2$$

| | |
|---|---|
| $\log\varrho=0,451.9031$, | $3\log\varrho=1,355.7094$ |
| $2\log\varrho=0,903.8063$, | $4\log\varrho=1,807.6126$ |
| | $5\log\varrho=2,259.5157.$ |

$$\cos v = \frac{2,807.R}{\varrho}, \quad \sin v = \frac{0,366.R}{\varrho};$$

$$\log \cos v = \left\{\begin{array}{l} 0,448.2424+10, \\ 9,548.0969-10, \end{array}\right.$$

$$9,996.3393; \text{ отсюда}$$

$$v = 7^\circ\, 25'\, 45'', \qquad 4v = 29^\circ\, 43'\, 0''$$

$$2v = 14^\circ\, 51'\, 30'', \qquad 5v = 37^\circ\, 8'\, 45''$$

$$3v = 22^\circ\, 17'\, 15''.$$

Для вычисленія степеней $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, возмемъ формулу

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^n = \varrho^n(\cos nv + \sin nv.\sqrt{-1}).$$

$$\log\varrho^2\cos 2v = \left\{\begin{array}{l} 0,903.8063, \\ 9,985.2301-10 \end{array}\right. \qquad \log\varrho^2\sin 2v = \left\{\begin{array}{l} 0,903.8063 \\ 9,408.9688-10 \end{array}\right.$$

$$0,889.0364 \qquad\qquad 0,312.7751$$

$$a = 7,74526, \qquad b = 2,05482.$$

$$\log\varrho^3\cos 3v = \left\{\begin{array}{l} 1,355.7094 \\ 9,966.2790-10 \end{array}\right. \qquad \log\varrho^3\sin 3v = \left\{\begin{array}{l} 1,355.7094 \\ 9,578.9305-10 \end{array}\right.$$

$$1,321.9884 \qquad\qquad 0,934.6399$$

$$a' = 20,9889, \qquad b' = 8,6028.$$

$$\log\varrho^4\cos 4v = \left\{\begin{array}{l} 1,807.6126, \\ 9,938.7635-10 \end{array}\right. \qquad \log\varrho^4\sin 4v = \left\{\begin{array}{l} 1,807.6126 \\ 9,695.2288-10 \end{array}\right.$$

$$1,746.3761 \qquad\qquad 1,502.8414$$

$$a'' = 55,7670 \qquad b'' = 31,8303$$

$$\log\varrho^5\cos 5v = \left\{\begin{array}{l} 2,259.5157, \\ 9,901.5134-10 \end{array}\right. \qquad \log\varrho^k\sin 5v = \left\{\begin{array}{l} 2,259.5157 \\ 9,780.9261-10 \end{array}\right.$$

$$2,161.0292 \qquad\qquad 2,040.4418$$

$$a''' = 144,887, \qquad b''' = 109,759.$$

Посему, $k = 2,807+0,366\sqrt{-1} = \alpha+\beta\sqrt{-1}$,

$$k^2 = 7,74526+2,05482\sqrt{-1},$$

$$k^3 = 20,9889+8,6028\sqrt{-1},$$

$$k^4 = 55,7670+31,8303\sqrt{-1},$$

$$k^5 = 144,887+109,759\sqrt{-1}.$$

Эти степени подставимъ въ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$,.... на мѣсто $x$, $x^2$, $x^3$...., получатся:

$$\theta = -0,003+0,0175\sqrt{-1},$$

$$\theta_1 = -5,943-12,9045\sqrt{-1}.$$

Послѣ этого найдется первая поправка корня

$$s_1 = \frac{0,003-0,0175\sqrt{-1}}{-(5,943+12,9045\sqrt{-1})} = \frac{0,208+0,14272\sqrt{-1}}{201,8453}$$

$$s_1 = 0,0010305+0,000707\sqrt{-1}.$$

Посему $x=2.807+0,366\sqrt{-1}+s_1$
$=2,80803+0,36671\sqrt{-1}$,

Этотъ приближенный корень имѣетъ всю точность по крайней мѣрѣ въ трехъ десятичныхъ.

Мнимые корни второй пары суть отрицательные. Это видно изъ того, что сумма корней, взятая съ противнымъ знакомъ, должна быть равна коефиціенту $-5$ втораго члена даннаго уравненія. Слѣдовательно, если вторая пара $=p\pm q\sqrt{-1}$, то должно удовлетворяться равенство

$$2p=2\times2,80803+3,3888....=5; \text{ откуда}$$
$$p=-2,0026....$$

Послѣ сего, можно найти $q$ изъ послѣдняго члена 245 уравненія, и получится:

$$q=2,2370;$$
$$p\pm q\sqrt{-1}=-2,0026\pm2,2370\sqrt{-1}.$$

*Примѣръ 3.* Возмемъ еще уравненіе,

$$\theta=x^{10}-9x^3-6x+20=0, \text{ котораго производныя:}$$
$$\theta_1=10x^9-27x^2-6,$$
$$\theta_2=45x^8-27x,$$
$$\theta_3=120x^7-9,$$
$$\theta_4=210x^6,\ \theta_5=252x^5,\ \theta_6=210x^4,\ \theta_7=120x^3,$$
$$\theta_8=45x^2,\ \theta_9=10x,\ \theta_{10}=1,$$

имѣетъ всѣ корни мнимые, какъ видно изъ порядка знаковъ предъ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$...., когда будемъ измѣнять величину неизвѣстной $x$:

| | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=0$, даетъ | + | $\overset{-}{\underset{+}{0}}$ | $\overset{+}{\underset{+}{0}}$ | $\overset{-}{\underset{+}{0}}$ | $\overset{+}{\underset{+}{0}}$ | $\overset{-}{\underset{+}{0}}$ | $\overset{+}{\underset{+}{0}}$ | — | $\overset{+}{\underset{-}{0}}$ | — | + | $10-2=8$ |
| $x=1$, - | + | + | + | + | + | + | + | + | + | — | + | 2 |
| $=2$, - | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | |

гдѣ видно, что въ предѣлахъ 0 и 1 находятся восемь корней мнимыхъ, и два неизвѣстные корня между 1 и 2, которые также мнимые, что можно повѣрить, разыскивая дѣйствительный корень между 1 и 2 чрезъ сближеніе сихъ предѣловъ. Для вычисленія же этой пары корней, замѣтимъ напередъ, что

$$x=1 \text{ даетъ } \theta=+6,$$
$$x=2 \quad - \quad \theta=960.$$

слѣдовательно корни лежатъ ближе къ 1 нежели къ 2; а потому, на первый случай, возмемъ

$$x=1,3+z; \text{ получится рядъ,}$$
$$\theta(1,3+z)=\theta+\theta_1z+\theta_2z^2+\theta_3z^3+.....=0.$$

Изъ таблицъ степеней найдемъ:

$$1{,}3^2=1{,}69;\ 1{,}3^3=2{,}197;\ 1{,}3^7=6{,}27485;\ 1{,}3^8=8{,}15731;$$
$$1{,}3^9=10{,}6045\ldots;\ 1{,}3^{10}=13{,}78585;$$

а чрезъ непосредственное вычисленіе получимъ:

$$\theta=6{,}2128;\ \theta_1=54{,}415;\ \theta_2=331{,}97895;\ \theta_3=743{,}982\ldots.$$

Отсюда, $z_1=\frac{-6{,}2128}{54{,}415}=-0{,}1142;$

$$z_3=-0{,}09641+0{,}143\sqrt{-1},$$

и приближенною величиною корня будетъ

$$x=1{,}3-0{,}09641+0{,}143\sqrt{-1}$$
$$=1{,}20359+0{,}143\sqrt{-1}.$$

Для слѣдующаго приближенія къ корню, возмемъ

$$x=1{,}204+0{,}143\sqrt{-1}+r=\alpha+\beta\sqrt{-1}+r,$$

и постараемся опредѣлить коефиціенты ряда

$\theta(\alpha+\beta\sqrt{-1}+r)=\theta_1 r+\theta_1 r+\theta_2 r^2+\theta_3 r^3+\ldots.$, полагая

$$\alpha=1{,}204,\ \beta=0{,}143,$$
$$\varrho^2=\alpha^2+\beta^2=1{,}470063;$$

$$\begin{array}{ll}
\log\varrho=0{,}083.6680; & \cos v=\frac{1{,}204.R}{\varrho}, \\
2\log\varrho=0{,}167.3360, & \sin v=\frac{0{,}143.R}{\varrho}, \\
3\log\varrho=0{,}251{,}0040, & \log\cos v=\left|\begin{array}{l}0{,}080.6265+10\\ 0{,}916.3320-10\end{array}\right. \\
7\log\varrho=0{,}585{,}6760, & \\
8\log\varrho=0{,}669.3440, & \qquad\overline{9{,}996.9585} \\
9\log\varrho=0{,}753.0120, & \log\sin v=\left|\begin{array}{l}0{,}155.3360+10\\ 8{,}916{,}3320-10\end{array}\right. \\
10\log\varrho=0{,}836.6800, & \qquad\overline{9{,}071.6680}
\end{array}$$

Отсюда получаемъ:

$$\begin{array}{ll}
v=6^\circ\,46'\,20'', & 8v=54^\circ\,10'\,40'' \\
2v=13^\circ\,32'\,40'', & 9v=60^\circ\,57'\,0'' \\
3v=20^\circ\,19'\,0'', & 10v=67^\circ\,43'\,20''. \\
7v=47^\circ\,24'\,20'', &
\end{array}$$

Вычисленіе степеней двучлена $\alpha+\beta\sqrt{-1}$:

$$\begin{array}{ll}
\log\varrho^2\cos 2v=\left|\begin{array}{l}0{,}167.3360,\\ 9{,}987.7505-10\end{array}\right. & \log\varrho^2\sin 2v=0{,}167.3360 \\
 & \qquad 9{,}369.5861-10 \\
\qquad\overline{0{,}157.0865} & \qquad\overline{0{,}536.9221-10} \\
a=1{,}43577 & b=0{,}344288.
\end{array}$$

$$\log \varrho^3\cos 3v=\left|\begin{array}{l}0{,}251.0040\\ 9{,}972.1047-10\\ \hline 0{,}223.1087\end{array}\right.$$

$$a'=1{,}67151,$$

$$\log \varrho^3\sin\, 3v=\left|\begin{array}{l}0{,}251.0040\\ 9{,}540.5903-10\\ \hline 0{,}791.5943\end{array}\right.$$

$$b'=0{,}618863.$$

$$\log \varrho^7\cos\, 7v=\left|\begin{array}{l}0{,}585.6760,\\ 9{,}830.4633-10\\ \hline 0{,}416.1393\end{array}\right.$$

$$a''=2{,}60699,$$

$$\log \varrho^7\sin\, 7v=\left|\begin{array}{l}0{,}585.6760\\ 9{,}866.9738-10\\ \hline 0{,}452.6498\end{array}\right.$$

$$b''=2{,}83563.$$

$$\log \varrho^8\cos\, 8v=\left|\begin{array}{l}0{,}669\ 3440,\\ 9{,}767.3579-10\\ \hline 0{,}436.7019\end{array}\right.$$

$$a'''=2{,}73340,$$

$$\log \varrho^8\sin\, 8v=\left|\begin{array}{l}0{,}669.3440\\ 9{,}908.9335-10\\ \hline 0{,}578.2775\end{array}\right.$$

$$b'''=3{,}78684.$$

$$\log \varrho^9\cos\, 9v=\left|\begin{array}{l}0{,}753.0120,\\ 9{,}686.2542-10\\ \hline 0{,}439.2662\end{array}\right.$$

$$a''''=2{,}74958,$$

$$\log \varrho^9\sin\, 9v=\left|\begin{array}{l}0{,}753.0120\\ 9{,}941.6090-10\\ \hline 0{,}694.6210\end{array}\right.$$

$$b''''=4{,}95018.$$

$$\log \varrho^{10}\cos\, 10v=\left|\begin{array}{l}0{,}836.6800,\\ 9{,}578.7507-10\\ \hline 0{,}415.4307\end{array}\right.$$

$$a'''''=2{,}60274,$$

$$\log \varrho^{10}\sin\, 10v=\left|\begin{array}{l}0{,}836.6800\\ 9{,}966.3092-10\\ \hline 0{,}802.9892\end{array}\right.$$

$$b'''''=6{,}35315.$$

Нашедши всѣ нужныя степени двучлена $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, подставимъ ихъ въ $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$,....; получатся:

$$\theta=0{,}33515-0{,}074617\sqrt{-1},$$
$$\theta_1=-17{,}270+40{,}2060\sqrt{-1},$$
$$\theta_2=90{,}495+166{,}6468\sqrt{-1}.$$

***Первою поправкою корня*** будетъ:

$$r_1=\frac{0{,}33515-0{,}074617\sqrt{-1}}{17{,}27-40{,}2060\sqrt{-1}}\text{, или}$$

$$r_1=\frac{8{,}78821+12{,}18662\sqrt{-1}}{1914{,}773}$$
$$=0{,}0045897+0{,}0063645\sqrt{-1}.$$

***Второю поправкою*** будетъ:

$$r_2=\frac{-0{,}33515+0{,}07462\sqrt{-1}}{(0{,}0045897+0{,}0063645\sqrt{-1})(90{,}495+166{,}6468\sqrt{-1})+\theta_1}$$

Она найдется

$$r_2 = \frac{9{,}10453 + 12{,}58756\sqrt{-1}}{2047{,}089}$$
$$= 0{,}004475 + 0{,}006149\sqrt{-1}.$$

Взявъ эту поправку, какъ ближайшую къ истинной, найдется приближенный корень:

$$x = \begin{cases} 1{,}204000 + 0{,}143000\sqrt{-1} \\ 0{,}004475 + 0{,}006149\sqrt{-1} \end{cases}$$
$$x = 1{,}208475 + 0{,}149149\sqrt{-1},$$

точный по крайней мѣрѣ въ трехъ десятичныхъ.

**443.** *Способъ отдѣлять пары мнимыхъ корней даннаго уравненія.*— При розысканіи частныхъ предѣловъ корней, часто находятъ нѣсколько паръ мнимыхъ корней между подстановленіями $a$, $a+1=b$, различающимися только единицею: эти корни, обыкновенно, опускаются безъ всякаго вниманія, потому что въ рѣшеніи задачь не имѣютъ ни какого достоинства. Но, еслибъ намъ понадобилось, хотя изъ любопытства, вычислить и всѣ мнимые корни, то нужно было бы сдѣлать такія подстановленія въ данное уравненіе, чтобы каждая пара корней отдѣлилась отъ другой. Во многихъ случаяхъ можно употребить слѣдующій способъ: надобно данное уравненіе преобразовать въ другое, котораго бы корни были больше корней даннаго высшимъ предѣломъ $b$, полагая $x=-b+y$; тогда составится уравненіе $f(y)=0$, въ которомъ почти всѣ корни будутъ положительные. За тѣмъ надобно увеличить корни этого уравненія въ 10 разъ, полагая $y=\frac{z}{10}$; составится уравненіе $f(z)=0$, въ которое и надобно подставлять $z=1,\ 2,\ldots,\ 10,\ 20,\ldots$ пары мнимыхъ корней раздѣлятся, если дѣйствительные члены ихъ разнились между собою не менѣе, какъ въ десятыхъ доляхъ единицы. Послѣ чего тотчасъ найдутся числа $y$ и $x$, которыми отдѣляются пары корней въ $f(y)=0$ и $f(x)=0$. Но если окажется и въ уравненіи $f(z)=0$ нѣсколько паръ корней между предѣлами $a'$ и $b'=a'+1$, то и въ этомъ уравненіи надобно увеличить корни числомъ $b'$, и повторить все тоже дѣйствіе надъ $f(z)=0$, какое было надъ $f(x)=0$. Поступая такимъ образомъ, цѣль будетъ достигнута, исключая тѣ случаи, когда дѣйствительныя части нѣкоторыхъ паръ будутъ равными, какъ видѣли это въ уравненіяхъ возвратныхъ и двучленныхъ.

*Примѣръ.* — Намъ извѣстно (стр. 449), что уравненіе $x^4-2x+2=0$ состоитъ изъ двухъ паръ мнимыхъ корней, показываемыхъ подстановленіями 0 и 1. Чтобъ раздѣлить эти корни, увеличимъ ихъ предѣломъ 1, дабы чрезъ это сдѣлать обѣ пары положительными, полагая

$$x = -1+y;$$

тогда получатся: $\theta=x^4-2x+2=5$, $\theta_1=4x^3-2=-6$, $\theta_2=6x^2=6$, $\theta_3= =4x=-4$, $\theta_4=1$; и составится уравненіе

$$y^4-4y^3+6y^2-6y+5=0;$$

корни этого уравненія увеличимъ въ 10 разъ, полагая $y=\frac{z}{10}$, найдется:

$$\varphi=z^4-40z^3+600z^2-6000z+50000=0,$$
$$\varphi_1=4z^3-120z^2+1200z-6000,$$
$$\varphi_2=6z^2-120z+600,$$
$$\varphi_3=4z-40,\ \varphi_4=1.$$

Теперь будемъ брать:

| | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z=$ 0, найдется | + | — | + | — | + | |
| $=$ 9, ......... | + | — | + | — | + | 1 пара; |
| $=$10, ......... | + | 0 | 0 | — | + | 1 пара. |
| $=$11, ......... | + | + | + | + | + | |

Изъ этого порядка знаковъ видно, что два мнимые корня находятся между подстановленіями 9 и 10, и два между 10 и 11; отсюда съ большею вѣроятностію заключаемъ, что дѣйствительный членъ первой пары $z_1=9+h$, а второй $z_{11}=10+k$, означая чрезъ $h$ и $k$ нѣкоторыя числа, меньшія 1-цы.

Отсюда видно, что, для первой пары,

$$y=\frac{z}{10}\begin{matrix}>0,9,\\<1\end{matrix}\ \text{для второй}\ y=\frac{z}{10}\begin{matrix}>1\\<1,1;\end{matrix}$$

слѣдовательно, въ данномъ уравненіи, для первой пары корней

$$x=-1+y<1,\ \text{для второй}\ x=-1+y>1.$$

И такъ, предѣлы 0 и 1 обличаютъ двѣ пары корней, положительную и отрицательную. Мы вычисляли пару корней положительныхъ, и нашли 0,87337.... $\pm0,4362.....\sqrt{-1}$. Если вторая пара $=p\pm q\sqrt{-1}$, то сумма всѣхъ корней должна быть $2p+2\times87337....=0$, откуда

$$p=-0,87337....$$

Таковъ дѣйствительный членъ второй пары. Коефиціентъ же $q$ легко вычислить изъ состава послѣдняго члена 2 уравненія.

*Примѣръ.* Уравненіе

$$\theta=x^4-3x^3+6x^2-5x+3=0,$$

котораго производныя:

$$\theta_1=4x^3-9x^2+12x+5,$$
$$\theta_2=6x^2-9x+6,\ \theta_3=4x-3,\ \theta_4=1,$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| даетъ для $x=-1$, | + | + | + | + | + | |
| $x=0$, | + | — | + | — | + | 2 пары. |
| $x=1$, | + | + | + | + | + | |

Въ немъ двѣ неизвѣстныя пары корней суть пары мнимыя (стр. 353). Для раздѣленія ихъ, положимъ $x=-1+y$; найдутся:

$$\theta_4=1,\ \theta_3=-7,\ \theta_2=21,\ \theta_1=-26,\ \theta=18.$$
$$y^4-7y^3+21y^2-26y+18=0.$$

Увеличимъ корни этого уравненія въ 10 разъ, взявши $y=\frac{z}{10}$, и составимъ производныя:

$$\varphi=z^4-70z^3+2100z^2-26000z+180000=0,$$
$$\varphi_1=4z^3-210z^2+4200z-26000,$$
$$\varphi_2=6z^2-210z+2100,$$
$$\varphi_3=4z-70,\quad \varphi_4=1.$$

Теперь будемъ дѣлать подстановленія:

$$\begin{array}{rccccc|l}
 & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} & \\
z=0, & + & - & + & - & + & \\
=10, & + & - & + & - & + & \text{1 пара.} \\
=11, & + & - & + & + & + & \\
=17, & + & - & + & + & + & \text{1 пара.} \\
=18, & + & + & + & + & + &
\end{array}$$

Этими подстановленіями пары мнимыхъ корней весьма хорошо раздѣлились: одна заключается въ предѣлахъ 10 и 11, другая въ предѣлахъ 17 и 18. По этому $y=\frac{z}{10}$ заключается между 1 и 1,1, и также 1,7 и 1,8; слѣдовательно, $x=-1+y$ заключается между 0 и 0,1 для одной пары мнимыхъ корней, а для другой между 0,7 и 0,8.

*Примѣръ.* Уравненіе

$$\theta=x^7-x^6+50x^3-2x^2+20=0,$$

котораго производныя:

$$\theta_1=7x^6-6x^5+150x^2-4x,$$
$$\theta_2=21x^5-15x^4+150x,$$
$$\theta_3=35x^4-20x^3+50,$$
$$\theta_4=35x^3-15x^2,\ \theta_5=21x^2-6x,\ \theta_6=7x-1,\ \theta_7=1,$$

имѣетъ шесть корней между предѣлами:

$$x=0,\quad + \; - \; \overset{+}{\underset{-}{0}} \; \overset{-}{\underset{-}{0}} \; + \; - \; \overset{+}{\underset{-}{0}} \; +,$$
$$=1,\quad + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; +,$$

и всѣ эти корни мнимые. Для раздѣленія паръ сихъ корней возмемъ $x=-1+y$; получится:

$$\theta_7=1,\ \theta_6=-8,\ \theta_5=27,\ \theta_4=-50,\ \theta_3=105,\ \theta_2=-188,$$
$$\theta_1=167,\ \theta_0=-34;$$
$$y^7-8y^6+27y^5-50y^4+105y^3-188y^2+167y-34=0.$$

Потомъ сдѣлаемъ $y=\frac{z}{10}$; составится новое уравненіе, и его производныя:

$$\varphi=z^7-80z^6+27.10^2.z^5-50.10^3z^4+105.10^4z^3-188.10^5z^2+167.10^6z-34.10^7;$$
$$\varphi_1=7z^6-480z^5+135.10^2z^4-200.10^3z^3+315.10^4z^2-376.10^5z+167.10^6:$$
$$\varphi_2=21z^5-1200z^4+37000z^3-300000z^2+3150000z-18800000;$$
$$\varphi_3=35z^4-1600z^3+27000z^2-200000z+1050000;$$
$$\varphi_4=35z^3-1200z^2+13500z-50000;$$
$$\varphi_5=21z^2-480z+2700;\ \varphi_6=7z-80;\ \varphi_7=1.$$

Дѣлая подстановленія $z=0,\ 1,\ 2,\ldots,$ получимъ слѣдующіе знаки для результатовъ:

$$\begin{array}{rcccccccc}
z=\ 0, & + & - & + & - & + & - & + & - \\
=\ 9, & + & - & + & - & + & - & + & - \\
=10, & + & - & \overset{+}{\underset{-}{0}} & \overset{-}{\underset{-}{0}} & + & - & + & + \\
=11, & + & - & - & - & + & + & + & + \\
=14, & + & + & + & - & + & + & + & + \\
=15, & + & + & + & + & + & + & + & +
\end{array}$$

откуда видно, что между 9 и 10 находится дѣйствительный корень, и тамъ же находится первая пара мнимыхъ корней; вторая пара мнимыхъ соотвѣтствуетъ предѣламъ 10 и 11; третья пара между 14 и 15. Слѣдовательно, дѣйствительный корень даннаго уравненія

$$x=-1+y=-1+\frac{z}{10} \text{ есть отрицатательный.}$$

Первая пара мнимыхъ корней соотвѣтствуетъ тому же предѣлу; вторая пара соотвѣтствуетъ предѣламъ 0 и 1, а третья между

$$x=-1+1,4=0,4 \text{ и } 0,5.$$

Такимъ образомъ раздѣлены всѣ пары мнимыхъ корней; остается только неизвѣстно, какіе корни соотвѣтствуютъ подстановленію $x=0$, положительные или отрицательные. Нельзя утвердительно говорить, что въ положительныхъ предѣлахъ находятся непремѣнно пары положительныя; потому что эти предѣлы зависимы не отъ однихъ дѣйствительныхъ членовъ корней, но также и отъ членовъ мнимыхъ, а эта зависимость остается неизвѣстною. Для окончательнаго заключенія, надобно пробовать вычислять пары корней по способу, который намъ уже извѣстенъ.

Для упражненія въ раздѣленіи паръ мнимыхъ корней, предлагаю уравненіе:

$$10x^6-11x^5+45x^4-30x^3+61x^2-30x+25=0,$$

котораго корни всѣ мнимые, и заключаются въ предѣлахъ $x=0$, $x=1$. Руководствуясь показаннымъ способомъ, найдется:

$z_1$ между 7 и 8, $z_2$ между 10 и 11, $z_3$ между 11 и 12. Слѣдовательно:

$x_1$ между $-0,3$ и $-0,2$,
$x_2$ – $0$ и $+0,1$,
$x_3$ – $1,1$ и $1,2$.

**448.** Но этотъ способъ раздѣленія паръ мнимыхъ корней недостаточенъ въ томъ случаѣ, когда, при какомъ ни есть подстановленіи, уничтожаются многія производныя сряду. Таково, напримѣръ, уравненіе

$$\theta=x^7-10x^2-20=0,$$

въ которомъ шесть мнимыхъ корней. Оно имѣетъ: $\theta_1=7x^6-20x$, $\theta_2=21x^5-10$, $\theta_3=35x^4$, $\theta_4=35x^3$, $\theta_5=21x^2$. $\theta_6=7x$, $\theta_7=1$, откуда находимъ:

$$\begin{array}{llllllllll|l} \text{для } x=0, & + & 0 & 0 & 0 & 0 & - & 0 & - & & \text{6 мним.} \\ \phantom{\text{для } x}=1, & + & + & + & + & + & + & - & - & & \\ \phantom{\text{для } x}=2, & + & + & + & + & + & + & + & + & & 1. \end{array}$$

Здѣсь для раздѣленія трехъ паръ мнимыхъ корней надлежало бы обратиться къ самымъ общимъ способамъ, о которыхъ здѣсь говорить не буду, какъ о предметахъ, выходящихъ изъ предѣловъ начальныхъ основаній Алгебры, и болѣе любопытныхъ по своимъ теоріямъ, нежели удобопримѣнимыхъ и полезныхъ для практики.

О вычисленіи несоизмѣримыхъ корней по способу Горнера, см. *Die Theorie und Auflösung der höhern algebraischen und der transcendenten Gleichungen, theoretisch und practisch bearbeitet von Dr. C. H. Schnuse;* Braunschweig, 1850, стран. 185—279. Способъ Веддле, тамъ же, стран. 280—303. Опредѣленіе и вычисленіе мнимыхъ корней, по способамъ Лагранжа и Рутерфорда, тамъ же, стран. 343—362.

### Приведеніе ирраціональныхъ уравненій въ раціональныя.

**449.** Уравненіе называется ирраціональнымъ, если въ одномъ или нѣсколькихъ его членахъ неизвѣстная заключается подъ коренными знаками. Для рѣшенія такихъ уравненій надобно ихъ преобразовывать въ другія, не содержащія радикальныхъ функцій.

Общій способъ этого приведенія достаточно понятенъ изъ слѣдующаго примѣра. Пусть дано ирраціональное уравненіе,

$$\sqrt[5]{a-x}-\sqrt[4]{b-x}+\sqrt[3]{x-c}-\sqrt{x-d}+f=0;$$

въ немъ нѣтъ радикальныхъ знаменателей, потому что всегда можно уравненіе отъ нихъ освободить.

Для освобожденія же отъ радикаловъ, положимъ $a-x=y^5$, $b-x=z^4$, $x-c=u^3$, $x-d=s^2$; найдется:

$$1)\ y-z+u-s+f=0, \text{ и условныя уравненія:}$$

$$2)\ y^5+x-a=0,\quad 3)\ z^4+x-b=0$$

$$4)\ u^3+c-x=0,\quad 5)\ s^2-x+d=0.$$

Изъ этихъ пяти уравненій надобно только исключить четыре неизвѣстныя, какія нибудь, наприм. $x$, $z$, $u$, $s$; останется одно уравненіе $f(y)=0$ съ однимъ неизвѣстнымъ $y$, не содержащее радикаловъ. Разрѣшивъ это уравненіе, будемъ вносить его корни въ $y^5+x-a=0$, найдется столько же величинъ для $x$, которыя надобно подставлять въ данное ирраціональное уравненіе, и смотрѣть, которыя изъ нихъ ему удовлетворяютъ; онѣ и будутъ его корнями.

корни этого уравненія увеличимъ въ 10 разъ, полагая $y=\frac{z}{10}$, найдется:

$$\varphi=z^4-40z^3+600z^2-6000z+50000=0,$$
$$\varphi_1=4z^3-120z^2+1200z-6000,$$
$$\varphi_2=6z^2-120z+600,$$
$$\varphi_3=4z-40,\ \varphi_4=1.$$

Теперь будемъ брать:

| | | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z=0$, | найдется | + | — | + | — | + | |
| $=9$, | ......... | + | — | + | — | + | 1 пара; |
| $=10$, | ......... | + | 0 | 0 | — | + | 1 пара. |
| $=11$, | ......... | + | + | + | + | + | |

Изъ этого порядка знаковъ видно, что два мнимые корня находятся между подстановленіями 9 и 10, и два между 10 и 11; отсюда съ большою вѣроятностію заключаемъ, что дѣйствительный членъ первой пары $z_1=9+h$, а второй $z_2=10+k$, означая чрезъ $h$ и $k$ нѣкоторыя числа, меньшія 1-цы.

Отсюда видно, что, для первой пары,

$$y=\frac{z}{10}\begin{array}{l}>0,9,\\<1\end{array}\quad\text{для второй}\quad y=\frac{z}{10}\begin{array}{l}>1.\\<1,1;\end{array}$$

слѣдовательно, въ данномъ уравненіи, для первой пары корней

$$x=-1+y<1,\ \text{для второй}\ x=-1+y>1.$$

И такъ, предѣлы 0 и 1 обличаютъ двѣ пары корней, положительную и отрицательную. Мы вычисляли пару корней положительныхъ, и нашли $0,87337\ldots\pm0,4362\ldots\sqrt{-1}$. Если вторая пара $=p\pm q\sqrt{-1}$, то сумма всѣхъ корней должна быть

$$2p+2\times87337\ldots=0,\ \text{откуда}$$
$$p=-0,87337\ldots$$

Таковъ дѣйствительный членъ второй пары. Коефиціентъ же $q$ легко вычислить изъ состава послѣдняго члена 2 уравненія.

*Примѣръ.* Уравненіе $\theta=x^7-x^6+50x^3-2x^2+20=0$,

которого производныя: $\theta_1=7x^6-6x^5+150x^2-4x$,

$$\theta_2=21x^5-15x^4+150x,$$
$$\theta_3=35x^4-20x^3+50,$$
$$\theta_4=35x^3-15x^2,\ \theta_5=21x^2-6x,\ \theta_6=7x-1,\ \theta_7=1,$$

имѣетъ шесть корней между предѣлами:

$$x=0,\quad +\ -\ \overset{+}{\underset{-}{0}}\ \overset{-}{\underset{-}{0}}\ +\ -\ \overset{+}{\underset{-}{0}}\ +,$$
$$=1,\quad +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +,$$

и всѣ эти корни мнимые. Для раздѣленія паръ сихъ корней возмемъ $x=-1+y$; получится:

$$\theta_7=1,\ \theta_6=-8,\ \theta_5=27,\ \theta_4=-50,\ \theta_3=105,\ \theta_2=-188,$$
$$\theta_1=167,\ \theta_0=-34;$$
$$y^7-8y^6+27y^5-50y^4+105y^3-188y^2+167y-34=0.$$

Потомъ сдѣлаемъ $y=\frac{z}{10}$; составится новое уравненіе, и его производныя:

$$\varphi=z^7-80z^6+27.10^2.z^5-50.10^3z^4+103.10^4z^3-188.10^5z^2+167.10^6z-34.10^6;$$
$$\varphi_1=7z^6-480z^5+135.10^2z^4-200.10^3z^3+315\ 10^4z^2-376.10^5z+167.10^6;$$
$$\varphi_2=21z^5-1200z^4+37000z^3-300000z^2+3150000z-18800000;$$
$$\varphi_3=35z^4-1600z^3+27000z^3+20000z+1050000;$$
$$\varphi_4=35z^3-1200z^2+13500z-50000;$$
$$\varphi_5=21z^2-480z-2700;\ \varphi_6+7z-80;\ \varphi_7=1.$$

Дѣлая подстановленія $z=0,\ 1,\ 2,\ldots$, получимъ слѣдующіе знаки для результатовъ:

$$\begin{array}{ll}
z=\ 0, & +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ - \\
=\ 9, & +\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ - \\
=10, & +\ -\ \overset{+}{\underset{-}{0}}\ \overset{-}{\underset{-}{0}}\ +\ -\ +\ + \\
=11, & +\ -\ -\ -\ +\ +\ +\ + \\
=14, & +\ +\ +\ -\ +\ +\ +\ + \\
=15, & +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +
\end{array}$$

откуда видно, что между 9 и 10 находится дѣйствительный корень, и тамъ же находится первая пара мнимыхъ корней; вторая пара мнимыхъ соотвѣтствуетъ предѣламъ 10 и 11; третья пара между 14 и 15. Слѣдовательно, дѣйствительный корень даннаго уравненія

$$x=-1+y=-1+\frac{z}{10}\ \text{есть отрицатательный.}$$

Первая пара мнимыхъ корней соотвѣтствуетъ тому же предѣлу; вторая пара соотвѣтствуетъ предѣламъ 0 и 1, а третья между

$$x=-1+1,4=0,4\ \text{и}\ 0,5.$$

Такимъ образомъ раздѣлены всѣ пары мнимыхъ корней; остается только неизвѣстно, какіе корни соотвѣтствуютъ подстановленію $x=0$, положительные или отрицательные. Нельзя утвердительно говорить, что въ положительныхъ предѣлахъ находятся непремѣнно пары положительныя; потому что эти предѣлы зависимы не отъ однихъ дѣйствительныхъ членовъ корней, но также и отъ членовъ мнимыхъ, а эта зависимость остается неизвѣстною. Для окончательнаго заключенія, надобно пробовать вычислять пары корней по способу, который намъ уже извѣстенъ.

Для упражненія въ раздѣленіи паръ мнимыхъ корней, предлагаю уравненіе:

$$10x^6-11x^5+45x^4-30x^3+61x^2-30x+25=0,$$

котораго корни всѣ мнимые, и заключаются въ предѣлахъ $x=0$, $x=1$. Руководствуясь показаннымъ способомъ, найдется:

$z_1$ между 7 и 8, $z_2$ между 10 и 11, $z_3$ между 11 и 12. Слѣдовательно:

$$\begin{array}{llcl}
x_1 & \text{между} & -0,3 & \text{и}\ -0,2, \\
x_2 & - & 0 & \text{и}\ +0,1, \\
x_3 & - & 1,1 & \text{и}\ \ \ 1,2.
\end{array}$$

**448.** Но этотъ способъ раздѣленія паръ мнимыхъ корней недостаточенъ въ томъ случаѣ, когда, при какомъ ни есть подстановленіи, уничтожаются многія проиводныя сряду.

Таково, напримѣръ, уравненіе: $f(x)=x^6-2x+5=0$, которое состоитъ изъ шести мнимыхъ корней. Оно имѣетъ: $\theta_1=6x^5-2$, $\theta_2=15x^4$, $\theta_3=20x^3$, $\theta_4=15x^2$, $\theta_5=6x$, $\theta_6=1$; откуда находимъ:

$$\begin{array}{rccccccc|l} \text{для } x=0, & + & 0 & 0 & 0 & 0 & - & + & \text{6 мнимыхъ.} \\ x=1, & + & + & + & + & + & + & + & \end{array}$$

Здѣсь, для раздѣленія трехъ паръ мнимыхъ корней, *преобразуемъ* $f(x)=0$ *въ другое уравненіе, котораго бы корни были квадратами его корней* (стр. 356), перемноживъ $f(x)=0$ на $f(-x)=0$; получится:

$$x^{12}+10x^6-4x^2+25=0, \text{ или}$$

$$f(y)=y^6+10y^3-4y+25=0, \text{ полагая } x^2=y.$$

Это уравненіе преобразуемъ опять также, помноживъ $f(y)$ на $f(-y)=0$; получится: $y^{12}-50y^6+80y^4-16y^2+625=0$, или

$$\theta=z^6-50z^3+80z^2-16z+625, \text{ полагая } y^2=z.$$

Возмемъ его производныя:

$$\theta_1=6z^5-150z^2+160z-16,$$

$$\theta_2=15z^4-150z+80,$$

$$\theta_3=20z^3-50, \ \theta_4=15z^2, \ \theta_5=6z, \ \theta_6=1.$$

Отсюда найдемъ:

$$\begin{array}{rccccccc|l} \text{для } x=1, & + & - & + & - & + & - & + & \\ =0, & + & 0 & 0 & - & + & - & + & \text{1 пара.} \\ =0{,}1, & + & + & + & - & + & - & + & \\ =1, & + & + & + & - & - & 0 & + & \text{1 пара.} \\ =2, & + & + & + & + & + & - & + & \text{1 пара.} \\ =3, & + & + & + & + & + & + & + & \end{array}$$

Такимъ образомъ въ уравненіи $\theta(z)=0$ всѣ три пары раздѣлены, и могутъ быть вычислены.

Если найдется $z=a+b\sqrt{-1}$, то будетъ:

$$y=\sqrt{z}=\pm\sqrt{a+b\sqrt{-1}},$$

$$x=\sqrt{y}=\pm\sqrt{\pm\sqrt{a+b\sqrt{-1}}}.$$

Общій способъ раздѣленія и вычисленія мнимыхъ корней чрезъ составленіе уравненія изъ квадратовъ разностей корней даннаго можно читать въ *Теоріи опредѣленныхъ алгебрическихъ уравненій высшихъ степеней,* Сомова; Москва, 1838, стран. 130, 131 и 135.

О вычисленіи несоизмѣримыхъ корней по способу Горнера, см. *Die Theorie und Auflösung der höhern algebraischen und der transcendenten Gleichungen, theoretisch und practisch bearbeitet von Dr. C. H. Schnuse;* Braunschweig, 1850, стран. 185—279. Способъ Веддле, тамъ же, стран. 280—303. Опредѣленіе и вычисленіе мнимыхъ корней, по способамъ Лагранжа и Рутерфорда, тамъ же, стран. 342—362.

Слѣдующая таблица полезна для первыхъ пріемовъ вычисленія мнимыхъ корней.

### Степени количества $p+q\sqrt{-1}$, когда $p$ и $q$ принимают величины 1, 2, 3, 4, 5.

| | $p=q=1$ | $p=2,\ q=1$ | $p=1,\ q=2$ | $p=3,\ q=1$ | $p=1,\ q=3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $1+\sqrt{-1}$ | $2+\sqrt{-1}$ | $1+2\sqrt{-1}$ | $3+\sqrt{-1}$ | $1+3\sqrt{-1}$ |
| 2 | $2\sqrt{-1}$ | $3+4\sqrt{-1}$ | $-3+4\sqrt{-1}$ | $8+6\sqrt{-1}$ | $-8+6\sqrt{-1}$ |
| 3 | $-2+2\sqrt{-1}$ | $2+11\sqrt{-1}$ | $-11-2\sqrt{-1}$ | $18+26\sqrt{-1}$ | $-26-18\sqrt{-1}$ |
| 4 | $-4+0$ | $-7+24\sqrt{-1}$ | $-7-24\sqrt{-1}$ | $28+96\sqrt{-1}$ | $28-96\sqrt{-1}$ |
| 5 | $-4-4\sqrt{-1}$ | $-38+41\sqrt{-1}$ | $41-38\sqrt{-1}$ | $-12+316\sqrt{-1}$ | $316-12\sqrt{-1}$ |
| 6 | $-8\sqrt{-1}$ | $-117+44\sqrt{-1}$ | $117+44\sqrt{-1}$ | $-352+936\sqrt{-1}$ | $352+936\sqrt{-1}$ |
| 7 | $8-8\sqrt{-1}$ | $-278-29\sqrt{-1}$ | $29+278\sqrt{-1}$ | $-1992+2436\sqrt{-1}$ | $-2456+1992\sqrt{-1}$ |
| 8 | $16$ | $-527-336\sqrt{-1}$ | $-527+336\sqrt{-1}$ | $-8432+5376\sqrt{-1}$ | $-8432-5376\sqrt{-1}$ |

| | $p=4,\ q=1$ | $p=1,\ q=4$ | $p=5,\ q=1$ | $p=1,\ q=5$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $4+\sqrt{-1}$ | $1+4\sqrt{-1}$ | $5+\sqrt{-1}$ | $1+5\sqrt{-1}$ |
| 2 | $15+8\sqrt{-1}$ | $-15+8\sqrt{-1}$ | $24+10\sqrt{-1}$ | $-24+10\sqrt{-1}$ |
| 3 | $52+47\sqrt{-1}$ | $-47-52\sqrt{-1}$ | $110+74\sqrt{-1}$ | $-74-110\sqrt{-1}$ |
| 4 | $161+240\sqrt{-1}$ | $161-240\sqrt{-1}$ | $476+480\sqrt{-1}$ | $476-480\sqrt{-1}$ |
| 5 | $404+1121\sqrt{-1}$ | $1121+404\sqrt{-1}$ | $1900+2876\sqrt{-1}$ | $2876+1900\sqrt{-1}$ |
| 6 | $495+4888\sqrt{-1}$ | $-495+4888\sqrt{-1}$ | $6624+16280\sqrt{-1}$ | $-6624+16280\sqrt{-1}$ |
| 7 | $-2908+20047\sqrt{-1}$ | $-20047+2908\sqrt{-1}$ | $16840+88024\sqrt{-1}$ | $-88024-16840\sqrt{-1}$ |
| 8 | $-31679+77280\sqrt{-1}$ | $-31679-77280\sqrt{-1}$ | $-3824+456960\sqrt{-1}$ | $-3824-456960\sqrt{-1}$ |

| | $p=2,\ q=3$ | $p=3,\ q=2$ | $p=2,\ q=5$ | $p=5,\ q=2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $2+3\sqrt{-1}$ | $3+2\sqrt{-1}$ | $2+5\sqrt{-1}$ | $5+2\sqrt{-1}$ |
| 2 | $-5+12\sqrt{-1}$ | $5+12\sqrt{-1}$ | $-21+20\sqrt{-1}$ | $21+20\sqrt{-1}$ |
| 3 | $-46+9\sqrt{-1}$ | $-9+46\sqrt{-1}$ | $-142-65\sqrt{-1}$ | $65+142\sqrt{-1}$ |
| 4 | $-119-120\sqrt{-1}$ | $-119+120\sqrt{-1}$ | $41-840\sqrt{-1}$ | $41+840\sqrt{-1}$ |
| 5 | $122-597\sqrt{-1}$ | $-597+122\sqrt{-1}$ | $4282-1475\sqrt{-1}$ | $-1475+4282\sqrt{-1}$ |
| 6 | $2035-828\sqrt{-1}$ | $-2035-828\sqrt{-1}$ | $15939+18460\sqrt{-1}$ | $-15939+18460\sqrt{-1}$ |
| 7 | $6554+4449\sqrt{-1}$ | $-4449-6554\sqrt{-1}$ | $-60422+116615\sqrt{-1}$ | $-116615+60422\sqrt{-1}$ |
| 8 | $-239+28560\sqrt{-1}$ | $-239-28560\sqrt{-1}$ | $-703919-68880\sqrt{-1}$ | $-703919+68880\sqrt{-1}$ |

Если будетъ одно $q$ отрицательное, то въ этой табличкѣ перемѣнятся знаки только предъ всѣми членами мнимыми.

Если $p$ отрицательное, то перемѣнятся знаки предъ дѣйствительными членами въ нечётныхъ степеняхъ, и предъ мнимыми въ степеняхъ чётныхъ.

Если же $p$ и $q$ оба отрицательные, то перемѣнятся знаки предъ обоими членами во всѣхъ степеняхъ нечётныхъ, что очевидно.

Если извѣстный членъ $p$ хотя единицею менѣе коефиціента $q$ мнимаго члена, то въ квадратномъ двучленѣ дѣйствительный членъ дѣлается отрицательнымъ.

## Приведеніе ирраціональныхъ уравненій въ раціональныя.

**449.** Уравненіе называется ирраціональнымъ, если въ одномъ или нѣсколькихъ его членахъ неизвѣстная заключается подъ коренными знаками. Для рѣшенія такихъ уравненій, надобно ихъ преобразовывать въ другія, не содержащія радикальныхъ функцій.

Общій способъ этого приведенія достаточно понятенъ изъ слѣдующаго примѣра. Пусть дано ирраціональное уравненіе,

$$\sqrt[5]{a-x}-\sqrt[4]{b-x}+\sqrt[3]{x-c}-\sqrt{x-d}+f=0;$$

въ немъ нѣтъ радикальныхъ знаменателей, потому что всегда можно уравненіе отъ нихъ освободить.

Для освобожденія же отъ радикаловъ, положимъ $a-x=y^5$, $b-x=z^4$, $x-c=u^3$, $x-d=s^2$; найдется:

1) $y-z+u-s+f=0$, и условныя уравненія:

2) $y^5+x-a=0$, 3) $z^4+x-b=0$

4) $u^3+c-x=0$, 5) $s^2-x+d=0$.

Изъ этихъ пяти уравненій надобно только исключить четыре неизвѣстныя, какія нибудь, наприм. $x$, $z$, $u$, $s$; останется одно уравненіе $f(y)=0$ съ однимъ неизвѣстнымъ $y$, не содержащее радикаловъ. Разрѣшивъ это уравненіе, будемъ вносить его корни въ $y^5+x-a=0$, найдется столько же величинъ для $x$, которыя надобно подставлять въ данное ирраціональное уравненіе, и смотрѣть, которыя изъ нихъ ему удовлетворяютъ; онѣ и будутъ его корнями.

Изъ этого видно, что, для приведенія ирраціональнаго уравненія въ раціональное, нужно напередъ знать самые общіе способы исключенія неизвѣстныхъ между данными уравненіями. Но я совсѣмъ не буду здѣсь излагать этихъ способовъ, а ограничусь только случаями, въ которыхъ это приведеніе и безъ того можетъ быть исполнено.

1) Положимъ, что уравненіе содержитъ радикалъ только *въ одномъ членѣ:* тогда надобно отдѣлить этотъ членъ, и все уравненіе возвысить въ степень, означенную показателемъ того корня.

***Примѣръ.*** Пусть дано уравненіе

$$ax-\sqrt{b-x}+c=0.$$

Отдѣляю радикальный членъ,

$ax+c=\sqrt{b-x}$, и возвышаю въ квадратъ:

$a^2x^2+2acx+c^2=b-x.$

***Примѣръ.*** Возмемъ $px-\dfrac{a}{b-\sqrt[3]{x-c}}-q=0.$

Отдѣлимъ радикальную функцію:

$$px-q=\frac{a}{b-\sqrt[3]{x-c}};$$ освободимъ отъ знаменателя,

$$(px-q)b-(px-q)\sqrt[3]{x-c}=a,$$ или

$$bpx-bq-a=(px-q)\sqrt[3]{x-c}.$$

Возвысимъ въ 3-ю степень, и получится

$$(bpx-bq-a)^3=(px-q)^3(x-c)$$

уравненіе 4-й степени безъ радикаловъ.

2) Положимъ, что уравненіе имѣетъ радикальныя функціи въ двухъ членахъ, изъ коихъ одинъ съ показателемъ 2.

*Примѣръ.* $\sqrt[3]{2-x}-\sqrt{x-1}-1=0.$

Здѣсь надобно отдѣлить $\sqrt[3]{2-x}$:

$$\sqrt[3]{2-x}=1+\sqrt{x-1},$$ и возвысить въ кубъ,

$$2-x=1+3\sqrt{x-1}+3(x-1)+(x-1)\sqrt{x-1};$$ откуда

$$4-4x=(2+x)\sqrt{x-1}.$$

Теперь возвысимъ въ квадратъ, сократимъ, и найдется:

$$x^3-13x^2+32x-20=0.$$

Этому уравненію удовлетворяетъ корень $x=1$; онъ же удовлетворяетъ и радикальному уравненію. Освободивши найденное уравненіе отъ $x-1=0$, получимъ:

$$x^2-12x+20=0,$$ откуда

$$x=10,\ x=2,$$

которыя только тогда могутъ удовлетворить данному уравненію, когда $\sqrt{x-1}$ возмется съ знакомъ $+$.

Возмемъ теперь уравненіе *съ двумя какими нибудь радикалами*, наприм.

$$\sqrt[n]{a-x}-\sqrt[3]{b-x}+c=0.$$

Положимъ $a-x=y^n$, или $x=a-y^n$; получится:

$$y-\sqrt[3]{b-a+y^n}+c=0;$$ отсюда:

$$y+c=\sqrt[3]{b-a+y^n},$$ и наконецъ

$$y^3+3cy^2+3c^2y+c^3=b-a+y^n.$$

Пусть $n=5$, то будетъ:

$$y^5-y^3-3cy^2-3c^2y-c^3+b-a=0.$$

Положимъ $a=4$, $b=11$, $c=1$; даннымъ уравненіемъ будетъ:

$$\sqrt[5]{4-x}-\sqrt[3]{11-x}+1=0,$$ а преобразованное

$$y^5-y^3-3y^2-3y+6=0.$$

Этому послѣднему удовлетворяетъ корень $y=1$. Отъ сего $x=4-y^5=4-1=3$; это число удовлетворяетъ данному уравненію, и есть его корнемъ.

3) Положимъ, что уравненіе содержитъ *три радикала*, изъ коихъ одинъ съ показателемъ 2. Напримѣръ:

$$\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{b-x}+\sqrt{x-c}+d=0.$$

Въ этомъ случаѣ также беру:

$a-x=y^3$; отсюда $x=a-y^3$; подставляю:

$$y-\sqrt[3]{b-a+y^3}+\sqrt{a-c-y^3}+d=0; \text{ отсюда}$$

$$y+d+\sqrt{a-c-y^3}=\sqrt[3]{b-a+y^3}.$$

Для краткости полагаю: $y-d=p$, $a-c-y^3=q$, $b-a+y^3=r$; отъ чего наше уравненіе сдѣлается:

$$p+\sqrt{q}=\sqrt[3]{r},$$

которое и возвышаю въ кубъ:

$$p^3+3p^2\sqrt{q}+3pq+q\sqrt{q}=r, \text{ или}$$

$$(3p^2+q)\sqrt{q}=(r-p^3-3pq).$$

Это возвышаю въ квадратъ:

$$(3p^2+q)^2q=(r-p^3-3pq)^2.$$

Сюда надобно только подставить, на мѣсто $p$, $q$, $r$, ихъ значенія, потомъ привесть въ простѣйшій видъ, то и получится уравненіе безъ радикаловъ, зависящее только отъ $y$. Нашедши его корни, надобно ихъ подставлять въ $x=a-y^3$, чтобъ получить всѣ значенія для $x$, изъ которыхъ нѣкоторыя будутъ удовлетворять данному уравненію, и потому будутъ его корнями.

*Примѣръ.* Возмемъ еще уравненіе:

$$\sqrt[5]{a-x}+\sqrt[3]{x-c}-\sqrt{d-x}+f=0.$$

Положимъ $a-x=y^5$; отсюда $x=a-y^5$; подставимъ:

$$y+\sqrt[3]{a-c-y^5}-\sqrt{d-a+y^5}+f=0, \text{ или}$$

$$\sqrt[3]{a-c-y^5}=\sqrt{d-a+y^5}-(y+f).$$

Возвышаю въ кубъ:

$$a-c-y^5=d-a+y^5\sqrt{d-a+y^6}-3(y+f)(d-a+y^5)+3(y+f)^2\sqrt{d-a+y^5}-(y+f)^3,$$

или:

$$a-c-y^5+3(y+f)(d-a+y^5)+(y+f)^5=[d-a+y^5+3(y+f)^2]\sqrt{d-a+y^5}.$$

Остается все это возвысить въ квадратъ, чтобъ уничтожился послѣдній радикалъ.

Пусть $a=c=d=4$, $f=1$; слѣдовательно данное уравненіе:

$$\sqrt[5]{4-x}+\sqrt[3]{x-4}-\sqrt{4-x}+1=0,$$

а условное $x=4-y^5$. Въ такомъ случаѣ, уравненіе съ однимъ редикаломъ будетъ:

$$-y^5+3y^5(1+y)+(1+y^3)=(y^5+3+6y+3y^2)\sqrt{y^5}, \text{ или}$$

$$2y^5+3y^6+1+3y+3y^2+y^3=(y^5+3y^2+6y+3)\sqrt{y^5}.$$

№18086.

Это возвышаю въ квадратъ, и получаю:

$$(3y^6+2y^5+y^3+3y^2+3y+1)^2=(y^5+3y^2+6y+3)^2y^5,$$

уравненіе 15-й степени. Оно удовлетворяется, полагая $y=1$; стало-быть, $x=4-y^5=3$, что удовлетворяетъ данному уравненію, и есть его корнемъ.

Вотъ случаи, въ которыхъ мы можемъ приводить ирраціональныя уравненія въ раціональныя, и отыскивать ихъ корни, тѣми способами, какіе намъ извѣстны изъ всего изложеннаго въ этой книгѣ.

# ТАБЛИЦЫ

ПЕРВЫХЪ ПЯТИ СТЕПЕНЕЙ ТРЕХЗНАЧНЫХЪ ЧИСЕЛЪ ОТЪ 0 ДО 1000, И ПЕРВЫХЪ ДЕСЯТИ СТЕПЕНЕЙ ДВУЗНАЧНЫХЪ ЧИСЕЛЪ ОТЪ 0 ДО 100.

## Вторыя степени чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 10000 | 40000 | 90000 | 1 60000 |
| 1 | 1 | 10201 | 40401 | 90601 | 1 60801 |
| 2 | 4 | 10404 | 40804 | 91204 | 1 61604 |
| 3 | 9 | 10609 | 41209 | 91809 | 1 62409 |
| 4 | 16 | 10816 | 41616 | 92416 | 1 63216 |
| 5 | 25 | 11025 | 42025 | 93025 | 1 64025 |
| 6 | 36 | 11236 | 42436 | 93636 | 1 64836 |
| 7 | 49 | 11449 | 42849 | 94249 | 1 65649 |
| 8 | 64 | 11664 | 43264 | 94864 | 1 66464 |
| 9 | 81 | 11881 | 43681 | 95481 | 1 67281 |
| 10 | 100 | 12100 | 44100 | 96100 | 1 68100 |
| 11 | 121 | 12321 | 44521 | 96721 | 1 68921 |
| 12 | 144 | 12544 | 44944 | 97344 | 1 69744 |
| 13 | 169 | 12769 | 45369 | 97969 | 1 70569 |
| 14 | 196 | 12996 | 45796 | 98596 | 1 71396 |
| 15 | 225 | 13225 | 46225 | 99225 | 1 72225 |
| 16 | 256 | 13456 | 46656 | 99856 | 1 73056 |
| 17 | 289 | 13689 | 47089 | 1 00489 | 1 73889 |
| 18 | 324 | 13924 | 47524 | 1 01124 | 1 74724 |
| 19 | 361 | 14161 | 47961 | 1 01761 | 1 75561 |
| 20 | 400 | 14400 | 48400 | 1 02400 | 1 76400 |
| 21 | 441 | 14641 | 48841 | 1 03041 | 1 77241 |
| 22 | 484 | 14884 | 49284 | 1 03684 | 1 78084 |
| 23 | 529 | 15129 | 49729 | 1 04329 | 1 78929 |
| 24 | 576 | 15376 | 50176 | 1 04976 | 1 79776 |
| 25 | 625 | 15625 | 50625 | 1 05625 | 1 80625 |
| 26 | 676 | 15876 | 51076 | 1 06276 | 1 81476 |
| 27 | 729 | 16129 | 51529 | 1 06929 | 1 82329 |
| 28 | 784 | 16384 | 51984 | 1 07584 | 1 83184 |
| 29 | 841 | 16641 | 52441 | 1 08241 | 1 84041 |
| 30 | 900 | 16900 | 52900 | 1 08900 | 1 84900 |
| 31 | 961 | 17161 | 53361 | 1 09561 | 1 85761 |
| 32 | 1024 | 17424 | 53824 | 1 10224 | 1 86624 |
| 33 | 1089 | 17689 | 54289 | 1 10889 | 1 87489 |
| 34 | 1156 | 17956 | 54756 | 1 11556 | 1 88356 |
| 35 | 1225 | 18225 | 55225 | 1 12225 | 1 89225 |
| 36 | 1296 | 18496 | 55696 | 1 12896 | 1 90096 |
| 37 | 1369 | 18769 | 56169 | 1 13569 | 1 90969 |
| 38 | 1444 | 19044 | 56644 | 1 14244 | 1 91844 |
| 39 | 1521 | 19321 | 57121 | 1 14921 | 1 92721 |
| 40 | 1600 | 19600 | 57600 | 1 15600 | 1 93600 |
| 41 | 1681 | 19881 | 58081 | 1 16281 | 1 94481 |
| 42 | 1764 | 20164 | 58564 | 1 16964 | 1 95364 |
| 43 | 1849 | 20449 | 59049 | 1 17649 | 1 96249 |
| 44 | 1936 | 20736 | 59536 | 1 18336 | 1 97136 |
| 45 | 2025 | 21025 | 60025 | 1 19025 | 1 98025 |
| 46 | 2116 | 21316 | 60516 | 1 19716 | 1 98916 |
| 47 | 2209 | 21609 | 61009 | 1 20409 | 1 99809 |
| 48 | 2304 | 21904 | 61504 | 1 21104 | 2 00704 |
| 49 | 2401 | 22201 | 62001 | 1 21801 | 2 01601 |

## Вторыя степени чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 2500 | 22500 | 62500 | 1 22500 | 2 02500 |
| 51 | 2601 | 22801 | 63001 | 1 23201 | 2 03401 |
| 52 | 2704 | 23104 | 63504 | 1 23904 | 2 04304 |
| 53 | 2809 | 23409 | 64009 | 1 24609 | 2 05209 |
| 54 | 2916 | 23716 | 64516 | 1 25316 | 2 06116 |
| 55 | 3025 | 24025 | 65025 | 1 26025 | 2 07025 |
| 56 | 3136 | 24336 | 65536 | 1 26736 | 2 07936 |
| 57 | 3249 | 24649 | 66049 | 1 27449 | 2 08849 |
| 58 | 3364 | 24964 | 66564 | 1 28164 | 2 09764 |
| 59 | 3481 | 25281 | 67081 | 1 28881 | 2 10681 |
| 60 | 3600 | 25600 | 67600 | 1 29600 | 2 11600 |
| 61 | 3721 | 25921 | 68121 | 1 30321 | 2 12521 |
| 62 | 3844 | 26244 | 68644 | 1 31044 | 2 13444 |
| 63 | 3969 | 26569 | 69169 | 1 31769 | 2 14369 |
| 64 | 4096 | 26896 | 69696 | 1 32496 | 2 15296 |
| 65 | 4225 | 27225 | 70225 | 1 33225 | 2 16225 |
| 66 | 4356 | 27556 | 70756 | 1 33956 | 2 17156 |
| 67 | 4489 | 27889 | 71289 | 1 34689 | 2 18089 |
| 68 | 4624 | 28224 | 71824 | 1 35424 | 2 19024 |
| 69 | 4761 | 28561 | 72361 | 1 36161 | 2 19961 |
| 70 | 4900 | 28900 | 72900 | 1 36900 | 2 20900 |
| 71 | 5041 | 29241 | 73441 | 1 37641 | 2 21841 |
| 72 | 5184 | 29584 | 73984 | 1 38384 | 2 22784 |
| 73 | 5329 | 29929 | 74529 | 1 39129 | 2 23729 |
| 74 | 5476 | 30276 | 75076 | 1 39876 | 2 24676 |
| 75 | 5625 | 30625 | 75625 | 1 40625 | 2 25625 |
| 76 | 5776 | 30976 | 76176 | 1 41376 | 2 26576 |
| 77 | 5929 | 31329 | 76729 | 1 42129 | 2 27529 |
| 78 | 6084 | 31684 | 77284 | 1 42884 | 2 28484 |
| 79 | 6241 | 32041 | 77841 | 1 43641 | 2 29441 |
| 80 | 6400 | 32400 | 78400 | 1 44400 | 2 30400 |
| 81 | 6561 | 32761 | 78961 | 1 45161 | 2 31361 |
| 82 | 6724 | 33124 | 79524 | 1 45924 | 2 32324 |
| 83 | 6889 | 33489 | 80089 | 1 46689 | 2 33289 |
| 84 | 7056 | 33856 | 80656 | 1 47456 | 2 34256 |
| 85 | 7225 | 34225 | 81225 | 1 48225 | 2 35225 |
| 86 | 7396 | 34596 | 81796 | 1 48996 | 2 36196 |
| 87 | 7569 | 34969 | 82369 | 1 49769 | 2 37169 |
| 88 | 7744 | 35344 | 82944 | 1 50544 | 2 38144 |
| 89 | 7921 | 35721 | 83521 | 1 51321 | 2 39121 |
| 90 | 8100 | 36100 | 84100 | 1 52100 | 2 40100 |
| 91 | 8281 | 36481 | 84681 | 1 52881 | 2 41081 |
| 92 | 8464 | 36864 | 85264 | 1 53664 | 2 42064 |
| 93 | 8649 | 37249 | 85849 | 1 54449 | 2 43049 |
| 94 | 8836 | 37636 | 86436 | 1 55236 | 2 44036 |
| 95 | 9025 | 38025 | 87025 | 1 56025 | 2 45025 |
| 96 | 9216 | 38416 | 87616 | 1 56816 | 2 46016 |
| 97 | 9409 | 38809 | 88209 | 1 57609 | 2 47009 |
| 98 | 9604 | 39204 | 88804 | 1 58404 | 2 48004 |
| 99 | 9801 | 39601 | 89401 | 1 59201 | 2 49001 |

## Вторыя степени чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 50000 | 3 60000 | 4 90000 | 6 40000 | 8 10000 |
| 1 | 2 51001 | 3 61201 | 4 91401 | 6 41601 | 8 11801 |
| 2 | 2 52004 | 3 62404 | 4 92804 | 6 43204 | 8 13604 |
| 3 | 2 53009 | 3 63609 | 4 94209 | 6 44809 | 8 15409 |
| 4 | 2 54016 | 3 64816 | 4 95616 | 6 46416 | 8 17216 |
| 5 | 2 55025 | 3 66025 | 4 97025 | 6 48025 | 8 19025 |
| 6 | 2 56036 | 3 67236 | 4 98436 | 6 49636 | 8 20836 |
| 7 | 2 57049 | 3 68449 | 4 99849 | 6 51249 | 8 22649 |
| 8 | 2 58064 | 3 69664 | 5 01264 | 6 52864 | 8 24464 |
| 9 | 2 59081 | 3 70881 | 5 02681 | 6 54481 | 8 26281 |
| 10 | 2 60100 | 3 72100 | 5 04100 | 6 56100 | 8 28100 |
| 11 | 2 64121 | 3 73321 | 5 05521 | 6 57721 | 8 29921 |
| 12 | 2 62144 | 3 74544 | 5 06944 | 6 59344 | 8 31744 |
| 13 | 2 63169 | 3 75769 | 5 08369 | 6 60969 | 8 33569 |
| 14 | 2 64196 | 3 76996 | 5 09796 | 6 62596 | 8 35396 |
| 15 | 2 65225 | 3 78225 | 5 11225 | 6 64225 | 8 37225 |
| 16 | 2 66256 | 3 79456 | 5 12656 | 6 65856 | 8 39056 |
| 17 | 2 67289 | 3 80689 | 5 14089 | 6 67489 | 8 40889 |
| 18 | 2 68324 | 3 81924 | 5 15524 | 6 69124 | 8 42724 |
| 19 | 2 69361 | 3 83161 | 5 16961 | 6 70761 | 8 44561 |
| 20 | 2 70400 | 3 84400 | 5 18400 | 6 72400 | 8 46400 |
| 21 | 2 71441 | 3 85641 | 5 19841 | 6 74041 | 8 48241 |
| 22 | 2 72484 | 3 86884 | 5 21284 | 6 75684 | 8 50084 |
| 23 | 2 73529 | 3 88129 | 5 22729 | 6 77329 | 8 51929 |
| 24 | 2 74576 | 3 89376 | 5 24176 | 6 78976 | 8 53776 |
| 25 | 2 75625 | 3 90625 | 5 25625 | 6 80625 | 8 55625 |
| 26 | 2 76676 | 3 91876 | 5 27076 | 6 82276 | 8 57476 |
| 27 | 2 77729 | 3 93129 | 5 28529 | 6 83929 | 8 59329 |
| 28 | 2 78784 | 3 94384 | 5 29984 | 6 85584 | 8 61184 |
| 29 | 2 79841 | 3 95641 | 5 31441 | 6 87241 | 8 63041 |
| 30 | 2 80900 | 3 96900 | 5 32900 | 6 88900 | 8 64900 |
| 31 | 2 81961 | 3 98161 | 5 34361 | 6 90561 | 8 66761 |
| 32 | 2 83024 | 3 99424 | 5 35824 | 6 92224 | 8 68624 |
| 33 | 2 84089 | 4 00689 | 5 37289 | 6 93889 | 8 70489 |
| 34 | 2 85136 | 4 01956 | 5 38756 | 6 95556 | 8 72356 |
| 35 | 2 86225 | 4 03225 | 5 40225 | 6 97225 | 8 74225 |
| 36 | 2 87296 | 4 04496 | 5 41696 | 6 98896 | 8 76096 |
| 37 | 2 88369 | 4 05769 | 5 43169 | 7 00569 | 8 77969 |
| 38 | 2 89444 | 4 07044 | 5 44644 | 7 02244 | 8 79844 |
| 39 | 2 90521 | 4 08321 | 5 46121 | 7 03921 | 8 81721 |
| 40 | 2 91600 | 4 09600 | 5 47600 | 7 05600 | 8 83600 |
| 41 | 2 92681 | 4 10881 | 5 49081 | 7 07281 | 8 85481 |
| 42 | 2 93764 | 4 12164 | 5 50564 | 7 08964 | 8 87364 |
| 43 | 2 94849 | 4 13449 | 5 52049 | 7 10649 | 8 89249 |
| 44 | 2 95936 | 4 14736 | 5 53536 | 7 12336 | 8 91136 |
| 45 | 2 97025 | 4 16025 | 5 55025 | 7 14025 | 8 93025 |
| 46 | 2 98116 | 4 17316 | 5 56516 | 7 15716 | 8 94916 |
| 47 | 2 99209 | 4 18609 | 5 58009 | 7 17409 | 8 96809 |
| 48 | 3 00304 | 4 19904 | 5 59504 | 7 19104 | 8 98704 |
| 49 | 3 01401 | 4 21201 | 5 61001 | 7 20801 | 9 00601 |

## Вторыя степени чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 3 02500 | 4 22500 | 5 62500 | 7 22500 | 9 02500 |
| 51 | 3 03601 | 4 23801 | 5 64001 | 7 24201 | 9 04401 |
| 52 | 3 04704 | 4 25104 | 5 65504 | 7 25904 | 9 06304 |
| 53 | 3 05809 | 4 26409 | 5 67009 | 7 27609 | 9 08209 |
| 54 | 3 06916 | 4 27716 | 5 68516 | 7 29316 | 9 10116 |
| 55 | 3 08025 | 4 29025 | 5 70025 | 7 31025 | 9 12025 |
| 56 | 3 09136 | 4 30336 | 5 71536 | 7 32736 | 9 13936 |
| 57 | 3 10249 | 4 31649 | 5 73049 | 7 34449 | 9 15849 |
| 58 | 3 11364 | 4 32964 | 5 74564 | 7 36164 | 9 17764 |
| 59 | 3 12481 | 4 34281 | 5 76081 | 7 37881 | 9 19681 |
| 60 | 3 13600 | 4 35600 | 5 77600 | 7 39600 | 9 21600 |
| 61 | 3 14721 | 4 36921 | 5 79121 | 7 41321 | 9 23521 |
| 62 | 3 15844 | 4 38244 | 5 80644 | 7 43044 | 9 25444 |
| 63 | 3 16969 | 4 39569 | 5 82169 | 7 44769 | 9 27369 |
| 64 | 3 18096 | 4 40896 | 5 83696 | 7 46496 | 9 29296 |
| 65 | 3 19225 | 4 42225 | 5 85225 | 7 48225 | 9 31225 |
| 66 | 3 20356 | 4 43556 | 5 86756 | 7 49956 | 9 33156 |
| 67 | 3 21489 | 4 44889 | 5 88289 | 7 51689 | 9 35089 |
| 68 | 3 22624 | 4 46224 | 5 89824 | 7 53424 | 9 37024 |
| 69 | 3 23761 | 4 47561 | 5 91361 | 7 55161 | 9 38961 |
| 70 | 3 24900 | 4 48900 | 5 92900 | 7 56900 | 9 40900 |
| 71 | 3 26041 | 4 50241 | 5 94441 | 7 58641 | 9 42841 |
| 72 | 3 27184 | 4 51584 | 5 95984 | 7 60384 | 9 44784 |
| 73 | 3 28329 | 4 52929 | 5 97529 | 7 62129 | 9 46729 |
| 74 | 3 29476 | 4 54276 | 5 99076 | 7 63876 | 9 48676 |
| 75 | 3 30625 | 4 55625 | 6 00625 | 7 65625 | 9 50625 |
| 76 | 3 31776 | 4 56976 | 6 02176 | 7 67376 | 9 52576 |
| 77 | 3 32929 | 4 58329 | 6 03729 | 7 69129 | 9 54529 |
| 78 | 3 34084 | 4 59684 | 6 05284 | 7 70884 | 9 56484 |
| 79 | 3 35241 | 4 61041 | 6 06841 | 7 72641 | 9 58441 |
| 80 | 3 36400 | 4 62400 | 6 08400 | 7 74400 | 9 60400 |
| 81 | 3 37561 | 4 63761 | 6 09961 | 7 76161 | 9 62361 |
| 82 | 3 38724 | 4 65124 | 6 11524 | 7 77924 | 9 64324 |
| 83 | 3 39889 | 4 66489 | 6 13089 | 7 79689 | 9 66289 |
| 84 | 3 41056 | 4 67856 | 6 14656 | 7 81456 | 9 68256 |
| 85 | 3 42225 | 4 69225 | 6 16225 | 7 83225 | 9 70225 |
| 86 | 3 43396 | 4 70596 | 6 17796 | 7 84996 | 9 72196 |
| 87 | 3 44569 | 4 71969 | 6 19369 | 7 86769 | 9 74169 |
| 88 | 3 45744 | 4 73344 | 6 20944 | 7 88544 | 9 76144 |
| 89 | 3 46921 | 4 74721 | 6 22521 | 7 90321 | 9 78121 |
| 90 | 3 48100 | 4 76100 | 6 24100 | 7 92100 | 9 80100 |
| 91 | 3 49281 | 4 77481 | 6 25681 | 7 93881 | 9 82081 |
| 92 | 3 50464 | 4 78864 | 6 27264 | 7 95664 | 9 84064 |
| 93 | 3 51649 | 4 80249 | 6 28849 | 7 97449 | 9 86049 |
| 94 | 3 52836 | 4 81636 | 6 30436 | 7 99236 | 9 88036 |
| 95 | 3 54025 | 4 83025 | 6 32025 | 8 01025 | 9 90025 |
| 96 | 3 55216 | 4 84416 | 6 33616 | 8 02816 | 9 92016 |
| 97 | 3 56409 | 4 85809 | 6 35209 | 8 04609 | 9 94009 |
| 98 | 3 57604 | 4 87204 | 6 36804 | 8 06404 | 9 96004 |
| 99 | 3 58801 | 4 88601 | 6 38401 | 8 08201 | 9 98001 |

## Третья степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 10 00000 | 80 00000 | 270 00000 | 640 00000 |
| 1 | 1 | 10 30301 | 81 20601 | 272 70901 | 644 81201 |
| 2 | 8 | 10 61208 | 82 42408 | 275 43608 | 649 64808 |
| 3 | 27 | 10 92727 | 83 65427 | 278 18127 | 654 50827 |
| 4 | 64 | 11 24864 | 84 89664 | 280 94464 | 659 39264 |
| 5 | 125 | 11 57625 | 86 15125 | 283 72625 | 664 30125 |
| 6 | 216 | 11 91016 | 87 41816 | 286 52616 | 669 23416 |
| 7 | 343 | 12 25043 | 88 69743 | 289 34443 | 674 19143 |
| 8 | 512 | 12 59712 | 89 98912 | 292 18112 | 679 17312 |
| 9 | 729 | 12 95029 | 91 29329 | 295 03629 | 684 17929 |
| 10 | 1000 | 13 31000 | 92 61000 | 297 91000 | 689 21000 |
| 11 | 1331 | 13 67631 | 93 93931 | 300 80231 | 694 26531 |
| 12 | 1728 | 14 04928 | 95 28128 | 303 71328 | 699 34528 |
| 13 | 2197 | 14 42897 | 96 63597 | 306 64297 | 704 44997 |
| 14 | 2744 | 14 81544 | 98 00344 | 309 59144 | 709 57944 |
| 15 | 3375 | 15 20875 | 99 38375 | 312 55875 | 714 73375 |
| 16 | 4096 | 15 60896 | 100 77696 | 315 54496 | 719 91296 |
| 17 | 4913 | 16 01613 | 102 18313 | 318 55013 | 725 11713 |
| 18 | 5832 | 16 43032 | 103 60232 | 321 57432 | 730 34632 |
| 19 | 6859 | 16 85159 | 105 03459 | 324 61759 | 735 60059 |
| 20 | 8000 | 17 28000 | 106 48000 | 327 68000 | 740 88000 |
| 21 | 9261 | 17 71561 | 107 93861 | 330 76161 | 746 18461 |
| 22 | 10648 | 18 15848 | 109 41048 | 333 86248 | 751 51448 |
| 23 | 12167 | 18 60867 | 110 89567 | 336 98267 | 756 86967 |
| 24 | 13824 | 19 06624 | 112 39424 | 340 12224 | 762 25024 |
| 25 | 15625 | 19 53125 | 113 90625 | 343 28125 | 767 65625 |
| 26 | 17576 | 20 00376 | 115 43176 | 346 45976 | 773 08776 |
| 27 | 19683 | 20 48383 | 116 97083 | 349 65783 | 778 54483 |
| 28 | 21952 | 20 97152 | 118 52352 | 352 87552 | 784 02752 |
| 29 | 24389 | 21 46689 | 120 08989 | 356 11289 | 789 53589 |
| 30 | 27000 | 21 97000 | 121 67000 | 359 37000 | 795 07000 |
| 31 | 29791 | 22 48091 | 123 26391 | 362 64691 | 800 62991 |
| 32 | 32768 | 22 99968 | 124 87168 | 365 94368 | 806 21568 |
| 33 | 35937 | 23 52637 | 126 49337 | 369 26037 | 811 82737 |
| 34 | 39304 | 24 06104 | 128 12904 | 372 59704 | 817 46504 |
| 35 | 42875 | 24 60375 | 129 77875 | 375 95375 | 823 12875 |
| 36 | 46656 | 25 15456 | 131 44256 | 379 33056 | 828 81856 |
| 37 | 50653 | 25 71353 | 133 12053 | 382 72753 | 834 53453 |
| 38 | 54872 | 26 28072 | 134 81272 | 386 14472 | 840 27672 |
| 39 | 59319 | 26 85619 | 136 51919 | 389 58219 | 846 04519 |
| 40 | 64000 | 27 44000 | 138 24000 | 393 04000 | 851 84000 |
| 41 | 68921 | 28 03221 | 139 97521 | 396 51821 | 857 66121 |
| 42 | 74088 | 28 63288 | 141 72488 | 400 01688 | 863 50888 |
| 43 | 79507 | 29 24207 | 143 48907 | 403 53607 | 869 38307 |
| 44 | 85184 | 29 85984 | 145 26784 | 407 07584 | 875 28384 |
| 45 | 91125 | 30 48625 | 147 06125 | 410 63625 | 881 21125 |
| 46 | 97336 | 31 12136 | 148 86936 | 414 21736 | 887 16536 |
| 47 | 1 03823 | 31 76523 | 150 69223 | 417 81923 | 893 14623 |
| 48 | 1 10592 | 32 41792 | 152 52992 | 421 44192 | 899 15392 |
| 49 | 1 17649 | 33 07949 | 154 38249 | 425 08549 | 905 18849 |

## Третья степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 1 25000 | 33 75000 | 156 25000 | 428 75000 | 911 25000 |
| 51 | 1 32651 | 34 42951 | 158 13251 | 432 43551 | 917 33851 |
| 52 | 1 40608 | 35 11808 | 160 03008 | 436 14208 | 923 45408 |
| 53 | 1 48877 | 35 81577 | 161 94277 | 439 86977 | 929 59677 |
| 54 | 1 57464 | 36 52264 | 163 87064 | 443 61864 | 935 76664 |
| 55 | 1 66375 | 37 23875 | 165 81375 | 447 38875 | 941 96375 |
| 56 | 1 75616 | 37 96416 | 167 77216 | 451 18016 | 948 18816 |
| 57 | 1 85193 | 38 69893 | 169 74593 | 454 99293 | 954 43993 |
| 58 | 1 95112 | 39 44312 | 171 73512 | 458 82712 | 960 71912 |
| 59 | 2 05379 | 40 19679 | 173 73979 | 462 68279 | 967 02579 |
| 60 | 2 16000 | 40 96000 | 175 76000 | 466 56000 | 973 36000 |
| 61 | 2 26981 | 41 73281 | 177 79581 | 470 45881 | 979 72181 |
| 62 | 2 38328 | 42 51528 | 179 84728 | 474 37928 | 986 11128 |
| 63 | 2 50047 | 43 30747 | 181 91447 | 478 32147 | 992 52847 |
| 64 | 2 62144 | 44 10944 | 183 99744 | 482 28544 | 998 97344 |
| 65 | 2 74625 | 44 92125 | 186 09625 | 486 27125 | 1005 44625 |
| 66 | 2 87496 | 45 74296 | 188 21096 | 490 27896 | 1011 94696 |
| 67 | 3 00763 | 46 57463 | 190 34163 | 494 30863 | 1018 47563 |
| 68 | 3 14432 | 47 41632 | 192 48832 | 498 36032 | 1025 03232 |
| 69 | 3 28509 | 48 26809 | 194 65109 | 502 43409 | 1031 61709 |
| 70 | 3 43000 | 49 13000 | 196 83000 | 506 53000 | 1038 23000 |
| 71 | 3 57911 | 50 00211 | 199 02511 | 510 64811 | 1044 87111 |
| 72 | 3 73248 | 50 88448 | 201 23648 | 514 78848 | 1051 54048 |
| 73 | 3 89017 | 51 77717 | 203 46417 | 518 95117 | 1058 23817 |
| 74 | 4 05224 | 52 68024 | 205 70824 | 523 13624 | 1064 96424 |
| 75 | 4 21875 | 53 59375 | 207 96875 | 527 34375 | 1071 71875 |
| 76 | 4 38976 | 54 51776 | 210 24576 | 531 57376 | 1078 50176 |
| 77 | 4 56533 | 55 45233 | 212 53933 | 535 82633 | 1085 31333 |
| 78 | 4 74552 | 56 39752 | 214 84952 | 540 10152 | 1092 15352 |
| 79 | 4 93039 | 57 35339 | 217 17639 | 544 39939 | 1099 02239 |
| 80 | 5 12000 | 58 32000 | 219 52000 | 548 72000 | 1105 92000 |
| 81 | 5 31441 | 59 29741 | 221 88041 | 553 06341 | 1112 84641 |
| 82 | 5 51368 | 60 28568 | 224 25768 | 557 42968 | 1119 80168 |
| 83 | 5 71787 | 61 28487 | 226 65187 | 561 81887 | 1126 78587 |
| 84 | 5 92704 | 62 29504 | 229 06304 | 566 23104 | 1133 79904 |
| 85 | 6 14125 | 63 31625 | 231 49125 | 570 66625 | 1140 84125 |
| 86 | 6 36056 | 64 34856 | 233 93656 | 575 12456 | 1147 91256 |
| 87 | 6 58503 | 65 39203 | 236 39903 | 579 60603 | 1155 01303 |
| 88 | 6 81472 | 66 44672 | 238 87872 | 584 11072 | 1162 14272 |
| 89 | 7 04969 | 67 51269 | 241 37569 | 588 63869 | 1169 30169 |
| 90 | 7 29000 | 68 59000 | 243 89000 | 593 19000 | 1176 49000 |
| 91 | 7 53571 | 69 67871 | 246 42171 | 597 76471 | 1183 70771 |
| 92 | 7 78688 | 70 77888 | 248 97088 | 602 36288 | 1190 95488 |
| 93 | 8 04357 | 71 89057 | 251 53757 | 606 98457 | 1198 23157 |
| 94 | 8 30584 | 73 01384 | 254 12184 | 611 62984 | 1205 53784 |
| 95 | 8 57375 | 74 14875 | 256 72375 | 616 29875 | 1212 87375 |
| 96 | 8 84736 | 75 29536 | 259 34336 | 620 99136 | 1220 23936 |
| 97 | 9 12673 | 76 45373 | 261 98073 | 625 70773 | 1227 63473 |
| 98 | 9 41192 | 77 62392 | 264 63592 | 630 44792 | 1235 05992 |
| 99 | 9 70299 | 78 80599 | 267 30899 | 635 21199 | 1242 51499 |

## Третья степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1250 00000 | 2160 00000 | 3430 00000 | 5120 00000 | 7290 00000 |
| 1 | 1257 51501 | 2170 81801 | 3444 72101 | 5139 22401 | 7314 32701 |
| 2 | 1265 06008 | 2181 67208 | 3459 48408 | 5158 49608 | 7338 70808 |
| 3 | 1272 63527 | 2192 56227 | 3474 28927 | 5177 81627 | 7363 14327 |
| 4 | 1280 24064 | 2203 48864 | 3489 13664 | 5197 18464 | 7387 63264 |
| 5 | 1287 87625 | 2214 45125 | 3504 02625 | 5216 60125 | 7412 17625 |
| 6 | 1295 54216 | 2225 45016 | 3518 95816 | 5236 06616 | 7436 77416 |
| 7 | 1303 23843 | 2236 48543 | 3533 93243 | 5255 57943 | 7461 42643 |
| 8 | 1310 96512 | 2247 55712 | 3548 94912 | 5275 14112 | 7486 13312 |
| 9 | 1318 72229 | 2258 66529 | 3564 00829 | 5294 75129 | 7510 89429 |
| 10 | 1326 51000 | 2269 81000 | 3579 11000 | 5314 41000 | 7535 71000 |
| 11 | 1334 32831 | 2280 99131 | 3594 25431 | 5334 11731 | 7560 58031 |
| 12 | 1342 17728 | 2292 20928 | 3609 44128 | 5353 87328 | 7585 50528 |
| 13 | 1350 05697 | 2303 46397 | 3624 67097 | 5373 67797 | 7610 48497 |
| 14 | 1357 96744 | 2314 75544 | 3639 94344 | 5393 53114 | 7635 51944 |
| 15 | 1365 90875 | 2326 08375 | 3655 25875 | 5413 43375 | 7660 60875 |
| 16 | 1373 88096 | 2337 44896 | 3670 61696 | 5433 38496 | 7685 75296 |
| 17 | 1381 88413 | 2348 85113 | 3686 01813 | 5453 38513 | 7710 95213 |
| 18 | 1389 91832 | 2360 29032 | 3701 46232 | 5473 43432 | 7736 20632 |
| 19 | 1397 98359 | 2371 76659 | 3716 94959 | 5493 53259 | 7761 51559 |
| 20 | 1406 08000 | 2383 28000 | 3732 48000 | 5513 68000 | 7786 88000 |
| 21 | 1414 20761 | 2394 83061 | 3748 05361 | 5533 87661 | 7812 29961 |
| 22 | 1422 36648 | 2406 41848 | 3763 67048 | 5554 12248 | 7837 77448 |
| 23 | 1430 55667 | 2418 04367 | 3779 33067 | 5574 41767 | 7863 30467 |
| 24 | 1438 77824 | 2429 70624 | 3795 03424 | 5594 76224 | 7888 89024 |
| 25 | 1447 03125 | 2441 40625 | 3810 78125 | 5615 15625 | 7914 53125 |
| 26 | 1455 31576 | 2453 14376 | 3826 57176 | 5635 59976 | 7940 22776 |
| 27 | 1463 63183 | 2464 91883 | 3842 40583 | 5656 09283 | 7965 97983 |
| 28 | 1471 97952 | 2476 73152 | 3858 28352 | 5676 63552 | 7991 78752 |
| 29 | 1480 35889 | 2488 58189 | 3874 20489 | 5797 22789 | 8017 65089 |
| 30 | 1488 77000 | 2500 47000 | 3890 17000 | 5717 87000 | 8043 57000 |
| 31 | 1497 21291 | 2512 39591 | 3906 17891 | 5738 56191 | 8069 54491 |
| 32 | 1505 68768 | 2524 35968 | 3922 23168 | 5759 30368 | 8095 57568 |
| 33 | 1514 19437 | 2536 36137 | 3938 32837 | 5780 09537 | 8121 66237 |
| 34 | 1522 73304 | 2548 40104 | 3954 46904 | 5800 93704 | 8147 80504 |
| 35 | 1531 30375 | 2560 47875 | 3970 65375 | 5821 82875 | 8174 00375 |
| 36 | 1539 90656 | 2572 59456 | 3986 88256 | 5842 77056 | 8200 25856 |
| 37 | 1548 54153 | 2584 74853 | 4003 15553 | 5863 76253 | 8226 56953 |
| 38 | 1557 20872 | 2596 94072 | 4019 47272 | 5884 80472 | 8252 93672 |
| 39 | 1565 90819 | 2609 17119 | 4035 83419 | 5905 89719 | 8279 36019 |
| 40 | 1574 64000 | 2621 44000 | 4052 24000 | 5927 04000 | 8305 84000 |
| 41 | 1583 40421 | 2633 74721 | 4068 69021 | 5948 23321 | 8332 37621 |
| 42 | 1592 20088 | 2646 09288 | 4085 18488 | 5969 47688 | 8358 96888 |
| 43 | 1601 03007 | 2658 47707 | 4101 72407 | 5990 77107 | 8385 61807 |
| 44 | 1609 89184 | 2670 89984 | 4118 30784 | 6012 11584 | 8412 32384 |
| 45 | 1618 78625 | 2683 36125 | 4134 93625 | 6033 51125 | 8439 08625 |
| 46 | 1627 71336 | 2695 86136 | 4151 60936 | 6054 95736 | 8465 90536 |
| 47 | 1636 67323 | 2708 40023 | 4168 32723 | 6076 45423 | 8492 78123 |
| 48 | 1645 66592 | 2720 97792 | 4185 08992 | 6098 00192 | 8519 71392 |
| 49 | 1654 69149 | 2733 59449 | 4201 89749 | 6119 60049 | 8546 70349 |

## Третья степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 1663 75000 | 2746 25000 | 4218 75000 | 6141 25000 | 8573 75000 |
| 51 | 1672 84151 | 2758 94451 | 4235 64751 | 6162 95051 | 8600 85351 |
| 52 | 1681 96608 | 2771 67808 | 4252 59008 | 6184 70208 | 8628 01408 |
| 53 | 1691 12377 | 2784 45077 | 4269 57777 | 6206 50477 | 8655 23177 |
| 54 | 1700 31464 | 2797 26264 | 4286 61064 | 6228 35864 | 8682 50664 |
| 55 | 1709 53875 | 2810 11375 | 4303 68875 | 6250 26375 | 8709 83875 |
| 56 | 1718 79616 | 2823 00416 | 4320 81216 | 6272 22016 | 8737 22816 |
| 57 | 1728 08693 | 2835 93393 | 4337 98093 | 6294 22793 | 8764 67493 |
| 58 | 1737 41112 | 2848 90312 | 4355 19512 | 6316 28712 | 8792 17912 |
| 59 | 1746 76879 | 2861 91179 | 4372 45479 | 6338 39779 | 8819 74079 |
| 60 | 1756 16000 | 2874 96000 | 4389 76000 | 6360 56000 | 8847 36000 |
| 61 | 1765 58481 | 2888 04781 | 4407 11081 | 6382 77381 | 8875 03681 |
| 62 | 1775 04328 | 2901 17528 | 4424 50728 | 6405 03928 | 8902 77128 |
| 63 | 1784 53547 | 2914 34247 | 4441 94947 | 6427 35647 | 8930 56347 |
| 64 | 1794 06144 | 2927 54944 | 4459 43744 | 6449 72544 | 8958 41344 |
| 65 | 1803 62125 | 2940 79625 | 4476 97125 | 6472 14625 | 8986 32125 |
| 66 | 1813 21496 | 2954 08296 | 4494 55096 | 6494 61896 | 9014 28696 |
| 67 | 1822 84263 | 2967 40963 | 4512 17663 | 6517 14363 | 9042 31063 |
| 68 | 1832 50432 | 2980 77632 | 4529 84832 | 6539 72032 | 9070 39232 |
| 69 | 1842 20009 | 2994 18309 | 4547 56609 | 6562 34909 | 9098 53209 |
| 70 | 1851 93000 | 3007 63000 | 4565 33000 | 6585 03000 | 9126 73000 |
| 71 | 1861 69411 | 3021 11711 | 4583 14011 | 6607 76311 | 9154 98611 |
| 72 | 1871 49248 | 3034 64448 | 4600 99648 | 6630 54848 | 9183 30048 |
| 73 | 1881 32517 | 3048 21217 | 4618 89917 | 6653 38617 | 9211 67317 |
| 74 | 1891 19224 | 3061 82024 | 4636 84824 | 6676 27624 | 9240 10424 |
| 75 | 1901 09375 | 3075 46875 | 4654 84375 | 6699 21875 | 9268 59375 |
| 76 | 1911 02976 | 3089 15776 | 4672 88576 | 6722 21376 | 9297 14176 |
| 77 | 1921 00033 | 3102 88733 | 4690 97433 | 6747 26133 | 9325 74833 |
| 78 | 1931 00552 | 3116 65752 | 4709 10952 | 6768 36152 | 9354 41352 |
| 79 | 1941 04539 | 3130 46839 | 4727 29139 | 6791 51439 | 9383 13739 |
| 80 | 1951 12000 | 3144 32000 | 4745 52000 | 6814 72000 | 9411 92000 |
| 81 | 1961 22941 | 3158 21241 | 4763 79541 | 6837 97841 | 9440 76141 |
| 82 | 1971 37368 | 3172 14568 | 4782 11768 | 6861 28968 | 9469 66168 |
| 83 | 1981 55287 | 3186 11987 | 4800 48687 | 6884 65387 | 9498 62087 |
| 84 | 1991 76704 | 3200 13504 | 4818 90304 | 6908 07104 | 9527 63904 |
| 85 | 2002 01625 | 3214 19125 | 4837 36625 | 6931 54125 | 9556 71625 |
| 86 | 2012 30056 | 3228 28856 | 4855 87656 | 6955 06456 | 9585 85256 |
| 87 | 2022 62003 | 3242 42703 | 4874 43403 | 6978 64103 | 9615 04803 |
| 88 | 2032 97472 | 3256 60672 | 4893 03872 | 7002 27072 | 9644 30272 |
| 89 | 2043 36469 | 3270 82769 | 4911 69069 | 7025 95369 | 9673 61669 |
| 90 | 2053 79000 | 3285 09000 | 4930 39000 | 7049 69000 | 9702 99000 |
| 91 | 2064 25071 | 3299 39371 | 4949 13671 | 7073 47971 | 9732 42271 |
| 92 | 2074 74688 | 3313 37888 | 4967 93088 | 7097 32288 | 9761 91488 |
| 93 | 2085 27857 | 3328 12557 | 4986 77257 | 7121 21957 | 9791 46657 |
| 94 | 2095 84584 | 3342 55384 | 5005 66184 | 7145 16984 | 9821 07784 |
| 95 | 2106 44875 | 3357 02375 | 5024 59875 | 7169 17375 | 9850 74875 |
| 96 | 2117 08736 | 3371 53536 | 5043 58336 | 7193 23136 | 9880 47936 |
| 97 | 2127 76173 | 3386 08873 | 5062 61573 | 7217 34273 | 9910 26973 |
| 98 | 2138 47192 | 3400 68392 | 5081 69592 | 7241 50792 | 9940 11992 |
| 99 | 2149 21799 | 3415 32099 | 5100 82399 | 7265 72699 | 9970 02999 |

## Четвертая степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 0 | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1000 00000 | 16000 00000 | 81000 00000 |
| 1 | 1 | 1040 60401 | 16322 40801 | 82085 41201 |
| 2 | 16 | 1082 43216 | 16649 66416 | 83181 69616 |
| 3 | 81 | 1125 50881 | 16981 81681 | 84288 92481 |
| 4 | 256 | 1169 85856 | 17318 91456 | 85407 17056 |
| 5 | 625 | 1215 50625 | 17661 00625 | 86536 50625 |
| 6 | 1296 | 1262 47696 | 18008 14096 | 87677 00496 |
| 7 | 2401 | 1310 79601 | 18360 36801 | 88828 74001 |
| 8 | 4096 | 1360 48896 | 18717 73696 | 89991 78496 |
| 9 | 6561 | 1411 58161 | 19080 29761 | 91166 21361 |
| 10 | 10000 | 1464 10000 | 19448 10000 | 92352 10000 |
| 11 | 14641 | 1518 07041 | 19821 19441 | 93549 51841 |
| 12 | 20736 | 1573 51936 | 20199 63136 | 94758 54336 |
| 13 | 28561 | 1630 47361 | 20583 46161 | 95979 24961 |
| 14 | 38416 | 1688 96016 | 20972 73616 | 97211 71216 |
| 15 | 50625 | 1749 00625 | 21367 50625 | 98456 00625 |
| 16 | 65536 | 1810 63936 | 21767 82336 | 99712 20736 |
| 17 | 83521 | 1873 88721 | 22173 73921 | 1 00980 39121 |
| 18 | 1 04976 | 1938 77776 | 22585 30576 | 1 02260 63376 |
| 19 | 1 30321 | 2005 33921 | 23002 57521 | 1 03553 01121 |
| 20 | 1 60000 | 2073 60000 | 23425 60000 | 1 04857 60000 |
| 21 | 1 94481 | 2143 58881 | 23854 43281 | 1 06174 47681 |
| 22 | 2 34256 | 2215 33456 | 24289 12656 | 1 07503 71856 |
| 23 | 2 79841 | 2288 86641 | 24729 73441 | 1 08845 40241 |
| 24 | 3 31776 | 2364 21376 | 25176 30976 | 1 10199 60576 |
| 25 | 3 90625 | 2441 40625 | 25628 90625 | 1 11566 40625 |
| 26 | 4 56976 | 2520 47376 | 26087 57776 | 1 12945 88176 |
| 27 | 5 31441 | 2601 44641 | 26552 37841 | 1 14338 11041 |
| 28 | 6 14656 | 2684 35456 | 27023 36256 | 1 15743 17056 |
| 29 | 7 07281 | 2769 22881 | 27500 58481 | 1 17161 14081 |
| 30 | 8 10000 | 2856 10000 | 27984 10000 | 1 18592 10000 |
| 31 | 9 23521 | 2944 99921 | 28473 96321 | 1 20036 12721 |
| 32 | 10 48576 | 3035 95776 | 28970 22976 | 1 21493 30176 |
| 33 | 11 85921 | 3129 00721 | 29472 95521 | 1 22963 70321 |
| 34 | 13 36336 | 3224 17936 | 29982 19536 | 1 24447 41136 |
| 35 | 15 00625 | 3321 50625 | 30498 00625 | 1 25944 50625 |
| 36 | 16 79616 | 3421 02016 | 31020 44416 | 1 27455 06816 |
| 37 | 18 74161 | 3522 75361 | 31549 56561 | 1 28979 17761 |
| 38 | 20 85136 | 3626 73936 | 32085 42736 | 1 30516 91536 |
| 39 | 23 13441 | 3733 01041 | 32628 08641 | 1 32068 36241 |
| 40 | 25 60000 | 3841 60000 | 33177 60000 | 1 33633 60000 |
| 41 | 28 25761 | 3952 54161 | 33734 02561 | 1 35212 70961 |
| 42 | 31 11696 | 4065 86896 | 34297 42096 | 1 36805 77296 |
| 43 | 34 18801 | 4181 61601 | 34867 84401 | 1 38412 87201 |
| 44 | 37 48096 | 4299 81696 | 35445 35296 | 1 40034 08896 |
| 45 | 41 00625 | 4420 50625 | 36030 00625 | 1 41669 50625 |
| 46 | 44 77456 | 4543 71856 | 36621 86256 | 1 43319 20656 |
| 47 | 48 79681 | 4669 48881 | 37220 98081 | 1 44983 27281 |
| 48 | 53 08416 | 4797 85216 | 37827 42016 | 1 46661 78816 |
| 49 | 57 64801 | 4928 84401 | 38441 24001 | 1 48354 83601 |

## Четвертая степень чиселъ отъ 0 до 1000

| Числ. | 0 | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 62 50000 | 5062 50000 | 39062 50000 | 1 50062 50000 |
| 51 | 67 65201 | 5198 85601 | 39691 26001 | 1 51784 86401 |
| 52 | 73 11616 | 5337 94816 | 40327 58016 | 1 53522 01216 |
| 53 | 78 90481 | 5479 81281 | 40971 52081 | 1 55274 02881 |
| 54 | 85 03056 | 5624 48656 | 41623 14256 | 1 57040 99856 |
| 55 | 91 50625 | 5772 00625 | 42282 50625 | 1 58823 00625 |
| 56 | 98 34496 | 5922 40896 | 42949 67296 | 1 60620 13696 |
| 57 | 105 56001 | 6075 73201 | 43624 70401 | 1 62432 47601 |
| 58 | 113 16496 | 6232 01296 | 44307 66096 | 1 64260 10896 |
| 59 | 121 17361 | 6391 28961 | 44998 60561 | 1 66103 12161 |
| 60 | 129 60000 | 6553 60000 | 45697 60000 | 1 67961 60000 |
| 61 | 138 45841 | 6718 98241 | 46404 70641 | 1 69835 63041 |
| 62 | 147 76336 | 6887 47536 | 47119 98736 | 1 71725 29936 |
| 63 | 157 52961 | 7059 11761 | 47843 50561 | 1 73630 69361 |
| 64 | 167 77216 | 7233 94816 | 48575 32416 | 1 75551 90016 |
| 65 | 178 50625 | 7412 00625 | 49315 50625 | 1 77489 00625 |
| 66 | 189 74736 | 7593 33136 | 50064 11536 | 1 79442 09936 |
| 67 | 201 51121 | 7777 96321 | 50821 21521 | 1 81411 26721 |
| 68 | 213 81376 | 7965 94176 | 51586 86976 | 1 83396 59776 |
| 69 | 226 67121 | 8157 30721 | 52361 14321 | 1 85398 17921 |
| 70 | 240 10000 | 8352 10000 | 53144 10000 | 1 87416 10000 |
| 71 | 254 11681 | 8550 36081 | 53935 80481 | 1 89450 44881 |
| 72 | 268 73856 | 8752 13056 | 54736 32256 | 1 91501 31456 |
| 73 | 283 98241 | 8957 45041 | 55545 71841 | 1 93568 78641 |
| 74 | 299 86576 | 9166 36176 | 56364 05776 | 1 95652 95376 |
| 75 | 316 40625 | 9378 90625 | 57191 40625 | 1 97753 90625 |
| 76 | 333 62176 | 9595 12576 | 58027 82976 | 1 99871 73376 |
| 77 | 351 53041 | 9815 06241 | 58873 39441 | 2 02006 52641 |
| 78 | 370 15056 | 10038 75856 | 59728 16656 | 2 04158 37456 |
| 79 | 389 50081 | 10266 25681 | 60592 21281 | 2 06327 36881 |
| 80 | 409 60000 | 10497 60000 | 61465 60000 | 2 08513 60000 |
| 81 | 430 46721 | 10732 83121 | 62348 39521 | 2 10717 15921 |
| 82 | 452 12176 | 10971 99376 | 63240 66576 | 2 12938 13776 |
| 83 | 474 58321 | 11215 13121 | 64142 47921 | 2 15176 62721 |
| 84 | 497 87136 | 11462 28736 | 65053 90336 | 2 17432 71936 |
| 85 | 522 00625 | 11713 50625 | 65975 00625 | 2 19706 50625 |
| 86 | 547 00816 | 11968 83216 | 66905 85616 | 2 21998 08016 |
| 87 | 572 89761 | 12228 30961 | 67846 32161 | 2 24307 53361 |
| 88 | 599 69536 | 12491 98336 | 68797 07136 | 2 26634 95936 |
| 89 | 627 42241 | 12759 89841 | 69757 57441 | 2 28980 45041 |
| 90 | 656 10000 | 13032 10000 | 70728 10000 | 2 31344 10000 |
| 91 | 685 74961 | 13308 63361 | 71708 71761 | 2 33726 00161 |
| 92 | 716 39296 | 13589 54496 | 72699 49696 | 2 36126 24896 |
| 93 | 748 05201 | 13874 88001 | 73700 50801 | 2 38544 93601 |
| 94 | 780 74896 | 14164 68496 | 74711 82096 | 2 40982 15696 |
| 95 | 814 50625 | 14459 00625 | 75733 50625 | 2 43438 00625 |
| 96 | 849 34656 | 14757 89056 | 76765 63456 | 2 45912 57856 |
| 97 | 885 29281 | 15061 38481 | 77808 27681 | 2 48405 96881 |
| 98 | 922 36816 | 15369 53616 | 78861 50416 | 2 50918 27216 |
| 99 | 960 59601 | 15682 39201 | 79925 38801 | 2 53449 58401 |

## Четвертая степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 400 | 500 | 600 |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 56000 00000 | 6 25000 00000 | 12 96000 00000 |
| 1 | 2 58569 61601 | 6 30015 02001 | 13 04661 62401 |
| 2 | 2 61158 52816 | 6 35060 16016 | 13 13366 59216 |
| 3 | 2 63766 83281 | 6 40135 34081 | 13 22115 04881 |
| 4 | 2 66394 62656 | 6 45241 28256 | 13 30907 13856 |
| 5 | 2 69042 00625 | 6 50377 50625 | 13 39743 00625 |
| 6 | 2 71709 06896 | 6 55544 33296 | 13 48622 79696 |
| 7 | 2 74395 91201 | 6 60741 88401 | 13 57546 65601 |
| 8 | 2 77102 63296 | 6 65970 28096 | 13 66514 72896 |
| 9 | 2 79829 32961 | 6 71229 64561 | 13 75527 16161 |
| 10 | 2 82576 10000 | 6 76520 10000 | 13 84584 10000 |
| 11 | 2 85343 04241 | 6 81841 76641 | 13 93685 69041 |
| 12 | 2 88130 25536 | 6 87194 76736 | 14 02832 07936 |
| 13 | 2 90937 83761 | 6 92579 22561 | 14 12023 41361 |
| 14 | 2 93765 88816 | 6 97995 26416 | 14 21259 84016 |
| 15 | 2 96614 50625 | 7 03443 00625 | 14 30541 50625 |
| 16 | 2 99483 79136 | 7 08922 57536 | 14 39868 55936 |
| 17 | 3 02373 84321 | 7 14434 09521 | 14 49241 14721 |
| 18 | 3 05284 76176 | 7 19977 68976 | 14 58659 41776 |
| 19 | 3 08216 64721 | 7 25553 48321 | 14 68123 51921 |
| 20 | 3 11169 60000 | 7 31161 60000 | 14 77633 60000 |
| 21 | 3 14143 72081 | 7 36802 16481 | 14 87189 80881 |
| 22 | 3 17139 11056 | 7 42475 30256 | 14 96792 29456 |
| 23 | 3 20155 87041 | 7 48181 13841 | 15 06441 20641 |
| 24 | 3 23194 10176 | 7 53919 79776 | 15 16136 69376 |
| 25 | 3 26253 90625 | 7 59691 40625 | 15 25878 90625 |
| 26 | 3 29335 38576 | 7 65496 08976 | 15 35667 99376 |
| 27 | 3 32438 64241 | 7 71333 97441 | 15 45504 10641 |
| 28 | 3 35563 77856 | 7 77205 18656 | 15 55387 39456 |
| 29 | 3 38710 89681 | 7 83109 85281 | 15 65318 00881 |
| 30 | 3 41880 10000 | 7 89048 10000 | 15 75296 10000 |
| 31 | 3 45071 49121 | 7 95020 05521 | 15 85321 81921 |
| 32 | 3 48285 17376 | 8 01025 84576 | 15 95395 31776 |
| 33 | 3 51521 25121 | 8 07065 59921 | 16 05516 74721 |
| 34 | 3 54779 82736 | 8 13139 44336 | 16 15686 25936 |
| 35 | 3 58061 00625 | 8 19247 50625 | 16 25904 00625 |
| 36 | 3 61364 89216 | 8 25389 91616 | 16 36170 14016 |
| 37 | 3 64691 58961 | 8 31566 80161 | 16 46484 81361 |
| 38 | 3 68041 20336 | 8 37778 29136 | 16 56848 17936 |
| 39 | 3 71413 83841 | 8 44024 51441 | 16 67260 39041 |
| 40 | 3 74809 60000 | 8 50305 60000 | 16 77721 60000 |
| 41 | 3 78228 59361 | 8 56621 67761 | 16 88231 96161 |
| 42 | 3 81670 92496 | 8 62972 87696 | 16 98791 62896 |
| 43 | 3 85136 70001 | 8 69359 32801 | 17 09400 75601 |
| 44 | 3 88626 02496 | 8 75781 16096 | 17 20059 49696 |
| 45 | 3 92139 00625 | 8 82238 50625 | 17 30768 00625 |
| 46 | 3 95675 75056 | 8 88731 49456 | 17 41526 43856 |
| 47 | 3 99236 36481 | 8 95260 25681 | 17 52334 94881 |
| 48 | 4 02820 95616 | 9 01824 92416 | 17 63193 69216 |
| 49 | 4 06429 63201 | 9 08425 62801 | 17 74102 82401 |

## Четвертая степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 400 | 500 | 600 |
|---|---|---|---|
| 50 | 4 10062 50000 | 9 15062 50000 | 17 85062 50000 |
| 51 | 4 13719 66801 | 9 21735 67201 | 17 96072 87601 |
| 52 | 4 17401 24416 | 9 28445 27616 | 18 07134 10816 |
| 53 | 4 21107 33681 | 9 35191 44481 | 18 18246 35281 |
| 54 | 4 24838 05456 | 9 41974 31056 | 18 29409 76656 |
| 55 | 4 28593 50625 | 9 48794 00625 | 18 40624 50625 |
| 56 | 4 32373 80096 | 9 55650 66496 | 18 51890 72896 |
| 57 | 4 36179 04801 | 9 62544 42001 | 18 63208 59201 |
| 58 | 4 40009 35696 | 9 69475 40496 | 18 74578 25296 |
| 59 | 4 43864 83761 | 9 76443 75361 | 18 85999 86961 |
| 60 | 4 47745 60000 | 9 83449 60000 | 18 97473 60000 |
| 61 | 4 51651 75441 | 9 90493 07841 | 19 08999 60241 |
| 62 | 4 55583 41136 | 9 97574 32336 | 19 20578 03536 |
| 63 | 4 59540 68161 | 10 04693 46961 | 19 32209 05761 |
| 64 | 4 63523 67616 | 10 11850 65216 | 19 43892 82816 |
| 65 | 4 67532 50625 | 10 19046 00625 | 19 55629 50625 |
| 66 | 4 71567 28336 | 10 26279 66736 | 19 67419 25136 |
| 67 | 4 75628 11921 | 10 33551 77121 | 19 79262 22321 |
| 68 | 4 79715 12576 | 10 40862 45376 | 19 91158 58176 |
| 69 | 4 83828 41521 | 10 48211 85121 | 20 03108 48721 |
| 70 | 4 87968 10000 | 10 55600 10000 | 20 15112 10000 |
| 71 | 4 92134 29281 | 10 63027 33681 | 20 27169 58081 |
| 72 | 4 96327 10656 | 10 70493 69856 | 20 39281 09056 |
| 73 | 5 00546 65441 | 10 77999 32241 | 20 51446 79041 |
| 74 | 5 04793 04976 | 10 85544 34576 | 20 63666 84176 |
| 75 | 5 09066 40625 | 10 93128 90625 | 20 75941 40625 |
| 76 | 5 13366 83776 | 11 00753 14176 | 20 88270 64576 |
| 77 | 5 17694 45841 | 11 08417 19041 | 21 00654 72241 |
| 78 | 5 22049 38256 | 11 16121 19056 | 21 13093 79856 |
| 79 | 5 26431 72481 | 11 23865 28081 | 21 25588 03681 |
| 80 | 5 30841 60000 | 11 31649 60000 | 21 38137 60000 |
| 81 | 5 35279 12321 | 11 39474 28721 | 21 50742 65121 |
| 82 | 5 39744 40976 | 11 47339 48176 | 21 63403 35376 |
| 83 | 5 44237 57521 | 11 55243 32321 | 21 76119 87121 |
| 84 | 5 48758 73536 | 11 63191 95136 | 21 88892 36736 |
| 85 | 5 53308 00625 | 11 71179 50625 | 22 01721 00625 |
| 86 | 5 57885 50416 | 11 79208 12816 | 22 14605 95216 |
| 87 | 5 62491 34561 | 11 87277 95761 | 22 27547 36961 |
| 88 | 5 67125 64736 | 11 95389 13536 | 22 40545 42336 |
| 89 | 5 71788 52641 | 12 03541 80241 | 22 53600 27841 |
| 90 | 5 76480 10000 | 12 11736 10000 | 22 66712 10000 |
| 91 | 5 81200 48561 | 12 19972 16961 | 22 79881 05361 |
| 92 | 5 85949 80096 | 12 28250 15296 | 22 93107 30496 |
| 93 | 5 90728 16401 | 12 36570 19201 | 23 06391 02001 |
| 94 | 5 95535 69296 | 12 44932 42896 | 23 19732 36496 |
| 95 | 6 00372 50625 | 12 53337 00625 | 23 33131 50625 |
| 96 | 6 05238 72256 | 12 61784 06656 | 23 46588 61056 |
| 97 | 6 10134 46081 | 12 70273 75281 | 23 60103 84481 |
| 98 | 6 15059 84016 | 12 78806 20816 | 23 73677 37616 |
| 99 | 6 20014 98001 | 12 87381 57601 | 23 87309 37201 |

## Четвертая степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|
| 0 | 24 01000 00000 | 40 96000 00000 | 65 61000 00000 |
| 1 | 24 14749 42801 | 41 16518 43201 | 65 90208 63601 |
| 2 | 24 28557 82416 | 41 37113 85616 | 66 19514 68816 |
| 3 | 24 42425 35681 | 41 57786 46481 | 66 48918 37281 |
| 4 | 24 56352 19456 | 41 78536 45056 | 66 78419 90656 |
| 5 | 24 70338 50625 | 41 99364 00625 | 67 08019 50625 |
| 6 | 24 84384 46096 | 42 20269 32496 | 67 37717 38896 |
| 7 | 24 98490 22801 | 42 41252 60001 | 67 67513 77201 |
| 8 | 25 12655 97696 | 42 62314 02496 | 67 97408 87296 |
| 9 | 25 26881 87761 | 42 83453 79361 | 68 27402 90961 |
| 10 | 25 41168 10000 | 43 04672 10000 | 68 57496 10000 |
| 11 | 25 55514 81441 | 43 25969 13841 | 68 87688 66241 |
| 12 | 25 69922 19136 | 43 47345 10336 | 69 17980 81536 |
| 13 | 25 84390 40161 | 43 68800 18961 | 69 48372 77761 |
| 14 | 25 98919 61616 | 43 90334 59216 | 69 78864 76816 |
| 15 | 26 13510 00625 | 44 11948 50625 | 70 09457 00625 |
| 16 | 26 28161 74336 | 44 33642 12736 | 70 40149 71136 |
| 17 | 26 42874 99921 | 44 55415 63121 | 70 70943 10321 |
| 18 | 26 57649 94576 | 44 77269 27376 | 71 01837 40176 |
| 19 | 26 72486 75521 | 44 99203 19121 | 71 32832 82721 |
| 20 | 26 87385 60000 | 45 21217 60000 | 71 63929 60000 |
| 21 | 27 02346 65281 | 45 43312 69681 | 71 95127 94081 |
| 22 | 27 17370 08656 | 45 65488 67856 | 72 26428 07056 |
| 23 | 27 32456 07441 | 45 87745 74241 | 72 57830 21041 |
| 24 | 27 47604 78976 | 46 10084 08576 | 72 89334 58176 |
| 25 | 27 62816 40625 | 46 32503 90625 | 73 20941 40625 |
| 26 | 27 78091 09776 | 46 55005 40176 | 73 52650 90576 |
| 27 | 27 93429 03841 | 46 77588 77041 | 73 84463 30241 |
| 28 | 28 08830 40256 | 47 00254 21056 | 74 16378 81856 |
| 29 | 28 24295 36481 | 47 23001 92081 | 74 48397 67681 |
| 30 | 28 39824 10000 | 47 45832 10000 | 74 80520 10000 |
| 31 | 28 55416 78321 | 47 68744 94721 | 75 12746 31121 |
| 32 | 28 71073 58976 | 47 91740 66176 | 75 45076 53376 |
| 33 | 28 86794 69521 | 48 14819 44321 | 75 77510 99121 |
| 34 | 29 02580 27536 | 48 37981 49136 | 76 10049 90736 |
| 35 | 29 18430 50625 | 48 61227 00625 | 76 42693 50625 |
| 36 | 29 34345 56416 | 48 84556 18816 | 76 75442 01216 |
| 37 | 29 50325 62561 | 49 07969 23761 | 77 08295 64961 |
| 38 | 29 66370 86736 | 49 31466 35536 | 77 41254 64336 |
| 39 | 29 82481 46641 | 49 55047 74241 | 77 74319 21841 |
| 40 | 29 98657 60000 | 49 78713 60000 | 78 07489 60000 |
| 41 | 30 14899 44561 | 50 02464 12961 | 78 40766 01361 |
| 42 | 30 31207 18096 | 50 26299 53296 | 78 74148 68496 |
| 43 | 30 47580 98401 | 50 50220 01201 | 79 07637 84001 |
| 44 | 30 64021 03296 | 50 74225 76896 | 79 41233 70496 |
| 45 | 30 80527 50625 | 50 98317 00625 | 79 74936 50625 |
| 46 | 30 97100 58256 | 51 22493 92656 | 80 08746 47056 |
| 47 | 31 13740 44081 | 51 46756 73281 | 80 42663 82481 |
| 48 | 31 30447 26016 | 51 71105 62816 | 80 76688 79616 |
| 49 | 31 47221 22001 | 51 95540 81601 | 81 10821 61201 |

## Четвертая степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|
| 50 | 31 64062 50000 | 52 20062 50000 | 81 45062 50000 |
| 51 | 31 80971 28001 | 52 44670 88401 | 81 79411 68801 |
| 52 | 31 97947 74016 | 52 69306 17216 | 82 13869 40416 |
| 53 | 32 14992 06081 | 52 94148 56881 | 82 48435 87681 |
| 54 | 32 32104 42256 | 53 19018 27856 | 82 83111 33456 |
| 55 | 32 49285 00625 | 53 43975 50625 | 83 17896 00625 |
| 56 | 32 66533 99296 | 53 69020 45696 | 83 52790 12096 |
| 57 | 32 83851 56401 | 53 94153 33601 | 83 87793 90801 |
| 58 | 33 01237 90096 | 54 19374 34896 | 84 22907 59696 |
| 59 | 33 18693 18561 | 54 44683 70161 | 84 58131 41761 |
| 60 | 33 36217 60000 | 54 70081 60000 | 84 93465 60000 |
| 61 | 33 53811 32641 | 54 95568 25041 | 85 28910 37441 |
| 62 | 33 71474 54736 | 55 21143 85936 | 85 64465 97136 |
| 63 | 33 89207 44561 | 55 46808 63361 | 86 00132 62161 |
| 64 | 34 07010 20416 | 55 72562 78016 | 86 35910 55616 |
| 65 | 34 24883 00625 | 55 98466 50625 | 86 71800 00625 |
| 66 | 34 42826 03536 | 56 24340 01936 | 87 07801 20336 |
| 67 | 34 60839 47521 | 56 50363 52721 | 87 43914 37921 |
| 68 | 34 78923 50976 | 56 76477 23776 | 87 80139 76576 |
| 69 | 34 97078 32321 | 57 02681 35921 | 88 16477 59521 |
| 70 | 35 15304 10000 | 57 28976 10000 | 88 52928 10000 |
| 71 | 35 33601 02481 | 57 55361 66881 | 88 89491 51281 |
| 72 | 35 51969 28256 | 57 81838 27456 | 89 26168 06656 |
| 73 | 35 70409 05841 | 58 08406 12641 | 89 62957 99441 |
| 74 | 35 88920 53776 | 58 35065 43376 | 89 99861 52976 |
| 75 | 36 07503 90625 | 58 61816 40625 | 90 36878 90625 |
| 76 | 36 26159 34976 | 58 88659 25376 | 90 74010 35776 |
| 77 | 36 44887 05441 | 59 15594 18641 | 91 11256 11841 |
| 78 | 36 63687 20656 | 59 42621 41456 | 91 48616 42256 |
| 79 | 36 82559 99281 | 59 69741 14881 | 91 86091 50481 |
| 80 | 37 01505 60000 | 59 96953 60000 | 92 23681 60000 |
| 81 | 37 20524 21521 | 60 24258 97921 | 92 61386 94321 |
| 82 | 37 39616 02576 | 60 51657 49776 | 92 99207 76976 |
| 83 | 37 58781 21921 | 60 79149 36721 | 93 37144 31521 |
| 84 | 37 78019 98336 | 61 06734 79936 | 93 75196 81536 |
| 85 | 37 97332 50625 | 61 34414 00625 | 94 13365 50625 |
| 86 | 38 16718 97616 | 61 62187 20016 | 94 51650 62416 |
| 87 | 38 36179 58161 | 61 90054 59361 | 94 90052 40561 |
| 88 | 38 55714 51136 | 62 18016 39936 | 95 28571 08736 |
| 89 | 38 75323 95441 | 62 46072 83041 | 95 67206 90641 |
| 90 | 38 95008 10000 | 62 74224 10000 | 96 05960 10000 |
| 91 | 39 14767 13761 | 63 02470 42161 | 96 44830 90561 |
| 92 | 39 34601 25696 | 63 30812 00896 | 96 83819 56096 |
| 93 | 39 54510 64801 | 63 59249 07601 | 97 22926 30401 |
| 94 | 39 74495 50096 | 63 87781 83696 | 97 62151 37296 |
| 95 | 39 94556 00625 | 64 16410 50625 | 98 01495 00625 |
| 96 | 40 14692 35456 | 64 45135 29856 | 98 40957 44256 |
| 97 | 40 34904 73681 | 64 73956 42881 | 98 80538 92081 |
| 98 | 40 55193 34416 | 65 02874 11216 | 99 20239 68016 |
| 99 | 40 75558 36801 | 65 31888 56401 | 99 60059 96001 |

## Пятыя степени чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 0 | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 00000 00000 | 32 00000 00000 | 243 00000 00000 |
| 1 | 1 | 1 05101 00501 | 32 80804 01001 | 247 07709 01501 |
| 2 | 32 | 1 10408 08032 | 33 63232 16032 | 251 20872 24032 |
| 3 | 243 | 1 15927 40743 | 34 47308 81243 | 255 39544 21743 |
| 4 | 1024 | 1 21665 29024 | 35 33058 57024 | 259 63779 85024 |
| 5 | 3125 | 1 27628 15625 | 36 20506 28125 | 263 93634 40625 |
| 6 | 7776 | 1 33822 55776 | 37 09677 03776 | 268 29163 51776 |
| 7 | 16807 | 1 40255 17307 | 38 00596 17807 | 272 70423 18307 |
| 8 | 32768 | 1 46932 80768 | 38 93289 28768 | 277 17469 76768 |
| 9 | 59049 | 1 53862 39549 | 39 87782 20049 | 281 70360 00549 |
| 10 | 1 00000 | 1 61051 00000 | 40 84101 00000 | 286 29151 00000 |
| 11 | 1 61051 | 1 68505 81551 | 41 82272 02051 | 290 93900 22551 |
| 12 | 2 48832 | 1 76234 16832 | 42 82321 84832 | 295 64665 52832 |
| 13 | 3 71293 | 1 84243 51793 | 43 84277 32293 | 300 41505 12793 |
| 14 | 5 37824 | 1 92541 45824 | 44 88163 53824 | 305 24477 61824 |
| 15 | 7 59375 | 2 01135 71875 | 45 94013 84375 | 310 13641 96875 |
| 16 | 10 48576 | 2 10134 16576 | 47 01849 84576 | 315 09057 52576 |
| 17 | 14 19857 | 2 19244 80357 | 48 11701 40857 | 320 10784 01357 |
| 18 | 18 89568 | 2 28775 77568 | 49 23596 65568 | 325 18881 53568 |
| 19 | 24 76099 | 2 38635 36599 | 50 37563 97099 | 330 33410 57599 |
| 20 | 32 00000 | 2 48832 00000 | 51 53632 00000 | 335 54432 00000 |
| 21 | 40 84101 | 2 59374 24601 | 52 71829 65101 | 340 82007 05601 |
| 22 | 51 53632 | 2 70270 81632 | 53 92186 09632 | 346 16197 37632 |
| 23 | 64 36343 | 2 81530 56843 | 55 14730 77343 | 351 57064 97843 |
| 24 | 79 62624 | 2 93162 50624 | 56 39493 38624 | 357 04672 26624 |
| 25 | 95 65625 | 3 05175 78125 | 57 36503 90625 | 362 59082 03125 |
| 26 | 118 81376 | 3 17579 69376 | 58 95792 57376 | 368 20357 45376 |
| 27 | 143 48907 | 3 30383 69407 | 60 27389 89907 | 373 88562 10407 |
| 28 | 172 10368 | 3 43597 38368 | 61 61326 66368 | 379 63759 94368 |
| 29 | 205 11149 | 3 57230 51649 | 62 97633 92149 | 385 46015 32649 |
| 30 | 243 00000 | 3 71293 00000 | 64 36343 00000 | 391 35393 00000 |
| 31 | 286 29151 | 3 85794 89651 | 65 77485 50151 | 397 31958 10651 |
| 32 | 335 54432 | 4 00746 42432 | 67 21093 30432 | 403 35776 18432 |
| 33 | 391 35393 | 4 16157 95893 | 68 67198 56393 | 409 46913 16893 |
| 34 | 454 35424 | 4 32040 03424 | 70 15833 71424 | 415 65435 39424 |
| 35 | 525 21875 | 4 48403 34375 | 71 67031 46875 | 421 91409 59375 |
| 36 | 604 66176 | 4 65258 74176 | 73 20824 82176 | 428 24902 90176 |
| 37 | 693 43957 | 4 82617 24457 | 74 77247 04957 | 434 65982 85457 |
| 38 | 792 35168 | 5 00490 03168 | 76 36331 71168 | 441 14717 39168 |
| 39 | 902 24199 | 5 18888 44699 | 77 98112 65199 | 447 71174 83699 |
| 40 | 1024 00000 | 5 37824 00000 | 79 62624 00000 | 454 35424 00000 |
| 41 | 1158 56201 | 5 57308 36701 | 81 29900 17201 | 461 07533 97701 |
| 42 | 1306 91232 | 5 77353 39232 | 82 99975 87232 | 467 87574 55232 |
| 43 | 1470 08443 | 5 97971 08943 | 84 72886 09443 | 474 75615 09943 |
| 44 | 1649 16224 | 6 19173 64224 | 86 48666 12224 | 481 71726 60224 |
| 45 | 1845 28125 | 6 40973 40625 | 88 27351 53125 | 488 75979 65625 |
| 46 | 2059 62976 | 6 63382 90976 | 90 08978 18976 | 495 88445 46976 |
| 47 | 2293 45007 | 6 86414 85507 | 91 93582 26007 | 503 09195 66507 |
| 48 | 2548 03968 | 7 10082 11968 | 93 81200 19968 | 510 38302 27968 |
| 49 | 2824 75249 | 7 34397 75749 | 95 71868 76249 | 517 75837 76749 |

## Пятая степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 0 | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 3125 00000 | 7 59375 00000 | 97 65625 00000 | 525 21875 00000 |
| 51 | 3450 25251 | 7 85027 25751 | 99 62506 26251 | 532 76487 26751 |
| 52 | 3802 04032 | 8 11368 12032 | 101 62550 20032 | 540 39748 28032 |
| 53 | 4181 95493 | 8 38411 35993 | 103 65794 76493 | 548 11732 16993 |
| 54 | 4591 65024 | 8 66170 93024 | 105 72278 21024 | 555 92513 49024 |
| 55 | 5032 84375 | 8 94660 96875 | 107 82039 09375 | 563 82167 21875 |
| 56 | 5507 31776 | 9 23893 79776 | 109 95116 27776 | 571 80768 75776 |
| 57 | 6016 92057 | 9 53889 92557 | 112 11548 93057 | 579 88393 93557 |
| 58 | 6563 56768 | 9 84658 04768 | 114 31376 52768 | 588 05119 00768 |
| 59 | 7149 24299 | 10 16215 04799 | 116 54638 85299 | 596 31020 65799 |
| 60 | 7776 00000 | 10 48576 00000 | 118 81376 00000 | 604 66176 00000 |
| 61 | 8445 96301 | 10 81756 16801 | 121 11628 37301 | 613 10662 57801 |
| 62 | 9161 32832 | 11 15771 00832 | 123 45436 68832 | 621 64558 36832 |
| 63 | 9924 36543 | 11 50636 17043 | 125 82841 97543 | 630 27941 78043 |
| 64 | 10737 41824 | 11 86367 49824 | 128 23885 57824 | 639 00891 65824 |
| 65 | 11602 90625 | 12 22981 03125 | 130 68609 15625 | 647 83487 28125 |
| 66 | 12523 32576 | 12 60493 00576 | 133 17054 68576 | 656 7580 36576 |
| 67 | 13501 25107 | 12 98919 85607 | 135 69264 46107 | 665 77935 06607 |
| 68 | 14539 33568 | 13 38278 21568 | 138 25281 09568 | 674 89947 97568 |
| 69 | 15640 31349 | 13 78584 91849 | 140 85147 52349 | 684 11928 12849 |
| 70 | 16807 00000 | 14 19857 00000 | 143 48907 00000 | 693 43957 00000 |
| 71 | 18042 29351 | 14 62111 69851 | 146 16603 10351 | 702 86116 50851 |
| 72 | 19349 17632 | 15 05366 45632 | 148 88279 73632 | 712 38489 01632 |
| 73 | 20730 71593 | 15 49638 92093 | 151 63981 12593 | 722 01157 33093 |
| 74 | 22190 06624 | 15 94946 94624 | 154 43751 82624 | 731 74204 70624 |
| 75 | 23730 46875 | 16 41308 59375 | 157 27636 71875 | 741 57714 84375 |
| 76 | 25355 25376 | 16 88742 13376 | 160 15681 01376 | 751 51771 89376 |
| 77 | 27067 84157 | 17 37266 04657 | 163 07930 25157 | 761 56460 45657 |
| 78 | 28871 74368 | 17 86899 02368 | 166 04430 30368 | 771 71865 58368 |
| 79 | 30770 56399 | 18 37659 96899 | 169 05227 37399 | 781 98072 77899 |
| 80 | 32768 00000 | 18 89568 00000 | 172 10368 00000 | 792 35168 00000 |
| 81 | 34867 84401 | 19 42642 44901 | 175 19899 05401 | 802 83237 65901 |
| 82 | 37073 98432 | 19 96902 86432 | 178 33867 74432 | 813 42368 62432 |
| 83 | 39390 40643 | 20 52369 01143 | 181 52321 61643 | 824 12648 22143 |
| 84 | 41821 19424 | 21 09060 87424 | 184 75308 55424 | 834 94164 23424 |
| 85 | 44370 53125 | 21 66998 65625 | 188 02876 78125 | 845 87004 90625 |
| 86 | 47042 70176 | 22 26202 78176 | 191 35074 86176 | 856 91258 94176 |
| 87 | 49842 09207 | 22 86693 89707 | 194 71951 70207 | 868 07015 50707 |
| 88 | 52773 19168 | 23 48492 87168 | 198 13556 55168 | 879 34364 23168 |
| 89 | 55840 59449 | 24 11620 79949 | 201 59939 00449 | 890 73395 20949 |
| 90 | 59049 00000 | 24 76099 00000 | 205 11149 00000 | 902 24199 00000 |
| 91 | 62403 21451 | 25 41949 01951 | 208 67236 82451 | 913 86866 62951 |
| 92 | 65908 15231 | 26 09192 63232 | 212 28253 11232 | 925 61489 39232 |
| 93 | 69568 83693 | 26 77851 84193 | 215 94248 84693 | 937 48159 85193 |
| 94 | 73390 40224 | 27 47948 88224 | 219 65275 36224 | 949 46969 84224 |
| 95 | 77378 09375 | 28 19506 21875 | 223 41384 34375 | 961 58012 46875 |
| 96 | 81537 26976 | 28 92546 54976 | 227 22627 82976 | 973 81381 10976 |
| 97 | 85873 40257 | 29 67092 80757 | 231 09058 21257 | 986 17169 61757 |
| 98 | 90392 07968 | 30 43168 15968 | 235 00728 23968 | 998 63472 31968 |
| 99 | 95099 00499 | 31 20796 00999 | 238 97691 01499 | 1011 26384 01999 |

## Пятая степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 400 | 500 | 600 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1024 00000 00000 | 3125 00000 00000 | 7776 00000 00000 |
| 1 | 1036 86416 02001 | 3156 37525 02501 | 7841 01636 03001 |
| 2 | 1049 85728 32032 | 3188 00200 40032 | 7906 46688 48032 |
| 3 | 1062 98033 62243 | 3219 88177 02743 | 7972 35374 43243 |
| 4 | 1076 23429 13024 | 3252 01606 41024 | 8038 67911 69024 |
| 5 | 1089 62012 53125 | 3284 40640 65625 | 8105 44518 78125 |
| 6 | 1103 13881 99776 | 3317 05432 47776 | 8172 65414 95776 |
| 7 | 1116 79136 18807 | 3349 96135 19307 | 8240 30820 19807 |
| 8 | 1130 57874 24768 | 3383 12502 72768 | 8308 40955 20768 |
| 9 | 1144 50195 81049 | 3416 55889 61549 | 8376 96041 42049 |
| 10 | 1158 56201 00000 | 3480 25251 00000 | 8445 00000 00000 |
| 11 | 1172 75990 43051 | 3484 21142 63551 | 8515 41956 84051 |
| 12 | 1187 09665 20832 | 3518 43720 88832 | 8585 33232 56832 |
| 13 | 1201 57326 93293 | 3552 93142 73793 | 8655 70352 54293 |
| 14 | 1216 19077 69824 | 3587 69565 77824 | 8726 53541 85824 |
| 15 | 1230 95020 09375 | 3622 73148 21875 | 8797 83026 34375 |
| 16 | 1245 85257 20576 | 3658 04048 88576 | 8869 59032 56576 |
| 17 | 1260 89892 61857 | 3693 62427 22357 | 8941 81787 82857 |
| 18 | 1276 09030 41568 | 3729 48443 29568 | 9014 51520 17568 |
| 19 | 1291 42775 18099 | 3765 62257 78599 | 9087 68458 39099 |
| 20 | 1306 91232 00000 | 3802 04032 00000 | 9161 32832 00000 |
| 21 | 1322 54306 46101 | 3838 73927 86601 | 9235 44871 27101 |
| 22 | 1338 32704 65632 | 3875 72107 93632 | 9310 04807 21632 |
| 23 | 1354 25933 18343 | 3912 98735 38843 | 9385 12871 59343 |
| 24 | 1370 34299 14624 | 3950 53974 02624 | 9460 69296 90624 |
| 25 | 1386 57910 15625 | 3988 37988 28125 | 9536 74316 40625 |
| 26 | 1402 96874 33376 | 4026 50943 21376 | 9613 28164 09376 |
| 27 | 1419 51300 30907 | 4064 93004 51407 | 9690 31074 71907 |
| 28 | 1436 21297 22368 | 4103 64338 50368 | 9767 83283 78368 |
| 29 | 1453 06974 73149 | 4142 65112 13649 | 9845 85027 54149 |
| 30 | 1470 08443 00000 | 4181 95493 00000 | 9924 36543 00000 |
| 31 | 1487 25812 71151 | 4221 55649 31651 | 10003 38067 92151 |
| 32 | 1504 59195 06432 | 4261 45749 94432 | 10082 89840 82432 |
| 33 | 1522 08701 77393 | 4301 65964 37893 | 10162 92100 98393 |
| 34 | 1539 74445 07424 | 4342 16462 75424 | 10243 45088 43424 |
| 35 | 1557 56537 71875 | 4382 97415 84375 | 10324 49043 96875 |
| 36 | 1575 55092 98176 | 4424 08995 06176 | 10406 04209 14176 |
| 37 | 1593 70224 65957 | 4465 51372 46457 | 10488 10826 26957 |
| 38 | 1612 02047 07168 | 4507 24720 75168 | 10570 69138 43168 |
| 39 | 1630 50675 06199 | 4549 29213 26699 | 10653 79389 47199 |
| 40 | 1649 16224 00000 | 4591 65024 00000 | 10737 41824 00000 |
| 41 | 1667 98809 78201 | 4634 32327 58701 | 10821 56687 39201 |
| 42 | 1686 98548 83232 | 4677 31299 31232 | 10906 24225 79232 |
| 43 | 1706 15558 10443 | 4720 62115 10943 | 10991 44686 11444 |
| 44 | 1725 49955 08224 | 4764 24951 36224 | 11077 18316 04224 |
| 45 | 1745 01857 78125 | 4808 19985 90625 | 11163 45364 03125 |
| 46 | 1764 71384 74976 | 4852 47396 02976 | 11250 26079 30976 |
| 47 | 1784 58655 07007 | 4897 07360 47507 | 11337 60711 88007 |
| 48 | 1804 63788 35968 | 4942 00058 43968 | 11425 49512 51968 |
| 49 | 1824 86904 77249 | 4987 25669 77749 | 11513 92732 78249 |

## Пятая степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ | 400 | 500 | 600 |
|---|---|---|---|
| 50 | 1845 28125 00000 | 5032 84375 00000 | 11602 90625 00000 |
| 51 | 1865 87570 27251 | 5079 76355 27751 | 11692 43442 28251 |
| 52 | 1886 65362 36032 | 5125 01729 44032 | 11782 51438 52032 |
| 53 | 1907 61623 57493 | 5171 60868 97993 | 11873 14868 38493 |
| 54 | 1928 76476 77024 | 5218 53768 05024 | 11964 33987 33024 |
| 55 | 1950 10045 34375 | 5265 80673 46875 | 12056 09051 59375 |
| 56 | 1971 62453 23776 | 5313 41769 71776 | 12148 40318 19776 |
| 57 | 1993 33824 94057 | 5361 37241 94557 | 12241 28044 95057 |
| 58 | 2015 24285 48768 | 5409 67275 96768 | 12334 72490 44768 |
| 59 | 2037 33960 46299 | 5458 32058 26799 | 12428 73914 07299 |
| 60 | 2059 62976 00000 | 5507 31776 00000 | 12523 32576 00000 |
| 61 | 2082 11458 78301 | 5556 66616 98801 | 12618 48737 19301 |
| 62 | 2104 79536 04832 | 5606 36769 72832 | 12714 22659 40832 |
| 63 | 2127 67335 58543 | 5656 42423 39043 | 12810 54605 19543 |
| 64 | 2150 74985 73824 | 5706 83767 81824 | 12907 44837 89824 |
| 65 | 2174 02615 40625 | 5757 60993 53125 | 13004 93621 65625 |
| 66 | 2197 50354 04576 | 5808 74291 72576 | 13103 01221 40576 |
| 67 | 2221 18331 67107 | 5860 23854 27607 | 13201 67902 88107 |
| 68 | 2245 06678 85568 | 5912 09873 73568 | 13300 93932 61568 |
| 69 | 2269 15526 73349 | 5964 32543 33849 | 13400 79577 94349 |
| 70 | 2293 45007 00000 | 6016 92057 00000 | 13501 25107 00000 |
| 71 | 2317 95251 91351 | 6069 88609 31851 | 13602 30788 72351 |
| 72 | 2342 66394 29632 | 6123 22395 57632 | 13703 96892 85632 |
| 73 | 2367 58567 53593 | 6176 93611 74093 | 13806 23689 94593 |
| 74 | 2392 71905 58624 | 6231 02434 46624 | 13909 11431 34624 |
| 75 | 2418 06542 96875 | 6285 49121 09375 | 14012 60449 21875 |
| 76 | 2443 62614 77376 | 6340 33809 63376 | 14116 70956 53376 |
| 77 | 2469 40256 66157 | 6395 56718 86657 | 14221 43247 07157 |
| 78 | 2495 39604 86368 | 6451 18048 14368 | 14326 77595 42368 |
| 79 | 2521 60796 18399 | 6507 17997 58899 | 14432 74276 99399 |
| 80 | 2548 03968 00000 | 6563 56768 00000 | 14539 33568 00000 |
| 81 | 2574 69258 26401 | 6620 34560 86901 | 14646 55745 47401 |
| 82 | 2601 56805 30432 | 6677 51578 38432 | 14754 41087 26432 |
| 83 | 2628 66748 82643 | 6735 08023 43143 | 14862 89872 03643 |
| 84 | 2655 99227 91424 | 6793 04099 59424 | 14972 02379 27424 |
| 85 | 2683 54383 03125 | 6851 40011 15625 | 15081 78889 28125 |
| 86 | 2711 32355 02176 | 6910 15963 10176 | 15192 19683 18176 |
| 87 | 2739 33285 31207 | 6969 32161 11707 | 15303 25042 92207 |
| 88 | 2767 57315 91168 | 7028 88811 59168 | 15414 95251 27168 |
| 89 | 2796 04589 41449 | 7088 86121 61949 | 15527 30591 82449 |
| 90 | 2824 75249 00000 | 7149 24299 00000 | 15640 31349 00000 |
| 91 | 2853 69438 43451 | 7210 03552 23951 | 15753 97808 04451 |
| 92 | 2882 87302 07232 | 7271 24090 55232 | 15868 30255 03232 |
| 93 | 2912 28984 85693 | 7332 86123 86193 | 15983 28976 86693 |
| 94 | 2941 94632 32224 | 7394 89862 80224 | 16098 94261 28224 |
| 95 | 2971 84390 59375 | 7457 35318 71875 | 16215 26396 84375 |
| 96 | 3001 98406 38976 | 7520 23303 66976 | 16332 25672 94976 |
| 97 | 3032 36827 02257 | 7583 53430 42757 | 16449 92379 83257 |
| 98 | 3062 99800 39968 | 7647 26112 47968 | 16568 26808 55968 |
| 99 | 3093 87475 02499 | 7711 41564 02999 | 16687 29251 03449 |

## Пятая степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|
| 0 | 16807 00000 00000 | 32768 00000 00000 | 59049 00000 00000 |
| 1 | 16927 39349 03501 | 32973 31264 04001 | 59377 77981 04501 |
| 2 | 17048 47592 56032 | 33179 65312 64032 | 59708 02248 72032 |
| 3 | 17170 25025 83743 | 33387 02531 24243 | 60039 73290 64743 |
| 4 | 17292 71944 97024 | 33595 43306 25024 | 60372 91595 53024 |
| 5 | 17415 88646 90625 | 33804 88025 03125 | 60707 57653 15625 |
| 6 | 17539 75429 43776 | 34015 37075 91776 | 61043 71954 39776 |
| 7 | 17664 32591 20307 | 34226 90848 20807 | 61381 34991 21307 |
| 8 | 17789 60431 68768 | 34439 49732 16768 | 61720 47256 64768 |
| 9 | 17915 59251 22549 | 34653 14119 03049 | 62061 08244 83549 |
| 10 | 18042 29351 00000 | 34867 84401 00000 | 62403 21451 00000 |
| 11 | 18169 71033 04551 | 35083 60971 25051 | 62746 84371 45551 |
| 12 | 18297 84600 24832 | 35300 44223 92832 | 63091 98503 60832 |
| 13 | 18426 70356 34793 | 35518 34554 15293 | 63438 64345 95793 |
| 14 | 18556 28605 93824 | 35737 32358 01824 | 63786 82398 09824 |
| 15 | 18686 59654 46875 | 35957 38032 59375 | 64136 53160 71875 |
| 16 | 18817 63808 24576 | 36178 51975 92576 | 64487 77135 60576 |
| 17 | 18949 41374 43357 | 36400 74587 03857 | 64840 54825 64357 |
| 18 | 19081 92661 05568 | 36624 06265 93568 | 65194 86734 81568 |
| 19 | 19215 17976 99599 | 36848 47413 60099 | 65550 73368 20599 |
| 20 | 19349 17632 00000 | 37073 98432 00000 | 65908 15232 00000 |
| 21 | 19483 91936 67601 | 37300 59724 08101 | 66267 12833 48601 |
| 22 | 19619 41202 49632 | 37528 31693 77632 | 66627 66681 05632 |
| 23 | 19755 65741 79843 | 37757 14746 00343 | 66989 77284 20843 |
| 24 | 19892 65867 78624 | 37987 09286 66624 | 67353 45153 54624 |
| 25 | 20030 41894 53125 | 38218 15722 65625 | 67718 70800 78125 |
| 26 | 20168 94136 97376 | 38450 34461 85376 | 68085 54738 73376 |
| 27 | 20308 22910 92407 | 38683 65913 12907 | 68453 97481 33407 |
| 28 | 20448 28533 06368 | 38918 10486 34368 | 68823 99543 62368 |
| 29 | 20589 11320 94649 | 39153 68592 35149 | 69195 61441 75649 |
| 30 | 20730 71593 00000 | 39390 40643 00000 | 69568 83693 00000 |
| 31 | 20873 09668 52651 | 39628 27051 13151 | 69943 66815 73651 |
| 32 | 21016 25867 70432 | 39867 28230 58432 | 70320 11329 46432 |
| 33 | 21160 20511 58893 | 40107 44596 19393 | 70698 17754 79893 |
| 34 | 21304 93922 11424 | 40348 76563 79424 | 71077 86613 47424 |
| 35 | 21450 46422 09375 | 40591 24550 21875 | 71459 18428 34375 |
| 36 | 21596 78335 22176 | 40834 88973 30176 | 71842 13723 38176 |
| 37 | 21743 89986 07457 | 41079 70251 87957 | 72226 73023 68457 |
| 38 | 21891 81700 11168 | 41325 68805 79168 | 72612 96855 47168 |
| 39 | 22040 53803 67699 | 41572 85055 88199 | 73000 85746 08699 |
| 40 | 22190 06624 00000 | 41821 19424 00000 | 73390 40224 00000 |
| 41 | 22340 40489 19701 | 42070 72333 00201 | 73781 60818 80701 |
| 42 | 22491 55728 27232 | 42321 44206 75232 | 74174 48061 23232 |
| 43 | 22643 52671 11943 | 42573 35470 12443 | 74569 02483 12943 |
| 44 | 22796 31648 52224 | 42826 46549 00224 | 74963 24617 48224 |
| 45 | 22949 92992 15625 | 43080 77870 28125 | 75363 14998 40625 |
| 46 | 23104 37034 58976 | 43336 29861 86976 | 75762 74161 14976 |
| 47 | 23259 64109 28507 | 43593 02952 69007 | 76164 02642 09507 |
| 48 | 23415 74550 59968 | 43850 97572 67968 | 76567 00978 75968 |
| 49 | 23572 68693 78749 | 44110 14152 79249 | 76971 69709 79749 |

## Пятая степень чиселъ отъ 0 до 1000.

| Числ. | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|
| 50 | 23730 46875 00000 | 44370 53125 00000 | 77378 09375 00000 |
| 51 | 23889 09431 28751 | 44632 14922 29251 | 77786 20515 29751 |
| 52 | 24048 56700 60032 | 44894 99978 68032 | 78196 03672 76032 |
| 53 | 24208 89021 78993 | 45159 08729 19493 | 78607 59390 59993 |
| 54 | 24370 06734 61024 | 45424 41609 89024 | 79020 88213 17024 |
| 55 | 24532 10179 71875 | 45690 99057 84375 | 79435 90685 96875 |
| 56 | 24694 99698 67776 | 45958 81511 15776 | 79852 67355 63776 |
| 57 | 24858 75633 95537 | 46227 89408 96057 | 80271 18769 96557 |
| 58 | 25023 38328 92768 | 46498 23191 40768 | 80691 45477 88768 |
| 59 | 25188 88127 87799 | 46769 83299 68299 | 81113 48029 48799 |
| 60 | 25355 25376 00000 | 47042 70176 00000 | 81537 26976 00000 |
| 61 | 25522 50419 39801 | 47316 84263 60301 | 81962 82869 80801 |
| 62 | 25690 63605 08832 | 47592 26006 76832 | 82390 16264 44832 |
| 63 | 25859 65281 00043 | 47868 95850 80543 | 82819 27714 61043 |
| 64 | 26029 55795 97824 | 48146 94242 05824 | 83250 17776 13824 |
| 65 | 26200 35499 78125 | 48426 21627 90625 | 83682 87006 03125 |
| 66 | 26372 04743 08576 | 48706 78456 76576 | 84117 35962 44576 |
| 67 | 26544 63877 48607 | 48988 65178 09107 | 84553 65204 69607 |
| 68 | 26718 13255 49568 | 49271 82242 37568 | 84991 75293 25568 |
| 69 | 26892 53230 54849 | 49556 30101 15349 | 85431 66789 75849 |
| 70 | 27067 84157 00000 | 49842 09207 00000 | 85873 40257 00000 |
| 71 | 27244 06390 12851 | 50128 20013 53351 | 86316 96258 93851 |
| 72 | 27421 20286 13632 | 50417 62975 41632 | 86762 35360 69632 |
| 73 | 27599 26202 15093 | 50707 38548 35593 | 87209 58128 56093 |
| 74 | 27778 24496 22624 | 50998 47189 10624 | 87658 65129 98624 |
| 75 | 27958 15527 34375 | 51290 89355 46875 | 88109 56933 59375 |
| 76 | 28138 99655 41376 | 51584 65506 29374 | 88562 34109 17376 |
| 77 | 28320 77241 27657 | 51879 76101 48157 | 89016 97227 68657 |
| 78 | 28503 48646 70368 | 52176 21601 98368 | 89473 46861 26368 |
| 79 | 28687 14234 39899 | 52474 02469 80399 | 89931 83583 20899 |
| 80 | 28871 74368 00000 | 52773 19168 00000 | 90392 07968 00000 |
| 81 | 29057 29412 07901 | 53073 72160 68401 | 90854 20591 28901 |
| 82 | 29243 79732 14432 | 53375 61913 02432 | 91318 22029 90432 |
| 83 | 29431 25694 64143 | 53678 88891 24643 | 91784 12861 85143 |
| 84 | 29619 67666 95424 | 53983 53562 63424 | 92251 93666 31424 |
| 85 | 29809 06017 40625 | 54289 56395 53125 | 92721 65023 65625 |
| 86 | 29999 41115 26176 | 54596 97859 34176 | 93193 27515 42176 |
| 87 | 30190 73330 72707 | 54905 78424 53207 | 93666 81724 33707 |
| 88 | 30383 03034 95168 | 55215 98562 63168 | 94142 28234 31168 |
| 89 | 30576 30600 02949 | 55527 58746 23449 | 94619 67630 43949 |
| 90 | 30770 56399 00000 | 55840 59449 00000 | 95099 00499 00000 |
| 91 | 30965 80805 84951 | 56155 01145 65451 | 95580 27427 45951 |
| 92 | 31162 04195 51232 | 56470 84311 99232 | 96063 49004 47232 |
| 93 | 31359 26943 87193 | 56788 09424 87693 | 96548 65819 88193 |
| 94 | 31557 49427 76224 | 57106 76962 24224 | 97035 78464 72224 |
| 95 | 31756 72024 96875 | 57426 87403 09375 | 97524 87531 21875 |
| 96 | 31956 95114 22976 | 57748 41227 50976 | 98015 93612 78976 |
| 97 | 32158 19075 23757 | 58071 38916 64257 | 98508 97304 04757 |
| 98 | 32360 44288 63968 | 58395 80952 71968 | 99003 99200 79968 |
| 99 | 32563 71136 03999 | 58721 67819 04499 | 99500 99900 04999 |

## Шестая, седьмая и восьмая степени чиселъ отъ 0 до 100.

| Числ. | VI-я | VII-я | VIII-я |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 64 | 128 | 256 |
| 3 | 729 | 2187 | 6561 |
| 4 | 4096 | 16384 | 65536 |
| 5 | 15625 | 78125 | 3 90625 |
| 6 | 46656 | 2 79936 | 16 79816 |
| 7 | 1 17649 | 8 23543 | 57 64801 |
| 8 | 2 62144 | 20 97152 | 167 77216 |
| 9 | 5 31441 | 47 82969 | 430 46721 |
| 10 | 10 00000 | 100 00000 | 1000 00000 |
| 11 | 17 71561 | 194 87171 | 2143 58881 |
| 12 | 29 85984 | 358 31808 | 4299 81696 |
| 13 | 48 26809 | 627 48517 | 8157 30721 |
| 14 | 75 29536 | 1054 13504 | 14757 89056 |
| 15 | 113 90625 | 1708 59375 | 25628 90625 |
| 16 | 167 77216 | 2684 35456 | 42949 67296 |
| 17 | 241 37569 | 4103 38673 | 69757 57441 |
| 18 | 340 12224 | 6122 20032 | 1 10199 60576 |
| 19 | 470 45881 | 8938 71739 | 1 69835 63041 |
| 20 | 640 00000 | 12800 00000 | 2 56000 00000 |
| 21 | 857 66121 | 18010 88541 | 3 78228 59361 |
| 22 | 1133 79904 | 24943 57888 | 5 48758 73536 |
| 23 | 1480 35889 | 34048 25447 | 7 83109 85281 |
| 24 | 1911 02976 | 45864 71 424 | 11 00753 14176 |
| 25 | 2441 40625 | 61035 15625 | 15 25878 90625 |
| 26 | 3089 15776 | 80318 10176 | 20 88270 64576 |
| 27 | 3874 20489 | 1 04603 53203 | 28 24295 36481 |
| 28 | 4818 90304 | 1 34929 28512 | 37 78019 98336 |
| 29 | 5948 23321 | 1 72498 76309 | 50 02464 12261 |
| 30 | 7290 00000 | 2 18700 00000 | 65 61000 00000 |
| 31 | 8875 03681 | 2 75126 14111 | 85 28910 37441 |
| 32 | 10737 41824 | 3 43597 38368 | 109 95116 27776 |
| 33 | 12914 67969 | 4 26184 42977 | 140 64086 18241 |
| 34 | 15448 04416 | 5 25233 50144 | 178 57939 04896 |
| 35 | 18382 65625 | 6 43392 96875 | 225 18753 90625 |
| 36 | 21767 82336 | 7 83641 64096 | 282 11099 07456 |
| 37 | 25657 26409 | 9 49318 77133 | 351 24794 53921 |
| 38 | 30109 36384 | 11 44155 82592 | 434 77921 38496 |
| 39 | 35187 43761 | 13 72310 06679 | 535 20092 60481 |
| 40 | 40960 00000 | 16 38400 00000 | 655 36000 00000 |
| 41 | 47501 04241 | 19 47542 73881 | 798 49252 29121 |
| 42 | 54890 31744 | 23 05393 33248 | 968 26519 96416 |
| 43 | 63213 63049 | 27 18186 11107 | 1168 82002 77601 |
| 44 | 72563 13856 | 31 92778 09664 | 1404 82236 25216 |
| 45 | 83037 65625 | 37 36694 53125 | 1681 51253 90625 |
| 46 | 94742 96896 | 43 58176 57216 | 2004 76122 31936 |
| 47 | 1 07792 15329 | 50 66231 20463 | 2381 12866 61761 |
| 48 | 1 22305 90464 | 58 70683 42272 | 2817 92804 29056 |
| 49 | 1 38412 87201 | 67 82230 72849 | 3323 29305 69601 |

## ШЕСТАЯ, СЕДЬМАЯ И ВОСЬМАЯ СТЕПЕНИ ЧИСЕЛЪ ОТЪ 0 ДО 100.

| Числ. | VI-я | VII-я | VIII-я |
|---|---|---|---|
| 50 | 1 56250 00000 | 78 12500 00000 | 3906 25000 00000 |
| 51 | 1 75962 87801 | 89 74106 77851 | 4576 79445 70401 |
| 52 | 1 97706 09664 | 102 80717 02528 | 5345 97285 31456 |
| 53 | 2 21643 61129 | 117 47111 39837 | 6225 96904 11361 |
| 54 | 2 47949 11296 | 133 89252 09984 | 7230 19613 39136 |
| 55 | 2 76806 40625 | 152 24352 34375 | 8373 39378 90625 |
| 56 | 3 08409 79456 | 172 70948 49536 | 9671 73115 74016 |
| 57 | 3 42964 47249 | 195 48974 93193 | 11142 91571 12001 |
| 58 | 3 80686 92544 | 220 79841 67552 | 12806 30817 18016 |
| 59 | 4 21805 33641 | 248 86514 84819 | 14683 04376 04321 |
| 60 | 4 66560 00000 | 279 93600 00000 | 16796 16000 00000 |
| 61 | 5 15203 74361 | 314 27428 36021 | 19170 73129 97281 |
| 62 | 5 68002 35584 | 352 16146 06208 | 21834 01055 84896 |
| 63 | 6 25235 02209 | 393 89806 39167 | 24815 57802 67521 |
| 64 | 6 87194 76736 | 439 80465 11104 | 28147 49767 10656 |
| 65 | 7 54188 90625 | 490 22278 90625 | 31864 48128 90625 |
| 66 | 8 26539 50016 | 545 51607 01056 | 36004 62062 69696 |
| 67 | 9 04583 82169 | 606 07116 05323 | 40606 76775 56641 |
| 68 | 9 88674 82624 | 672 29888 18432 | 45716 32396 53376 |
| 69 | 10 79181 63081 | 744 63532 52589 | 51379 83744 28641 |
| 70 | 11 76490 00000 | 823 54300 00000 | 57648 01000 00000 |
| 71 | 12 81002 83921 | 909 51201 58391 | 64575 35312 45761 |
| 72 | 13 93140 69504 | 1003 06130 04288 | 72220 41363 08736 |
| 73 | 15 13342 26289 | 1104 73985 19097 | 80646 00918 94081 |
| 74 | 16 42064 90176 | 1215 12802 73024 | 89919 47402 03776 |
| 75 | 17 79785 15625 | 1334 83886 71875 | 1 00112 91503 90625 |
| 76 | 19 26999 28576 | 1464 51945 71776 | 1 11303 47874 54976 |
| 77 | 20 84223 80089 | 1604 85232 66853 | 1 23573 62915 47681 |
| 78 | 22 51996 00704 | 1756 55688 54912 | 1 37011 43706 83136 |
| 79 | 24 30874 55521 | 1920 39089 86159 | 1 51710 88099 06561 |
| 80 | 26 21440 00000 | 2097 15200 00000 | 1 67772 16000 00000 |
| 81 | 28 24295 36481 | 2287 67924 54961 | 1 85302 01888 51841 |
| 82 | 30 40066 71424 | 2492 85470 56768 | 2 04414 08586 54976 |
| 83 | 32 69403 73369 | 2713 60509 89627 | 2 25229 22321 39041 |
| 84 | 35 12980 31616 | 2950 90346 55744 | 2 47875 89110 82496 |
| 85 | 37 71495 15625 | 3205 77088 28125 | 2 72490 52503 90625 |
| 86 | 40 45672 35136 | 3479 27822 21696 | 2 99217 92710 65856 |
| 87 | 43 36262 01009 | 3772 54794 87783 | 3 28211 67154 37121 |
| 88 | 46 44040 86784 | 4086 75596 36992 | 3 59634 52480 55296 |
| 89 | 49 69812 90961 | 4423 13348 95529 | 3 93658 88057 02081 |
| 90 | 53 14410 00000 | 4782 96900 00000 | 4 30467 21000 10000 |
| 91 | 56 78692 52041 | 5167 61019 35731 | 4 70252 52761 51521 |
| 92 | 60 63550 01344 | 5578 46601 23648 | 5 13218 87313 75616 |
| 93 | 64 69901 83449 | 6017 00870 60757 | 5 59581 80966 50401 |
| 94 | 68 98697 81056 | 6484 77594 19264 | 6 09568 93854 10816 |
| 95 | 73 50918 90625 | 6983 37296 09375 | 6 63420 43128 90625 |
| 96 | 78 27577 89696 | 7514 47478 10816 | 7 21389 57898 38336 |
| 97 | 83 29720 04929 | 8079 82844 78113 | 7 83743 35943 76961 |
| 98 | 88 58423 80864 | 8681 25533 24672 | 8 50763 02258 17856 |
| 99 | 94 14801 49401 | 9320 65347 90699 | 9 22744 69442 79201 |

## Девятая и десятая степени чиселъ отъ 0 до 100.

| Числ. | XI-я | X-я |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 512 | 1024 |
| 3 | 19683 | 59049 |
| 4 | 2 62144 | 10 48576 |
| 5 | 19 53125 | 97 65625 |
| 6 | 100 71696 | 604 30176 |
| 7 | 403 53607 | 2824 75249 |
| 8 | 1342 17728 | 10737 41824 |
| 9 | 3874 20489 | 34867 84401 |
| 10 | 10000 00000 | 1 00000 00000 |
| 11 | 23579 47691 | 2 59374 24601 |
| 12 | 51597 80352 | 6 19173 64224 |
| 13 | 1 06044 99373 | 13 78584 91849 |
| 14 | 2 06610 46784 | 28 92546 54976 |
| 15 | 3 84433 59375 | 57 66503 90625 |
| 16 | 6 87194 76736 | 109 95116 27776 |
| 17 | 11 85878 76497 | 201 59939 00449 |
| 18 | 19 83592 90368 | 357 04672 26624 |
| 19 | 32 26876 97779 | 613 10662 57801 |
| 20 | 51 20000 00000 | 1024 00000 00000 |
| 21 | 79 42800 46581 | 1667 98809 78201 |
| 22 | 120 72629 17792 | 2655 99227 91424 |
| 23 | 180 11526 61463 | 4142 65112 13649 |
| 24 | 264 18075 40224 | 6340 33809 65376 |
| 25 | 381 46972 65625 | 9536 74316 40625 |
| 26 | 542 95036 78976 | 14116 70956 53376 |
| 27 | 762 55974 84987 | 20589 11320 94649 |
| 28 | 1057 84559 53408 | 29619 67666 95424 |
| 29 | 1450 71459 75869 | 42070 72333 00201 |
| 30 | 1968 30000 00000 | 59049 00000 00000 |
| 31 | 2643 96221 60671 | 81962 82869 80801 |
| 32 | 3518 43720 88832 | 1 12589 99068 42624 |
| 33 | 4641 14844 01953 | 1 53157 89852 64449 |
| 34 | 6071 69927 66464 | 2 06437 77540 59776 |
| 35 | 7881 56386 71875 | 2 75854 73535 15625 |
| 36 | 10155 99566 68416 | 3 65615 84400 62976 |
| 37 | 12996 17397 93077 | 4 80858 43724 17849 |
| 38 | 16521 61012 62848 | 6 27821 18479 88224 |
| 39 | 20872 83611 58759 | 8 14040 60851 91601 |
| 40 | 26214 40000 00000 | 10 48576 00000 00000 |
| 41 | 32738 19343 93961 | 13 42265 93101 52401 |
| 42 | 40667 13838 49472 | 17 08019 81216 77824 |
| 43 | 50259 26119 36843 | 21 61148 23132 84249 |
| 44 | 61812 18395 09504 | 27 19736 09384 18176 |
| 45 | 75668 06425 78125 | 34 05062 89160 15625 |
| 46 | 92219 01626 69056 | 42 42074 74827 76576 |
| 47 | 1 11913 04731 02767 | 52 59913 22358 30049 |
| 48 | 1 35260 54605 94688 | 64 92506 21085 45024 |
| 49 | 1 62841 35979 10449 | 79 79226 62976 12001 |

## Девятая и десятая степени чиселъ отъ 0 до 100.

| Числ. | IX-я | X-я |
|---|---|---|
| 50 | 1 95312 50000 00000 | 97 65625 00000 00000 |
| 51 | 2 33416 51730 90451 | 119 04242 38276 13001 |
| 52 | 2 77990 58836 35712 | 144 55510 59490 57024 |
| 53 | 3 29976 35918 02133 | 174 88747 03655 13049 |
| 54 | 3 90430 59123 13344 | 210 83251 92649 20576 |
| 55 | 4 60536 65839 84375 | 253 29516 21191 40625 |
| 56 | 6 41616 94481 44896 | 303 30548 90961 14176 |
| 57 | 6 35146 19553 84057 | 362 03333 14568 91249 |
| 58 | 7 42765 87396 44928 | 430 80420 68994 05824 |
| 59 | 8 66299 58186 54939 | 511 11675 33006 41401 |
| 60 | 10 07169 60000 00000 | 604 30176 00000 00000 |
| 61 | 11 69414 60928 34141 | 713 34291 16628 82601 |
| 62 | 13 53708 65462 63552 | 839 29936 58683 40224 |
| 63 | 15 63381 41568 53823 | 984 93029 18817 90849 |
| 64 | 18 01439 85094 81984 | 1152 92150 46068 46976 |
| 65 | 20 71191 28378 90625 | 1346 27433 44628 90625 |
| 66 | 23 76268 00137 99936 | 1568 33688 09107 95776 |
| 67 | 27 20653 43962 94947 | 1822 83780 45517 61449 |
| 68 | 31 08710 02964 29568 | 2113 92282 01572 10624 |
| 69 | 35 45208 78355 76229 | 2446 19406 06547 59801 |
| 70 | 40 35360 70000 00000 | 2824 75249 00000 00000 |
| 71 | 45 84850 07184 49031 | 3255 24355 10098 81201 |
| 72 | 51 99869 78142 28992 | 3743 90624 26244 87424 |
| 73 | 58 87158 67082 67913 | 4297 62582 97035 57642 |
| 74 | 66 54041 07750 79424 | 4923 99039 73558 77376 |
| 75 | 75 08468 62792 96875 | 5631 35147 09472 65625 |
| 76 | 84 59064 38465 78176 | 6428 88893 23399 41376 |
| 77 | 95 15169 44491 71437 | 7326 68047 25862 00649 |
| 78 | 106 86892 09132 84608 | 8335 77583 12361 99424 |
| 79 | 119 83159 39826 18319 | 9468 27608 26268 47201 |
| 80 | 134 21772 80000 00000 | 10737 41824 00000 00000 |
| 81 | 150 09463 52969 99121 | 12157 66545 90569 28801 |
| 82 | 167 61955 04097 08032 | 13744 80313 35960 58624 |
| 83 | 186 94025 52675 40403 | 15516 04118 72058 53449 |
| 84 | 208 21574 85309 29664 | 17490 02287 65980 91629 |
| 85 | 231 61694 62832 03125 | 19687 44043 40722 65625 |
| 86 | 257 32741 73116 63616 | 22130 15788 88030 70976 |
| 87 | 285 54415 42430 29527 | 24842 34141 91435 68849 |
| 88 | 316 47838 18288 66048 | 27850 09760 09402 12224 |
| 89 | 350 35640 37074 85209 | 31181 71992 99661 83601 |
| 90 | 387 42048 90000 00000 | 34867 84401 00000 00000 |
| 91 | 427 92980 01297 88411 | 38941 61181 18107 45401 |
| 92 | 472 16136 32865 56672 | 43438 84542 23632 13824 |
| 93 | 520 41108 29884 87293 | 48398 23071 79293 18249 |
| 94 | 572 99480 22286 16704 | 53861 51140 94899 70176 |
| 95 | 630 24940 97246 09375 | 59873 69392 38378 90625 |
| 96 | 692 53399 58244 80256 | 66483 26359 91501 04576 |
| 97 | 760 23105 86545 65217 | 73742 41268 94928 26049 |
| 98 | 833 74776 21301 49888 | 81707 28068 87546 89024 |
| 99 | 913 51724 74836 40899 | 90438 20750 08804 49001 |

Въ таблицахъ первыхъ пяти степеней чиселъ отъ 1 до 1000, единицы и десятки этихъ чиселъ помѣщены въ первой вертикальной графѣ, а сотни — въ первой горизонтальной строкѣ. Степень каждаго однозначнаго или двузначнаго числа находится противъ него во второй вертикальной графѣ; а степень каждаго трехзначнаго числа — подъ его сотнями въ вертикальной графѣ, гдѣ она пересѣкается строкою горизонтальною, содержащею десятки и единицы. Пояснимъ это примѣрами:

*Найти* $67^5$. Въ таблицѣ пятыхъ степеней, въ первой графѣ, ищу число 67, и прямо противъ него нахожу пятую его степень 1350125107.

*Найти* $367^5$. Въ той же таблицѣ беру вертикальную графу подъ числомъ 300, и горизонтальную строку, въ которой стоитъ число 67: гдѣ онѣ встрѣчаются, тамъ и находится $6657793506607=367^5$.

Таблица степеней: шестой, седьмой,.... десятой, для чиселъ двузначныхъ, понятна и безъ объясненія.

# ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

| ран. | Строка. | Напечатано: | Слѣдуетъ читать: |
|---|---|---|---|
| 11 | 4 сверху | положительныя о | положительныя и |
| 12 | 23 » | $a^{m-1}.a^{n+1}.a^{m-2}.a^{n+2}=$ | $a^{m-1}.a^{n+1}=a^{m-2}.a^{n+2}=\dots$ |
| 18 | 13 » | $3a^2b^2c^3$ | $3a^3b^2c^3$ |
| 24 | 6 снизу | $(q+q'+q''\dots)C$ | $(q+q'+q''+\dots)D$ |
| 26 | 18 » | AD | AB |
| 29 | 9 сверху | $3ab^2$ | $3a^2b^2$ |
| 35 | 11 » | $\frac{ba^3b^2}{4a^2b^2c+10ab^3}$ | $\frac{6a^3b^2}{4a^2b^2c+10ab^3}$ |
| — | 5 снизу | $3m^3n$ | $3m^2n$ |
| 37 | 10 сверху | $c.df$ | $c.bf$ |
| 42 | 16 » | $30-x=20$ | $30-x=10$ |
| 68 | 16 снизу | $2.1=3$ | $2.1=2$ |
| 86 | 9 » | $nx-my$ | $my-nx$ |
| 92 | 4 сверху | $5^2>(-7)^2$ | $5^3>(-7)^3$ |
| 06 | 10 » | раздѣлитъ | раздѣлимъ |
| 09 | 14 « | $\frac{m_3d+m_2u}{n_3d+n_2z}$ | $\frac{m_3d+m_2u}{n_3d+n_2u}$ |
| 10 | 2 » | $\frac{x}{a}$ уменьшенъ знаменатель | $\frac{m_1}{n_1}$ знаменатель меньше |
| 19 | 11 » | 55125 | 55225 |
| 21 | 14 снизу | а нахожу | и нахожу |
| [illegible] | 5 сверху | Зто | Это |
| 49 | 6 » | разноеть | разность |
| — | 6 снизу | $aq^2$ | $a^2q^2$ |
| 67 | 11 сверху | перваго | квадрата перваго |
| 73 | 8 снизу | $\frac{b^3}{2y}$ | $\frac{b^3}{27}$ |
| 78 | 19 » | $\frac{1}{(a^m)^n}$ | $\frac{1}{(a^{-m})^n}$ |
| 80 | 1 и 2 св. | $3ab^2c$ | $3ab^2c^3$ |
| 84 | 10 снизу | $a\sqrt{\phantom{x}}$ | $a\sqrt[n]{\phantom{x}}$ |
| 36 | 9 сверху | радикалолъ | радикаломъ |
| — | 15 » | $=r$ | $=r^m$ |
| 186 | 2 снизу | $\sqrt[mn]{\sqrt[n]{p}}$ | $\sqrt[m]{\sqrt[n]{p}}$ |
| 200 | 13 » | къ 243=3 | къ 243—3 |
| 208 | 3 » | $10^{0,9}$ | $10^{0,3}$ |

| *Стран.* | *Строка.* | *Напечатано:* | *Слѣдуетъ читать:* |
|---|---|---|---|
| 213 | 13 сверху | завлючается | заключается |
| 221 | 8 снизу | 2785 | 2585 |
| 223 | 11 сверху | Логариөиы | Логариөмы |
| 229 | 9 снизу | 3) $\sqrt{\phantom{x}}$ | 3) $\sqrt[5]{\phantom{x}}$ |
| — | 7 » | 162 | 126 |
| 254 | 1 сверху | выразамъ | выразимъ |
| 256 | 15 снизу | рада | рода |
| 264 | 18 » | $w^{n+1}-1w^{n+2}$ | $w^{n+1}+w^{n+2}$ |
| 270 | 12 и 14 св. | 80 | 800 |
| 278 | 7 сверху | сочетеній | сочетаній |
| 282 | 13 » | *при этотъ* | *при этомъ* |
| 288 | 13 » | благополучныхъ | благопріятныхъ |
| 289 | 18, 6 и 1 снизу | лотарея | лоттерея |
| — | 15 снизу | лотарейной | лоттерейной |
| 298 | 6 сверху | вѣрность | вѣроятность |
| 301 | 10 » | Лотарея | Лоттерея |
| 322 | 4 » | развергнуты | развернуты |
| 325 | 7 снизу | $\frac{l'a}{1.2}$ | $\frac{l'^2a}{1.2}$ |
| 330 | 18 сверху | $b>$ | $b<$ |
| 335 | 15 снизу | неободимо | необходимо |
| 353 | 12 сверху | звакамн | знаками |
| 355 | 2 снизу | $\sqrt{\frac{a}{c}}$ | $a\sqrt{\frac{a}{c}}$ |
| 356 | 6 сверху | подсти[illegible]ь | подставить |
| 358 | 11 снизу | обратнымъ | тѣмъ же |
| 363 | 7 » | въ немъ | что въ немъ |
| 370 | 8 » | кигда | когда |
| 373 | 10 и 11 снизу | $+\frac{9}{10}$ | $-\frac{9}{10}$ |
| 385 | 18 снизу | $a-a\alpha$ | $b-a^{\alpha}$ |
| 391 | 1 » | $x-4$ | $x+4$ |
| 444 | 13 » | $\frac{\theta_2}{\theta}$ | $\frac{\theta_2}{\theta_1}$ |
| 447 | 10 » | удовлетворительны | достаточны |

po pravitone