TRYGONOMETRYA

Z TEORYĄ

ILOŚCI UROJONYCH I Z NOTAMI

PRZEZ

G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO

PROFESORA MATEMATYKI

PARYŻ
W KSIĘG. K. KROLIKOWSKIEGO
20, ULICA DE SEINE.

WARSZAWA
W KSIĘG. M. GLÜCKSBERGA
NA KRAKOWSKIEM PRZEDMIEŚCIU.

1870

DO CZYTELNIKA.

Po mojej Arytmetyce i Geometryi, Trygonometrya wychodzi również nakładem biblioteki Kórnickiej.

Podjąłem się pracy napisania dzieła którego brak najdotkliwiej sam czułem jako nauczyciel; a podjąłem się jej w przekonaniu że jedynie słuszną miarą zasługi jest stopień wiary w świętość powinności, wiary niezachwianej ani trudnością zadania, ani niedostatkiem pierwszych warunków powodzenia wobec rozporządzeń władz szkolnych, ani wreszcie bezmyślną a bolesną, bo doznaną od rodaków, obojętnością!

Żeby dać wyobrażenie o ważności dzisiejszej trygonometryi, dość powiedzieć że ta gałąź matematyki więcej się rozrosła w ostatnich czasach, niż od Hipparcha i Ptolemeusza do Kopernika i Kagnoli; ze szczupłej teoryi rozwiązywania trójkątów prostolinijnych i sferycznych, stała się umiejętnością funkcyj kołowych!

Łaskawy Czytelniku, łatwo pojmiesz że musiałem się wahać czy przedsięwziąć wypracowanie dzieła takiej doniosłości, czy je pozostawić odważniejszym. Zaprawdę ci powiedam, gdyby P. Jan Działyński nie był mnie niejako zniewolił ciągłą zachętą, nie byłbyś czytał mojej Trygonometryi. Czybyś był na tem stracił? sąd nie do mnie należy.

Nie potrzebuję rozbierać przedmiotów zawartych w tem dziele; bo spis rzeczy, wykazujący jego skład i szczegóły, wyręcza mnie w tym względzie. Oświadczam tylko że wyłożyłem w całej rozciągłości trygonometryę prostolinijną i sferyczną, dołączając liczebne przykłady rozwiązywania trójkątów; dałem zupełną teoryę rzutów prostolinijnych i powierzchnych; wybrałem mnogie zastosowania funkcyj kołowych do geometryi i do algebry; a w każdej części dzieła umieściłem rozmaite zagadnienia i wiele ćwiczeń.

Ilościom urojonym przeznaczyłem znaczne miejsce, stosowne do ich ważności; powiem dla czego. Ilości urojone, uważane jako wynik algebrycznych działań, jako potrzeba uzupełnienia i połączenia rozsypanych twierdzeń, są istotnym nabytkiem nowoczesnej umiejętności, i stanowią rzeczywisty jej postęp. Użycie tak określonych ilości urojonych rozszerzyło matematyczną wiedzę; dlatego starałem się wyłożyć ich teoryę dość obszernie, i ze ścisłością jaką w dziele elementarnem osięgnąć można.

W ostatnich czasach zaproponowano jeszcze inne wyrażenia urojone, które także nazwano ilościami, i, uważając je *a priori* jako pojęcia geometryczne, jako wielkości samoiste (*absolutne*), wyobrażono do ich przedstawienia figury na płaszczyznie i w przestrzeni! Czy takie wyrażenia urojone mają matematyczną wartość, czy są postępem umiejętności czy tylko płodem wyobraźni, czas pokaże!

Zaiste, ilości urojone grają dziś wielką rolę w wysokiej analizie, mianowicie w funkcyach podwójnie okresowych; one dopiero rozjaśniły funkcye elliptyczne. Dlatego właśnie trzeba niepospolitej roztropności żeby nie uledz złudzeniu stawiania matematyki na ilościach urojonych. Nie dawno temu, jeden z mistrzów umiejętności, zapowiedał że posiada klucz ilości urojonych. Na nieszczęście, zamiast tym kluczem otworzyć tajemnicę, otworzył wejście do manowców z których sam niełatwo się wydostał; ale w których się inni pobłąkali, rozprawiając o ilościach urojonych jak gdyby one były istotnemi rzeczywistościami!

Ilości urojone powszechnie przyjęte, które się same przedstawiły, takie właśnie jakie wyłożyłem, zadość czynią wszelkim wymagalnościom umiejętności; niema więc dotąd żadnej potrzeby tworzenia innych. Z tej przyczyny nic nie powiedziałem o nowo zaprojektowanych; tem bardziej że, oddalając się w głównej własności od ilości rzeczywistych, te mniemane ilości ogólne zdają się poniekąd zagadką! Trzeba poczekać aż dalszy postęp matematyki wskaże konieczność wprowadzenia takich wyrażeń, albo je stanowczo odrzuci.

Jedna z not umieszczonych na końcu dzieła zawiera wiedzę o dostawie i wstawie hiperbolicznej.

Pisałem w Paryżu, dnia 24 Czerwca 1870.

G.-H. NIEWĘGŁOWSKI.

matematyki na ilościach urojonych. Nie dawno temu, jeden z mistrzów umiejętności, zapowiedział że posiada klucz ilości urojonych. Na nieszczęście, zamiast tym kluczem otworzyć tajemnicę, otworzył wejście do manowców z których sam niełatwo się wydostał; ale w których się inni pobłąkali, rozprawiając o ilościach urojonych jak gdyby one były istotnemi rzeczywistościami!

Ilości urojone powszechnie przyjęte, które się same przedstawiły, takie właśnie jakie wyłożyłem, zadość czynią wszelkim wymagalnościom umiejętności; niema więc dotąd żadnej potrzeby tworzenia innych. Z tej przyczyny nic nie powiedziałem o owych zaprojektowanych; tem bardziej to, oddalając się w głównej własności od ilości rzeczywistych, te mniemane ilości ogólne zdaje się poniekąd [illegible]! Trzeba poczekać, aż dalszy postęp matematyki wskaże konieczność wprowadzenia takich wyrażeń, albo je stanowczo odrzuci.

Jedna z not umieszczonych na końcu dzieła zawiera wiedzę o dostawie i wstawie hiperbolicznej.

Pisałem w Paryżu, dnia 24 Czerwca 1870.

G.-H. NIEWĘGŁOWSKI.

SPIS RZECZY.

ZAWARTYCH W TEM DZIELE.

KSIĘGA DRUGA

TRYGONOMETRYA PROSTOLINIJNA.

ZASTOSOWANIE FUNKCYJ KOŁOWYCH DO GEOMETRYI.

KSIĘGA TRZECIA

TRYGONOMETRYA SFERYCZNA.

ZASTOSOWANIA TRYGONOMETRYI SFERYCZNEJ.

ZASTOSOWANIE TRYGONOMETRYI DO FIGUR SFERYCZNYCH.

KSIĘGA CZWARTA

ZASTOSOWANIE FUNKCYJ KOŁOWYCH DO ALGEBRY.

FUNKCYE KOŁOWE ZMIENNYCH UROJONYCH.

NOTY

FUNKCYE KOŁOWE ZMIENNYCH UROJONYCH.

NOTY.

TRYGONOMETRYA

KSIĘGA PIERWSZA

FUNKCYE KOŁOWE

Określenia.

1. Gdy dwie ilości zmienne są takie że na każdą wartość jednej odpowieda wartość drugiej, mówi się wtedy że pierwsza jest *zmienną niezależną*, a druga jej *funkcyą*. I tak, okrąg koła, powierzchnia koła są funkcyami promienia; i nawzajem, promień koła jest funkcyą jego okręgu, albo powierzchni. Sprężystość pary rośnie z temperaturą, jest przeto jej funkcyą.

2. Są w kole pewne linie, których stosunki do promienia stanowią tak zwane *funkcye kołowe*. Teorya funkcyj kołowych jest przedmiotem *trygonometryi* którą wyłożyć przedsiębierzemy.

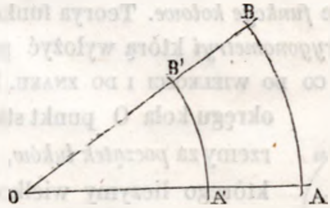
3. Łuki kół co do wielkosci i do znaku. Niech będzie na okręgu koła O punkt stały A, który bierzemy za *początek łuków*, to jest za kres od którego liczymy wielkość tych łuków; i przypuśćmy że punkt ruchomy M, wychodząc z punktu A, przebiega okrąg w jedną albo w drugą stronę. Biorąc promień koła

za jedność linijną, oznaczmy przez x długość przebieżonego łuku AM. Jeśli punkt ruchomy M posuwa się w stronę AMBM, mówimy że przebieżony łuk x jest *dodatny*; a jeśli punkt M idzie w stronę ANB'N'A' *przeciwną* pierwszej, powiemy że łuk x jest *odjemny*. Na mocy takiej ugody znaków, której wszędzie użyjemy, wartość *algebryczna* x wyraża zarazem *długość* i *stronę* drogi jaką punkt M przebiega, względnie do punktu wyjścia A.

Owoż, punkt ruchomy M może się posuwać nieograniczenie w jedną albo w drugą stronę, i przebiegać wiele razy ten sam okrąg. Gdy punkt M opisuje raz okrąg, wyrażamy długość łuku x, mówiąc że rośnie od 0 do 2π; a gdy punkt M, kontynując ruch, opisuje okrąg drugi raz, potem trzeci raz ... wtedy x rośnie od 2π do 4π, potem od 4π do 6π;... Jeśli zaś punkt M, idąc w stronę przeciwną AN'B' przebiega raz okrąg, potem drugi raz, trzeci raz,... natenczas mówimy że łuk x maleje od 0 do -2π, potem od -2π do -4π, od -4π do -6π,...

Widzimy tedy że łuk x rośnie od 0 do $+\infty$, a maleje od 0 do $-\infty$. To wyrażamy ogólniej mówiąc że łuk x zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$.

MIARA KĄTOW.



4. Niech będzie kąt AOB; z jego wierzchołka O jako środka i promieniem jakimkolwiek OA, nakreślmy łuk koła AB objęty między ramionami. Stosunek $\frac{AB}{OA}$ łuku objętego do promieia jest stały, niezależny od wielkości tego promienia; albowiem, jeśli nakreślimy z wierzchołka O jako środka, inny łuk koła A'B' objęty między ramionami kąta, dwa łuki AB i A'B' będą pobobne i dadzą

$$\frac{A'B'}{OA'} = \frac{AB}{OA}.$$

Ztąd wynika że, nazywając α ten stosunek, i oznaczając przez R i a długości promienia OA i łuku AB, odniesione do jedności linijnej jakiejkolwiek, mamy

$$\frac{a}{R} = \alpha, \quad \text{zkąd} \quad a = R\alpha.$$

Liczba α jest proporcyonalna do kąta AOB. Owoż, gdy a=R wtedy $\alpha = 1$; więc, *jeśli za jedność kątową weźmiemy kąt obejmujący łuk równy swemu promieniowi, kąt* AOB *będzie miał zamiarę stosunek* $\frac{a}{R}$ (*)

Ta miara kąta, zostawiając jedność linijną dowolną, jest bardzo dogodna w zastosowaniach geometrycznych; tem więcej że daje formułę $a = R\alpha$, która nastręcza sposób porównywania łuków kół różnego promienia.

Biorąc teraz promień OA za jedność linijną, będzie

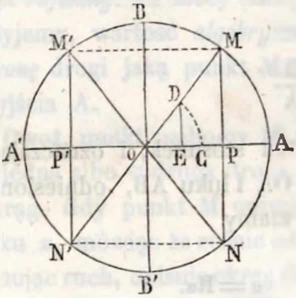
$$R = 1 \quad i \quad a = \alpha.$$

Więc, *kąt ma za miarę tę samą liczbę co łuk objęty między jego ramionami i nakreślony z jego wierzchołka jako środka promieniem wziętym za jedność linijną*. Tym sposobem liczba $\frac{\pi}{2}$ przedstawia zarazem kąt prosty i ćwiercian. Dla tej samej przyczyny, liczby stopni, minut, sekund,.. oznaczające wielkość łuków, oznaczają temsamem wielkość kątów odpowiedających.

(*) Kąt obejmujący łuk równy swemu promieniowi ma $57^0\ 17'\ 44'',80$.

WSTAWA.

5. Niech będą, na kole promienia $OA = R$, A początek łuków, i M skrajność jednego z tych łuków mogąca brać wszystkie położenia możebne na okręgu. Poprowadźmy dwie średnice prostopadłe AA', BB', i spuśćmy prostopadłę MP na AA'. Stosunek $\frac{MP}{R}$, prostopadłej do promienia, zależy od wielkości kąta AOM, nie zaś od długości promienia OA; albowiem, jeśli z punktu O jako środka i promieniem jakimkolwiek OC, nakreślimy łuk CD i spuścimy prostopadłę DE na AA', będzie $\frac{DE}{OD} = \frac{MP}{OM}$. Stosownie do wiadomej ugody znaków, będziemy uważali prostopadłę MP jako *dodatną* albo *odjemną* według jak punkt M będzie się znajdował na półokręgu ABA albo na półokręgu $AB'A'$. Stosunek $\frac{MP}{R}$, albo, biorąc promień R za jedność linijną, długość MP, nazywa się *wstawą* łuku AM; zatem, $+MP$ jest wstawą łuków mających skrajność w M, $+M'P'$ wstawą tych które mają skrajność w M'; a zaś $-NP$ jest wstawą łuków mających skrajność w N, nakoniec $-N'P$ wstawą tych których skrajność pada w N'. Ztąd wynika następujące określenie



WSTAWĄ *łuku jest liczba, dodatna albo odjemna, która mierzy prostopadłę spuszczoną z jednej skrajności tego łuku na średnicę przechodzącą przez drugą skrajność.*

Nazywając x długość łuku mającego skrajność M, wyraża się jego wstawę pisząc, przez skrócenie, wst$x$

wst$x$ jest pierwszą funkcyą kołową.

6. Uważajmy teraz jak się zmienia funkcya wst$x$, gdy łuk x zmienia się ciągle.

Gdy łuk x rośnie ciągle od 0 do $\frac{\pi}{2}$, wst$x$ rośnie także ciągle od 0 do 1; po czem, gdy łuk x rośnie od $\frac{\pi}{2}$ do π, wst$x$ maleje nieprzerwanie od 1 do 0; to pokazuje że wst x dosięga wartości maximum $+1$ gdy $x = \frac{\pi}{2}$. Następnie, gdy x rośnie od π do $\frac{3\pi}{2}$, wst x jest odjemna i maleje ciągle od 0 do -1; a gdy x rośnie od $\frac{3\pi}{2}$ do 2π, wst$x$ jest odjemna i maleje od -1 do 0; tak że -1 jest jej wartością minimum. Potem, jeśli x rośnie jeszcze od 2π do 4π, a następnie od 4π do 6π, etc. wst$x$ bierze *okresowo* wartości które miała, to jest przechodzi przez wszystkie wartości, i w tym samym porządku, które nabywa gdy łuk x zwiększa się od 0 do 2π.

Nakoniec, jeśli łuk x jest odjemny i zmienia się od 0 do $-\infty$, widzimy łatwo że wst$x$ przechodzi przez te same wartości, tylko ze znakiem przeciwnym, które bierze gdy łuk x rośnie od 0 do $+\infty$; albowiem, skrajności dwóch łuków x i $-x$, równych ale ze znakami przeciwnemi, są dwoma punktami symetrycznemi względem średnicy AA'; więc

(1) $$\text{wst}\,(-x) = -\,\text{wst}\,x.$$

Co pokazuje *że dwa łuki równe i znaków przeciwnych mają wstawy równe i znaków przeciwnych.*

Zbierając główniejsze wartości wst x, mamy

$$\text{wst}\,0 = 0,\quad \text{wst}\,\frac{\pi}{2} = +1,\quad \text{wst}\,\pi = 0,\quad \text{wst}\,\frac{3\pi}{2} = -1,\ \text{wst}\,2\pi = 0.$$

Z tego wszystkiego wynika że, jakikolwiek jest łuk x, dodatny albo odjemny, mamy zawsze równanie

$$\text{wst}\,(2k\pi + x) = \text{wst}x \tag{2}$$

w którem k znaczy liczbę całkowitą jakąkolwiek, dodatną albo odjemną.

To równanie dowodzi że funkcya wst$x$ nie zmienia się gdy się powiększa albo zmniejsza łuk x okręgiem 2π. Wyraża się tę znamienitą własność, mówiąc że wst$x$ jest *funkcyą okresową* łuku x, mającą okres 2π. Nadto, wst x jest funkcyą ciągłą, to jest bierze w każdym okresie wszystkie wartości po sobie idące, począwszy od -1 aż do $+1$; tak że, *wszelka liczba zawarta między* -1 i $+1$, *albo nawet równa jednej z tych wartości, może być uważana jako wstawa pewnego łuku koła.*

Równanie (1) pokazuje że wst$x$ zmienia sam tylko znak gdy łuk x zmienia znak; tę własność wyraża się mówiąc że funkcya wst$x$ jest *funkcyą nieparzystą.*

7. Dwa łuki kół nazywają się *spełniającemi*, albo spełnieniem jeden drugiego, gdy ich summa jest równa półokręgowi.

Jakikolwiek jest łuk x, dodatny albo odjemny, skrajności dwóch łuków x i $\pi + x$ są oczywiście dwiema skrajnościami jednej średnicy; więc wstawy tych dwóch łuków są równe i znaków przeciwnych; ztąd równanie

$$\text{wst}\,(\pi + x) = -\,\text{wst}x, \tag{3}$$

które pokazuje że funkcya wst$x$ zmienia sam tylko znak gdy się powiększa albo zmniejsza łuk x półokręgiem π.

Ponieważ łuk x jest jakikolwiek, kładąc w ostatniej formule $-x$ zamiast $+x$, będzie

$$\text{wst}\,(\pi - x) = -\,\text{wst}\,(-x);$$

ale formuła (1) daje

$$\text{wst}\,(-x) = -\,\text{wst}x,$$

więc

(4) $$\text{wst}\,(\pi - x) = \text{wst}\,x$$

To ważne równanie dowodzi że *dwa łuki spełniające mają te same wstawy.*

Zatem

(5) $$\text{wst}\,[(2k+1)\pi - x] = \text{wst}\,(\pi - x) = \text{wst}\,x.$$

8. Zbliżając równania (1), (5), widzimy że, jakikolwiek jest łuk x, dodatny albo odjemny, wszystkie łuki zawarte w formułach

$$2k\pi + x \qquad \text{albo} \qquad (2k+1)\,\pi - x$$

mają te same wstawy.

9. Uważajmy teraz łuk koła mniejszy od półokręgu, jako naprzykład łuk AM (*fig. powyższa*); wstawa tego łuku jest dodatna i równa stosunkowi $\frac{MP}{R}$. Jeżeli przedłużymy prostopadłę MP aż do spotkania okręgu w punkcie N, ta prostopadła będzie połową cięciwy MN, a łuk AM połową łuku MN podpasanego przez tę cięciwę. Więc, biorąc promień za jedność, mamy twierdzenie

Wstawa łuku mniejszego od półokręgu jest równa połowie cięciwy łuku dwa razy większego; dlatego nazwano ją *półwpisaną* (*semi inscripta, sin.*).

Ztąd wynika że bok wielokąta foremnego, mającego n boków, wpisanego wkoło promienia 1. wyraża się przez $2\,\text{wst}\,\frac{\pi}{n}$. Za pomocą tego wniosku można znaleźć wartość wstawy niektórych kątów.

I tak, 1° Bok sześciokąta foremnego wpisanego w koło promienia 1 jest 1; więc

$$\text{wst}\,\frac{\pi}{6} = \text{wst}\,30^\circ = \frac{1}{2}.$$

2° Bok kwadratu wpisanego wyraża się przez $\sqrt{2}$; zatem

$$\text{wst}\,\frac{\pi}{4} = \text{wst}\,45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

3° Podobnie, bok trójkąta równobocznego wpisanego jest $\sqrt{3}$; więc

$$\text{wst}\,\frac{\pi}{3} = \text{wst}\,60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

4° Bok dziesięciokąta foremnego wpisanego jest $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$; więc

$$\text{wst}\,\frac{\pi}{10} = \text{wst}\,18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

5° Tak samo, bok dziesięciokąta gwiazdzistigo foremnego (*) jest $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$; więc

$$\text{wst}\,\frac{3\pi}{10} = \text{wst}\,54^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

6° Bok pięciokąta foremnego jest $\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; zatem

$$\text{wst}\,\frac{\pi}{5} = \text{wst}\,36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

7° Podobnie, bok pięciokąta foremnego gwiazdzistego wyraża się przez $\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; więc

$$\text{wst}\,\frac{2\pi}{5} = \text{wst}\,72^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

8°. Można jeszcze wyznaczyć wst 9^0. Jakoż, wiedząc że bok

(*) Zob. naszą geometryę, wydanie drugie 1869 r.

dziesięciokąta foremnego wypukłego jest $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$; otrzymujemy, za pomocą wiadomego zagadnienia geometryi, wartość boku dwudziestokąta foremnego

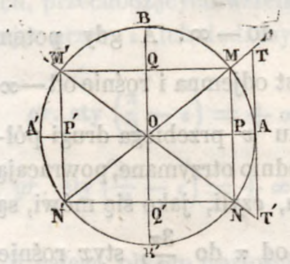
$$\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2}} \quad \text{albo} \quad \frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{5}};$$

więc

$$\text{wst}\,\frac{\pi}{20}=\text{wst}\,9^0=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right).$$

STYCZNA.

10. Niech będzie, jako poprzednio, A początek łuków, i x długość jednego z tych łuków mających skrajność w M. Przez punkt A poprowadźmy styczną TT′ i weźmy jej część AT, zawartą między początkiem A łuku x i przedłużonym promieniem który przechodzi przez jego skrajność M. Stosownie do wiadomej ugody znaków,



będziemy uważali odcinek AT, idący w stronę łuku dodatnego ABA′, jako *dodatny*; a zaś odcinek AT′, idący w stronę przeciwną, jako *odjemny*. Stosunek $\frac{AT}{R}$, albo biorąc promień R za jedność linijną, długość AT nazywa się *styczną* trygonometryczną łuku AM; tak że + AT jest styczną łuków mających skrajność w M albo w N′, a zaś — AT′ jest styczną łuków mających skrajność w M′ albo w N. Ztąd wynika określenie.

STYCZNĄ *łuku jest liczba, dodatna albo odjemna, która mierzy część stycznej poprowadzonej przez początek, a zawartej między tym początkiem i przedłużonym promieniem przechodzącym przez skrajność łuku.*

Wyrażamy styczną łuku x pisząc, przez skrócenie, sty$x$.

sty$x$ jest drugą funkcyą kołową.

11. Uważajmy teraz jak się zmienia funkcya sty$x$, gdy łuk x zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$.

Gdy łuk x rośnie od 0 do $\frac{\pi}{2}$, sty$x$ rośnie także począwszy od zera, i może stać się większą od wszelkiej liczby danej; tak że, gdy x dosięga wartości $\frac{\pi}{2}$, sty$x$, ciągle dodatna, przewyższa wszelką wielkość, co się wyraża mówiąc że sty$x$ staje się $+\infty$; gdy zaś x przechodzi wartość $\frac{\pi}{2}$, sty$x$ staje się odjemną i przeskakuje raptem z $+\infty$ do $-\infty$. A gdy potem łuk x rośnie od $\frac{\pi}{2}$ do π, sty$x$ jest odjemna i rośnie od $-\infty$ do 0. Jeśli następnie skrajność łuku x przebiega drugi półokrąg A'B'A, wartości sty$x$, poprzednio otrzymane, powracają wszystkie i w tym samym porządku, czyli, jako się mówi, są okresowe, to jest: gdy łuk x rośnie od π do $\frac{3\pi}{2}$, sty$x$ rośnie od 0 do $+\infty$; a gdy x przechodzi wartość $\frac{3\pi}{2}$ i rośnie aż do 2π, sty$x$ przeskakuje raptem z $+\infty$ do $-\infty$ i, będąc odjemna, rośnie aż do 0. Po czem, jeśli x rośnie jeszcze od 2π do 4π, i następnie od 4π do 6π, etc. sty$x$ bierze napowrót wszystkie te same wartości które miała gdy łuk się zmienia od 0 do 2π. Nakoniec, jeśli łuk x jest odjemny i zmienia się od 0 do $-\infty$, sty$x$ przechodzi przez te same wartości, tylko ze znakiem przeciwnym, które nabywa gdy x rośnie od 0 do $+\infty$; albowiem, skrajności dwóch łuków x i $-x$, równych i ze znakami przeciwnemi, są symetryczne względem średnicy AA'; zatem, styczne tych dwóch łuków są równe, znaków przeciwnych; co daje

(1) $$\text{sty}(-x) = -\text{sty}x.$$

Więc *dwa łuki równe i znaków przeciwnych mają styczne równe i znaków przeciwnych.*

Zbierając główne wartości sty$x$, mamy

$$\text{sty}\,0 = 0,\quad \text{sty}\,\pi = 0,\quad \text{sty}\,2\pi = 0,$$

Co do wartości nieskończenie wielkich, które bierze sty$x$ gdy łuk x równa się $\frac{\pi}{2}$ albo $\frac{3\pi}{2}$, trzeba je uważać jako granice wartości, dodatnych albo odjemnych, nieokreślnie wielkich, przechodzących wszelką wielkość. Tym sposobem, oznaczając przez ε łuk dodatny który maleje aż do 0, będzie

$$gr.\ \text{sty}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty,\quad gr.\ \text{sty}\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty;$$

$$gr.\ \text{sty}\left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty,\quad gr.\ \text{sty.}\left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty.$$

Z całego obiegu wartości sty$x$ wynika że, jakikolwiek jest łuk x, dodatny albo odjemny, mamy zawsze równanie

(2) $$\text{sty}(k\pi + x) = \text{sty}x,$$

w którem k znaczy liczbę całkowitą jakąkolwiek, dodatną albo odjemną.

To równanie, pokazując że funkcya sty$x$ nie zmienia się gdy się powiększa albo zmniejsza łuk x półokręgiem π, dowodzi że sty$x$ jest funkcyą okresową i ma okres π. W każdym okresie sty$x$ bierze wszystkie wartości możebne tak dodatne jako odjemne; ztąd wnosimy że *wszelka liczba, od* $-\infty$ *do* $+\infty$, *może być uważana jako styczna pewnego łuku koła.*

Funkcya sty$x$ jest funkcyą nieparzystą, ponieważ zmienia znak z łukiem x, jako pokazuje równanie (1).

12. Z równania (2), biorąc $k=1$, wyprowadzamy

$$\text{sty}\,(\pi + x) = \text{sty}\,x. \tag{3}$$

Ten wynik okazuje że dwa łuki x i $\pi + x$ mają styczne równe; czego zresztą wprost się dowodzi, uważając że dwa łuki x i $\pi + x$ są zakończone na dwóch skrajnościach jednej średnicy, zatém mają tę samą styczną.

Ponieważ łuk x jest jakikolwiek dodatny albo odjemny, kładąc w ostatniej formule $-x$ zamiast x, będzie

$$\text{sty}\,(\pi - x) = \text{sty}(-x);$$

ale formuła (1) daje

$$\text{sty}\,(-x) = -\,\text{sty}\,x,$$

więc

$$\text{sty}\,(\pi - x) = -\,\text{sty}\,x, \tag{4}$$

To dowodzi że *dwa łuki spełniające mają styczne równe i znaków przeciwnych.*

13. Uważając że bok wielokąta foremnego n boków, opisanego na kole promienia 1, wyraża się przez $2\,\text{sty}\,\frac{\pi}{n}$, można łatwo mieć styczną niektórych kątów. I tak, znając z geometryi, w funkcyi promienia, bok kwadratu, trójkąta równobocznego i sześciokąta,, opisanych na kole, znajdujemy zaraz

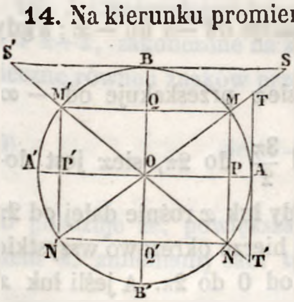
$$\text{sty}\,\frac{\pi}{4} = \text{sty}\,45^0 = 1,$$

$$\text{sty}\,\frac{\pi}{3} = \text{sty}\,60^0 = \sqrt{3},$$

$$\text{sty}\,\frac{\pi}{6} = \text{sty}\,30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

SIECZNA.

14. Na kierunku promienia OM, przechodzącego przez skrajność M danego łuku, weźmy odcinek OT, zawarty między środkiem koła i styczną na początku A. Przyjmujemy teraz następującą ugodę znaków, to jest, uważamy odcinek OT jako *dodatny* albo *odjemny*, według jak przechodzi przez skrajność M łuku albo przez punkt średnicowo przeciwny. Stosunek $\frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{R}}$ albo, biorąc promień za jedność linijną, długość OT nazywa się *sieczną* łuku AM. Ta sieczna, na mocy znaku odcinka OT, jest dodatna albo odjemna. I tak, sieczna łuków mających skrajność w M jest *dodatna* $+\mathrm{OT}$, a zaś sieczna łuków mających skrajność w N′ jest *odjemna* $-\mathrm{OT}$; podobnie, łuki których skrajność pada w N albo w M′ mają sieczne $+\mathrm{OT}'$ albo $-\mathrm{OT}'$. Ztąd następujące określenie



Sieczną *łuku jest liczba, dodatna albo odjemna, która mierzy odległość środka koła od wierzchołka stycznej trygonometrycznej tego łuku.*

Wyrażamy sieczną łuku x pisząc, przez skrócenie, sie$x$.

sie$x$ jest trzecią funkcyą kołową.

15. Uważajmy teraz jak się zmienia sie$x$, gdy łuk x zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$.

Gdy x rośnie od 0 do $\frac{\pi}{2}$, sie$x$ rośnie od $+1$ do $+\infty$; a gdy skrajność łuku x, posuwając się w stronę dodatną, przechodzi z punktu B do punktu sąsiedniego, sie$x$ z dodatnej staje się odjemną i przeskakuje raptem od $+\infty$ do $-\infty$. Gdy x

rośnie od $\frac{\pi}{2}$ do π, sie$x$ rośnie od $-\infty$ do -1; po czem, gdy x rośnie od π do $\frac{3\pi}{2}$, sie$x$ odjemna maleje od -1 do $-\infty$; a gdy x przechodzi przez wartość $\frac{3\pi}{2}$, sie$x$ przeskakuje od $-\infty$ do $+\infty$; nakoniec, gdy x rośnie od $\frac{3\pi}{2}$ do 2π, sie$x$ jest dodatna i maleje od $+\infty$ do $+1$. Gdy łuk x rośnie dalej od 2π do 4π, albo od 4π do 6π, etc, sie$x$ bierze okresowo wszystkie wartości które miała gdy x rośnie od 0 do 2π. A jeśli łuk x jest odjemny i maleje od 0 do $-\infty$, sie$x$ przechodzi przez wszystkie te same wartości które nabywa gdy x rośnie od 0 do $+\infty$; co sama figura jasno pokazuje. Zatem

$$\text{sie}(-x) = \text{sie}\,x \tag{1}$$

Zbierając główne wartości sie$x$, i nazywając ε łuk dodatny który maleje aż do zera, mamy

$$\text{sie}\,0 = +1, \quad \text{sie}\,\pi = -1, \quad \text{sie}\,2\pi = +1$$

$$gr.\,\text{sie}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) = +\infty; \quad gr.\,\text{sie}\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) = -\infty.$$

$$gr.\,\text{sie}\left(\frac{3\pi}{2}-\varepsilon\right) = -\infty; \quad gr.\,\text{sie}\left(\frac{3\pi}{2}+\varepsilon\right) = +\infty.$$

Z obiegu wszystkich wartości sie$x$ wynika że, jakikolwiek jest łuk x, dodatny albo odjemny, będzie zawsze

$$\text{sie}(2k\pi \pm x) = \text{sie}\,x. \tag{2}$$

Ostatnie równanie, w którem k znaczy liczbę całkowitą jakąkolwiek, dodatną albo odjemną, dowodzi że sie$x$ jest funkcyą okresową i ma okres 2π.

Równanie (1) pokazuje że sie$x$ nie zmienia się gdy łuk x

zmienia znak; tę własność wyraża się mówiąc że funkcya sie$x$ est *funkcyą parzystą*.

16. Jakikolwiek jest łuk x, dodatny albo odjemny, dwa łuki x i $\pi+x$, zakończone na skrajnościach jednej średnicy, mają sieczne równe i znaków przeciwnych, to jest

$$\text{(3)} \qquad \text{sie}\,(\pi+x) = -\,\text{sie}x;$$

co pokazuje że, powiększając albo zmniejszając łuk półokręgiem π, zmieniamy sam tylko znak jego siecznej.

Jeśli w formule (3) zamienimy x na $-x$, będzie

$$\text{sie}\,(\pi-x) = -\,\text{sie}\,(-x),$$

albo, z przyczyny formuły (1),

$$\text{(4)} \qquad \text{sie}\,(\pi-x) = -\,\text{sie}x.$$

Ztąd wnosimy że, *dwa łuki spełniające mają sieczne równe i znaków przeciwnych.*

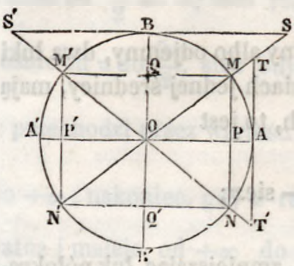
Więc na mocy formuł (2), (3), (4) otrzymujemy

$$\text{sie}\,[(2k+1)\pi \pm x] = -\,\text{sie}x.$$

FUNKCYE KOŁOWE DOPEŁNIAJĄCE.

17. Nazywa się *dopełnieniem* łuku taki łuk który z nim czyni summę równą ćwiercianowi. I tak, dopełnieniem łuku $+x$ jest $\frac{\pi}{2}-x$, a dopełnieniem łuku $-x$ jest $\frac{\pi}{2}+x$.

W kole O poprowadźmy dwie średnice prostopadłe AA′ i BB′.



Jeśli, uważając punkt A za początek łuków i kierunek AB za dodatny, weźmiemy punkt B za początek dopełnień i kierunek BA za ich kierunek dodatny, wtedy łuk i jego dopełnienie będą miały spólną skrajność. Jakoż, niech x oznacza jakikolwiek łuk mający początek w A i skrajność w M; powiedam że jego dopełnienie $\frac{\pi}{2} - x$ ma tę samą skrajność M. Albowiem, wychodząc z punktu B i przebiegając ćwiercian BA, dochodzimy najpierwej do punktu A, i potem musimy jeszcze przebiedz łuk $-x$. Owoż, łuk$-x$ względnie do punktu B jest to samo co łuk x względnie do punktu A, ponieważ kierunki BA i AB są sobie przeciwne; więc, idąc teraz z punktu A w stronę wskazaną znakiem łuku x dosięgamy punktu M.

Nazywamy *dostawą, dotyczną i dosieczną* łuku x wstawę, styczną i sieczną *dopełnienia* tego łuku, i wyrażamy je pisząc, przez skrócenie, dos$x$, dot$x$, dosie$x$.

DOSTAWA.

18. Niech będzie M skrajność łuku x (*fig. powyższa*); aby mieć dostawę tego łuku, trzeba wziąć wstawę jego dopełnienia $\frac{\pi}{2} - x$ którego początek jest w B, skrajność w M, i kierunek dodatny BA. Więc, jeśli z punktu M spuścimy prostopadłę MQ na BB′ i prostopadłę MP na AA′, ponieważ MQ=OP *dostawą* łuku x jest stosunek $\frac{OP}{R}$ albo długość OP, biorąc promień za jedność linijną. Stosownie do zwyczajnej ugody znaków, będziemy uważali długość OP jako dodatną albo od jemną, według jak spodek P pada na promieniu OA albo na jego przedłużenia OA'. Ztąd wynika określenie.

DOSTAWĄ *łuku jest liczba, dodatna albo odjemna, która mierzy odległość środka koła od spodka wstawy tego łuku.*

19. Zobaczmy teraz jak się zmienia $\operatorname{dos} x$.

Figura jasno pokazuje że, gdy łuk x rośnie od 0 do $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{dos} x$ maleje od $+1$ do 0; gdy x rośnie od $\frac{\pi}{2}$ do π, $\operatorname{dos} x$ staje się odjemną i maleje od 0 do -1; gdy potem x rośnie od π do $\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{dos} x$ odjemna rośnie od -1 do 0; a gdy x rośnie jeszcze od $\frac{3\pi}{2}$ do 2π, $\operatorname{dos} x$ staje się napowrót dodatną i rośnie od 0 do $+1$. Po czem, gdy x rośnie dalej od 2π do 4π, następnie od 4π do 6π, etc, $\operatorname{dos} x$ bierze okresowo wszystkie wartości które miała gdy łuk x rośnie od 0 do 2π. Nakoniec, jeśli łuk x jest odjemny, i zmienia się od 0 do $-\infty$, $\operatorname{dos} x$ przechodzi przez wszystkie te same wartości które nabywa gdy x rośnie od 0 do 2π; albowiem, dwa łuki x i $-x$, mając skrajności symetryczne względem średnicy AA', mają temsamem spólną dostawę; co daje

$$\operatorname{dos}(-x) = \operatorname{dos} x; \tag{1}$$

Więc *dwa łuki równe i znaków przeciwnych mają tę samą dostawę.*

Zbierając główniejsze wartości $\operatorname{dos} x$, mamy

$$\operatorname{dos} 0 = 1,\quad \operatorname{dos}\frac{\pi}{2} = 0,\quad \operatorname{dos}\pi = -1,\quad \operatorname{dos}\frac{3\pi}{\pi} = 0,\quad \operatorname{dos} 2\pi = 1.$$

Z wszystkiego co poprzedza wynika że, jakikolwiek jest łuk x, dodatny albo odjemny, mamy zawsze równanie

$$(2) \qquad \operatorname{dos}(2k\pi \pm x) = \operatorname{dos} x$$

w którem k jest liczbą całkowitą dodatną albo odjemną.

Zatem wszystkie łuki zamknięte w dwóch formułach

$$2k\pi + \alpha \quad \text{i} \quad 2k\pi - \alpha$$

mają te same dostawy.

Ostatnie równanie (2) dowodzi że $\operatorname{dos} x$ jest funkcyą okresową mającą okres 2π. Nadto, $\operatorname{dos} x$ jest funkcyą ciągłą, i bierze w każdym okresie wszystkie wartości począwszy od -1 aż do $+1$; więc, *wszelka liczba zawarta między* -1 *i* $+1$, *albo nawet równa jednej z tych dwóch wartości, może być uważana jako dostawa pewnego łuku koła.*

Równanie (1) dowodzi że funkcya $\operatorname{dos} x$ jest *funkcyą parzystą*.

20 Jakikolwiek jest łuk x, dodatny albo odjemny, dwa łuki x i $\pi + x$, zakończone na skrajnościach jednej średnicy, mają oczywiście dostawy równe i znaków przeciwnych; zatem

$$(3) \qquad \operatorname{dos}(\pi + x) = -\operatorname{dos} x,$$

co pokazuje że funkcya $\operatorname{dos} x$ zmienia sam tylko znak gdy się powiększa albo zmniejsza łuk x półokręgiem π.

Jeśli w ostatniem równaniu zamienimy x na $-x$, będzie

$$\operatorname{dos}(\pi - x) = -\operatorname{dos}(-x);$$

ale, na mocy równania (1),

$$\operatorname{dos}(-x) = \operatorname{dos} x,$$

więc

$$(4) \qquad \operatorname{dos}(\pi - x) = -\operatorname{dos} x;$$

to dowodzi że *dwa łuki spełniające mają dostawy równe i znaków przeciwnych.*

21 Wyłożyliśmy zmienność i własności dos$x$ wprost, nie odnosząc się do wst$x$; dlatego że funkcya dos$x$ gra wielką rolę w umiejętnościach, i dlatego jeszcze że ją niektórzy autorowie biorą za pierwszą fukcyę kołową i z niej wyprowadzają inne. Ale można uważać wszystko cośmy o dostawie powiedzieli jako proste następstwo równania

$$\text{dos}\, x = \text{wst}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Posługując się tem równaniem, znajdujemy zaraz wartości dostaw łuków których wstawy są wiadome. I tak, naprzykład

$$\text{dos}\, 30^\circ = \text{wst}\, 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\text{dos}\, 45^\circ = \text{wst}\, 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$\text{dos}\, 60^\circ = \text{wst}\, 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

22. Dotyczna i dosieczna. Ponieważ zmienność tych dwóch funkcyj kołowych wywodzi się, bez żadnej trudności, z dwóch określających równań

$$\text{dot}x = \text{sty}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{dosie}x = \text{sie}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

albo wprost z samej figury, zostawiamy ją czytelnikowi na potrzebne ćwiczenie; tem więcej że, jako wkrótce okażemy, znając zmienność funkcyi wst$x$ i dos$x$, można zaraz mieć wartość sty$x$, dot$x$, sie$x$, dosie$x$. Ograniczamy się więc teraz na prostem wysłowieniu formuł które później będą widoczne.

$$\text{dot}\,(-x) = -\,\text{dot}x, \qquad \text{dot}\,(\pi + x) = \text{dot}x,$$

$$\text{dot}\,(\pi - x) = -\,\text{dot}x, \qquad \text{dot}\,(k\pi + x) = \text{dot}x,$$

$$\text{dosie}\,(-x) = -\,\text{dosie}x, \quad \text{dosie}\,(\pi + x) = -\,\text{dosie}x,$$

$$\text{dosie}\,(\pi - x) = \text{dosie}x,$$

$$\text{dosie}\,(2k\pi + x) = \text{dosie}x, \quad \text{dosie}\,[(2k + 1)\pi - x] = \text{dosie}x$$

23 Do sześciu funkcyj kołowych któreśmy wyłożyli, trzeba jeszcze dodać tak zwaną *wstawę odwrotną* łuku, czasem użyteczną. Wstawą odwrotną łuku jest stosunek $\frac{AP}{R}$, strzały łuku podwójnego do promienia R; a jeśli R=1, wst.odw$x$ równa się różnicy $1 - \text{dos}x$.

Uwaga ogólna. Wst$x$, dos$x$, sty$x$, są trzema głównemi funkcyami kołowemi, trzy inne, dosie$x$, sie$x$, dot$x$, są ich odwrotnościami, jako wkrótce zobaczymy. Wszystkie są funkcyami okresowemi, to jest, nie zmieniają się gdy się powiększa albo zmniejsza ich łuk okresem.

Funkcye kołowe nazywają się zwykle *liniami trygonometrycznemi*, dlatego że służą do wyznaczenia kątów we właściwej trygonometryi; mimo jednak tego nazwiska, trzeba je zawsze uważać jako stosunki rzeczonych linij do promienia. Ale, jeśli promień jest wzięty za jedność linijną, wtedy linie trygonometryczne przedstawiają geometrycznie liczby które są istotnie funkcyami kołowemi.

PRZYWIEDZENIE ŁUKÓW DO PIERWSZEGO ĆWIERCIANU.

24. Ponieważ zmniejszając łuk półokręgiem, albo biorąc spełnienie łuku, linie trygonometryczne nie zmieniają wartości samoistych (liczebnych) można zawsze znaleźć w pierwszym ćwiercianie łuk który z danym łukiem ma wszystkie linie trygonometryczne równe, i z tym samym znakiem albo ze znakiem przeciwnym. To się nazywa *przywieść łuk do pierwszego ćwiercianu.* Aby uskutecznić takie działanie, odciąga się najpierwej od łuku największy wielownik okręgu jaki się w nim mieści, co nie zmienia żadnej linii trygonometrycznej; po czem, odciąga się półkrąg jeśli trzeba, albo bierze się spełnienie. Tym sposobem otrzymuje się łuk zawarty w pierwszym ćwiercianie, mający, prócz znaku, te same linie trygonometryczne co łuk dany.

Dla lepszego wyjaśnienia tej rzeczy weźmy przykład. Przypuśćmy że trzeba znaleźć sty 1234^0. Odciągamy najpierwej $360^0 \times 3$, co daje sty $1234^0 =$ sty 154^0, bierzemy potem spełnienie i mamy sty $154^0 = -$ sty 26^0.

Więc ostatecznie sty $1234^0 = -$ sty 26^0.

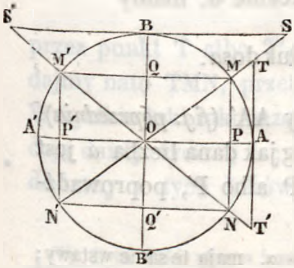
FUNKCYE KOŁOWE ODWROTNE.

25. Widzieliśmy że na daną wartość łuku odpowieda jedna wartość każdej linii trygonometrycznej, i tylko jedna; linie trygonometryczne są więc funkcyami *wyznaczonemi* łuku. Naodwrót, można uważać łuk jako funkcyę danej linii trygonometrycznej; ale ta funkcya nie jest dobrze wyznaczona, bo na daną wartość linii trygonometrycznej odpowieda nieskończona liczba łuków. Nazywając x łuk którego wstawa jest równa danej liczbie a, wyrażamy to pisząc $x =$ łuk wst$a$.

Tak samo, $x =$ łuk sty$a$ znaczy że x jest łukiem którego styczna równa się liczbie a, to jest sty$x = a$; etc.

26. *Wyrażenie łuków mających daną wstawę* a. Oznaczając przez x jeden z tych łuków, mamy

$$\text{wst}x = a, \quad \text{zkąd} \quad x = \text{łuk wst}a.$$



Aby znaleźć łuk x, poprowadźmy równoległę do średnicy AA', na odległość a, od strony B albo B' według jak wartość a jest dodatna albo odjemna. Ogólnie mówiąc, ta równoległa, przypuśćmy MM', przecina okrąg w dwóch punktach M i M'; i wszystkie łuki mające skrajność w M albo w M', a tylko te, odpowiedają danej wstawie a. Jeśli więc nazwiemy α najmniejszy łuk dodatny z pomiędzy tych łuków, a takim jest AM, wszystkie łuki mające skrajność M będą objęte (6) formułą $2k\pi+\alpha$. Nadto, łuk $\pi-\alpha$ ma skrajność M′; zatem wszystkie łuki zakończone w M′ są objęte formułą $(2k+1)\pi-\alpha$. To dowodzi że *wszelki łuk* x *którego wstawa równa się liczbie* a *jest dany przez jedną z dwóch formuł*

$$x=2k\pi+\alpha \quad \text{albo} \quad x=(2k+1)\pi-\alpha.$$

Owoż (8), wszystkie łuki zawarte w tych dwóch formułach mają tę samą wstawę; ztąd wynika ważne następstwo:

Aby dwa łuki miały tę samą wstawę, trzeba i dość jest żeby ich różnica była całkowitą liczbą okręgów, albo ich summa była nieparzystą liczbą półokręgów (*).

Uwaga. Równanie

$$\text{wst}x+a=0$$

ma nieskończoną liczbę pierwiastków danych przez formuły

$$x=2k\pi+\alpha, \quad \text{i} \quad x=(2k+1)\pi-\alpha,$$

których k jest liczbą całkowitą dodatną albo odjemną.

27. *Wyrażenie łuków mających daną dostawę* a. Nazywając x łuk którego dostawa jest równa danej liczbie a, mamy

$$\text{dos}x=a, \quad \text{zkąd} \quad x=\text{łuk}\,\text{dos}a.$$

Aby znaleźć łuk x, weźmy na średnicy AA′ (*fig. poprzednia*), długość OP$=a$ albo OP′$=-a$ według jak dana liczba a jest dodatna albo odjemna, i, przez punkt P albo P′, poprowadź-

(*) Wiadomo że łuki spełniające, α i $\pi-\alpha$, mają te same wstawy; zwiększając albo zmniejszając każdy z tych łuków całkowitą liczbą okręgów, otrzymuje się właśnie powyższe formuły $2k\pi+\alpha$ i $(2k\pi+1)\pi-\alpha$. Ta uwaga może je przypomnieć w potrzebie.

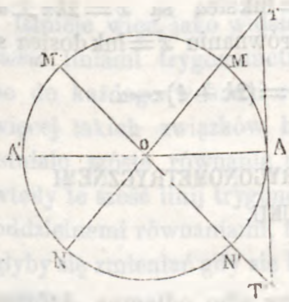
my prostopadłę do AA′; ta prostopadła, przypuśćmy MN, przetnie okrąg w dwóch punktach M i N. Wszystkie łuki zakończone w M albo w N, i tylko te, odpowiedają danej dostawie a; jeśli więc oznaczymy przez α najmniejszy dodatny z tych łuków, jako AM, widzimy łatwo że *wszelki łuk x którego dostawa równa się danej liczbie a jest zawarty w podwójnej formule*

$$x = 2k\pi \pm \alpha\,;$$

a wiemy (19) że wszystkie łuki objęte tą formułą mają tę samą dostawę. Ztąd wynika następujący, ważny wniosek,

Aby dwa łuki miały tę samę dostawę, trzeba i dość jest żeby ich różnica albo ich summa była równa całkowitej liczbie okręgów. (*)

28. *Wyrażenie łuków mających daną styczną a.* Nazywając x łuk którego styczna jest równa danej liczbie a, mamy



$$\text{sty}\,x = a,\ \text{zkąd}\ x = \text{łuk sty}\,a.$$

Przez początek A łuków poprowadźmy styczną TT′; weźmy na niej długość AT $= a$ albo AT′ $= -a$, według jak dana liczba a jest dodatna albo odjemna, i, przez punkt T albo T′, poprowadźmy średnicę; ta średnica, dajmy nato TMN, przetnie okrąg w dwóch punktach M i N. Wszystkie łuki zakończone w M albo N, i tylko te, odpowiedają danej stycznej a; więc, oznaczając przez α najmniejszy dodatny z tych łuków, jakim jest AM, widzimy łatwo że

(*) Dwa łuki równe i znaków przeciwnych, α i $-\alpha$, mają tę samą dostawę; dodając albo odejmując każdemu z tych łuków pewną liczbę okręgów, otrzymujemy dwa łuki $2k\pi + \alpha$ i $2k'\pi - \alpha$ objęte powyższą formułą. Ta uwaga ułatwia pamięć.

wszelki łuk x, którego styczna równa się danej liczbie a, jest zawarty w formule

$$x = k\pi + \alpha$$

Owoż, wiemy (11) że wszystkie łuki objęte tą formułą mają tę samą styczną; więc,

Aby dwa dwa łuki miały tę samą styczną, trzeba i dość jest żeby ich różnica była całkowitą liczbą półokręgów.

29. Wkrótce zobaczymy że dotyczna, sieczna i dosieczna łuku są, odpowiednio, odwrotnościami jego stycznej, dostawy i wstawy; można więc, na mocy tego co poprzedza, mając daną dotyczną, sieczną albo dosieczną, znaleźć zaraz wyrażenie łuków które odpowiedają każdej z tych linij.

I tak,

1° łuki rozwiązujące równanie $x =$ łuk dot$a$ są $x = k\pi + \alpha$;

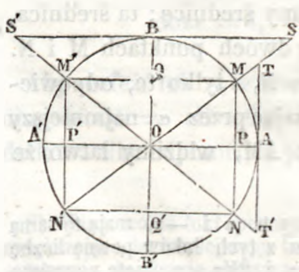
2° łuki rozwiązujące równanie $x =$ łuk sie$a$ są $x = 2k\pi \pm \alpha$;

nakoniec 3° łuki zadość czyniące równaniu $x =$ łuk dosie$a$ są

$$x = 2k\pi + \alpha \quad \text{albo} \quad x = (2k+1)\pi - \alpha.$$

MIĘDZY LINIAMI TRYGONOMETRYCZNEMI JEDNEGO ŁUKU.

30. Niech ędzie x łuk, dodatny albo odjemny, którego skrajność M znajduje się na pierwszym ćwiercianie. Biorąc promień OM za jedność, mamy



wst$x$=MP, dos$x$=OP, sty$x$=AT,

dot$x$=BS, sie$x$=OT, dosie$x$=OS.

Owóż trójkąt prostokątny OMP daje

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2;$$

ztąd

(1) $$\mathrm{wst}^2 x + \mathrm{dos}^2 x = 1,$$

Trójkąty podobne OMP i OTA, OMP i OBS dają także

$$\frac{AT}{MP} = \frac{OT}{OM} = \frac{OA}{OP} \quad \text{i} \quad \frac{BS}{OP} = \frac{OS}{OM} = \frac{OB}{MP},$$

zkąd

(2) $$\mathrm{sty}x = \frac{\mathrm{wst}x}{\mathrm{dos}x}$$

(3) $$\mathrm{sie}x = \frac{1}{\mathrm{dos}x},$$

(4) $$\mathrm{dot}x = \frac{\mathrm{dos}x}{\mathrm{wst}x}$$

(5) $$\mathrm{dosie}x = \frac{1}{\mathrm{wst}x}.$$

Istnieje więc, jako widzimy, *pięć* związków między *sześcioma* liniami trygonometrycznemi. Te związki są oddzielne, bo do każdego wchodzi różna linia trygonometryczna. Ale więcej takich związków być nie może. Albowiem, gdyby istniało szóste równanie oddzielne od pięciu powyższych, wtedy te sześć linij trygonometrycznych, związane sześcioma oddzielnemi równaniami, byłyby wyznaczone; a więc nie mogłyby się zmieniać gdy się łuk zmienia; co się sprzeciwia ich naturze.

31. Chociaż otrzymaliśmy powyższe związki między liniami trygonometrycznemi, przypuszczając skrajność łuku na pierwszym ćwiercianie, te związki są jednakże ogólne, to jest stosują się do łuków wszelkiej wielkości, tak dodatnych jako odjemnych. I w samej rzeczy, jakiekolwiek jest na okręgu położenie skrajności M łuku, istnieje zawsze łuk zawarty między 0 i $\frac{\pi}{2}$ (24) który ma, bez względu na znak, wszystkie te same linie trygonometryczne co łuk x; ztąd wynika że, zważając na same tylko wartości samoiste linij trygonometrycznych, otrzymane związki są wszystkie pięć prawdziwe. Dość więc będzie sprawdzić ich znaki.

Owoż, równanie (1) zawiera tylko kwadraty z wst$x$ i z dos$x$, a gdy trójkąt nie istnieje, jedna z tych dwóch linij jest 0, druga ± 1; więc związek (1) jest zawsze prawdziwy.

Sprawdźmy teraz znaki obydwóch stron równości (2) i (3). Wiemy że, gdy skrajność łuku pada na pierwszym albo na trzecim ćwiercianie, styczna jest dodatna, wtedy wstawa i dostawa mają obie te same znaki; a gdy skrajność łuku pada na drugim albo na czwartym ćwiercianie, styczna jest odjemna, wtedy wstawa i dostawa są znaków przeciwnych. Nakoniec, gdy sty$x$ jest 0 albo ∞, wtedy wst$x = 0$ i dos$x = \pm 1$, albo wst$x = \pm 1$ i dos$x = 0$. Więc związek (2) jest prawdziwy dla wszelkiego łuku x.

Co do równania (3). Widzieliśmy że w każdym ćwiercianie sie$x$ jest tego samego znaku co dos$x$; owoż, gdy sie$x = \pm 1$, wtedy także dos$x = \pm 1$; a gdy sie$x = \pm\infty$ wtedy dos$x = 0$. Więc związek (3) jest zawsze prawdziwy jakikolwiek jest łuk x.

Podobnie dyskutując, możnaby łatwo okazać że związki (4) i (5) stosują się do wszelkich łuków. Ale dość uważać że te dwa związki wywodzą się z dwóch ogólnych (2) i (3), prostą zamianą łuku x na $\frac{\pi}{2} - x$; zatem są oba ogólne.

32. Równania (3), (4), (5) pokazują że sie$x$, dot$x$, dosie$x$ są odwrotnościami dos$x$, sty$x$, wst$x$; albowiem sie$x$.dos$x = 1$, dot$x$.sty$x = \frac{\text{dos}x}{\text{wst}x} \cdot \frac{\text{wst}x}{\text{dos}x} = 1$, dosie$x$. wst$x = 1$. Dlatego właśnie sie$x$ i dosie$x$ nie są prawie nigdy używane, a dot$x$ rzadziej niż sty$x$.

33. Związki między liniami trygonometrycznemi, znalezione w n⁰ 30, nie są jedyne. Istnieją inne równie potrzebne, które są ich następstwem.

I tak, trójkąt prostokątny AOT (*fig. ostatnia*) daje

$$\overline{OT}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AT}^2;$$

zkąd wynika

$$\text{(6)} \qquad \text{sie}^2 x = 1 + \text{sty}^2 x = \frac{1}{\text{dos}^2 x}.$$

formuła często użyteczna.

Ta formuła wywodzi się z równań (1) i (2). Jakoż, dodając (1) do kwadratu każdej strony równania (2), będzie

$$1 + \text{sty}^2 x = 1 + \frac{\text{wst}^2 x}{\text{dos}^2 x} = \frac{\text{dos}^2 x + \text{wst}^2 x}{\text{dos}^2 x} = \frac{1}{\text{dos}^2 x}.$$

Między sie$x$ i dosie$x$ jest także związek, przez się widoczny,

$$\text{(7)} \qquad \frac{1}{\text{sie}^2 x} + \frac{1}{\text{dosie}^2 x} = 1.$$

34. Z pięciu równań n^ru 30, można wyprowadzić wartości pięciu którychkolwiek z sześciu linij trygonometrycznych w *funkcyi* linii szóstej. I tak, biorąc naprzykład wst$x$, będzie

$$\text{dos}x = \pm\sqrt{1 - \text{wst}^2 x}, \qquad \text{sty}x = \pm\frac{\text{wst}x}{\sqrt{1 - \text{wst}^2 x}},$$

$$\text{dot}x = \pm\frac{\sqrt{1 - \text{wst}^2 x}}{\text{wst}x},$$

$$\text{sie}x = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \text{wst}^2 x}}, \qquad \text{dosie}x = \frac{1}{\text{wst}\,x}.$$

Ale uważajmy że, gdy jest dana jedna linia trygonometryczna łuku x, wszystkie inne nie są przez nią całkiem wyznaczone. I w samej rzeczy, jako widzimy, mając daną wst$x$ mamy naturalnie jej odwrotność dosie$x$; ale znamy tylko same wartości samoiste czterech innych linij. To się łatwo wytłumaczyć może. Albowiem, łuki odpowiedające danej wst$x$ są zawarte w dwóch formułach $2k\pi + \alpha$ i $(2k+1)\pi - \alpha$, a odejmując wszystkie okręgi, otrzymujemy dwa łuki α i $\pi - \alpha$ które mają te same linie trygonometryczne. Owoż wiemy że styczne, dostawy, dotyczne i sieczne dwóch łuków spełniających są równe i znaków przeciwnych; co usprawiedliwia podwójny znak powyższych formuł.

Często potrzeba znać wst$x$ i dos$x$ w funkcyi sty$x$. Aby je znaleźć, dość wziąć dwa równania

$$\mathrm{wst}^2 x + \mathrm{dos}^2 x = 1 \qquad \frac{\mathrm{wst}\, x}{\mathrm{dos}\, x} = \mathrm{sty}\, x.$$

Rugując najpierwej dos$x$ a potem wst$x$, będzie

$$\mathrm{wst}^2 x + \frac{\mathrm{wst}^2 x}{\mathrm{sty}^2 x} = 1, \quad \text{i} \quad \mathrm{dos}^2 x\, \mathrm{sty}^2 x + \mathrm{dos}^2 x = 1;$$

zkąd

$$(8) \qquad \mathrm{wst} x = \pm \frac{\mathrm{sty}\, x}{\sqrt{1 + \mathrm{sty}^2 x}} \qquad \mathrm{dos} x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{sty}^2 x}}.$$

Znaki pierwiastników zależą od znaku wiadomej wartości sty$x$; ale nie są wyznaczone. Co być powinno, bo sama figura jasno pokazuje że danej sty$x$ odpowiedają dwie wstawy i dwie dostawy, równe i znaków przeciwnych.

Uwaga. Formuły (8) wywodzą się odrazu z równania

$$1 + \mathrm{sty}^2 x = \mathrm{sie}^2 x = \frac{1}{\mathrm{dos}^2 x}$$

które zaraz daje

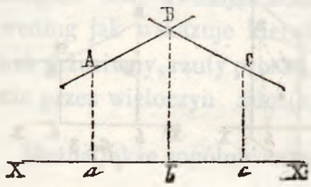
$$\mathrm{dos} x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{sty}^2 x}}.$$

Ztąd, mnożąc obie strony przez sty$x$, wynika

$$\text{wst}x = \pm \frac{\text{sty}x}{\sqrt{1+\text{sty}^2 x}}.$$

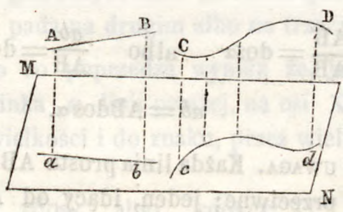
TEORYA RZUTÓW PROSTOLINIJNYCH.

35. Określenie. Niech będą punkta ABC,.. leżące na jednej płasczyznie; spuśćmy z nich prostopadłe Aa, Bb, Cc,.. na linię prostą X′X. Spodki a, b, c,.. tych prostopadłych nazywają się *rzutami* punktów A, B, C,.. prostopadłe Aa, Bb, Cc,.. są ich *rzutującemi*, a prosta X′X *osią* rzutów.



To określenie stosuje się do jakichkolwiek punktów przestrzeni; dość tylko poprowadzić przez te punkta płasczyzny prostopadłe do osi X′X, albo, co wychodzi na jedno, spuścić prostopadłe Aa, Bb,.. na X′X, spodki a, b,.. będą rzutami punktów A, B.., na osi X′X.

36. Rzutem punktu A na płasczyznie MN jest spodek a



prostopadłej Aa spuszczonej z tego punktu na tę płasczyznę, która się nazywa płasczyzną rzutów.

Rzutem linii jakiejkolwiek jest miejsce geometryczne rzutów jej punktów.

Wiadomo że rzut linii prostej na płaszczyznie jest linią prostą, a rzut jakiejkolwiek krzywej jest ogólnie linią krzywą. Ale w szczególnem położeniu, rzut linii prostej może być punktem, a rzut linii krzywej linią prostą. Rzutem odcinka AB linii prostej jest odległość *ab* rzutów jego obydwóch skrajności.

37. Twierdzenie. *Rzut linii prostej jest równy wieloczynowi jej długości przez dostawę kąta jaki czyni z osią rzutów.*

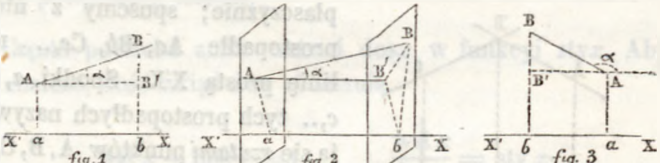


fig. 1 fig. 2 fig. 3

Niech będzie jakakolwiek linia prosta AB która czyni, idąc od A do B, kąt α z osią X'X, albo raczej z jej równoległą AB' idącą od A do B'. Biorąc odcinek AB, trzeba uważać jego rzut *ab*, który się równa długości AB', jako *dodatny* albo *odjemny* według jak kąt α jest *ostry* fig(1) i fig(2), albo *rozwarty* fig(3). Owoż, przez określenie dostawy i rzutu, stosunek $\frac{AB'}{AB}$ wyraża dostawę kąta α co do wielkości i co do znaku, to jest

$$\frac{AB'}{AB} = \text{dos}\,\alpha \quad \text{albo} \quad \frac{ab}{AB} = \text{dos}\,\alpha\,;$$

więc $$ab = AB\,\text{dos}\,\alpha.$$

38. Ważna uwaga. Każda linia prosta AB ma dwa kierunki wprost sobie przeciwne; jeden, idący od A do B, który się oznacza przez AB; drugi przeciwny, idący od B do A, który się wyraża przez BA. Otoż, gdy się mówi że prosta AB czyni z osią X'X kąt α, trzeba przez to rozumieć kąt jaki kierunek AB tworzy z kierunkiem X'X. Zatem, rzut prostej AB, idącej od A do B, wyraża się przez wieloczyn AB dosα, a zaś rzut prostej BA, idącej od B do A, przez AB$\mathrm{dos}(\pi+\alpha)$ albo przez $-$AB$\mathrm{dos}\alpha$.

Dla większej dobitności wyrażają dostawę kąta dwóch kierunków AB i X'X pisząc $\mathrm{dos}(AB, X'X)$. Tym sposobem rzut prostej AB na X'X przedstawia się przez wieloczyn AB$\mathrm{dos}(AB, X'X)$, a zaś rzut prostej BA przez AB$\mathrm{dos}(BA, X'X)$, albo przez $-$AB$\mathrm{dos}(AB, X'X)$. Jeśli więc, dla skrócenia, nazwiemy X kierunek X'X osi rzutów, i oznaczymy przez x długość AB, uważając ilość x jako dodatną albo odjemną według jak wskazuje kierunek tworzący kąt(x, X) albo kierunek przeciwny, rzuty prostej AB i prostej BA będą dane ogólnie przez wieloczyn $x\mathrm{dos}(x, X)$.

Można także zogólnić znaczenie ilości α. Jakoż, przypuśćmy że prosta OM obraca się około punktu O, tak żeby każdy jej punkt M opisywał okrąg, i oznaczmy ogólnie przez α łuk koła który punkt M przebiegł, zaczynając od punktu A osi AA'. Widzimy łatwo że, jakiekolwiek prosta OM bierze położenie, jej rzut na AA' wyraża się zawsze przez wieloczyn OM$\mathrm{dos}\alpha$, i jest *dodatny* gdy punkt M znajduje się na pierwszym albo na czwartym ćwiercianie, a *odjemny* gdy M pada na drugim albo na trzecim ćwiercianie.

Z wszystkiego co poprzedza wynika że, jakikolwiek jest łuk α, rzut odcinka x linii prostej, na osi X'X, wyraża się ogólnie, co do wielkości i do znaku, przez wieloczyn

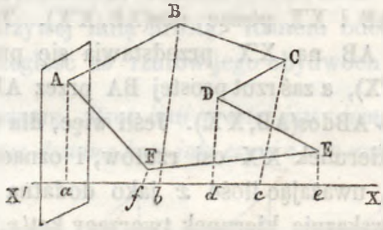
$$x\mathrm{dos}\alpha \quad \text{albo} \quad x\mathrm{dos}(x, X).$$

Ostatnia notacya jest wielce użyteczna.

Ta uwaga nastręcza widoczne dowodzenie następującego zadania.

39. Twierdzenie. *Rzut wielokąta zamkniętego, jest zero na wszelkiej osi.*

Niech będzie wielokąt ABCDEF zamknięty jakikolwiek,



płaski albo spaczony, zrzutujmy go na oś X'X. W tym celu, przez jeden z wierzchołków A, poprowadźmy do X'X płaszczyznę prostopadłą A*a*, która zostawia cały wielokąt z jednej strony; jeśli przypuścimy że punkt ruchomy, wychodząc z A obiega obwód i powraca do A, jego rzut na X'X opisuje rzuty wszystkich boków wielokąta. Te rzuty są dodatne albo odjemne, według jak punkt ruchomy oddala się od płaszczyzny A*a* albo do niej zbliża. Owóż, oczywiście punkt ruchomy tyle się musi zbliżyć do tej płaszczyzny, ile się od niej oddalił; więc summa algebryczna wszystkich rzutów na osi X'X jest zero, jakiekolwiek ta oś ma położenie w przestrzeni.

40. Wniosek. Ztąd wynika ważne następstwo które stanowi tak zwaną *metodę rzutów.*

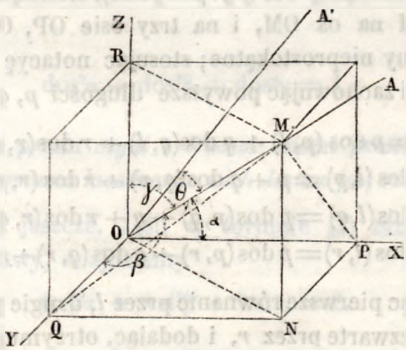
Jeśli z jednego punktu figury do drugiego można przejść dwiema drogami, rzuty tych dwóch dróg na jednej osi są równe.

I tak, na wielokącie ABCDEF z wierzchołka A do D prowadzą dwie drogi, jedna ABCD druga AFED. Więc, jeśli oznaczymy przez a, b, c, d, e, f boki wielokąta, przez α, β, γ kąty które kierunki AB, BC, CD boków pierwszej drogi czynią z osią X'X, a przez φ, ε, δ kąty które kierunki AF, FE, ED boków drugiej czynią z tą samą osią, będzie

$$a\,\mathrm{dos}\,\alpha + b\,\mathrm{dos}\,\beta + c\,\mathrm{dos}\,\gamma = f\,\mathrm{dos}\,\varphi + e\,\mathrm{dos}\,\varepsilon + d\,\mathrm{dos}\,\delta.$$

Uwaga. Dowodzenie twierdzenia nie wymaga żeby rzuty były prostokątne, i wyraźnie pokazuje że to twierdzenie, ze swoim wnioskiem, jest także prawdziwe w rzutach pochyłych; byle tylko rzuty wszystkich punktów były wyznaczone przez płaszczyzny równoległe do jednej płaszczyzny. Ale powyższe równanie stosuje się do samych tylko rzutów prostokątnych.

Przechodzimy teraz do głównych twierdzeń rzutów prostolinijnych, wyrażonych przez formuły, ważne w zastosowaniach. Jedna szczególniej z tych formuł będzie nam później potrzebna.



41. Niech będą trzy osie prostokątne OX, OY, OZ, i jakakolwiek prosta, w przestrzeni, która z niemi czyni kąty α, β, γ. Przez punkt O poprowadźmy do tej prostej równoległę OA, i weźmy na niej jakikolwiek punkt M mający rzuty P, Q, R na osiach OX, OY, OZ, i rzut N na płaszczyznie XOY; będzie

$$OP = OM\cos\alpha,\ PN \text{ albo } OQ = OM\cos\beta,\ NM \text{ albo } OR = OM\cos\gamma.$$

Owóż, równoległościan prostokątny OPNQR, jako wiadomo z geometryi, daje

$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2 = OM^2$$

albo, nazywając l, p, q, r długości OM, OP, OQ, OR,

$$(1)\qquad p^2+q^2+r^2=l^2.$$

Więc, *summa kwadratów z rzutów linii prostej na trzech osiach prostokątnych, jest stała i równa kwadratowi tej prostej, jakiekolwiek jest położenie układu tych osi w przestrzeni.*

Uwaga. Jeśli równoległościan nie jest prostokątny, można łatwo, za pomocą rzutów, znaleźć związek każdej przekątnej z trzema krawędziami przyległemi i ich kątami. Jakoż, weźmy naprzykład przekątnę OM (*fig. powyższa*), zrzutujmy obie drogi OM i OPNM na oś OM, i na trzy osie OP, OQ, OR które przypuszczamy nieprostokątne; stosując notacyę kątów wskazaną w n°38, i zachowując powyższe długości p, q, r, l, będzie

$$l=p\,\mathrm{dos}\,(p,l)+q\,\mathrm{dos}(q,l)+r\,\mathrm{dos}(r,l),$$
$$l\,\mathrm{dos}\,(l,p)=p+q\,\mathrm{dos}(q,p)+r\,\mathrm{dos}\,(r,p),$$
$$l\,\mathrm{dos}(l,q)=p\,\mathrm{dos}(p,q)+q+r\,\mathrm{dos}\,(r,q),$$
$$l\,\mathrm{dos}\,(l,r)=p\,\mathrm{dos}\,(p,r)+q\,\mathrm{dos}\,(q,r)+r.$$

Zkąd, mnożąc pierwsze równanie przez l, drugie przez p, trzecie przez q, czwarte przez r, i dodając, otrzymujemy formułę

$$(2)\quad l^2=p^2+q^2+r^2+2pq\,\mathrm{dos}\,(p,q)+2pr\,\mathrm{dos}\,(p,r)+2qr\,\mathrm{dos}(q,r),$$

której równanie (1) jest szczególnym przypadkiem.

Jeśli chcemy mieć wartości trzech innych przekątnych w funkcyi trzech krawędzi OP, OQ, OR i ich kątów, dość jest w powyższej formule zamienić pewne znaki. I tak, biorąc naprzykład przekątnę NR, trzeba uważać że kąty QNM i PNM są spełnieniami kątów POR i QOR; co daje

$$\mathrm{dos}\,\mathrm{QNM}=-\mathrm{dos}(p,r),\quad \mathrm{dos}\,\mathrm{PNM}=-\mathrm{dos}\,(q,r);$$

więc

$$\overline{\mathrm{NR}}^2=p^2+q^2+r^2+2pq\,\mathrm{dos}\,(p,q)-2pr\,\mathrm{dos}\,(p,r)-2qr\,\mathrm{dos}(q,r)$$

Nazywając l' i l'' przekątne wychodzące z punktów P i Q, znajdziemy podobnie

$$l'^2 = p^2 + q^2 + r^2 - 2pq \,\mathrm{dos}\,(p,q) - 2pr \,\mathrm{dos}\,(p,r) + 2qr \,\mathrm{dos}\,(q,r)$$
$$l''^2 = p^2 + q^2 + r^2 - 2pq \,\mathrm{dos}\,(p,q) + 2pr \,\mathrm{dos}\,(p,r) - 2qr \,\mathrm{dos}\,(q,r).$$

Ztąd znane twierdzenie geometryi

$$l^2 + l'^2 + l''^2 + l'''^2 = 4\,(p^2 + q^2 + r^2).$$

42. Z równania (1) wynika znakomity wniosek. Jakoż, zastępując ilości p, q, r, przez ich wartości $l \mathrm{dos}\alpha$, $l \mathrm{dos}\beta$, $l \mathrm{dos}\gamma$, będzie

(3) $$\mathrm{dos}^2\alpha + \mathrm{dos}^2\beta + \mathrm{dos}^2\gamma = 1.$$

Więc, *linia prosta czyni z trzema osiami prostokątnemi trzy kąty takie, że summa kwadratów z ich dostaw jest równa jedności.*

Jest więcej jeszcze. Jeśli w formule (3) zamienimy dostawy na wstawy, znajdziemy

(4) $$\mathrm{wst}^2\alpha + \mathrm{wst}^2\beta + \mathrm{wst}^2\gamma = 2.$$

Owoż, figura jasno pokazuje że kąt γ jest dopełnieniem kąta który prosta OA czyni z płaszczyzną XOY; tak samo o dwóch kątach α i β. Więc *kąty które linia prosta czyni z trzema płaszczyznami prostokątnemi są takie, że summa kwadratów z ich wstaw jest równa dwom jednościom.*

43. Niech będzie teraz jakakolwiek prosta w przestrzeni, tworząca z trzema osiami prostokątnemi OX, OY, OZ odpowiedne kąty α', β', γ'. Jeśli chcemy otrzymać na tej prostej rzut odcinka OM prostej OA (*figura poprzednia*), dość jest przez punkt O poprowadzić do pierwszej prostej równoległę OA' i na nią zrzutować OM. Owoż, z punktu O do M można iść drogą OM albo drogą OPNM; rzuty tych dróg na osi OA są równe, co daje

$$OM \cos AOA' = OP \cos\alpha' + PN \cos\beta' + NM \cos\gamma'.$$

albo, nazywając θ kąt AOA',

(4) $$l\cos\theta = p\cos\alpha' + q\cos\beta' + r\cos\gamma'.$$

Więc, *znając rzuty linii prostej na trzech osiach prostokątnych, otrzyma się jej rzut na jakiejkolwiek osi, rzutując te trzy rzuty na tę oś i robiąc summę nowych rzutów.*

44. Formuła (5) prowadzi do ważnego związku między kątami. Jakoż, podstawiając za odcinki p, q, r, ich wartości $l\cos\alpha$, $l\cos\beta$, $l\cos\gamma$, i odejmując spólny czynnik l, otrzymujemy formułę

(5) $$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

która daje *kąt dwóch linij prostych gdy są wiadome kąty które każda z nich czyni z trzema osiami prostokątnemi.*

Wniosek. Jeśli proste OA i OA′ schodzą się w jedną, formuła (6) daje

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

wynik już wiadomy.

45. Uwaga. Powiedzieliśmy że teorya rzutów stanowi *metodę*; aby pokazać jej użytek, przypomnijmy sobie z jaką pilnością, znalazszy formuły które wyrażają związki między liniami trygonometrycznemi, musieliśmy *dyskutować,* to jest roztrząsać szczególne przypadki wielkości i znaku łuków, dla zapewnienia się że te formuły stosują się do wszelkich łuków. Otóż, za pomocą metody rzutów można otrzymać odrazu formuły ogólne, i uniknąć dyskussyi.

Jakoż, nazywając, jako zwykle A początek łuków, T punkt w którym średnica przechodząca przez skrajność M łuku x

spotyka sty$x$, widzimy zaraz że promień OA jest rzutem odcinka OT, a wiemy że długość tego odcinka, dodatna albo odjemna, wyraża sie$x$. Więc, na mocy uwagi n⁰ 38, mamy

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OT}\,\mathrm{dos}(\mathrm{OT}, \mathrm{OA});$$

zkąd

$$1 = \mathrm{sie}\,x\,\mathrm{dos}\,x \quad \text{albo} \quad \mathrm{sie}\,x = \frac{1}{\mathrm{dos}\,x}.$$

Szukajmy teraz sty$x$. Oczywiście odcinek AT jest rzutem odcinka OT; co daje

$$\mathrm{AT} = \mathrm{OT}\,\mathrm{dos}(\mathrm{OT}, \mathrm{AT}) = \mathrm{OT}\,\mathrm{wst}\,(\mathrm{OT}, \mathrm{OA});$$

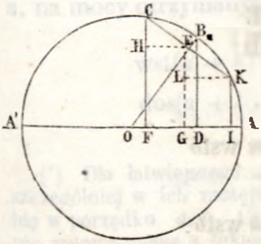
odcinki AT i OT wyrażają sty$x$ i sie$x$. Owoż, jeśli sie$x$ jest dodatna, wst(OT, OA) = wst$x$; a jeśli sie$x$ jest odjemna, wst(OT, OA) = — wst$x$; więc jest zawsze

$$\mathrm{sty}\,x = \mathrm{sie}\,x\,\mathrm{wst}\,x; \quad \text{zkąd} \quad \mathrm{sty}\,x = \frac{\mathrm{wst}\,x}{\mathrm{dos}\,x}.$$

WŁASNOŚCI FUNDAMENTALNE FUNKCYJ KOŁOWYCH.

DODAWANIE ŁUKÓW

46. *Wstawa i dostawa summy i różnicy dwóch łuków.* Mając dane wstawy i dostawy dwóch łuków, można otrzymać wstawę i dostawę summy albo różnicy tych łuków. Jakoż, niech będą a i b dwa dane łuki. Jeśli weźmiemy, na kole promienia OA = 1, łuk AB = a, łuk BC = b = BK, i spuścimy prostopadłe BD, CF, KI na AA', prostopadłę CE na OB; będzie



$$\mathrm{wst}\,a = \mathrm{BD}, \quad \mathrm{dos}\,a = \mathrm{OD}, \quad \mathrm{wst}\,b = \mathrm{CE}, \quad \mathrm{dos}\,b = \mathrm{OE}.$$

Teraz, aby wyrazić wstawę i dostawę summy albo różnicy dwóch łuków, w funkcyi ich wstaw i dostaw, uważajmy że, prowadząc przez punkt E prostopadłę EG i równoległę EH do AA′, mamy

$$\mathrm{wst}(a+b)=\mathrm{CF}=\mathrm{EG}+\mathrm{CH},$$
$$\mathrm{dos}(a+b)=\mathrm{OF}=\mathrm{OG}-\mathrm{HE}$$
$$\mathrm{wst}(a-b)=\mathrm{KI}=\mathrm{EG}-\mathrm{CH}$$
$$\mathrm{dos}(a-b)=\mathrm{OI}=\mathrm{OG}+\mathrm{HE}.$$

Owoż, trójkąty podobne OEG i OBD dają

$$\frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{BD}}=\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OD}}=\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OB}};$$

zkąd,

$$\mathrm{EG}=\frac{\mathrm{BD}\,.\,\mathrm{OE}}{\mathrm{OB}}=\mathrm{wst}a\,\mathrm{dos}b$$

$$\mathrm{OG}=\frac{\mathrm{OD}\,.\,\mathrm{OE}}{\mathrm{OB}}=\mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}b.$$

Trójkąty CEH i OBD, mające boki prostopadłe każdy do każdego, są także podobne i dają

$$\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{OD}}=\frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{BD}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{OB}};$$

ztąd wynika

$$\mathrm{CH}=\frac{\mathrm{OD}\,.\,\mathrm{CE}}{\mathrm{OB}}=\mathrm{dos}a\,\mathrm{wst}b$$

$$\mathrm{HE}=\frac{\mathrm{BD}\,.\,\mathrm{CE}}{\mathrm{OB}}=\mathrm{wst}a\,\mathrm{wst}b.$$

Więc, podstawiając wartości EG, OG, CH, HE, otrzymujemy cztery szukane formuły

$$(1) \qquad \text{wst}(a+b) = \text{wst}a\,\text{dos}b + \text{dos}a\,\text{wst}b$$

$$(2) \qquad \text{dos}(a+b) = \text{dos}a\,\text{dos}b - \text{wst}a\,\text{wst}b$$

$$(3) \qquad \text{wst}(a-b) = \text{wst}a\,\text{dos}b - \text{dos}a\,\text{wst}b$$

$$(4) \qquad \text{dos}(a-b) = \text{dos}a\,\text{dos}b + \text{wst}a\,\text{wst}b. \ (*)$$

47 W dowodzeniu powyższych formuł przypuściliśmy że łuki a i b są dodatne, i ich summa $a+b$ mniejsza od ćwiercianu; nadto, otrzymaliśmy formuły (3) i (4) w szczególnym tylko przypadku w którym łuk $b < a$. Okażemy teraz że, jakiekolwiek są łuki a i b, dodatne albo odjemne, i tak wielkie jak się podoba, wszystkie cztery formuły są prawdziwe, wtedy nawet gdy trójkąty które służyły do ich wyznaczenia nie istnieją.

I tak, 1° formuły (1) i (2) są prawdziwe gdy łuki a i b nie są większe od ćwiercianu, ale ich summa przechodzi ćwiercian. Jakoż, nazywając a' i b' dopełnienia łuków a i b,

to jest: czyniąc $\qquad a = \frac{\pi}{2} - a', \quad b = \frac{\pi}{2} - b',$

będzie $\qquad a' + b' = \pi - a - b < \frac{\pi}{2};$

a, na mocy otrzymanych formuł, mamy

$$\text{wst}(a'+b') = \text{wst}a'\,\text{dos}b' + \text{dos}a'\,\text{wst}b'$$

$$\text{dos}(a'+b') = \text{dos}a'\,\text{dos}b' - \text{wst}a'\,\text{wst}b';$$

(*) Dla łatwiejszego spamiętania tych czterech formuł, ważnych szczególniej w ich następstwach, trzeba uważać że we wszystkich łuki idą w porządku a, b. Co do znaków, ponieważ w pierwszym ćwiercianie wstawa rośnie z łukiem, przeciwnie dostawa maleje, to przypomina że rozwinięcie $\text{wst}(a+b)$ albo $\text{wst}(a-b)$ zachowuje swój znak $+$ albo $-$, a przeciwnie rozwinięcie $\text{dos}(a+b)$ albo $\text{dos}(a-b)$ przemienia znak $+$ na $-$ albo $-$ na $+$.

więc, podstawiając zamiast a', b' ich wartości $\frac{\pi}{2}-a$, $\frac{\pi}{2}-b$, i uważając że

$$\mathrm{wst}(a'+b')=\mathrm{wst}(\pi-a-b)=\mathrm{wst}(a+b),$$
$$\mathrm{dos}(a'+b')=\mathrm{dos}(\pi-a-b)=-\mathrm{dos}(a+b),$$

znajdziemy

$$\mathrm{wst}(a+b)=\mathrm{dos}a\,\mathrm{wst}b+\mathrm{wst}a\,\mathrm{dos}b$$
$$-\mathrm{dos}(a+b)=\mathrm{wst}a\,\mathrm{wst}b-\mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}b,$$

to są właśnie formuły (1) i (2).

2° Powiedam teraz że, jeśli formuły (1) i (2) są prawdziwe dla łuków dodatnych a i b pewnej wielkości, to są także prawdziwe, gdy się doda ćwiercian do jednego z tych łuków albo do każdego.

Jakoż, dodając ćwiercian do łuku a, będzie

$$\mathrm{wst}\left(a+\frac{\pi}{2}+b\right)=\mathrm{dos}(-a-b)=\mathrm{dos}(a+b);$$

ale z założenia

$$\mathrm{dos}(a+b)=\mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}b-\mathrm{wst}a\,\mathrm{wst}b.$$

zatem

$$\mathrm{wst}\left(a+\frac{\pi}{2}+b\right)=\mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}b-\mathrm{wst}a\,\mathrm{wst}b$$

Owoż, uważając $a+\frac{\pi}{2}$ za jeden łuk, mamy

$$\mathrm{wst}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{dos}(-a)=\mathrm{dos}a,$$
$$\mathrm{dos}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{wst}(-a)=-\mathrm{wst}a;$$

więc, podstawiając wartości $\mathrm{wst}a$ i $\mathrm{dos}a$, otrzymujemy

$$\mathrm{wst}\left(a+\frac{\pi}{2}+b\right)=\mathrm{wst}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{dos}b+\mathrm{dos}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{wst}b.$$

Dodając ćwiercian do obydwóch łuków a i b, i rozumując podobnie, znajdziemy

$$\text{wst}\left(a+\frac{\pi}{2}+b+\frac{\pi}{2}\right)=\text{wst}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\text{dos}\left(b+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+\text{dos}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\text{wst}\left(b+\frac{\pi}{2}\right).$$

Te dwa wyniki pokazują że można, nie naruszając formuły (1) dodać do każdego z łuków a i b ćwiercian, albo wielownik ćwiercianu. A żeśmy, dowiedli tej formuły gdy summa dwóch łuków a i b nie przechodzi półokręgu, więc ona jest prawdziwa dla dwóch łuków dodatnych tak wielkich jak się podoba.

3°. Pozostaje nakoniec do okazania że formuła (1) jest prawdziwa, gdy jeden z łuków a i b albo obydwa są odjemne. Przypuszczając że łuk b jest odjemny jakikolwiek, można zawsze wziąć liczbę k całkowitą i dodatną taką, żeby różnica $2k\pi-b$ była dodatna; zatem, na mocy 2°, będzie

$$\text{wst}\,(a+2k\pi-b)=\text{wst}a\,\text{dos}\,(2k\pi-b)+\text{dos}a\,\text{wst}\,(2k\pi-b).$$

ztąd, odejmując $2k\pi$ od łuku $2k\pi-b$, co bynajmniej nie przeinacza jego linij trygonometrycznych, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\text{wst}\,(a-b)&=\text{wst}a\,\text{dos}\,(-b)+\text{dos}a\,\text{wst}\,(-b)\\&=\text{wst}a\,\text{dos}b-\text{dos}a\,\text{wst}b.\end{aligned}$$

Co jest właśnie formułą (1).

Dowiedzie się tak samo że formuła (1) jest prawdziwa, gdy oba łuki a i b są odjemne jakiekolwiek.

Więc formuła (1) jest prawdziwa dla łuków a i b jakichkolwiek, dodatnych albo odjemnych, czyli jako się mówi, jest formułą ogólną.

Formuła (2) wywodzi się z formuły (1). Bo

$$\operatorname{dos}(a+b)=\operatorname{wst}\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right);$$

owoż, na mocy ogólności formuły (1), mamy

$$\operatorname{wst}\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right)=\operatorname{wst}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\operatorname{dos}(-b)+\operatorname{dos}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\operatorname{wst}(-b)$$

$$=\operatorname{dos}a\operatorname{dos}b-\operatorname{wst}a\operatorname{wst}b;$$

zatem

$$\operatorname{dos}(a+b)=\operatorname{dos}a\operatorname{dos}b-\operatorname{wst}a\operatorname{wst}b;$$

przychodzimy tym sposobem do formuły (3). Więc ta formuła jest także ogólna.

Formuły (3) i (4), wywodząc się z ogólnych formuł (1) i (2) przez zamianę b na $-b$, są temsamem ogólne.

48. Widzieliśmy że trzy ze czterech formuł (1), (2), (3), (4) wywodzą się z jednej, bylc ona była ogólna. Otoż, za pomocą metody rzutów można otrzymać wprost taką formułę, i z niej wyprowadzić trzy inne. Co właśnie uczynimy; nie dlatego żeby uniknąć dyskussyi, która jest niezaprzeczalnie pożyteczna, ale żeby dać jeszcze lepiej poznać ważność samej metody.

Ponieśmy łuki a i b na okrąg ich promienia. Zaczynając od *początku* A, połóżmy najpierwej łuk $a=$ AM; po czem do jego skrajności M przystawmy łuk $b=$ MN, prowadząc każdy z łuków w kierunku AB albo w kierunku przeciwnym, według jak jest dodatny albo odjemny. Idąc tak wskazaną drogą z A do N, otrzymamy łuk który będzie równy summie algebrycznej $a+b$.

Poprowadźmy teraz średnicę MM′, i z punktu N spuśćmy na nią prostopadłę NP; ta prostopadła przedstawia wst$b$, dodatną albo odjemną według jak punkt N, idąc od M, leży na półokręgu dodatnym albo odjemnym; odległość OP wyraża dos$b$, także dodatną albo odjemną według jak spodek P wstawy pada na promieniu OM albo na jego przedłużeniu OM'. To ustaliwszy, połączmy ON, i uważajmy że, ze środka koła O do punktu N prowadzą dwie drogi: jedna prosta ON, druga łamana OPN. Rzuty tych dwóch dróg na osi A'A są równe; więc mamy (**40**)

$$\text{ON}\operatorname{dos}(\text{ON}, \text{OA}) = \text{OP}\operatorname{dos}(\text{OP}, \text{OA}) + \text{PN}\operatorname{dos}(\text{PN}, \text{OA}).$$

Owoż, promień ON jest wzięty za jedność linijną, i oczywiście $\operatorname{dos}(\text{ON}, \text{OA}) = \operatorname{dos}(a+b)$; a wiemy, na mocy uwagi n⁰ **38**, że, jakiekolwiek są znaki linij trygonometrycznych NP i OP, będzie zawsze

$$\text{OP}\operatorname{dos}(\text{OP}, \text{OA}) = \operatorname{dos}b \operatorname{dos}a$$

$$\text{PN}\operatorname{dos}(\text{PN}, \text{OA}) = \operatorname{wst}b \operatorname{dos}\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{wst}b \operatorname{wst}a;$$

więc, podstawiając te wartości, znajdujemy ogólną formułę

$$\operatorname{dos}(a+b) = \operatorname{dos}a \operatorname{dos}b - \operatorname{wst}a \operatorname{wst}b,$$

z której, jakośmy zwiastowali, wywodzą się trzy inne. Więc wszystkie cztery formuły są ogólne.

49. Znając wstawę i dostawę ilukolwiek łuków $a, b, c \ldots$, można łatwo wyznaczyć wstawę i dostawę ich summy. I tak, biorąc naprzykład, trzy łuki a, b, c, dość jest, w formułach (1) i (2), zamiast b położyć $b+c$, i rozwinąć $\operatorname{wst}(b+c)$, $\operatorname{dos}(b+c)$ za pomocą tych samych formuł; co daje najpierwej

$$\operatorname{wst}(a+b+c) = \operatorname{wst}a \operatorname{dos}(b+c) + \operatorname{dos}a \operatorname{wst}(b+c)$$
$$\operatorname{dos}(a+b+c) = \operatorname{dos}a \operatorname{dos}(b+c) - \operatorname{wst}a \operatorname{wst}(b+c);$$

po czem, wykonawszy wskazane rachunki, otrzymujemy

$$\text{wst}(a+b+c)=\text{wst}a\,\text{dos}b\,\text{dos}c+\text{wst}b\,\text{dos}c\,\text{dos}a$$
$$+\text{wst}c\,\text{dos}a\,\text{dos}b-\text{wst}a\,\text{wst}b\,\text{wst}c,$$
$$\text{dos}(a+b+c)=\text{dos}a\,\text{dos}b\,\text{dos}c-\text{dos}a\,\text{wst}b\,\text{wst}c$$
$$-\text{dos}b\,\text{wst}c\,\text{wst}a-\text{dos}c\,\text{wst}a\,\text{wst}b.$$

Znając wstawę i dostawę summy trzech łuków, znajdziemy tym samym sposobem, wstawę i dostawę summy czterech łuków; potem pięciu; i tak dalej.

Trzeba uważać że te wszystkie formuły są *symetryczne* względem liter $a, b, c, d\ldots$, to jest, nie zmieniają się gdy przemieniamy dwie jakiekolwiek litery jedną na drugą; zatem, jeśli w rozwinięciu $\text{dos}(a+b+c)$, naprzykład, jest wyraz $-\text{dos}a\,\text{wst}b\,\text{wst}c$, z przyczyny symetryi muszą być wyrazy $-\text{dos}b\,\text{wst}c\,\text{wst}a$ i $-\text{dos}c\,\text{wst}a\,\text{wst}b$.

50. *Styczna i dotyczna.* Szukajmy teraz stycznej i dotycznej summy i różnicy dwóch łuków, znając styczną i dotyczną tych łuków.

Mamy

$$\text{sty}(a+b)=\frac{\text{wst}(a+b)}{\text{dos}(a+b)}=\frac{\text{wst}a\,\text{dos}b+\text{dos}a\,\text{wst}b}{\text{dos}a\,\text{dos}b-\text{wst}a\,\text{wst}b};$$

zkąd, dzieląc oba wyrazy ułamka przez wieloczyn $\text{dos}a\,\text{dos}b$, otrzymujemy

$$(5)\qquad \text{sty}(a+b)=\frac{\text{sty}a+\text{sty}b}{1-\text{sty}a\,\text{sty}b}.$$

Jeśli w formule (5) zamienimy b na $-b$, będziemy mieli

$$(6)\qquad \text{sty}(a-b)=\frac{\text{sty}a-\text{sty}b}{1+\text{sty}a\,\text{sty}b}.$$

Takim samym sposobem, jako wyżej, nietrudno otrzymać $\mathrm{dot}(a \pm b)$ w funkcyi $\mathrm{dot}a$, $\mathrm{dot}b$; ale prościej jest wyprowadzić tę formułę z równań (5) i (6), biorąc odwrotność stycznych; co daje odrazu formułę

$$\mathrm{dot}\,(a \pm b) = \frac{\mathrm{dot}a\,\mathrm{dot}b \mp 1}{\mathrm{dot}b \pm \mathrm{dot}a},$$

w której znaki wyższe idą razem i znaki niższe także razem.

Widzimy że $\mathrm{sty}\,(a+b)$ wyraża się *stosunkowo*, to jest bez pierwiastników, w funkcyi $\mathrm{sty}a$ i $\mathrm{sty}b$; podczas gdy nie można wyrazić stosunkowo $\mathrm{wst}\,(a+b)$ w funkcyi $\mathrm{wst}a$ i $\mathrm{wst}b$, ani $\mathrm{dos}\,(a+b)$ w funkcyi $\mathrm{dos}a$, $\mathrm{dos}b$. Albowiem, $\mathrm{dos}a = \sqrt{1-\mathrm{wst}^2a}$, $\mathrm{dos}b = \sqrt{1-\mathrm{wst}^2b}$, i $\mathrm{wst}a = \sqrt{1-\mathrm{dos}^2a}$, $\mathrm{wst}b = \sqrt{1-\mathrm{dos}^2b}$; więc, gdyby z formuły $\mathrm{wst}\,(a+b)$ chciano wyrugować $\mathrm{dos}a$, $\mathrm{dos}b$, toby ona musiała zawierać oba pierwiastniki $\sqrt{1-\mathrm{wst}^2a}$, $\sqrt{1-\mathrm{wst}^2b}$. Tak samo $\mathrm{dos}\,(a+b)$ zawierałaby pierwiastniki $\sqrt{1-\mathrm{dos}^2a}$, $\sqrt{1-\mathrm{dos}^2b}$, wyjąwszy szczególny przypadek $b=a$.

UWAGA. Dla otrzymania formuły (5), dzieliliśmy przez $\mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}b$; co przypuszcza że żaden z dwóch czynników $\mathrm{dos}a$ i $\mathrm{dos}b$ nie jest zero; trzeba więc sprawdzić formułę w przypadku $\mathrm{dos}a=0$, $\mathrm{dos}b=0$.

1° Jeśli $\mathrm{dos}a=0$, będzie $a=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ i $\mathrm{sty}a=\infty$; wtedy formuła (5) staje się

$$\mathrm{sty}\,(k\pi+\frac{\pi}{2}+b) = -\frac{\infty}{\infty} \quad \text{albo} \quad -\mathrm{dot}b = -\frac{\infty}{\infty}.$$

Żeby wiedzieć co znaczy druga strona symboliczna, podzielmy licznik i mianownik formuły (5) przez $\mathrm{sty}a$; znajdziemy ułamek

$$\frac{1+\dfrac{\mathrm{sty}b}{\mathrm{sty}a}}{\dfrac{1}{\mathrm{sty}a}-\mathrm{sty}b}$$

którego wartość dąży do $\dfrac{1}{-\mathrm{sty}b}$ w miarę jak sty$a$ rośnie nieskończenie; więc, gdy dos$a=0$, formuła (5) daje

$$-\mathrm{dot}b=-\frac{1}{\mathrm{sty}b};$$

co jest właśnie jej sprawdzeniem.

2° Jeśli dos$a=0$ i dos$b=0$, wtedy sty$a=\infty$, sty$b=\infty$, i formuła (5) bierze kształt

$$\mathrm{sty}k\pi=-\frac{\infty}{\infty^2}.$$

Żeby znaleźć prawdziwą wartość drugiej strony równania (5), podzielmy licznik i mianownik przez wieloczyn sty$a$ sty$b$; co da

$$\frac{\dfrac{1}{\mathrm{sty}b}+\dfrac{1}{\mathrm{sty}a}}{\dfrac{1}{\mathrm{sty}a\,\mathrm{sty}b}-1}$$

Owoż, gdy sty$a=\infty$ i sty$b=\infty$, wartość tego ułamka staje się 0, i sprawdza formułę (5). Więc ta formuła jest ogólna.

51. Można wyrazić styczną summy ilukolwiek łuków w funkcyi stosunkowej stycznych tych łuków. Biorąc naprzykład trzy łuki a, b, c, będzie najpierwej

$$\mathrm{sty}(a+b+c)=\frac{\mathrm{sty}a+\mathrm{sty}(b+c)}{1-\mathrm{sty}a\,\mathrm{sty}(b+c)};$$

ztąd, ponieważ

$$\mathrm{sty}(b+c)=\frac{\mathrm{sty}b+\mathrm{sty}c}{1-\mathrm{sty}b\,\mathrm{sty}c},$$

wynika

$$\mathrm{sty}(a+b+c)=\frac{\mathrm{sty}a+\mathrm{sty}b+\mathrm{sty}c-\mathrm{sty}a\,\mathrm{sty}b\,\mathrm{sty}c}{1-\mathrm{sty}a\,\mathrm{sty}b-\mathrm{sty}a\,\mathrm{sty}c-\mathrm{sty}b\,\mathrm{sty}c}.$$

Rozwinie się podobnie sty$(a+b+c+d)$ za pomocą poprzedzających formuł, kładąc $c+d$ zamiast c; i tak dalej.

Uwaga Nie trudno znaleźć ustawę wedle której rozwija się styczna summy n łuków. Jakoż, uważając że rozwinięcie jest symetryczne co do liter $a, b, c, \ldots$, i oznaczając przez $S_1, S_2, S_3, \ldots$

summy wieloczynów sty$a$ + sty b + .., sty$a$sty$b$ + sty$a$sty$c$ + ., etc; otrzymamy

$$\text{sty}\,(a+b+c+d+\ldots)=\frac{S_1-S_3+S_5-\ldots}{1-S_2+S_4-\ldots}$$

FORMUŁY PRZEKRZTAŁCENIA SUMMY ALBO RÓŻNICY NA WIELOCZYN, I NAWZAJEM.

52. Kombinując formuły (1), (2), (3), (4) przez dodawanie albo odciąganie, otrzymujemy

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}\text{wst}\,(a+b)+\text{wst}\,(a-b)&=2\text{wst}a\,\text{dos}b,\\ \text{wst}\,(a+b)-\text{wst}\,(a-b)&=2\text{dos}a\,\text{wst}b,\\ \text{dos}\,(a+b)+\text{dos}\,(a-b)&=2\text{dos}a\,\text{dos}b,\\ \text{dos}\,(a-b)-\text{dos}\,(a+b)&=2\text{wst}a\,\text{wst}b.\end{aligned}\right.$$

Za pomocą tych formuł, można łatwo zamienić summę i różnicę wstaw albo dostaw na wieloczyn, uważając tylko że łuki czynników są połową summy i połową różnicy łuków które wchodzą do summy albo do różnicy dwóch linij trygonometrycznych; to jest

$$a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2},\qquad b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}.$$

Tym sposobem znajdujemy zaraz że, naprzykład,

$$\begin{aligned}\text{wst}60^0+\text{wst}40^0&=2\text{wst}50^0\,\text{dos}10^0\\ \text{dos}40^0-\text{dos}60^0&=2\text{wst}50^0\,\text{wst}10^0.\end{aligned}$$

Nawzajem, żeby zamienić wieloczyn wstaw i dostaw na summę, dość uważać że łuki summy albo różnicy, tych dwóch linij trygonometrycznych, są summą i różnicą łuków które wchodzą do czynników; co daje odrazu

$$\text{dos}70^0\,\text{wst}50^0=\frac{1}{2}\,(\text{wst}120^0+\text{wst}20^0),$$

$$\text{wst}36^0\,\text{wst}40^0=\frac{1}{2}\,(\text{dos}4^0-\text{dos}76^0).$$

Inaczej. Jeśli uczynimy jako zwykle

$$a+b=p, \quad \text{i} \quad a-b=q,$$

zkąd

$$a=\frac{p+q}{2} \quad \text{i} \quad b=\frac{p-q}{2},$$

formuły (7) staną się

$$(8)\quad \begin{cases} \text{wst}p+\text{wst}q=2\text{wst}\,\dfrac{p+q}{2}\,\text{dos}\,\dfrac{p-q}{2}, \\ \text{wst}p-\text{wst}q=2\text{dos}\,\dfrac{p+q}{2}\,\text{wst}\,\dfrac{p-q}{2}, \\ \text{dos}p+\text{dos}q=2\text{dos}\,\dfrac{p+q}{2}\,\text{dos}\,\dfrac{p-q}{2}, \\ \text{dos}q-\text{dos}p=2\text{wst}\,\dfrac{p+q}{2}\,\text{wst}\,\dfrac{p-q}{2}. \end{cases}$$

Te cztery formuły służą do przekształcenia summy albo różnicy dwóch wstaw albo dwóch dostaw na wieloczyn wstaw i dostaw; ale, do przekształcenia wieloczynu na summę albo różnicę, formuły (7) są dogodniejsze.

Można także przekształcić na wieloczyn summę albo różnicę wstawy i dostawy.

Jakoż,

$$\text{wst}p\pm\text{dos}q=\text{wst}p\pm\text{wst}\left(\frac{\pi}{2}-q\right);$$

zatem, na mocy powyższych formuł, będzie

$$\text{wst}p+\text{dos}q=2\text{wst}\left(\frac{p-q}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\text{dos}\left(\frac{p+q}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{wst}p-\text{dos}q=2\text{dos}\left(\frac{p-q}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\text{wst}\left(\frac{p+q}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Z kombinacji formuł (8) przez dzielenie, wynikają inne formuły o których wiedzieć należy. I tak

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{wst}p+\mathrm{wst}q}{\mathrm{wst}p-\mathrm{wst}q}=\frac{\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(p+q)\,\mathrm{dos}\,\frac{1}{2}(p-q)}{\mathrm{dos}\,\frac{1}{2}(p+q)\,\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(p+q)}{\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(p-q)}\\
&\frac{\mathrm{wst}p+\mathrm{wst}q}{\mathrm{dos}p+\mathrm{dos}q}=\mathrm{sty}\,\tfrac{1}{2}(p+q)\\
&\frac{\mathrm{wst}p+\mathrm{wst}q}{\mathrm{dos}q-\mathrm{dos}p}=\mathrm{dot}\,\tfrac{1}{2}(p-q)\\
&\frac{\mathrm{wst}p-\mathrm{wst}q}{\mathrm{dos}p+\mathrm{dos}q}=\mathrm{sty}\,\tfrac{1}{2}(p-q)\\
&\frac{\mathrm{wst}p-\mathrm{wst}q}{\mathrm{dos}q-\mathrm{dos}p}=\mathrm{dot}\,\tfrac{1}{2}(p+q)\\
&\frac{\mathrm{dos}p+\mathrm{dos}q}{\mathrm{dos}q-\mathrm{dos}p}=\mathrm{dot}\,\tfrac{1}{2}(p+q)\,\mathrm{dot}\,\tfrac{1}{2}(p-q).
\end{aligned}\right.$$

Pierwsza z tych formuł jest często używana, i wyraża się następującem wysłowieniem:

Summa dwóch wstaw ma się do ich różnicy, jako styczna połowy summy odpowiedających łuków ma się do stycznej połowy różnicy tych łuków. (*)

MNOŻENIE ŁUKÓW.

53. *Wstawa i dostawa.* Jeśli w formułach (1) i (2)

$$\mathrm{wst}\,(a+b)=\mathrm{wst}a\,\mathrm{dos}b+\mathrm{dos}a\,\mathrm{wst}a$$
$$\mathrm{dos}\,(a+b)=\mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}b-\mathrm{wst}a\,\mathrm{wst}b$$

przypuścimy $b=a$, będzie

(10) $$\mathrm{wst}2a=2\mathrm{wst}a\,\mathrm{dos}a$$

(11) $$\mathrm{dos}2a=\mathrm{dos}^2a-\mathrm{wst}^2a$$

Te formuły dają wartość $\mathrm{wst}2a$ i $\mathrm{dos}2a$ w funkcyi $\mathrm{wst}a$ i $\mathrm{dos}a$.

(*) Zobacz notę na końcu dzieła,

54. W formułach (1) i (2) przypuśćmy $b=2a$, będzie

$$\text{wst}3a=\text{wst}a\,\text{dos}2a+\text{dos}a\,\text{wst}2a$$
$$\text{dos}3a=\text{dos}a\,\text{dos}2a-\text{wst}a\,\text{wst}2a;$$

zastępując teraz wst$2a$ i dos$2a$ przez ich wartości (10) i (11), i redukując, otrzymamy

$$\text{wst}3a=3\text{wst}a-4\text{wst}^3a \tag{12}$$
$$\text{dos}3a=4\text{dos}^3a-3\text{dos}a. \tag{13}$$

Te dwie formuły dają wartość wst$3a$ w funkcyi wst$a$, i wartość dos$3a$ w funkcyi dos$a$.

Uwaga. Formuła (13) wywodzi się z formuły (12) zastępując a przez $\frac{\pi}{2}-a$.

Możnaby teraz, przypuszczając $b=3a$ w formułach (1) i (2), albo zastępując a przez $2a$ w formułach (10) i 11), znaleźć wartość wst$4a$ i dos$4a$ w funkcyi wst$a$ i dos$a$; ale na teraz zostawiamy ten rachunek na ćwiczenie. Wyłożymy w księdze IVej ogólne formuły które dają odrazu wartości wstma i dosma w funkcyi wst$a$ i dos$a$, jakakolwiek jest wielkość całkowitej m.

55. *Styczna i dotyczna.* Jeśli w formule (5)

$$\text{sty}(a+b)=\frac{\text{sty}a+\text{sty}b}{1-\text{sty}a\,\text{sty}b}$$

uczynimy $b=a$, będzie

$$\text{sty}2a=\frac{2\text{sty}a}{1-\text{sty}^2a}. \tag{14}$$

Ta formuła wyraża wartość sty$2a$ w funkcyi stosunkowej ze sty$a$.

Jeśli w tej samej formule (5) uczynimy $b = 2a$, otrzymamy

$$\mathrm{sty}3a = \frac{\mathrm{sty}a + \mathrm{sty}2a}{1 - \mathrm{sty}a\,\mathrm{sty}2a};$$

zkąd, zastępując sty$2a$ przez jej wartość (14), wynika

$$(15)\qquad \mathrm{sty}3a = \frac{3\mathrm{sty}a - \mathrm{sty}^3 a}{1 - 3\mathrm{sty}^2 a}$$

Po tem co poprzedza nie trudnoby otrzymać sty$4a$, następnie sty$5a$,... w funkcyi stosunkowej ze sty$a$; ale damy później ogólny sposób wyznaczenia styma w funkcyi sty$a$.

Uwaga. Jeśli potrzebujemy dot$2a$ w funkcyi dot$a$, dość wziąć odwrotność sty$2a$, i w niej zastąpić sty$a$ przez $\frac{1}{\mathrm{dot}a}$; co daje

$$\mathrm{dot}2a = \frac{\mathrm{dot}^2 a - 1}{2\mathrm{dot}a}.$$

DZIELENIE ŁUKÓW.

56. *Wstawa i dostawa.* Rozwiążmy następujące zadanie

Mając daną dos$a$ *znaleźć* wst$\frac{a}{2}$ *i* dos$\frac{a}{2}$.

Jeśli, w formule

$$\mathrm{dos}2a = \mathrm{dos}^2 a - \mathrm{wst}^2 a$$

zamiast a położymy $\frac{a}{2}$, będzie

$$\mathrm{dos}^2\frac{a}{2} - \mathrm{wst}^2\frac{a}{2} = \mathrm{dos}a$$

nadto, jakikolwiek jest łuk, mamy zawsze

$$\text{wst}^2\frac{a}{2}+\text{dos}^2\frac{a}{2}=1\,.$$

Z tych dwóch równań, przez odciąganie i dodawanie, wyprowadzamy dwa ważne związki

$$(16)\qquad 2\text{wst}^2\frac{a}{2}=1-\text{dos}a \quad\text{albo}\quad \text{dos}a=1-2\text{wst}^2\frac{a}{2}$$

$$(17)\qquad 2\text{dos}^2\frac{a}{2}=1+\text{dos}a \quad\text{albo}\quad \text{dos}a=2\text{dos}^2\frac{a}{2}-1\,;$$

zkąd

$$(18)\qquad \text{wst}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\text{dos}a}{2}} \quad\text{i}\quad \text{dos}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\text{dos}a}{2}}$$

Uwaga. $2\text{wst}^2\frac{a}{2}$ wyraża wst.odw a.

Nie trudno wytłumaczyć dlaczego znajdujemy dla $\text{wst}\frac{a}{2}$ i $\text{dos}\frac{a}{2}$ dwie wartości równe i znaków przeciwnych. Zważajmy albowiem że daną ilością jest nie łuk a ale dos$a$. Owoż, łuki mające daną dostawę są wszystkie zawarte w podwójnej formule

$$a=2k\pi\pm\alpha\,;$$

więc wartości $\text{wst}\frac{a}{2}$ i $\text{dos}\frac{a}{2}$ wyrażają się przez

$$\text{wst}\frac{a}{2}=\text{wst}\left(k\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \text{dos}\frac{a}{2}=\text{dos}\left(k\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right).$$

Jeśli teraz weźmiemy za k liczbę parzystą, te dwie formuły staną się

$$\text{wst}\frac{a}{2}=\pm\text{wst}\frac{\alpha}{2}, \qquad \text{dos}\frac{a}{2}=\text{dos}\frac{\alpha}{2}\,;$$

a jeśli za k weźmiemy liczbę nieparzystą, te same formuły będą

$$\text{wst}\frac{a}{2}=\text{wst}\left(\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\mp\text{wst}\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{dos}\frac{a}{2}=\text{dos}\left(\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right)=-\text{dos}\frac{\alpha}{2}.$$

To dowodzi że $\text{wst}\frac{a}{2}$ ma dwie wartości równe i znaków przeciwnych, $\pm\text{wst}\frac{\alpha}{2}$; i podobnie $\text{dos}\frac{a}{2}$ ma także dwie wartości równe i znaków przeciwnych, $\pm\text{dos}\frac{\alpha}{2}$.

57. Jeśli łuk a jest dany, wtedy wiadomy jest znak wstawy i dostawy połowy tego łuku, i formuły (18) wyznaczają zupełnie wartości $\text{wst}\frac{a}{2}$, $\text{dos}\frac{a}{2}$.

I tak, jeśli łuk a jest zawarty w pierwszym ćwiercianie, mamy

$$(9)\qquad \text{wst}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\text{dos}a}{2}}\quad\text{i}\quad\text{dos}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\text{dos}a}{2}}.$$

Naprzykład, $\text{dos}30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$; więc

$$\text{wst}15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}),$$

$$\text{dos}15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

Weźmy teraz łuk $a=1300^\circ$; będzie $\text{dos}1300^\circ=-\text{dos}40^\circ$;

$$\text{wst}\frac{a}{2}=\text{wst}650^\circ=-\text{wst}70^\circ,\quad \text{dos}\frac{a}{2}=\text{dos}70^\circ;$$

więc

$$\text{wst}\frac{1300^\circ}{2}=-\sqrt{\frac{1+\text{dos}40^\circ}{2}},\quad \text{dos}\frac{1300}{2}=\sqrt{\frac{1-\text{dos}40^\circ}{2}}.$$

58. *Mając daną* wst$a$, *znaleźć* wst$\frac{a}{2}$ i dos$\frac{a}{2}$. Z dwóch równań

$$2\text{wst}\frac{a}{2}\text{dos}\frac{a}{2}=\text{wst}a$$

$$\text{wst}^2\frac{a}{2}+\text{dos}^2\frac{a}{2}=1$$

wywodzimy, przez dodawanie i odciąganie,

$$\left(\text{wst}\frac{a}{2}+\text{dos}\frac{a}{2}\right)^2=1+\text{wst}a$$

$$\left(\text{wst}\frac{a}{2}-\text{dos}\frac{a}{2}\right)^2=1-\text{wst}a;$$

zkąd

$$\text{wst}\frac{a}{2}+\text{dos}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{1+\text{wst}a}$$

$$\text{wst}\frac{a}{2}-\text{dos}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{1-\text{wst}a};$$

a zatem

$$(20)\quad\left\{\begin{array}{l}\text{wst}\frac{a}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst}a}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst}a}\\ \text{dos}\frac{a}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst}a}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst}a}.\end{array}\right.$$

Ponieważ znaki pierwiastników są niezależne jeden od drugiego, te formuły dają, dla każdej z dwóch ilości wst$\frac{a}{2}$ i dos$\frac{a}{2}$, cztery wartości równe i znaków przeciwnych, i widzimy nawet że wartości dla wst$\frac{a}{2}$ są właśnie te same co dla dos$\frac{a}{2}$. To wszystko łatwo się wytłumaczyć może. Jakoż, danej wstawie odpowiedają łuki zawarte w dwóch formułach (n° 26)

$$a=2k\pi+\alpha,\qquad\text{i}\qquad a=(2k+1)\pi-\alpha;$$

więc wartości dla $\text{wst}\frac{a}{2}$ i $\text{dos}\frac{a}{2}$ są

$$\text{wst}\,\frac{a}{2} = \text{wst}\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right), \quad \text{wst}\,\frac{a}{2} = \text{wst}\left(k\pi + \frac{\pi-\alpha}{2}\right)$$

$$\text{dos}\,\frac{a}{2} = \text{dos}\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right), \quad \text{dos}\,\frac{a}{2} = \text{dos}\left(k\pi + \frac{\pi-\alpha}{2}\right).$$

Jeśli teraz weźmiemy za k liczbę parzystą, powyższe równania staną się

$$\text{wst}\,\frac{a}{2} = \text{wst}\,\frac{\alpha}{2}, \quad \text{wst}\,\frac{a}{2} = \text{wst}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \text{dos}\,\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{dos}\,\frac{a}{2} = \text{dos}\,\frac{\alpha}{2}, \quad \text{dos}\,\frac{a}{2} = \text{dos}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \text{wst}\,\frac{\alpha}{2};$$

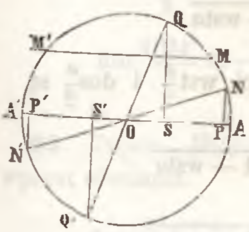
a jeśli za k weźmiemy liczbę nieparzystą, wtedy będzie

$$\text{wst}\,\frac{a}{2} = -\,\text{wst}\,\frac{a}{2}, \quad \text{wst}\,\frac{a}{2} = -\,\text{wst}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\,\text{dos}\,\frac{\alpha}{2},$$

$$\text{dos}\,\frac{a}{2} = -\,\text{dos}\,\frac{\alpha}{2}, \quad \text{dos}\,\frac{a}{2} = -\,\text{dos}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\,\text{wst}\,\frac{\alpha}{2};$$

Widzimy tedy że $\text{wst}\frac{a}{2}$ i $\text{dos}\frac{a}{2}$ mają każda cztery wartości $\pm\,\text{wst}\frac{\alpha}{2}$, $\pm\,\text{dos}\frac{\alpha}{2}$. Więc zagadnienie ma cztery rozwiązania.

58. Za pomocą geometryi można jasno przedstawić te wszystkie wyniki. Jakoż, łuki odpowiedające danej wst$a$ mają



skrajności M i M′ na jednej równoległej do średnicy AA′; połowy tych łuków mają skrajności we środkach N i Q łuków AM i AM′, albo w punktach średnicowo przeciwnych N′ i Q′. Są więc cztery wstawy, NP i N′P′, QS i Q′S′, równe i znaków przeciwnych, i także cztery dostawy, OP i OP′, OS i O′S′, równe i znaków przeciwnych; a ponieważ łuki AN$=\frac{\alpha}{2}$ i AQ$=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$ są dopełniające, wstawa łuków mających skrajność N albo N′ jest dostawą łuków mających skrajność Q albo Q′. Ztąd wynika że cztery wartości dla $\text{wst}\frac{a}{2}$ są te same co cztery wartości dla $\text{dos}\frac{a}{2}$.

59. Gdy jest dany łuk *a*, wtedy oczywiście $\text{wst}\frac{a}{2}$ ma tylko jedną wartość, i $\text{dos}\frac{a}{2}$ także jedną. Aby wiedzieć którą ze czterech wartości, wskazanych przez formuły (20), wziąć należy, uważajmy że, mając łuk *a*, znamy zaraz znak wartości $\text{wst}\frac{a}{2}$ i $\text{dos}\frac{a}{2}$, i wiemy która z nich większa od drugiéj; znamy tym sposobem znak pierwiastników w równaniach z których się wywodzą wartości $\text{wst}\frac{a}{2}$ i $\text{dos}\frac{a}{2}$.

I tak, jeśli łuk *a* jest zawarty w pierwszym ćwiercianie, wtedy $\text{wst}\frac{a}{2}$ i $\text{dos}\frac{a}{2}$ są obie dodatne; i $\text{wst}\frac{a}{2} < \text{dos}\frac{a}{2}$, bo $\text{wst}\frac{a}{2} < \text{wst}45^\circ$, a zaś $\text{dos}\frac{a}{2} > \text{dos}45^\circ$.

To dowodzi że trzeba wziąć równania

$$\text{wst}\frac{a}{2}+\text{dos}\frac{a}{2}=+\sqrt{1+\text{wst}a}$$

$$\text{wst}\frac{a}{2}-\text{dos}\frac{a}{2}=-\sqrt{1-\text{wst}a}\,;$$

Więc, w pierwszym ćwiercianie, wartoci $\text{wst}\frac{a}{2}$ i $\text{dos}\frac{a}{2}$ są

$$(21)\quad \begin{cases} \text{wst}\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst}a}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst}a} \\ \text{dos}\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst}a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst}a}\,. \end{cases}$$

Jako zastosowanie, szukajmy $\mathrm{wst}9^0$ i $\mathrm{dos}9^0$, wiedząc (9) że $\mathrm{wst}18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

Mamy zaraz

$$\mathrm{wst}9^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)},$$

albo

$$\mathrm{wst}9^0 = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}\,.$$

Tak samo

$$\mathrm{dos}9^0 = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}\,.$$

Szukajmy teraz wstawy i dostawy połowy łuku 1024^0. Widzimy że

$$\mathrm{wst}\frac{a}{2} = \mathrm{wst}512^0 = \mathrm{wst}28^0, \quad \text{i} \quad \mathrm{dos}\frac{a}{2} = -\mathrm{dos}28^0,$$

$$\mathrm{wst}a = \mathrm{wst}304^0 = -\mathrm{wst}56^0,$$

więc

$$\mathrm{wst}\frac{a}{2} + \mathrm{dos}\frac{a}{2} = \mathrm{wst}28^0 - \mathrm{dos}28^0 = -\sqrt{1-\mathrm{wst}56^0},$$

$$\mathrm{wst}\frac{a}{2} - \mathrm{dos}\frac{a}{2} = \mathrm{wst}28^0 + \mathrm{dos}28^0 = +\sqrt{1+\mathrm{wst}56^0};$$

a ztąd

$$\mathrm{w}\frac{1024^0}{2} = +\frac{1}{2}\sqrt{1+\mathrm{wst}56^0} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\mathrm{wst}56^0}$$

$$\mathrm{dos}\frac{1024^0}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{1+\mathrm{wst}56^0} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\mathrm{wst}56^0}\,.$$

60. Uwaga. Można otrzymać formuły (20), rozwiązując wprost równania

$$2\mathrm{wst}\frac{a}{2}\,\mathrm{dos}\frac{a}{2} = \mathrm{wst}a \qquad \mathrm{wst}^2\frac{a}{2} + \mathrm{dos}^2\frac{a}{2} = 1\,.$$

Jakoż, rugując $\operatorname{wst}\frac{a}{2}$, znajdujemy równanie dwukwadratowe

$$4\operatorname{dos}^4\frac{a}{2}-4\operatorname{dos}^2\frac{a}{2}+\operatorname{wst}^2a=0,$$

które daje

$$\operatorname{dos}\frac{a}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\pm\sqrt{4-4\operatorname{wst}^2a}}=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{1+\operatorname{wst}a}\pm\sqrt{1-\operatorname{wst}a}).$$

Zatem

$$\operatorname{wst}\frac{a}{2}=\frac{\operatorname{wst}a}{2\operatorname{dos}\frac{a}{2}}=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{1+\operatorname{wst}a}\mp\sqrt{1-\operatorname{wst}a})$$

Te wyniki pokazują że trzeba brać znaki wyższe i niższe razem w obydwóch formułach.

61. *Mając daną* $\operatorname{wst}a$ *znaleźć* $\operatorname{wst}\frac{a}{3}$. Jeśli w formule

$$\operatorname{wst}3a=3\operatorname{wst}a-4\operatorname{wst}^3\cancel{\frac{a}{3}}$$

położymy $\frac{a}{3}$ zamiast a, otrzymamy formułę

$$\operatorname{wst}a=3\operatorname{wst}\frac{a}{3}-4\operatorname{wst}^3\frac{a}{3}.$$

Uczyńmy teraz $\operatorname{wst}\frac{a}{3}=x$ i $\operatorname{wst}a=b$, będziemy mieli równanie

$$x^3-\frac{3}{4}x+\frac{b}{4}=0. \tag{22}$$

Algebra uczy (co zresztą zobaczymy w księdze IV) że to równanie stopnia 3go ma wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste, i że ich summa jest zero.

Nie trudno, przez samą trygonometryę, dowieśdź że te pierwiastki są rzeczywiste. Jakoż, jeśli nazwiemy α najmniejszy dodatny z pomiędzy łuków mających daną wstawę b, wszystkie łuki a będą zawarte w dwóch formułach

$$a = 2k\pi + \alpha \quad \text{i} \quad a = (2k+1)\pi - \alpha;$$

zatem wszystkie pierwiastki powyższego równania otrzymają się z dwóch formuł

$$x = \text{wst}\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) \quad \text{i} \quad x = \text{wst}\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi - \alpha}{3}\right),$$

w których k znaczy liczbę całkowitą jakąkolwiek, dodatną albo odjemną i nawet zero. Owoż, podstawiając za k trzy całkowite po sobie idące, naprzykład 0, 1, 2, widzimy że każda z dwóch formuł daje trzy wartości różne; a gdyby za k podstawiono jeszcze inne całkowite, łuki będąc powiększone albo zmniejszone całkowitą liczbą okręgów sprowadziłyby te same linie trygonometryczne. Ztąd wnosimy że wartości dla x są następujące

$$\text{wst}\,\frac{\alpha}{3}, \quad \text{wst}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right), \quad \text{wst}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$
$$\text{wst}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right), \quad \text{wst}\left(\pi - \frac{\alpha}{3}\right), \quad \text{wst}\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Ale trzy ostatnie wstawy są równe trzem pierwszym; albowiem łuki $\pi - \frac{\alpha}{3}$ i $\frac{\alpha}{3}$ są spełniające, a zaś łuki $\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}$ i $\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}$, $\frac{5\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}$ i $\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}$ czynią summy równe nieparzystej liczbie półokręgów. Więc równanie (2) ma trzy pierwiastki

$$\text{wst}\alpha, \quad \text{wst}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right), \quad \text{wst}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

zawsze rzeczywiste a ogólnie nierówne, i więcej ich mieć nie może.

To wiedząc, łatwo okazać że summa trzech pierwiastków jest zero.

Jakoż,

$$\text{wst}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)=\text{wst}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right),\quad \text{wst}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)=-\text{wst}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right);$$

więc

$$\text{wst}\frac{\alpha}{3}+\text{wst}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)+\text{wst}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$$

$$=\text{wst}\frac{\alpha}{3}-2\text{dos}\frac{\pi}{3}\,\text{wst}\frac{\alpha}{3}=0.$$

Ztąd wynika że dwa pierwiastki są jednakowego znaku, a trzeci znaku przeciwnego.

Szukajmy teraz między jakiemi liczbami są zawarte pierwiastki równania (22). Odróżniając dwa przypadki, według znaku danej $\text{wst}\,a=b$, będzie :

1° Gdy $b>0$, wtedy $\alpha>0$ $\alpha<\frac{\pi}{2}$; zatem trzy łuki, których wstawy są pierwiastkami równania (22), mają za granice

$$0<\frac{\alpha}{3}<\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{2\pi}{3}<\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{4\pi}{3}<\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}<\frac{3\pi}{2}$$

Widzimy tedy że pierwszy pierwiastek, $\text{wst}\frac{\alpha}{3}$, jest zawarty między 0 i $\frac{1}{2}$, drugi między $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, trzeci między $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ i -1.

2^0 Gdy $b < 0$ wtedy $\alpha > \pi$ i $\alpha < \frac{3\pi}{2}$; zatem

$$\frac{\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{2},$$

$$\pi < \frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3} < \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3} < \frac{11\pi}{6}$$

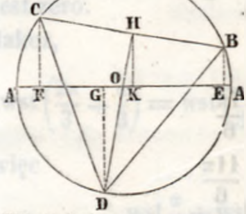
Widzimy łatwo że pierwszy pierwiastek jest zawarty między $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ i 1, drugi między 0 i $-\frac{1}{2}$, trzeci między $-\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

To wszystko pokazuje że wartości samoiste trzech pierwiastków są zawarte między liczbami 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, 1, i pierwiastki mające ten sam znak co wst$a$ są właśnie dwa pierwsze.

W szczególnym przypadku gdy wst$a = \pm 1$, równanie ma dwa pierwiastki równe których wartość samoista jest $\frac{1}{2}$; wartość samoista pierwiastku pojedyńczego jest 1.

Jeśli jest dany łuk a, wtedy wst$\frac{a}{3}$ ma tylko jedną wartość, i można zaraz wiedzieć który z trzech pierwiastków ją wyraża; bo znany jest naprzód znak tej wstawy i wiadome liczby między które wpada. I tak, niech będzie naprzykład $a = 570^0$; ponieważ wst$570^0 < 0$ i wst$\frac{570^0}{3} =$ wst$190^0 < 0$, trzeba wziąć ten z dwóch pierwiastków odjemnych którego wartość samoista jest mniejsza od $\frac{1}{2}$.

62. Dowodzi się łatwo przez geometryę że summa trzech pierwiastków równania (22) jest zero. I w samej rzeczy, jakakolwiek jest dana wst$a$, dodatna



albo odjemna, zawsze $\frac{\alpha}{3} \leq \pi$; jeśli więc, na kole promienia 1, weźmiemy łuk $AB = \frac{\alpha}{3}$ i wpiszemy trójkąt równoboczny BCD, prostopadłe BE, CF, DG, spuszczone z jego wierzchołków na średnicę AA', i wzięte ze znakiem + albo — według jak wierzchołki są nad albo pod tą średnicą, będą przedstawiały trzy pierwiastki równania. A ponieważ dwa wierzchołki trójkąta równobocznego RCD muszą się znajdować z jednej strony średnicy AA', i trzeci wierzchołek z drugiej strony, dwa z tych pierwiastków mają te same znaki, a trzeci ma znak przeciwny. Zatem, aby dowieśdź że summa trzech pierwiastków jest zero, dość okazać że $DG = BE + CF$. Poprowadźmy prostopadłę DH do BC i prostopadłę HK do AA'; będzie, w trapezie BCFE, $BE + CF = 2HK$. Owoż, trójkąty prostokątne ODG, OHK są podobne i dają

$$\frac{DG}{HK} = \frac{DO}{HO};$$

ale apotema $OH = \frac{1}{2}DO$, więc $DG = 2HK$ i temsamem $DG = BE + CF$.

Ztąd wynika znane twierdzenie geometryi:

Jeśli z trzech wierzchołków trójkąta równobocznego spuszczono prostopadłe na jakąkolwiek średnicę koła opisanego, summa dwóch prostopadłych, leżących z jednej strony tej średnicy, jest równa prostopadłej leżącej z drugiej strony.

63. *Mając daną dos$a$, znaleźć* dos$\frac{a}{3}$. Jeśli w formule

$$\text{dos}3a = 4\text{dos}^3 a - 3\text{dos}a$$

położymy $\frac{a}{3}$ zamiast a, otrzymamy formułę

$$\operatorname{dos} a = 4 \operatorname{dos}^3 \frac{a}{3} - 3 \operatorname{dos} \frac{a}{3}.$$

Uczyńmy teraz $\operatorname{dos}\frac{a}{3} = x$ i $\operatorname{dos} a = b$, będziemy mieli równanie

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}b = 0 \tag{23}$$

które się wywodzi z równania (22), poprzedzającego zagadnienia, zamieniając x na $-x$; ztąd wnosimy że pierwiastki tego równania są rzeczywiste, i ich summa jest zero.

Jednakże dowiedziemy wprost tego wszystkiego. Widzimy zaraz że łuki odpowiedające danej $\operatorname{dos} a$ są wszystkie zawarte w podwójnej formule

$$a = 2k\pi \pm \alpha;$$

zatem, wszystkie pierwiastki równania wywodzą się z formuły

$$x = \operatorname{dos}\left(\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right)$$

w której k znaczy liczbę całkowitą jakąkolwiek, dodatną albo odjemną i nawet zero.

Owoż, jako już wiemy, aby otrzymać wszystkie wartości niewiadomej x, dość podstawić za k trzy całkowite po sobie idące, naprzykład 0, 1, 2; co daje następujące wartości

$$\operatorname{dos}\frac{\alpha}{3}, \quad \operatorname{dos}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right), \quad \operatorname{dos}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right)$$

$$\operatorname{dos}\left(-\frac{\alpha}{3}\right), \quad \operatorname{dos}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right), \quad \operatorname{dos}\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Ale trzy ostatnie dostawy są oczywiście równe trzem pierwszym: więc nasze równanie ma trzy pierwiastki

$$\operatorname{dos}\frac{\alpha}{3},\quad \operatorname{dos}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\quad \operatorname{dos}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$$

rzeczywiste, ogólnie nierówne, i więcej ich mieć nie może.

Rozumując jako w n^{e} 61, znajdziemy że wartości samoistne tych pierwiastków są zawarte między liczbami 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 1, i że pierwiastki znaku przeciwnego z dos$a$ są dwa pierwsze. W szczególnym przypadku gdy dos$a = +1$, pierwiastek podwójny jest $-\frac{1}{2}$, pojedynczy $+1$; gdy zaś dos$a = -1$, pierwiastek podwójny jest $+\frac{1}{2}$, pojedynczy -1.

Nakoniec, nie trudno dowieśdź geometrycznie, że summa pierwiastków równania (22) jest zero. Jakoż, biorąc ostatnią figurę, widzimy zaraz że dostawa OE jest dodatna, dostawy OF i OG obie odjemne; ale KE = KF, a trójkąty podobne ODG, OEH dają OG = 2OE; więc OE = OF + OG, albo

$$\operatorname{dos}\frac{\alpha}{3}+\operatorname{dos}\left(\frac{3\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)+\operatorname{dos}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)=0.$$

Uwaga ogólna. Pierwiastki równania (22) posiadają znamienitą własność: są *funkcyą stosunkową*, jeden drugiego. Jakoż, oznaczając $\operatorname{wst}\frac{\alpha}{3}$, $\operatorname{wst}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$, $\operatorname{wst}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$ przez x, x', x'', mamy najpierwej

$$\operatorname{wst}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\operatorname{wst}\frac{\alpha}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{dos}\frac{\alpha}{3}$$

albo

$$x'=-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}.$$

Ale, zamieniając w równaniu (23) x^2 na $1-x^2$, i dos$a$ na $\sqrt{1-\text{wst}^2a}$ ponieważ wst$a$ jest wiadoma, otrzymujemy równanie (22); to podstawienie daje

$$\sqrt{1-x^2}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)-\sqrt{1-\text{wst}^2a}=0,\ \text{zkąd}\ \sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{1-\text{wst}^2a}}{1-4\text{wst}^2a};$$

więc

$$x'=-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-\text{wst}^2a}}{2(1-4x^2)}.$$

Tak samo

$$x''=-\frac{x'}{2}+\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-\text{wst}^2a}}{2(1-4x'^2)}.$$

x'' wywodzi się także stosunkowo z x; albowiem

$$\text{wst}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\,\text{wst}\,\frac{\alpha}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{dos}\,\frac{\alpha}{3}$$

albo

$$x''=-\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-\text{wst}^2a}}{2(1-4x^2)}.$$

Nawzajem, x jest funkcyą stosunkową z x'. Jakoż,

$$\text{wst}\,\frac{\alpha}{3}=\text{wst}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\,\text{wst}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{dos}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),$$

albo

$$x=-\frac{x'}{2}-\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-\text{wst}^2a}}{2(1-4x'^2)}.$$

Pierwiastki równania (23) mają taką samą własność, która jest bardzo użyteczna; bo, za pomocą niej, znając jeden z trzech pierwiastków równania otrzymuje się dwa inne. Wprawdzie przypadek pierwiastków równych wymyka się, ale wtedy pierwiastki równania łatwo się wprost wyznaczają.

64. Z dwóch poprzedzających zagadnień wynika że, chcąc znaleźć ogólnie wst$\frac{a}{m}$ albo dos$\frac{a}{m}$, w funkcyi wst$a$ albo dos$a$, trzeba najpierwej utworzyć równanie dające wstma albo dosma w funkcyi wst$a$ albo dos$a$, i potem zastąpić a przez $\frac{a}{m}$. Ostatnie równanie będzie dla dos$\frac{a}{m}$ zawsze stopnia m; a zaś dla wst$\frac{a}{m}$, stopnia $2m$ albo m według jak m jest parzyste albo nieparzyste; jako później zobaczymy w księdze IV.

Gdy m jest potęgą liczby 2, można dość łatwo, w funkcyi wst$a$ albo dos$a$, otrzymać wst$\frac{a}{4}$ i dos$\frac{a}{4}$, wst$\frac{a}{8}$ i dos$\frac{a}{8}$, etc. rozwiązując tylko równania stopnia 2go.

Jeśli jest dany kąt a, wtedy zagadnienia *znaleźć* wst$\frac{a}{3}$ *albo* dos$\frac{a}{3}$ stanowią zagadnienie *trójdzielenia kąta* które, rozwiązane *takim sposobem*, zależy od równania stopnia 3go.

65. *Styczna i dotyczna*. Rozwiążmy następujące zagadnienie: *Mając daną* sty$a$ *znaleźć* sty$\frac{a}{2}$.

Jeśli, w formule

$$\text{sty}2a = \frac{2\text{sty}a}{1 - \text{sty}^2 a},$$

położymy $\frac{a}{2}$ zamiast a, będzie

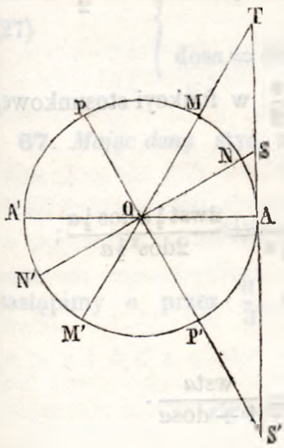
$$\text{sty}a = \frac{2\text{sty}\frac{a}{2}}{1 - \text{sty}^2\frac{a}{2}}; \qquad (24)$$

zkąd

$$\text{sty}\,a\,\text{sty}^2\frac{a}{2} + 2\text{sty}\frac{a}{2} - \text{sty}\,a = 0.$$

To równanie drugiego stopnia ma dwa pierwiastki rzeczywiste ze znakami przeciwnemi, których wartości samoistne są wzajemne.

Można łatwo przez geometryę okazać że zagadnienie powinno istotnie mieć dwa rozwiązania. Jakoż, danej stycznej $AT = \text{sty}\,a$ odpowiedają wszystkie łuki mające skrajności M i M′ średnicowo przeciwne; połowy tych łuków kończą się w punktach N i N′, P i P′, i mają dwie styczne AS i AS′. A że średnica PP′ jest prostopadła do średnicy NN′, trójkąt prostokątny SOS′ daje



$$AS.\,AS' = \overline{OA}^2;$$

więc, uważając że odcinki AS i AS′ są znaków przeciwnych i znaczą $\text{sty}\frac{\alpha}{2}$, $-\text{dot}\frac{\alpha}{2}$, będzie

$$\text{sty}\frac{\alpha}{2}\,\text{dot}\frac{\alpha}{2} = -1.$$

Dochodzi się łatwo do tego wyniku przez trygonometryę.

Rozwiązując równanie (24), otrzymujemy dwa pierwiastki

$$\text{sty}\frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \text{sty}^2 a}}{\text{sty}\,a}$$

które zadość czynią zagadnieniu.

Jeśli łuk a jest dany, wtedy równanie (24) wyznacza sty$\frac{a}{2}$, bo jest naprzód znany jej znak. I tak, przypuśćmy $a = 45^0$; ponieważ sty45^0 jest dodatna, będzie

$$\text{sty}\,\frac{45^0}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

Uwaga. Znalezionoby takim samym sposobem dot$\frac{a}{2}$ w funkcyi dot$a$.

66. Dobrze jest znać sty$\frac{a}{2}$ i dot$\frac{a}{2}$ w funkcyi stosunkowej wst$a$ i dos$a$. W tym celu mamy

$$\text{sty}\,\frac{a}{2} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}a}{\text{dos}\frac{1}{2}a} = \frac{2\text{wst}^2\frac{1}{2}a}{2\text{wst}\frac{1}{2}a\,\text{dos}\frac{1}{2}a} = \frac{2\text{wst}\frac{1}{2}a\,\text{dos}\frac{1}{2}a}{2\text{dos}^2\frac{1}{2}a};$$

więc, na mocy wiadowych formuł,

$$\text{(25)} \qquad \text{sty}\,\frac{a}{2} = \frac{1 - \text{dos}a}{\text{wst}a} = \frac{\text{wst}a}{1 + \text{dos}a}.$$

Po czem, biorąc odwrotność, będzie

$$\text{dot}\,\frac{a}{2} = \frac{\text{wst}a}{1 - \text{dos}a} = \frac{1 + \text{dos}a}{\text{wst}a}.$$

Można także otrzymać sty$\frac{a}{2}$ i dot$\frac{a}{2}$ w funkcyi dos$a$; albowiem

$$\text{(26)} \qquad \begin{cases} \text{sty}\,\dfrac{a}{2} = \dfrac{\text{wst}\frac{1}{2}a}{\text{dos}\frac{1}{2}a} = \sqrt{\dfrac{1 - \text{dos}a}{1 + \text{dos}a}} \\ \text{dot}\,\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \text{dos}a}{1 - \text{dos}a}} \end{cases}$$

W wysokiej analizie użyteczne są formuły które dają wst$a$ i dos$a$ w funkcyi stosunkowej ze sty$\frac{a}{2}$. Aby je otrzymać, uważajmy że

$$\text{wst}\,\frac{a}{2}=\frac{\text{sty}\,\frac{1}{2}a}{\sqrt{1+\text{sty}^2\,\frac{1}{2}a}},\quad \text{dos}\,\frac{a}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\text{sty}^2\,\frac{1}{2}a}};$$

więc

$$(27)\quad \begin{cases} \text{wst}a=2\text{wst}\,\frac{a}{2}\,\text{dos}\,\frac{a}{2}=\dfrac{2\text{sty}\,\frac{1}{2}a}{1+\text{sty}^2\,\frac{1}{2}a} \\ \text{dos}a=\text{dos}^2\,\frac{a}{2}-\text{wst}^2\,\frac{a}{2}=\dfrac{1-\text{sty}^2\,\frac{1}{2}a}{1+\text{sty}^2\,\frac{1}{2}a}. \end{cases}$$

67. *Mając daną* sty$a$ *znaleźć* sty$\frac{a}{3}$. Jeśli w formule

$$\text{sty}3a=\frac{3\text{sty}a-\text{sty}^3a}{1-3\text{sty}^2a}$$

zastąpimy a przez $\frac{a}{3}$, otrzymamy

$$\text{sty}a=\frac{3\text{sty}\,\frac{a}{3}-\text{sty}^3\,\frac{a}{3}}{1-3\text{sty}^2\,\frac{a}{3}}.$$

Uczyńmy teraz sty$\frac{a}{3}=x$ i sty$a=b$, będzie

$$(28)\qquad \frac{x^3-3x}{1-3x^2}+b=0$$

albo $$x^3-3bx^2-3x+b=0$$

To równanie 3^{go} stopnia ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Jakoż, łuki odpowiedające danej sty$a$, są zawarte w formule

$$a=k\pi+\alpha;$$

zatem wszystkie wartości niewiadomej x są dane przez formułę

$$x = \operatorname{sty}\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

w której, jako widzimy, dość podstawić za k trzy całkowite po sobie idące jakiekolwiek, naprzykład 0, 1, 2, żeby otrzymać wszystkie wartości tej niewiadomej x. Ztąd wynika że równanie (28) ma trzy pierwiastki rzeczywiste

$$\operatorname{sty}\frac{\alpha}{3}, \qquad \operatorname{sty}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right), \qquad \operatorname{sty}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

i nie ma ich więcej.

Te trzy pierwiastki są różne. Równanie (28) nie może mieć pierwiastków równych, ponieważ różnica dwóch którychkolwiek z trzech powyższych łuków jest mniejsza od półokręgu π.

Szukajmy teraz między jakiemi liczbami są zawarte rzeczone pierwiastki.

1° Gdy $\operatorname{sty} a > 0$ i jest skończona, wtedy $\alpha > 0$ i $\alpha < \pi$; zatem trzy łuki, których styczne są pierwiastkami równania, mają za granice

$$0 < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{3},$$

$$\frac{\pi}{3} < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{2\pi}{3} < \alpha + \frac{2\pi}{3} < \frac{5\pi}{6}.$$

Widzimy zaraz że pierwszy pierwiastek $\operatorname{sty}\frac{\alpha}{3}$ jest zawarty między 0 i $\frac{1}{\sqrt{3}}$, drugi między $\sqrt{3}$ i ∞, trzeci między $-\sqrt{3}$ i $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2° Gdy sty$a < 0$ i jest skończona, wtedy $\alpha > \frac{\pi}{2}$ i $\alpha < \pi$; zatem

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{6} < \frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3} < \pi.$$

Widzimy łatwo że pierwszy pierwiastek sty $\frac{\alpha}{3}$ jest zawarty między $\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $-\sqrt{3}$, drugi między $-\sqrt{3}$ i $-\infty$, trzeci między 0 i $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

To wszystko pokazuje że, gdy sty$a$ jest liczbą skończoną, wartości samoiste trzech pierwiastków są zawarte między liczbami 0, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}$, ∞, i pierwiastki mające ten sam znak co sty$a$ są dwa skrajne.

3° Gdy sty$a = \infty$, wtedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$; w tym szczególnym przypadku trzy pierwiastki równania są

$$\text{sty}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{sty}\,\frac{\pi}{2} = \infty, \quad \text{sty}\,\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Gdy jest dany łuk a, można zaraz rozpoznać który z trzech pierwiastków równania (28) wyraża sty$\frac{a}{3}$; bo znany jest naprzód znak stycznej, i wiadomo czy jej wartość samoista jest mniejsza albo większa od 1.

Uwaga. Można łatwo oddzielić pierwiastki równania (28), nie zważając na ich trygonometryczne znaczenie.

Jakoż, napiszmy to równanie jako następuje

$$\frac{x}{3}\left(\frac{x^2-3}{\frac{1}{3}-x^2}\right)+b=0,$$

rozróżnijmy trzy przypadki.

1° $b>0$. Jeśli podstawimy $x=0$, otrzymamy wynik $+b$; jeśli potem, zwiększając x, weźmiemy $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, znajdziemy wynik $-\infty$; następnie, biorąc $x=\frac{1}{\sqrt{3}}+\varepsilon$ i czyniąc $\varepsilon=0$, mamy wynik $+\infty$, a na $x=\sqrt{3}$ odpowieda wynik $+b$: gdy x rosnąc staje się ∞, wynik stanie się odjemny i będzie $-\infty$; nakoniec, jeśli zwiększając x weźmiemy $x=-\sqrt{3}$ a potem $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, znajdziemy wyniki $+b$ i ∞. Więc, gdy $b>0$, pierwiastki równania są zawarte między 0 i $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}$ i ∞, $-\sqrt{3}$ i $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2° $b<0$. Gdy x maleje od 0 do $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, wyniki idą od $-b$ do $+\infty$; potem, gdy x maleje od $-\sqrt{3}$ do $-\infty$, wyniki idą od $-b$ do $+\infty$; nakoniec, gdy x rośnie od $\frac{1}{\sqrt{3}}$ do $\sqrt{3}$, wyniki idą od $+\infty$ do $-b$. Więc, jeśli $b<0$, pierwiastki równania są zawarte między 0 i $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\sqrt{3}$ i $-\infty$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $-\sqrt{3}$.

Tym sposobem pierwiastki równania (28) zostają oddzielone, i ich wartości samoiste są zawarte między liczbami 0, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}$, ∞, któreśmy znaleźli powyżej.

3° $b=\infty$. W tym przypadku równanie (28) daje

$$1-3x^2=0;\quad \text{zkąd}\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}};$$

Trzeci pierwiastek jest oczywiście ∞. Co już wiadome.

Ważna uwaga. Pierwiastki równania (28) posiadają bardzo ważną własność: wywodzą się *stosunkowo* jeden z drugiego. Jakoż, oznaczając $\text{sty}\frac{\alpha}{3}$, $\text{sty}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$, $\text{sty}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$ przez x, x', x'', mamy

$$\text{sty}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\text{sty}\frac{\alpha}{3}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,\text{sty}\frac{\alpha}{3}},$$

albo

$$x'=\frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}.$$

Tak samo

$$x''=\frac{x'+\sqrt{3}}{1-x'\sqrt{3}};$$

albo jeszcze

$$x''=\frac{x-\sqrt{3}}{1+x\sqrt{3}}.$$

Następnie

$$x=\frac{x''+\sqrt{3}}{1-x''\sqrt{3}}.$$

Ta własność pierwiastków równania (28), teorycznie znamienita, jest użyteczna praktycznie; bo, za jej pomocą, znając jeden z pierwiastków można zaraz wyznaczyć dwa inne.

68. Zogólniając widzimy że, aby otrzymać $\text{sty}\frac{a}{m}$ w funkcyi $\text{sty}a$, dość jest znaleźć równanie które daje $\text{sty}ma$ w funkcyi $\text{sty}a$, i w niem położyć $\frac{a}{m}$ zamiast a. Ostatnie równanie będzie zawsze stopnia m.

Uwaga. Zagadnienie *Mając daną* dot$a$ *znaleźć* dot$\frac{a}{m}$ wywodzi się z poprzedzającego; albowiem $\operatorname{dot}\frac{a}{m}$ i $\operatorname{dot}a$ są odwrotnościami $\operatorname{sty}\frac{a}{m}$ i $\operatorname{sty}a$.

Zastosujmy teraz teoryę funkcyj kołowych do kilku zadań które są często użyteczne.

ZAGADNIENIA.

69. Zagadnienie I. *Zsumować wstawy i dostawy n łuków*

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ a+3h, \ldots,\ a+(n-1)h$$

dących w postępie arytmetycznym.

W równaniu

$$\operatorname{wst}(a+b)-\operatorname{wst}(a-b)=2\operatorname{dos}a\operatorname{wst}b$$

zastąpmy b przez h, i a przez $a+nh$, będzie

$$2\operatorname{wst}h\operatorname{dos}(a+nh)=\operatorname{wst}[a+(n+1)h]-\operatorname{wst}[a+(n-1)h]$$

Jeśli teraz zamiast n położymy jedną po drugiej liczby $0, 1, 2, \ldots n-1$, otrzymamy ciąg równań:

$$2\operatorname{wst}h\operatorname{dos}a=\operatorname{wst}(a+h)-\operatorname{wst}(a-h)$$
$$2\operatorname{wst}h\operatorname{dos}(a+h)=\operatorname{wst}(a+2h)-\operatorname{wst}a$$
$$2\operatorname{wst}h\operatorname{dos}(a+2h)=\operatorname{wst}(a+3h)-\operatorname{wst}(a+h)$$
$$2\operatorname{wst}h\operatorname{dos}(a+3h)=\operatorname{wst}(a+4h)-\operatorname{wst}(a+2h)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2\operatorname{wst}h\operatorname{dos}[a+(n-1)h]=\operatorname{wst}(a+nh)-\operatorname{wst}[a+(n-2)h].$$

Dodając stronami te równania, mamy

$$2\text{wst}h\left[\text{dos}a+\text{dos}(a+h)+\text{dos}(a+2h)+\ldots\text{dos}[a+(n-1)h]\right]$$
$$=\text{wst}(a+nh)+\text{wst}[a+(n-1)h]-\text{wst}a-\text{wst}(a-h)$$
$$=2\text{dos}\frac{h}{2}\left[\text{wst}[a+(n-\tfrac{1}{2})h]-\text{wst}\left(a-\frac{h}{2}\right)\right]$$
$$=4\text{dos}\frac{h}{2}\,\text{dos}\left[a+\left(\frac{n-1}{2}\right)h\right]\text{wst}\frac{nh}{2}\,.$$

Ztąd formuła

$$\text{dos}a+\text{dos}(a+h)+\text{dos}(a+2h)\ldots+\text{dos}[a+(n-1)h]$$
$$=\frac{\text{wst}\frac{nh}{2}\,\text{dos}\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\text{wst}\frac{h}{2}}\,.$$

która jest zsumowaniem dostaw.

Jeśli w tej formule zamienimy a na $\frac{\pi}{2}-a$, i h na $-h$, znajdziemy formułę

$$\text{wst}a+\text{wst}(a+h)+\text{wst}(a+2h)\ldots+\text{wst}(a+\overline{n-1}h)$$
$$=\frac{\text{wst}\frac{nh}{2}\,\text{wst}\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\text{wst}\frac{h}{2}}$$

która jest zsumowaniem wstaw.

70. Wniosek. Gdy $h=\frac{2k\pi}{n}$, łuki a, $a+h$, $a+2h$, ... $a+(n-1)h$ odpowiedają wierzchołkom wielokąta foremnego mającego n boków, i obie summy są zero.

To pokazuje że dowiedzione twierdzenie w trójkącie równobocznym (nº 62) jest tylko szczególnym przypadkiem obecnego.

71. Zagadnienie II. *Znaleźć bok piętnastokata foremnego wypukłego wpisanego w koło promienia* R.

Nazwijmy x bok szukany, będzie (9)

$$x = 2\mathrm{R}\,\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{15}\cdot$$

Owoż
$$\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10};$$

więc

$$x = 2\mathrm{R}\mathrm{wst}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}\right) = 2\mathrm{R}\left(\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{6}\,\mathrm{dos}\,\frac{\pi}{10} - \mathrm{dos}\,\frac{\pi}{6}\,\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{10}\right)\cdot$$

Ale wiemy że $\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, i $\mathrm{dos}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\mathrm{wst}\,\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)\,,\quad \mathrm{dos}\,\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,;$$

więc

$$x = \frac{\mathrm{R}}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right)\cdot$$

72. Zagadnienie III. *Dowieść formuł*

(1)
$$\mathrm{wst}a + \mathrm{wst}b + \mathrm{wst}c =$$
$$= 4\mathrm{wst}\,\frac{a+b}{2}\,\mathrm{wst}\,\frac{b+c}{2}\,\mathrm{wst}\,\frac{c+a}{2} + \mathrm{wst}\,(a+b+c).$$

(2)
$$\mathrm{dos}a + \mathrm{dos}b + \mathrm{dos}c$$
$$= 4\mathrm{dos}\,\frac{a+b}{2}\,\mathrm{dos}\,\frac{b+c}{2}\,\mathrm{dos}\,\frac{c+a}{2} - \mathrm{dos}\,(a+b+c).$$

1° Mamy najpierwej (n° 52)

(3)
$$\mathrm{wst}a + \mathrm{wst}b = 2\mathrm{wst}\,\frac{a+b}{2}\,\mathrm{dos}\,\frac{a-b}{2}\,,$$

Owoż, $\mathrm{wst}(a+b+c) = \mathrm{wst}(a+b)\,\mathrm{dos}c + \mathrm{dos}(a+b)\,\mathrm{wst}c$;

a to równanie, z przyczyny że

$$\text{wst}\,(a+b)=2\text{wst}\frac{a+b}{2}\text{dos}\frac{a+b}{2}$$

$$\text{dos}\,(a+b)=\text{dos}^2\frac{a+b}{2}-\text{wst}^2\frac{a+b}{2}=1-2\text{wst}^2\frac{a+b}{2},$$

może się pisać

$$\text{wst}\,(a+b+c)=2\text{wst}\frac{a+b}{2}\text{dos}\frac{a+b}{2}\text{dos}c+$$

$$+\text{wst}c-2\text{wst}^2\frac{a+b}{2}\text{wst}c$$

albo

$$\text{(4)}\qquad \text{wst}\,(a+b+c)=2\text{wst}\frac{a+b}{2}\text{dos}\left(\frac{a+b}{2}+c\right)+\text{wst}c.$$

Odciągnijmy téraz ostatnie równanie od (3), będzie

$$\text{wst}a+\text{wst}b+\text{wst}c=2\text{wst}\frac{a+b}{2}\left[\text{dos}\frac{a-b}{2}-\text{dos}\left(\frac{a+b}{2}+c\right)\right]$$
$$+\text{wst}\,(a+b+c);$$

Więc, zamieniając różnicę dostaw na wieloczyn, otrzymujemy ostatecznie

$$\text{wst}a+\text{wst}b+\text{wst}c=4\text{wst}\frac{a+b}{2}\text{wst}\frac{a+c}{2}\text{wst}\frac{b+c}{2}$$
$$+\text{wst}\,(a+b+c).$$

Uwaga. Gdybyśmy, zamiast odciągać, dodali równanie (4) do (3), byłoby

$$\text{wst}a+\text{wst}b-\text{wst}c=2\text{wst}\frac{a+b}{2}\left[\text{dos}\frac{a-b}{2}+\text{dos}\left(\frac{a+b}{2}+c\right)\right]$$
$$-\text{wst}\,(a+b+c)$$

albo

$$\text{(5)}\qquad \text{wst}a+\text{wst}b-\text{wst}c=4\text{wst}\frac{a+b}{2}\text{dos}\frac{a+c}{2}\text{dos}\frac{b+c}{2}$$
$$-\text{wst}\,(a+b+c).$$

Gdyby chciano wiedzieć czemu się równa $\operatorname{wst}a-\operatorname{wst}b-\operatorname{wst}c$, dość byłoby uważać że

$$\operatorname{wst}a-\operatorname{wst}b-\operatorname{wst}c=-(\operatorname{wst}b+\operatorname{wst}c-\operatorname{wst}a)\,;$$

więc

$$(6)\quad \operatorname{wst}a-\operatorname{wst}b-\operatorname{wst}c=-4\operatorname{wst}\frac{b+c}{2}\operatorname{dos}\frac{b+a}{2}\operatorname{dos}\frac{c+a}{2}$$
$$+\operatorname{wst}(a+b+c).$$

2° Szukajmy teraz formuły (2). Rozumując jako w 1°, mamy najpierwej

$$(7)\qquad \operatorname{dos}a+\operatorname{dos}b=2\operatorname{dos}\frac{a+b}{2}\operatorname{dos}\frac{a-b}{2}.$$

Owoż,

$$\operatorname{dos}(a+b+c)=\operatorname{dos}(a+b)\operatorname{dos}c-\operatorname{wst}(a+b)\operatorname{wst}c;$$

tę formułę można pisać

$$\operatorname{dos}(a+b+c)$$
$$=2\operatorname{dos}^2\frac{a+b}{2}\operatorname{dos}c-\operatorname{dos}c-2\operatorname{wst}\frac{a+b}{2}\operatorname{dos}\frac{a+b}{2}\operatorname{wst}c,$$

albo

$$(8)\quad \operatorname{dos}(a+b+c)=2\operatorname{dos}\frac{a+b}{2}\operatorname{dos}\left(\frac{a+b}{2}+c\right)-\operatorname{dos}c\,;$$

a jeśli dodamy ostatnie równanie do (7), znajdziemy

$$\operatorname{dos}a+\operatorname{dos}b+\operatorname{dos}c=2\operatorname{dos}\frac{a+b}{2}\left[\operatorname{dos}\frac{a-b}{2}+\operatorname{dos}\left(\frac{a+b}{2}+c\right)\right]$$
$$-\operatorname{dos}(a+b+c):$$

Więc ostatecznie

$$\operatorname{dos}a+\operatorname{dos}b+\operatorname{dos}c=4\operatorname{dos}\frac{a+b}{2}\operatorname{dos}\frac{a+c}{2}\operatorname{dos}\frac{b+c}{2}$$
$$-\operatorname{dos}(a+b+c).$$

Uwaga. Gdybyśmy, zamiast dodawać, odciągnęli równanie (8) od (7), byłoby

$$\text{dos}a+\text{dos}b-\text{dos}c=2\text{dos}\frac{a+b}{2}\left[\text{dos}\frac{a-b}{2}-\text{dos}\left(\frac{a+b}{2}+c\right)\right]$$
$$+\text{dos}(a+b+c)$$

albo

$$\text{(9)}\quad \text{dos}a+\text{dos}b-\text{dos}c=4\text{dos}\frac{a+b}{2}\text{wst}\frac{a+c}{2}\text{wst}\frac{b+c}{2}$$
$$+\text{dos}(a+b+c).$$

Z ostatniej formuły, uważając że

$$\text{dos}a-\text{dos}b-\text{dos}c=-(\text{dos}b+\text{dos}c-\text{dos}a),$$

wynika $\text{dos}a-\text{dos}b-\text{dos}c$

$$=-4\text{dos}\frac{b+c}{2}\text{wst}\frac{b+a}{2}\text{wst}\frac{c+a}{2}-\text{dos}(a+b+c).$$

73. Wniosek I. Przypuśćmy $a+b+c=\pi$, wtedy

$$\text{wst}(a+b+c)=0,\quad \text{dos}(a+b+c)=-1,$$

$$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2},\quad \frac{a+c}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{b}{2},\quad \frac{b+c}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2};$$

zatem, otrzymane wyżej formuły stają się:

$$\text{wst}a+\text{wst}b+\text{wst}c=4\overset{\text{cos}}{\text{dos}}\frac{a}{2}\overset{\text{cos}}{\text{dos}}\frac{b}{2}\overset{\text{cos}}{\text{dos}}\frac{c}{2},$$

$$\text{wst}a+\text{wst}b-\text{wst}c=4\overset{\text{cos}}{\text{dos}}\frac{c}{2}\overset{\text{sin}}{\text{wst}}\frac{a}{2}\overset{\text{sin}}{\text{wst}}\frac{b}{2}.$$

$$\text{wst}a-\text{wst}b-\text{wst}c=-4\text{dos}\frac{a}{2}\text{wst}\frac{b}{2}\text{wst}\frac{c}{2}.$$

$$\text{dos}a+\text{dos}b+\text{dos}c=1+4\text{wst}\frac{a}{2}\text{wst}\frac{b}{2}\text{wst}\frac{c}{2}.$$

$$\text{dos}a+\text{dos}b-\text{dos}c=-1+4\text{wst}\frac{c}{2}\text{dos}\frac{a}{2}\text{dos}\frac{b}{2}.$$

$$\text{dos}a-\text{dos}b-\text{dos}c=1-4\text{wst}\frac{a}{2}\text{dos}\frac{b}{2}\text{dos}\frac{c}{2}.$$

Te formuły są godne uwagi, i nietrudno ich wprost dowieść; co właśnie pokażemy później na trzech pierwszych.

74. Wniosek II. Gdy $a+b+c=\frac{\pi}{2}$, wtedy

$\mathrm{wst}(a+b+c)=1$, $\mathrm{dos}(a+b+c)=0$, i formuły (1), (2) stają się

$$\mathrm{wst}a+\mathrm{wst}b+\mathrm{wst}c=1+4\mathrm{wst}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\mathrm{wst}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)\mathrm{wst}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{c}{2}\right).$$

$$\mathrm{dos}a+\mathrm{dos}a+\mathrm{dos}c=4\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)\mathrm{dos}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{c}{2}\right).$$

75. Zagadnienie IV. *Rozłożyć, jeśli można, na czynniki wielomian*

$$1-\mathrm{dos}^2a-\mathrm{dos}^2b-\mathrm{dos}^2c+2\mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}c.$$

Zmieniając znaki, uważajmy wielomian

$$\mathrm{dos}^2a+\mathrm{dos}^2b+\mathrm{dos}^2c-2\mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}c-1,$$

i, biorąc $\mathrm{dos}a$ za niewiadomę, uzupełnijmy kwadrat jak gdyby chodziło o rozwiązanie równania 2go stopnia; będziemy mieli

$$(\mathrm{dos}a-\mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}c)^2-\mathrm{dos}^2b\,\mathrm{dos}^2c+\mathrm{dos}^2b+\mathrm{dos}^2c-1;$$

zkąd, zastępując $\mathrm{dos}^2b\,\mathrm{dos}^2c$ przez $(1-\mathrm{wst}^2b)(1-\mathrm{wst}^2c)$, otrzymujemy

$$(\mathrm{dos}a-\mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}c)^2-\mathrm{wst}^2b\,\mathrm{wst}^2c.$$

Ta różnica kwadratów równa się wieloczynowi

$$(\mathrm{dos}a-\mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}c+\mathrm{wst}b\,\mathrm{wst}c)(\mathrm{dos}a-\mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}c-\mathrm{wst}b\,\mathrm{wst}c),$$

albo

$$[\mathrm{dos}a-\mathrm{dos}(b+c)][\mathrm{dos}a-\mathrm{dos}(b-c)].$$

Nakoniec, zamieniając różnice dostaw na wieloczyny wstaw, znajdziemy

$$4\text{wst}\frac{a+b+c}{2}\text{wst}\frac{b+c-a}{2}\text{wst}\frac{a+b-c}{2}\text{wst}\frac{a+c-b}{2}.$$

Więc

$$1-\text{dos}^2a-\text{dos}^2b-\text{dos}^2c+2\text{dos}a\,\text{dos}b\,\text{dos}c$$
$$=4\text{wst}\frac{a+b+c}{2}\text{wst}\frac{b+c-a}{2}\text{wst}\frac{a+c-b}{2}\text{wst}\frac{a+b-c}{2}.$$

Ten znakomity wynik będzie nam później użyteczny.

76. Zagadnienie V. *Jeśli summa łuków a, b, c równa się liczbie π, dowieśdź że*

$$\text{dos}^2a+\text{dos}^2b+\text{dos}^2c+2\text{dos}a\,\text{dos}b\,\text{dos}c-1=0.$$

Równanie

$$a+b+c=\pi$$

daje

$$\text{dos}(a+b)=\text{dos}(\pi-c)=-\text{dos}c,$$

ztąd

$$\text{dos}a\,\text{dos}b+\text{dos}c=\text{wst}a\,\text{wst}b.$$

Podnosząc do kwadratu, będzie

$$\text{dos}^2a\,\text{dos}^2b+\text{dos}^2c+2\text{dos}a\,\text{dos}b\,\text{dos}c=\text{wst}^2a\,\text{wst}^2b$$
$$=(1-\text{dos}^2a)(1-\text{dos}^2b);$$

więc, uprościwszy, otrzymujemy

$$\text{dos}^2a+\text{dos}^2b+\text{dos}^2c+2\text{dos}a\,\text{dos}b\,\text{dos}c-1=0.$$

Uwaga. Ostatnie równanie jest to samo co następujące

$$\text{wst}^2a+\text{wst}^2b+\text{wst}^2c-2\text{dos}a\,\text{dos}b\,\text{dos}c-2=0.$$

77. Zagadnienie VI. *Znaleźć związki jakie istnieją między trzema łukami a, b, c które zadość czynią równaniu*

$$\text{dos}^2a+\text{dos}^2b+\text{dos}^2c+2\text{dos}a\,\text{dos}b\,\text{dos}c-1=$$

Rozłóżmy ten wielomian na czynniki, sposobem któryśmy wyżej podali. Biorąc dos$a$ za niewiadomę, będzie

$$(\mathrm{dos}a + \mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}c)^2 - (\mathrm{dos}^2 b\,\mathrm{dos}^2 c - \mathrm{dos}^2 b - \mathrm{dos}^2 c + 1) = 0\,,$$

albo

$$(\mathrm{dos}a + \mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}c)^2 - \mathrm{wst}^2 b\,\mathrm{wst}^2 c = 0.$$

ztąd

$$[\mathrm{dos}a + \mathrm{dos}\,(b + c)]\,[\mathrm{dos}a + \mathrm{dos}\,(b - c)] = 0\,;$$

Zamieniając teraz summy na wieloczyny, otrzymujemy

$$4\mathrm{dos}\,\frac{a+b+c}{2}\,\mathrm{dos}\,\frac{b+c-a}{2}\,\mathrm{dos}\,\frac{a+c-b}{2}\,\mathrm{dos}\,\frac{a+b-c}{2} = 0.$$

Owoż, aby ten wieloczyn mógł być zero, trzeba i dość jest żeby dostawa jednego przynajmniej z łuków

$$\frac{a+b+c}{2},\quad \frac{b+c-a}{2},\quad \frac{a+c-b}{2},\quad \frac{a+b-c}{2}$$

była zero; zatem każdy z łuków musi być nieparzystym wielownikiem ćwiercianu, to jest $(2k+1)\frac{\pi}{2}$; oznaczając przez k liczbę całkowitą dodatną albo odjemną, i nawet zero.

Więc łuki a, b, c, sprawdzające dane wyżej równanie, czynią zadość jednemu przynajmniej ze czterech warunków

$$\begin{aligned} a + b + c &= (2k+1)\pi \\ b + c - a &= (2k+1)\pi \\ a + c - b &= (2k+1)\pi \\ a + b - c &= (2k+1)\pi. \end{aligned}$$

78. Zagadnienie VII. *Jeśli summa trzech łuków a, b, c równa się liczbie π, dowieść formuł*

(1) $$\mathrm{sty}a + \mathrm{sty}b + \mathrm{sty}c = \mathrm{sty}a\,\mathrm{sty}b\,\mathrm{sty}c$$

(2) $$\mathrm{dot}\frac{a}{2} + \mathrm{dot}\frac{b}{2} + \mathrm{dot}\frac{c}{2} = \mathrm{dot}\frac{a}{2}\,\mathrm{dot}\frac{b}{2}\,\mathrm{dot}\frac{c}{2}.$$

Co do 1°, równanie
$$a+b+c=\pi$$
daje
$$\mathrm{sty}\,(a+b)=\mathrm{sty}\,(\pi-c)=-\mathrm{sty}\,c$$
albo
$$\frac{\mathrm{sty}\,a+\mathrm{sty}\,b}{1-\mathrm{sty}\,a\,\mathrm{sty}\,b}=-\mathrm{sty}\,c;$$
więc
$$\mathrm{sty}\,a+\mathrm{sty}\,b+\mathrm{sty}\,c=\mathrm{sty}\,a\,\mathrm{sty}\,b\,\mathrm{sty}\,c.$$

Co do 2°, równanie $a+b+c=\pi$ jest to samo co
$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=\frac{\pi}{2};$$
zatem
$$\mathrm{sty}\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)=\mathrm{sty}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}\right)=\mathrm{dot}\,\frac{c}{2},$$
albo
$$\frac{\mathrm{sty}\,\frac{a}{2}+\mathrm{sty}\,\frac{b}{2}}{1-\mathrm{sty}\,\frac{a}{2}\,\mathrm{sty}\,\frac{b}{2}}=\mathrm{dot}\,\frac{c}{2}.$$

Podzielmy teraz licznik i mianownik przez wieloczyn $\mathrm{sty}\,\frac{a}{2}\,\mathrm{sty}\,\frac{b}{2}$, będzie
$$\frac{\mathrm{dot}\,\frac{b}{2}+\mathrm{dot}\,\frac{a}{2}}{\mathrm{dot}\,\frac{a}{2}\,\mathrm{dot}\,\frac{b}{2}-1}=\mathrm{dot}\,\frac{c}{2};$$
ztąd, znosząc mianownik, wynika
$$\mathrm{dot}\,\frac{a}{2}+\mathrm{dot}\,\frac{b}{2}+\mathrm{dot}\,\frac{c}{2}=\mathrm{dot}\,\frac{a}{2}\,\mathrm{dot}\,\frac{b}{2}\,\mathrm{dot}\,\frac{c}{2}.$$

79. Zagadnienie VIII. *Znaleźć związek między trzema łukami a, b, c które zadość czynią równaniu*

$$\mathrm{sty}a + \mathrm{sty}b + \mathrm{sty}c = \mathrm{sty}a\,\mathrm{sty}b\,\mathrm{sty}c.$$

Stosując formułę n°51, można pisać powyższe równanie sposobem następującym

$$\frac{\mathrm{sty}a + \mathrm{sty}b + \mathrm{sty}c - \mathrm{sty}a\,\mathrm{sty}b\,\mathrm{sty}c}{1 - \mathrm{sty}a\,\mathrm{sty}b - \mathrm{sty}a\,\mathrm{sty}c - \mathrm{sty}b\,\mathrm{sty}c} = \mathrm{sty}\,(a + b + c)\,;$$

pod tym kształtem widzimy zaraz że łuki, zadość czyniące danemu równaniu, dopełniają warunku

$$a + b + c = k\pi.$$

który jest konieczny i dostateczny.

SPRAWDZANIE FORMUŁ TRYGONOMETRYCZNYCH.

80. Czytając autorów spotyka się czasem formuły albo przekształcenia których się nie spostrzega łatwo przyczyny; w takim razie najlepiej jest sprawdzić te formuły, a dopiero potem szukać dowodzenia, jeśli potrzeba. Aby sprawdzić formułę trygonometryczną, dość jest wyrazić wszystkie linie trygonometryczne w funkcyi jednej z nich; tym sposobem formuła powinna stać się tosamością. Często proste wykonanie rachunku wystarcza. I tak, gdyby chciano sprawdzić następującą formułę

$$\mathrm{wst}\,(a - b)\,\mathrm{wst}c + \mathrm{wst}\,(b - c)\,\mathrm{wst}a + \mathrm{wst}\,(c - a)\,\mathrm{wst}b = 0$$

dość byłoby rozwinąć wstawy aby spostrzedz tosamość.

Żeby sprawdzić formułę

$$\mathrm{sty}a + \mathrm{dot}a = 2\mathrm{dosie}\,2a$$

dość wyrazić te trzy linie w funkcyi wstawy i dostawy; etc.

Żeby sprawdzić formułę

$$\frac{\text{wst}\,(a+b)}{\text{dos}b-\text{dos}a}=\frac{\text{dos}\,\frac{a+b}{2}}{\text{wst}\,\frac{a-b}{2}},$$

dość uważać że

$$\frac{\text{wst}\,(a+b)}{\text{dos}b-\text{dos}a}=\frac{2\text{wst}\,\frac{a+b}{2}\,\text{dos}\,\frac{a+b}{2}}{2\text{wst}\,\frac{a+b}{2}\,\text{wst}\,\frac{a-b}{2}}\cdot$$

ĆWICZENIA.

I. *Biorąc najmniejszy łuk dodatny, dowieść że*

$$\text{łuk sty}\,\frac{1}{2}+\text{łuk sty}\,\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4},$$ $\text{sty}\,x=\frac{1}{2}$, $\text{sty}\,y=\frac{1}{3}$, $(x+y)=\frac{\pi}{4}$, $\text{sty}(x+y)=1$

$$\text{łuk wst}\,\frac{1}{\sqrt{5}}+\text{łuk dot}3=\frac{\pi}{4},$$ $\text{wst}\,x=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\text{sty}\,x=\frac{1}{2}$, $\text{sty}\,y=\frac{1}{3}$, $\text{sty}(x+y)=1$

$$\text{łuk wst}\,\frac{3}{5}+\text{łuk}\,\cancel{\text{dos}}\,\text{wst}\,\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2},$$ $\text{wst}\,x=\frac{3}{5}$, $\text{wst}\,y=\frac{4}{5}$, $x+y=\frac{\pi}{2}$, $\text{dos}\,x=\frac{4}{5}$, $\text{dos}\,y=\frac{3}{5}$, $\text{wst}(x+y)=1$

$$2\text{łuk sty}\,\frac{1}{2}-\text{łuk sty}\,\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4},$$ $\text{sty}\,x=\frac{1}{2}$, $2x-y=\frac{\pi}{4}$, $\text{sty}\,2x=\frac{4}{3}$, $\text{sty}\,y=\frac{1}{7}$, $\text{sty}(2x-y)=1$

$$2\text{łuk sty}\,\frac{1}{3}+\text{łuk sty}\,\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4},$$ $\text{sty}\,x=\frac{1}{3}$, $(2x+y)=\frac{\pi}{4}$, $\text{sty}\,2x=\frac{3}{4}$, $\text{sty}=\frac{1}{7}$, $\text{sty}(2x+y)=1$

$$\text{łuk sty}\,\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\text{łuk sty}\,\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4},$$ $\text{sty}\,x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $(x-y)=\frac{\pi}{4}$, $\text{sty}\,y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{sty}(x-y)=1$

$$\text{łuk dot}\,\frac{1}{7}+\text{łuk dot}\,\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\pi,$$ $\text{sty}\,\frac{3}{4}\pi=-1$, $\text{sty}\,x=7$, $x+y=\frac{3}{4}\pi$, $\text{sty}\,y=\frac{4}{3}$, $\text{sty}(x+y)=-1$

$$\text{łuk sty}\,\frac{1}{2}+\text{łuk sty}\,\frac{1}{5}+\text{łuk sty}\,\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4},$$ $\text{sty}\,x=\frac{1}{2}$, $\text{sty}\,y=\frac{1}{5}$, $\text{sty}\,z=\frac{1}{8}$, $x+y+z=\frac{\pi}{4}$, $\text{sty}(x+y+z)=1$

$$4\text{łuk sty}\,\frac{1}{5}-\text{łuk sty}\,\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4},$$

$$\text{łuk sty}\,\frac{1}{3}+\text{łuk sty}\,\frac{1}{5}+\text{łuk sty}\,\frac{1}{7}+\text{łuk sty}\,\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}\cdot$$

II. *Dowieść, że*

$$\text{łuk wst}\sqrt{\frac{x}{a+x}}=\text{łuk sty}\sqrt{\frac{x}{a}},$$

$$\text{łuk sty}\,\frac{x-\text{dos}\varphi}{1-x\text{wst}\varphi}-\text{łuk sty}\,\frac{x-\text{wst}\varphi}{\text{dos}\varphi}=\varphi$$

III. *Mając dane równanie :*

$$\text{wst}a\,\text{wst}2x+\text{dos}a\,\text{dos}2x=\text{dos}a$$

należć sty$x$.

Znając sty$a$, znaleźć sty$\frac{3a}{4}$, wst$\frac{3a}{4}$ i dos$\frac{3a}{4}$.

IV, *Dowieść, że*

$$\text{dot}a-\text{sty}a=2\text{dot}2a.$$

$$\frac{\text{wst}\,(a+b)}{\text{wst}a+\text{wst}b}=\frac{\text{dos}\,\frac{a+b}{2}}{\text{dos}\,\frac{a-b}{2}}$$

$$\text{sty}a+\text{sty}b+\text{sty}c=\text{sty}a\,\text{sty}b\,\text{sty}c+\frac{\text{wst}\,(a+b+c)}{\text{dos}a\,\text{dos}b\,\text{dos}c}.$$

$$\text{dot}a+\text{dot}b+\text{dot}c=\text{dot}a\,\text{dot}b\,\text{dot}c+\frac{\text{dos}\,(a+b+c)}{\text{wst}a\,\text{wst}b\,\text{wst}c}.$$

V. *Dowieść, że*

$$\text{sie}a=1+\text{sty}a\,\text{sty}\,\frac{a}{2}.$$

$$\frac{\text{dos}^2a-\text{wst}^2b}{\text{wst}^2a\,\text{wst}^2b}=\text{dot}^2a\,\text{dot}^2b-1.$$

$$8\text{wst}^4a=3-4\text{dos}2a+\text{dos}4a.$$

$$8\text{dos}^4a=3+4\text{dos}2a+\text{dos}4a.$$

VI. *Dowieść, że*

$$\text{sty}3a=\frac{\text{wst}a+\text{wst}3a+\text{wst}5a}{\text{dos}a+\text{dos}3a+\text{dos}5a},$$

zogólnić dla styna

VII. *Dowieśdź że*

$$\text{wst}^2 a - \text{wst}^2 b - \text{wst}^2 c + 2\text{dos}\,a\,\text{wst}\,b\,\text{wst}\,c$$
$$= 4\text{dos}\frac{a+b+c}{2}\,\text{dos}\frac{b+c-a}{2}\,\text{wst}\frac{a+c-b}{2}\,\text{wst}\frac{a+b-c}{2}.$$

$$\text{sty}^2 a - \text{sty}^2 b = \frac{\text{wst}\,(a+b)\,\text{wst}\,(a-b)}{\text{dos}^2 a\,\text{dos}^2 b}.$$

VIII, *Jeśli* $a+b+c=\pi$, *dowieśdź że*

$$\text{wst}2a + \text{wst}2b + \text{wst}2c = 4\text{wst}\,a\,\text{wst}\,b\,\text{wst}\,c,$$
$$\text{dos}2a + \text{dos}2b + \text{dos}2c = -4\text{dos}\,a\,\text{dos}\,b\,\text{dos}\,c - 1,$$
$$\text{wst}4a + \text{wst}4b + \text{wst}4c = -4\text{wst}2a\,\text{wst}2b\,\text{wst}2c,$$
$$\text{dos}4a + \text{dos}4b + \text{dos}4c = 4\,\text{dos}2a\,\text{dos}2b\,\text{dos}2c - 1.$$
$$\text{wst}^2 a = \text{wst}^2 b + \text{wst}^2 c - 2\text{wst}\,b\,\text{wst}\,c\,\text{dos}\,a$$
$$\text{dos}\frac{a}{2} + \text{dos}\frac{b}{2} + \text{dos}\frac{c}{2} = 4\text{dos}\frac{\pi-a}{4}\,\text{dos}\frac{\pi-b}{4}\,\text{dos}\frac{\pi-c}{4}$$
$$\text{wst}\frac{a}{2} + \text{wst}\frac{b}{2} + \text{wst}\frac{c}{2} = 1 + 4\text{wst}\frac{\pi-a}{4}\,\text{wst}\frac{\pi-b}{4}\,\text{wst}\frac{\pi-c}{4}.$$
$$\text{wst}^2\frac{a}{2} + \text{wst}^2\frac{b}{2} + \text{wst}^2\frac{c}{2} + 2\text{wst}\frac{a}{2}\,\text{wst}\frac{b}{2}\,\text{wst}\frac{c}{2} = 1$$
$$\text{dos}^2 2a + \text{dos}^2 2b + \text{dos}^2 2c - 2\text{dos}2a\,\text{dos}2b\,\text{dos}2c = 1.$$
$$\text{wst}2\text{A} + \text{wst}2\text{B} + \text{wst}2\text{C}$$
$$= 2\,(\text{wst}\text{A} + \text{wst}\text{B} + \text{wst}\text{C})\,(\text{dos}\text{A} + \text{dos}\text{B} + \text{dos}\text{C} - 1)$$

IX. *Jeśli* $a+b+c=\frac{\pi}{2}$, *dowieśdź że*

$$\text{wst}^2 a + \text{wst}^2 b + \text{wst}^2 c + 2\text{wst}\,a\,\text{wst}\,b\,\text{wst}\,c = 1.$$
$$\text{sty}\,a\,\text{sty}\,b + \text{sty}\,b\,\text{sty}\,c + \text{sty}\,c\,\text{sty}\,a = 1.$$
$$\text{sty}\,a + \text{sty}\,b + \text{sty}\,c = \text{sty}\,a\,\text{sty}\,b\,\text{sty}\,c + \text{sie}\,a\,\text{sie}\,b\,\text{sie}\,c.$$

X. *Przypuszczając* $\alpha+\beta<\pi$ i $\alpha'+\beta'<\pi$

sprawdzić równanie

$$\frac{\mathrm{wst}^2\beta}{\mathrm{wst}^2(\alpha+\beta)}+\frac{\mathrm{wst}^2\beta'}{\mathrm{wst}^2(\alpha'+\beta')}-\frac{2\,\mathrm{wst}\beta\,\mathrm{wst}\beta'\,\mathrm{dos}(\alpha-\alpha')}{\mathrm{wst}(\alpha+\beta)\,\mathrm{wst}(\alpha'+\beta')}$$

$$=\frac{\mathrm{wst}^2\alpha}{\mathrm{wst}^2(\alpha+\beta)}+\frac{\mathrm{wst}^2\alpha'}{\mathrm{wst}^2(\alpha'+\beta')}-\frac{2\,\mathrm{wst}\alpha\,\mathrm{wst}\alpha'\,\mathrm{dos}(\beta-\beta')}{\mathrm{wst}(\alpha+\beta)\,\mathrm{wst}(\alpha'+\beta')},$$

XI. *Sprawdzić równania*

$$\mathrm{wst}x=\mathrm{wst}(36^0+x)-\mathrm{wst}(36^0-x)+\mathrm{wst}(72^0-x)-\mathrm{wst}(72^0+x)$$
$$\mathrm{dos}x=\mathrm{wst}(54^0+x)+\mathrm{wst}(54^0-x)-\mathrm{wst}(18^0+x)-\mathrm{wst}(18^0-x)$$

XII. *Jeśli kąty* θ *i* u *zadość czynią równaniu*

$$(1+e\,\mathrm{dos}\theta)(1-e\,\mathrm{dos}u)=1-e^2,$$

dowieśdź że wtedy

$$\mathrm{sty}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{sty}\frac{u}{2}\,.$$

Jeśli $a+b+c=\pi$ $\quad \mathrm{wst}^2x=\mathrm{wst}(a-x)\mathrm{wst}(b-x)\mathrm{wst}(c-x)$, wtedy

$$\mathrm{dot}x=\mathrm{dot}a+\mathrm{dot}b+\mathrm{dot}c.$$

Ze związku

$$\mathrm{dos}b=\frac{\mathrm{dos}a-1}{1-e\,\mathrm{dos}a}$$

wywieśdź $\mathrm{sty}\frac{b}{2}$ w funkcyi $\mathrm{sty}\frac{a}{2}$.

Wiedząc że $a+b+c=2p$, z formuły

$$\mathrm{wst}S=\sqrt{\mathrm{wst}p\,\mathrm{wst}(p-a)\,\mathrm{wst}(p-b)\,\mathrm{wst}(p-c)}$$

wywieśdź

$$\mathrm{sty}\frac{S}{2}=\sqrt{\mathrm{sty}\frac{p}{2}\,\mathrm{sty}\frac{p-a}{2}\,\mathrm{sty}\frac{p-b}{2}\,\mathrm{sty}\frac{p-c}{2}}$$

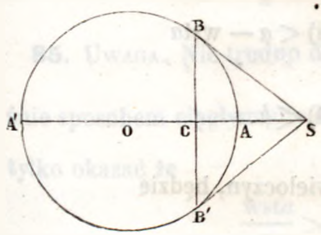
TABLICE FUNKCYJ KOŁOWYCH.

81. Aby można zastosować funkcye kołowe do różnych zadań geometrycznych, trzebaby, za pomocą małej liczby działań prostych, umieć znaleźć wartości linij trygonometrycznych gdy jest dany łuk; i nawzajem, wyznaczyć wartość łuku gdy jest wiadoma jedna z jego linij trygonometrycznych. Ale, ponieważ dokładne wyrażenia tych wartości jednych przez drugie są niemożebne, ułożono tablicę która daje wartości, dostatecznie przybliżone, linij trygonometrycznych, odpowiedające wartościom łuku idącym w postępni arytmetycznej od 0 do $\frac{\pi}{2}$.

Niema potrzeby rozciągnąć tablic poza te granice; albowiem linie trygonometryczne są okresowe, i biorą w pierwszym ćwiercianie wszystkie wartości liczebne jakie wedle swej natury brać mogą.

Układanie tablic opiera się na kilku twierdzeniach, które są gdzie indziej jeszcze równie użyteczne, i które teraz wyłożymy.

82. Twierdzenie I. *Łuk mniejszy od ćwiercianu jest większy od swej wstawy, ale mniejszy od swej stycznej.*



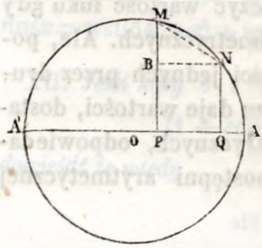
Niech będzie AB łuk mniejszy od ćwiercianu; weźmy łuk $AB' = AB$, i, na skrajnościach cięciwy BB', poprowadźmy styczne BS, $B'S$, które się spotykają na średnicy AA'. Jeśli weźmiemy promień OA za jedność linijną, BC będzie wstawą łuku AB a BS jego styczną. Owoż, łuk BAB' jest większy od cięciwy BB', ale mniejszy od łamanej otaczającej BSB';

więc, uważając połowy tych ilości, widzimy że łuk AM jest większy od swej wstawy BC ale mniejszy od swej stycznej BS.

To wszystko, jeśli łuk AM nazwiemy a, wyraża się jaśniej przez nierówności

$$\text{wst}a < a < \text{sty}a.$$

83. Uwaga. *Różnica* $a - \text{wst}a$ *jest tem mniejsza im łuk* a *jest mniejszy.*



Na łuku AM, mniejszym od $\frac{\pi}{2}$, weźmy jakikolwiek punkt N; poprowadźmy wstawy MP, NQ łuków AM, AN, i równoległę NB do AA'; będzie oczywiście

$$\text{MB} < \text{łuk MN}$$

albo

$$\text{MP} - \text{NQ} < \text{łuk AM} - \text{łuk AN};$$

więc

$$\text{łuk AN} - \text{wstAN} < \text{łukAM} - \text{wstAM};.$$

C. b. p. d.

Dowodzenie analityczne jest ogólniejsze. Jakoż, żeby okazać że różnica $a - \text{wst}a$ maleje z łukiem, dość jest dowieśdź nierówności

$$a - h - \text{wst}(a - h) < a - \text{wst}a$$

albo

$$\text{wst}a - \text{wst}(a - h) < h.$$

Owoż, zamieniając różnicę na wieloczyn, będzie

$$\text{dos}\left(a - \frac{h}{2}\right)\text{wst}\frac{h}{2} < \frac{h}{2};$$

ostatnia nierówność jest oczywista, więc twierdzenie jest prawdziwe.

84. Twierdzenie II. *Jeśli łuk a maleje od $\frac{\pi}{2}$ do 0, stosunek $\frac{\text{wst}a}{a}$ dąży do jedności, która jest jego granicą.*

Jakoż, stosunek $\frac{\text{wst}a}{a}$ jest mniejszy od jedności, dlatego że wst$a < a$; a ponieważ łuk $a <$ sty$a$, stosunek $\frac{\text{wst}a}{a}$ jest większy od $\frac{\text{wst}a}{\text{sty}a}$, albo, co to samo, większy od dos$a$. Przedstawia się wyraźniej te dwie nierówności pisząc

$$1 > \frac{\text{wst}a}{a} > \text{dos}a.$$

Owoż, gdy łuk a maleje aż do zera, dos$a$ rośnie aż do 1, i różnica $1 - \text{dos}a$ dąży coraz bardziej do zera; można więc wziąć łuk a tak mały żeby stosunek $\frac{\text{wst}a}{a}$, zawarty między 1 i dos$a$, różnił się od 1 tak mało jak się podoba, czyli jako mówią, różnił się od jedności ilością mniejszą od wszelkiej danej; zatem

$$gr.\frac{\text{wst}a}{a} = 1, \quad \text{gdy} \quad a = 0.$$

85. Uwaga. Nie trudno dowieśdź że stosunek $\frac{\text{wst}a}{a}$ rośnie sposobem ciągłym gdy łuk a maleje od $\frac{\pi}{2}$ do 0. Dość tylko okazać że

$$\frac{\text{wst}a}{a} > \frac{\text{wst}\,(a+h)}{a+h},$$

przypuszczając łuki a i h oba dodatne, i $a + h < \frac{\pi}{2}$.

Znieśmy mianowniki, i rozwińmy $\mathrm{wst}(a+h)$; będzie

$$(a+h)\,\mathrm{wst}\,a > a\,\mathrm{wst}\,a\,\mathrm{dos}\,h + a\,\mathrm{dos}\,a\,\mathrm{wst}\,h.$$

Jeśli teraz podzielimy obie strony przez $\mathrm{dos}\,a$, otrzymamy

$$(a+h)\,\mathrm{sty}\,a > a\,\mathrm{sty}\,a\,\mathrm{dos}\,h + a\,\mathrm{wst}\,h.$$

Owoż, tu nierówność jest widoczna, jakiekolwiek jest a; albowiem, $a\,\mathrm{sty}\,a > a\,\mathrm{sty}\,a\,\mathrm{dos}\,a$, i $h\,\mathrm{sty}\,a > a\,\mathrm{wst}\,h$. Więc twierdzenie jest dowiedzione.

86. Dobrze jest wiedzieć że $\dfrac{\mathrm{wst}\,a}{a}$ jest granicą wieloczynu

$$\mathrm{dos}\frac{a}{2}\,\mathrm{dos}\frac{a}{4}\,\mathrm{dos}\frac{a}{8}\ldots\,\mathrm{dos}\frac{a}{2^n}$$

gdy całkowita n rośnie do nieskończoności,

Jakoż, mamy

$$\mathrm{wst}\,a = 2\,\mathrm{wst}\frac{a}{2}\,\mathrm{dos}\frac{a}{2}$$

$$\mathrm{wst}\frac{a}{2} = 2\,\mathrm{wst}\frac{a}{4}\,\mathrm{dos}\frac{a}{4}$$

$$\mathrm{wst}\frac{a}{4} = 2\,\mathrm{wst}\frac{a}{8}\,\mathrm{dos}\frac{a}{8}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\mathrm{wst}\frac{x}{2^{n-1}} = 2\,\mathrm{wst}\frac{a}{2^n}\,\mathrm{dos}\frac{a}{2^n}$$

Pomnóżmy te równania stronami i znieśmy spólne czynniki będzie

$$\mathrm{wst}\,a = 2^n\,\mathrm{wst}\frac{a}{2^n}\,\mathrm{dos}\frac{a}{2}\,\mathrm{dos}\frac{a}{4}\,\mathrm{dos}\frac{a}{8}\ldots\,\mathrm{dos}\frac{a}{2^n}\,.$$

albo, dzieląc przez a,

$$\frac{\text{wst}a}{a} = \frac{\text{wst}\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} \text{dos}\frac{a}{2}\,\text{dos}\frac{a}{4}\,\text{dos}\frac{a}{8}\ldots\text{dos}\frac{a}{2^n}.$$

Owoż, gdy n rośnie nieskończenie, łuk $\frac{a}{2^n}$ dąży do zera jakikolwiek jest łuk a; więc stosunek

$$\frac{\text{wst}\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}$$

ma za granicę jedność, i temsamem

$$\frac{\text{wst}a}{a} = gr.\,\text{dos}\frac{a}{2}\,\text{dos}\frac{a}{4}\,\text{dos}\frac{a}{8}\ldots\text{dos}\frac{a}{2^n}, \quad \text{gdy} \quad n = \infty.$$

87. TWIERDZENIE III. *Gdy łuk jest mniejszy od ćwiercianu, różnica między tym łukiem i jego wstawą jest mniejsza od ćwierci sześcianu łuku.*

Jakoż, wiemy że

$$\text{wst}a = 2\text{wst}\frac{a}{2}\,\text{dos}\frac{a}{2} = 2\text{sty}\frac{a}{2}\,\text{dos}^2\frac{a}{2}.$$

albo

$$\text{wst}a = 2\text{sty}\frac{a}{2}\left(1 - \text{wst}^2\frac{a}{2}\right).$$

Jeśli teraz, w drugiej stronie ostatniego równania, zamiast $\text{wst}\frac{a}{2}$ i $\text{sty}\frac{a}{2}$, położymy łuk $\frac{a}{2}$, zmniejszymy zarazem oba czynniki, i temsamem zmniejszymy drugą stronę równania; będzie więc

$$\text{wst}a > a\left[1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

albo

$$\text{wst}a > a - \frac{a^3}{4};$$

zkąd

$$a - \text{wst}a < \frac{a^3}{4}$$

88. Wniosek. Powyższe twierdzenie pokazuje że wst$a$ jest zawarta między a i $a - \frac{a^3}{4}$. Więc, biorąc łuk a zamiast wst$a$, popełnia się błąd mniejszy od $\frac{a^3}{4}$.

Ztąd łatwo się wywodzi dwie granice między któremi jest zawarta dos$a$.

Jakoż,

$$\text{dos}a = 1 - 2\text{wst}^2\frac{a}{2} \text{ (56°, form 16)};$$

a że, wedle tego co poprzedza, $\text{wst}\frac{a}{2} < \frac{a}{2}$ i $> \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3$, mamy najpierwej

$$\text{dos}a > 1 - \frac{a^2}{2},$$

i potem

$$\text{dos}a < 1 - 2\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}\right)^2,$$

albo

$$\text{dos}a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} - 2\left(\frac{a^3}{32}\right)^2,$$

a tem bardziej

$$\text{dos}a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}.$$

To dowodzi że dos$a$ jest zawarta między

$$1 - \frac{a^2}{2} \quad \text{i} \quad 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}.$$

Więc, biorąc $1-\frac{a^2}{2}$ zamiast dos$a$, popełnia się błąd mniejszy od $\frac{a^4}{16}$.

Można znaleźć granicę wyższą różnicy a — wst$a$ mniejszą od tej którąśmy wskazali, i temsamem wyznaczyć dla wstawy i dostawy dwie odpowiedające granice, wyższą i niższą, więcej przybliżone do prawdziwych wartości. Oto właśnie twierdzenie które posłuży w tym względzie.

89. Twierdzenie IV. *Różnica między łukiem mniejszym od ćwiercianu i jego wstawą jest mniejsza od szóstej części sześcianu łuku.*

Weźmy znane równanie

$$\text{wst}a = 3\text{wst}\frac{a}{3} - 4\text{wst}^3\frac{a}{3};$$

jeśli w ostatnim wyrazie zamiast wst$a$ położymy łuk a, otrzymamy nierówność

$$\text{wst}a > 3\text{wst}\frac{a}{3} - \frac{4a^3}{27}.$$

Teraz, zastąpmy wszędzie łuk a przez $\frac{a}{3}$, będziemy mieli

$$\text{wst}\frac{a}{3} > 3\text{wst}\frac{a}{3^2} - \frac{4a^3}{27^2};$$

w ostatniej nierówności zastąpmy także łuk a przez $\frac{a}{3}$, i tak następnie aż do n^{tej} nierówności; będzie:

$$\text{wst}\frac{a}{3^2} > 3\text{wst}\frac{a}{3^3} - \frac{4a^3}{27^3},$$

$$\text{wst}\frac{a}{3^3} > 3\text{wst}\frac{a}{3^4} - \frac{4a^3}{27^4},$$

. . . .

$$\text{wst}\frac{a}{3^{n-1}} > 3\text{wst}\frac{a}{3^n} - \frac{4a^3}{27^n}.$$

To uczyniwszy, pomnóżmy drugą nierówność przez 3, trzecią przez 3^2, czwartą przez 3^3,.. i tak dalej, ostatnią przez 3^{n-1}; po czem, dodając stronami i upraszczając, znajdziemy

$$\text{wst}a > 3^n \text{wst}\frac{a}{3^n} - \frac{4a^3}{27}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots \frac{1}{9^{n-1}}\right).$$

W tym wyniku uczyńmy $n = \infty$, i uważajmy najpierwej że

$$gr.\, 3^n \text{wst}\frac{a}{3^n} = agr.\, \frac{\text{wst}\frac{a}{3^n}}{\frac{a}{3^n}} = a\,;$$

potem, ponieważ wyrazy w nawiasach stanowią postępnię geometryczną nieskończenie malejącą, której stosunkiem jest $\frac{1}{9}$, widzimy łatwo że granica ich summy równa się $\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$.

Podstawiwszy te wartości, otrzymamy

$$\text{wst}a > a - \frac{4a^3}{27} \cdot \frac{9}{8}$$

albo $$\text{wst}a > a - \frac{a^3}{6}\,;$$

więc

$$a - \text{wst}a < \frac{a^3}{6}.$$

90. Wniosek. Ztąd wynika że $\text{wst}a$ jest zawarta między a i $a - \frac{a^3}{6}$; więc biorąc łuk a zamiast $\text{wst}a$ popełnia się błąd mniejszy od $\frac{a^3}{6}$.

Wyznaczmy teraz granicę wyższą dos$a$. Jeśli w równaniu

$$\text{dos}a = 1 - 2\text{wst}^2 \frac{a}{2}$$

zamiast $\frac{a}{2}$ podstawimy $\frac{a}{2} - \frac{a^3}{6.8}$, będzie

$$\text{dos}a < 1 - 2\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{48}\right)^2,$$

albo

$$\text{dos}a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} - \frac{2a^6}{48^2};$$

a tembardziej

$$\text{dos}a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}.$$

Owoż wiemy że $\text{dos}a > 1 - \frac{a^2}{2}$.

Więc, biorąc $1 - \frac{a^2}{2}$ zamiast dos$a$, popełniamy błąd mniejszy od $\frac{a^4}{24}$. Znajdujemy tym sposobem granice wyższe błędów, popełnionych na wstawie i dostawie, mniejsze od tych któreśmy poprzednio otrzymali.

91 Wyrachowanie wstaw i dostaw. Ponieważ sty$a$, dot$a$, sie$a$ i dosie$a$ wyrażają się poprostu przez wst$a$ i dos$a$, dość jest wyrachować tylko wstawy i dostawy łuków od 0^0 do 90^0; albo, co to samo, wyrachować wstawy i dostawy łuków od 0^0 do 45^0, z przyczyny że wstawy łuków idących od 45^0 do 90^0 są dostawami łuków od 0^0 do 45^0, i nawzajem.

Przypuśćmy tedy że chcemy wyrachować wstawy i dostawy łuków co 10 sekund, od 0^0 do 45^0, i zacznijmy od wst$10''$.

Gdy promień koła jest wzięty za jedność linijną, długość półokręgu, czyli łuku 180^0, wyraża się przez

$$\pi = 3,14159\;26535\;89793\;23846\ldots$$

Ztąd, uważając że 180^0 zawierają 648000 sekund, wywodzi się łuk 10 sekund, to jest

$$\text{łuk } 10'' = \frac{\pi}{64800} = 0,00004\,84813\,68110\ldots$$

Owoż, jeśli weźmiemy łuk $10''$ za wst$10''$, popełnimy błąd mniejszy od ćwierci sześcianu łuku, a ten błąd jest mniejszy od

$$\frac{1}{4}(\text{łuk } 10'')^3 < \frac{1}{4}(0,00005)^3 < 0.\,00000\,00000\,00032\,;$$

zatem będzie

$$\text{wst}10'' < 0,00004\,84813\,68110$$

i

$$\text{wst}10'' > 0,00004\,84813\,68072.$$

To pokazuje że wst$10''$ jest zawarta między dwiema liczbami które mają *dwanaście* pierwszych dziesiętnych spólnych; więc

$$\text{wst}10'' = 0,00004\,84813\,681$$

z błędem mniejszym od pół jedności dziesiętnej 13go rzędu.

Szukajmy teraz dos$10''$. Jeśli za dos$10''$ weźmiemy $1 - \frac{1}{2}(\text{łuk } 10'')^2$, błąd będzie mniejszy od $\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2.10^4}\right)^4 = \frac{1}{256.10^{16}}$, a tem bardziej mniejszej od $\frac{1}{2.10^{18}}$.

Ztąd wynika że $1 - \frac{1}{2}(\text{łuk } 10'')^2$ jest wartością dos$10''$ przybliżoną na mniej niż pół jedności dziesiętnej 18go rzędu; więc, zachowując 13 pierwszych dziesiętnych, otrzymujemy

$$\text{dos}10'' = 0,99999\,99988\,248$$

z 13ma dziesiętnemi.

92. *Formuły Tomasza Simpson.* Znając wst10″ i dos10″ możnaby, za pomocą formuł

$$\mathrm{wst}\,(a+b) = \mathrm{wst}a\,\mathrm{dos}b + \mathrm{dos}a\,\mathrm{wst}b$$
$$\mathrm{dos}\,(a+b) = \mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}b - \mathrm{wst}a\,\mathrm{wst}b\,,$$

wyrachować wstawy i dostawy łuków co 10″, od 0° do 45°; albowiem, czyniąc najpierwej w tych formułach $a = 10''$ i $b = 10''$, otrzymanoby wst20″ i dos20″, a potem wst30″ i dos30″ czyniąc $a = 20''$; i tak dalej, aż do 45°. Ale następujący sposób, podany przez angielskiego matematyka *Tomasza Simpson*, skróca znacznie ten mozolny rachunek.

Jakoż, jeśli w znanych formułach

$$\mathrm{wst}\,(a+b) + \mathrm{wst}\,(a-b) = 2\,\mathrm{wst}a\,\mathrm{dos}b$$
$$\mathrm{dos}\,(a+b) + \mathrm{dos}\,(a-b) = 2\,\mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}b\,,$$

uczynimy $a = mb$, będzie

$$\mathrm{wst}\,(m+1)\,b = 2\,\mathrm{dos}b\,\mathrm{wst}mb - \mathrm{wst}\,(m-1)\,b$$
$$\mathrm{dos}\,(m+1)\,b = 2\,\mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}mb - \mathrm{dos}\,(m-1)\,b.$$

Widzimy teraz że łuki $(m-1)b$, mb, $(m+1)b$ tworzą postępnię arytmetyczną której stosunkiem jest b; zatem, znając wstawy albo dostawy dwóch łuków po sobie idących, możemy zaraz otrzymać wstawę albo dostawę łuku następującego. I tak, biorąc $b = 10''$, i podstawiając za m ciąg wartości 1, 2, 3, ... znajdujemy

$$\mathrm{wst}20'' = 2\,\mathrm{dos}10''\,\mathrm{wst}10''\,,$$
$$\mathrm{dos}20'' = 2\,\mathrm{dos}10''\,\mathrm{dos}10'' - 1\,,$$
$$\mathrm{wst}30'' = 2\,\mathrm{dos}10''\,\mathrm{wst}20'' - \mathrm{wst}10''\,,$$
$$\mathrm{dos}30'' = 2\,\mathrm{dos}10''\,\mathrm{dos}20'' - \mathrm{dos}10''\,,$$
$$\mathrm{wst}40'' = 2\,\mathrm{dos}10''\,\mathrm{wst}30'' - \mathrm{wst}20''\,,$$
$$\mathrm{dos}40'' = 2\,\mathrm{dos}10''\,\mathrm{dos}30'' - \mathrm{dos}20.$$

. . . .

. . . .

Ten rachunek daje się jeszcze uprościć. Albowiem, uważając że mnożnik stały $2\text{dos}10''$ różni się bardzo mało od 2 jedności, uczyńmy

$$2\text{dos}10''=2-k,\qquad \text{będzie}\qquad k=0,000000023504.$$

Przez to podstawienie dwie powyższe ogólne formuły, w których $b=10''$, stają się

$$\text{wst}(m+1)10''-\text{wst}m.10''=\text{wst}m.10''-\text{wst}(m-1)10''-k\text{wst}m10'',$$
$$\text{dos}(m+1)10''-\text{dos}m.10''=\text{dos}m.10''-\text{dos}(m-1)10''-k\text{dos}m.10''$$

Ostatnie formuły dają różnicę dwóch wstaw, albo dwóch dostaw, po sobie idących, za pomocą różnicy dwóch poprzedzających i wieloczynu $k\text{wst}m.10''$, albo $k\text{dos}m.10$. Jedyne działanie dość zmudne w tym rachunku jest odnawiające się mnożenie ostatniej wstawy albo dostawy przez liczbę k. Ale i to działanie wielce się ułatwi, jeśli utworzymy naprzód tablicę wieloczynów liczby 23504 przez cyfry 1, 2, 3 .. aż do 9; bo, tym sposobem, będziemy mieli już gotowe cząstkowe wieloczyny każdego wieloczynu takiego jako $k\text{wst}m.10''$ albo $k\text{dos}m.10$. Wszystko więc przywodzi się teraz do prostego dodawania i odciągania liczb dziesiętnych; co nie wymaga wielkiej pracy.

93. Wyrachowawszy tą metodą wstawy i dostawy łuków od 0 do 30 stopni, można otrzymać wstawy i dostawy łuków zawartych między 30° i 45° przez samo odciąganie.

Jakoż, wiedząc że $\text{wst}30^\circ=\frac{1}{2}$, mamy

$$\text{wst}\,(30^\circ+x)+\text{wst}\,(30^\circ-x)=2\text{wst}30^\circ\text{dos}x=\text{dos}x$$
$$\text{dos}\,(30^\circ-x)-\text{dos}\,(30^\circ+x)=2\text{wst}30^\circ\,\text{wst}x=\text{wst}x,$$

ztąd dwie formuły, podane przez Eulera,

$$\text{wst}\,(30^\circ+x)=\text{dos}x-\text{wst}\,(30^\circ-x)\,,$$
$$\text{dos}\,(30^\circ+x)=\text{dos}\,(30^\circ-x)-\text{wst}x,$$

które dają wstawy i dostawy łuków mających więcej niż 30°.

gdy są wiadome wstawy i dostawy łuków między 0^0 i 30^0.

94. Wtak długich rachunkach błędy są prawie nieuchronne. Trzeba więc sprawdzać znalezione wyniki, przez wyrachowanie wprost, z przybliżeniem dostatecznem, pewnych wstaw i dostaw których dokładne wyrażenie algebryczne otrzymać można.

Znamy już $\text{wst}9^0$ i $\text{dos}9^0$, $\text{wst}18^0$ i $\text{dos}18^0$, $\text{wst}36^0$ i $\text{dos}36^0 = \text{wst}54^0$, $\text{wst}45^0$ i $\text{dos}45^0$. Ze $\text{wst}54^0$ łatwo się wywodzi $\text{wst}27^0$ i $\text{dos}27^0$, albowiem formuły (20) n^ro^ 58, dają

$$\text{wst}27^0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)},$$

czyli

$$\text{wst}27^0 = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}};$$

tak samo

$$\text{dos}27^0 = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Mamy więc następujący obraz dokładnych wartości wstaw i dostaw łuków co 9 stopni.

$$\text{wst}9^0 = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}} \qquad \text{dos}9^0 = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\text{wst}18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \qquad \text{dos}18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

$$\text{wst}27^0 = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}} \qquad \text{dos}27^0 = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$\text{wst}36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \text{dos}36^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$\text{wst}45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \text{dos}45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Te wartości, które się łatwo otrzymują z takiem przybliżeniem z jakiem się podoba, zapewniają dokładność wstaw i dostaw, wyrachowanych jedna po drugiej, dla łuków od 0^0 do 45^0.

TABLICE LOGARYTMÓW FUNKCYJ KOŁOWYCH.

95. W liczebnych zastosowaniach wykonywa się zwykle rachunki przez logarytmy; dlatego też ułożono tablice logarytmów linij trygonometrycznych. Mając wyrachowane wstawy i dostawy, można otrzymać ich logarytmy za pomocą tablic logarytmów liczb; po czem nie trudno znaleźć logarytmy stycznych i dotycznych, przez formuły

$$\log \mathrm{sty}a = \log \mathrm{wst}a - \log \mathrm{dos}a$$

$$\log \mathrm{dot}a = \log \mathrm{dos}a - \log \mathrm{wst}a = -\log \mathrm{sty}a.$$

Sieczna i dosieczna, będąc odwrotnościami dostawy i wstawy, rzadko są używane; niema więc potrzeby kłaśdź ich logarytmów w tablicach; zresztą te logarytmy są równe i ze znakami przeciwnemi odpowiednym logarytmom dostawy i wstawy.

Ponieważ wstawy i dostawy wszelkiego łuku, a styczne łuków od 0^0 do 45^0 i dotyczne łuków od 45^0 do 90^0, są ułamkami mniejszemi od 1, ich logarytmy są odjemne; żeby w tablicach uniknąć logarytmów odjemnych, dodano 10 do każdego z nich. Logarytmy które, po tem zwiększeniu, zostają jeszcze odjemne, należą do linij odpowiedających kątom tak małym że się prawie nigdy nie zdarzają w zastosowaniach; największy z tych kątów jest mniejszy od 0,0001 łuku jednej sekundy (*).

(*) Niech będzie x łuk którego wstawa jest mniejsza od $\frac{1}{10^{10}}$.
Ponieważ $\mathrm{wst}10'' > 0,00004\,84813\,680$,
będzie

$$\frac{x}{\left(\frac{1}{10^{10}}\right)} < \frac{\mathrm{wst}10''}{\mathrm{łuk}10''} < \frac{\mathrm{łuk}10''}{0,0000484813};$$

więc
$$x < \frac{\mathrm{łuk}10''}{484813} < \frac{\mathrm{łuk}1''}{40000}.$$

URZĄDZENIE TABLIC KALLETA (*CALLET*)

96. Pierwsza z tych tablic zawiera logarytmy, z siedmioma dziesiętnemi, dla *wstaw i stycznych* łuków co sekunda *pięciu* pierwszych stopni, od 0 do 5°, i temsamem logarytmy *dostaw i dotycznych* od 85° do 90°. Stopnie bieżące są oznaczone na górze stronicy a stopnie dopełnienia na dole, minuty na pierwszej i ostatniej linii poziomej, a sekundy w pierwszej i ostatniej kolumnie. Każda stronica na lewo zawiera wstawy i dostawy, a stronica na prawo styczne i dotyczne.

Następujące tablice zawierają logarytmy wstaw, dostaw, stycznych i dotycznych co 10 sekund, od 0° do 90°. Stopnie bieżące od 0° do 44° są napisane na górze każdej stronicy, a stopnie od 89° do 44°, na dole. Minuty i sekundy, umieszczone w pierwszej i drugiej kolumnie, odnoszą się do stopni na górze; a zaś minuty i sekundy, umieszczone w ostatniej i przedostatniej kolumnie, odpowiedają stopniom na dole. Po każdej kolumnie logarytmów jest mała kolumna dająca różnice logarytmów po sobie idących. Kolumna różnic logarytmów dla stycznych i dotycznych jest spólna; bo, z równań

$$\log \mathrm{sty}\, a = -\log \mathrm{dot}\, a \quad \text{i} \quad \log \mathrm{sty}\,(a+h) = -\log \mathrm{dot}\,(a+h),$$

wynika

$$\log \mathrm{sty}\,(a+h) - \log \mathrm{sty}\, a = \log \mathrm{dot}\, a - \log \mathrm{dot}\,(a+h).$$

Różnica logarytmów stoi na linii trzymającej środek między dwiema liniami logarytmów do których się odnosi; te zaś logarytmy w kolumnie wstaw albo stycznych rosną z łukami, a przeciwnie w kolumnie dostaw albo dotycznych logarytmy maleją gdy łuki rosną.

Bażda kolumna logarytmów ma dwa tytuły, jeden na górze drugi na dole; tytuł górny, jako naprzykład w trzeciej kolumnie SINUS (*wstawa*), odnosi się do stopni, od 0 do 44, napisanych na górze stronicy; a zaś tytuł dolny tej samej kolumny, CO.SINUS (*dostawa*) odnosi się do stopni, od 89 do 44, napisanych na dole : tak samo tytuł dolny SINUS (*wstawa*) w piątej kolumnie odnosi się do stopni dolnych od 89 do 44, a tytuł górny CO.SINUS (*dostawa*) tej samej kolumny odpowieda stopniom górnym od 0 do 44. Podobnie dla TANGENTE (*styczna*) i CO.TANGENTE (*dotyczna*). Tym sposobem urządzone tablice dają logarytmy wstaw i dostaw, stycznych i dotycznych, od 0^0 aż do 90^0.

UZYCIE TABLIC KALLETA

Dwa są zagadnienia które za pomocą tablic rozwiązać trzeba.

97. ZAGADNIENIE I. *Mając dany kąt, wyznaczyć logarytm jednej z jego linij trygonometrycznych.*

Jeśli kąt, albo łuk mniejszy od ćwiercianu, jest dany w stopniach, minutach i tylko w dziesiątkach sekund, logarytmy jego linij trygonometrycznych znajdują się w tablicach.

I tak, niech będzie do znalezienia log wst $30^0 45' 50''$. Szukamy najpierwej stronicy na której stoi liczba 30^0 stopni napisana u góry; po czem, idziemy do pierwszej kolumny gdzie jest liczba $45'$, i, schodząc do kolumny sekund, uważamy $50''$; właśnie na linii tych sekund i w kolumnie z tytułem górnym SINUS (*wstawa*) znajduje się liczba 9,7088468, która jest szukanym logarytmem powiększonym o 10 jedności. Więc, odejmując 10, mamy

$$\log \text{wst}\, 30^0 45' 50'' = \overline{1},7088468.$$

Znajdźmy jeszcze logarytm sty $64^0 26' 20''$. Najpierwej szukamy stronicy na której dole stoi liczba 64 stopni; po czem, udajemy się do ostatniej kolumny gdzie jest liczba $36'$, i przechodzimy do kolumny sekund w której, idąc do góry, napotykamy 20"; nakoniec, na linii tych sekund, w kolumnie z tytułem dolnym TANG. (*styczna*), znajdujemy liczbę 0,3235660 która jest szukanym logarytmem. Więc mamy

$$\log \text{sty}\, 64^0 36' 20'' = 0{,}3235660\,.$$

Jeśli dany kąt, albo łuk przywiedziony do pierwszego ćwiercianu, zawiera jedności sekund albo jeszcze sekundy z ułamkiem, wtedy otrzymuje się żądany logarytm linii trygonometrycznej przez interpolacyę, podobną do tej którą się wykonywa szukając logarytmu liczby niezamieszczonej w tablicach. Ta interpolacya opiera się na tem że się uważa *różnice logarytmów linij trygonometrycznych jako proporcyonalne do różnic łuków*, to jest : oznaczając przez h przyrost łuku, przez δ przyrost jego logarytmu, przez Δ różnicę tablicową dwóch logarytmów między które wpada szukany, i wiedząc że w tablicach różnica dwóch łuków po sobie idących jest 10", bierzemy jakoby prawdziwą następującą proporcyę

$$\frac{10}{h} = \frac{\Delta}{\delta}; \quad \text{zkąd} \quad \delta = \frac{h\Delta}{10}.$$

Dodajemy ten przyrost δ do logarytmu linii trygonometrycznej, wziętego przez niedostatek, tak jako w logarytmach liczb, i mamy szukany logarytm przybliżony.

Nie trudno dowieśdź, ale sposobami które tu miejsca mieć nie mogą (*), że błąd pochodzący z użycia powyższej proporcyi, i zarazem z przybliżenia logarytmów tablic, nie wpływa na siódmą dziesiętnę wyznaczonego logarytmu; byle tylko różnica h była mniejsza od 10", i dany łuk był większy od 5^0 dla wstaw i stycznych, a temsamem mniejszy od 85^0 dla dostaw i dotycznych.

(*) Zobacz notę na końcu dzieła.

1°. *Znaleźć kąt x którego log wst jest* $\bar{1},9104902$

log wst$x$ ... 9,9104902		$\Delta=151$
Za	9,9104756	54° 27′ 40″
Za	1460	9″,66
		$x=54°\,27'\,49'',66$

W kolumnie wstaw liczba najwięcej przybliżona przez niedostatek do danego logarytmu 9,9104902 jest 9,9104756, różni się od niego liczbą $\delta=146$ i odpowieda kątowi 54° 27′ 40″. Owoż, różnica tablicowa $\Delta=151$ pokazuje że, dodając 151 do 9,9104756, powiększa się odpowiedający kąt o 10″; więc, na mocy pozwolonej proporcyi, dodając 146 do tego samego logarytmu powiększy się kąt liczbą sekund wyrażoną przez

$$h=\frac{10''}{151}\cdot 146=\frac{1460''}{151}=9,66.$$

To wszystko porządnie się wykonywa wedle powyższego wzoru.

2° *Znaleźć kąt którego log dos jest* $\bar{1},9032728$

log dos$x$	9,9032728	$\Delta=157$
Za	9,9032819	36° 50′ 10″
Za	910	5,79
		$x=36°\,50'\,15'',79$

Ponieważ dostawa maleje gdy kąt rośnie, z dwóch logarytmów kolumny co. SIN. (dostawa), które bezpośrednio zawierają dany 9,9032728, wzięliśmy większy 9,9032819 aby, mając kąt przez niedostatek, dodawać szukane jedności sekund, nie zaś odciągać; po czem, wyznaczyliśmy różnicę $\delta=91$ między logarytmem użytym i danym; a znając różnicę tablicową $\Delta = 157$, otrzymaliśmy jedności sekund przez wiadomą proporcyę, która daje

$$h = \frac{10''\delta}{\Delta} = \frac{910''}{157} = 5'',796\ldots$$

3° *Znaleźć kąt x którego log sty jest* $\bar{1},6838834$

log sty$x$ ...	9,6838834	$\Delta = 538$
Za	9,6838398	25° 46′ 30″
Za	4360	8″,10
		$x = 25°\,46'\,38'',1$.

4° *Znaleźć kąt x którego log dot jest* $\bar{1},5610770$

log dot$x$ ...	9,5610770	$\Delta = 655$
Za	9,5611314	69° 59′ 50″
Za	5440	8″,3
		$x = 69°\,59'\,58'',3$

5° *Znaleźć kąt x którego log dos jest* $\bar{2},8888798$

W części tablic *Kalleta* która daje logarytmy dostaw co sekunda od 85° do 90°, szukamy liczby 8,8888798, i znajdujemy odrazu $x = 85°\,33'\,34''$.

100. Uwaga. Zobaczmy teraz *z jakiem przybliżeniem można otrzymać kąt, gdy jest wiadomy logarytm jednej z jego linij trygonometrycznych na mniej niż n jedności siódmego rzędu dziesiętnego.*

Gdy logarytm linii trygonometrycznej zwiększa się różnicą tablicową Δ, odpowiedający kąt zwiększa się albo zmniejsza o 10″; ztąd wynika że, na zwiększenie logarytmu o jedność siódmego rzędu dziesiętnego, odpowieda zmienność kąta równa najwięcej $\frac{10''}{\Delta}$: więc błąd n jedności siódmego rzędu w logarytmie sprawia w kącie błąd którego granicą jest $\frac{10''.n}{\Delta}$.

Przypuszczając $n=1$, widzimy że błąd w wyznaczeniu kąta, danego przez logarytm jednej z linij trygonometrycznych, będzie tem mniejszy im większe Δ.

Tablice logarytmów pokazują że we wstawach Δ rośnie gdy kąt maleje; przeciwnie w dostawach. To dowodzi że małe kąty obliczają się z przyzwoitem przybliżeniem przez wstawy, a źle przez dostawy; przeciwnie, kąty blizkie 90^0 obliczają się prawie dokładnie przez dostawy a źle przez wstawy; tak że, jeśli kąt, dany przez logarytm wstawy, przechodzi $89^0\,57'$, nie można go wyrachować z błędem mniejszym od jednej minuty.

W logarytmach stycznej, Δ najpierwej maleje gdy kąt rośnie od 0^0 do 45^0, a potem się zwiększa przez te same wartości, gdy kąt rośnie od 45^0 do 90^0. Więc kąt jest tem lepiej wyznaczony przez swoją styczną im się więcej zbliża do 90^0.

Jeśli oznaczymy przez $\Delta, \Delta', \Delta''$ różnice tablicowe, odpowiedające stycznej, wstawie i dostawie tego samego kąta, będzie zawsze

$$\Delta = \Delta' + \Delta''.$$

Albowiem, $\log \mathrm{sty}\,(x+h) - \log \mathrm{sty}\,x$

$= \log \mathrm{wst}\,(x+h) - \log \mathrm{dos}\,(x+h) - \log \mathrm{wts}\,x + \log \mathrm{dos}\,x$

$= [\log \mathrm{wst}\,(x+h) - \log \mathrm{wst}\,x] + [\log \mathrm{dos}\,x - \log \mathrm{dos}\,(x+h)]$.

Jeśli kąt ma 45^0, wtedy $\Delta = 410$, i błąd $\frac{10''}{\Delta} < 0'',025$. Widzimy tedy że błąd maximum dla stycznej jest mniejszy od $\frac{1}{4}\cdot\frac{1''}{10}$. Odpowiedający błąd dla wstawy albo dostawy jest mniejszy od $0'',048 < \frac{1}{2}\cdot\frac{1''}{10}$.

To wszystko stosuje się do dotycznej. Ztąd wynika że styczna albo dotyczna dokładniej wyznacza kąt niż wstawa albo dostawa; więc, gdy można, lepiej jest szukać kąta przez styczną niż przez wstawę albo dostawę.

Logarytmy linij trygonometrycznych od 0^0 *do* 5^0.

101. Gdy łuk jest mniejszy od 5^0, nie wolno przypuszczać że, w przedziele $10''$, *przyrosty logarytmów wstaw albo stycznych są proporcyonalne do przyrostów łuków*; bo błąd wynikający z tej proporcyi mógłby przechodzić jedność i nawet kilka jedności siódmego rzędu dziesiętnego. Ale, jeśli łuk jest zawarty między 1^0 i 5^0, wtedy, biorąc przedział $1''$, można jeszcze użyć interpolacyi przez części proporcyonalne, to jest proporcyi

$$\frac{h}{1} = \frac{\delta}{\Delta},$$

w której $h < 1$, i Δ znaczy różnicę tablicową dwóch logarytmów wstaw albo stycznych łuków idących co sekunda.

Pierwsze zagadnienie. 1^0. *Znaleźć* $\log wst\, 2^0 36' 54'',87$

W tablicach *Kalleta*, jakośmy na początku powiedzieli, są dane, dla *pięciu* pierwszych stopni, logarytmy wstaw i stycznych łuków od 0^0 do 5^0, idących co sekunda, i temsamem logarytmy dostaw i dotycznych od 85^0 do 90^0. W tej części tablic znajdujemy

$$\log wst\, 2^0 36' 54'' = \bar{2},6591983.$$

Przez odciąganie wyznaczamy $\Delta = 461$; po czem, przez proporcyę tablicową, otrzymujemy

$$\delta = h\Delta = 461 \times 0,87 = 401,07.$$

więc

$$\log wst\, 2^0 36' 54'',87 = \bar{2},6592384.$$

2^0 Takim samym sposobem, wyrachuje się logarytm stycznej.

Dostawa i dotyczna łuków między 85° i 90° są wstawą i styczną łuków od 0° do 5°; nadto, dotyczna jest odwrotnością stycznej; więc logarytmy tych linij trygonometrycznych nie przedstawiają żadnej trudności.

Drugie zagadnienie. 1°. *Znaleźć kąt x, wiedząc że*

$$\log \text{sty} x = \bar{2},7937961$$

W części tablic *Kalleta*, która daje logarytmy wstaw i stycznych co sekunda, znajdujemy

za 8,7937961 $3^\circ 33' 33''$;

po czem wyznaczamy $\delta = 113$ i $\Delta = 340$,

a następnie $h = \frac{113}{340} = 0,332\ldots$

Więc $x = 3^\circ 33' 33'',332$.

2°. *Znaleźć kąt x, wiedząc że*

$$\log \text{dos} x = \bar{2},4931567$$

W znajomej części tablic znajdujemy

za 8,4931750 $88^\circ 12' 58''$;

potem $\delta = 183$ i $\Delta = 676$,

a następnie $h = \frac{183}{676} = 0,270\ldots$

Więc $x = 88^\circ 12' 58'',270$

102. Jeśli łuk jest mniejszy od 1°, wtedy nie można, nawet w przedziale 1″, użyć interpolacyi przez części proporcyonalne. Ale, w przypadku tak małych łuków, przypuszcza się, z błędem prawie nic nieznaczącym, że *łuki są proporcyonalne* *do swych wstaw albo do swych stycznych*, i za pomocą tej proporcyi rozwiązuje się dwa zwykłe zagadnienia.

PIERWSZE ZAGADNIENIE. *Znaleźć* $\log wst\, 0^\circ 2' 34'',56$.

Zamieniamy najpierwej łuk na sekundy, co daje $154'',56$; potem stawiamy proporcyę

$$\frac{wst\, 0^\circ 2' 34'',56}{154,56} = \frac{wst\, 0^\circ 2' 24''}{154}.$$

zatem

$$\log wst\, 0^\circ 2' 34'',56 = \log wst\, 0^\circ 2' 34'' - \log 154 + \log 154,56.$$

W części tablicy, która daje logarytmy wstaw co sekunda, znajdujemy

$$\log wst\, 0^\circ 2' 34'' = \bar{4},8730955$$

a w tablicy logarytmów liczb

$$\log 154,56 = 2,1890971$$

$$-\log 154 \quad = \bar{3},8124793$$

Więc $\log wst\, 0^\circ 2' 34'',56 = \bar{4},8746719$

DRUGIE ZAGADNIENIE. Znaleźć kąt x, wiedząc że

$$\log sty x = \bar{3},3576432.$$

W tablicy która daje logarytmy stycznych co sekunda znajdujemy

za $\quad 7,3571497 \quad 0^\circ 12' 24''$

Zamieniamy łuk $0^\circ 12' 24''$ na sekundy, co daje $744''$, i wyznaczamy $\log 744 = 2,8715729$; po czem, uważamy że, na mocy przyjętej proporcyi, powinno być

$$\frac{x}{744} = \frac{sty x}{sty\, 0^\circ 12' 24''},$$

zkąd

$$\log x = \log 744 + \log \frac{\text{sty}\, x}{\text{sty}\, 0^0 12' 24''}$$

$$= 2{,}8715729 + 0{,}0004935 = 2{,}8720664 .$$

Więc $x = 744'',846 = 0^0\, 12'\, 24'',846$.

Uwaga. Tablice *Kalleta* dają logarytmy stosunków wstawy do łuku i stycznej do łuku, i liczbę sekund łuku, dla trzech pierwszych stopni. Tym sposobem rachunek w obydwóch powyższych zagadnieniach znacznie się skróca. Ale całe działanie dość jest sztuczne, i wymaga pewnych ostrożności, których tu wykładać nie widzimy potrzeby; zwłaszcza że przypadek bardzo małych łuków prawie nigdy się nie zdarza w zwyczajnych zastosowaniach trygonometryi. Ciekawy czytelnik znajdzie szczegóły wzmiankowych rachunków na stronicy 113 wstępu do tablic *Kalleta*.

SPOSÓB PRZEKSZTAŁCENIA FORMUŁ NA WYRACHOWALNE PRZEZ LOGARYTMY.

103. Żeby można wyrachować przez logarytmy wyrażenie dane liczebne, trzeba koniecznie żeby ono zawierało same tylko czynniki jednomienne. Jeśli to wyrażenie zawiera summę albo różnicę dwóch wstaw, dwóch dostaw, wstawy i dostawy, ale dwóch stycznych, dwóch dotycznych, etc, łatwo je przekształcić na inne wyrachowalne przez logarytmy, posługując się wiadomemi formułami. I tak, niech będzie naprzykład

$$x = \text{sty}\, a + \text{sty}\, b .$$

Mamy zaraz

$$x = \frac{\text{wst}\, a}{\text{dos}\, a} + \frac{\text{wst}\, b}{\text{dos}\, b} = \frac{\text{wst}\, a \,\text{dos}\, b + \text{dos}\, a\, \text{wst}\, b}{\text{dos}\, a\, \text{dos}\, b} = \frac{\text{wst}\,(a+b)}{\text{dos}\, a\, \text{dos}\, b},$$

Tak samo,

$$x = \text{sty}a + \text{dot}b = \frac{\text{dos}(a-b)}{\text{dos}a\,\text{dos}b}.$$

Weźmy jeszcze

$$x = \text{sie}a + \text{dosie}b\,;$$

mamy

$$x = \frac{1}{\text{dos}a} + \frac{1}{\text{wst}b} = \frac{\text{wst}b + \text{wst}(90^0 - a)}{\text{dos}a\,\text{wst}b}$$

$$= \frac{2\text{wst}\left(\frac{b-a}{2} + 45^0\right)\text{dos}\left(\frac{b+a}{2} - 45^0\right)}{\text{dos}a\,\text{wst}b}$$

Te przekształcenia są niezbędne, albowiem nie znamy zwykle liczebnych wartości wstaw, dostaw,.. tylko mamy ich logarytmy.

Jest ogólna metoda przekształcenia wyrażeń jakichkolwiek na inne wyrachowalne przez logarytmy, za pomocą kąta posiłkowego.

Jakoż, uważajmy najpierwej wyrażenie dwumienne

$$x = a + b\,,$$

w którem liczby a i b są dodatne jakiekolwiek, i przypuśćmy że chcemy mieć $\log x$.

Można pisać to wyrażenie w następującym kształcie

$$x = a\left(1 + \frac{b}{a}\right),$$

i uczynić $\text{sty}\varphi = \frac{b}{a}$, ponieważ $\text{sty}\varphi$ może mieć wszelką wartość tak wielką albo tak małą jak się podoba.

Kąt φ, zawarty między 0 i $\frac{\pi}{2}$, wyznacza się za pomocą tablic, bo mamy

$$\log\text{sty}\varphi = \log b - \log a\,;$$

dodając jeśli trzeba 10 jedności do tego logarytmu.

Tym sposobem otrzymujemy

$$x = a(1 + \text{sty}\varphi) = \frac{a(\text{dos}\varphi + \text{wst}\varphi)}{\text{dos}\varphi}.$$

Owoż,

$$\begin{aligned}\text{wst}\varphi + \text{dos}\varphi &= \text{wst}\varphi + \text{wst}(90^0 - \varphi) \\ &= 2\text{wst}\,45^0\,\text{dos}(\varphi - 45^0);\end{aligned}$$

więc

$$x = \frac{a\sqrt{2}\text{dos}(\varphi - 45^0)}{\text{dos}\varphi},$$

ta formuła jest wyrachowalna przez logarytmy.

Podobnym sposobem przekształci się formułę

$$x = a - b$$

w której przypuszczamy $a > b$.

Czyniąc $a = b\,\text{sty}\,\varphi$, otrzymamy

$$x = \frac{a\sqrt{2}\text{wst}(\varphi - 45^0)}{\text{dos}\varphi}.$$

Powyższa metoda stosuje się do jakiegokolwiek wielomianu $a \pm b \pm c \pm d$... Jakoż, biorąc kąt posiłkowy, zmniejszamy jednością liczbę wyrazów wielomianu; biorąc potem drugi kąt posiłkowy zmniejszymy jeszcze tę liczbę wyrazów; i tak następnie aż dojdziemy do jednomianu. Ale każdy kąt posiłkowy wymaga szukania logarytmów jeśli nie są naprzód wiadome, i przejścia do liczb; co utrudnia przybliżenia.

104. Uwaga. Uważając że $1 = \text{sty}45^0$, znajdujemy odrazu

$$a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = a(\text{sty}45^0 + \text{sty}\varphi) = \frac{a(\text{wst}45^0\text{dos}\varphi + \text{dos}45^0\text{wst}\varphi)}{\text{dos}45\,\text{dos}\varphi};$$

więc

$$a+b=\frac{a\sqrt{2}\,\mathrm{wst}(\varphi+45)}{\mathrm{dos}\varphi}=\frac{a\sqrt{2}\,\mathrm{dos}(\varphi-45^0)}{\mathrm{dos}\varphi}.$$

Można jeszcze działać inaczej. Jeśli ilości a i b są dodatne, czyniąc $\frac{b}{a}=\mathrm{sty}^2\varphi$, otrzymujemy zaraz

$$a+b=a(1+\mathrm{sty}^2\varphi)=\frac{a}{\mathrm{dos}^2\varphi}.$$

Przypuszczając $a>b$, przekształcimy dwumian $a-b$ na jednomian, czyniąc $b=a\,\mathrm{wst}^2\varphi$; co daje

$$a-b=a(1-\mathrm{wst}^2\varphi)=a\mathrm{dos}^2\varphi.$$

Te dwa przekształcenia wymagają mniej logarytmów niż poprzedzające.

Są jeszcze inne sposoby w przypadkach szczególnych przydatne; wyłożymy niektóre z nich w następujących zastosowaniach liczebnych, aby tem lepiej pokazać ważność i użytek przekształceń.

105. Zagadnienie I. *Uczynić wyrachowalną przez logarytmy summę $wstA+wstB+wstC$, gdy $A+B+C=180^0$.*

Mamy najpierwej

$$\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}B=2\mathrm{wst}\frac{A+B}{2}\mathrm{dos}\frac{A-B}{2};$$

a ponieważ $C=180^0-A-B$, będzie

$$\mathrm{wst}C=\mathrm{wst}(A+B)=2\mathrm{wst}\frac{A+B}{2}\mathrm{dos}\frac{A+B}{2};$$

zatem, dodając, otrzymujemy

$$\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}B+\mathrm{wst}C=2\mathrm{wst}\frac{A+B}{2}\left(\mathrm{dos}\frac{A-B}{2}+\mathrm{dos}\frac{A+B}{2}\right);$$

Owoż,

$$\mathrm{dos}\,\frac{A-B}{2}+\mathrm{dos}\,\frac{A+B}{2}=2\mathrm{dos}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{dos}\,\frac{B}{2},$$

i

$$\mathrm{wst}\,\frac{A+B}{2}=\mathrm{dos}\,\frac{C}{2};$$

więc ostatecznie

$$(1)\qquad \mathrm{wst}A+\mathrm{wst}B+\mathrm{wst}C=4\mathrm{dos}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{dos}\,\frac{B}{2}\,\mathrm{dos}\,\frac{C}{2}.$$

Uwaga. Gdyby, zamiast dodawać, odciągnięto wstC, byłoby

$$\mathrm{wst}A+\mathrm{wst}B-\mathrm{wst}C=2\mathrm{wst}\,\frac{A+B}{2}\left[\mathrm{dos}\,\frac{A-B}{2}-\mathrm{dos}\,\frac{A+B}{2}\right]$$

zkąd, zamieniając różnicę dostaw nawiasu na wieloczyn, wynika

$$(2)\qquad \mathrm{wst}A+\mathrm{wst}B-\mathrm{wst}C=2\mathrm{dos}\,\frac{C}{2}\,\mathrm{wst}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{wst}\,\frac{B}{2}.$$

Aby przekształcić wstA — wstB — wstC, dość uważać że ta summa algebryczna jest to samo co —(wstB + wstC — wstA); więc, na mocy ostatniej formuły, znajdziemy

$$(3)\qquad \mathrm{wst}A-\mathrm{wst}B-\mathrm{wst}C=-4\mathrm{dos}\,\frac{A}{2}\,\mathrm{wst}\,\frac{B}{2}\,\mathrm{wst}\,\frac{C}{2}.$$

106. Zagadnienie II. *Rozwiązać równanie*

$$(1)\qquad a\mathrm{wst}x+b\mathrm{dos}x=c$$

w którem a, b, c oznaczają liczby jakiekolwick dodatne albo odjemne.

Uczyńmy $b = a\,\mathrm{sty}\varphi$, będzie

$$a\,(\mathrm{wst}x + \mathrm{sty}\varphi\,\mathrm{dos}x) = c$$

albo

$$\mathrm{wst}x\,\mathrm{dos}\varphi + \mathrm{dos}x\,\mathrm{wst}\varphi = \frac{c\,\mathrm{dos}\varphi}{a},$$

więc

(2)
$$\mathrm{wst}\,(x+\varphi) = \frac{c\,\mathrm{dos}\varphi}{a}.$$

Zagadnienie jest możebne jeśli ilość $\frac{c\,\mathrm{dos}\varphi}{a}$ czyli $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ mieści się między -1 i $+1$; co wymaga żeby wartość samoista $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ nie była większa od 1.

Więc warunek konieczny i dostateczny możebności zagadnienia jest $c^2 \leq a^2 + b^2$. Przypuszczając że ten warunek jest dopełniony, jeśli, za pomocą tablic, wyrachujemy łuk dodatny α, najmniejszy jaki czyni zadość ostatniemu równaniu (2), wszystkie pierwiastki równania (1) będą dane przez formuły

$$x + \varphi = 2k\pi + \alpha$$
$$x + \varphi = (2k+1)\,\pi - \alpha$$

albo

$$x = 2k\pi + \alpha - \varphi$$
$$x = (2k+1)\,\pi - \alpha - \varphi.$$

107. Można inaczej rozwiązać dane równanie

$$a\,\mathrm{wst}x + b\,\mathrm{dos}x = c.$$

Jakoż, $\mathrm{dos}x = \pm\sqrt{1-\mathrm{wst}^2x}$; podstawiając tę wartość będzie

$$a\,\mathrm{wst}x \pm b\sqrt{1-\mathrm{wst}^2x} = c,$$

zkąd

$$\pm b\sqrt{1 - \mathrm{wst}^2 x} = c - a\,\mathrm{wst}x\,,$$

a następnie, podnosząc do kwadratu obie strony i redukując, otrzymujemy równanie

$$(a^2 + b^2)\,\mathrm{wst}^2 x - 2ac\,\mathrm{wst}x + c^2 - b^2 = 0$$

które daje

$$\mathrm{wst}x = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2},$$

Dla rzeczywistości wst$x$, trzeba najpierwej żeby ilość pod pierwiastnikiem była dodatna, $a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$, i do tego jeszcze trzeba żeby wartość tej wstawy była zawarta między -1 i $+1$, albo, mówiąc dokładniej, *wartość samoista* wstawy nie powinna przechodzić jedności, to jest musi być liczebnie

$$\frac{ac \pm \sqrt{b^2(a^2+b^2-c^2)}}{a^2+b^2} \leq 1.$$

Tej nierówności stanie się zawsze zadość jeśli, uważając wartości ilczebne wieloczynu ac i pierwiastnika, jest

$$ac + \sqrt{b^2(a^2+b^2-c^2)} \leq a^2 + b^2;$$

co wymaga oczywiście żeby $ac < a^2 + b^2$.

Więc mamy nierówność

$$\sqrt{b^2(a^2 + b^2 - c^2)} \leq a^2 + b^2 - ac$$

której obie strony są dodatne, jakikolwiek jest wieloczyn ac.
Podnosząc do kwadratu, znajdziemy

$$(a^2 + b^2)(a - c)^2 \geq 0;$$

Ta nierówność istnieje zawsze; więc w zadanem równaniu wst$x$ ma zawsze jedną albo dwie wartości różne, i temsamem jest nieskończona liczba wartości dla x które rozwiązyją to równanie.

108. Gdy $a = b = 1$, wtedy $c^2 \leq 2$; więc, jeśli $c > 0$, będzie

$$\text{wst}x + \text{dos} \leq \sqrt{2}.$$

To dowodzi że wartość maximum summy arytmetycznej wst$x$ + dos$x$ jest $\sqrt{2}$.

109. Zagadnienie III. *Jakie powinny być dwa łuki dodatne x i y, mające summę stałą $x+y=a$, żeby wieloczyn wst$x$ wst$y$ był największy możebny?*

Zamieńmy wieloczyn wst$x$ wst$y$ na różnicę, będzie

$$2\text{wst}x\,\text{wst}y = \text{dos}\,(x-y) - \text{dos}\,(x+y)$$

albo

$$2\text{wst}x\,\text{wst}y = \text{dos}\,(x-y) - \text{dos}\,a.$$

Owoż, dos$a$ jest liczbą stałą; więc, żeby wieloczyn wst$x$ wst$y$ był największy możebny, musi być dos$(x-y) = 1$; co wymaga

$$x - y = 2k\pi.$$

Ale z założenia

$$x + y = a,$$

z tych dwóch równań wynika

$$x = \frac{a}{2} + k\pi, \quad y = \frac{a}{2} - k\pi.$$

Zastępując całkowitę k przez liczby po sobie idące 0, 1, 2,.. dodatne albo odjemne, od zera aż do największej całkowitej zawartej w $\frac{a}{2\pi}$, będziemy mieli wszystkie łuki które dadzą wartość maximum wieloczynowi wst$x$ wst$y$.

Gdy dana summa a dwóch łuków jest mniejsza od okręgu, wtedy $k=0$, bo $\frac{a}{2\pi}<1$. W tym szczególnym przypadku

$$x=\frac{a}{2}=y,$$

i zagadnienie ma tylko jedno rozwiązanie.

110. Zagadnienie IV. *Wyrachawać przez logarytmy pierwiastki równania*

$$x^2+px+q=0,$$

przypuszczając je rzeczywiste.

Rozwiązując to równanie, mamy

$$x=\frac{-p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Trzeba rozróżnić dwa przypadki według jak q jest dodatne albo odjemne.

1°. $q>0$. Ponieważ przypuszczamy pierwiastki rzeczywiste, musi być $q\leq\frac{p^2}{4}$; można więc uczynić $q=\frac{p^2}{4}\,\mathrm{wst}^2\varphi$. Kąt posiłkowy φ wyrachuje się przez logarytmy,

$$\log\mathrm{wst}\varphi=\frac{1}{2}\log q+\log 2+\mathrm{D}^{\mathrm{e}}\log p;$$

po czem,

$$x=\frac{-p}{2}(1\mp\mathrm{dos}\varphi)$$

Nazywając x' i x'' wartości dwóch pierwiastków zadanego równania, otrzymujemy

$$x' = -\frac{p}{2}(1 - \mathrm{dos}\varphi) = -p\,\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}\varphi\,,$$

$$x'' = -\frac{p}{2}(1 + \mathrm{dos}\varphi) = -p\,\mathrm{dos}^2\frac{1}{2}\varphi.$$

Jeśli $p < 0$, wtedy $-p > 0$ i wartości x', x'' są obie dodatne i wyrachowalne przez logarytmy. A jeśli przeciwnie $p > 0$, wartości x', x'' są obie odjemne; w tym przypadku, trzeba wyrachować przez logarytmy wieloczyny $p\,\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}\varphi$ i $p\,\mathrm{dos}^2\frac{1}{2}\varphi$; przejść do liczb, i położyć przed niemi znak —.

2°. $q < 0$; można więc uczynić $-q = \frac{p^2}{4}\,\mathrm{sty}^2\varphi$.

Podstawiając tę wartość, będzie

$$x = \frac{-p}{2}\left(1 \mp \frac{1}{\mathrm{dos}\varphi}\right) = \frac{-p}{2\mathrm{dos}\varphi}(\mathrm{dos}\varphi \mp 1);$$

więc

$$x' = \frac{p}{2\mathrm{dos}\varphi}(1 - \mathrm{dos}\varphi) = \frac{p\,\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}\varphi}{\mathrm{dos}\varphi}.$$

$$x'' = \frac{-p}{2\mathrm{dos}\varphi}(1 + \mathrm{dos}\varphi) = -\frac{p\,\mathrm{dos}^2\frac{1}{2}\varphi}{\mathrm{dos}\varphi}.$$

Jeden z tych dwóch pierwiastków jest dodatny a drugi odjemny; pierwszy wyrachuje się bezpośrednio przez logarytmy; trzeba wyznaczyć przez logarytmy wartość liczebną drugiego i dać jej znak —.

ĆWICZENIA.

I. Dowieśdź że

$$\text{wst}^2 a - \text{wst}^2 b = \text{dos}^2 b - \text{dos}^2 a = \text{wst}\,(a+b)\,\text{wst}\,(a-b).$$

II. Rozwiązać równania

$$\text{sie}x + \text{dosie}x = k.$$
$$a\text{sie}x = b\text{dosie}x$$
$$a\text{sty}x = b\text{wst}x.$$

III. Rozwiązać równania

$$\frac{2\text{dos}x-1}{a} = \frac{2-\text{sie}x}{b},$$

$$\text{wst}\,(x+a) + \text{dos}\,(x-a) = \text{wst}\,(x-a) + \text{dos}\,(x+a)$$

Rozwiązać równania

$$a\text{sty}x + b\text{sie}x = c,$$
$$a\text{sty}x + b\text{dot}x = c.$$

IV. Rozwiązać równania

$$x + y = 2a$$
$$\text{wst}x + \text{wst}y = b.$$

V. Rozwiązać równania

$$x - y = a$$
$$\text{wst}^2 x - \text{wst}^2 y = b.$$

VI. Rozwiązać równania

$$x\text{wst}\,(A - y) = a, \qquad x\text{dos}\,(B - y) = b.$$

VII. Wyrugować x między dwoma równaniami

$$\text{dosie}x - \text{wst}x = 0$$
$$\text{sie}x - \text{dos}x = 0.$$

VIII. Wyrugować x i y między trzema równaniami

$$a\,\mathrm{wst}^2 x + b\,\mathrm{dos}^2 x = m$$
$$b\,\mathrm{wst}^2 y + a\,\mathrm{dos}^2 y = n$$
$$a\,\mathrm{sty}\,x = b\,\mathrm{sty}\,y\,.$$

IX. Dowieśdź że, gdy przyrost h łuku x, dążąc do zera, staje się zerem, wtedy :

$$gr.\ \frac{\mathrm{wst}\,(x+h) - \mathrm{wst}\,x}{h} = \mathrm{dos}\,x$$

$$gr.\ \frac{\mathrm{dos}\,(x+h) - \mathrm{dos}\,x}{h} = -\,\mathrm{wst}\,x$$

$$gr.\ \frac{\mathrm{sty}\,(x+h) - \mathrm{sty}\,x}{h} = \frac{1}{\mathrm{dos}^2 x}\,,$$

$$gr.\ \frac{\mathrm{dot}\,(x+h) - \mathrm{dot}\,x}{h} = -\,\frac{1}{\mathrm{wst}^2 x}$$

$$gr.\ \frac{\mathrm{sie}\,(x+h) - \mathrm{sie}\,x}{h} = \frac{\mathrm{wst}\,x}{\mathrm{dos}^2 x}$$

$$gr.\ \frac{\mathrm{dosie}\,(x+h) - \mathrm{dosie}\,x}{h} = -\,\frac{\mathrm{dos}\,x}{\mathrm{wst}^2 x}\,.$$

X. Dowieśdź że stosunek $\dfrac{\mathrm{wst}\,x}{x}$ maleje ciągle od 1 do 0 gdy łuk x rośnie od 0 do π.

XI. Dowieśdź że stosunek $\dfrac{\mathrm{sty}\,x}{x}$ powiększa się ciągle od 1 do ∞ gdy łuk x rośnie od 0 do $\dfrac{\pi}{2}$.

XII. Dowieśdź że

$$\mathrm{dos}\frac{x}{2}\,\mathrm{dos}\frac{x}{2^2}\,\mathrm{dos}\frac{x}{2^3}\ldots\mathrm{dos}\frac{x}{2^n} > \left(1-\frac{x^2}{2^3}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^5}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{2^{2n+1}}\right)$$

Ztąd wnieść że

$$gr.\ \mathrm{dos}\frac{x}{2}\mathrm{dos}\frac{x}{2^2}\cdots\frac{x}{2^n} > 1-\frac{x^2}{6},\quad \text{gdy}\quad n=\infty;$$

a zatem

$$x-\mathrm{wst}x < \frac{x^3}{6}.$$

XIII. Gdy łuk $x < \frac{\pi}{2}$, dowieśdź że

$$\mathrm{sty}x - x > \frac{x^3}{3}$$

$$x < \frac{1}{3}\mathrm{sty}x + \frac{2}{3}\mathrm{wst}x.$$

KSIEGA DRUGA

TRYGONOMETRYA PROSTOLINIJNA

---

111. W każdym trójkącie jest sześć części do uważania: trzy boki i trzy kąty. Wiadomo z geometryi że trójkąt jest wyznaczony, gdy trzy z jego części są dane, byle tylko między danemi był jeden bok przynajmniej; to znaczy że, znając trzy przyzwoite części trójkąta, można geometrycznie, to jest wykreśleniem, znaleźć trzy inne.

Ale te wykreślenia, jako sposoby *graficzne*, nie mogą być dokładne, z przyczyny nieuchronnej niedoskonałości narzędzi użytych praktycznie. Dla uniknienia tej niedogodności starano się, zamiast wykreśleń, użyć rachunku który zawsze pozwala dosięgać takiego stopnia przybliżeń jaki mieć chcemy. *Rozwiązać* trójkąt jestto wyrachować wartość liczebną każdej jego części, gdy liczba części wiadomych jest dostateczna do wyznaczenia tego trójkąta.

Trygonometrya prostolinijna ma za cel rozwiązywanie trójkątów prostolinijnych.

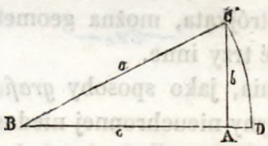
112. Aby wyrazić długości liczbami, odnosi się je do pewnej jedności linijnej, na przykład do *metra*, albo do stopy, mili. Wielkość kąta odnosi się naturalnie do kąta prostego, wziętego za jedność kątową.

W zastosowaniach funkcyj kołowych kąty, mają za miarę stosunek łuku objętego do jego promienia; ale, w trygonometryi prostolinijnej, łuki i odpowiedające im kąty wyrażają się zwykle przez stopnie, minuty, sekundy i ich ułamki. W trójkącie oznacza się przez A, B, C liczby stopni trzech kątów; przez a, b, c liczby jedności linijnych zawartych w trzech bokach, przeciwległych tym kątom.

ZWIĄZKI BOKÓW I KĄTÓW W TRÓJKĄCIE PROSTOLINIJNYM.

113. Twierdzenie I. *W trójkącie prostokątnym, każdy bok kąta prostego jest równy przeciwprostokątnej pomnożonej przez wstawę kąta przeciwległego, albo przez dostawę kąta przyległego.*

Niech będzie ABC trójkąt prostokątny przy A. Z wierzchołka B jako środka i promieniem BC, nakreślmy łuk koła CD.



Stosunek prostopadłej CA do promienia BC jest wstawą kąta B; więc

$$\frac{b}{a} = \text{wst}B \quad \text{albo} \quad b = a\,\text{wst}B.$$

A ponieważ kąty B i C są dopełniające, wst$B$ = dos$C$; zatem

$$b = a\,\text{dos}C$$

Tak samo

$$c = a\,\text{wst}C, \quad \text{i} \quad c = a\,\text{dos}B.$$

Uwaga. Dodając stronami równania

$$b = a\,\text{wst}B, \qquad c = a\,\text{dos}B$$

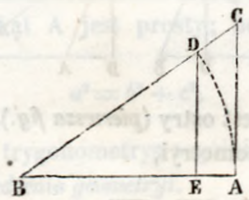
podniesione do kwadratu, znajdujemy

$$b^2 + c^2 = a^2(\mathrm{wst}^2B + \mathrm{dos}^2B) = a^2.$$

Co sprawdza powyższe twierdzenie.

114. Twierdzenie II. *W trójkącie prostokątnym, jeden bok kąta prostego jest równy drugiemu pomnożonemu przez styczną kąta przeciwległego, albo przez dotyczną kąta przyległego.*

Z wierzchołka kąta B jako środka i promieniem BA, kre-



ślimy łuk koła AD; stosunek boku AC do promienia BA jest styczną kąta B; więc

$$\frac{b}{c} = \mathrm{sty}B,$$

zkąd

$$b = c\,\mathrm{sty}B, \quad \text{albo} \quad b = c\,\mathrm{dot}C.$$

Tak samo

$$c = b\,\mathrm{sty}C, \quad \text{albo} \quad c = b\,\mathrm{dot}B.$$

Uwaga. To twierdzenie wywodzi się z poprzedzającego. Jakoż, dzieląc stronami równania

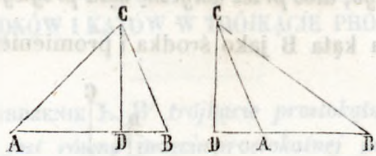
$$b = a\,\mathrm{wst}B \quad \text{i} \quad c = a\,\mathrm{dos}B,$$

otrzymujemy

$$= \mathrm{sty}B.$$

115. Twierdzenie III. *W każdym trójkącie prostolinijnym. kwadrat z jednego boku jest równy summie kwadratów z dwóch innych, mniej podwójny wieloczyn z tych dwóch boków i dostawy ich kąta.*

Niech będzie trójkąt ABC; z wierzchołka C spuśćmy prostopadłę CD na bok AB.



1°. Jeśli kąt A jest ostry (*pierwsza fig.*), mamy, wedle znanego twierdzenia geometryi,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB.AD.$$

Ale trójkąt prostokątny ACD daje (113)

$$AD = AC\text{dos}A\,;$$

więc, podstawiając, otrzymujemy

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB.AC\text{dos}A$$

albo, oznaczając boki trójkąta ABC przez a, b, c,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{dos}A.$$

2°. Jeśli kąt A jest rozwarty (*druga fig.*), mamy także z geometryi

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2AB.AD$$

Owoż, w trójkącie prostokątnym ACD jest

$$AD = AC\text{dos}CAD\,;$$

a ponieważ kąty CAD i CAB, jako spełniające, mają dostawy równe i znaków przeciwnych, będzie

$$AD = -AC\,dos\,CAB = -AC\,dos\,A\,;$$

więc, podstawiając, znajdujemy jako wyżej

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB.AC\,dos\,A$$

albo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,dos\,A\,.$$

3°. Nakoniec, to samo równanie stosuje się jeszcze do przypadku w którym kąt A jest prosty; bo wtedy $dos\,A = 0$, zatem

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Widzimy tedy że trygonometrya zogólnia w jednem wyrażeniu trzy różne *twierdzenia geometryi.*

Wniosek. Powyższe twierdzenie daje trzy równania między bokami i kątami trójkąta prostolinijnego,

$$(1)\qquad \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\,dos\,A\,,\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\,dos\,B\,,\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\,dos\,C\,,\end{aligned}$$

które są oddzielne, bo do każdego wchodzi inny kąt. Te równania stanowią *trzy fundamentalne formuły* trygonometryi prostolinijnej. I w samej rzeczy, gdyby istniało jeszcze czwarte równanie oddzielne, zawierające boki i kąty, rugując z niego wszystkie kąty, za pomocą równań (1) które dają ich dostawy, otrzymanoby związek między samemi bokami; więc, znając dwa boki trójkąta, możnaby wyznaczyć trzeci; co widocznie niemożebne. Ale są jeszcze inne związki między bokami i kątami trójkąta, które, chociaż się łatwo wywodzą z równań (1), stanowią wszakże główne twierdzenia, i należy ich *wprost* dowieśdź. Co też zrobimy.

116. Uwaga. Każda formuła fundamentalna dowodzi że z trzech linij prostych a, b, c, które jej zadość czynią, można zbudować trójkąt. Jakoż, weźmy na przykład pierwsze równanie (1). Ponieważ dosA jest większa od -1 ale mniejsza od $+1$, podstawiając -1 za dosA mamy

$$a^2 < b^2 + c^2 + 2bc \quad \text{albo} \quad a^2 < (b+c)^2;$$

zatem

$$a < b + c.$$

Podstawiając zaś $+1$ za dosA znajdujemy

$$a^2 > b^2 + c^2 - 2bc \quad \text{albo} \quad a^2 > (b-c)^2;$$

zatem, jeśli $b > c$, będzie

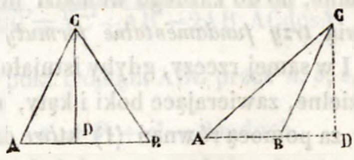
$$a > b - c;$$

jeśli przeciwnie $c > b$, będzie

$$a^2 > (c-b)^2, \quad \text{zkąd} \quad a > c - b.$$

Więc istnieje trójkąt mający za boki trzy linie proste które sprawdzają jedną z trzech fundamentalnych formuł.

117. Twierdzenie IV. *W każdym trójkącie prostolinijnym boki są proporcyonalne do wstaw kątów przeciwległych.*



Niech będzie jakikolwiek trójkąt ABC. Z wierzchołka C spuśćmy prostopadłę CD na bok przeciwległy AB; jeśli ta prostopadła pada wewnątrz trójkąta (*pierwsza fig*), dwa trójkąty prostokątne CDA i CDB dają

$$CD = AC\text{wst}A = b\text{wst}A \quad \text{i} \quad CD = BC\text{wst}B = a\text{wst}B$$

ztąd

$$b \,\mathrm{wst}A = a \,\mathrm{wst}B \quad \text{albo} \quad \frac{a}{\mathrm{wst}A} = \frac{b}{\mathrm{wst}B}.$$

Jeśli prostopadła CD pada zewnątrz trójkąta ABC, jako na *drugiej* figurze gdzie kąt B jest rozwarty, wtedy trójkąt prostokątny CAD daje

$$CD = AC \,\mathrm{wst}A = b \,\mathrm{wst}A.$$

Trójkąt prostokątny CBD daje także $CD = BC\mathrm{wst}CBD$.

Ale, ponieważ kąty CBD i CBA, jako spełniające, mają te same wstawy, będzie

$$CD = BC\mathrm{wst}CBA = a \,\mathrm{wst}B.$$

Znajdujemy więc jako wprzódy

$$b \,\mathrm{wst}A = a \,\mathrm{wst}B \quad \text{albo} \quad \frac{a}{\mathrm{wst}A} = \frac{b}{\mathrm{wst}B}.$$

Dowiedzionoby podobnie że

$$\frac{b}{\mathrm{wst}B} = \frac{c}{\mathrm{wst}C}.$$

Porównywając dwa znalezione równania, otrzymujemy

$$\frac{a}{\mathrm{wst}A} = \frac{b}{\mathrm{wst}B} = \frac{c}{\mathrm{wst}C}.$$

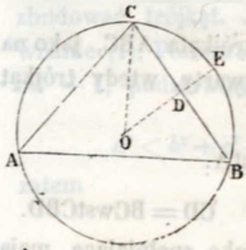
118. Wniosek. Ztąd wynika że, między bokami i kątami każdego trójkąta prostolinijnego są trzy oddzielne równania

$$(2) \qquad \frac{a}{\mathrm{wst}A} = \frac{b}{\mathrm{wst}B} = \frac{c}{\mathrm{wst}C},$$

$$A + B + C = 180^\circ.$$

które wyznaczają ten trójkąt.

119. Inne dowodzenie. Można wprost dowieśdź powyższego twierdzenia, i z niego wyprowadzić twierdzenia I i II.



Jakoż, opiszmy koło na jakimkolwiek trójkącie ABC; jeśli poprowadzimy promień OE prostopadły do cięciwy BC, kąt A będzie równy kątowi COE.

Owoż,

$$\mathrm{wstCOE} = \frac{CD}{OC}, \text{ albo } \mathrm{wstA} = \frac{a}{2R};$$

więc,

$$\frac{a}{\mathrm{wstA}} = 2R.$$

Ten stosunek jest stały, ztąd wnosimy że

$$\frac{a}{\mathrm{wstA}} = \frac{b}{\mathrm{wstB}} = \frac{c}{\mathrm{wstC}} = 2R.$$

Dowiedliśmy tym sposobem nie tylko że, w trójkącie prostolinijnym jakimkolwiek, boki są proporcyonalne do wstaw kątów przeciwległych, ale nadto że *stosunek boku do wstawy kąta przeciwległego jest równy średnicy koła opisanego.*

Jest więcej jeszcze. To dowodzenie pokazuje przyczynę istnienia twierdzenia. I w samej rzeczy, w każdym trójkącie, biorąc promień koła opisanego za jedność linijną, wstawy kątów są połowami boków przeciwległych; więc oczywiście wstawy są proporcyonalne do tych boków

Uważajmy teraz że, jeśli kąt A jest prosty, kąty B i C są dopełniające; zatem wstA = 1 i wstC = dosB. W tym przypadku, powyższe równości trzech stosunków dają

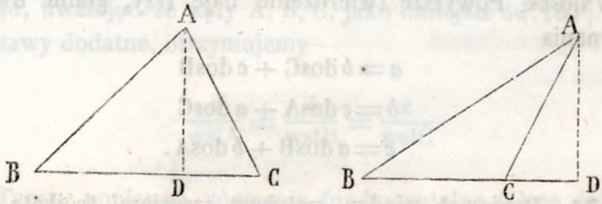
$$a = \frac{b}{\mathrm{wstB}} \quad \text{i} \quad \frac{b}{\mathrm{wstB}} = \frac{c}{\mathrm{dosB}};$$

więc

$$b = a\,\mathrm{wst}B \quad \text{i} \quad b = c\,\mathrm{sty}B.$$

Te równania stanowią właśnie dwa twierdzenia trójkąta prostokątnego.

120. Twierdzenie V. *W trójkącie prostolinijnym, każdy bok jest summą rzutów dwóch innych boków.*



Niech będzie trójkąt ABC; z wierzchołka A spuśćmy prostopadłę AD na bok BC.

1°. Jeśli prostopadła AD pada wewnątrz trójkąta, (*fig. pierwsza*), wtedy dzieli ten trójkąt na dwa prostokątne ADB i ADC które dają

$$BD = AB\,\mathrm{dos}B = c\,\mathrm{dos}B$$
$$CD = AC\,\mathrm{dos}C = b\,\mathrm{dos}C.$$

Ale

$$BC = BD + CD = a,$$

więc

$$a = b\,\mathrm{dos}C + c\,\mathrm{dos}B.$$

2°. Jeśli prostopadła AD pada zewnątrz trójkąta jako pokazuje druga figura, wtedy dwa trójkąty prostokątne ADB i ADC dają także

$$BD = c\,\mathrm{dos}B,$$
$$CD = b\,\mathrm{dos}ACD = b\,\mathrm{dos}\,(180^\circ - C) = -b\,\mathrm{dos}C.$$

owoż

$$BC = BD - CD = a$$

więc

$$a = b\,\mathrm{dos}C + c\,\mathrm{dos}B.$$

Uwaga. To równanie otrzymuje się odrazu przez metodę rzutów (40); dość tylko zrzutować na bok a linię łamaną $b+c$ złożoną z dwóch boków przyległych.

Wniosek. Powyższe twierdzenie daje trzy, godne uwagi, równania

$$(3) \qquad \begin{aligned} a &= b\,\mathrm{dos}C + c\,\mathrm{dos}B \\ b &= c\,\mathrm{dos}A + a\,\mathrm{dos}C \\ c &= a\,\mathrm{dos}B + b\,\mathrm{dos}A. \end{aligned}$$

121. Ponieważ między *sześcioma* częściami trójkąta (trzy boki i trzy kąty), znaleźliśmy dziewięć równań które stanowią trzy układy (1), (2), (3), a trzeba tylko *trzech* warunków do wyznaczenia trójkąta, pojmuje się bez żadnej trudności że każdy z trzech układów musi być następstwem drugiego.

Pokażemy teraz przez jakie algebryczne przekształcenia można przejść z jednego układu do drugiego. I tak:

Z równań fundamentalnych (1) wywodzą się łatwo równania (2) i (3).

1°. Aby z równań fundamentalnych wyprowadzić równania (2), uważajmy że pierwsze równanie (1), daje

$$\mathrm{dos}A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

zkąd

$$\mathrm{wst}^2A = 1 - \mathrm{dos}^2A = \frac{2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2};$$

a następnie

$$\frac{\mathrm{wst}^2A}{a^2} = \frac{2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2b^2c^2}.$$

Druga strona tego równania jest *symetryczna*, to jest nie zmienia się gdy przemieniamy boki a, b, c jeden na drugi; więc pierwsza strona nie zmieni się także gdy w niej zamienimy A i a na B i b, albo na C i c; i będzie

$$\frac{\mathrm{wst}^2 A}{a^2} = \frac{\mathrm{wst}^2 B}{b^2} = \frac{\mathrm{wst}^2 C}{c^2} .$$

Ztąd, uważając że kąty A, B, C, jako mniejsze od 180^0, mają wstawy dodatne, otrzymujemy

$$\frac{a}{\mathrm{wst} A} = \frac{b}{\mathrm{wst} B} = \frac{c}{\mathrm{wst} C} .$$

Teraz, ponieważ równania fundamentalne (1) są *jednorodne*, to jest mają wszystkie wyrazy tego samego stopnia, można wyrugować wszystkie trzy boki, i mieć związek między samemi kątami A, B, C. Jakoż, dwie powyższe równości stosunków pokazują że boki a, b, c są proporcyonalne do wstA, wstB, wstC; więc, jeśli podstawimy te wstawy zamiast boków w jednem z równań fundamentalnych, na przykład w pierwszem, otrzymamy

$$\mathrm{wst}^2 A = \mathrm{wst}^2 B + \mathrm{wst}^2 C - 2 \mathrm{wst} B \, \mathrm{wst} C \, \mathrm{dos} A ,$$

albo

$$\mathrm{dos}^2 A - 2 \mathrm{wst} B \, \mathrm{wst} C \, \mathrm{dos} A + \mathrm{wst}^2 B + \mathrm{wst}^2 C - 1 = 0 .$$

Biorąc dosA za niewiadomę, i działając jako w *zag*. IV n°75, znajdziemy łatwo że to równanie, rozłożone na czynniki, daje

$$4 \mathrm{dos} \frac{A+B+C}{2} \mathrm{dos} \frac{B+C-A}{2} \mathrm{wst} \frac{A+C-B}{2} \mathrm{wst} \frac{A+B-C}{2} = 0 .$$

Aby ten wieloczyn był zero, trzeba i dość jest żeby jeden przynajmniej z czynników był zero: co wymaga (27 i 26)

$$A + B + C = 4k.180^0 \pm 180^0.$$
$$B + C - A = 4k.180^0 \pm 180^0.$$
$$A + C - B = 2k.180^0.$$
$$A + B - C = 2k.180^0.$$

Żadne z trzech ostatnich równań nie stosuje się do trójkąta; zostaje tedy pierwsze w którem trzeba wziąć $k = 0$ i odrzucić kąty odjemne.

Więc mamy

$$A + B + C = 180^0,$$

i

$$\frac{a}{\text{wstA}} = \frac{b}{\text{wstB}} = \frac{c}{\text{wstC}},$$

co właśnie stanowi układ (2).

2°. Z równań fundamentalnych wywodzą się zaraz równania (3); jakoż, dodając na przykład dwa pierwsze równania (1), będzie

$$0 = 2c^2 - 2bc\,\text{dosA} - 2ac\,\text{dosB},$$

albo, dzieląc przez czynnik $2c$ który nie jest zero,

$$c = a\,\text{dosB} + b\,\text{dosA}.$$

Takim samym sposobem otrzyma się dwa inne równania (3).

Nawzajem, z układów (2) i (3) można wywieśdź równania fundamentalne (1), jako następuje:

3°. Biorąc układ (2), równanie

$$A + B + C = 180^0$$

daje

$$\text{wstC} = \text{wst}\,(A + B) = \text{wstA}\,\text{dosB} + \text{dosA}\,\text{wstB},$$

Jeśli chcemy mieć pierwsze równanie fundamentalne, trzeba wyrugować kąty B i C. Z równań (2) wyciągamy

$$\text{wst}C = \frac{c\,\text{wst}A}{a}, \qquad \text{wst}B = \frac{b\,\text{wst}A}{a};$$

i następnie

$$\text{dos}B = \sqrt{1 - \frac{b^2\text{wst}^2A}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2\text{wst}^2A};$$

po czem, podstawiając te trzy wartości w powyższe równanie, i znosząc spólny czynnik $\frac{\text{wst}A}{a}$, znajdujemy,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2\text{wst}^2A} + b\,\text{wst}A.$$

Ztąd, odosobniając pierwiastnik i podnosząc do kwadratu, wynika

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{dos}A.$$

4°. Równania fundamentalne otrzymują się bardzo łatwo z równań (3). I tak, jeśli pomnożymy te ostatnie odpowiednio, na przykład przez $-a$, $+b$, $+c$, i dodamy, będzie

$$-a^2 + b^2 + c^2 = 2bc\,\text{dos}A,$$

albo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{dos}A.$$

5°. Nie trudno także przejść z układu (2) do (3); albowiem, równanie

$$A + B + C = 180^0$$

układu (2) daje

$$\text{wst}A = \text{wst}(B + C) = \text{wst}B\,\text{dos}C + \text{dos}B\,\text{wst}C,$$

a dwa inne równania (2) dostarczają

$$\text{wst}B = \frac{b\,\text{wst}A}{a} \quad \text{i} \quad \text{wst}C = \frac{c\,\text{wst}A}{a};$$

więc, podstawiając te wartości, mamy

$$a = b\,\mathrm{dos}C + c\,\mathrm{dos}B.$$

6°. Nakoniec, wyprowadźmy nawzajem równania (2) z równań (3). Rugując dosC z dwóch pierwszych równań (3), znajdujemy

$$a^2 - b^2 = c\,(a\,\mathrm{dos}B - b\,\mathrm{dos}A)\,;$$

a jeśli pomnożymy stronami to równanie przez ostatnie równanie (3) $\qquad c = a\,\mathrm{dos}B + b\,\mathrm{dos}A\,,$

będzie

$$a^2 - b^2 = a^2\mathrm{dos}^2B - b^2\mathrm{dos}^2A\,,$$

albo

$$0 = a^2\mathrm{wst}^2B - b^2\mathrm{wst}^2A\,;$$

co daje

$$\frac{a}{\mathrm{wst}A} = \frac{b}{\mathrm{wst}B}\,.$$

Ztąd wnosimy

$$\frac{a}{\mathrm{wst}A} = \frac{b}{\mathrm{wst}B} = \frac{c}{\mathrm{wst}C}\,.$$

Te dwie równości stosunków dowodzą że boki a, b, c są proporcyonalne do wstA, wstB, wstC.

Teraz, ponieważ równania (3) są jednorodne, podstawiając, na przykład w pierwszem z nich, zamiast boków wstawy które są do nich proporcyonalne, będziemy mieli

$$\mathrm{wst}A = \mathrm{wst}B\,\mathrm{dos}C + \mathrm{wst}C\,\mathrm{dos}B = \mathrm{wst}\,(B + C).$$

Owoż, temu równaniu tylko dwoma sposobami zadość uczynić można w trójkącie, to jest: biorąc

$$A = B + C, \qquad \text{albo} \qquad A + B + C = 180^\circ,$$

Pierwsza równość jest ogólnie niemożebna, bo kąt A jest jakikolwiek i może przedstawiać najmniejszy z trzech kątów trójkąta. Zostaje więc tylko druga równość która daje wiadome twierdzenie, *summa trzech kątów trójkąta jest równa dwom kątom prostym*.

ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW PROSTOKĄTNYCH.

122. Trójkąty prostokątne nastręczają między bokami a, b, c i kątami B, C, *dziewięć* zagadnień, które się zawierają *w czterech* odrębnych przypadkach. Do każdego z tych przypadków dołączamy powierzchnię trójkąta w funkcyi części danych.

Pierwszy przypadek. *Mając daną przeciwprostokątnę a i kąt ostry B, wyrachować boki b, c i kąt C.*

Mamy

$$b = a\,\mathrm{wst}B \quad \text{i} \quad c = a\,\mathrm{dos}B;$$

ztąd

$$\log b = \log a + \log \mathrm{wst}B\,,$$
$$\log c = \log a + \log \mathrm{dos}B\,.$$

Uwaga. Trzeba pamiętać że w tablicach logarytmy wstaw i dostaw, logarytm stycznej od 0^0 do 45^0, dotycznej od 45^0 do 90^0, są powiększone liczbą 10. Dlatego, jeśli logarytm tablic *dodano*, trzeba od wyniku odciągnąć 10; a jeśli taki logarytm *odciągnięto*, trzeba do wyniku dodać 10. Więc powyższe równanie z logarytmem wstB jaki jest zwykle w tablicach znaczy

$$\log b = \log a + \log \mathrm{wst}B - 10.$$

Kąt C otrzymuje się przez równanie

$$C = 90^0 - B.$$

Ale trzeba go także szukać przez formułę

$$\text{styC} = \frac{c}{b}$$

zkąd

$$\log \text{styC} = \log c - \log b,$$

dodając 10 do drugiej strony równania, jeśli odciąganie jest niemożebne.

Wyznaczony tym sposobem kąt C służy za próbę wykonanych rachunków.

Aby otrzymać powierzchnię trójkąta prostokątnego ABC, którą nazwiemy S, w funkcyi ilości danych a i B, mamy podstawę $b = a\,\text{wst}\,\text{B}$ i wysokość $c = a\,\text{dos}\,\text{B}$; zatem

$$\text{S} = \frac{bc}{2} = \frac{a^2}{2}\text{wstB}\,\text{dosB} = \frac{a^2}{4}\text{wst2B}.$$

Drugi przypadek. *Znając jeden bok b kąta prostego i jeden kąt ostry B, wyrachować drugi kąt ostry C i dwa boki a i c.*

Mamy zaraz

$$a = \frac{b}{\text{wstB}}, \quad c = b\,\text{dotB}, \quad \text{C} = 90^0 - \text{B};$$

zkąd

$$\log a = \log b + \text{D}^{e}\log\text{wstB} - 10\ (*)$$
$$\log c = \log b + \log\text{dotB}.$$

Powierzchnia trójkąta prostokątnego, w funkcyi ilości danych b i B, wyraża się przez

$$\text{S} = \frac{1}{2}b.b\,\text{dotB} = \frac{b^2\,\text{dotB}}{2}.$$

(*) Ponieważ w tablicach $\log\text{wstB}$ jest powiększony liczbą 10, biorąc dopełnienie takiego logarytmu niema nic do odciągania, albowiem $\text{D}^{e}\log\text{wstB} = 10 - \log\text{wstB}$.

Trzeci przypadek. *Mając daną przeciwprostokątnę a i bok b, wyrachować bok c i kąty B i C.*

Mamy

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

$$\text{wstB} = \frac{b}{a} = \text{dosC};$$

albo przez logarytmy

$$\log c = \frac{\log(a+b) + \log(a-b)}{2},$$

$$\log \text{wstB} = \log b - \log a = \log \text{dosC}.$$

Uwaga. Jeśli bok b różni się bardzo mało od przeciwprostokątnej a, wtedy kąt B jest blizko 90°, i wstB źle go wyznacza: widzimy albowiem że od $89^\circ\,57'\,10''$ do 90° logarytmy wstaw mają te same *siedem* pierwszych dziesiętnych. W takim razie trzeba szukać kąta B przez styB, biorąc na przykład formułę

$$\text{styB} = \frac{b}{c}$$

albo

$$\log \text{styB} = \log b - \log c,$$

w której $\log b$ i $\log c$ są już wiadome.

Powierzchnia S trójkąta, w funkcyi danych boków a i b, jest

$$S = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - b^2},$$

Czwarty przypadek. *Mając dane dwa boki b i c kąta prostego, wyrachować przeciwprostokątnę a i kąty* B, C.

Do wyznaczenia kąta B posłuży formuła

$$\text{styB} = \frac{b}{c}$$

albo
$$\log \mathrm{sty B} = \log b - \log c.$$

Po czem
$$C = 90^0 - B,$$

i
$$a = \frac{b}{\mathrm{wst B}};$$

zkąd
$$\log a = \log b - \log \mathrm{wst B},$$

albo, biorąc log wstB taki jaki jest w tablicach,
$$\log a = \log b + D^e \log \mathrm{wst B}.$$

Powierzchnia trójkąta prostokątnego, w funkcyi dwóch boków b i c, jest
$$S = \frac{bc}{2}.$$

ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW JAKICHKOLWIEK.

123. Biorąc trzy z sześciu części a, b, c, A, B, C trójkąta, można ułożyć *dwadzieścia* kombinacyj $\frac{6.5.4.}{1.2.3.} = 20$; odrzucając kombinacyę A, B, C trzech kątów, która nie wyznacza trójkąta, zostaje *dziewiętnaście* możebnych zagadnień rozwiązywania trójkątów. Ale te wszystkie zagadnienia stanowią tylko *cztery* różne przypadki, które rozwiążemy dołączając do każdego powierzchnię trójkąta w funkcyi danych części.

124. Pierwszy przypadek. *Mając dany bok a i dwa kąty* B, C, *wyrachować trzeci kąt* A *i dwa inne boki* b, c.

Niewiadomy kąt A wywodzi się zaraz z równania
$$A + B + C = 180^0.$$

Otrzymuje się potem boki b i c przez proporcye

$$\frac{a}{\text{wst}A}=\frac{b}{\text{wst}B}=\frac{c}{\text{wst}C},$$

które dają

$$b=\frac{a\,\text{wst}B}{\text{wst}A} \quad \text{i} \quad c=\frac{a\,\text{wst}C}{\text{wst}A},$$

albo

$$\log b=\log a+\log \text{wst}B+D^e\log\text{wst}A-10,$$
$$\log c=\log a+\log \text{wst}C+D^e\log\text{wst}A-10.$$

125. Do wyznaczenia powierzchni trójkąta w funkcyi ilości danych a, B, C, mamy podstawę $b=\frac{a\,\text{wst}B}{\text{wst}A}$ i odpowiedającą wysokość $BE=a\,\text{wst}C$; zatem

$$S=\frac{a^2\text{wst}B\,\text{wst}C}{2\text{wst}(B+C)}.$$

Uwaga. Jeśli są tylko dane bok a i summa $B+C$ dwóch kątów przyległych, powierzchnia trójkąta będzie maximum gdy wieloczyn $\text{wst}B\,\text{wst}C$ będzie największy możebny; co wymaga, jako wiemy (109, *zag* III), żeby kąty B i C były równe. Ten wynik jest oczywisty geometrycznie.

126. Drugi przypadek. *Mając dane dwa boki a, b i kąt zawarty między niemi, wyrachować trzeci bok c i dwa kąty* A, B.

Znamy summę dwóch kątów

$$A+B=180^0-C;$$

jeśli więc znajdziemy ich różnicę $A-B$, te dwa kąty A i B będą wyznaczone.

Owoż, z proporcyi

$$\frac{\text{wst}A}{\text{wst}B}=\frac{a}{b}$$

wynika

$$\frac{\text{wst}A - \text{wst}B}{\text{wst}A + \text{wst}B} = \frac{a-b}{a+b},$$

a, zamieniając summę i różnicę wstaw na wieloczyny, będzie

$$\frac{\text{dos}\,\frac{1}{2}(A+B)\,\text{wst}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(A+B)\,\text{dos}\,\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\text{sty}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sty}\,\frac{1}{2}(A+B)} = \frac{a-b}{a+b};$$

nadto,

$$\text{sty}\,\frac{1}{2}(A+B) = \text{sty}\left(90^0 - \frac{1}{2}C\right) = \text{dot}\,\frac{1}{2}C;$$

więc

$$\text{sty}\,\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\,\text{dot}\,\frac{1}{2}C.$$

Ztąd, przypuszczając $a > b$,

$$\log\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \log(a-b) + D^c\log(a+b) + \log\text{dot}\,\tfrac{1}{2}C - 10.$$

Ta formuła daje $\frac{1}{2}(A-B)$, a jest wiadome $\frac{1}{2}(A+B)$; więc kąty A i B łatwo się wyrachują.

Znając kąty A i B, można otrzymać trzeci bok c za pomocą formuły

$$c = \frac{a\,\text{wst}C}{\text{wst}A},$$

albo

$$\log c = \log a + \log\text{wst}C + D^c\log\text{wst}A - 10.$$

Ale ten sposób wyznaczenia boku c wymaga trzech nowych logarytmów; działając jako następuje, można uniknąć jednego logarytmu. Jakoż, mamy

$$\frac{a}{\text{wst}A} = \frac{b}{\text{wst}B} = \frac{c}{\text{wst}C}$$

zkąd

$$\frac{c}{\text{wst}C} = \frac{a+b}{\text{wst}A + \text{wst}B} = \frac{a+b}{2\text{wst}\,\frac{1}{2}(A+B)\ \text{dos}\frac{1}{2}(A-B)},$$

zatem

$$c = \frac{(a+b)\,\text{wst}C}{2\text{wst}\,\frac{1}{2}(A+B)\ \text{dos}\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Owoż,
$$\text{wst}\frac{1}{2}(A+B) = \text{dos}\frac{1}{2}C,$$

$$\text{wst}C = 2\text{wst}\frac{1}{2}C\,\text{dos}\frac{1}{2}C;$$

więc

$$c = \frac{(a+b)\ \text{wst}\frac{1}{2}C}{\text{dos}\,\frac{1}{2}(A-B)},$$

albo

$$\log c = \log(a+b) + \log\text{wst}\,\tfrac{1}{2}C + D^{e}\log\text{dos}\tfrac{1}{2}(A-B) - 10.$$

W tej formule $\log(a+b)$ jest już wiadomy.

127. Takim samym sposobem otrzymuje się formułę

$$c = \frac{(a-b)\ \text{dos}\frac{1}{2}C}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(A-B)}$$

która, z przyczyny różnicy $a-b$, jest użyteczna.

128. Zdarza się często w zastosowaniach że boki a i b są znane przez logarytmy i jest wiadomy kąt C, a chodzi o wyrachowanie kątów A i B. Wtedy, dla wyznaczenia $\log\text{sty}\frac{1}{2}(A-B)$, trzebaby najpierwej szukać liczb a i b w tablicach, i dopiero potem wziąć $\log\frac{a-b}{a+b}$; ale można uniknąć tego przejścia do liczb, przez użycie kąta posiłkowego, i, co ważniejsze, skrócając rachunek zmniejszyć temsamem błędy przybliżeń.

Jakoż,

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1};$$

jeśli tedy uczynimy $\frac{a}{b}=\text{sty}\varphi$, będzie

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\text{sty}\varphi-\text{sty}45^0}{1+\text{sty}\varphi\,\text{sty}45^0}=\text{sty}(\varphi-45^0).$$

Więc

$$\text{sty}\frac{1}{2}(A-B)=\text{sty}(\varphi-45^0)\,\text{dot}\frac{1}{2}C.$$

Tym sposobem jest dwa logarytmy mniej do znalezienia niż gdyby szukano liczb a i b.

129. Wyrachowaliśmy bok c, wyznaczywszy najpierwej kąty A i C; można jednak wprost otrzymać ten bok w funkcyi danych a, b, C. W samej rzeczy, mamy

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\,\text{dos}C}.$$

Ale ta formuła nie jest wyrachowalna przez logarytmy; aby ją przekształcić na taką, uważajmy że

$$\text{dos}C=\text{dos}^2\frac{1}{2}C-\text{wst}^2\frac{1}{2}C, \quad \text{i} \quad \text{dos}^2\frac{1}{2}C+\text{wst}^2\frac{1}{2}C=1;$$

zatem możemy pisać

$$c=\sqrt{(a^2+b^2)[\text{dos}^2\frac{1}{2}C+\text{wst}^2\frac{1}{2}C]-2ab[\text{dos}^2\frac{1}{2}C-\text{wst}^2\frac{1}{2}C]}$$

albo

$$c=\sqrt{(a+b)^2\,\text{wst}^2\frac{1}{2}C+(a-b)^2\,\text{dos}^2\frac{1}{2}C}.$$

Łatwo teraz zamienić dwumian pod pierwiastnikiem na jednomian, albowiem

$$c=(a+b)\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}\mathrm{C}\sqrt{1+\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\,\mathrm{dot}^2\tfrac{1}{2}\mathrm{C}}\,;$$

więc, biorąc kąt posiłkowy φ taki żeby

$$\frac{a-b}{a+b}\,\mathrm{dot}\tfrac{1}{2}\mathrm{C}=\mathrm{sty}\varphi\,,$$

znajdujemy

$$c=\frac{(a+b)\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}\mathrm{C}}{\mathrm{dos}\varphi}\,.$$

Ta formuła, w której kąt φ jest oczywiście ten sam co $\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$, niczem się nie różni od poprzedzającej; daliśmy ją dlatego żeby pokazać różne sposoby przekształceń.

Uwaga. Można wyrazić styA i styB w funkcyi ilości danych a, b, C. Jakoż, mamy proporcyę

$$\frac{a}{\mathrm{wstA}}=\frac{b}{\mathrm{wstB}}=\frac{b}{\mathrm{wst}(\mathrm{A}+\mathrm{C})},$$

z której wynika

$$a\,\mathrm{wstA}\,\mathrm{dosC}+a\,\mathrm{dosA}\,\mathrm{wstC}=b\,\mathrm{wst\,A}\,;$$

a ztąd

$$\mathrm{styA}=\frac{a\,\mathrm{wstC}}{b-a\,\mathrm{dosC}}\,.$$

Tak samo działając, albo przemieniając tylko w ostatniej formule boki a i b między sobą, i zastępując kąt A przez B, otrzymamy

$$\mathrm{styB}=\frac{b\,\mathrm{wstC}}{a-b\,\mathrm{dosC}}\,.$$

Ale te dwie formuły nie są wyrachowalne przez logarytmy.

131. Aby wyznaczyć powierzchnię trójkąta w funkcyi dwóch boków a, b i ich kąta C, uważajmy że, biorąc bok a za podstawę, mamy odpowiedającą wysokość $AD = b \operatorname{wst} C$; zatem

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{wst} C.$$

Ważny wynik, który pokazuje że *powierzchnia trójkąta równa się połowie wieloczynu z dwóch boków przez wstawę ich kąta.*

132. Uwaga. Przekątna BD dzieli równoległobok ABCD na dwa trójkąty równe; więc, nazywając S powierzchnię tego równoległoboku, a i b dwa boki przyległe zawierające kąt C, będzie

$$S = ab \operatorname{wst} C,$$

to jest, *powierzchnia równoległoboku ma za miarę wieloczyn z dwóch boków przyległych przez wstawę ich kąta.*

Ztąd wynika że, jeśli jest dany kąt C i summa $a + b$ dwóch boków które go zawierają, równoległobok będzie największy możebny gdy boki a i b są równe.

Więc, *między równoległobokami, mającemi równy kąt i tę samą summę boków które go zawierają, ukośnik jest największy możebny.*

133. Trzeci przypadek. *Mając dane dwa boki a, b i kąt* A *przeciwległy pierwszemu, wyrachować kąty* B, C *i trzeci bok c*

Wyrachuje się kąt B przez formułę

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{wst} B = \frac{b \operatorname{wst} A}{a}$$

albo

$$\log \operatorname{wst} B = \log b + \log \operatorname{wst} A + D^{e} \log a;$$

po czem, otrzyma się kąt C biorąc

$$C = 180^{0} - (A + B),$$

i nakoniec bok c z proporcyi

$$c = \frac{a \,\mathrm{wst}C}{\mathrm{wst}A}.$$

Żeby trójkąt istniał, musi log wst B, znaleziony za pomocą tablic, być mniejszy od 10 a najwięcej równy 10. Jeśli taki jest log wst B, wtedy wst B odpowieda dwom kątom spełniającym. Owoż, w każdym trójkącie mniejszy z dwóch boków jest przeciwległy kątowi mniejszemu, i nawzajem; ztąd wynika że różnice $a - b$ i $A - B$ mają te same znaki; więc trzeba odrzucić wszelką wartość kąta B która nie daje różnicy $A - B$ ze znakiem różnicy $a - b$. Ten warunek konieczny jest dostateczny, to jest, jeśli wartość kąta B, wskazana przez formułę (1), daje różnicy $A - B$ znak różnicy $a - b$, istnieje trójkąt mający części dane a, b, A i części znalezione B, C, c. Jakoż, z dwóch boków a, b i kąta zawartego C, można zawsze zbudować trójkąt. Nazywając A', B' i c' inne części tego trójkąta, będzie

$$\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(A' - B') = \frac{a-b}{a+b}\,\mathrm{dot}\,\frac{1}{2}C. \tag{2}$$

Ale, w tym samym trójkącie $CA'B'$, mamy

$$A' + B' = 180^0 - C,$$

a z poprzedzającego rachunku kąta C wynika

$$A + B = 180^0 - C;$$

zatem $$A' + B' = A + B.$$

Nadto, formuła (1) dająca kąt B jest to samo co

$$\frac{\mathrm{wst}A}{\mathrm{wst}B} = \frac{a}{b},$$

zkąd

$$\frac{\mathrm{wst}A - \mathrm{wst}B}{\mathrm{wst}A + \mathrm{wst}B} = \frac{a-b}{a+b};$$

a następnie

$$(3) \qquad \frac{\text{sty}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sty}\,\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Z porównania równań (2) i (3), i ponieważ uważana wartość B nadaje różnicy $A-B$ znak różnicy $a-b$, wynika

$$A'-B'=A-B.$$

Więc

$$A'=A \quad \text{i} \quad B'=B.$$

I następnie
$$c'=\frac{a\,\text{wst}C}{\text{wst}A}=c.$$

Co było do dowodzenia.

Dyskussya. W niektórych razach można wiedzieć a priori, nie szukając kąta B, czy zagadnienie jest możebne, i ile ma rozwiązań; dość tylko rozróżnić trzy przypadki.

1°. Gdy bok $a>b$, zagadnienie ma zawsze jedno rozwiązanie, i tylko jedno, jakikolwiek jest kąt A. Albowiem wtedy

$$\text{wst}B=\frac{b\,\text{wst}A}{a}<1 \quad \text{i} \quad \text{wst}B<\text{wst}A:$$

zkąd, nazywając B kąt ostry i B' jego spełnienie, wynika

$$B<A, \quad \text{i} \quad B<180^0-A \quad \text{albo} \quad B'>A.$$

To pokazuje że tylko kąt ostry B czyni $A-B>0$, to jest daje różnicy $A-B$ znak różnicy $a-b$; więc w tym przypadku istnieje zawsze jeden trójkąt rozwiązujący zagadnienie.

2° Gdy $a=b$, wtedy formuła (1) daje $\text{wst}B=\text{wst}A$. Więc, jeśli kąt A jest ostry, trójkąt równoramienny, w którym $A=B$, rozwiązuje zagadnienie; a jeśli kąt A nie jest ostry, trójkąt nie istnieje.

3°. Gdy $a<b$, możebność trójkąta wymaga żeby $A<B$;

więc kąt A musi być ostry. Jeśli temu warunkowi staje się zadość, zagadnienie ma dwa rozwiązania albo tylko jedno, albo nie ma żadnego, według jak $\frac{b \operatorname{wst} A}{a} < 1$ albo $= 1$, albo > 1.

Jakoż, jeśli $\operatorname{wst} B = \frac{b \operatorname{wst} A}{a} < 1$, wtedy $\operatorname{wst} B > \operatorname{wst} A$; zatem, ponieważ kąt A jest ostry z założenia, mamy

$$B > A, \quad \text{i} \quad 180^0 - B > A \quad \text{albo} \quad B' > A;$$

Widzimy zaraz że różnice $A - B$ i $A - B'$ są obie odjemne, mają przeto znak różnicy $a - b$. Więc istnieje dwa trójkąty rozwiązujące zagadnienie.

Jeden z tych trójkątów ma

kąt ostry B, kąt $C = 180^0 - (A + B)$, i bok $c = \frac{a \operatorname{wst}(A + B)}{\operatorname{wst} A}$;

drugi trójkąt ma

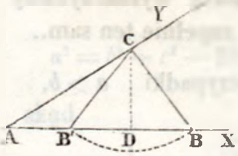
kąt rozwarty $B' = 180^0 - B$, kąt $C' = 180^0 - (A + B') = B - A$, i bok $c' = \frac{a \operatorname{wst}(B - A)}{\operatorname{wst} A}$.

Ta okoliczność dwóch rozwiązań, zarówno możebnych, stanowi *przypadek wątpliwy*.

Jeśli $\frac{b \operatorname{wst} A}{a} = 1$, wtedy $B = 90^0$; więc, przypuszczając kąt A ostry, będzie $A - B < 0$, i trójkąt prostokątny ABC rozwiązuje zagadnienie.

Nakoniec, jeśli $\frac{b \operatorname{wst} A}{a} > 1$, zagadnienie jest niemożebne.

To co poprzedza przedstawia się jasno geometrycznie. Jakoż,



wykreślmy kąt XAY równy danemu A, na ramieniu AY weźmy długość AC równą bokowi b, i spuśćmy prostopadłę CD na AX. Jeśli z punktu C jako środka i promieniem równym bokowi a, nakreślimy łuk koła, ten łuk przetnie ramie AX w dwóch punktach B, B′, równo oddalonych od spodka prostopadłej CD, albo dotknie tego ramienia w punkcie D, albo go nie spotka w żadnym, według jak bok a, mniejszy od pochyłej b, jest większy od prostopadłej CD albo jej równy, albo od niej mniejszy. Co oczywiste.

Długość prostopadłej CD wyraża się w funkcyi boku b i kąta A, albowiem trójkąt prostokątny ACD daje

$$\mathrm{CD} = \mathrm{AC}\,\mathrm{wst}\mathrm{A} = b\,\mathrm{wst}\mathrm{A}\,.$$

Ta formuła istnieje zawsze jakikolwiek jest kąt A,

134. Nie trudno znaleźć wprost bok c w funkcyi części danych a, b, A. Jakoż, równanie

$$(1) \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\mathrm{dos}\mathrm{A}$$

daje $$c = b\,\mathrm{dos}\mathrm{A} \pm \sqrt{a^2 - b^2\mathrm{wst}^2\mathrm{A}}\,.$$

Aby przekształcić tę formułę na wyrachowalną przez logarytmy, trzeba użyć kąta posiłkowego; a ponieważ $b\,\mathrm{wst}\,\mathrm{A} \leq a$, bez czego bok c byłby urojony, najprościej jest położyć

$$b\,\mathrm{wst}\mathrm{A} = a\,\mathrm{wst}\varphi\,, \qquad \text{zkąd} \qquad b = \frac{a\,\mathrm{wst}\varphi}{\mathrm{wst}\,\mathrm{A}}\,.$$

Podstawiając te wartości, otrzymamy

$$c = \frac{a\,\mathrm{wst}\varphi\,\mathrm{dos}\mathrm{A}}{\mathrm{wst}\mathrm{A}} \pm a\,\mathrm{dos}\varphi = \frac{a}{\mathrm{wst}\mathrm{A}}\,\mathrm{wst}\,(\varphi \pm \mathrm{A}).$$

Kąt φ jest oczywiście ten sam co B; zatem $180^\circ - (\varphi + \mathrm{A}) = \mathrm{C}$ i $\varphi - \mathrm{A} = \mathrm{C}'$. Widzimy więc że powyższa formuła w niczem się nie różni od tej za pomocą której wyznaczyliśmy boki c i c'. Rachunek logarytmiczny jest zupełnie ten sam..

Uwaga. Możnaby, odróżniając trzy przypadki $a > b$, $a = b$, $a < b$, dyskutować równanie

$$c^2 - 2bc\,\mathrm{dos}\mathrm{A} + b^2 - a^2 = 0\,.$$

i łatwo otrzymać te same warunki możebności zagadnienia któreśmy innym sposobem znaleźli. Tę dyskussyę polecamy początkującemu czytelnikowi na ćwiczenie.

135. Znając, w funkcyi części danych a, b, A, podstawę trójkąta $c = b\,\text{dos}A \pm \sqrt{a^2 - b^2\,\text{wst}^2 A}$ i odpowiedającą wysokość $CF = b\,\text{wst}A$, mamy powierzchnię

$$S = \frac{b\,\text{wst}A}{2}\left(b\,\text{dos}A \pm \sqrt{a^2 - b^2\text{wst}^2 A}\right).$$

136. Czwarty przypadek. *Mając dane trzy boki* a, b, c, *wyrachować kąty* A, B, C.

Równanie
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{dos}A$$

wyznacza kąt A przez dostawę, to jest daje

$$\text{dos}A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

Ta formuła wymagałaby dość mozolnych rachunków; dla znalezienia dos A, ale, uważajmy że

$$\text{dos}A = 1 - 2\text{wst}^2\frac{1}{2}A = 2\text{dos}^2\frac{1}{2}A - 1.$$

Podstawiając w pierwsze równanie wartość

$\text{dos}A = 1 - 2\text{wst}^2\frac{1}{2}A$, znajdziemy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc + 4bc\,\text{wst}^2\frac{1}{2}A = (b-c)^2 + 4bc\,\text{wst}^2\frac{1}{2}A,$$

zkąd

$$\text{wst}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}}.$$

Można tę formułę uprościć. Jakoż, niech będzie jako zwykle

$$a + b + c = 2p$$

zkąd

$$a + b - c = 2(p - c)$$

$$a + c - b = 2(p - b)$$

$$b + c - a = 2(p - a);$$

więc

(1) $$\text{wst}\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Jeśli poniesiemy drugą wartość $\text{dos}\,A = 2\,\text{dos}^2\frac{1}{2} - 1$ do pierwszego równania, będziemy mieli

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - 4bc\,\text{dos}^2\frac{1}{2}A;$$

ztąd

$$\text{dos}\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}$$

albo

(2) $$\text{dos}\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Dzieląc teraz stronami równanie (1) przez (2), otrzymamy

(3) $$\text{sty}\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

W każdej z trzech formuł trzeba brać pierwiastnik ze znakiem $+$, bo kąt $\frac{1}{2}A$ jest ostry; zatem wszystkie trzy linie trygonometryczne są dodatne. Sam kształt formuł jasno pokazuje jaką przemianą liter wywodzi się z nich podobne formuły do wyrachowania kątów $\frac{1}{2}B$ i $\frac{1}{2}C$. I tak, ograniczając się na ostatniej, mamy

$$\operatorname{sty}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{sty}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Ztąd prawidło : *aby otrzymać styczną połowy kąta, odciągnij naprzemian każdy z boków kąta od połobwodu; podziel wieloczyn reszt przez wieloczyn z tego połobwodu i z jego przewyżki nad bokiem przeciwległym kątowi; wyciągnij nakoniec pierwiastek kwadratowy z ilorazu.*

Jeśli chcemy znać tylko jeden kąt trójkąta, obojętną jest rzeczą użyć którejkolwiek z trzech formuł (1), (2), (3); bo każda wymaga czterech logarytmów, chociaż ściśle mówiąc, rachunek dostawy jest najprostszy w tym razie. Ale, jeśli trzeba wyrachować wszystkie kąty, wtedy, bez wątpienia, formuła (3) jest najdogodniejsza, albowiem potrzebuje tylko czterech logarytmów; gdy tymczasem formuła (1) wymaga sześciu, a formuła (2) siedmiu logarytmów.

Jest więcej jeszcze. Rachunek trzech kątów przez styczne, może się znacznie uprościć. Jakoż, uważajmy że

$$\operatorname{sty}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b(p-c)}{p}}$$

Nazywając r wartość pierwiastnika, który oczywiście jest ten sam dla wszystkich trzech kątów, i wyraża, jako później zobaczymy, promień koła wpisanego, będziemy mieli

$$\operatorname{sty}\frac{1}{2}A=\frac{r}{p-a},\quad \operatorname{sty}\frac{1}{2}B=\frac{r}{p-b},\quad \operatorname{sty}\frac{1}{2}C=\frac{r}{p-c}.$$

Więc

$$\log \operatorname{sty} \frac{1}{2} A = \log r - \log (p-a),$$

$$\log \operatorname{sty} \frac{1}{2} B = \log r - \log (p-b),$$

$$\log \operatorname{sty} \frac{1}{2} C = \log r - \log (p-c).$$

Widzimy teraz że, tak działając, skróca się o wiele rachunek kątów.

Dyskussya. Wiadomo że nie można zawsze utworzyć trójkąta z trzech boków wziętych dowolnie. Ale, jeśli trzy boki a, b, c, naturalnie dodatne, zadość czynią jednej z trzech formuł (1), (2), (3), trójkąt jest możebny.

1°. Uważajmy wst $\frac{1}{2}$A. Aby ta linia istniała, trzeba żeby jej wartość była rzeczywista i mniejsza od jedności; co wymaga żeby iloraz $\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ był dodatny i mniejszy od jedności. Owoż, pierwszemu warunkowi staje się zadość, jeśli czynniki $p-b$, $p-c$ są oba tego samego znaku; a że nie mogą być obydwa odjemne, bo ich summa jest a, więc musi być $p > b$ i $p > c$; zkąd $b < a + c$ i $c < a + b$.

Nadto, z nierówności $(p-b)(p-c) < bc$ wynika $p^2 - (b+c)p < 0$, albo $p < b + c$, co daje $a < b + c$.

Znajdujemy tym sposobem że każdy bok trójkąta, o którym mowa, jest mniejszy od summy dwóch innych; więc ten trójkąt istnieje.

2°. Dla rzeczywistości dos $\frac{1}{2}$A, trzeba najpierwej żeby $p - a > 0$, co daje $a < b + c$; a potem trzeba żeby $p(p-a) < bc$ to jest $(a+b+c)(b+c-a) < 4bc$, albo $(b+c)^2 - a^2 < 4bc$, albo jeszcze $a^2 > (b-c)^2$.

Więc bok a powinien być mniejszy od summy dwóch innych i większy od różnicy. To są właśnie warunki możebności trójkąta.

3°. Żeby $\text{sty}\frac{1}{2}A$ była rzeczywista, wszystkie trzy czynniki $p-a, p-b, p-c$ powinny być dodatne, albo jeden dodatny i dwa odjemne. A ponieważ ostatni przypadek nie może mieć miejsca, jakośmy już widzieli, musi tedy być

$$a < b + c, \quad b < a + c \quad \text{i} \quad c < a + b.$$

Co właśnie dowodzi że trójkąt istnieje.

Uwaga. Mnożąc formuły (1) i (2) między sobą, znajdujemy następującą, często użyteczną

$$\text{wst}A = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc} \tag{4}$$

137. Do wyznaczenia powierzchni trójkąta w funkcyi trzech boków, mamy

$$S = \frac{ab}{2}\,\text{wst}C$$

Owoż, formuła (4) poprzedzającej uwagi daje

$$\text{wst}C = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

więc, podstawiając, otrzymujemy

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

ZASTOSOWANIA LICZEBNE.

138. Dla pokazania jak, w rozwiązywaniu trójkątów, wykonywa się liczebne rachunki przez logarytmy, dajemy przykład jednego przypadku trójkątów prostokątnych, i przykład każdego ze czterech przypadków trójkątów jakichkolwiek, dołączając ich powierzchnie.

Ogólnie mówiąc, w zastosowaniach liczebnych dogodniej jest brać logarytmy takie jakie są w tablicach, to jest zwykle powiększone liczbą 10. Nie trzeba się obawiać błędów którebу popełniono zapominając o tem powiększeniu; bo błąd 10 jednoości na logarytmie liczby wprowadza albo znosi czynnik 10^{10}, a oczywiście tak znaczny błąd nie może zostać niepostrzeżony.

Pierwszy przykład. *Są dane*

$$A = 90^0, \quad B = 54^0\,36'\,29'',48, \quad a = 1869,365$$

wyrachować b, c, C.

Mamy zaraz $C = 90^0 - B = 35^0\,23'\,30'',12$. Rachunek boków b i c wykonywa się wedle następujących wzorów.

Rachunek boku b.

$$b = a\,\mathrm{wst}B$$

log a	. . . .	3,2716942
log wstB	. . .	9,9112698
log b	. . . .	3,1829640

$b = 1523^m,926$

Rachunek boku c.

$$c = a\,\mathrm{dos}B$$

log a	. . . .	3,2716942
log dosB	. . .	9,7628008
log c	. . . .	3,0344950

$c = 1082^m,667$.

Sprawdzenie. Można ze znalezionych wartości log b, log c wyprowadzić kąt C.

$$\mathrm{sty}C = \frac{c}{b}$$

log c	. . . .	3.0344949
log b	. . . .	3,1829639
log styC	. . .	9,8515310

$C = 35^0\,23'\,30'',24$

Rachunek powierzchni

$$S = \frac{a^2}{4}\,\mathrm{wst}2B$$

log wst2B albo

log dos(2B − 90⁰)	. .	9,9751019
2 log a	. . .	6,5433884
— log 4	. . . .	$\bar{1}$,3979400
log S	. . . .	5,9164303

$S = 824955^{mk},1$

DRUGI PRZYKŁAD. *Są dane*

$a = 10799^m,88$ $\quad$ $B = 108^0\,25'\,44'',6$ $\quad$ $C = 33^0\,22'\,55'',4$

wyrachować b, c, A.

Mamy najpierwej $A = 180^0 - B - C = 38^0\,11'\,20'$

Rachunek boku b.		*Rachunek boku c.*	
$b = \frac{a \,\mathrm{wst B}}{\mathrm{wst A}}$		$c = \frac{a\,\mathrm{wst C}}{\mathrm{wst A}}$	
log a	4,0334189	log a	4,0334189
log wst B albo		log wst C . .	9,7405358
log dos (B—90°) . . .	9,9771362	D^c log wst A . .	0,2088317
D^c log wst A . . .	0,2088317		
log b	4,2193868	log c	3,9827864
$b = 16572^m,45$.		$c = 9611^m,397$	

Sprawdzenie. Biorąc formułę (n° 127)

$$\mathrm{wst}\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{(b-c)\,\mathrm{dos}\,\frac{1}{2}A}{a}$$

można mieć próbę powyższych rachunków.

log dos $\frac{1}{2}$A . . .	9,9754229
log $(b-c)$ . . .	3,8426748
D^c log a	5,9665811
log wst $\frac{1}{2}$(B — C) . .	9,7846788
$\frac{1}{2}$(B—C) = 37° 31′ 24″,45	

Rachunek powierzchni

$$S = \frac{a^2 \mathrm{wst B}\,\mathrm{wst C}}{2 \mathrm{wst A}}$$

2 log a	8,0668378
log wst B . . .	9,9771362
log wst C . .	9,7405358
—log wst A . .	0,2088317
— log 2	$\bar{1}$,6989701
log S	7,6923116

$S = 49\,239\,272^{mk}$

na mniej niż dekametr kwadratowy.

TRZECI PRZYKŁAD. *Są dane*

$a = 4567^m,89$ $\quad$ $b = 3579^m,24$ $\quad$ $C = 45^0\,36'\,28'',7$

wyrachować c i A, B.

Rachunek kąta $\frac{1}{2}(A - B)$

$$\text{sty}\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\,\text{dot}\frac{1}{2}C$$

$a-b$	988,65	$\log \text{dot} \frac{1}{2}C$ . . .	0,3762927
$a+b$	8147,13	$\log(a-b)$ . . .	2,9950426
$\frac{1}{2}C$	$22^0\,48'\,14'',35$	$D^c\log(a+b)$ . .	6,0889954
		$\log \text{sty} \frac{1}{2}(A-B)$ . .	9,4603307

$$\tfrac{1}{2}(A-B) = 16^0\,5'\,57'',66$$

Rachunek kątów A i B

$$\tfrac{1}{2}(A+B) = 67^0\,11'\,45'',65$$
$$\tfrac{1}{2}(A-B) = 16^0\,5'\,57'',66$$
$$A = 83^0\,17'\,43'',31$$
$$B = 51^0\,5'\,47'',99.$$

Rachunek boku c

$$c = \frac{(a+b)\,\text{wst}\,\frac{1}{2}C}{\text{dos}\,\frac{1}{2}(A-B)}$$

$\log(a+b)$	3,9110046
$\log \text{wst} \frac{1}{2}C$	9,5883611
$D^c\log \text{dos}\frac{1}{2}(A-B)$ . . .	0,0173750
$\log c$	3,5167407

$$c = 3286^m,554$$

UWAGA. Trzeba sprawdzić rachunki, szukając naprzykład kąta C przez formułę $\text{dos}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.

Rachunek powierzchni.

$$S = \frac{ab\,\mathrm{wst}C}{2}.$$

log a	3,6597157
log b	3,5537909
log wstC	9,8540287
— log 2	$\bar{1}$,6989701
logS	6,7665054

$$S = 5\,841\,244^{mk}$$

na mniej niż metr kwadratowy.

Czwarty przykład. *Są dane*

$a = 9876^m,54$ $b = 10701^m,25$ $A = 23^\circ 27' 25'',46$

wyrachować c i B, C

Ponieważ $a < b$, i $A < 90^\circ$, zdarza się właśnie przypadek wątpliwy; może więc być dwa rozwiązania albo tylko jedno, a nawet może nie być żadnego, według jak wstB jest rzeczywista albo urojona.

Rachunek kąta B

$$\mathrm{wst}B = \frac{b\,\mathrm{wst}A}{a}$$

log wstA	9,5999506
log b	4,0294345
D·log a	6,0053951
log wstB	9,6347802.

Są więc dwa rozwiązania

$B = 25^\circ 33' 0'',5$ i $B' = 154^\circ 26' 59'',5$

Pierwsze rozwiązanie.

$$A = 23^\circ 27' 25'',46$$
$$B = 25^\circ 33' \; 0'',5$$
$$A + B = 49^\circ \; 0' 25'',96$$
$$C = 130^\circ 59' 34'',04$$

Rachunek boku c.

$$c = \frac{a \operatorname{wst} C}{\operatorname{wst} A}$$

$\log a$	3,9946049
$\log \operatorname{wst} C$	9,8778274
$D^e \log \operatorname{wst} A$ . . .	0,4000494
$\log c$	4,2724817

$$c = 18727^m,58$$

Drugie rozwiązanie.

$$A = 23^\circ 27' 25'',46$$
$$B' = 154^\circ 26' 59'',5$$
$$A + B' = 177^\circ 54' 24'',96$$
$$C' = 2^\circ 5' 35'',04$$

Rachunek boku c′.

$$c' = \frac{a \operatorname{wst} C'}{\operatorname{wst} A}$$

$\log a$	3,9946049
$\log \operatorname{wst} C'$	8,5625638
$D^e \log \operatorname{wst} A$ . . .	0,4000494
$\log c'$	2,9572181

$$c' = 906^m,1875$$

Sprawdzenie. W trójkącie równoramiennym BCB′ podstawa BB′ równa się różnicy $c - c'$, a połowa tej podstawy jest $\frac{BB'}{2} = a \operatorname{dos} B$; owoż, mamy

$\log a$	3,9946049
$\log \operatorname{dos} B$	9,9552975
$\log \frac{BB'}{2}$	3,9499024;

więc $\frac{BB'}{2} = 8910,5$ a znalezione wartości dają $\frac{c - c'}{2} = 8910,6$. Te dwa wyniki, prawie równe, sprawdzają rozwiązania.

Uwaga. Gdy zagadnienie ma jedno tylko rozwiązanie, wtedy na sprawdzenie można wziąć formułę

$$b = \frac{(a - c) \operatorname{dos} \frac{1}{2} B}{\operatorname{wst} \frac{1}{2}(A - C)}.$$

Rachunek powierzchni.

$$S = \frac{ab}{2} \mathrm{wst}(B \pm A)$$

Powierzchnia S pierwszego trójkąta.		*Powierzchnia S′ drugiego trójkąta.*	
$\log a$	3,9946049	$\log a$	3,9946049
$\log b$	4,0294345	$\log b$	4,0294345
$\log \mathrm{wst} C$	9,8778274	$\log \mathrm{wst} C'$	8,5625638
$-\log 2$	$\bar{1}$,6989701	$-\log 2$	$\bar{1}$,6989701
$\log S$	7,6008369	$\log S'$	6,2855733

$S = 39\,887\,504^{m^2}$ na mniej niż dekametr kwadratowy.

$S' = 1\,930\,071^{m^2}$ na mniej niż metr kwadratowy.

Piąty przykład. *Są dane.*

$a = 1502^m,809$ $b = 1728^m,348$ $c = 1932,441$

wyrachować kąty i powierzchnię.

Rachunek przedwstępny.

$p = \frac{a+b+c}{2}$ . . .	2581,799	$\log(p-a)$	3,0330174
$p-a$	1078,99	$\log(p-b)$ . . .	2,9311786
$p-b$	853,451	$\log(p-c)$ . . .	2,8124840
$p-c$	649,358	$D^c \log p$	6,5880776
$\log p$	3,4119224	$\log r^2$	5,3647576

$$\log r = \log \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = 2,6823788.$$

Rachunek kąta A.

$$\operatorname{sty}\frac{1}{2}A=\frac{r}{p-a}.$$

$\log r$	2,6823788
$\log(p-a)$ . . .	3,0330174
$\log\operatorname{sty}\frac{1}{2}A$ . . .	9,6493614
$\frac{1}{2}A$	$24^0\,2'\,17'',42$

$$A=48^0\,4'\,34'',84$$

Rachunek kąta B.

$$\operatorname{sty}\frac{1}{2}B=\frac{r}{p-b}.$$

$\log r$	2,6823788
$\log(p-b)$ . . .	2,9311786
$\log\operatorname{sty}\frac{1}{2}B$ . . .	9,7512002
$\frac{1}{2}B$	$29^0\,25'\,6'',77$

$$B=58^0\,50'\,13'',54$$

Rachunek kąta C.

$$\operatorname{sty}\frac{1}{2}C=\frac{r}{p-c}.$$

$\log r$	2,6823788
$\log(p-c)$ . . .	2,8124840
$\log\operatorname{sty}\frac{1}{2}C$ . . .	9,8698948
$\frac{1}{2}C$	$36^0\,32'\,35'',80$

$$C=73^0\,5'\,11'',61$$

Sprawdzenie. $A+B+C=180^0$.

Rachunek powierzchni,

$$S=pr$$

$\log p$	3,4119224
$\log r$	2,6823788
$\log S$	6,0943012

$$S=1\,242510^{m^2},9$$

139. Zagadnienie. *Wyznaczyć promień koła, wiedząc że różnica między wycinkiem mającym kąt* 30^0 *i odpowiedającym trójkątem czyni metr kwadratowy.*

Nazwijmy R szukany promień. Powierzchnia wycinka mającego kąt 30^0 równa się $\frac{1}{12}\pi R^2$, a powierzchnia odpowiedającego trójkąta wyraża się przez $R\operatorname{wst}15^0.R\operatorname{dos}15^0$ albo przez $\frac{R^2}{2}\operatorname{wst}30^0=\frac{R^2}{4}$. Więc mamy

$$\frac{1}{12}\pi R^2-\frac{R^2}{4}=1\qquad\text{albo}\qquad(\pi-3)R^2=12\,;$$

zkąd

$$R = \sqrt{\frac{12}{0,14159...}}$$

Działając przez logarytmy, znajdujemy $R = 9^m, 20600..$

140. Zagadnienie. *Jaki powinien być promień koła, żeby różnica między łukiem długości* 1^m *i jego cięciwą była mniejsza od* $0^m,001$?

Jeśli oznaczymy przez R szukany promień, przez 2α kąt odpowiedający łukowi długości 1^m, ten łuk wyrazi się przez $2R\alpha$ a jego cięciwa przez $2R \operatorname{wst} \alpha$; zatem, podług warunków zagadnienia, będzie

$$2R\alpha - 2R \operatorname{wst}\alpha < 0,001$$

albo

$$\alpha - \operatorname{wst}\alpha < \frac{1}{2R.10^3}.$$

Owoż (89)

$$\alpha - \operatorname{wst}\alpha < \frac{\alpha^3}{6};$$

a ponieważ z założenia

$$2\alpha = \frac{1^m}{R},$$

podstawiając za α jego wartość $\frac{1}{2R}$, będzie,

$$\alpha - \operatorname{wst}\alpha < \frac{1}{6.8R^3}.$$

Więc, żeby rozwiązać zagadnienie, dość jest wziąć

$$\frac{1}{6.8R^3} \overline{<} \frac{1}{2R.10^3}$$

albo

$$R^2 \overline{>} \frac{10^3}{3.8}$$

zkąd

$$R > \frac{1^m}{3}\sqrt{375} > \frac{19^m,364\ldots}{3} > 6^m,454\ldots$$

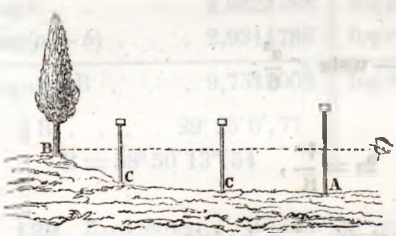
Więc, jeśli promień koła ma $6^m,455$, albo więcej, różnica między łukiem długości 1^m i jego cięciwą jest mniejsza od 1 millimetra.

ZDEJMOWANIE PLANÓW

141. Działania na gruncie wymagają żeby umiano 1°, *wytykać* linię prostą między dwoma danemi punktami, i *wymierzać* odległość tych dwóch punktów; 2°, wymierzać kąt dwóch linij prostych które łączą punkta leżące na gruncie.

O tyczkach i łańcuchu metrycznym. Wytyka się linię prostą za pomocą *tyczek mierniczych.* Tyczką mierniczą jest cienka żerdź kształtu *graniastonnego*, zakończona krańcem żelaznym, żeby ją łatwiej w ziemię utkwić można.

Do wytknięcia kierunku linii prostej, trzeba przynajmniej dwóch ludzi; jeden z nich staje tak żeby jego oko znajdowało się na płaszczyznie pionowej przechodzącej przez punkta A i B; a drugi wtyka, w pewnych odległościach między A i B, tyczki A, C, C,.. będące na tej samej płaszczyznie pionowej AB. Te tyczki, na wierzchołkach których powiewają zwykle chorągiewki, wskazują kierunek linii prostej AB.



Do wymierzenia odległości AB, używa się zazwyczaj *łańcucha metrycznego* długości 10 metrów. Ten łańcuch składa się z ogniw prostych, długich na 2 decymetry; każdy jego metr zawiera pięć

ogniw i jest oznaczony kółkiem mosiężnym. We środku łańcucha widać mały kawałek żelaza który wskazuje odległość pięciu metrów. Z przyczyny że nie można nigdy wytężyć łańcucha zupełnie w linii prostej, daje się łańcuchowi $0^m.2$ więcej niż 10 metrów. Tak sporządzony łańcuch bierze nazwisko *dekametra.*

Dwóch ludzi idzie z wyciągniętym łańcuchem w kierunku wytkniętej linii prostej od A do B. Ten który postępuje naprzód niesie dziesięć czopków żelaznych, które wtyka w ziemię, jeden po drugim, za każdym razem jak łańcuch jest wyciągnięty i ma obie skrajności na jednej linii poziomej, jakiekolwiek są nierówności gruntu. Po czem, łańcusznik który idzie wtyle podejmuje te czopki w miarę jak do nich przychodzi, i, ile ich ma na końcu działania, tyle razy było dziesięć metrów wymierzonych. Linia tak zmierzona na gruncie nazywa się *podstawą*.

Gdy chodzi o wymiar małych odległości, liniał drewniany długości dwóch metrów może korzystnie zastąpić łańcuch.

Wymierzenie podstawy jest jedną z najgłówniejszych rzeczy w działaniach trygonometrycznych, i dodajemy, jedną z najtrudniejszych; bo mnóstwo okoliczności fizycznych jest na przeszkodzie. Aby mieć wartość podstawy z zapewnionem przybliżeniem, powtarza się kilka razy jej mierzenie, robi się summę znalezionych wyników i dzieli się przez ich liczbę; tym sposobem otrzymuje się średnią wartość podstawy, dostatecznie przybliżoną.

Narzędzia do wymiaru kątów. Główne narzędzia służące do mierzenia wielkości kątów są: grafometr, bussola, teodolit, sextan, koło powtarzające i reflektor kołowy.

Samo proste widzenie tych narzędzi, mniej więcej zawile złożonych, daleko lepiej nauczy niż ich opis, choćby nawet najdrobniejsze zawierał szczegóły. Dlatego też odsyłamy czytelnika do dzieł specyalnych, jako *astronomia*, *geodezya*, *żegluga*, w których takowe narzędzia, grające ważną rolę, są przedstawione dokładnym i szczegółowym rysunkiem.

Przechodzimy teraz do zagadnień na gruncie, przypuszczając znajomość grafometru.

ZAGADNIENIE I. *Zmierzyć wysokość* AB *wieży.*

1°. Przypuśćmy najpierwej że podstawa wieży jest dostępna

i grunt płaski, a przynajmniej taki że można poprowadzić na nim linię prostą poziomą BE. Wtedy, wymierzywszy długość BE tej poziomej, stawia się grafometr w punkcie E, tak żeby jego koło stopniowane było na płaszczyznie pionowej która przechodzi przez punkt B; to koło daje kąt utworzony przez promień oczny DA z poziomą DC. Znając, w trójkącie prostokątnym ADC, bok DC i kąt ADC, łatwo się wyznaczy bok AC; po czem, dodając do AC wysokość DE narzędzia, otrzymuje się wysokość wieży.

Niech będzie na przykład $DE = 1^m,1$; $BE = 68^m,92$ i kąt $ADC = 46^0\ 19'\ 30''$.

Mamy

$$AC = CD \operatorname{sty} D.$$

$$\begin{array}{r} \log CD = 1,8383453 \\ \log \operatorname{sty} D = 0,0200938 \\ \hline \log AC = 1,8584391 \\ AC = 72,18369. \end{array}$$

Więc wysokość AB wieży jest $73^m,283$.

Jeśli stopa wieży jest niedostępna, ale grunt pozwala prowadzić linię prostą poziomą BCH która przechodzi przez oś wieży; wtedy obieramy na tej poziomej dwie stacye C i H; mierzymy podstawę CH, i, stawiając grafometr w punktach C i H, wymierzamy kąty ADE i AKE. To uczyniwszy, mamy wiadome, w trójkącie ADK, bok DK, kąt K i kąt A = ADE — K.

Zatem

$\measuredangle ADE = \measuredangle K + \measuredangle KAD$

$\measuredangle KAD(A) = \measuredangle ADE - \measuredangle K$

$$AD = \frac{DK \operatorname{wst} K}{\operatorname{wst} A}.$$

Po czem, trójkąt prostokątny ADE, w którym znana jest przeciwprostokątna AD i kąt ADE, daje

$$AE = AD \operatorname{wst} ADE.$$

Nakoniec, dodając wysokość narzędzia do znalezionej wysokości AE otrzymamy wysokość AB wieży.

3°. Jeśli stopa wieży nie jest dostępna, i grunt nie pozwala prowadzić linii prostej poziomej, przechodzącej przez oś wieży, wtedy wymierza się wysokość wieży sposobem który pokażemy w następującem zagadnieniu.

144. Uwaga. W działaniach na gruncie trzeba unikać kątów zbyt ostrych, albo blizkich $180°$; bo, na ich boki błąd nawet mały, popełniony na jednym z dwóch innych kątów trójkąta, sprowadza bardzo znaczne błędy; a punkt przecięcia się dwóch linij prostych pod kątem bardzo ostrym, albo bardzo rozwartym, źle się wyznacza. Żeby to jaśniej pokazać, weźmy powyższe zagadnienie, i przypuśćmy że popełniono błąd na samym tylko kącie D = ADE; oznaczając przez h prawdziwą wartość wysokości AE, przez $D+\alpha$ kąt wymierzony ADE, będzie:

$$h = DE \operatorname{sty} D, \quad AE = DE \operatorname{sty}(D+\alpha) = \frac{h \operatorname{sty}(D+\alpha)}{\operatorname{sty} D}.$$

Więc błąd δ, popełniony na mierzeniu wysokości AE, jest

$$\delta = \frac{h \operatorname{sty}(D+\alpha)}{\operatorname{sty} D} - h = \frac{h \operatorname{wst}\alpha}{\operatorname{dos}(D+\alpha) \operatorname{wst} D},$$

ztąd błąd względny

$$\frac{\delta}{h} = \frac{2 \operatorname{wst}\alpha}{\operatorname{wst}(2D+\alpha) - \operatorname{wst}\alpha}.$$

Przypuszczając że błąd α grafometru jest stały, widzimy że błąd względny $\frac{\delta}{h}$ będzie minimum gdy $\operatorname{wst}(2D+\alpha)$ będzie maximum; co się zdarzy jeśli $2D+\alpha = 90^\circ$. A ponieważ α jest bardzo małą ilością, więc, żeby błąd względny w mierzeniu wysokości wieży był najmniejszy możebny, trzeba żeby kąt zmierzony ADE miał blizko 45°.

143. Zagadnienie II. *Zmierzyć wysokość góry nad poziomem równiny.*

Na równinie bierzemy jakąkolwiek linię prostą CD której

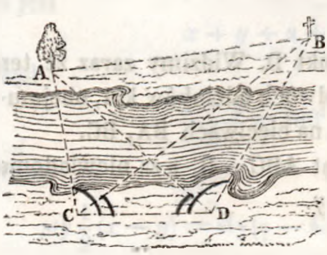
wyznaczamy długość, i przy obydwóch jej skrajnościach C i D mierzymy kąty SCD i SDC, utworzone przez tę prostę CD i przez promienie wodzące które łączą punkta C i D z wierzchołkiem S góry; nadto w punkcie C mierzymy kąt SCZ, utworzony przez wierzchołkowę CZ i promień wodzący CS. To uczyniwszy, otrzymujemy bok CS za pomocą trójkąta CSD, w którym znamy bok CD i dwa kąty przyległe C i D; poczem, trójkąt prostokątny ACS, w którym wiadoma jest przeciwprostokątna CS i kąt S = SCZ, daje AS = CS dos S. Bok AS jest wzniesieniem wierzchołka góry ponad poziom grafometru; więc, dodając wysokość narzędzia, będziemy mieli wysokość BS góry nad poziomem punktu C.

144. Zagadnienie III. *Wyznaczyć odległość punktu niedostępnego* A *od dostępnego* B, czyli, co to samo, *zmierzyć szerokość rzeki.*

Mierzymy, nad brzegiem rzeki, jakąkolwiek podstawę BC i dwa kąty przyległe ABC, ACB. Trójkąt ABC daje szukaną odległość

$$AB = \frac{BC \,\mathrm{wst} C}{\mathrm{wst} A}.$$

145. Zagadnienie IV. *Wyznaczyć odległość dwóch punktów niedostępnych ale widzialnych.*



Niech będą dwa punkta A i B, leżące na przykład z jednej strony rzeki a obserwator z drugiej. Aby wyznaczyć odległość AB, trzeba wymierzyć jakąkolwiek podstawę CD, kąty jej przyległe ACD, BCD, ADC, BDC, i do tego jeszcze kąt ACB. Trójkąty ACD i BCD dają długości AC i BC; więc, znając w trójkącie ABC dwa boki CA, CB i kąt zawarty C, można będzie wyrachować bok AB. W tem zagadnieniu boki AC i BC są dane przez ich logarytmy; aby uniknąć przejścia do liczb, trzeba użyć sposobu wskazanego w n° 128, który daje

$$\text{sty}\frac{1}{2}(A - B) = \text{sty}(\varphi - 45^0)\ \text{dot}\frac{1}{2}C;$$

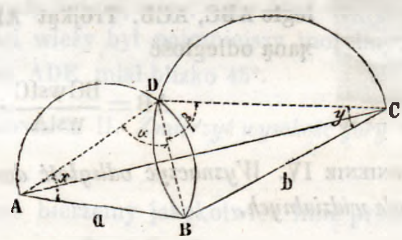
po czem, znając kąt BAC, otrzymuje się odległość AB przez proporcyę

$$AB = \frac{BC\,\text{wst}ACB}{\text{wst}BAC}.$$

Uwaga. Jeśli kąt ACB równa się różnicy kątów ACD i BCD, cztery punkta A, B, C, D leżą na jednej płaszczyźnie.

146. Zagadnienie V. *Mając dane trzy punkta* A, B, C *na gruncie płaskim, znaleźć na nim czwarty punkt D z którego widać odległość* AB *i* BC *pod kątami wiadomemi* α *i* β.

Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie, we-



wnątrz kąta ABC, szukany punkt D. Widzimy zaraz że ten punkt D jest na przecięciu się dwóch odcinków kół, obejmujących kąty α, β i nakreślonych na cięciwach BA, BC.

Uczyńmy $AB = a$, $BC = b$, kąt $ABC = B$, a za niewiadome weźmy kąty $BAD = x$ i $BCD = y$.

Trójkąty BDA i BDC dają

$$BD = \frac{a\,\text{wst}x}{\text{wst}\alpha} \quad \text{i} \quad BD = \frac{b\,\text{wst}y}{\text{wst}\beta};$$

zatem

$$\frac{a \,\mathrm{wst} x}{\mathrm{wst}\alpha} = \frac{b \,\mathrm{wst} y}{\mathrm{wst}\beta},$$

zkąd

$$\frac{\mathrm{wst} x}{\mathrm{wst} y} = \frac{b \,\mathrm{wst}\alpha}{a \,\mathrm{wst}\beta}.$$

Weźmy kąt posiłkowy φ taki żeby

$$\mathrm{sty}\varphi = \frac{b \,\mathrm{wst}\alpha}{a \,\mathrm{wst}\beta};$$

będziemy mieli

$$\frac{\mathrm{wst} x}{\mathrm{wst} y} = \mathrm{sty}\varphi,$$

zkąd

$$\frac{\mathrm{wst} x - \mathrm{wst} y}{\mathrm{wst} x + \mathrm{wst} y} = \frac{\mathrm{sty}\varphi - 1}{1 + \mathrm{sty}\varphi}$$

albo

$$\frac{\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(x-y)}{\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(x+y)} = \mathrm{sty}\,(\varphi - 45^0).$$

Teraz, jeśli punkt D jest wewnątrz kąta ABC, jako figura pokazuje, mamy czworobok ABCD, wypukły albo wklęsły, w którym summa kątów wewnętrznych czyni 4 kąty proste, to jest

$$x + y + \alpha + \beta + \mathrm{B} = 360^0;$$

zkąd

$$\frac{x+y}{2} = 180^0 - \frac{\alpha + \beta + \mathrm{B}}{2}.$$

Więc

$$\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(x-y) = \mathrm{sty}\,(\varphi - 45^0)\,\mathrm{sty}\left(180^0 - \frac{\alpha+\beta+\mathrm{B}}{2}\right).$$

Ta formuła daje $\frac{1}{2}(x-y)$; a że znamy $\frac{1}{2}(x+y)$, więc kąty x i y są wyznaczone i temsamem punkt D.

Dyskussya. Druga strona powyższego równania może być 0, $0.\infty$, albo ∞; zobaczmy tedy co znaczą te symboliczne wyrażenia.

1^0. Jeśli $\operatorname{sty}(\varphi - 45^0) = 0$ i $\operatorname{sty}\left(180^0 - \frac{\alpha+\beta+B}{2}\right)$ zostaje ilością skończoną, wtedy $\varphi = 45^0$ co daje $\operatorname{wst} x = \operatorname{wst} y$. Zatem, albo $x = y$, albo $x + y = 180^0$. Owoż, drugie przypuszczenie jest niemożebne z przyczyny założenia $\alpha+\beta+B \lessgtr 180^0$; więc kąty x i y są równe. Nadto, z warunku $\varphi = 45^0$ wynika $b \operatorname{wst}\alpha = a \operatorname{wst}\beta$ albo $\frac{a}{\operatorname{wst}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{wst}\beta}$. To równanie pokazuje że koła, których odcinki nakreślone na cięciwach a, b obejmują kąty α, β, są równe.

2^0. Jeśli $\operatorname{sty}\left(180^0 - \frac{\alpha+\beta+B}{2}\right) = 0$, wtedy $\alpha+\beta+B = 360^0$; to znaczy że, gdy cięciwa spólna BD maleje aż do zera, odcinki kół obejmujące kąty α i β stają się stycznemi zewnętrznie w punkcie B, jako na *fig.* 1. Więc punkt D schodzi się z B, i czworobok ABCD staje się linią łamaną ABC; w tym przypadku $x = 0$ i $y = 0$, jakikolwiek jest kąt φ między 0^0 i 90^0.

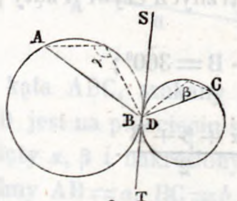


fig 1.

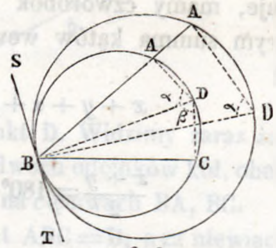


fig 2.

3^0. Jeśli $\operatorname{sty}\left(180^0 - \frac{\alpha+\beta+B}{2}\right) = \infty$ i $\operatorname{sty}(\varphi - 45^0) = 0$, wtedy $\alpha + \beta + B = 180^0$ i $\varphi = 45^0$. W tym przypadku zagadnienie jest niewyznaczone. Jakoż, pierwsze równanie pokazuje że $\alpha + \beta + B\ 180^0$: co dowodzi że odcinki kół, nakreślone na cięciwach BA, BC i obejmujące kąty α i β, są styczne wewnętrznie w punkcie B, (*fig* 2) Ale drugie równanie daje

$$\frac{b\,\mathrm{wst}\alpha}{a\,\mathrm{wst}\beta} = 1 \quad \text{albo} \quad \frac{a}{\mathrm{wst}\alpha} = \frac{b}{\mathrm{wst}\beta},$$

i trójkąt ABC daje także

$$\frac{AB}{\mathrm{wst}C} = \frac{BC}{\mathrm{wst}A} \quad \text{albo} \quad \frac{a}{\mathrm{wst}C} = \frac{b}{\mathrm{wst}A};$$

więc

$$\frac{\mathrm{wst}\alpha}{\mathrm{wst}C} = \frac{\mathrm{wst}\beta}{\mathrm{wst}A},$$

zkąd

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(C-A)}{\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(C+A)}.$$

Nadto, z dwóch równości

$$\alpha + \beta + B = 180^0 \quad \text{i} \quad A + B + C = 180^0$$

wynika

$$(2) \qquad \alpha + \beta = A + C,$$

temsamem

$$\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(A + C).$$

Więc na mocy równania (1) będzie

$$\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(C - A);$$

ztąd

$$(3) \qquad \alpha - \beta = C - A.$$

Równania (2) i (3) dają

$$\alpha = C \quad \text{i} \quad \beta = A.$$

Ten wynik pokazuje że odcinki kół, styczne wewnętrznie w punkcie B, należą do jednego koła; czyli innemi słowy, czworobok ABCD jest wpisalny, i szukany punkt D jest jakimkolwiek punktem łuku AC koła opisanego.

4° Jeśli $\operatorname{sty}\left(180^0 - \frac{\alpha + \beta + B}{2}\right) = \infty$ i $\operatorname{sty}(\varphi - 45^0) \gtrless 0$, zagadnienie jest niemożebne; bo, pierwsze równanie pokazuje że odcinki kół, obejmujące kąty α i β, są styczne wewnętrznie w punkcie B (*fig.* 2); a drugie że te odcinki, nie mając promieni równych, nie należą do jednego koła.

147. Uwaga. Można szukać punktu D w kącie A'BC' który

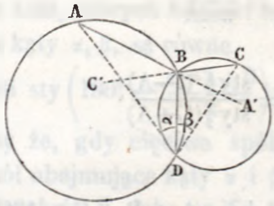


fig 1.

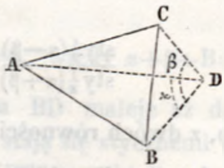


fig 2.

jest wierzchołkiem przeciwległy kątowi ABC, *fig.* 1. Jeśli taki punkt istnieje, ponieważ kąt ADC musi być mniejszy od kąta ABC, trzeba dla możebności zagadnienia żeby $\alpha + \beta < B$. Ten warunek jest oczywiście dostateczny.

Żądany punkt D może się jeszcze znajdować zewnątrz trójkąta ABC w kącie A, *fig.* 2. Jakoż, przypuszczając że tak jest, będzie kąt $ADB = \alpha$ i kąt $BDC = \beta$; zatem kąt $ADC = \beta - \alpha$. Więc zagadnienie przywodzi się do następującego:

Znaleźć punkt D *z którego widać odległości* AB *i* AC *pod kątami wiadomemi* α *i* $\beta - \alpha$.

Możebność nowego zagadnienia wymaga żeby było:

$$\beta > \alpha \quad \text{i} \quad \alpha + (\beta - \alpha) + A < 360^0 \quad \text{albo} \quad \beta + A < 360^0.$$

Pierwszy warunek jest oczywiście dostateczny.

Rozumując jako wyżej, łatwo zobaczymy że ostatnie zagadnienie jest niewyznaczone jeśli $\beta + A = 180^0$ i $\varphi = 45^0$; a niemożebne, jeśli $\beta + A = 180^0$ i $\varphi \gtrless 45^0$.

Żeby punkt D mógł się znajdować w kącie wierzchołkiem przeciwległym kątowi A, powinno być

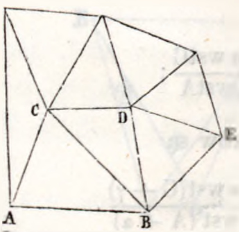
$$\beta > \alpha \quad \text{i} \quad \beta < A.$$

Nakoniec, jeśli znaleziono rzeczony punkt D zewnątrz trójkąta ABC w kącie A, niema już potrzeby szukać podobnego w kącie C; bo nie istnieje, dlatego że trzebaby $\alpha > \beta$; co się sprzeciwia powyższemu.

Gdy $\alpha = \beta$, w tym szczególnym przypadku, zewnątrz trójkąta ACB i na linii AC są dwa punkta D, albo tylko jeden, albo niema żadnego, według jak kąt α jest mniejszy od obydwóch kątów A i C, od jednego tylko, albo większy od każdego

TRÓJKĄTOWANIE.

148. Miary ziemskie mają za przedmiot wyznaczenie względnych odległości między punktami leżącemi na powierzchni ziemi. Niech będą A, B, C, D... punkta których trzeba wymierzyć odległości względne AB, AC, CE,.. Aby otrzymać te odległości, łączy się dane punkta po dwa liniami prostemi które tworzą *sieć* trójkątów (*sieć geodezyjną*). Po czem, wymierzywszy tylko jedną z tych linij, i w każdym trójkącie dwa kąty, można, idąc od jednego trójkąta do sąsiednich, wyznaczyć wszystkie ich części. To działanie nazywa się *trójkątowaniem*. Wykonawszy je, nie trudno otrzymać odległość dwóch którychkolwiek punktów A, B, C,.. albo długość linii prostej idącej od jednego z nich w kierunku



wyznaczonym; dość obliczyć, jedną po drugiej, wszystkie części tej linii zawarte w różnych trójkątach.

Trójkątowanie służy zwykle do utworzenia mappy albo do zdjęcia planu danej okolicy. W tym celu, ponieważ punkta A, B, C, D... nie leżą na jednej płaszczyznie poziomej, rzutuje się je na takiej płaszczyznie w punktach A′, B′, C′... i uważa się sieć utworzoną przez rzuty A′B′, A′C′, C′D′... Kąt dwóch boków A′B′ i A′C′ tej sieci, jako B′A′C′, jest kątem płaszczyzn pionowych poprowadzonych przez te boki; otrzymuje się go za pomocą narzędzia zwanego *teodolitem*. Kąt B′A′C′ jest to, jako się mówi, kąt BAC *przywiedziony do poziomu*. Jeśli bok sieci który się wymierza na gruncie nie jest poziomy, trzeba go przyprowadzić rachunkiem do poziomu, albo wprost wymierzyć trzymając łańcuch poziomo.

149. Tworząc sieć geodezyjną, naturalnie nastręcza się zaraz pytanie : *jaki jest trójkąt najkorzystniejszy w którym błędy, popełnione na kątach, wpływają ile być może najmniej na dwa boki wyrachować się mające?*

Aby odpowiedzieć na to pytanie, nazwijmy a bok służący za podstawę, wymierzony z takiem przybliżeniem żeby go można uważać za dokładny; niech będą α, β, γ błędy popełnione na kątach A, B, C obserwowanych. Wartości wyrachowane boków b i c będą

$$b = \frac{a \operatorname{wst} B}{\operatorname{wst} A} \quad \text{i} \quad c = \frac{a \operatorname{wst} C}{\operatorname{wst} A};$$

zaś prawdziwe wartości tych dwóch boków są

$$b = \frac{a \operatorname{wst}(B+\beta)}{\operatorname{wst}(A+\alpha)} \quad \text{i} \quad c = \frac{a \operatorname{wst}(C+\gamma)}{\operatorname{wst}(A+\alpha)}.$$

Zatem błąd popełniony na wyrachowanym boku b jest

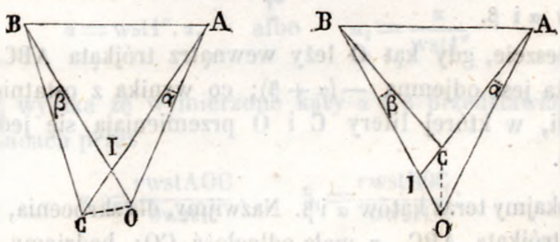
$$a\left(\frac{\operatorname{wst}(B+\beta)}{\operatorname{wst}(A+\alpha)} - \frac{\operatorname{wst} B}{\operatorname{wst} A}\right)$$

Owoż, doświadczenie pokazało że błędy α i β, popełnione na kątach, nie zależą od ich wielkości, i są niemal ściśle te same, to jest równej wielkości i jednej natury. Biorąc tedy $\beta = \alpha$, znajdziemy że błąd popełniony na boku b jest

$$a \,\mathrm{wst}\,\alpha \left(\frac{\mathrm{wst}A \,\mathrm{dos}B - \mathrm{dos}A \,\mathrm{wst}B}{\mathrm{wst}A \,\mathrm{wst}\,(A+\alpha)} \right) = \frac{a \,\mathrm{wst}\,\alpha \,\mathrm{wst}(A-B)}{\mathrm{wst}A \,\mathrm{wst}\,(A+\alpha)}.$$

Widzimy teraz łatwo że, im mniejsza jest różnica między kątami A i B, tem mniejszy będzie błąd wyrachowanego boku b. Więc ten błąd będzie prawie żaden jeśli $A = B$. Rachunek boku c wymaga żeby $A = C$. Więc trójkąt najkorzystniejszy dla sieci geodezyjnej jest *równoboczny*.

150. Uwaga. W działaniach geodezyjnych na wielkie rozmiary, wierzchołki trójkątów sieci są zwykle punktami wzniesionemi wysoko, jako naprzykład kopuły kościołów, szczyty wież, albo wierzchy gór, na których utkwiono tyczki ze znakami widzialnemi zdaleka. W takich trójkątach, nie mogąc postawić koła powtarzającego na wierzchołku kąta który zmierzyć wypada, stawia się je na miejscu dogodnem, ile można najbliższem. Mierząc więc, nie sam kąt ale kąt przybliżony, trzeba dodać pewną poprawkę która się nazywa *przywiedzeniem kąta do środka stanowiska.*



Niech będzie ABC jeden z trójkątów sieci, C kąt którego chcemy znaleźć wielkość, i w pobliżu wierzchołka C punkt O na którym stawiamy narzędzie. Chodzi o to jak, z wymierzonego kąta O, wyprowadzić kąt C z przybliżeniem dostatecznem. Oznaczmy przez α i β kąty OAC i OBC, przez I punkt przecięcia ramion AC i BO.

Biorąc punkt O zewnątrz kąta C (*fig. pierwsza*), mamy w dwóch trójkątach IAO, IBC,

$$\text{kąt}\,AIB = O + \alpha = C + \beta\,,$$

zkąd

$$C = O + \alpha - \beta.$$

Więc, żeby wyznaczyć kąt C, trzeba do wymierzonego kąta O dodać poprawkę

$$\varepsilon = \alpha - \beta$$

która może być dodatna albo odjemna, i nawet zero gdy punkt O znajduje się na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Jeśli wzięto punkt O między przedłużonemi ramionami kąta C (*fig. druga*), będzie

$$\text{kąt}\,AIB = O + \alpha = ACB - \beta\,,$$

zkąd

$$C = O + \alpha + \beta.$$

w tym razie poprawka kąta O jest dodatna i równa summie kątów α i β.

Nareszcie, gdy kąt O leży wewnątrz trójkąta ABC, poprawka jest odjemna $-(\alpha+\beta)$; co wynika z ostatniej równości, w której litery C i O przemieniają się jedna za drugą.

Szukajmy teraz kątów α i β. Nazwijmy, dla skrócenia, a, b, c boki trójkąta ABC, r małą odległość CO; będziemy mieli, w dwóch trójkątach OCA, OCB,

$$\frac{\text{wst}\alpha}{r} = \frac{\text{wst}AOC}{b}\,,\quad \frac{\text{wst}\beta}{r} = \frac{\text{wst}BOC}{a}.$$

Owoż, różnica między łukiem bardzo małym i jego wstawą jest ilością bardzo małą względem wielkości tego kąta; można więc, z błędem zaniedbalnym, zastąpić wstα i wstβ przez łuki α i β. Tym sposobem powyższe proporcye dają

$$\alpha = \frac{r\text{wst}AOC}{b}, \quad \beta = \frac{r\text{wst}BOC}{a}.$$

W zastosowaniach praktycznyh, kąty wyrażają się, nie przez długość łuków objętych, ale przez stopnie, minuty i sekundy; a gdy łuki są bardzo małe, bierze się sekundę za jedność. Nie trudno, mając dany kąt w sekundach, znaleźć długość łuku odpowiedającego; i nawzajem. Jakoż, jeśli weźmiemy promień koła za jedność linijną, długość łuku jednej sekundy będzie równa liczbie $\frac{\pi}{648000}$; a ponieważ, jako wiemy (n⁰ 91), ta długość różni się od wst$1''$ dopiero w *trzynastej* cyfrze dziesiętnej, można zamiast $\frac{\pi}{648000}$ położyć wst$1''$, tem bezpieczniej że log łuk$1''$ i log wst$1''$ mają siedem pierwszych dziesiętnych spólnych, a rachunki trygonometryczne wykonywają się przez logarytmy. Więc, oznaczając przez α długość łuku, przez α_1 liczbę sekund zawartych w tym łuku, będzie

$$\alpha = \text{wst}1''.\alpha_1 \quad \text{albo} \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{\text{wst}1''}.$$

Ztąd wynika że wymierzone kąty α i β przedstawiają się w sekundach przez

$$\alpha_1 = \frac{r\text{wst}AOC}{b\text{wst}1''}, \quad \beta_1 = \frac{r\text{wst}BOC}{a\text{wst}1''};$$

zatem poprawka, którąśmy nazwali ε, wyraża się w sekundach przez

$$\varepsilon_1 = \frac{r\text{wst}AOC}{b\text{wst}1''} - \frac{r\text{wst}BOC}{a\text{wst}1''}.$$

Kąty AOC i BOC wymierzają się kołem; za sprawdzenie służy kąt O. Trzeba zmierzyć długość r z największą dokładnością możebną. Co do boków a i b, jeden z nich przynajmniej jest już wiadomy, jako bok trójkąta ABC należący do sieci; drugi wyrachuje się z przybliżeniem.

Inne szczegóły zdejmowania rozległych planów i mierzenia wielkich długości należą do geodezyi, do której odsyłamy.

ZASTOSOWANIE FUNKCYJ KOŁOWYCH DO GEOMETRYI.

151. *Promień koła opisanego na trójkącie.* Nazywając R ten promień, będzie (119)

$$(1)\qquad R=\frac{a}{2\,\mathrm{wst}A}.$$

A jeśli chcemy mieć promień R w funkcyi boków trójkąta, dość pomnożyć oba wyrazy ułamka przez wieloczyn bc; co daje

$$(2)\qquad R=\frac{abc}{2bc\,\mathrm{wst}A}=\frac{abc}{4S}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

152. Można łatwo otrzymać powierzchnię trójkąta w funkcyi promienia koła opisanego i kątów.

Jakoż,

$$S=\frac{ab\,\mathrm{wst}C}{2}.$$

Ale

$$a=2R\,\mathrm{wst}A \quad \text{i} \quad b=2R\,\mathrm{wst}B;$$

więc

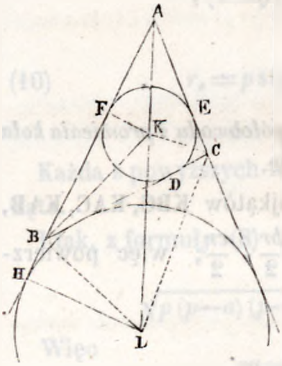
$$(3)\qquad S=2R^2\,\mathrm{wst}A\,\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C.$$

Uwaga. Ztąd wynika formuła

$$R = \sqrt{\frac{S}{2 \operatorname{wst} A \operatorname{wst} B \operatorname{wst} C}}$$

która daje promień koła opisanego na trójkącie w funkcyi powierzchni i kątów.

153. *Promień koła wpisanego.* Niech będą D, E, F punkta zetknięć koła wpisanego którego promień KF oznaczamy przez r. Ponieważ summa trzech odcinków AF, BD, CD równa się półobwodowi p trójkąta ABC, mamy



$$AF + BD + CD \quad \text{albo} \quad AF + a = p,$$

zkąd

$$AF = p - a.$$

Więc trójkąt prostokątny AFK daje

$$(4) \qquad r = (p-a) \operatorname{sty} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

wynik zapowiedziany w n°. 136.

Promień r może się wyrazić w funkcyi półobwodu i kątów trójkąta. Albowiem, mnożąc między sobą równania

$$r = (p-a) \operatorname{sty} \frac{1}{2} A, \quad r = (p-b) \operatorname{sty} \frac{1}{2} B, \quad r = (p-c) \operatorname{sty} \frac{1}{2} C,$$

otrzymujemy

$$r^3 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \cdot p \operatorname{sty} \frac{1}{2} A \operatorname{sty} \frac{1}{2} B \operatorname{sty} \frac{1}{2} C;$$

więc

$$(5)\quad \begin{cases} r = p \operatorname{sty}\frac{1}{2}\mathrm{A} \operatorname{sty}\frac{1}{2}\mathrm{B} \operatorname{sty}\frac{1}{2}\mathrm{C} \\ \text{albo} \\ p = r \operatorname{dot}\frac{1}{2}\mathrm{A} \operatorname{dot}\frac{1}{2}\mathrm{B} \operatorname{dot}\frac{1}{2}\mathrm{C} \end{cases}$$

154. Mnożąc obie strony równania (4) przez p, będzie

$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,;$$

więc

$$(6)\quad \mathrm{S} = pr.$$

Ta *powierzchnia trójkąta, w funkcyi półobwodu i promienia koła wpisanego*, łatwo się wprost otrzymuje.

Jakoż, trójkąt ABC składa się z trójkątów KBC, KAC, KAB, które mają odpowiednie miary $\frac{ar}{2}$, $\frac{br}{2}$, $\frac{cr}{2}$; więc powierzchnia S tego trójkąta jest

$$\mathrm{S} = \frac{a+b+c}{2}\,.\,r = pr.$$

Jeśli pomnożymy obie strony pierwszego równania (5) przez p, a drugiego przez r, znajdziemy dwie formuły

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{S} = p^2 \operatorname{sty}\frac{1}{2}\mathrm{A} \operatorname{sty}\frac{1}{2}\mathrm{B} \operatorname{sty}\frac{1}{2}\mathrm{C} \\ \mathrm{S} = r^2 \operatorname{dot}\frac{1}{2}\mathrm{A} \operatorname{dot}\frac{1}{2}\mathrm{B} \operatorname{dot}\frac{1}{2}\mathrm{C}, \end{cases}$$

które dają *powierzchnię trójkąta w funkcyi półobwodu i kątów*, albo *w funkcyi promienia koła wpisanego i kątów*.

155. *Promienie kół zawpisanych.* Oznaczmy przez r_a, r_b, r_c promienie kół zawpisanych w kąty A, B, C trójkąta. Widzimy zaraz że trójkąt prostokątny LBH, w którym LH $= r_a$, AH $= p$, daje

$$(8) \qquad r_a = p \operatorname{sty} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

Uważając koła zawpisane w kąty B i C, znajdziemy także

$$(9) \qquad r_b = p \operatorname{sty} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$(10) \qquad r_c = p \operatorname{sty} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

Każda z powyższych formuł prowadzi do powierzchni trójkąta.

I tak, z formuły (8) wynika

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-a) r_a = S.$$

Więc

$$(11) \qquad \begin{cases} S = (p-a) r_a \\ S = (p-b) r_b \\ S = (p-c) r_c \end{cases}$$

Można wprost otrzymać te wyrażenia powierzchni trójkąta. Jakoż,

$$tr\acute{o}j.ABC = tr.LAB + tr.LAC - tr.LBC;$$

więc

$$S = \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = (p-a) r_a.$$

Tak samo dla dwóch innych.

Jeśli z formuły (7) wyrugujemy p, kolejno za pomocą formuł (8), (9) i (10), będziemy mieli trzy formuły

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} S &= \frac{r^2_a \operatorname{sty}\frac{1}{2}B \operatorname{sty}\frac{1}{2}C}{\operatorname{sty}\frac{1}{2}A}, \\ S &= \frac{r^2_b \operatorname{sty}\frac{1}{2}A \operatorname{sty}\frac{1}{2}C}{\operatorname{sty}\frac{1}{2}B}, \\ S &= \frac{r^2_c \operatorname{sty}\frac{1}{2}A \operatorname{sty}\frac{1}{2}B}{\operatorname{sty}\frac{1}{2}C}, \end{aligned}\right.$$

które dają *powierzchnię trójkąta w funkcyi promienia koła zawpisanego i kątów.*

Nakoniec, mnożąc stronami równania (6) i (11), i redukując za pomocą powierzchni trójkąta w funkcyi trzech boków, otrzymamy formułę

$$(13)\qquad S = \sqrt{r r_a r_b r_c},$$

która daje *powierzchnię trójkąta w funkcyi promieni koła wpisanego i zawpisanych.*

Uwaga. Między promieniami kół opisanego, wpisanego i zawpisanych są dwa związki godne uwagi.

1°. Formuły (6) i (11) dają

$$\frac{S}{r} = p, \qquad \frac{S}{r_a} = p-a, \qquad \frac{S}{r_b} = p-b, \qquad \frac{S}{r_c} = p-c$$

Ztąd, odciągając pierwsze równanie od summy trzech następujących, mamy

$$(14)\qquad \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

2°. Wiemy że

$$4R = \frac{abc}{S}.$$

Owoż, z formuł przytoczonych w 1°, wywodzimy

$$\frac{a}{S}=\frac{p}{S}-\frac{1}{r_a}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}, \qquad \frac{b}{S}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}, \qquad \frac{c}{S}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c};$$

zatem

$$\frac{abc}{S^3}=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}\right),$$

albo

$$\frac{abc}{Srr_ar_br_c}=\frac{1}{r^3}-\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\frac{1}{r^2}+\left(\frac{1}{r_ar_b}+\frac{1}{r_ar_c}+\frac{1}{r_br_a}\right)\frac{1}{r}$$
$$-\frac{1}{r_ar_br_c}.$$

Ale dwa pierwsze wyrazy drugiej strony niszczą się z przyczyny (14); więc, mnożąc przez $r\,r_a\,r_b\,r_c$, będzie

$$\frac{abc}{S} \quad \text{albo} \quad 4R=r_a+r_b+r_c-r.$$

CZWOROBOK WPISALNY.

157. Niech będzie czworobok ABCD wpisany w koło, którego boki AB, BC, CD, DA oznaczamy przez a, b, c, d.

Ponieważ kąty B i D są spełniające, ich dostawy są równe i znaków przeciwnych; zatem trójkąty ABC, ACD dają

$$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\,\mathrm{dos}B$$
i
$$\overline{AC}^2=c^2+d^2+2cd\,\mathrm{dos}B,$$

ztąd

(1)
$$\mathrm{dos}B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}.$$

Podstawiając tę wartość w jednem z powyższych równań, znajdziemy łatwo:

$$AC=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}.$$

Otrzymamy podobnie

$$BD=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

Więc

$$AC.BD=ac+bd \quad \text{i} \quad \frac{AC}{BD}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$$

Te dwa równania wyrażają dwa wiadome twierdzenia geometryi.

158. Formuła (1), która daje kąt B, nie jest wyrachowalna przez logarytmy; ale można z niej wywieśdź inną do tego rachunku dogodną.

Jakoż,

$$\text{wst}^2\frac{1}{2}B=\frac{1-\text{dos}B}{2}, \qquad \text{dos}^2\frac{1}{2}B=\frac{1+\text{dos}B}{2};$$

a jeśli za dosB podstawimy wartość (1), otrzymamy

$$\text{wst}^2\frac{1}{2}B=\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{4(ab+cd)}=\frac{(b+c+d-a)(a+c+d-b)}{4(ab+cd)}$$

$$\text{dos}^2\frac{1}{2}B=\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{4(ab+cd)}=\frac{(a+b+d-c)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)}.$$

Oznaczmy teraz przez $2p$ obwód $a+b+c+d$ czworoboku, będzie $b+c+d-a=2(p-a)$, etc; zatem

$$\text{wst}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab+cd}}$$

$$\text{dos}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{ab+cd}}.$$

Ztąd, dzieląc stronami, wywodzimy żądaną formułę

$$(2)\qquad \operatorname{sty}\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}.$$

Znając kąt B, wyrachuje się łatwo przekątnę AC, rozwiązując trójkąt ABC.

Tak samo otrzyma się kąt A, i następnie przekątnę BD.

159. Powierzchnia czworoboku wpisanego składa się z trójkątów ACB i ACD, zatem

$$S = \frac{1}{2}(ab + cd)\operatorname{wst}B.$$

Owoż,

$$\operatorname{wst}B = 2\operatorname{wst}\frac{1}{2}B\operatorname{dos}\frac{1}{2}B = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd};$$

więc

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Jeśli przypuścimy bok $d = o$, czworobok zamieni się na trójkąt. Znajdujemy tym sposobem już wiadomą formułę powierzchni trójkąta w funkcyi trzech boków.

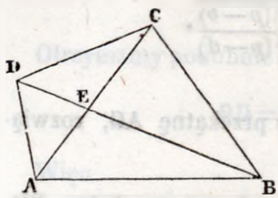
Nakoniec, można wyrazić promień R koła opisanego na tym czworoboku w funkcyi boków. Albowiem, jako już wiemy, w trójkącie ABC

$$R = \frac{AC}{2\operatorname{wst}B};$$

więc, podstawiając wartość przekątnej AC i wstB,

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

160. *Powierzchnia czworoboku jakiegokolwiek.* Znając obie przekątne czworoboku i ich kąt, można mieć powierzchnię. Jakoż,



$$pow.\,ABE = \frac{1}{2} EA\,.\,EB \operatorname{wst}E\,,$$

$$pow.\,BEC = \frac{1}{2} EC\,.\,EB \operatorname{wst}E\,;$$

Ztąd, dodając, wynika

$$pow.\,ACB = \frac{1}{2} AC\,.\,EB \operatorname{wst}E\,.$$

Tak samo

$$pow.\,ACD = \frac{1}{2} AC\,.\,ED \operatorname{wst}E\,.$$

Biorąc summę tych dwóch trójkątów, otrzymujemy

$$pow.\,ABCD = \frac{1}{2} AC\,.\,BD \operatorname{wst}E\,.$$

Więc *powierzchnia czworoboku równa się połowie wieloczynu z przekątnych przez wstawę ich kąta.*

161. Własności figur zależące od kątów dowodzą się łatwo przez trygonometryę. I tak, wiemy że *dwa trójkąty mające kąt równy albo spełniający są proporcyonalne do wieloczynów z boków ego kąta. I nawzajem.* Nazywając S i S′ powierzchnie dwóch trójkątów których kąty A i A′ są zawarte między bokami b, c i b', c'; mamy

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{wst}A \qquad S' = \frac{1}{2} b'c' \operatorname{wst}A'\,;$$

zatem

$$\frac{S}{S'} = \frac{bc \operatorname{wst}A}{b'c' \operatorname{wst}A'}\,.$$

Owoż, jeśli kąty A i A′ są równe albo spełniające, ich wstawy są równe; więc

$$\frac{S}{S'} = \frac{bc}{b'c'}.$$

To dowodzenie pokazuje, na samo spojrzenie, dlaczego twierdzenie istnieje, i czyni jego wzajemnicę przez się oczywistą.

Weźmy jeszcze kilka twierdzeń geometryi których dowodzenia przez trygonometryę są równie jasne jak ogólne.

POPRZECZNE I PĘKI.

162. Twierdzenie. *W trójkącie* ABC, *wszelka poprzeczna abc wyznacza na bokach sześć odcinków takich że wieloczyn stosunków odcinkowych równa się jedności dodatnej.*

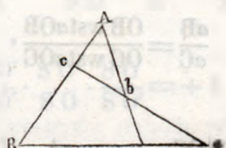


fig. 1

W trójkącie ABC (*fig.* 1) poprzeczna *abc* tworzy z bokami trzy trójkąty A*bc*, B*ac*, C*ab*, które dają

$$\frac{cA}{bA} = \frac{\text{wst}b}{\text{wst}c}, \quad \frac{aB}{cB} = \frac{\text{wst}c}{\text{wst}a}, \quad \frac{bC}{aC} = \frac{\text{wst}a}{\text{wst}b}.$$

Mnożąc te równania stronami, i uważając że liczba stosunków odjemnych jest zawsze parzysta, 2 albo 0, otrzymamy

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = +1$$

163. Twierdzenie. *W trójkącie* ABC, *trzy poprzeczne* Oa, Ob, Oc, *poprowadzone z jednego punktu płaszczyzny do wierzchołków, wyznaczają na bokach sześć odcinków takich że wieloczyn stosunków odcinkowych równa się jedności odjemnej.*

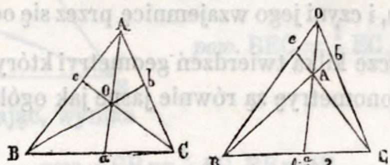


fig. 2 fig. 3

Jakoż, trójkąty aOB i aOC dają

$$\frac{aB}{\text{wst}\,aOB}=\frac{OB}{\text{wst}\,a} \quad \text{i} \quad \frac{aC}{\text{wst}\,aOC}=\frac{OC}{\text{wst}\,a};$$

ztąd

$$\frac{aB}{aC}=\frac{OB\,\text{wst}\,aOB}{OC\,\text{wst}\,aOC}.$$

Tak samo

$$\frac{bC}{bA}=\frac{OC\,\text{wst}\,bOC}{OA\,\text{wst}\,bOA} \quad \text{i} \quad \frac{cA}{cB}=\frac{OA\,\text{wst}\,cOA}{OB\,\text{wst}\,cOB}.$$

Jeśli teraz pomnożymy te równania stronami, uważając że wst$a$OB = wst$b$OA, etc. i wiedząc że liczba stosunków odcinkowych odjemnych jest zawsze nieparzysta, znajdziemy

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}=-1.$$

Ważne wzajemnie tych dwóch twierdzeń są obie prawdziwe; byle tylko uważano trzy poprzeczne równoległe jako spotykające się w jednym punkcie w nieskończoności.

164. UWAGA. Geometrya mało posiada sposobów wyrażenia że trzy punkta są w linii prostej; w tym względzie poprzeczne trójkąta mogą być użyteczne. Ale ich zastosowanie rzadko się zdarza, z przyczyny że owe trzy punkta muszą być na kierunkach boków pewnego trójkąta który nie zawsze istnieje.

Dajmy jedno zastosowanie. *Trzy środki podobieństwa prostego trzech kół* O, O,′ O″, *są w linii prostej; i każde dwa środki podobieństwa odwrotnego z nieodpowiednym środkiem podobieństwa prostego są także w linii prostej.*

Na dowodzenie tego, nazwijmy R, R′, R″ promienie trzech kół, S, S′, S″ i T, T′, T″ ich środki podobieństwa prostego i odwrotnego które leżą na kierunkach boków O′O″, OO″, OO′ trójkąta OO′O″; będzie

1°, $$\frac{SO'}{SO''}=\frac{R'}{R''},\quad \frac{S'O''}{S'O}=\frac{R''}{R},\quad \frac{S''O}{S''O'}=\frac{R}{R'};$$

zkąd

$$\frac{SO'}{SO''}\cdot\frac{S'O''}{S'O}\cdot\frac{S''O}{S''O'}=+1.$$

Więc trzy punkta S, S′, S″ są w linii prostej.

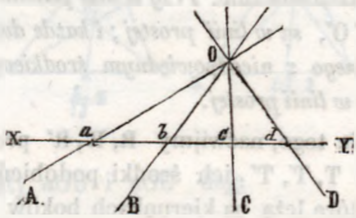
2°, Biorąc na przykład T, T′ i S″, znajdziemy podobnie

$$\frac{TO'}{TO''}\cdot\frac{T'O''}{T'O}\cdot\frac{T''O}{T''O'}=+1;$$

więc trzy punkta T, T′, S″ są w linii prostej.

165. OKREŚLENIE. Nazywa się *stosunkiem nieharmonicznym* czterech punktów A, B, C, D w linii prostej, iloraz stosunków odległości dwóch którychkolwiek z tych punktów od dwóch innych. I tak, weźmy na przykład punkta B i C; ich odległości BA, BD i CA, CD dają iloraz $\frac{BA}{BD}:\frac{CA}{CD}$, który jest jednym z dwudziestu czterech stosunków nieharmonicznych, i pisze się symbolicznie (ADBC).

Twierdzenie. *Gdy poprzeczna spotyka cztery proste* OA, OB, OC, OD *przechodzące przez jeden punkt, stosunek nieharmoniczny czterech punktów przecięć a, b, c, d jest stały, niezależny od kierunku poprzecznej.*



Jakoż, uważając na przykład stosunek nieharmoniczny $(acbd)$, mamy

$$\frac{ba}{aO}=\frac{\text{wst}\,bOa}{\text{wst}\,b},\quad \frac{bc}{cO}=\frac{\text{wst}\,bOc}{\text{wst}\,b},\quad \frac{da}{aO}=\frac{\text{wst}\,dOa}{\text{wst}\,d},\quad \frac{dc}{cO}=\frac{\text{wst}\,dOc}{\text{wst}\,d}.$$

Więc, dzieląc iloraz dwóch pierwszych stosunków przez iloraz dwóch ostatnich, otrzymujemy

$$(acbd)=\frac{ba}{bc}:\frac{da}{dc}=\frac{\text{wst}\,bOa}{\text{wst}\,bOc}:\frac{\text{wst}\,dOa}{\text{wst}\,dOc}.$$

166. Uwaga. Wyraża się czasem powyższe twierdzenie mówiąc: *stosunek nieharmoniczny czterech punktów w linii prostej zachowuje się w perspektywie.*

Taki stosunek nazywa się *harmonicznym*, gdy jest równy -1; wtedy układ czterech prostych OA, OB, OC, OD, przechodzących przez cztery punkta układu harmonicznego, stanowi *pęk harmoniczny*.

Dowodzi się podobnie przez trygonometryę twierdzenia ;

Gdy pęk czterech płasczyzn, przechodzących przez jedną linię prostą, jest przecięty płasczyzną poprzeczną, stosunek nieharmoniczny czterech linij przecięć jest stały, niezależny od położenia płasczyzny poprzecznej.

(Czytelnik znajdzie więcej szczegółów tej teoryi w naszej Geometryi, *wyd.* 2gie 1869).

RZUTY POWIERZCHNE.

Określenie. *Rzutem jakiejkolwiek powierzchni na płasczyznie jest miejsce rzutów jej punktów na tej płasczyznie.*

Jeśli ze wszystkich punktów obwodu figury płaskiej spuścimy prostopadłe na płasczyznę, utworzymy na tej płasczyznie inną figurę która będzie *rzutem* pierwszej.

167. Twierdzenie. *Rzut trójkąta na płasczyznie równa się wieloczynowi jego powierzchni przez dostawę kąta jaki płasczyzna tej powierzchni czyni z płasczyzną rzutów.*

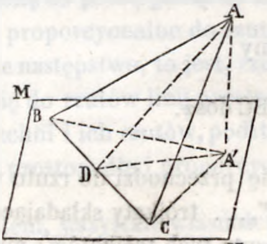


fig 1

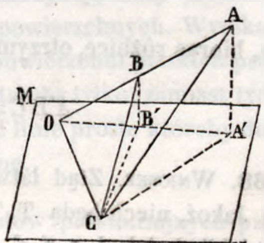


fig 2

Przypuśćmy najpierwej że trójkąt ABC ma jeden ze swoich boków BC na płasczyznie rzutów MN. Jeśli z wierzchołka A spuścimy prostopadłę AA′ na płasczyznę MN, trójkąt A′BC będzie rzutem trójkąta ABC. Poprowadźmy prostopadłę A′D do BC, i połączmy AD. Prosta AD, jako wiadomo, jest prostopadła do BC, i kąt ADA′ mierzy nachylenie płasczyzny ABC na płasczyznę MN; zatem, nazywając α ten kąt, będzie $A'D = AD \cos\alpha$. Owoż, trójkąty A′BC i ABC, mające tę samą podstawę BC, są proporcyonalne do wysokości A′D i AD; co daje

$$\frac{A'BC}{ABC} = \frac{A'D}{AD} = \cos\alpha; \quad \text{więc} \quad A'BC = ABC \cos\alpha.$$

Jakikolwiek jest trójkąt ABC w przestrzeni (*fig. druga*), można zawsze sobie wyobrazić że płasczyzna rzutów MN przechodzi przez jeden z jego wierzchołków C; bo wolno przypuścić że ta płasczyzna przenosi się równolegle do siebie samej aż do punktu C; przez co wielkość rzutu trójkąta ABC bynajmniej się nie zmienia. Niech będzie tedy A′B′C rzut trójkąta ABC. Przedłużmy AB aż do spotkania O z płasczyzną MN; punkt O będzie na prostej A′B′, i trójkąty A′OC, B′OC będą rzutami trójkątów AOC, BOC. Owoż, na mocy tego co poprzedza,

$$A'OC = AOC \cos\alpha \quad \text{i} \quad B'OC = BOC \cos\alpha;$$

więc, biorąc różnice, otrzymujemy

$$A'B'C = ABC \cos\alpha.$$

168. Wniosek. Ztąd łatwo się przechodzi do rzutu wielokąta. Jakoż, niech będą T, T′, T″,... trójkąty składające wielokąt jakikolwiek, i t, t', t'',... rzuty tych trójkątów; mamy

$$t = T\cos\alpha, \quad t' = T'\cos\alpha, \quad t'' = T''\cos\alpha, \ldots$$

zkąd, dodając, wynika

$$t + t' + t'' + \ldots = (T + T' + T'' + \ldots)\cos\alpha.$$

Więc, jeśli oznaczymy przez A powierzchnię wielokąta, przez a powierzchnię jego rzutu, będzie

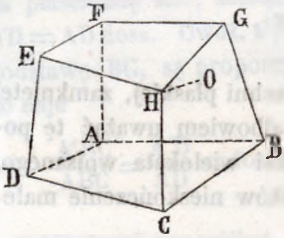
$$(1) \qquad a = A \cos\alpha .$$

Ten wynik stosuje się do powierzchni płaskiej, zamkniętej jakąkolwiek linią krzywą; można albowiem uważać tę powierzchnię jako granicę powierzchni wielokąta wpisanego, o nieskończenie wielkiej liczbie boków nieskończenie malejących.

169. Formuła (1) pokazuje że związek między powierzchnią płaską i jej rzutem na płaszczyznie jest taki sam jaki między linią prostą i jej rzutem na osi. Owoż, wiadomo z geometryi, że dwie proste odpowiednio prostopadłe do dwóch płaszczyzn czynią kąty równe kątom tych płaszczyzn; więc, jeśli do powierzchni płaskich A, A', A"... leżących w przestrzeni, poprowadzimy prostopadłe, i na nich weźmiemy długości l, l', l''... proporcyonalne do A, A', A"... a potem zrzutujemy te wszystkie powierzchnie na jedną płaszczyznę, i te wszystkie długości na jedną oś prostopadłą do tej płaszczyzny, rzuty prostolinijne będą proporcyonalne do rzutów powierzchnych. Wynika ztąd ważne następstwo, to jest, rzuty powierzchni płaskich przywodzą się do rzutów linij prostych; trzeba tylko, zamiast tych powierzchni i ich rzutów, podstawić linie proste któreby do nich były prostopadłe i proporcyonalne.

Zatem, wszystkie własności rzutów prostolinijnych przenoszą się do rzutów powierzchnych. I tak, stosując jedną z tych własności, powiemy: aby zrzutować powierzchnię płaską na daną płaszczyznę, dość jest zrzutować ją najpierwej na trzy płaszczyzny prostokątne, następnie zrzutować te trzy rzuty na daną płaszczyznę, i potem zrobić summę trzech nowych rzutów.

170. Twierdzenie. *W każdym wielościanie zamkniętym, summa rzutów wszystkich ścian, na płaszczyznie jakiejkolwiek, jest zero.*



Niech będzie wielościan zamknięty ABCDEFGH. Wyobraźmy sobie że patrzymy na ten wielościan z punktu w nieskończoności, wziętego na przykład na prostopadłej HO do płaszczyzny ściany ABGF; zobaczymy zaraz że summa rzutów, na tej płaszczyznie, wszystkich ścian widzialnych, jest ta sama co ścian niewidzialnych; bo każda z dwóch summ stanowi ten sam wielokąt którego obwód jest rzutem obwodu widzialnego DCBGFE. Owoż, uważajmy że rzuty dwóch ścian przyległych, które mają spólną krawędź, są albo przytykające jako rzuty ścian HGFE i HGBC, albo zakraczające jako rzuty ścian CBAD i CBGH; więc, jeśli damy jednakowe znaki dwom rzutom przytykającym a znaki przeciwne dwom zakraczającym, przechodząc po kolei wszystkie ściany wielościanu i bacząc na znaki rzutów, znajdziemy łatwo że summa algebryczna wszystkich rzutów jest zero na płaszczyznie ściany ABGF, i tak samo na wszelkiej płaszczyznie.

171. Nazwijmy A, A', A",... ściany wielościanu zamkniętego; jeśli poprowadzimy proste l, l', l'',... prostopadłe i proporcyonalne do tych ścian, tak żeby, czyniąc kąty równe ich odpowiedającym nachyleniom, tworzyły linię ciągłą, *ta linia będzie wielokątem zamkniętym*. Albowiem, jeśli tak nie jest, oznaczmy przez x bok który zamyka wielokąt. i zrzutujmy ten wielokąt na oś jakąkolwiek, a wielościan na płaszczyznę prostopadłą do tej osi. Ponieważ kąty ścian A, A', A",... zpłaszczyzną rzutów są równe kątom boków l, l', l''... z osią, a summa rzutów powierzchnych z A, A', A"... jest zero, summa rzutów prostolinijnych, z l, l', l''... jest także zero. Ale, w wielokącie zamkniętym przez bok x, summa rzutów wszystkich boków $x, l, l', ..$ jest zero (40); więc rzut boku x byłby zero na osi jakiejkolwiek; co niemożebne, chyba że $x=0$, Więc proste $l, l', l''...$ tworzą wielokąt zamknięty.

172. To ważne twierdzenie pokazuje że wszystkie związki między bokami i kątami wielokąta stosują się do wielościanu. Aby dać przykład użytku zadania, szukajmy związku między ścianami i kątami czworościanu. Nazwijmy ABCD czworobok którego boki AB, BC, CD, DA są prostopadłe i proporcyonalne do ścian A, A′, A″, A‴ czworościanu. Ten czworobok nie jest płaski, bo jego płaszczyzna musiałaby być prostopadła zarazem do wszystkich ścian czworościanu, i temsamem do wszystkich krawędzi. Zatem, jeśli dopełnimy równoległoboku ABCE, i poprowadzimy krawędzie AF, BG, EH, równe bokowi CD i do niego równoległe, utworzymy równoległościan w którym znamy związek między przekątną AD, trzema krawędziami AB, AE, AF i ich kątami BAE, EAF, BAF. Owoż, te kąty są spełnieniem kątów ABC, BCD, ECD; więc, podstawiając w formule (2) n^ru 41, za boki i kąty czworoboku odpowiedające ściany i kąty czworościanu, otrzymamy szukane równanie

$$A'''^2 = A^2 + A'^2 + A''^2 - 2AA'\operatorname{dos}(A, A') - 2AA''\operatorname{dos}(A, A'') \\ - 2A'A''\operatorname{dos}(A'A'').$$

Wniosek. Gdy w czworościanie kąt trójścienny przeciwległy ścianie A‴ jest trójprostokątny, wtedy

$$A'''^2 = A^2 + A'^2 + A''^2.$$

Dajemy teraz kilka zagadnień, nietylko jako potrzebne ćwiczenia, ale jeszcze żeby tem wyraźniej pokazać że trygonometrya jest koniecznem i niezbędnem dopełnieniem geometryi.

173. Zagadnienie I. *Rozwiązać trójkąt prostokątny, znając przeciwprostokątnę a i summę $b+c$ albo różnicę $b-c$ dwóch innych boków.*

Równania

$$b = a \,\text{wst}\,B, \qquad c = a \,\text{wst}\,C$$

dają:

1°. $$b + c = a(\text{wst}B + \text{wst}C) = 2a \,\text{wst}\frac{B+C}{2}\text{dos}\frac{B-C}{2}$$

ztąd

$$\text{dos}\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{a\sqrt{2}}.$$

Znajdujemy tym sposobem różnicę $B - C$; a ponieważ $B + C = 90^0$, mamy kąty B i C. Po czem, łatwo wyrachować bok b i następnie bok c, znając przytem summę $b+c$.

2°. $$b - c = a(\text{wst}B - \text{wst}C) = 2a\,\text{dos}\frac{B+C}{2}\,\text{wst}\frac{B-C}{2};$$

ztąd

$$\text{wst}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a\sqrt{2}}.$$

Reszta jako wyżej.

174. Zagadnienie II. *Rozwiązać trójkąt prostokątny, znając summę $b+c$ boków kąta prostego i wysokość h odpowiedającą przeciwprostokątnej.*

Mamy

$$b = \frac{h}{\text{dos}B} \quad \text{i} \quad c = \frac{h}{\text{wst}B};$$

zatem

$$(b + c)\,\text{wst}B\,\text{dos}B = h(\text{wst}B + \text{dos}B).$$

Wynosząc do kwadratu, będzie

$$(b + c)^2\,\text{wst}^2B\,\text{dos}^2B = h^2(1 + 2\text{wst}B\,\text{dos}B)$$

albo

$$(b+c)^2 \operatorname{wst}^2 2B - 4h^2 \operatorname{wst} 2B - 4h^2 = 0.$$

Więc

$$\operatorname{wst} 2B = \frac{2h^2 \pm 2h\sqrt{h^2+(b+c)^2}}{(b+c)^2}.$$

Pierwiastek odjemny nie stosuje się do tego zagadnienia; żeby je dodatny rozwiązywał, powinno być

$$2h^2 + 2h\sqrt{h^2+(b+c)^2} \leq (b+c)^2;$$

zkąd

$$b+c \geq 2h\sqrt{2}.$$

Jeśli temu warunkowi staje się zadość, zagadnienie ma jedno tylko rozwiązanie.

Uwaga. Można wprost otrzymać przeciwprostokątnę. Jakoż,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - 2bc = (b+c)^2 - 2ha.$$

albo

$$a^2 + 2ha - (b+c)^2 = 0$$

To równanie ma tylko jeden pierwiastek dodatny, który nie trudno znaleźć geometrycznie; albowiem powyższe równanie jest to samo co $a(a+2h) = (b+c)^2$, a to ostatnie przywodzi zagadnienie do już wiadomego. Ale, żeby rozwiązanie stosowało się do trójkąta prostokątnego, musi być

$$\frac{1}{2}a \geq h, \qquad \text{albo} \qquad -h + \sqrt{h^2+(b+c)^2} \geq 2h;$$

zkąd wynika $b+c \geq 2h\sqrt{2}$, jako wprzódy.

175. Zagadnienie III. *Rozwiązać trójkąt, znając bok a, kąt przyległy B, i summę albo różnicę dwóch innych boków.*

1°. Jeśli summa $b+c$ jest wiadoma, mamy zaraz p i $p-a$.

Owoż,

$$\text{sty}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \quad \text{i} \quad \text{sty}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}};$$

ztąd, mnożąc stronami, otrzymujemy

$$\text{sty}\frac{1}{2}B\ \text{sty}\frac{1}{2}C=\frac{p-a}{p}.$$

Ta formuła daje kąt C; po czem wyznaczy się boki b i c przez proporcye, znając przytem summę $b+c$.

2°. Jeśli różnica $b-c$ jest wiadoma, znamy temsamem $p-b$ i $p-c$; a następnie formuła

$$\frac{\text{sty}\frac{1}{2}C}{\text{sty}\frac{1}{2}B}=\frac{p-b}{p-c}$$

daje kąt C, i rozwiązanie dokończa się jako wyżej.

176. Zagadnienie IV. *Rozwiązać trójkąt, znając bok a, kąt przeciwległy* A, *i summę* $b+c$ *dwóch innych boków.*

1°. Jeśli summa $b+c$ jest wiadoma, trzeba wziąć formułę

$$a=\frac{(b+c)\,\text{wst}\frac{1}{2}A}{\text{dos}\frac{1}{2}(B-C)}$$

która da pół-różnicę $\frac{B-C}{2}$; a ponieważ $\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$, kąty B i C będą wyznaczone; po czem, otrzyma się boki b i c przez proporcye, znając przytem summę $b+c$ która posłuży za próbę.

2° Jeśli różnica $b-c$ jest wiadoma, trzeba wziąć formułę

$$a=\frac{(b-c)\,\text{dos}\frac{1}{2}A}{\text{wst}\frac{1}{2}(B-C)},$$

znając kąty B i C, wyznaczy się boki b i c jako wyżej.

177. Zagadnienie V. (*zag.* Paskala). *Rozwiązać trójkąt* ABC, *znając podstawę* a, *kąt przeciwległy* A, *i stosunek różnicy* $b-c$ *dwóch innych boków do wysokości* h.

Formuły n^ów 124 i 127 dają

$$h=\frac{a\,\mathrm{wst B\,wst C}}{\mathrm{wst A}} \quad \text{i} \quad b-c=\frac{a\,\mathrm{wst}\frac{1}{2}(\mathrm{B-C})}{\mathrm{dos}\frac{1}{2}\mathrm{A}};$$

zkąd, czyniąc $\frac{b-c}{h}=m$, wynika

$$\mathrm{wst A\,wst}\frac{1}{2}(\mathrm{B-C})=m\,\mathrm{dos}\frac{1}{2}\mathrm{A\,wst B\,wst C}$$

albo

$$(1)\quad m\,\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}(\mathrm{B-C})+2\,\mathrm{wst}\frac{1}{2}\mathrm{A\,wst}\frac{1}{2}(\mathrm{B-C})-m\,\mathrm{dos}^2\frac{1}{2}\mathrm{A}=0.$$

Pierwiastki tego równania są rzeczywiste, jeden dodatny drugi odjemny; ostatni odrzucić należy. Pierwiastek dodatny, jako wyrażający wstawę kąta $\frac{1}{2}(\mathrm{B-C})$, musi być mniejszy od jedności; ale na tem niedosyć, trzeba jeszcze żeby ten kąt, wyznaczony przez powyższe równanie, stosował się do trójkąta. Owoż, wiadomo że kąt $\frac{1}{2}(\mathrm{B-C})$ równa się nachyleniu dwójsiecznej kąta A na wysokość h, albo, co to samo, równa się nachyleniu dwójsiecznej kąta A na strzałę odcinka koła który go obejmuje; więc, żeby kąt $\frac{1}{2}(\mathrm{B-C})$ rozwiązywał zagadnienie, powinno być

$$\frac{1}{2}(\mathrm{B-C})+\frac{1}{2}\mathrm{A}<90^\circ; \quad \text{ztąd} \quad \mathrm{wst}\frac{1}{2}(\mathrm{B-C})<\mathrm{dos}\frac{1}{2}\mathrm{A},$$

warunek konieczny i dostateczny.

Temu warunkowi staje się zawsze zadość w obecnem zagadnieniu; bo, równanie (1) dowodzi że

$$m\,\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}(B-C) < m\,\mathrm{dos}^2\frac{1}{2}A,\quad \text{albo}\quad \mathrm{wst}\frac{1}{2}(B-C) < \mathrm{dos}\frac{1}{2}A,$$

Więc zagadnienie jest zawsze możebne i ma jedno rozwiązanie. Można to było przewidzieć a priori; albowiem, gdy bok a i kąt przeciwległy A są dane, stosunek $\frac{b-c}{h}$ bierze taką wartość jaka się podoba między 0 i ∞.

178. Zagadnienie VI (*zag.* Fermata). *Rozwiązać trójkąt* ABC, *znając bok a, kąt przeciwległy* A *i summę s wysokości h i różnicy b — c dwóch innych boków.*

Stosując formuły użyte w poprzedzającem zagadnieniu, otrzymujemy

$$\frac{a\,\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}{\mathrm{wst}A} + \frac{a\,\mathrm{wst}\frac{1}{2}(B-C)}{\mathrm{dos}\frac{1}{2}A} = s$$

albo

$$(1)\quad a\,\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}(B-C) - 2a\,\mathrm{wst}\frac{1}{2}A\,\mathrm{wst}\frac{1}{2}(B-C) + s\,\mathrm{wst}A - a\,\mathrm{dos}^2\frac{1}{2}A = 0.$$

Jeśli pierwiastki tego równania są rzeczywiste, to obydwa są dodatne, albo jeden dodatny a drugi odjemny: więc zagadnienie może mieć dwa rozwiązania albo tylko jedno, albo nawet nie mieć żadnego.

Dyskussya. Natura zagadnienia wymaga żeby pierwiastki były nietylko rzeczywiste i dodatne, ale jeszcze mniejsze od jedności, i stosowały się do trójkąta; a wiadomo z poprzedniego zagadnienia że się dopełnia dwóch ostatnich warunków jeśli $\mathrm{wst}\frac{1}{2}(B-C) < \mathrm{dos}\frac{1}{2}A.$

Warunek rzeczywistości pierwiastków równania (1), które jest drugiego stopnia, wyraża się przez

$$a^2\text{wst}^2\frac{1}{2}\text{A} - as\,\text{wstA} + a^2\text{dos}^2\frac{1}{2}\text{A} \geq 0, \quad \text{albo} \quad a - s\,\text{wstA} \geq 0,$$

zkąd

$$s \leq \frac{a}{\text{wstA}}.$$

Co do znaku pierwiastków równania (1); ponieważ mają summę dodatną te pierwiastki, przypuszczając je rzeczywiste, są oba dodatne albo jeden dodatny a drugi odjemny, według jak ich wieloczyn $\frac{s}{a}\text{wstA} - \text{dos}^2\frac{\text{A}}{2}$ jest dodatny albo odjemny, czyli według jak

$$s \gtrless \frac{a}{2}\text{dot}\frac{\text{A}}{2}.$$

Może być także $s = \frac{a}{2}\text{ dot }\frac{\text{A}}{2}$; co się zdarza gdy mniejszy z dwóch pierwiastków jest zero.

Owoż, wiemy że $\frac{a}{\text{wstA}}$ wyraża średnicę koła opisanego na trójkącie ABC; a nie trudno spostrzedz że $\frac{a}{2}\text{dot}\frac{\text{A}}{2}$ oznacza strzałę odcinka koła obejmującego kąt A. Te geometryczne wyniki jasno pokazują że każda z ilości a i $\frac{a}{2}\text{dot}\frac{\text{A}}{2}$ jest mniejsza od $\frac{a}{\text{wstA}}$; co zresztą widoczne. Więc, jeśli summa s jest mniejsza od jednej z tych trzech ilości albo jej równa, równanie (1) ma pierwiastki rzeczywiste.

Równanie (1) rozwiązane daje

$$\text{wst}\frac{1}{2}(\text{B}-\text{C}) = \frac{a\,\text{wst}\frac{1}{2}\text{A} \pm \sqrt{a^2 - as\,\text{wstA}}}{a}.$$

Jeśli przypuścimy pierwiastki rzeczywiste nierówne, i weźmiemy kąt $\frac{1}{2}(B-C)$ zadość czyniący nierówności $\frac{1}{2}(B-C)+\frac{1}{2}A < 90^0$, wtedy, aby pierwiastek większy odpowiedał zagadnieniu, trzeba i dość jest żeby

$$\text{wst}\frac{1}{2}A+\sqrt{1-\frac{s}{a}\text{wst}A} < \text{dos}\frac{1}{2}A\,.$$

Ta nierówność wymaga

$$\text{wst}\,\frac{1}{2}A < \text{dos}\,\frac{1}{2}A\,;$$

musi przeto być $A < 90^0$, i następnie

$$1-\frac{s}{a}\text{wst}A < \left(\text{dos}\frac{1}{2}A-\text{wst}\frac{1}{2}A\right)^2; \quad \text{więc} \quad a < s.$$

Jeśli pierwiastek mniejszy jest dodatny, to powinien jeszcze dopełniać warunku

$$\text{wst}\frac{1}{2}A-\sqrt{1-\frac{s}{a}\text{wst}A} < \text{dos}\,\frac{1}{2}A;$$

więc, jeśli $A < 90^0$, ten drugi pierwiastek rozwiązuje także zagadnienie.

Ale, jeśli $A > 90^0$, pierwiastek większy nie stosuje się do trójkąta; żeby się drugi stosował, powinno być

$$\text{wst}\frac{1}{2}A-\sqrt{1-\frac{s}{a}\text{wst}A} < \text{dos}\frac{1}{2}A,$$

zkąd

$$1-\frac{s}{a}\text{wst}A > \left(\text{wst}\frac{1}{2}A-\text{dos}\frac{1}{2}A\right)^2; \quad \text{więc} \quad a > s.$$

To ustaliwszy, łatwo wiedzieć czy zagadnienie jest możebne i ile ma zawiązań; dość tylko odróżnić trzy przypadki.

1°. Gdy summa s zawiera się między bokiem a i strzałą $\frac{a}{2}\text{dot}\frac{A}{2}$, zagadnienie ma zawsze jedno rozwiązanie, jakikolwiek jest kąt A. Jakoż,

$$\text{albo} \quad a < s < \frac{a}{2}\text{dot}\frac{A}{2}, \quad \text{albo przeciwnie} \quad a > s > \frac{a}{2}\text{dot}\frac{A}{2}.$$

W pierwszem przypuszczeniu musi być

$$a < \frac{a}{2}\text{dot}\frac{A}{2}, \quad \text{zkąd} \quad \text{sty}\frac{1}{2}A < \frac{1}{2};$$

co dowodzi że kąt $A < 90$. A ponieważ $s < \frac{a}{2}\text{dot}\frac{a}{2}$, równanie ma tylko jeden pierwiastek dodatny; więc, dlatego że $a < s$ i $A < 90^0$, ten pierwiastek rozwiązuje zagadnienie.

W drugiem przypuszczeniu, równanie ma dwa pierwiastki dodatne; ale, z przyczyny $a > s$, pierwiastek większy nie przydaje się do trójkąta. Zostaje tedy drugi dodatny, ten zaś powinien sprawdzać nierówność

$$\text{wst}\frac{1}{2}A - \sqrt{1 - \frac{s}{a}\text{wst}A} < \text{dos}\frac{1}{2}A,$$

która tu właśnie ma miejsce z kątem $A > 90$.

2°. Gdy $s > \frac{a}{2}\text{dot}\frac{A}{2}$ i $s > a$, ale $s < \frac{a}{\text{wst}A}$ i $A < 90^0$, zagadnienie ma dwa rozwiązania. Albowiem, nierówności $s < \frac{a}{\text{wst}A}$ i $s > \frac{a}{2}\text{dot}\frac{A}{2}$ dowodzą że pierwiastki równania (1) są rzeczywiste, nierówne i oba dodatne, a nierówności

$a < s$ i $A < 90^0$ pokazują że te pierwiastki rozwiązują zagadnienie.

W szczególnym przypadku gdy $s = \frac{a}{\text{wst}A}$, pierwiastki równania są równe, co daje

$$\text{wst}\frac{1}{2}(B - C) = \text{wst}\frac{1}{2}A\,;$$

zkąd

$$\frac{1}{2}(B - C) = \frac{1}{2}A \qquad \text{albo} \qquad B = A + C.$$

Więc, w tym razie, byle tylko kąt A był ostry, zagadnienie ma jedno rozwiązanie, trójkąt prostokątny przy B. Ten trójkąt przedstawia okoliczność godną uwagi; w nim summa s, równa średnicy koła opisanego, dosięga wartości największej możebnej, czyli jako się mówi, jest *maximum*.

Ale, jeśli $s = a$ i $A = 90^0$, szukany trójkąt nie istnieje.

3⁰. Gdy $s = \frac{a}{2}\,\text{dot}\frac{A}{2}$, jeden z pierwiastków równania jest zero; wtedy zagadnienie ma najpierwej za rozwiązanie trójkąt równoramienny w którym $B = C$, i może jeszcze mieć drugie rozwiązanie.

Jakoż, podstawiając wartość dla s w równanie (1), będzie

$$\text{wst}\frac{1}{2}(B-C)\left[\text{wst}\frac{1}{2}(B - C) - 2\text{wst}\frac{1}{2}A\right] = 0\,.$$

Pierwszy czynnik tego wieloczynu zrównany do zera, to jest $\text{wst}\frac{1}{2}(B-C) = 0$, rozwiązuje zawsze zagadnienie jakikolwiek jest kąt A, i wyznacza trójkąt równoramienny mający podstawę a. Drugi czynnik, zrównany także do zera, daje $\text{wst}\frac{1}{2}(B - C) = 2\text{wst}\frac{1}{2}A$; żeby ten pierwiastek mógł rozwiązywać zagadnienie, powinno być

$$2\text{wst}\,\frac{1}{2}\text{A} < \text{dos}\,\frac{1}{2}\text{A} \qquad \text{czyli} \qquad \text{sty}\,\frac{1}{2}\text{A} < \frac{1}{2}.$$

Więc, jeśli kąt ostry A dopełnia tego warunku, zagadnienie ma dwa rozwiązania; inaczej ma tylko jedno.

Nakoniec, gdy $s < \frac{a}{2}\,\text{dot}\,\frac{\text{A}}{2}$ i $s < a$, zagadnienie jest niemożebne; albowiem wtedy równanie (1) ma jeden tylko pierwiastek dodatny, który się nie stosuje do trójkąta.

179. ZAGADNIENIE VII. *Rozwiązać trójkąt, znając obwód i kąty.*

Równania

$$\frac{a}{\text{wstA}} = \frac{b}{\text{wstB}} = \frac{c}{\text{wstC}} = \frac{a+b+c}{\text{wstA} + \text{wstB} + \text{wstC}}$$

$$= \frac{p}{2\text{dos}\,\frac{1}{2}\text{A}\,\text{dos}\,\frac{1}{2}\text{B}\,\text{dos}\,\frac{1}{2}\text{C}}$$

dają

$$a = \frac{p\,\text{wst}\,\frac{1}{2}\text{A}}{\text{dos}\,\frac{1}{2}\text{B}\,\text{dos}\,\frac{1}{2}\text{C}}, \quad b = \frac{p\,\text{wst}\,\frac{1}{2}\text{B}}{\text{dos}\,\frac{1}{2}\text{A}\,\text{dos}\,\frac{1}{2}\text{C}}, \quad c = \frac{p\,\text{wst}\,\frac{1}{2}\text{C}}{\text{dos}\,\frac{1}{2}\text{A}\,\text{dos}\,\frac{1}{2}\text{C}}.$$

180. ZAGADNIENIE VIII. *Rozwiązać trójkąt, znając powierzchnię i kąty.*

Formuła

$$\text{S} = \frac{a^2\text{wstB}\,\text{wstC}}{2\text{wstA}}.$$

daje

$$\frac{a}{\text{wstA}} = \sqrt{\frac{2\text{S}}{\text{wstA}\,\text{wstB}\,\text{wstC}}} = 2\text{R};$$

więc

$$a = 2\text{R}\,\text{wstA}$$
$$b = 2\text{R}\,\text{wstB}$$
$$c = 2\text{R}\,\text{wstC}$$

181, Zagadnienie IX. *Rozwiązać trójkąt, znając promień koła wpisanego i kąty.*

Formuły n° 153 dają

$$p-a=r\,\mathrm{dot}\tfrac{1}{2}A,\quad p-b=r\,\mathrm{dot}\tfrac{1}{2}B,\quad p-c=r\,\mathrm{dot}\tfrac{1}{2}C;$$

dodając $p-a$, $p-b$, $p-c$, znajdziemy p, a potem a, b, c.

Uwaga. Gdyby, zamiast promienia r, był wiadomy promień r_a jednego z kół zawpisanych, wtedy znajoma formuła $r_a=p\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}A$ dałaby obwód p, i zagadnienie przywiodłoby się do już rozwiązanego.

182. Zagadnienie X. *Rozwiązać trójkąt, znając trzy wysokości.*

Oznaczmy przez a', b', c' wysokości szukanego trójkąta ABC, odpowiedające bokom a, b, c; będzie

$$aa'=bb'=cc'=2pr,$$

zkąd

$$\frac{a}{\frac{1}{a'}}=\frac{b}{\frac{1}{b'}}=\frac{c}{\frac{1}{c'}}=\frac{2p}{\frac{1}{r}} \tag{1}$$

Ta równość stosunków dowodzi że trójkąt ABC jest podobny trójkątowi A'B'C', mającemu za boki odwrotności $\frac{1}{a'}$, $\frac{1}{b'}$, $\frac{1}{c'}$ trzech wysokości; można więc łatwo wyznaczyć kąty przez czwarty przypadek rozwiązywania trójkątów. I tak, czyniąc $\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}=\frac{2}{p'}$

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{a'}\right)\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{b'}\right)\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{c'}\right)}{\frac{1}{p'}}}=\frac{1}{r'},$$

znajdujemy

$$\operatorname{sty}\frac{1}{2}A=\frac{\frac{1}{r'}}{\frac{1}{p'}-\frac{1}{a'}}.$$

Podobnie dla dwóch innych kątów.

Wyrachujmy teraz boki. Trójkąty ABC, A'B'C' są podobne; zatem ich powierzchnie pr i $\frac{1}{p'}\cdot\frac{1}{r'}$, mają się jako kwadraty z boków odpowiednych, to jest

$$\frac{pr}{\frac{1}{p'r'}}=\frac{a^2}{\frac{1}{a'^2}};$$

ztąd, ponieważ $pr=\frac{aa'}{2}$, wynika

(2) $$aa'=bb'=cc'=\frac{p'r'}{2}.$$

Więc

$$a=\frac{p'r'}{2a'},\quad b=\frac{p'r'}{2b'},\quad c=\frac{p'r'}{2c'}.$$

Uwaga. Nie trudno otrzymać powierzchnię trójkąta, promienie kół opisanego i wpisanego, w funkcyi trzech wysokości.

Jakoż, równanie (2) daje

$$2S=aa'=\frac{p'r'}{2}.$$

Więc, podstawiając wartość dla r', będzie

$$S=\frac{p'}{4}\sqrt{\frac{\frac{1}{p'}}{\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{a'}\right)\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{b'}\right)\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{c'}\right)}}$$

albo

$$S = \frac{p'^2}{4}\sqrt{\frac{a'b'c'}{(a'-p')(b'-p')(c'-p')}}.$$

Co do promienia R koła opisanego, mamy

$$aa'.bb'.cc' = 8S^3, \quad \text{zkąd} \quad \frac{abc}{4S} = \frac{2S^2}{a'b'c'} = R;$$

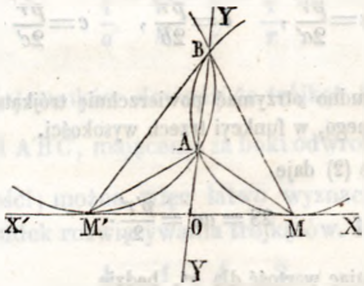
więc

$$R = \frac{p'^4}{8(a'-p')(b'-p')(c'-p')}.$$

Nakoniec, uważając że $2p = a + b + c$, z równania (1) wyprowadzamy promień r koła wpisanego

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}.$$

183. Zagadnienie XI. *Dwie proste* XX', YY' *przecinają się w punkcie O pod kątem* θ; *mając dane dwa punkta* A *i* B *na* OY, *znaleźć na* XX' *punkt* M *taki, żeby proste* AM *i* BM *tworzyły kąt* AMB *maximum.*



Oznaczmy odległości OA, OB, OM przez a, b, x, kąty AMX i BMX przez α i β; będzie

$$\text{sty}\,AMB = \text{sty}(\alpha - \beta) = \frac{\text{sty}\alpha - \text{sty}\beta}{1 + \text{sty}\alpha\,\text{sty}\beta}.$$

Owoż, trójkąty AOM i BOM dają

$$\frac{x}{a}=\frac{\mathrm{wst}\,(\alpha-\theta)}{\mathrm{wst}\alpha}=\mathrm{dos}\theta-\mathrm{dot}\alpha\,\mathrm{wst}\theta$$

$$\frac{x}{b}=\frac{\mathrm{wst}\,(\beta-\theta)}{\mathrm{wst}\beta}=\mathrm{dos}\theta-\mathrm{dot}\beta\,\mathrm{wst}\theta.$$

Aby wyrugować kąty α i β dane przez dotyczne, uważajmy że

$$\frac{\mathrm{sty}\alpha-\mathrm{sty}\beta}{1+\mathrm{sty}\alpha\,\mathrm{sty}\beta}=\frac{\mathrm{dot}\beta-\mathrm{dot}\alpha}{\mathrm{dot}\alpha\,\mathrm{dot}\beta+1}.$$

Owoż, z dwóch poprzedzających równań, przez odciąganie i mnożenie, wynika

$$\mathrm{dot}\beta-\mathrm{dot}\alpha=\frac{(b-a)\,x}{ab\,\mathrm{wst}\theta}$$

$$\mathrm{dot}\alpha\,\mathrm{dot}\beta=\frac{(x-a\,\mathrm{dos}\theta)\,(x-b\,\mathrm{dos}\theta)}{ab\,\mathrm{wst}^2\theta};$$

więc, podstawiając te wartości, znajdziemy

$$\mathrm{sty}AMB=\frac{(b-a)\,x\,\mathrm{wst}\theta}{x^2-(a+b)\,x\,\mathrm{dos}\theta+ab}.$$

Żeby kąt AMB był maximum, trzeba i dość jest żeby wartość *algebryczna* jego stycznej była maximum. Owoż, tę wartość można pisać

$$\mathrm{sty}AMB=\frac{(b-a)\,\mathrm{wst}\theta}{x+\frac{ab}{x}-(a+b)\,\mathrm{dos}\theta}.$$

Teraz licznik jest ilością stałą, dość więc dla maximum sty AMB żeby tylko mianownik był minimum; co się zdarzy jeśli część zmienna $x+\frac{ab}{x}$ tego mianownika będzie minimum, A panieważ wieloczyn $x.\frac{ab}{x}=ab$ jest ilością stałą, summa $x+\frac{ab}{x}$ będzie minimum jeśli weźmiemy

$$x=\frac{ab}{x}; \qquad \text{zkąd} \qquad x=\pm\sqrt{ab}.$$

Te dwie wartości dla x, równe i znaków przeciwnych, niezależne od kąta θ, pokazują że, jeśli przez dwa dane punkta A i B na OY, poprowadzimy koła styczne do XX', te koła dotkną prostej XX' w dwóch punktach M i M' równo oddalonych od O, które będą wierzchołkami dwóch kątów AMB i AM'B rozwiązujących zagadnienie. Co widoczne geometrycznie

Pierwiastek odjemny $x=-\sqrt{ab}$ daje dla sty(α—β) wartość odjemną, która jest algebrycznem *minimum* jej wartości

$$\frac{(b-a)\,x\,\mathrm{wst}\,\theta}{x^2-(a+b)\,x\,\mathrm{dos}\,\theta+ab};$$

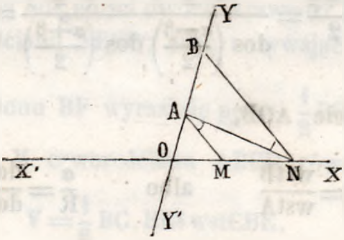
ale trzeba uważać że

$$\mathrm{sty}\,\mathrm{AM'B}=\mathrm{sty}\,(\mathrm{BM'X}-\mathrm{AM'X})=-\,\mathrm{sty}\,(\alpha-\beta);$$

więc wartość odjemna $x=-\sqrt{ab}=-\mathrm{OM'}$ czyni maximum sty BM'A i daje kąt AM'B maximum.

Uwaga. Można było przewidzieć a priori że są dwa kąty maximum, jeden AMB, drugi AM'B. Jakoż, gdy punkt M pada w punkcie O, kąt AMB jest zero; a gdy punkt M oddala się od O, w kierunku OX albo w kierunku OX', kąt AMB najpierwej rośnie ciągle a potem maleje i dąży znowu do zera. To pokazuje że od średniego zera do każdego skrajnego jest jedna wartość maximum kąta AMB; więc wierzchołek jednego kąta maximum przypada na kierunku OX w punkcie M, a wierzchołek drugiego na kierunku OX' w punkcie M'.

184. Wniosek. *Mając dane dwie proste* XX′, YY′ *przecinające się w punkcie* O, *i punkt* A *na* YY′; *znaleźć dwa punkta* M *i* N *na* XX′ *takie, żeby stosunek* $\frac{ON}{OM}$ *ich odległości od* O *równał się danej liczbie, i kąt* MAN *był maximum.*



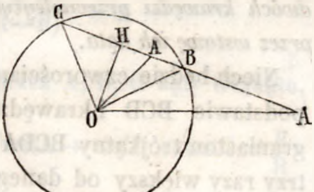
Przypuśćmy że kąt MAN jest szukanym kątem maximum; jeśli przez punkt N poprowadzimy równoległę NB do MA, będzie kąt ANB = MAN.

Owoż, oznaczając odległość OA przez a i stosunek $\frac{ON}{OM}$ przez k, mamy

$$\frac{OB}{OA}=\frac{ON}{OM}=k, \quad \text{zkąd} \quad OB=ka;$$

więc obecne zagadnienie przywodzi się do powyższego.

185. Zagadnienie XII. *Przez punkt* A *płaszczyzny koła* O *poprowadzono do jego okręgu sieczną* ABC. *Dowieść że, łącząc punkta*



przecięcia B *i* C *ze środkiem* O *koła, wieloczyn* $\operatorname{sty}\frac{AOB}{2}\operatorname{sty}\frac{AOC}{2}$ *jest stały, niezależny od kierunku tej siecznej.*

Spuśćmy ze środka koła O prostopadłę OP na siecznę ABC, oznaczmy promień koła przez R, odległość AO przez a kąty AOH i BOH przez α i β; będziemy mieli

$$\mathrm{sty}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{sty}\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\mathrm{wst}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\mathrm{wst}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\mathrm{dos}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\mathrm{dos}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{\mathrm{dos}\beta-\mathrm{dos}\alpha}{\mathrm{dos}\beta+\mathrm{dos}\alpha}.$$

Ale, w trójkącie AOB,

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{wstB}}{\mathrm{wstA}}\quad\text{albo}\quad\frac{a}{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{dos}\beta}{\mathrm{dos}\alpha},$$

zkąd

$$\frac{\mathrm{dos}\beta-\mathrm{dos}\alpha}{\mathrm{dos}\beta+\mathrm{dos}\alpha}=\frac{a-\mathrm{R}}{a+\mathrm{R}};$$

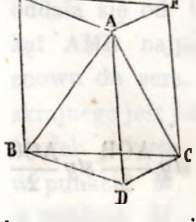
więc

$$\mathrm{sty}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\mathrm{sty}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\quad\text{albo}\quad\mathrm{sty}\,\frac{\mathrm{AOB}}{2}\,\mathrm{sty}\,\frac{\mathrm{AOC}}{2}=\frac{a-\mathrm{R}}{a+\mathrm{R}}.$$

C. b. d. d.

Zakończymy te zagadnienia następującem zadaniem które tu będzie na swojem miejscu.

186. Twierdzenie. *Objętość czworościanu ma za miarę szóstą część wieloczynu z dwóch krawędzi przeciwległych przez ich najkrótszą odległość i przez wstawę ich kąta.*



Niech będzie czworościan ABCD; na jego podstawie BCD i krawędzi AD zbudujmy graniaston trójkątny BCDAEF, który będzie trzy razy większy od danego czworościanu.

Owoż, objętość tego graniastonu równa się połowie wieloczynu ze ściany BCFE przez jej odległość od krawędzi przeciwległej AD; bo rzeczony graniaston jest połową równoległościanu który ma za podstawę ścianę BCFE, i za wysokość odległość krawędzi AD od płaszczyzny BCFE. Ale równoległobok BCFE ma za miarę

$$\mathrm{BC.BE\,wstCBE},$$

a odległość krawędzi AD od płaszczyzny BCFE jest oczywiście równa najkrótszej odległości dwóch krawędzi przeciwległych AD, BC, czworościanu ABCD; więc, nazywając δ tę odległość, objętość graniastonu BF wyrazi się przez $\frac{1}{2}\mathrm{BC.BE}\,\delta\,\mathrm{wstCBE}$.

Zatem objętość V czworościanu ABCD równa się

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6}\mathrm{BC.BE}\,\delta\,\mathrm{wstCBE}.$$

Wniosek. Ztąd wynika że, jeśli na dwóch prostych, nie leżących na jednej płaszczyznie, wzięto dwa odcinki, jako AD i BC, na dwie krawędzie przeciwległe czworościanu, objętość tego czworościanu zostaje ta sama jakiekolwiek mają położenia te odcinki na dwóch liniach.

188. ĆWICZENIA.

I. Znaleźć prawdziwą wartość

boku $c = \dfrac{(a-b)\,\mathrm{dos}\,\frac{1}{2}\mathrm{C}}{\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}$ gdy $a = b$.

II. Oznaczając przez A, B, C kąty trójkąta, dowieśdź że:

$$\mathrm{wstA} + \mathrm{wstB} + \mathrm{wstC} = \frac{p}{\mathrm{R}}$$

$$\mathrm{wst2A} + \mathrm{wst2B} + \mathrm{wst2C} = 4\mathrm{wstA\,wstB\,wstC} = \frac{2pr}{\mathrm{R}^2}$$

$$\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}\mathrm{A}\,\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}\mathrm{B}\,\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}\mathrm{C} = \frac{r}{4\mathrm{R}}$$

$$\text{dos}\frac{1}{2}\text{A}\,\text{dos}\frac{1}{2}\text{B}\,\text{dos}\frac{1}{2}\text{C}=\frac{p}{4\text{R}}$$

$$\text{wst}^2\frac{1}{2}\text{A}+\text{wst}^2\frac{1}{2}\text{B}+\text{wst}^2\frac{1}{2}\text{C}=1-\frac{r}{2\text{R}}$$

$$\text{sty}\frac{1}{2}\text{A}+\text{sty}\frac{1}{2}\text{B}+\text{sty}\frac{1}{2}\text{C}-\text{sty}\frac{1}{2}\text{A}\,\text{sty}\frac{1}{2}\text{B}\,\text{sty}\frac{1}{2}\text{C}=\frac{4\text{R}}{p}$$

$$\text{dot}\frac{1}{2}\text{A}+\text{dot}\frac{1}{2}\text{B}+\text{dot}\frac{1}{2}\text{C}=\text{dot}\frac{1}{2}\text{A}\,\text{dot}\frac{1}{2}\text{B}\,\text{dot}\frac{1}{2}\text{C}=\frac{\text{S}}{r^2}$$

$$\frac{\text{wst}\,(\text{A}-\text{B})}{\text{wst}\,(\text{A}+\text{B})}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$$

$$\text{wst}^2\text{A}+\text{wst}^2\text{B}+\text{wst}^2\text{C}$$

$$=2\text{wstB}\,\text{wstC}\,\text{dosA}+2\text{wstA}\,\text{wstC}\,\text{dosB}+2\text{wstA}\,\text{wstB}\,\text{dosC},$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4(\text{dotA}+\text{dotB}+\text{dotC})}=\text{S},$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{4\text{sty}\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B}-\text{C})}=\text{S},$$

$$ab+ac+bc=p^2+r^2+4\text{R}r$$

$$abc=4pr\text{R}.$$

III. Dowieśdź że trójkąt w którym

$$\frac{\text{wstA}}{\text{wstB}}=2\text{dosC}$$

jest równoramienny, $\text{B}=\text{C}$.

Trójkąt w którym $\dfrac{\text{styB}}{\text{styC}}=\dfrac{\text{wst}^2\text{B}}{\text{wst}^2\text{C}}$

jest równoramienny albo prostokątny.

Trójkąt w którym

$$\text{dosA}\,\text{dosB}\,\text{dosC}=\frac{\text{wstB}+\text{wstC}}{\text{sieB}+\text{sieC}};$$

jest prostokątny.

Trójkąt w którym zarazem

$$1 + \mathrm{dot}\left(\frac{\pi}{4} - \mathrm{B}\right) = \frac{2}{1 - \mathrm{styC}} \quad \text{i} \quad 4\mathrm{S} = a^2$$

jest równoramienny i prostokątny.

IV. Jakiekolwiek są łuki A, B, C, dowieśdź że zawsze

$$\mathrm{wstA\,wstB\,wst}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) + \mathrm{wstB\,wstC\,wst}(\mathrm{B}-\mathrm{C})$$
$$+ \mathrm{wstC\,wstA}(\mathrm{C}-\mathrm{A}) + \mathrm{wst}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\,\mathrm{wst}(\mathrm{B}-\mathrm{C})\,\mathrm{wst}(\mathrm{C}-\mathrm{A}) = 0.$$

V. Jaki jest związek między trzema łukami A, B, C, które zadość czynią równaniu

$$\frac{\mathrm{wstA\,wst}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}{\mathrm{wst2B\,wst2C}} + \frac{\mathrm{wstB\,wst}(\mathrm{C}-\mathrm{A})}{\mathrm{wst2C\,wst2A}} + \frac{\mathrm{wstC\,wst}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\mathrm{wst2A\,wst2B}} = 0.$$

VI. Oznaczając przez K środek koła wpisanego w trójkąt ABC, przez A′, B′, C′ punkta w których dwójsieczne kątów A, B, C spotykają boki przeciwległe; dowieśdź że:

$$\mathrm{KA} = \frac{bc}{p}\,\mathrm{dos}\,\frac{1}{2}\mathrm{A}, \qquad \mathrm{KA'} = \frac{abc}{p(b+c)}\,\mathrm{dos}\,\frac{1}{2}\mathrm{A}$$

$$\frac{\mathrm{KA'}.\mathrm{KB'}.\mathrm{KC'}}{abc} = \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{4\mathrm{R}r^2}.$$

VII. Nazywając d długość dwójsiecznej AA′, dowieśdź że:

$$d = \frac{2bc\,\mathrm{dos}\,\frac{1}{2}\mathrm{A}}{b+c}.$$

$$(b+c)^4 d^4 - 4(b+c)^2 b^2c^2d^2 + 4b^4c^4\,\mathrm{wst}^2\mathrm{A} = 0.$$

VIII. W trójkącie ABC oznaczając przez O, K, L, M, N środki kół opisanego, wpisanego i zawpisanych, przez R, r,

r_a, r_b, r_c promienie tych kół, dowieśdź że:

1°,
$$\overline{OK}^2 = R(R - 2r),$$
$$\overline{OM}^2 = R(R + 2r_b),$$
$$\overline{OL}^2 = R(R + 2r_a),$$
$$\overline{ON}^2 = R(R + 2r_c).$$

2°,
$$2R\left(1 + \operatorname{wst}\frac{1}{2}A\right)\operatorname{wst}\frac{1}{2}A - r = 0$$
$$2R\left(1 + \operatorname{wst}\frac{1}{2}A\right)\operatorname{wst}\frac{1}{2}A - r_a = 0.$$

3°,
$$r_a r_b r_c = abc \operatorname{dos}\frac{1}{2}A \operatorname{dos}\frac{1}{2}B \operatorname{dos}\frac{1}{2}C.$$

4°,
$$KL = \frac{a}{\operatorname{dos}\frac{1}{2}A}, \quad KM = \frac{b}{\operatorname{dos}\frac{1}{2}B}, \quad KN = \frac{c}{\operatorname{dos}\frac{1}{2}C}.$$

5°,
$$MN = \frac{a}{\operatorname{wst}\frac{1}{2}A}, \quad LM = \frac{b}{\operatorname{wst}\frac{1}{2}B}, \quad LN = \frac{c}{\operatorname{wst}\frac{1}{2}C}.$$

6°,
$$\overline{KL}^2 + \overline{KM}^2 + \overline{KN}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{LM}^2 + \overline{LN}^2 = 48R^2.$$

7°, w trójkącie prostokątnym przy A,
$$S = rr_a = r_b r_c = (p - b)(p - c).$$
$$r_a - r = r_a + r_c = a.$$

IX. Oznaczając przez H punkt spotkania trzech wysokości trójkąta ABC, przez P, Q, R spodki tych wysokości na bokach a, b, c, dowieśdź że:

1°,
$$AH = a \operatorname{dot} A = 2R \operatorname{dos} A.$$

2°,
$$AH.HP = BH.HQ = CH.HR = \frac{a^2 b^2 c^2}{4S} \operatorname{dos} A \operatorname{dos} B \operatorname{dos} C.$$

3°,
$$a^2 + \overline{AH}^2 = b^2 + \overline{BH}^2 = c^2 + \overline{CH}^2 = 4R^2$$

4°,
$$\mathit{pow.tr}.PQR = 2S \operatorname{dos} A \operatorname{dos} B \operatorname{dos} C.$$

5°, obwód trójkąta PQR jest minimum między obwodami trójkątów mających wierzchołki na bokach trójkąta ABC.

X. Dowieśdź że powierzchnia trójkąta jest równa wieloczynowi z promienia koła opisanego przez połowę obwodu trójkąta który się otrzymuje łącząc spodki trzech wysokości.

XI. Rozwiązać trójkąt, znając:

1°, odległość wierzchołków od środka koła wpisanego.

2°, podstawę, wysokość i różnicę kątów przy podstawie.

3°, bok, kąt przyległy i powierzchnię,

4°, bok, różnicę kątów przyległych i powierzchnię.

5°, kąt i summę boku przeciwległego z każdym bokiem tego kąta.

6°, bok, kąt przeciwległy i wieloczyn dwóch innych boków.

7°, powierzchnię, promień koła wpisanego i jeden kąt.

8°, bok, wysokość mu odpowiedającą, i summę dwóch i nych boków.

9°, jeden bok, kąt i jego dwójsieczną.

10°, trzy którekolwiek z pięciu promieni R, r, r_a, r_b, r_c.

11°, trzy ośródkowe,

12°, trzy dwójsieczne.

13°, znając dwa kąty A, B, i wiedząc że trójkąt, obracając się około równoległej do boku BC poprowadzonej przez wierzchołek A, tworzy daną objętość V.

XII. W czworoboku, mającym dwa kąty przeciwległe proste, dany jest jeden kąt pochyły i dwa jego boki; wyznaczyć dwa inne boki i obie przekątne.

XIII. Znaleźć związek między czterema bokami a, b, c, d i dwiema przekątnemi x, y czworoboku.

XIV, Znając liczbę n boków wielokąta foremnego i promień R koła opisanego, wyznaczyć w funkcyi ilości n i R:

1°, bok tego wielokąta, i bok wielokąta podobnego opisanego.

2^0, boki wielokątów foremnych, wpisanego i opisanego, podwójnej liczby boków,

XV. Znając powierzchnie dwóch wielokątów foremnych, wpisanego i opisanego; wyznaczyć w funkcyi tych powierzchni, powierzchnie dwóch wielokątów foremnych, wpisanego i opisanego, podwójnej liczby boków.

XVI. Znaleźć promień koła, znając różnicę między łukiem n stopni i jego cięciwą.

XVII. Na średnicy AOB koła O wzięto punkt K, przez który poprowadzono jakąkolwiek cięciwę KDE; dowieśdź że

$$\text{stosunek}\quad \frac{\text{sty}\frac{\text{KOD}}{2}}{\text{sty}\frac{\text{KOE}}{2}}\quad \text{jest stały.}$$

XVIII. Cztery punkta niedostępne A, B, C, D, leżące w linii prostej, są widzialne z punktu O na którym stoi miernik; znając odległości AB i CD, wyznaczyć odległość BC.

XIX. Dwie proste XX′, YY′ przecinają się w punkcie O. Mając dany punkt A na YY′, znaleźć na XX′ dwa punkta M, N takie, żeby różnica ON — OM równała się danej linii, i kąt MAN był maximum.

XX. Na dwóch prostych, nie leżących na jednej płaszczyźnie, wzięto dwa odcinki i zbudowano czworościan. Wiadomo że objętość tego czworościanu nie zależy od położenia wziętych odcinków. Ale, jakie powinno być położenie tych odcinków, żeby powierzchnia czworościanu była najmniejsza możebna?

XXI. Jeśli z punktu O płaszczyzny wielokąta ABC... poprowadzono promienie do wierzchołków, wieloczyn stosunków wstaw kątów które każdy promień tworzy z dwoma bokami przyległemi, idąc w jedną stronę, równa się $+1$ albo -1 według jak liczba boków jest parzysta albo nieparzysta.

XXII. Dwójsieczne kątów pod któremi widać z jednego punktu płaszczyzny wielokąta ABC... jego boki AB, BC,... spotykają te boki w punktach a, b, c... tak że wieloczyn stosunków odcinkowych jest zawsze równy jedności dodatnej albo odjemnej,

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\ldots=\pm 1\,;$$

trzeba brać znak $+$ albo $-$ według jak liczba boków jest parzysta albo nieparzysta.

XXIII. Jeśli, biorąc punkta a, b, c... na bokach po sobie idących wielokąta ABC.., zrobiono perspektywę figury na jakiejkolwiek płaszczyźnie, wieloczyn stosunków perspektyw odpowiedających stosunkom odcinkowym $\frac{aA}{aB}, \frac{bB}{dC}\ldots$ będzie stały.

XXIV. Dowieśdź że wielokąt jakikolwiek, płaski albo spaczony, jest zamknięty jeśli jego rzuty, wyznaczone przez płaszczyzny równoległe do trzech ścian trójścianu, są zero na każdej ze trzech krawędzi tego trójścianu.

XXV. Rzut linii łamanej jest największy możebny, gdy oś rzutów jest równoległa do *wynikowej* tej łamanej (to jest do linii prostej która ją zamyka).

XXVI. Rzut linii łamanej zostaje ten sam na wszystkic osiach które czynią kąty równe z wynikową tej łamanej.

Uwaga. Trzy powyższe twierdzenia stosują się do układu linij prostych rozłączonych w przestrzeni; byle tylko brano za wynikowę tego układu linię prostą któraby go zamykała, gdyby te linie proste, przeniesione równolegle do siebie samych, tworzyły linię łamaną.

XXVII. Na jakiej płasczyznie summa rzutów powierzchni płaskich, danych w przestrzeni, jest maximum?

XXVII. W trójkącie ABC poprowadzono przez każdy wierzchołek jedną linię prostą taką żeby czyniła z bokiem przeciwległym kąt α skierowany w tę samą stronę. Dowieśdź że trójkąt utworzony przez te trzy proste jest podobny danemu.

Jaki powinien być kąt α żeby utworzony trójkąt był maximum albo minimum?

XXIX. *Zagadnienie excentryka starożytnych.* Punkt ruchomy M przebiega okrąg O ruchem jednostajnym; ruch punktu M jest obserwowany z punktu O′ różnego od O, i czas liczony od punktu A w którym OO′ spotyka okrąg O; wiadome są czasy w których promień O′M opisuje dwa kąty AO′M, AO′M′, i wiadomy czas T całego obrotu. Wyrachować stosunek odległości OO′ do promienia koła O.

Starożytni mniemali że ruch ciał niebieskich odbywa się około środka ziemi, że jest kołowy i jednostajny. Ale, przekonawszy się że słońce nie porusza się wedle tej ustawy, przypuszczali że ziemia znajduje się poza środkiem ruchu świata; ztąd nazwisko *excentryka.*

XXX. Znaleźć pierwiastki równania

$$1 - \mathrm{dos}\,x = \frac{1}{2}x\,\mathrm{wst}\,x.$$

KSIĘGA TRZECIA

TRYGONOMETRYA SFERYCZNA

---

189. Niech będzie, na sferze promienia R, trójkąt sferyczny ABC. Jeśli połączymy jego wierzchołki ze środkiem O sfery, utworzymy trójścian OABC, którego kąty dwójścienne będą kątami A, B, C tego trójkąta; a jeśli nadto weźmiemy promień sfery za jedność linijną, ściany czyli kąty płaskie trójścianu będą miały za miary boki trójkąta sferycznego których długości wyrażą się przez a, b, c. W zastosowaniach, oznacza się zwykle przez A, B, C liczbę stopni zawartych w kątach trójkąta sferycznego, przez a, b, c liczbę stopni zawartych w bokach przeciwległych. Każda z tych sześciu części trójkąta mieści się, jako wiadomo, między 0^0 i 180^0.

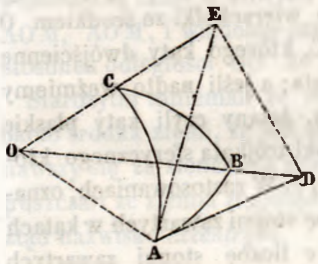
Trójkąt sferyczny jest wyznaczony, gdy są dane trzy którekolwiek z jego sześciu części : niema potrzeby, jako w trójkątach prostolinijnych, żeby między częściami danemi znajdował się jeden bok przynajmniej; bo trójkąt sferyczny jest na sferze promienia 1. Rozwiązać trójkąt sferyczny jestto wyrachować liczbę stopni, minut, sekund... zawartych w jego bokach i kątach, gdy liczba danych wielkości jest dostateczna do wyznaczenia tego trójkąta. Znając liczbę stopni wyrażających boki trójkąta sferycznego, nie trudno znaleźć długość tych boków względnie do promienia sfery; i nawzajem.

Trygonometrya sferyczna ma za cel rozwiązywanie trójkątów sferycznych.

Ogólne zagadnienie trygonometryi sferycznej zależy na tem żeby, znając trzy z sześciu ilości a, b, c, A, B, C, wyznaczyć trzy inne. Trzeba więc mieć równania między *czterema* któremikolwiek z tych ilości. Owoż, sześć ilości, kombinowane po cztery, dają $\frac{6.5}{1.2} = 15$ kombinacyj. Ale te piętnaście kombinacyj stanowią tylko cztery następujące związki istotnie różne.

ZWIĄZKI MIĘDZY BOKAMI I KĄTAMI TRÓJKĄTA SFERYCZNEGO.

190. *Związek między trzema bokami i jednym kątem.* Niech będzie trójkąt sferyczny ABC, nakreślony na jakiejkolwiek sferze mającej środek w O. Do łuków AB i AC kąta A poprowadźmy styczne AD i AE. Przypuszczając że łuki AB i AC są mniejsze od ćwiercianów, te styczne spotykają w punktach D i E promienie OB i OC przedłużone; zatem, biorąc promień sfery za jedność, mamy



$$\mathrm{AD} = \mathrm{sty}\,c, \quad \mathrm{AE} = \mathrm{sty}\,b, \quad \mathrm{OD} = \mathrm{sie}\,c, \quad \mathrm{OE} = \mathrm{sie}\,b.$$

Nadto, kąt DAE stycznych jest właśnie kątem A trójkąta sferycznego ABC, a kąt DOE ma za miarę bok a tego trójkąta.

To ustaliwszy, uważajmy że trójkąty prostolinijne DAE DEO dają

$$\overline{\mathrm{DE}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{AE}}^2 - 2\mathrm{AD}.\mathrm{AE}\,\mathrm{dos}\,\mathrm{A}$$

$$\overline{\mathrm{DE}}^2 = \overline{\mathrm{OD}}^2 + \overline{\mathrm{OE}}^2 - 2\mathrm{OD}.\mathrm{OE}\,\mathrm{dos}\,a$$

zkąd, odciągając te równości stronami, wynika

$$0 = \overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{OE}^2 - \overline{AE}^2 - 2OD\,.\,OE\,\mathrm{dos}\,a + 2AD\,.\,AE\,\mathrm{dos}\,A$$

albo, z przyczyny $\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 = 1$, $\overline{OE}^2 - \overline{AE}^2 = 1$,
i dzieląc przez 2,

$$1 - \mathrm{sie}\,b\,\mathrm{sie}\,c\,\mathrm{dos}\,a + \mathrm{sty}\,b\,\mathrm{sty}\,c\,\mathrm{dos}\,A = 0.$$

Ale,

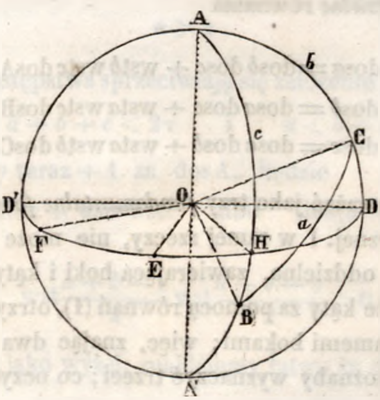
$$\mathrm{sie}\,b = \frac{1}{\mathrm{dos}\,b},\quad \mathrm{sie}\,c = \frac{1}{\mathrm{dos}\,c},\quad \mathrm{sty}\,b = \frac{\mathrm{wst}\,b}{\mathrm{dos}\,b},\quad \mathrm{sty}\,c = \frac{\mathrm{wst}\,c}{\mathrm{dos}\,c};$$

więc, podstawiając te wartości i znosząc mianowniki, będzie

$$\mathrm{dos}\,a = \mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c + \mathrm{wst}\,a\,\mathrm{wst}\,b\,\mathrm{dos}\,A.$$

Taki jest związek między trzema bokami i jednym kątem trójkąta sferycznego.

191. Powyższe dowodzenie zostawia wiele do życzenia; daliśmy je dlatego jedynie że się opiera na prostej wiedzy trygonometryi płaskiej. Ale nie jest ogólne, bo przypuszcza że boki b i c są mniejsze od ćwiercianów. Trzebaby więc jeszcze okazać że formuła obejmuje przypadki w których jeden z boków b i c albo obydwa są większe od ćwiercianów albo im równe. Zamiast wchodzić w tę szczegółową dyskussyę, wolimy dać ogólne dowodzenie samej formuły przez metodę rzutów.



Niech będzie trójkąt sferyczny ABC. Poprowadźmy koło wielkie DHD′ mające oś OA, które przetnie koła wielkie AC i AB w punktach D i H; poprowadźmy jeszcze osie OE i OF dwóch ostatnich kół, i promienie OD, OH.

Owoż, względnie do trzech osi prostokątnych, OA, OD, OE formuła n^ru 44, daje

$$\mathrm{dosBOC} = \mathrm{dosCOA\,dosBOA} + \mathrm{dosCOD\,dosBOD} + \mathrm{dosCOE\,dosBOE}.$$

Ale $\mathrm{dosCOE} = 0$; zatem, podstawiając łuki które mierzą kąty, będzie

$$\mathrm{dos}a = \mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}c + \mathrm{wst}b\,\mathrm{dosBOD}.$$

Teraz, aby wyrazić dosBOD w funkcyj ilości b, c, A, weźmy trzy osie prostokątne OA, OH, OF; uważając że $\mathrm{dosDOA} = 0$, $\mathrm{dos\,BOF} = 0$, $\mathrm{dos\,DOH} = \mathrm{dos\,A}$, znajdziemy

$$\mathrm{dosBOD} = \mathrm{dosBOA\,dosDOH} = \mathrm{wst}c\,\mathrm{dosA}.$$

Więc, podstawiając tę wartość, mamy ogólną formułę

$$\mathrm{dos}a = \mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}c + \mathrm{wst}b\,\mathrm{wst}c\,\mathrm{dosA}.$$

Z ostatniego równania wywodzimy, prostą przemianą liter dwa inne. Są tedy, między bokami i kątami trójkąta sferycznego, trzy *oddzielne* równania

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathrm{dos}a &= \mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}c + \mathrm{wst}b\,\mathrm{wst}c\,\mathrm{dosA} \\ \mathrm{dos}b &= \mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}c + \mathrm{wst}a\,\mathrm{wst}c\,\mathrm{dosB} \\ \mathrm{dos}c &= \mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}b + \mathrm{wst}a\,\mathrm{wst}b\,\mathrm{dosC}. \end{aligned}$$

które należy uważać jako trzy *fundamentalne formuły* trygonometryi sferycznej. I w samej rzeczy, nie może istnieć żadna inna formuła oddzielna, zawierająca boki i kąty; bo, rugując z niej wszystkie kąty za pomocą równań (1), otrzymanoby związek między samemi bokami; więc, znając dwa boki trójkąta sferycznego możnaby wyznaczyć trzeci; co oczywiście niemożebne.

192. Uwaga. Formuły fundamentalne dowodzą że trzy łuki a, b, c kół wielkich, mniejsze od półokręgu, które zadość czynią jednej z nich, są bokami trójkąta sferycznego. Jakoż, weźmy na przykład pierwszą formułę. Ponieważ dosA jest zawarta między -1 i $+1$, podstawiając -1 za dosA będzie

$$\mathrm{dos}\,a > \mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c - \mathrm{wst}\,b\,\mathrm{wst}\,c, \quad \text{albo} \quad \mathrm{dos}\,a - \mathrm{dos}(b+c) > 0;$$

zkąd

$$\mathrm{wst}\frac{a+b+c}{2}\,\mathrm{wst}\frac{b+c-a}{2} > 0.$$

Ta nierówność pokazuje że obydwa czynniki mają jednakowy znak. Owoż, nie mogą one być oba odjemne; albowiem, jeśli jest

$$2\pi > \frac{a+b+c}{2} > \pi \quad \text{i} \quad 2\pi > \frac{b+c-a}{2} > \pi,$$

ztądby wynikało $\qquad b+c > 2\pi;$

a jeśli

$$2\pi > \frac{a+b+c}{2} > \pi \quad \text{i} \quad \pi > \frac{a-b-c}{2} > 0$$

byłoby $\qquad a > \pi.$

Obydwa następstwa sprzeciwiają się założeniu. Więc musi być

$$a+b+c < 2\pi \quad \text{i} \quad a < b+c.$$

Podstawmy teraz $+1$ za dosA, będzie

$$\mathrm{dos}\,a < \mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c + \mathrm{wst}\,b\,\mathrm{wst}\,c \quad \text{albo} \quad \mathrm{dos}(b-c) - \mathrm{dos}\,a > 0,$$

zkąd

$$\mathrm{wst}\frac{a+b-c}{2}\,\mathrm{wst}\frac{a+c-b}{2} > 0.$$

Rozumując jako wyżej, znajdziemy łatwo że musi być

$$b < a+c \quad \text{i} \quad c < a+b.$$

To wszystko razem dowodzi że trzy łuki a, b, c zadość czynią czterem nierównościom

$$a + b + c < 2\pi, \quad a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

Więc istnieje trójkąt sferyczny mający za boki trzy łuki kół wielkich, mniejsze od półokręgów, które sprawdzają jedną z trzech fundamentalnych formuł.

193. *Związek między dwoma bokami i dwoma kątami przeciwległemi.* Jeśli chcemy mieć związek, na przykład między bokami a, b i kątami przeciwległemi A, B, trzeba wyrugować bok c i kąt C między równaniami (1). Ponieważ C nie wchodzi do dwóch pierwszych równań, dość jest wyrugować c między niemi. W tym celu, dodając i odciągając te równania i rozkładając na czynniki, otrzymujemy

$$(\mathrm{dos}\,a + \mathrm{dos}\,b)(1 - \mathrm{dos}\,c) = (\mathrm{wst}\,b\,\mathrm{dos}\,A + \mathrm{wst}\,a\,\mathrm{dos}\,B)\,\mathrm{wst}\,c$$
$$(\mathrm{dos}\,a - \mathrm{dos}\,b)(1 + \mathrm{dos}\,c) = (\mathrm{wst}\,b\,\mathrm{dos}\,A - \mathrm{wst}\,a\,\mathrm{dos}\,B)\,\mathrm{wst}\,c;$$

jeśli teraz pomnożymy stronami, i opuścimy czynniki równe $1 - \mathrm{dos}^2 c$, $\mathrm{wst}^2 c$, c wyruguje się i będzie

$$\mathrm{dos}^2 a - \mathrm{dos}^2 b = \mathrm{wst}^2 b\,\mathrm{dos}^2 A - \mathrm{wst}^2 a\,\mathrm{dos}^2 B;$$

Zkąd wynika

$$\mathrm{wst}^2 a\,\mathrm{wst}^2 B = \mathrm{wst}^2 b\,\mathrm{wst}^2 A.$$

albo, ponieważ wstawy są dodatne,

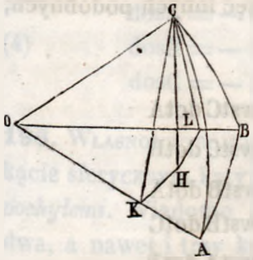
$$\frac{\mathrm{wst}\,a}{\mathrm{wst}\,A} = \frac{\mathrm{wst}\,b}{\mathrm{wst}\,B}.$$

Ztąd wnosimy że

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{wst}\,a}{\mathrm{wst}\,A} = \frac{\mathrm{wst}\,b}{\mathrm{wst}\,B} = \frac{\mathrm{wst}\,c}{\mathrm{wst}\,C}.$$

Więc *w trójkącie sferycznym, wstawy boków są proporcyonalne do wstaw kątów przeciwległych.*

Tego ważnego twierdzenia można wprost dowieśdź. W trójkącie sferycznym ABC, spuśćmy z wierzchołka C prostopadłę CH na płaszczyznę AOB, a ze spodka H prostopadłe HK, HL na OA, OB, i połączmy CK, CL, CO. Na mocy twierdzenia trzech prostopadłych, proste CK i CL są prostopadłe do OA i OB; zatem kąty CKH i CLH mierzą kąty dwójścienne A i B.



Owoż, trójkąty prostokątne CHK i CHL dają

$$CH = CK\,\text{wst}K = CL\,\text{wst}L,$$

zkąd

$$\text{wst}b\,\text{wst}A = \text{wst}a\,\text{wst}B \quad \text{albo} \quad \frac{\text{wst}a}{\text{wst}A} = \frac{\text{wst}b}{\text{wst}B}.$$

Więc

$$\frac{\text{wst}a}{\text{wst}A} = \frac{\text{wst}b}{\text{wst}B} = \frac{\text{wst}c}{\text{wst}C}.$$

194. *Związek między dwoma bokami, kątem zawartym i kątem przeciwległym.* Aby mieć związek między bokami a, b i kątami C, A, trzeba wyrugować c i B.

Rugując najpierwej dos$c$ między pierwszem i ostatniem równaniem (1), mamy

$$\text{dos}a = \text{dos}a\,\text{dos}^2 b + \text{wst}a\,\text{wst}b\,\text{dos}b\,\text{dos}C + \text{wst}b\,\text{wst}c\,\text{dos}A;$$

po czem, zastępując wst$c$ przez $\frac{\text{wst}\,C}{\text{wst}\,A}\text{wst}a$, i znosząc spólny czynnik wst b, będzie

$$\text{dos}a\,\text{wst}b = \text{wst}a\,\text{dos}b\,\text{dos}C + \text{wst}a\,\text{wst}C\,\text{dot}A;$$

nakoniec, jeśli podzielimy przez wst a, znajdziemy żądany związek

$$\text{dot}a\,\text{wst}b = \text{dos}b\,\text{dos}C + \text{wst}C\,\text{dot}A.$$

Z tego równania, prostą przemianą liter i bacząc na kąt zawarty i kąt przeciwległy, wywodzimy pięć innych podobnych; co razem daje sześć równań :

$$
\begin{aligned}
&\text{dot}\,a\,\text{wst}\,b = \text{dos}\,b\,\text{dos}\,C + \text{wst}\,C\,\text{dot}\,A\\
&\text{dot}\,b\,\text{wst}\,a = \text{dos}\,a\,\text{dos}\,C + \text{wst}\,C\,\text{dot}\,B\\
&\text{dot}\,a\,\text{wst}\,c = \text{dos}\,c\,\text{dos}\,B + \text{wst}\,B\,\text{dot}\,A\\
&\text{dot}\,c\,\text{wst}\,a = \text{dos}\,a\,\text{dos}\,B + \text{wst}\,B\,\text{dot}\,C\\
&\text{dot}\,b\,\text{wst}\,c = \text{dos}\,c\,\text{dos}\,A + \text{wst}\,A\,\text{dot}\,B\\
&\text{dot}\,c\,\text{wst}\,b = \text{dos}\,b\,\text{dos}\,A + \text{wst}\,A\,\text{dot}\,C.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Można wyrazić te równania w innym kształcie, łatwiejszym do spamiętania. Dzieląc pierwsze równanie przez $\text{dos}\,b\,\text{dos}\,C$, otrzymujemy

$$\frac{\text{dot}\,a}{\text{dot}\,b}\cdot\frac{1}{\text{dos}\,C} = 1 + \frac{\text{dot}\,A}{\text{dot}\,C}\cdot\frac{1}{\text{dos}\,b}$$

to jest : *stosunek dotycznych dwóch boków, podzielony przez dostawę kąta zawartego, przewyższa jednością stosunek dotycznych dwóch kątów podzielony przez dostawę boku zawartego, a bok i kąt, znajdujące się w licznikach tych stosunków, są sobie przeciwległe.*

195. *Związek między jednym bokiem i trzema kątami.* Możnaby otrzymać związek między a, A, B, C, rugując b i c z równań (1); ale prościej jest użyć trójkąta biegunowego. Jakoż, jeśli zastosujemy równania (1) do trójkąta biegunowego z danym ABC, uważając że odpowiednie boki i kąty tych trójkątów są nawzajem spełnieniami, będzie

$$\text{dos}(\pi-A)=\text{dos}(\pi-B)\,\text{dos}(\pi-C)+\text{wst}(\pi-B)\,\text{wst}(\pi-C)\,\text{dos}(\pi-a)$$

albo

$$\text{dos}\,A = -\,\text{dos}\,B\,\text{dos}\,C + \text{wst}\,B\,\text{wst}\,C\,\text{dos}\,a.$$

Mamy więc trzy nowe równania

$$
(4)\quad \begin{aligned}
\text{dos}A &= -\text{dos}B\,\text{dos}C + \text{wst}B\,\text{wst}C\,\text{dos}a\\
\text{dos}B &= -\text{dos}A\,\text{dos}C + \text{wst}A\,\text{wst}C\,\text{dos}b\\
\text{dos}C &= -\text{dos}A\,\text{dos}B + \text{wst}A\,\text{wst}B\,\text{dos}c.
\end{aligned}
$$

196. Własności trójkątów sferycznych prostokątnych. W trójkącie sferycznym kąty ostre albo rozwarte nazywają się kątami *pochyłemi*. Wiadomo że trójkąt sferyczny może mieć jeden, dwa, a nawet i trzy kąty proste. Gdy ma dwa kąty proste, wtedy boki im przeciwległe są ćwiercianami, i trzeci bok mierzy kąt odpowiadający; a gdy trójkąt ma trzy kąty proste, natenczas wszystkie jego boki są ćwiercianami. Trójkąty tego rodzaju nie mogą, jako widzimy, dać żadnego zagadnienia, i tworzą tylko przypadki szczególne.

Trójkąt sferyczny mający tylko jeden kąt prosty nazywa się *prostokątnym*, a bok przeciwległy temu kątowi *przeciwprostokątną*.

W trójkącie sferycznym prostokątnym summa kątów pochyłych jest większa od kąta prostego, ponieważ summa wszystkich trzech kątów jest większa od dwóch prostych.

Aby otrzymać formuły dotyczące trójkątów sferycznych prostokątnych, dość jest w znalezionych równaniach uczynić $A = 90^0$; te które zawierają kąt A stają się

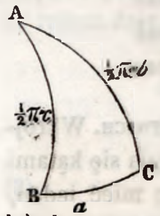
$$
(1)\quad \text{dos}a = \text{dos}b\,\text{dos}c
$$

$$
(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\text{wst}b &= \text{wst}a\,\text{wst}B\\
\text{wst}c &= \text{wst}a\,\text{wst}C
\end{aligned}\right.
$$

$$
(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\text{sty}b &= \text{sty}a\,\text{dos}C\\
\text{sty}c &= \text{sty}a\,\text{dos}B\\
\text{sty}b &= \text{wst}c\,\text{sty}B\\
\text{sty}c &= \text{wst}b\,\text{sty}C
\end{aligned}\right.
$$

$$
(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\text{dos}a &= \text{dot}B\,\text{dot}C\\
\text{dos}B &= \text{dos}b\,\text{wst}C\\
\text{dos}C &= \text{dos}c\,\text{wst}B
\end{aligned}\right.
$$

197. Jest pamięciowe prawidło obejmujące wszystkie dziesięć formuł.



Jakoż, jeśli w trójkącie sferycznym prostokątnym ABC, na bokach b, c kąta prostego A napiszemy ich dopełnienia $\frac{1}{2}\pi - b$, $\frac{1}{2}\pi - c$, i, nie licząc kąta prostego, będziemy uważali za części trójkąta pięć ilości a, C, $\frac{1}{2}\pi - b$, $\frac{1}{2}\pi - c$, B jakoby tworzyły ciąg zamknięty na obwodzie; zobaczymy łatwo że, biorąc *trzy* którekolwiek z tych części, jest zawsze między niemi jedna *średnia*, której są *przyległe* dwie inne albo od niej *oddzielone*. Otoż, wszystkie powyższe formuły są zawarte w tem jednem prawidle, spostrzeżonem przez Nepera, które stanowi niejako ogólne twierdzenie trójkątów sferycznych prostokątnych:

Dostawa *części* średniej *jest równa wieloczynowi* dotycznych *dwóch części* przyległych, *a wieloczynowi* wstaw *dwóch części* oddzielonych.

I tak, 1°, szukajmy związku między a, b, c. Ponieważ na obwodzie trójkąta ilość a jest oddzielona od ilości $\frac{1}{2}\pi - b$ i $\frac{1}{2}\pi - c$, mamy

$$\mathrm{dos}\,a = \mathrm{wst}\left(\frac{1}{2}\pi - b\right)\mathrm{wst}\left(\frac{1}{2}\pi - c\right)$$

albo

$$\mathrm{dos}\,a = \mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c.$$

2°. Znajdźmy związek między b, c. B. Ilość $\frac{1}{2}\pi - c$ jest przyległa ilościom B i $\frac{1}{2}\pi - b$; więc

$$\mathrm{dos}\left(\frac{1}{2}\pi - c\right) = \mathrm{dot}\left(\frac{1}{2}\pi - b\right)\mathrm{dot}\,\mathrm{B}$$

albo

$$\mathrm{sty}\,b = \mathrm{wst}\,c\,\mathrm{sty}\,\mathrm{B}\,.$$

198. Uwaga. Równania poprzedzającego numeru wskazują niektóre własności trójkątów sferycznych prostokątnych, godne uwagi.

1°. Równanie $\mathrm{dos}\,a = \mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c$ dowodzi że, *w trójkącie sferycznym prostokątnym, jest zawsze jeden bok mniejszy od ćwiercianu, a dwa inne oba mniejsze albo oba większe od ćwiercianów.*

2°. Równanie $\mathrm{sty}\,b = \mathrm{wst}\,c\,\mathrm{sty}\,\mathrm{B}$ pokazuje że, *w trójkącie sferycznym prostokątnym, kąt pochyły i bok przeciwległy są oba jednego rodzaju, to jest oba mniejsze albo oba większe od* 90°.

3°. Nakoniec, równanie $\mathrm{wst}\,b = \mathrm{wst}\,a\,\mathrm{wst}\,\mathrm{B}$ jest podobne do równania $b = a\,\mathrm{wst}\,\mathrm{B}$ w trójkącie prostokątnym prostolinijnym.

ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW SFERYCZNYCH PROSTOKĄTNYCH.

199. Trójkąty sferyczne prostokątne przedstawiają, między bokami i kątami, *dziesięć* zagadnień, których rozwiązywanie przywodzi się do sześciu różnych przypadków.

Pierwszy przypadek. *Mając daną przeciwprostokątnę a i bok b kąta prostego, wyrachować trzeci bok c i dwa kąty pochyłe* B, C.

Wyrachuje się bok c przez formułę

$$\mathrm{dos}\,c = \frac{\mathrm{dos}\,a}{\mathrm{dos}\,b}\,,$$

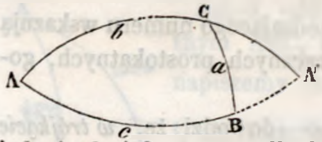
a zaś kąty B i C przez formuły

$$\mathrm{wst}\,b = \mathrm{wst}\,a\,\mathrm{wst}\,\mathrm{B} \quad \text{i} \quad \mathrm{dos}\,\mathrm{C} = \mathrm{dot}\,a\,\mathrm{sty}\,b\,,$$

napisane wedle prawidła Nepera;

$$\text{zkąd} \quad \mathrm{wst}\,\mathrm{B} = \frac{\mathrm{wst}\,b}{\mathrm{wst}\,a} \qquad \mathrm{dos}\,\mathrm{C} = \frac{\mathrm{sty}\,b}{\mathrm{sty}\,a}\,.$$

Możebność zagadnienia wymaga żeby bok a był zawarty między b i $\pi - b$; warunek konieczny i dostateczny. Albowiem, figura pokazuje że wszelki łuk koła, jako CB, poprowadzony z punktu C do okręgu koła wielkiego ABA′, jest większy od jednej z dwóch prostopadłych sferycznych CA i CA′, ale mniejszy od drugiej; więc, jeśli bok a czyni zadość temu warunkowi, łuk koła nakreślony z punktu C jako bieguna i promieniem sferycznym a, przecina okrąg koła wielkiego ABA′ w dwóch punktach symetrycznych względem CA, i wyznacza dwa trójkąty symetryczne, mające bok CA spólny. Ale te trójkąty stanowią tylko jedno rozwiązanie zagadnienia.



Uwaga. Powyższe formuły, wyznaczają niewiadome części trójkąta przez wstawy; co niezawsze daje dostateczne przybliżenie. Można wykonać rachunek tych niewiadomych przez styczne. Jakoż,

$$\text{sty}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{dos}c}{1 + \text{dos}c}} = \sqrt{\frac{\text{dos}b - \text{dos}a}{\text{dos}b + \text{dos}a}} = \sqrt{\text{sty}\frac{a+b}{2}\,\text{sty}\frac{a-b}{2}}.$$

Tak samo

$$\text{sty}\frac{1}{2}\text{C} = \sqrt{\frac{1 - \text{dosC}}{1 + \text{dosC}}} = \sqrt{\frac{\text{sty}a - \text{sty}b}{\text{sty}a + \text{sty}b}} = \sqrt{\frac{\text{wst}(a-b)}{\text{wst}(a+b)}}.$$

Ponieważ $\text{wstB} = \text{dos}(90^0 - \text{B})$, mamy także

$$\text{sty}\left(45^0 - \frac{1}{2}\text{B}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \text{wstB}}{1 + \text{wstB}}} = \pm\sqrt{\frac{\text{wst}a - \text{wst}b}{\text{wst}a + \text{wst}b}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\text{sty}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sty}\frac{1}{2}(a+b)}}.$$

W ostatniej formule trzeba wziąć znak + albo mniej, według jak dany bok b jest mniejszy albo większy od ćwiercianu.

DRUGI PRZYPADEK. *Mając dane dwa boki b i c kąta prostego, wyrachować a i* B, C.

Trójkąt jest oczywiście zawsze możebny, i formuła

$$\mathrm{dos}a = \mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}c$$

daje przeciwprostokątnę a.

Do wyrachowania kątów B i C użyje się formuł

$$\mathrm{sty}B = \frac{\mathrm{sty}b}{\mathrm{wst}c} \quad \text{i} \quad \mathrm{sty}C = \frac{\mathrm{sty}c}{\mathrm{wst}b}.$$

Jeśli przeciwprostokątna a jest źle wyznaczona przez swoją dostawę, trzeba najpierwej wyrachować kąt B albo C, po czem otrzyma się a przez jedną z formuł

$$\mathrm{dot}a = \mathrm{dot}c\,\mathrm{dos}B \quad \text{albo} \quad \mathrm{dot}a = \mathrm{dot}b\,\mathrm{dos}C.$$

TRZECI PRZYPADEK. *Znając przeciwprostokątnę a i kąt pochyły B, wyrachować b, c i* C.

Formuły

$$\mathrm{wst}b = \mathrm{wst}a\,\mathrm{wst}B\,, \quad \mathrm{sty}c = \mathrm{sty}a\,\mathrm{dos}B\,, \quad \mathrm{sty}C = \frac{\mathrm{dot}B}{\mathrm{dos}a}$$

rozwiązują zagadnienie, które jest zawsze możebne, i ma tylko jedno rozwiązanie; bo bok b, otrzymany przez wstawę, powinien być tego samego gatunku co wiadomy kąt B.

Jeśli bok b jest źle wyznaczony przez swoją wstawę, trzeba najpierwej znaleźć c albo C, i potem wyrachować b przez jedną z formuł

$$\mathrm{sty}b = \mathrm{wst}c\,\mathrm{sty}B, \quad \mathrm{sty}b = \mathrm{sty}a\,\mathrm{dos}C.$$

CZWARTY PRZYPADEK. *Mając dany bok b kąta prostego i kąt przyległy* C, *wyrachować a, c i* B

Szukany trójkąt jest zawsze możebny, i niewiadome otrzymują się przez formuły

$$\mathrm{sty}a = \frac{\mathrm{sty}b}{\mathrm{dos}C}, \quad \mathrm{sty}c = \mathrm{wst}b\,\mathrm{sty}C\,, \quad \mathrm{dos}B = \mathrm{dos}b\,\mathrm{wst}C.$$

Ale kąt B może być źle wyznaczony przez swoją dostawę; dla uniknienia tej niedogodności, trzeba najpierwej znaleźć a albo c, i potem wyrachować kąt B przez jedną z formuł

$$\text{sty}B = \frac{\text{dot}C}{\text{dos}a}, \quad \text{sty}B = \frac{\text{sty}b}{\text{wst}c}.$$

Piąty przypadek. *Mając dany bok b i kąt przeciwległy* B, *wyrachować a, c i* C.

Jeśli trójkąt istnieje, można szukać niewiadomych biorąc formuły

$$\text{wst}a = \frac{\text{wst}b}{\text{wst}B}, \quad \text{wst}c = \frac{\text{sty}b}{\text{sty}B}, \quad \text{wst}C = \frac{\text{dos}b}{\text{dos}B}.$$

Ale lepiej jest użyć następujących:

$$\text{sty}\left(45^0 - \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\text{sty}\frac{1}{2}(B-b)}{\text{sty}\frac{1}{2}(B+b)}},$$

$$\text{sty}\left(45^0 - \frac{c}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\text{wst}(B-b)}{\text{wst}(B+b)}},$$

$$\text{sty}\left(45^0 - \frac{1}{2}C\right) = \pm\sqrt{\text{sty}\frac{1}{2}(B+b)\,\text{sty}\frac{1}{2}(B-b)},$$

które wyznaczają trzy niewiadome przez ich styczne.

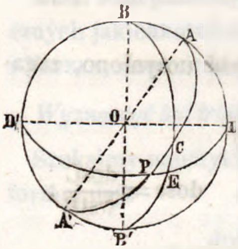
Te dwa układy formuł dają dla każdej niewiadomej dwie wartości spełniające. Więc zagadnienie może ogólnie mieć dwa rozwiązania, i trzeba wiedzieć które ze znalezionych wartości powinny iść razem. Przede wszystkiem wartości dla c i C muszą być tego samego gatunku. Co do przeciwprostokątnej a; ponieważ w trójkącie sferycznym prostokątnym wszystkie trzy boki są mniejsze od ćwiercianu albo tylko jeden, zatem: jeśli $b < \frac{\pi}{2}$, trzeba wziąć wartości dla a i c obie mniejsze albo obie większe od ćwiercianu; jeśli zaś $b > \frac{\pi}{2}$, wtedy wartości dla a i c powinny być jedna mniejsza a druga większa od ćwiercianu.

Ale, w szczególnym przypadku gdy $B = b$, formuły dają dla każdej niewiadomej jedną tylko wartość

$$\text{wst}\,a = \text{wst}\,c = \text{wst}\,C = 1\,, \quad \text{zkąd} \quad a = c = C = 90^0;$$

wtedy trójkąt dwójprostokątny jest jedynem rozwiązaniem zagadnienia.

Zobaczmy teraz pod jakiemi warunkami zagadnienie jest



możebne. Niech będzie najpierwej trójkąt sferyczny ABC mający kąt B ostry. Poprowadźmy koło wielkie DED' prostopadłe do średnicy BB'; to koło przecina boki trójkąta ABC, przedłużone jeśli trzeba, w punktach D, E, P. Punkt P jest biegunem boku AB, a łuk DE miarą kąta B. Owoż, $PD = PA$, i w trójkącie prostokątnym PCE $PE < PC$; ztąd wynika $DE > AC$. Więc, w trójkącie sferycznym prostokątnym BCA mającym kąt B ostry, jest $B > b$. Przeciwnie, w trójkącie sferycznym prostokątnym BCA' mającym kąt B rozwarty, jest $B < b$. Te warunki konieczne są dostateczne; albowiem, jeśli kąt B tego samego gatunku co bok przeciwległy b dopełnia tych warunków, można zawsze wyznaczyć wierzchołek C kreśląc małe koło z bieguna P łuku BA, promieniem sferycznym $PC = \frac{\pi}{2} - b$ albo $PC = \frac{\pi}{2} + b$ według jak kąt B jest ostry albo rozwarty.

Jest dwa rozwiązania; figura jasno pokazuje że dwa trójkąty ACB i ACB' zadość czynią zagadnieniu. Ale, gdy $B = b$, te trójkąty są równe i trójkąt dwójprostokątny BDE jest jedynem rozwiązaniem.

Szósty przypadek. *Mając dane dwa kąty pochyłe* B *i* C, *wyrachować trzy boki a, b, c.*

Istnienie trójkąta sferycznego wymaga żeby summa trzech kątów mieściła się między dwoma i sześcioma kątami prostemi, i każdy kąt powiększony dwoma prostemi był większy od summy dwóch innych. Ztąd wynika że, w trójkącie sferycznym prostokątnym ABC w którym $A=\frac{\pi}{2}$, powinno być

$$\frac{3\pi}{2} > B + C > \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad B - C < \frac{\pi}{2},$$

przypuszczając $B \geq C$.

Jeśli tym warunkom *koniecznym* zadość uczyniono, zagadnienie ma jedno tylko rozwiązanie.

Niewiadome wyrażają się przez formuły

$$\operatorname{dos} a = \operatorname{dot} B \operatorname{dot} C, \quad \operatorname{dos} b = \frac{\operatorname{dos} B}{\operatorname{wst} C}, \quad \operatorname{dos} c = \frac{\operatorname{dos} C}{\operatorname{wst} B};$$

ale do rachunku lepiej jest użyć następujących:

$$\operatorname{sty}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\operatorname{dos}(B+C)}{\operatorname{dos}(B-C)}}$$

$$\operatorname{sty}\frac{b}{2} = \sqrt{\operatorname{sty}\left(\frac{B+C}{2} - 45^0\right)\operatorname{sty}\left(\frac{B-C}{2} + 45^0\right)}$$

$$\operatorname{sty}\frac{c}{2} = \sqrt{\operatorname{sty}\left(\frac{B+C}{2} - 45^0\right)\operatorname{sty}\left(\frac{C-B}{2} + 45^0\right)}$$

które potrzebują tej samej liczby logarytmów, i dają przybliżenia zawsze dostateczne.

Uwaga. W rachunkach logarytmicznych linij trygonometrycznych, zdarza się nieraz pewna trudność którą uprzątnąć powinniśmy. I tak, na przykład w pierwszych formułach, niewiadoma a jest dana przez dostawę. Owoż, jeśli ta dostawa jest odjemna, nie można do niej stosować logarytmów. W takim razie trzeba wziąć spełnienie łuku a, i szukać $\operatorname{dos}(\pi-a)$ która będzie dodatna i wyrachuje się przez logarytmy; znając wartość $\pi-a$, łatwo z niej wyprowadzić niewiadomę a.

Jeśli trzeba wyrachować wartość $\operatorname{dos} C = \frac{\operatorname{sty} b}{\operatorname{sty} a}$, a oba łuki a i b są większe od ćwiercianów, wtedy dość wziąć styczne spełnień łuków a i b; tym sposobem, nie zmieniając bynajmniej wartości $\operatorname{dos} C$, uczyni się możebnym rachunek logarytmiczny.

200. Nim przedsięweźmiemy rozwiązywanie trójkątów sferycznych jakichkolwiek, wyłożymy najpierwej formuły Delambra i Nepera, dowodzenie oprzemy na następującem zagadnieniu.

Wyznaczyć kąt trójkąta sferycznego w funkcyi trzech boków.

Szukajmy naprzykład kąta A. Pierwsza z fundamentalnych formuł daje

$$\operatorname{dos} A = \frac{\operatorname{dos} a - \operatorname{dos} b \operatorname{dos} c}{\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c}.$$

Owoż, $\operatorname{wst}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1-\operatorname{dos} A}{2}}$ i $\operatorname{dos}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1+\operatorname{dos} A}{2}}$;

więc, podstawiając, będzie

$$\operatorname{wst}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c + \operatorname{dos} b \operatorname{dos} c - \operatorname{dos} a}{2\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\operatorname{wst}\frac{a+c-b}{2} \operatorname{wst}\frac{a+b-c}{2}}{\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c}}.$$

$$\operatorname{dos}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c - \operatorname{dos} b \operatorname{dos} c + \operatorname{dos} a}{2\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\operatorname{wst}\frac{a+b+c}{2} \operatorname{wst}\frac{b+c-a}{2}}{\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c}};$$

zkąd, czyniąc $a + b + c = 2p$, wynika

$$(1)\quad \begin{cases} \mathrm{wst}\frac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{\mathrm{wst}(p-b)\,\mathrm{wst}(p-c)}{\mathrm{wst}b\,\mathrm{wst}c}} \\ \mathrm{dos}\frac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{\mathrm{wst}p\,\mathrm{wst}(p-a)}{\mathrm{wst}b\,\mathrm{wst}c}} \\ \mathrm{sty}\frac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{\mathrm{wst}(p-b)\,\mathrm{wst}(p-c)}{\mathrm{wst}p\,\mathrm{wst}(p-a)}} \end{cases}$$

Prostą przemianą liter, wywodzi się z tych formuł trzy podobne dla kąta $\frac{1}{2}B$, i także trzy dla kąta $\frac{1}{2}C$; we wszystkich pierwiastnik powinien być wzięty dodatnie, albowiem linie trygonometryczne kątów ostrych $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ są wszystkie dodatne.

Uwaga. Z mnożenia między sobą dwóch pierwszych równań (1) wynika następująca formuła nieraz użyteczna,

$$\mathrm{wst}A = \frac{2}{\mathrm{wst}b\,\mathrm{wst}c}\sqrt{\mathrm{wst}p\,\mathrm{wst}(p-a)\,\mathrm{wst}(p-b)\,\mathrm{wst}(p-c)}$$
$$= \frac{2\Delta}{\mathrm{wst}b\,\mathrm{wst}c},$$

nazywając Δ pierwiastnik $\sqrt{\mathrm{wst}p\,\mathrm{wst}(p-a)\,\mathrm{wst}(p-b)\,\mathrm{wst}(p-c)}$

FORMUŁY DELAMBRA.

201. W formułach

$$\mathrm{wst}\frac{1}{2}(A \pm B) = \mathrm{wst}\frac{1}{2}A\,\mathrm{dos}\frac{1}{2}B \pm \mathrm{dos}\frac{1}{2}A\,\mathrm{wst}\frac{1}{2}B,$$

$$\mathrm{dos}\frac{1}{2}(A \pm B) = \mathrm{dos}\frac{1}{2}A\,\mathrm{dos}\frac{1}{2}B \mp \mathrm{wst}\frac{1}{2}A\,\mathrm{wst}\frac{1}{2}B,$$

zastąpmy $\text{wst}\frac{1}{2}A$ i $\text{dos}\frac{1}{2}A$, $\text{wst}\frac{1}{2}B$ i $\text{dos}\frac{1}{2}B$ przez ich wartości w funkcyi boków, dane w poprzedzającym numerze; będzie

$$\text{wst}\frac{1}{2}(A\pm B)=\frac{\text{wst}(p-b)\pm\text{wst}(p-a)}{\text{wst}c}\sqrt{\frac{\text{wst}p\,\text{wst}(p-c)}{\text{wst}a\,\text{wst}b}},$$

$$\text{dos}\frac{1}{2}(A\pm B)=\frac{\text{wst}p\mp\text{wst}(p-c)}{\text{wst}c}\sqrt{\frac{\text{wst}(p-a)\,\text{wst}(p-b)}{\text{wst}a\,\text{wst}b}};$$

ztąd, biorąc osobno każdą ze czterech formuł, i zamieniając summy na wieloczyny, otrzymujemy

$$\text{wst}\frac{1}{2}(A+B)=\frac{2\text{wst}\frac{c}{2}\text{dos}\frac{a-b}{2}\text{dos}\frac{1}{2}C}{\text{wst}c}$$

$$\text{wst}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{2\text{dos}\frac{c}{2}\text{wst}\frac{a-b}{2}\text{dos}\frac{1}{2}C}{\text{wst}c}$$

$$\text{dos}\frac{1}{2}(A+B)=\frac{2\text{dos}\frac{a+b}{2}\text{wst}\frac{c}{2}\text{wst}\frac{1}{2}C}{\text{wst}c}$$

$$\text{dos}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{2\text{wst}\frac{a+b}{2}\text{dos}\frac{c}{2}\text{wst}\frac{1}{2}C}{\text{wst}c}.$$

Te równania, uproszczone za pomocą formuły

$\text{wst}c=2\text{wst}\frac{1}{2}c\,\text{dos}\frac{1}{2}c$, dają następujące formuły Delambra

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\text{wst}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{dos}\frac{1}{2}C}&=\frac{\text{dos}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{dos}\frac{1}{2}c}\\
\frac{\text{wst}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{dos}\frac{1}{2}C}&=\frac{\text{wst}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\frac{1}{2}c}\\
\frac{\text{dos}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{wst}\frac{1}{2}C}&=\frac{\text{dos}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{dos}\frac{1}{2}c}\\
\frac{\text{dos}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{wst}\frac{1}{2}C}&=\frac{\text{wst}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{wst}\frac{1}{2}c}
\end{aligned}\right.$$

Uwaga. Jeśli, w trójkącie sferycznym ABC, przedłużymy dwa boki jednego kąta aż do ich spotkania, na przykład boki AB i AC kąta A aż do punktu spotkania A', utworzymy trójkąt BCA' który się nazywa *spełniającym* trójkąta ABC. W trójkącie BCA', bok $BC=a$, $BA'=\pi-c$, $CA'=\pi-b$; kąt $CBA'=\pi-B$, $BCA'=\pi-C$. Otoż, za pomocą trójkąta spełniającego BCA' pierwsza formuła Delambra daje czwartą a druga trzecią.

Formuły Delambra przypisują błędnie Gaussowi.

ANALOGIE NEPERA.

202. Jeśli z formuł Delambra wyrugujemy po kolei $\operatorname{dos}\frac{c}{2}$ i $\operatorname{wst}\frac{c}{2}$, $\operatorname{dos}\frac{1}{2}C$ i $\operatorname{wst}\frac{1}{2}C$, dzieląc pierwszą formułę przez trzecią i drugą przez czwartą, potem czwartą przez trzecią i drugą przez pierwszą, znajdziemy cztery następujące proporcye, znane pod nazwiskiem *analogij* Nepera.

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
\operatorname{sty}\frac{1}{2}(A+B)&=\frac{\operatorname{dos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{dos}\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{dot}\frac{1}{2}C\\
\operatorname{sty}\frac{1}{2}(A-B)&=\frac{\operatorname{wst}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{wst}\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{dot}\frac{1}{2}C\\
\operatorname{sty}\frac{1}{2}(a+b)&=\frac{\operatorname{dos}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{dos}\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{sty}\frac{c}{2}\\
\operatorname{sty}\frac{1}{2}(a-b)&=\frac{\operatorname{wst}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{wst}\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{sty}\frac{c}{2}
\end{aligned}\right.$$

Każda z analogij Nepera zawiera tylko pięć części trójkąta sferycznego, gdy tymczasem każda z formuł Delambra zawiera je wszystkie sześć.

Uwaga. Druga proporcya Nepera czyli *analogia* jest podobna do formuły n° 126. Ta proporcya daje pierwszą przez trójkąt spełniający BCA′; dwie ostatnie wywodzą się z dwóch pierwszych przez trójkąt biegunowy.

Nie trudnoby nawzajem z analogij Nepera wyprowadzić formuły Delambra.

ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW SFERYCZNYCH JAKICHKOLWIEK.

203. Rozwiązywanie trójkątów sferycznych jakichkolwiek może się czasem uskutecznić przez trójkąty prostokątne.

I tak. 1°. Jeśli między danemi częściami trójkąta sferycznego jest bok równy 90°, kąt odpowiedający w trójkącie biegunowym będzie prosty; i nadto, będą wiadome dwie z pięciu innych jego części. Więc będzie można łatwo rozwiązać ten trójkąt prostokątny, i z niego wyprowadzić niewiadome części zadanego trójkąta.

2°. Jeśli między danemi częściami trójkąta znajdują się dwa boki a i b równe, albo dwa kąty A i B także równe; wtedy prostopadła CD, spuszczona z wierzchołka C na bok AB dzieli ten trójkąt na dwa prostokątne symetryczne CDA i CDB; w każdym z nich, oprócz kąta prostego, wiadome są dwie części. Rozwiązawszy jeden z tych trójkątów prostokątnych rozwiąże się temsamem zadany.

3°. Jeśli między danemi częściami znajdują się dwa boki a i b spełniające, albo dwa kąty A i B spełniające, przedłużając boki a i c aż do ich spotkania B′, utworzy się trójkąt CAB′ równoramienny w którym bok CA=CB′, i kąt CAB′=B′=B. Więc, na mocy tego co poprzedza, rozwiązanie trójkąta CAB daje rozwiązanie trójkąta zadanego.

Trójkąty sferyczne jakiekolwiek przedstawiają, między bokami i kątami, *dwadzieścia* zagadnień, których rozwiązywanie przywodzi się do *sześciu* następujących przypadków.

204. Pierwszy przypadek. *Mając dane trzy boki a, b, c, wyrachować trzy kąty.*

Kąt A jest wyznaczony przez formułę

$$\operatorname{dos}A = \frac{\operatorname{dos}a - \operatorname{dos}b \operatorname{dos}c}{\operatorname{wst}b \operatorname{wst}c}.$$

Ale, ponieważ ta formuła nie jest wyrachowalna przez logarytmy, wywiedziono z niej inne, temu rachunkowi dogodne, które już znamy, to jest:

$$\operatorname{wst}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\operatorname{wst}(p-b)\operatorname{wst}(p-c)}{\operatorname{wst}b \operatorname{wst}c}}$$

$$\operatorname{dos}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\operatorname{wst}p \operatorname{wst}(p-a)}{\operatorname{wst}b \operatorname{wst}c}}$$

$$\operatorname{sty}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\operatorname{wst}(p-b)\operatorname{wst}(p-c)}{\operatorname{wst}p \operatorname{wst}(p-a)}}$$

Powyższe formuły są podobne do tych któreśmy w trygonometryi prostolinijnej otrzymali, z tą różnicą że tu zamiast boków i półobwodu są ich wstawy. Z tych formuł otrzymuje się zaraz trzy inne do rachunku kąta B, i także trzy do rachunku kąta C.

Jeśli chodzi o wyrachowanie trzech kątów trójkąta, trzeba użyć stycznej; bo jej formuła wymaga tylko czterech logarytmów dla wszystkich trzech kątów, i daje zawsze dostateczne przybliżenie.

Uwaga. Dyskutując te formuły, jako w trygonometryi prostolinijnej, nie trudno znaleźć że, dla istnienia trójkąta sferycznego mającego trzy dane boki, trzeba i dość jest żeby summa tych boków była mniejsza od 2π, i każdy z nich był mniejszy od summy dwóch innych.

Można także skrócić rachunek kątów trójkąta sferycznego przez styczne, działając jako w trygonometryi prostolinijnej. Jakoż, mamy

$$\mathrm{sty}\frac{1}{2}A = \frac{1}{\mathrm{wst}(p-a)}\sqrt{\frac{\mathrm{wst}(p-a)\,\mathrm{wst}(p-b)\,\mathrm{wst}(p-c)}{\mathrm{wst}p}};$$

jeśli więc uczynimy $\sqrt{\frac{\mathrm{wst}(p-a)\mathrm{wst}(p-b)\mathrm{wst}(p-c)}{\mathrm{wst}p}} = \mathrm{sty}r$,

oznaczając przez r promień sferyczny koła wpisanego jako później zobaczymy, będzie

$$\mathrm{sty}\frac{1}{2}A = \frac{\mathrm{sty}r}{\mathrm{wst}(p-a)},\quad \mathrm{sty}\frac{1}{2}B = \frac{\mathrm{sty}r}{\mathrm{wst}(p-b)},\quad \mathrm{sty}\frac{1}{2}C = \frac{\mathrm{sty}r}{\mathrm{wst}(p-c)}.$$

Tym sposobem rachunek logarytmiczny znacznie się uprości.

205. Drugi przypadek. *Mając dane dwa boki a, b i kąt zawarty* C, *wyrachować c, i* A, B.

Formuły (3) n^ru 194 wyznaczają kąty A i B.

$$\mathrm{dot}A = \frac{\mathrm{dot}a\,\mathrm{wst}b - \mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}C}{\mathrm{wst}C}$$

$$\mathrm{dot}B = \frac{\mathrm{dot}b\,\mathrm{wst}a - \mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}C}{\mathrm{wst}C}.$$

Można, za pomocą kąta posiłkowego, przekształcić formuły na wyrachowalne przez logarytmy. I tak, biorąc pierwszą i czyniąc

$$\mathrm{dot}a = \mathrm{dos}C\,\mathrm{dot}\varphi \quad \text{czyli} \quad \mathrm{sty}\varphi = \mathrm{sty}a\,\mathrm{dos}C,$$

znajdziemy

$$\mathrm{sty}A = \frac{\mathrm{sty}C\,\mathrm{wst}\varphi}{\mathrm{wst}(b-\varphi)}. \tag{1}$$

Ten rachunek kąta A wymaga pięciu logarytmów. O wiele jest prościej użyć dwóch analogij *Nepera*:

$$\mathrm{sty}\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\frac{\mathrm{dos}\frac{1}{2}(a-b)}{\mathrm{dos}\frac{1}{2}(a+b)}\mathrm{dot}\frac{1}{2}\mathrm{C}$$

$$\mathrm{sty}\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a-b)}{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+b)}\mathrm{dot}\frac{1}{2}\mathrm{C},$$

które dają $\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ i $\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$, a zatem A i B.

Znalazszy kąty A i B, możnaby szukać boku c przez proporcyę

$$\frac{\mathrm{wst}c}{\mathrm{wstC}}=\frac{\mathrm{wst}a}{\mathrm{wstA}};$$

ale pewniej jest wyznaczać ten bok przez jedną z dwóch ostatnich analogij *Nepera*.

Jeśli chcemy znaleźć wprost bok c, nie przechodząc przez kąty A i B, zwłaszcza gdy potrzebujemy samego tylko boku c, trzeba wziąć formułę

$$\mathrm{dos}c=\mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}b+\mathrm{wst}a\,\mathrm{wst}b\,\mathrm{dosC}$$

i, posługując się kątem posiłkowym φ, uczynić

$$\mathrm{wst}a\,\mathrm{dosC}=\mathrm{dos}a\,\mathrm{sty}\varphi \qquad \text{albo} \qquad \mathrm{sty}\varphi=\mathrm{sty}a\,\mathrm{dosC};$$

podstawiając tę wartość, będzie

$$(2) \qquad \mathrm{dos}c=\frac{\mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}(b-\varphi)}{\mathrm{dos}\varphi};$$

formuła wyrachowalna przez logarytmy.

Zdarza się czasem że bok c jest źle wyznaczony przez swoją dostawę; w takim przypadku trzeba najpierwej wyrachować kąty A i B, po czem będzie można otrzymać bok c przez styczną. Jakoż, dzieląc formułę

$$\text{wst}c = \frac{\text{wstC wst}a}{\text{wstA}}$$

przez formułę (2), znajdujemy równość

$$\text{sty}c = \frac{\text{wstC sty}a\,\text{dos}\varphi}{\text{wstA dos}(b-\varphi)}$$

która, podzielona przez formułę (1) i uproszczona za pomocą równości $\text{sty}\varphi = \text{sty}a\,\text{dosC}$, daje ostatecznie

$$\text{sty}c = \frac{\text{sty}(b-\varphi)}{\text{dosA}}.$$

206. Trzeci przypadek. *Mając dane dwa boki a, b i kąt A przeciwległy pierwszemu, wyrachować c i B, C.*

Kąt B wyrachuje się przez formułę

$$\text{wstB} = \frac{\text{wst}b\,\text{wstA}}{\text{wst}a};$$

po czem, najlepiej będzie wyznaczyć kąt C i bok c przez analogie *Nepera*, biorąc na przykład drugą i czwartą:

$$\text{sty}\frac{1}{2}\text{C} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(a-b)\,\text{dot}\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{wst}\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\text{sty}\frac{c}{2} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})\,\text{sty}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}.$$

Aby szukany trójkąt istniał, log wstB znaleziony za pomocą tablic musi być mniejszy od 10 a najwięcej równy 10; jeśli tak jest, wstB wyznacza dla kąta B dwie wartości spełniające. Otóż, w trójkącie sferycznym, mniejszy z dwóch boków jest przeciwległy mniejszemu kątowi, i nawzajem; ztąd wynika że różnice $a-b$ i $A-B$ mają te same znaki. Więc trzeba odrzucić wszelką wartość kąta B która nie nadaje różnicy A—B znaku różnicy $a-b$. Ten warunek konieczny jest dostateczny; albowiem, każda wartość kąta B, dopełniająca warunku, daje $\operatorname{sty}\frac{1}{2}C$ i $\operatorname{sty}\frac{c}{2}$ obie dodatne, a temsamem kąt C i bok c takie jakie być powinny. Dowiedziemy zaraz że istnieje trójkąt sferyczny mający znalezione części B, C, c i dane a, b, A. W samej rzeczy, można zawsze zbudować trójkąt sferyczny mający dwa boki a, b i kąt zawarty C. Nazywając c', A', B' trzy inne części tego trójkąta, będzie

$$\operatorname{sty}\frac{1}{2}C = \frac{\operatorname{wst}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{wst}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{sty}\frac{1}{2}(A'-B')}.$$

Owóż, poprzednio znaleźliśmy

$$\operatorname{sty}\frac{1}{2}C = \frac{\operatorname{wst}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{wst}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{sty}\frac{1}{2}(A-B)};$$

więc

$$A'-B' = A-B.$$

W tym samym trójkącie mamy także

$$\frac{\operatorname{wst}A'}{\operatorname{wst}a} = \frac{\operatorname{wst}B'}{\operatorname{wst}b},$$

zkąd

$$\frac{\operatorname{sty}\frac{1}{2}(A'+B')}{\operatorname{sty}\frac{1}{2}(A'-B')} = \frac{\operatorname{sty}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sty}\frac{1}{2}(a-b)},$$

ale rachunek kąta B daje

$$\frac{\operatorname{wst}A}{\operatorname{wst}a} = \frac{\operatorname{wst}B}{\operatorname{wst}b}$$

zkąd

$$\frac{\operatorname{sty}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sty}\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{sty}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sty}\frac{1}{2}(a-b)}.$$

Z tych równań, ponieważ $A' - B' = A - B$, wynika

$$A' + B' = A + B.$$

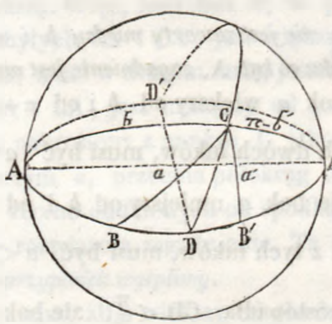
Więc

$$A' = A \quad \text{i} \quad B' = B.$$

Nadto $$\text{sty}\frac{c'}{2} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(A' + B')\,\text{sty}\frac{1}{2}(a - b)}{\text{wst}\frac{1}{2}(A' - B')} = \text{sty}\frac{c}{2};$$

więc $c' = c$.

207. Dyskussya. Są przypadki w których, nie szukając kąta B, można wiedzieć czy zagadnienie jest możebne i ile ma rozwiązań; następująca dyskussya wskazuje do tego sposób



Na sferze wykreślmy wielkie koło AB; zróbmy kąt BAC równy danemu A, weźmy bok $AC = b$, i przedłużmy go aż do przecięcia A' z okręgiem AB; po czem, z punktu C jako bieguna i promieniem sferycznym równym bokowi a, nakreślmy łuk koła, który spotka półokrąg ABA' w dwóch punktach albo tylko w jednym, albo nie spotka w żadnym. To pokazuje że zagadnienie może mieć dwa rozwiązania, jedno tylko, albo nie mieć żadnego. Owoż, z punktu C spuśćmy na okrąg AB obie prostopadłe sferyczne CD i CD'. Wiadomo że, w trójkącie sferycznym prostokątnym ACD, bok DC kąta prostego D jest mniejszy albo większy od ćwiercianu, według jak kąt przeciwległy A jest ostry albo rozwarty; więc, w pierwszym razie prostopadła CD jest najmniejszym łukiem, a zaś w drugim ta prostopadła jest największym łukiem koła wielkiego jaki z punktu C do półokręgu ABA′ poprowadzić można. Na tej prostej uwadze opiera się cała dyskussya zagadnienia; dość tylko rozróżnić trzy przypadki.

1°. *Jeśli bok a jest zawarty między bokiem b i jego spełnieniem $\pi - b$, zagadnienie ma zawsze jedno rozwiązanie, jakikolwiek jest kąt* A. Albowiem okrąg, nakreślony z punktu C jako bieguna i promieniem sferycznym a, przecina jeden z łuków CA albo CA′ i przedłużenie drugiego; więc przecina półokrąg ABA′ w jednym punkcie i wyznacza trójkąt sferyczny.

2°. *Jeśli bok a nie jest zawarty między b i $\pi - b$, i nie jest tego samego gatunku co kąt* A, *zagadnienie jest niemożebne.* Jakoż, przypuszczając bok a większy od b i od $\pi - b$, albo równy większemu z tych dwóch łuków, musi być $a > \frac{\pi}{2}$; przypuszczając przeciwnie bok a mniejszy od b i od $\pi - b$, albo równy mniejszemu z tych łuków, musi być $a < \frac{\pi}{2}$. Więc, gdy kąt $A < \frac{\pi}{2}$, prostopadła $CD < \frac{\pi}{2}$, ale bok $a > \frac{\pi}{2}$; wtedy bok a, większy od pochyłych CA, CA′ i temsamem większy od prostopadłej mniejszej CD, nie może mieć spodka na półokręgu ABA′. Gdy kąt $A > \frac{\pi}{2}$, jest także $CD > \frac{\pi}{2}$, ale $a < \frac{\pi}{2}$; wtedy bok a, mniejszy od pochyłych CA, CA′ i temsamem mniejszy od prostopadłej większej CD, nie ma spodka na półokręgu ABA′. Nareszcie, gdy $A = \frac{\pi}{2}$, bok a jest mniejszy albo większy od obydwóch prostopadłych CA i CA′, albo równy jednej z nich; wtedy spodek boku a znajduje się oczywiście na okręgu który nie przecina koła wielkiego AB, albo je spotyka w jednym tylko z dwóch punktów A, A'. Z tego wszystkiego wynika że, jakikolwiek jest kąt A, szukany trójkąt nie istnieje.

3°. *Jeśli bok a nie jest zawarty między b i $\pi - b$, ale jest tego samego gatunku co kąt A, zagadnienie może mieć dwa rozwiązania albo tylko jedno, albo nawet nie mieć żadnego.* Jakoż, przypuszczając $a < b$ i $a < \pi - b$ będzie $a < \frac{\pi}{2}$, i $A < \frac{\pi}{2}$ ponieważ z założenia kąt A jest tego samego gatunku co bok przeciwległy; wtedy CD jest prostopadłą mniejszą. Przypuszczając zaś $a > b$ i $a > \pi - b$ będzie $a > \frac{\pi}{2}$, i $A > \frac{\pi}{2}$; wtedy CD jest prostopadłą większą. Więc, jeśli bok a, w pierwszym razie mniejszy od pochyłych CA i CA', jest większy od prostopadłej mniejszej CD, a zaś w drugim razie, jeśli ten bok, większy od pochyłych CA i CA', jest mniejszy od prostopadłej większej CD, okrąg nakreślony z punktu C jako bieguna, promieniem sferycznym a, przecina półokrąg AB'A' w dwóch punktach B, B' równo oddalonych od spodka D, i dwa trójkąty ACB, ACB' rozwiązują zagadnienie. Ta okoliczność stanowi tak zwany *przypadek wątpliwy*.

Gdy bok a, mniejszy albo większy od obydwóch pochyłych CA i CA', jest równy prostopadłej sferycznej która odpowieda kątowi A, wtedy trójkąt prostokątny ACD jest jedynem rozwiązaniem zagadnienia.

Nareszcie, gdy bok a jest mniejszy albo większy od obydwóch prostopadłych sferycznych, zagadnienie jest niemożebne.

Wielkość prostopadłej sferycznej CD otrzymuje się łatwo przez trójkąt sferyczny prostokątny ACD, w którym

$$\text{wst}CD = \text{wst}b \, \text{wst}A.$$

Więc

$$\text{wst}B = \frac{\text{wst}CD}{\text{wst}a}.$$

Ostatnia formuła pokazuje że, w obecnym przypadku, liczba rozwiązań zależy od liczby wartości kąta B które dają różnicę A — B ze znakiem różnicy $a - b$.

Do tego paragrafu należą dwa szczególne przypadki $a = b$ i $a = \pi - b$, z kątem A tego samego gatunku co bok a. W pierwszym z tych przypadków trójkąt równoramienny rozwiązuje zagadnienie, w drugim trójkąt mający kąty A i B spełniające. Ale, gdy szukany trójkąt ABC jest równoramienny, $\text{sty}\frac{1}{2}C$ i $\text{sty}\frac{c}{2}$ przedstawiają się w kształcie symbolicznym $\frac{0}{0}$. Żeby znaleźć ich prawdziwą wartość, dość wziąć trójkąt prostokątny ACD, w którym (197)

$$\text{dos}a = \text{dot}A\,\text{dot}\tfrac{1}{2}C\,, \qquad \text{zkąd} \qquad \text{dot}\tfrac{1}{2}C = \text{dos}a\,\text{sty}A\,;$$

$$\text{dos}A = \text{dot}a\,\text{sty}\tfrac{c}{2} \qquad \text{zkąd} \qquad \text{sty}\tfrac{c}{2} = \text{sty}a\,\text{dos}A\,.$$

Nakoniec, trzeba uważać przypadek osobliwy $a = \pi - b = \frac{\pi}{2}$, w którym, jeśli kąt A jest prosty trójkąt jest dwójprostokątny i zagadnienie *niewyznaczone*; a jeśli kąt A jest pochyły trójkąt nie istnieje.

208. Można otrzymać wprost kąt C przez równanie (nº 194)

$$\text{dot}a\,\text{wst}b = \text{dos}b\,\text{dos}C + \text{wst}C\,\text{dot}A$$

albo

$$\text{dos}C + \text{wst}C\frac{\text{dot}A}{\text{dos}b} = \text{dot}a\,\text{sty}b\,,$$

biorąc tylko kąt posiłkowy φ taki żeby

$$\text{sty}\varphi = \frac{\text{dot}A}{\text{dos}b}.$$

Podstawiając tę wartość, mamy

$$\mathrm{dos}C\,\mathrm{dos}\varphi + \mathrm{wst}C\,\mathrm{wst}\varphi = \mathrm{dot}a\,\mathrm{sty}b\,\mathrm{dos}\varphi$$

albo

$$\mathrm{dos}(C - \varphi) = \mathrm{dot}a\,\mathrm{sty}b\,\mathrm{dos}\varphi.$$

Ta formuła wyznacza $C - \varphi$, zkąd C.

209. Jeśli chcemy znaleźć także wprost bok c, trzeba wziąć równanie

$$\mathrm{dos}a = \mathrm{dos}b\,\mathrm{dos}c + \mathrm{wst}b\,\mathrm{wst}c\,\mathrm{dos}A$$

albo

$$\mathrm{dos}b(\mathrm{dos}c + \mathrm{wst}c\,\mathrm{sty}b\,\mathrm{dos}A) = \mathrm{dos}a,$$

i użyć kąta posiłkowego ψ, czyniąc

$$\mathrm{sty}\psi = \mathrm{sty}b\,\mathrm{dos}A\,;$$

kąt ψ będzie mniejszy albo większy od 90°, według jak wieloczyn $\mathrm{sty}b\,\mathrm{dos}A$ jest dodatny albo odjemny.

Z podstawienia kąta ψ, wynika

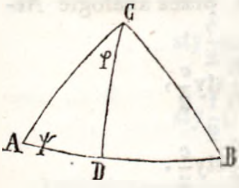
$$\frac{\mathrm{dos}b}{\mathrm{dos}\psi}\mathrm{dos}(c - \psi) = \mathrm{dos}a\,,$$

zatem

$$\mathrm{dos}(c - \psi) = \frac{\mathrm{dos}a\,\mathrm{dos}\psi}{\mathrm{dos}b}.$$

Ta formuła daje wartość $c - \psi$, zkąd c.

210. Uwaga. Jeśli, w trójkącie sferycznym ABC, spuścimy z wierzchołka C prostopadłę sferyczną CD na AB, będzie kąt $ACD = \varphi$, i odcinek $AD = \psi$.



Jakoż, w trójkącie sferycznym ACD prostokątnym przy D, mamy

$$\mathrm{dos}b = \mathrm{dot}A\,\mathrm{dot}ACD\,; \quad \text{ztąd} \quad \mathrm{sty}ACD = \frac{\mathrm{dot}A}{\mathrm{dos}b} = \mathrm{sty}\varphi.$$

Podobnie

$$\text{dos}A = \text{dot}b\,\text{sty}AD\,; \quad \text{ztąd} \quad \text{sty}AD = \text{sty}b\,\text{dos}A = \text{sty}\psi\,.$$

Teraz uważajmy że kąt $BCD = C - \varphi$, i odcinek $BD = c - \psi$, a trójkąt prostokątny BCD daje

$$\text{dos}BCD = \text{dot}a\,\text{sty}CD, \quad \text{i} \quad \text{dos}a = \text{dos}BD\,\text{dos}CD\,.$$

Owoż, w trójkącie prostokątnym ACD,

$$\text{dos}\varphi = \text{sty}CD\,\text{dot}b \quad \text{i} \quad \text{dos}b = \text{dos}CD\,\text{dos}\psi;$$

więc, podstawiając wartości styCD i dosCD wyciągnięte z tych dwóch równań, znajdujemy

$$\text{dos}(C-\varphi) = \text{dot}a\,\text{sty}b\,\text{dos}\varphi \quad \text{i} \quad \text{doś}(c-\psi) = \frac{\text{dos}a\,\text{dos}\psi}{\text{dos}b}\,.$$

To pokazuje że działać przez kąty posiłkowe φ i ψ jest to rozwiązywać trójkąty prostokątne ACD i BCD, na które prostopadła CD rozkłada trójkąt sferyczny ABC. Ale użycie kątów posiłkowych wymaga zwykle wielu logarytmów, i jest wtedy korzystne gdy trzeba wyznaczyć wprost jedną tylko z szukanych części trójkąta.

211. Czwarty przypadek. *Mając dane dwa kąty* A, B *i bok zawarty* c, *wyrachować* a, b *i* C.

Najprościej jest wyznaczać boki a i b przez analogie *Nepera*,

$$\text{sty}\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\text{dos}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{dos}\frac{1}{2}(A+B)}\,\text{sty}\frac{c}{2},$$

$$\text{sty}\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{wst}\frac{1}{2}(A+B)}\,\text{sty}\frac{c}{2}\,.$$

Po czem, wyrachuje się kąt C przez jedną z analogij *Nepera*, na przykład przez drugą

$$\mathrm{sty}\frac{1}{2}\mathrm{C}=\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a-b)\mathrm{dot}\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Ale, jeśli chodzi o wyrachowanie samego tylko kąta C, trzeba wziąć formułę

$$\mathrm{dosC}=\mathrm{wstA}\,\mathrm{wstB}\,\mathrm{dos}c-\mathrm{dosA}\,\mathrm{dosB},$$

i wyznaczyć kąt posiłkowy φ taki żeby

$$\mathrm{wstB}\,\mathrm{dos}c=\mathrm{dosB}\,\mathrm{dot}\varphi,\qquad \text{zkąd}\qquad \mathrm{dot}\varphi=\mathrm{styB}\,\mathrm{dos}c;$$

zatem

$$\mathrm{dosC}=\frac{\mathrm{dosB}\,\mathrm{wst}(\mathrm{A}-\varphi)}{\mathrm{wst}\varphi}.$$

Można także wyrachować wprost bok a albo b, biorąc przyzwoicie jedną z formuł (3) n° 194, i posługując się kątem posiłkowym, jakośmy to już widzieli.

212. Piąty przypadek. *Mając dane dwa kąty* A, B *i bok a przeciwległy pierwszemu, wyrachować b, c i* C,

Bok b otrzymuje się przez formułę

$$\mathrm{wst}b=\frac{\mathrm{wst}a\,\mathrm{wstB}}{\mathrm{wstA}},$$

która daje dla b dwie wartości spełniające.

Po czem, otrzyma się c i C przez analogie *Nepera*

$$\mathrm{sty}\frac{c}{2}=\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{sty}\frac{1}{2}(a-b)}{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}$$

$$\mathrm{sty}\frac{1}{2}\mathrm{C}=\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a-b)\mathrm{dot}\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Jeśli chcemy mieć wprost bok c, trzeba wziąć formułę

$$\mathrm{dot}a\,\mathrm{wst}c=\mathrm{dos}c\,\mathrm{dosB}+\mathrm{wstB}\,\mathrm{dotA},$$

albo

$$\mathrm{dot}a\,\mathrm{wst}c - \mathrm{dos}c\,\mathrm{dosB} = \mathrm{wstB}\,\mathrm{dotA}$$

i uczynić $\mathrm{dot}a = \mathrm{dosB}\,\mathrm{dot}\varphi$;

będzie

$$\frac{\mathrm{dosB}}{\mathrm{wst}\varphi}(\mathrm{wst}c\,\mathrm{dos}\varphi - \mathrm{dos}c\,\mathrm{wst}\varphi) = \mathrm{wstB}\,\mathrm{dotA},$$

zkąd

$$\mathrm{wst}(c - \varphi) = \mathrm{styB}\,\mathrm{dotA}\,\mathrm{wst}\varphi.$$

Do wyznaczenia wprost kąta C użyje się formuły

$$\mathrm{dosA} = \mathrm{wstB}\,\mathrm{wstC}\,\mathrm{dos}a - \mathrm{dosB}\,\mathrm{dosC},$$

czyniąc w niej

$$\mathrm{wstB}\,\mathrm{dos}a = \mathrm{dosB}\,\mathrm{dot}\psi, \quad \text{albo} \quad \mathrm{dot}\psi = \mathrm{styB}\,\mathrm{dos}a.$$

Podstawiając tę wartość, będzie

$$\mathrm{dosA} = \frac{\mathrm{dosB}}{\mathrm{wst}\psi}(\mathrm{wstC}\,\mathrm{dos}\psi - \mathrm{dosC}\,\mathrm{wst}\psi);$$

więc

$$\mathrm{wst}(\mathrm{C} - \psi) = \frac{\mathrm{dosA}\,\mathrm{wst}\psi}{\mathrm{dosB}}.$$

Uwaga. Ten przypadek, podobny do trzeciego, może mieć dwa rozwiązania albo tylko jedno, a nawet nie mieć żadnego. Dyskussya taka sama jak w trzecim przypadku do którego się zresztą przywodzi przez trójkąt biegunowy.

213. Szósty przypadek. *Mając dane trzy kąty* A, B, C, *wyrachować trzy boki* a, b, c.

Bok a jest wyznaczony przez równanie

$$\mathrm{dosA} = -\mathrm{dosB}\,\mathrm{dosC} + \mathrm{wstB}\,\mathrm{wstC}\,\mathrm{dos}a$$

które daje

$$\mathrm{dos}\,a = \frac{\mathrm{dos}A + \mathrm{dos}B\,\mathrm{dos}C}{\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}.$$

Ztąd, za pomocą wiadomych przekształceń, otrzymujemy

$$\mathrm{wst}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C - \mathrm{dos}B\,\mathrm{dos}C - \mathrm{dos}A}{2\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}}$$

$$= \sqrt{\frac{-\mathrm{dos}(B+C) - \mathrm{dos}A}{2\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}} = \sqrt{\frac{-\mathrm{dos}\frac{A+B+C}{2}\,\mathrm{dos}\frac{B+C-A}{2}}{\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}}$$

Podobnie

$$\mathrm{dos}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C + \mathrm{dos}B\,\mathrm{dos}C + \mathrm{dos}A}{2\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mathrm{dos}\frac{A-B+C}{2}\,\mathrm{dos}\frac{A+B-C}{2}}{\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}}.$$

Jeśli, dla skrócenia, uczynimy $A + B + C - \pi = 2S$ (*), będzie

$$\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2} + S, \quad \frac{B+C-A}{2} = \frac{\pi}{2} + S - A, \quad \text{etc};$$

zatem

$$\mathrm{wst}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{wst}S\,\mathrm{wst}(A-S)}{\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}},$$

$$\mathrm{dos}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{wst}(B-S)\,\mathrm{wst}(C-S)}{\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}C}}.$$

Zkąd

$$\mathrm{sty}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{wst}S\,\mathrm{wst}(A-S)}{\mathrm{wst}(B-S)\,\mathrm{wst}(C-S)}}.$$

Prostą przemianą liter otrzymuje się z tych formuł sześć

(*) Liczba $A + B + C - \pi$, oznaczona zwykle przez $2S$, nazywa się *zbytkiem sferycznym*, albo przewyżką sferyczną. ŚNIADECKI, w swojej *Trygonometryi kulistej*, nazwał ją *przepełnieniem*, innych które służą do rachunku boków b, c.

Uwaga. Te wszystkie formuły mogą się wywieśdź z pierwszego przypadku przez trójkąty biegunowe.

ROZMAITE WYRAŻENIA ZBYTKU SFERYCZNEGO.

214. Wiemy że, jeśli wzięto za jedność powierzchni trójkąt trójprostokątny, i za jedność kątową kąt obejmujący łuk równy swemu promieniowi, powierzchnia trójkąta sferycznego ma za miarę *zbytek sferyczny* $A + B + C - \pi$.

Owoż, czyniąc $A + B + C - \pi = 2S$,

wartość $\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}\pi + S - \frac{1}{2}C$ podstawmy w 1ą i 2ą formułę *Delambra*, będzie

$$(1)\qquad \frac{\operatorname{dos}\left(\frac{1}{2}C - S\right)}{\operatorname{dos}\frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{dos}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{dos}\frac{c}{2}},$$

$$(2)\qquad \frac{\operatorname{wst}\left(\frac{1}{2}C - S\right)}{\operatorname{wst}\frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{dos}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{dos}\frac{c}{2}}.$$

Teraz, równanie (1) daje

$$\frac{\operatorname{dos}\left(\frac{1}{2}C - S\right) - \operatorname{dos}\frac{1}{2}C}{\operatorname{dos}\left(\frac{1}{2}C - S\right) + \operatorname{dos}\frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{dos}\frac{a-b}{2} - \operatorname{dos}\frac{c}{2}}{\operatorname{dos}\frac{a-b}{2} + \operatorname{dos}\frac{c}{2}}$$

albo, zamieniając summy na wieloczyny,

$$(3)\qquad \operatorname{sty}\frac{C-S}{2}\operatorname{sty}\frac{S}{2} = \operatorname{sty}\frac{p-a}{2}\operatorname{sty}\frac{p-b}{2}.$$

Równainc (2) daje także

$$\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}\mathrm{C} - \mathrm{wst}\left(\frac{1}{2}\mathrm{C}-\mathrm{S}\right)}{\mathrm{wst}\frac{1}{2}\mathrm{C} + \mathrm{wst}\left(\frac{1}{2}\mathrm{C}-\mathrm{S}\right)} = \frac{\mathrm{dos}\frac{c}{2} - \mathrm{dos}\frac{a+b}{2}}{\mathrm{dos}\frac{c}{2} + \mathrm{dos}\frac{a+b}{2}};$$

zkąd

$$(4) \qquad \mathrm{dot}\frac{\mathrm{C}-\mathrm{S}}{2}\mathrm{sty}\frac{\mathrm{S}}{2} = \mathrm{sty}\frac{p}{2}\mathrm{sty}\frac{p-c}{2}.$$

§ Więc, mnożąc stronami równania (3) i (4) i wyciągając pierwiastek kwadratowy, otrzymujemy

$$(5) \qquad \mathrm{sty}\frac{\mathrm{S}}{2} = \sqrt{\mathrm{sty}\frac{p}{2}\,\mathrm{sty}\frac{p-a}{2}\,\mathrm{sty}\frac{p-b}{2}\,\mathrm{sty}\frac{p-c}{2}}.$$

Ta, jako mówią, *elegancka formuła*, znaleziona przez Symona Lhuiler, nastręcza łatwy sposób wyznaczenia powierzchni trójkąta sferycznego którego wiadome są trzy boki.

215. Jeśli, zamiast mnożyć, podzielimy stronami równania (3) i (4), będziemy mieli

$$\mathrm{sty}^2\frac{1}{2}(\mathrm{C}-\mathrm{S}) = \frac{\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-a)\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-b)}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}p\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-c)}.$$

Więc, wyciągając pierwiastek kwadratowy i przemieniając litery jedne na drugie, znajdujemy trzy ważne formuły:

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathrm{sty}\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{S}) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-b)\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-c)}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}p\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-a)}}, \\[2ex] \mathrm{sty}\frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{S}) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-a)\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-c)}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}p\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-b)}}, \\[2ex] \mathrm{sty}\frac{1}{2}(\mathrm{C}-\mathrm{S}) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-a)\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-b)}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}p\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-c)}}. \end{cases}$$

Rozwiązując cztery równania (5) i (6), względnie do ilości $\operatorname{sty}\frac{p}{2}$, $\operatorname{sty}\frac{p-a}{2}$, $\operatorname{sty}\frac{p-b}{2}$, $\operatorname{sty}\frac{p-c}{2}$, otrzymujemy następujące formuły które także są przydatne.

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sty}\frac{p}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sty}\frac{1}{2}S}{\operatorname{sty}\frac{1}{2}(A-S)\operatorname{sty}\frac{1}{2}(B-S)\operatorname{sty}\frac{1}{2}(C-S)}} \\ \operatorname{sty}\frac{p-a}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sty}\frac{1}{2}S\operatorname{sty}\frac{1}{2}(B-S)\operatorname{sty}\frac{1}{2}(C-S)}{\operatorname{sty}\frac{1}{2}(A-S)}} \\ \operatorname{sty}\frac{p-b}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sty}\frac{1}{2}S\operatorname{sty}\frac{1}{2}(A-S)\operatorname{sty}\frac{1}{2}(C-S)}{\operatorname{sty}\frac{1}{2}(B-S)}} \\ \operatorname{sty}\frac{p-c}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sty}\frac{1}{2}S\operatorname{sty}\frac{1}{2}(A-S)\operatorname{sty}\frac{1}{2}(B-S)}{\operatorname{sty}\frac{1}{2}(C-S)}}. \end{aligned}\right.$$

216. Z rozwinięcia równań (1) i (2), wynika

$$\operatorname{dos}S + \operatorname{sty}\frac{1}{2}C\operatorname{wst}S = \frac{\operatorname{dos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{dos}\frac{1}{2}c},$$

$$\operatorname{dos}S - \operatorname{dot}\frac{1}{2}C\operatorname{wst}S = \frac{\operatorname{dos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{dos}\frac{1}{2}c};$$

ztąd, mnożąc pierwsze równanie przez $\operatorname{dos}^2\frac{1}{2}C$ drugie przez $\operatorname{wst}^2\frac{1}{2}C$, potem dodając, wyrugujemy $\operatorname{wst}S$ i będzie

$$\operatorname{dos}S = \frac{\operatorname{dos}\frac{a-b}{2}\operatorname{dos}^2\frac{1}{2}C + \operatorname{dos}\frac{a+b}{2}\operatorname{wst}^2\frac{1}{2}C}{\operatorname{dos}\frac{c}{2}};$$

a jeśli wyrazimy $\operatorname{dos}^2\frac{1}{2}C$ i $\operatorname{wst}^2\frac{1}{2}C$ przez $\operatorname{dos}C$, i zamienimy summy na wieloczyny, znajdziemy

$$(8)\qquad \operatorname{dos}S = \frac{\operatorname{dos}\frac{a}{2}\operatorname{dos}\frac{b}{2} + \operatorname{wst}\frac{a}{2}\operatorname{wst}\frac{b}{2}\operatorname{dos}C}{\operatorname{dos}\frac{c}{2}}.$$

Rugując $\operatorname{dos}S$ z tych samych równań, otrzymamy podobnie

$$(9)\qquad \operatorname{wst}S = \frac{\operatorname{wst}\frac{a}{2}\operatorname{wst}\frac{b}{2}\operatorname{wst}C}{\operatorname{dos}\frac{c}{2}}.$$

Można łatwo wyrugować $\operatorname{dos}C$ i $\operatorname{wst}C$ z równań (8) i (9); dość tylko pomnożyć oba wyrazy ułamków, które stanowią drugie strony, przez $\operatorname{dos}\frac{a}{2}\operatorname{dos}\frac{b}{2}$, i użyć formuł n^ru^ 191 i 200, będzie:

$$(10)\qquad \operatorname{dos}S = \frac{1 + \operatorname{dos}a + \operatorname{dos}b + \operatorname{dos}c}{2\operatorname{dos}\frac{1}{2}a\operatorname{dos}\frac{1}{2}b\operatorname{dos}\frac{1}{2}c}.$$

$$(11)\qquad \operatorname{wst}S = \frac{\sqrt{\operatorname{wst}p\operatorname{wst}(p-a)\operatorname{wst}(p-b)\operatorname{wst}(d-c)}}{2\operatorname{dos}\frac{1}{2}a\operatorname{dos}\frac{1}{2}b\operatorname{dos}\frac{1}{2}c}.$$

Te dwie formuły wyznaczają powierzchnię trójkąta sferycznego w funkcyi trzech boków; pierwsza jest stosunkowa, druga jest wyrachowalna przez logarytmy; ale obie nie są tak proste jak formuła *Lhuilera.*

Nie trudno teraz wyrazić $\operatorname{wst}(A-S)$, $\operatorname{wst}(B-S)$, $\operatorname{wst}(C-S)$ w funkcyi boków. Jakoż, formuły n^ru^ 213 dają

$$\operatorname{sty}\frac{b}{2}\operatorname{sty}\frac{c}{2} = \frac{\operatorname{wst}S}{\operatorname{wst}(A-S)};$$

więc, podstawiając wartość wstS znalezioną wyżej, i przemieniając litery jedne na drugie, otrzymamy

$$(12)\quad \begin{cases} \operatorname{wst}(A-S)=\dfrac{\sqrt{\operatorname{wst}p\operatorname{wst}(p-a)\operatorname{wst}(p-b)\operatorname{wst}(p-c)}}{2\operatorname{dos}\frac{1}{2}a\operatorname{wst}\frac{1}{2}b\operatorname{wst}\frac{1}{2}c} \\ \operatorname{wst}(B-S)=\dfrac{\sqrt{\operatorname{wst}p\operatorname{wst}(p-a)\operatorname{wst}(p-b)\operatorname{wst}(p-c)}}{2\operatorname{dos}\frac{1}{2}b\operatorname{wst}\frac{1}{2}a\operatorname{wst}\frac{1}{2}c} \\ \operatorname{wst}(C-S)=\dfrac{\sqrt{\operatorname{wst}p\operatorname{wst}(p-a)\operatorname{wst}(p-b)\operatorname{wst}(p-c)}}{2\operatorname{dos}\frac{1}{2}c\operatorname{wst}\frac{1}{2}a\operatorname{wst}\frac{1}{2}b}. \end{cases}$$

217. Jeśli podzielimy stronami równania (8), (9), wyrugujemy $\operatorname{dos}\frac{c}{2}$, i otrzymamy formułę

$$(13)\qquad \operatorname{dot}S=\frac{\operatorname{dot}\frac{1}{2}a\operatorname{dot}\frac{1}{2}b+\operatorname{dos}C}{\operatorname{wst}C},$$

która daje *powierzchnię trójkąta sferycznego w funkcyi dwóch boków i kąta zawartego.*

Z tej formuły wynika kilka ważnych następstw:

1°. *Dwa trójkąty sferyczne* ABC, A′B′C′, *mające kąt równy* C *są równowarte jeśli styczna połowy łuków zawierających ten kąt są odwrotnie proporcyonalne*, to jest jeśli $\operatorname{sty}\frac{a}{2}\operatorname{sty}\frac{b}{2}=\operatorname{sty}\frac{a'}{2}\operatorname{sty}\frac{b'}{2}$.

2. *Trójkąt sferyczny* ABC, *w którym dwa boki* a *i* b *zawierające dany kąt* C *czynią summę* $a+b$ *stałą, jest maximum gdy te boki są równe.*

Jakoż, wedle formuły (13), *maximum* powierzchni trójkąta ABC odpowieda wartości *minimum* dla dotS; a ponieważ kąt C jest dany, dość więc żeby tylko wieloczyn $\operatorname{dot}\frac{a}{2}\operatorname{dot}\frac{b}{2}$

był minimum. Owoż ten wieloczyn równa się

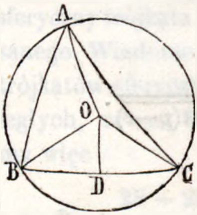
$$\frac{\operatorname{dos}\frac{a}{2}\operatorname{dos}\frac{b}{2}}{\operatorname{wst}\frac{a}{2}\operatorname{wst}\frac{b}{2}}=\frac{\operatorname{dos}\frac{a+b}{2}+\operatorname{dos}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{dos}\frac{a-b}{2}-\operatorname{dos}\frac{a+b}{2}}=1+\frac{2\operatorname{dos}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{dos}\frac{a-b}{2}-\operatorname{dos}\frac{a+b}{2}};$$

a ostatni wyraz, w którym $\operatorname{dos}\frac{a+b}{2}$ jest stała i $\operatorname{dos}\frac{a-b}{2}$ zmienna, jasno pokazuje że trzeba i dość dla minimum dot S żeby $a=b$. Co było do dowodzenia.

3°. Aby zbudować, z kątem C, trójkąt sferyczny równoramienny CDE i równowarty danemu ABC, trzeba wziąć $\operatorname{sty}\frac{CD}{2}$ średnią proporcyonalną między $\operatorname{sty}\frac{CA}{2}$ i $\operatorname{sty}\frac{CB}{2}$.

PROMIENIE SFERYCZNE KÓŁ, OPISANEGO, WPISANEGO I ZAWPISANYCH.

218. *Promień sferyczny koła opisanego.* Niech będzie O biegun koła opisanego na trójkącie sferycznym ABC; połączmy go z wierzchołkiem B kąta wewnątrz którego się znajduje, ispuśćmy prostopadłę sferyczną OD na bok BC. Trójkąt sferyczny prostokątny BDO daje



$$\operatorname{dos} OBD=\operatorname{sty} BD \operatorname{dot} OB;$$

albo, oznaczając przez R promień sferyczny OB, przez a bok BC,

$$\operatorname{sty}\frac{a}{2}\operatorname{dot} R=\operatorname{dos} OBD.$$

Aby znaleźć kąt OBD, uważajmy że trójkąty sferyczne równoramienne OAB, OBC, OAC dają

$$\text{OBD} = \text{C} - \text{OCA}$$
$$\text{B} - \text{OBD} = \text{A} - \text{OAC};$$

ztąd, odciągając stronami, wynika

$$\text{OBD} = \frac{\text{B}+\text{C}-\text{A}}{2} = \frac{1}{2}\pi + \text{S} - \text{A},$$

Na figurrze biegun O jest wewnątrz trójkąta ABC; ale, gdy ten biegun przypada zewnątrz, kąty OCA i OAC mają oba znak + i wyrażenie wartości kąta OBD zostaje to samo.

Podstawiając wartość kąta OBD, znajdujemy formułę

$$\text{(1)} \qquad \text{sty}\text{R} = \frac{\text{sty}\frac{1}{2}a}{\text{wst}(\text{A}-\text{S})},$$

która daje R w funkcyi jednego boku, kąta przeciwległego i zbytku sferycznego.

Jeśli teraz zastąpimy wst(A—S) przez jej wartość wskazaną w n^rze^ 216, otrzymamy formułę

$$\text{sty}\text{R} = \frac{2\text{wst}\frac{1}{2}a\,\text{wst}\frac{1}{2}b\,\text{wst}\frac{1}{2}c}{\sqrt{\text{wst}p\,\text{wst}(p-a)\,\text{wst}(p-b)\,\text{wst}(p-c)}}.$$

która daje R w funkcyi trzech boków.

Nnakoniec, jeśli w formule (1) podstawimy za sty$\frac{a}{2}$ jej wartość znalezioną w n^rze^ 213, będziemy mieli formułę

$$\text{sty}\text{R} = \sqrt{\frac{\text{wst}\text{S}}{\text{wst}(\text{A}-\text{S})\,\text{wst}(\text{B}-\text{S})\,\text{wst}(\text{C}-\text{S})}}.$$

która daje promień R w funkcyi trzech kątów.

219. Wniosek. Ztego co poprzedza wynika:

$$1^{0}.\quad \text{dos}OBC = \text{wst}(A - S),\quad \text{dos}OAC = \text{wst}(B - S),\quad \text{dos}OAB = \text{wst}(C - S).$$

Te równania pokazują co kąty A—S, B—S, C—S przedstawiają w trójkącie sferycznym.

$$2^{0}.\quad \frac{\text{sty}\frac{a}{2}}{\text{wst}(A-S)} = \frac{\text{sty}\frac{b}{2}}{\text{wst}(B-S)} = \frac{\text{sty}\frac{c}{2}}{\text{wst}(C-S)} = \text{sty}R.$$

220. Uwaga. Za pomocą formuły (1) poprzedzającego numeru łatwo się dowodzi następującego twierdzenia które podał Lexell,

Miejscem geometrycznem wierzchołków trójkątów sferycznych spólnej podstawy i tej samej powierzchni jest okrąg, który przechodzi przez dwa punkta średnicowo przeciwległe skrajnościom podstawy.

Niech będzie ABC jeden z trójkątów mających zbytek sferyczny 2S stały; oznaczmy przez B′ i C′ punkta średnicowo przeciwległe skrajnościom B i C podstawy, przez 2S′ zbytek sferyczny trójkąta AB′C′ i przez R′ promień sferyczny koła opisanego. Wiadomo z geometryi że summa powierzchni dwóch trójkątów sferycznych ABC, AB′C′, wierzchołkiem przeciwległych, równa się wrzecieniu którego kątem jest A; mamy więc

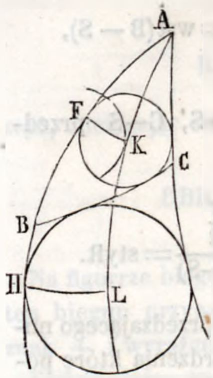
$$2S + 2S' = 2A,\qquad \text{zkąd}\qquad A - S' = S.$$

Padstawiając wartość różnicy A—S w formule (1), będzie

$$\text{sty}R' = \frac{\text{sty}\frac{a}{2}}{\text{wst}S};$$

a ponieważ ilości a i S są stałe, promień R′ jest także stały; co dowodzi twierdzenia.

221. *Promienie sferyczne kół wpisanego i zawpisanych.* Niech



będą F i H punkta zetknięć kół wpisanego i zawpisanego; rozumując jako w trygonometryi prostolinijnej, znajdujemy $AF = p - a$, i $AH = p$. Zatem

1°. Trójkąt sferyczny prostokątny AFK daje (197)

$$\text{wst}\,AF = \text{sty}\,KF\,\text{dot}\tfrac{1}{2}A$$

albo

$$\text{sty}\,r = \text{wst}(p-a)\,\text{sty}\tfrac{1}{2}A,$$

nazywając r promień sferyczny koła wpisanego.

Więc, rugując $\text{sty}\frac{1}{2}A$, będzie

$$(1) \qquad \text{sty}\,r = \sqrt{\frac{\text{wst}(p-a)\,\text{wst}(p-b)\,\text{wst}(p-c)}{\text{wst}\,p}} = \frac{\Delta}{\text{wst}\,p}.$$

2°. Jeśli oznaczymy przez r_a, r_b, r_c promienie sferyczne kół zawpisanych w kąty A, B, C, trójkąt sferyczny prostokątny AHL da

$$\text{wst}\,AH = \text{sty}\,LH\,\text{dot}\tfrac{1}{2}A,$$

albo

$$\text{sty}\,r_a = \text{wst}\,p\,\text{sty}\tfrac{1}{2}A;$$

więc

$$(2) \qquad \text{sty}\,r_a = \sqrt{\frac{\text{wst}\,p\,\text{wst}(p-b)\,\text{wst}(p-c)}{\text{wst}(p-a)}} = \frac{\Delta}{\text{wst}(p-a)}.$$

Otrzymamy tak samo

$$\text{sty}\,r_b = \sqrt{\frac{\text{wst}\,p\,\text{wst}(p-a)\,\text{wst}(p-c)}{\text{wst}(p-b)}} = \frac{\Delta}{\text{wst}(p-b)},$$

$$\text{sty}\,r_c = \sqrt{\frac{\text{wst}\,p\,\text{wst}(p-a)\,\text{wst}(p-b)}{\text{wst}(p-c)}} = \frac{\Delta}{\text{wst}(p-c)}.$$

222. Wniosek. Ztąd wynika

$$\Delta = \mathrm{wst}p\,\mathrm{sty}r = \mathrm{wst}(p-a)\,\mathrm{sty}r_a = \mathrm{wst}(p-b)\,\mathrm{sty}r_b$$
$$= \mathrm{wst}(p-c)\,\mathrm{sty}r_c.$$
$$\Delta^2 = \mathrm{sty}r\,\mathrm{sty}r_a\,\mathrm{sty}r_b\,\mathrm{sty}r_c.$$

223. Na zastosowanie rozwiązywania trójkątów sferycznych weźmy jeden przykład liczebny.

Są dane trzy boki

$$a = 110^0\,24'\,36'',48$$
$$b = 89^0\,56'\,2'',84$$
$$c = 44^0\,12'\,18'',76$$

wyrachować kąty A, B, C, *i zbytek sferyczny*.

PIERWSZA METODA.

$$\mathrm{sty}\,r = \sqrt{\frac{\mathrm{wst}(p-a)\,\mathrm{wst}(p-b)\,\mathrm{wst}(p-c)}{\mathrm{wst}p}}$$

$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = 122^0\,16'\,29'',04$	$\log \mathrm{wst}(p-a) = \bar{1},3130222$
$p-a = 11^0\,51'\,52'',56$	$\log \mathrm{wst}(p-b) = \bar{1},7283142$
$p-b = 32^0\,20'\,26'',20$	$\log \mathrm{wst}(p-c) = \bar{1},9905160$
$p-c = 78^0\,4'\,10'',28$	$-\log \mathrm{wst}p = 0,0728877$
$\log \mathrm{wst}p = \bar{1},9271123$	$\log \mathrm{sty}^2 r = \bar{1},1047401$

$$\log \mathrm{sty}\,r = \bar{1},5523701$$

Rachunek kąta A.	*Rachunek kąta* B.
$\mathrm{sty}\frac{1}{2}A = \dfrac{\mathrm{sty}r}{\mathrm{wst}(p-a)}$	$\mathrm{sty}\frac{1}{2}B = \dfrac{\mathrm{sty}r}{\mathrm{wst}(p-b)}$
$\log \mathrm{sty}r = \bar{1},5523701$	$\log \mathrm{sty}r = \bar{1},5523701$
$\log \mathrm{wst}(p-a) = \bar{1},3130222$	$\log \mathrm{wst}(p-b) = \bar{1},7283143$
$\log \mathrm{sty}\frac{1}{2}A = 0,2393479$	$\log \mathrm{sty}\frac{1}{2}B = \bar{1},8240558$
$\frac{1}{2}A = 60^0\,2'\,41'',83$	$\frac{1}{2}B = 33^0\,41'\,56'',49$
$A = 120^0\,5'\,23'',66$	$B = 67^0\,23'\,52'',98$

Rachunek kąta C.

$$\text{sty}\frac{1}{2}C = \frac{\text{sty}\,r}{\text{wst}\,(p-c)}$$

$$\log \text{sty}\,r = \bar{1},5523701$$
$$\log \text{wst}\,(p-c) = \bar{1},9905160$$

$$\log \text{sty}\tfrac{1}{2}C = \bar{1},5618541$$
$$\tfrac{1}{2}C = 20^0\,2'\,0'',397$$
$$C = 40^0\,4'\,0'',79$$

Rachunek zbytku sferycznego 2S.

$$A = 120^0\ 5'23'',66$$
$$B = 67^0\,23'52'',98$$
$$C = 40^0\ 4'\ 0'',79$$

$$A + B + C = 227^0\,33'17'',43$$

zkąd

$$2S = 47^0\,33'\,17'',43$$

DRUGA METODA.

$$h = \sqrt{\frac{\text{sty}\,\frac{1}{2}(p-a)\,\text{sty}\,\frac{1}{2}(p-b)\,\text{sty}\,\frac{1}{2}(p-c)}{\text{sty}\,\frac{1}{2}p}}$$

$$\tfrac{1}{2}p = 61^0\ 8'14'',52$$
$$\tfrac{1}{2}(p-a) = 5^0\,55'56'',28$$
$$\tfrac{1}{2}(p-b) = 46^0\,40'13'',10$$
$$\tfrac{1}{2}(p-c) = 39^0\ 2'\ 5'',14$$
$$\log \text{sty}\tfrac{1}{2}p = 0,2587073$$

$$\log \text{sty}\tfrac{1}{2}(p-a) = \bar{1},0166562$$
$$\log \text{sty}\tfrac{1}{2}(p-b) = \bar{1}.4623455$$
$$\log \text{sty}\tfrac{1}{2}(p-c) = \bar{1},9089079$$
$$-\log \text{sty}\tfrac{1}{2}p = \bar{1},7412927$$

$$\log h^2 = \bar{2},1292023$$

$$\log h = \bar{1},0646011$$

Rachunek zbytku sferycznego 2S.

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}S = h\,\text{sty}\tfrac{1}{2}p$$

$$\log h = \bar{1},0646011$$
$$\log \text{sty}\tfrac{1}{2}p = 0,2587073$$

$$\log \text{sty}\tfrac{1}{2}S = \bar{1},3233084$$
$$\tfrac{1}{2}S = 11^0\,53'19'',358$$
$$2S = 47^0\,33'17'',43$$

Rachunek kąta A.

$$\text{sty}\frac{1}{2}(A-S) = \frac{h}{\text{sty}\,\frac{1}{2}(p-a)}$$

$$\log h = \bar{1},0646011$$
$$\log \text{sty}\tfrac{1}{2}(p-a) = \bar{1},0166562$$

$$\log \text{sty}\tfrac{1}{2}(A-S) = 0,0479449$$
$$\tfrac{1}{2}(A-S) = 48^0\,9'22'',476$$
$$\tfrac{1}{2}A = 60^0\,2'41'',834$$
$$A = 120^0\,5'23'',66$$

Rachunek kąta B.

$$\mathrm{sty}\frac{1}{2}(B-S)=\frac{h}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-b)}$$

$$\log h=\bar{1},0646011$$
$$\log\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}(p-b)=\bar{1},4623455$$

$$\log\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}(B-S)=\bar{1},6022556$$
$$\tfrac{1}{2}(B-S)=21^{0}48'37'',114$$
$$\tfrac{1}{2}B=33^{0}41'56'',972$$
$$B=67^{0}23'52'',94$$

Rachunek kąta C.

$$\mathrm{sty}\frac{1}{2}(C-S=\frac{h}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}(p-c)}$$

$$\log h=\bar{1},0646011$$
$$\mathrm{los\,sty}\tfrac{1}{2}(p-c)=\bar{1},9089079$$

$$\log\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}(C-S)=\bar{1},1556932$$
$$(C-S)=8^{0}8'41'',032$$
$$\tfrac{1}{2}C=20^{0}2'0'',390$$
$$C=40^{0}4'0'',78$$

Sprawdzenie

$$\tfrac{1}{2}(A-S)+\tfrac{1}{2}(B-S)+\tfrac{1}{2}(C-S)+\tfrac{1}{2}S=89^{0}59'59'',98$$

na mniej niż $0'',02$.

ROZWIĄZYWANIE TRÓJKĄTÓW SFERYCZNYCH KTÓRYCH BOKI SĄ BARDZO MAŁE WZGLĘDEM PROMIENIA SFERY.

224. Gdy boki trójkąta sferycznego są bardzo małe względem promienia sfery, ten trójkąt bardzo się mało różni od trójkąta prostolinijnego mającego boki tej samej długości. Sławny Legendre dał ważne twierdzenie dotyczące takich trójkątów i wielce użyteczne w geodezyjnych działaniach.

Niech będzie na sferze promienia R trójkąt sferyczny ABC; jeśli oznaczymy przez a, b, c długości jego boków odniesione do jedności linijnej jakiejkolwiek, ten trójkąt daje

$$\mathrm{dos}A=\frac{\mathrm{dos}\frac{a}{R}-\mathrm{dos}\frac{b}{R}\,\mathrm{dos}\frac{c}{R}}{\mathrm{wst}\frac{b}{R}\,\mathrm{wst}\frac{c}{R}}.$$

Ale można wyrazić wstawę i dostawę w funkcyi łuku, za pomocą szeregów, o których będzie mowa w *księdze IV*; zważając że boki a, b, c są bardzo małe względem promienia R. i zaniedbując potęgi z $\frac{1}{R}$ wyższe od czwartej, mamy

$$\operatorname{dos}\frac{a}{R} = 1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{1.2.3.4R^4}\cdots$$

$$\operatorname{dos}\frac{b}{R} = 1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{1.2.3.4R^4}\cdots$$

$$\operatorname{dos}\frac{c}{R} = 1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{1.2.3.4R^4}\cdots$$

$$\operatorname{wst}\frac{b}{R} = \frac{b}{R} - \frac{b^3}{1.2.3R^3}\cdots$$

$$\operatorname{wst}\frac{c}{R} = \frac{c}{R} - \frac{c^3}{1.2.3R^3}\cdots$$

Podstawmy tak przybliżone wartości. Opuszczając zawsze potęgi z $\frac{1}{R}$ wyższe od czwartej, i znosząc spólny dzielnik $\frac{1}{R^2}$, otrzymamy

$$\operatorname{dos}A = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2} - \frac{b^4+c^4-a^4+6b^2c^2}{24R^2}}{bc\left(1 - \frac{b^2+c^2}{6R^2}\right)};$$

a jeśli pomnożymy przez $1 + \frac{b^2+c^2}{6R^2}$ oba wyrazy ułamka wyrażającego drugą stronę, i przestaniemy na potęgach z $\frac{1}{R}$ niższych od czwartej, znajdziemy

$$\operatorname{dos}A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{24bcR^2}.$$

Owoż, w trójkącie prostolinijnym A'B'C' mającym boki

a, b, c i kąty A′, B′, C′, jest

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\text{dos}A',$$

$$\frac{2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2}=\text{wst}^2A'$$

więc

$$\text{dos}A=\text{dos}A'-\frac{bc}{6R^2}\text{wst}^2A'.$$

Uczyńmy teraz

$$A=A'+x$$

będzie

$$\text{dos}A=\text{dos}A'\text{dos}x-\text{wst}A'\text{wst}x;$$

a ponieważ kąt x jest bardzo mały, można wziąć $\text{dos}x=1$ i $\text{wst}x=x$, z błędem mniejszym od $\frac{1}{R^2}$; zatem

$$\text{dos}A=\text{dos}A'-x\,\text{wst}A'.$$

Porównywając tę wartość dosA z wyżej otrzymaną, widzimy że

$$x=\frac{bc}{6R^2}\text{wst}A'.$$

Ale $\frac{1}{2}bc\,\text{wst}A'$ wyraża powierzchnię trójkąta prostolinijnego A′B′C′; nazywając S′ tę powierzchnię, mamy $x=\frac{S'}{3R^2}$ z błędem czwartego rzędu względem $\frac{1}{R}$.

Więc

$$A=A'+\frac{S'}{3R^2}$$

(1) $$B=B'+\frac{S'}{3R^2}$$

$$C=C'+\frac{S'}{3R^2}$$

Jeśli dodamy te równania stronami, uważając że $A + B + C + = \pi + 2S$ i $A' + B' +' C' = \pi$, otrzymamy

$$\pi + 2S = \pi + \frac{S'}{R^2};$$

zkąd wynika

$$S' = 2R^2 S,$$

z błędem drugiego rzędu względem $\frac{1}{R}$.

Podstawiając tę wartość S' w równania (1), znajdujemy ostatecznie

$$A = A' + \frac{2S}{3}$$

$$(2) \qquad B = B' + \frac{2S}{3}$$

$$C = C' + \frac{2S}{3}.$$

Otoż teraz na czem zależy twierdzenie Legendra.

Jeśli boki trójkąta sferycznego są bardzo małe względem promienia R *sfery, powierzchnia tego trójkąta jest równa, z błędem drugiego rzędu względem* $\frac{1}{R}$, *powierzchni trójkąta prostolinijnego mającego boki tej samej długości; a zaś kąty trójkąta sferycznego są równe, z błędem czwartego rzędu względem* $\frac{1}{R}$, *kątom trójkąta prostolinijnego powiększonym trzecią częścią zbytku sferycznego.*

225. Zobaczmy teraz użytek twierdzenia Legendra w rozwiązywaniu trójkątów sferycznych na powierzchni ziemi.

Boki tych trójkątów są dane w metrach, i wiadomy logarytm romienia ziemskiego, $\log R = \log.\frac{2.10^7}{\pi} = 6,8038801$.

Aby mieć w stopniach kąty A, B, C, trzeba znać w sekundach liczbę $\frac{S'}{3R^2}$.

Owoż, poprzedzająca jedność kątowa, to jest kąt obejmujący łuk koła równy swemu promieniowi, wyraża się w stopniach przez $\frac{2.90^0}{\pi}$; więc liczba $\frac{S'}{3R^2}$ znaczy $\frac{60^0 S'}{\pi R^2} = \frac{108'' S'}{10^4 R} = kS'$, nazywając k spółczynnik $\frac{108}{10^4 R}$. Mamy $\log k = \overline{9},2295437$.

Nie trudno teraz rozwiązać następujące zagadnienia.

1°. *Są dane trzy boki* a, b, c *trójkąta sferycznego.*

Wyrachowawszy powierzchnię S' i kąty A', B', C' trójkąta prostolinijnego mającego boki a, b, c w metrach, otrzyma się kąty A, B, C trójkąta sferycznego za pomocą formuł (1).

2°. *Są dane dwa boki* a, b *i kąt zawarty* C.

Mamy $S' = \frac{1}{2} ab \,\mathrm{wst}\, C'$; ale, z przyczyny $C' = C - \frac{S'}{3R^2}$, wst C' różni się od wst C dopiero w wyrazach rzędu $\frac{1}{R^2}$; można więc wziąć

$$S' = \frac{1}{2} ab \,\mathrm{wst} C, \quad \text{a zatem} \quad kS' = \frac{1}{2} kab \,\mathrm{wst} C.$$

Znając kS', otrzymamy C przez trzecią formułę (1); po czem, rozwiązawszy trójkąt prostolinijny w którym wiadome są części a, b, C', będziemy mieli c i A', B'; następnie formuły (1) dadzą kąty A i B.

3. *Są dane dwa boki* a, b *i kąt przeciwległy* A.

Mamy

$$S' = \frac{1}{2} b \,\mathrm{wst} A \left(b \,\mathrm{dos} A' \pm \sqrt{a^2 - b^2 \,\mathrm{wst} A'}\right).$$

Uczyniwszy tę formułę wyrachowalną przez logarytmy, i zastąpiwszy w niej A′ przez A, będziemy mieli kS', i następnie kąt A′ za pomocą pierwszej formuły (1); poczem, rozwiązawszy trójkąt prostolinijny z wiadomemi częściami a, b, A′, wyznaczymy kąty B i C przez formuły (1).

4°. *Są dane dwa kąty* A, B, *i bok zawarty* c.

Mamy

$$S'=\frac{c^2\,\mathrm{wst}A'\,\mathrm{wst}B'}{2\,\mathrm{wst}(A'+B')},$$

ale można wziąć

$$S'=\frac{c^2\,\mathrm{wst}A\,\mathrm{wst}B}{2\,\mathrm{wst}(A+B)}.$$

Znając kS', wyznaczamy A′ i B′ przez formuły (1); a rozwiązawszy trójkąt prostolinijny z wiadomemi częściami c, A′, B′, znajdujemy a, b, C′, i potem C.

5°. *Są dane dwa kąty* A, B *i bok przeciwległy* a.

Można wyrachować S′ biorąc

$$S'=\frac{a^2\,\mathrm{wst}B\,\mathrm{wst}(A+B)}{2\,\mathrm{wst}A};$$

otrzymuje się potem A′ i B′ przez formuły (1), i zagadnienie przywodzi się do rozwiązywania trójkąta prostolinijnego z wiadomemi częściami a, A′, B′.

Objaśnijmy to co poprzedza jednym przykładem liczebnym. *Niech będą dane*:

$\log a = 4{,}5678901 \quad \log b = 4{,}9876532 \quad C = 120^0\,45'\,36'',8$

Znajdujemy $\log S' = 0{,}1887019$, dodajemy $\log k = \overline{9}{,}2295437$, i mamy $\log kS' = 0{,}4182456$; zatem $kS' = 2'',61$. Trzeba teraz rozwiązać trójkąt prostolinijny mający boki a i b jako wyżej i kąt zawarty $C = 120^0\,45'\,34'',19$. W tym celu użyjemy metody wskazanej w n° 128.

$\log b = 4{,}9876532$	$\log \operatorname{sty}(\varphi - 45^0) = \bar{1}{,}6521660$
$\log a = 4{,}5678901$	$\log \operatorname{dot} \tfrac{1}{2} C' = \bar{1}{,}7547661$
$\log \operatorname{sty} \varphi = 0{,}4197631$	$\log \operatorname{sty} \tfrac{1}{2}(B' - A') = \bar{1}{,}4060321$
$\varphi = 69^0\, 10'\, 24'', 03$	$\tfrac{1}{2}(B' - A') = 14^0\, 43'\, 3'', 66$

$$
\begin{array}{r}
\tfrac{1}{2}(B' + A') = 29^0\, 37'\, 12'', 90 \\
\tfrac{1}{2}(B' - A') = 14^0\, 43^0\;\; 3'', 66 \\
\hline
A' = 14^0\, 54'\;\; 9'', 24 \\
B' = 44^0\, 20'\, 16'', 56
\end{array}
$$

Do wyznaczenia boku c trzeba wziąć formułę $c = \dfrac{a \operatorname{wst} C'}{\operatorname{wst} A'}$.

$$
\begin{array}{r}
\log a = 4{,}5678901 \\
\log \operatorname{wst} C' = \bar{1}{,}7088001 \\
-\log \operatorname{wst} A' = 0{,}5897694 \\
\hline
\log c = 4{,}8664596 \\
c = 73529^m, 150
\end{array}
$$

Więc szukane części trójkąta sferycznego są

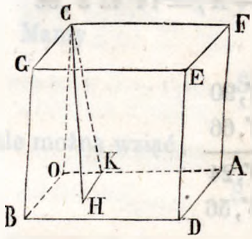
$$c = 73529^m, 150 \qquad A = 14^0\, 54'\, 6'', 63 \qquad B = 44^0\, 20'\, 13'', 95 .$$

226. Twierdzenie Legendra może służyć do rozwiązywania trójkąta sferycznego w którym dwa boki a i b różnią się mało od 180^0; przedłużając albowiem te dwa boki aż do ich spotkania, utworzymy trójkąt sferyczny mający dwa boki bardzo małe $180^0 - a$ i $180^0 - b$. Rozwiązawszy drugi trójkąt, znajdujemy zaraz części pierwszego.

Nakoniec, można zastosować to twierdzenie do rozwiązywania trójkąta sferycznego w którym dwa kąty A i B mało się różnią od 180^0; albowiem wtedy trójkąt biegunowy ma dwa boki bardzo małe $180^0 - A$ i $180^0 - B$.

ZASTOSOWANIA TRYGONOMETRYI SFERYCZNEJ.

227. Zagadnienie I. *Znaleźć objętość równoległościanu w funkcyi trzech krawędzi przyległych i ich kątów.*



Niech będą OA, OB, OC trzy krawędzie przyległe równoległościanu; nazwijmy f, g, h długości tych krawędzi, A, B, C kąty dwójścienne trójścianu OABC, i a, b, c jego ściany. Jeśli z punktu C spuścimy prostopadłę CH na podstawę OABD, i prostopadłę CK na krawędź OA, kąt CKH będzie mierzył kąt dwójścienny A, i trójkąty prostokątne CKO, CKH dadzą

$$\mathrm{CK} = h \operatorname{wst} b\,,\quad \mathrm{CH} = \mathrm{CK} \operatorname{wst} \mathrm{A} = h \operatorname{wst} b \operatorname{wst} \mathrm{A}\,.$$

Równoległobok OADB ma za miarę $fg \operatorname{wst} \mathrm{AOB} = fg \operatorname{wst} c$. Zatem objętość V równoległościanu wyraża się przez

$$\mathrm{V} = fgh \operatorname{wst} b \operatorname{wst} c \operatorname{wst} \mathrm{A}\,.$$

Owoż, trójścian OABC, odpowiedający trójkątowi sferycznemu mającemu boki a, b, c i kąty A, B, C, daje (200 *uwaga*)

$$\operatorname{wst} b \operatorname{wst} c \operatorname{wst} \mathrm{A} = 2\sqrt{\operatorname{wst} p \operatorname{wst}(p-a) \operatorname{wst}(p-b) \operatorname{wst}(p-c)}\,;$$

więc szukana objętość równoległościanu jest

$$\mathrm{V} = 2fgh\sqrt{\operatorname{wst} p \operatorname{wst}(p-a) \operatorname{wst}(p-b) \operatorname{wst}(p-c)}\,,$$

albo (75)

$$\mathrm{V} = fgh\sqrt{1 - \operatorname{dos}^2 a - \operatorname{dos}^2 b - \operatorname{dos}^2 c + 2 \operatorname{dos} a \operatorname{dos} b \operatorname{dos} c}\,.$$

228. Wniosek. Piramida trójkątna OABC jest szóstą częścią równoległościanu OADBC; więc *objętość piramidy trójkątnej, w funkcyi trzech krawędzi przyległych i ich kątów*, jest

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} fgh\sqrt{\operatorname{wst} p \operatorname{wst}(p-a) \operatorname{wst}(p-b) \operatorname{wst}(p-c)}\,,$$

albo

$$V=\frac{1}{6}fgh\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}.$$

229. Zagadnienie II. *Mając dane sześć krawędzi piramidy trójkątnej znaleźć jej objętość.*

W piramidzie trójkątnej OABC, oznaczając trzy krawędzie przyległe OA, OB, OC przez f, g, h, uczyńmy jeszcze krawędź $BC=f'$, $AC=g'$, $AB=h'$. Tym sposobem krawędzie f', g', h' podstawy piramidy są odpowiednio przeciwległe krawędziom f, g, h, wierzchołka.

Nazywając a, b, c ściany trójścianu OABC, widzimy łatwo że

$$\cos a=\frac{g^2+h^2-f'^2}{2gh},\quad \cos b=\frac{f^2+h^2-g'^2}{2fh},\quad \cos c=\frac{f^2+g^2-h'^2}{2fg}.$$

Więc, jeśli podstawimy te wartości dostaw w drugiej formule n^ru^ 228, czyniąc dla skrócenia

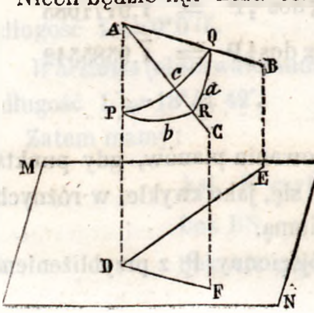
$$g^2+h^2-f'^2=F^2,\quad f^2+h^2-g'^2=G^2,\quad f^2+g^2-h'^2=H^2,$$

otrzymamy żądaną objętość piramidy

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{4f^2g^2h^2-f^2F^4-g^2G^4-h^2H^4+F^2G^2H^2}.$$

230. Zagadnienie III. *Przywieść kąt do poziomu*

Niech będzie kąt BAC leżący na płaszczyźnie pochylonej do poziomu. Z wierzchołka A tego kąta, i z punktów B i C wziętych dowolnie na jego ramionach, spuśćmy prostopadłe BE, CE na płaszczyznę poziomą MN, i połączmy DE, DF. Otóż, kąt EDF, będący rzutem kąta BAC na płaszczyznie poziomej, nazywa się *kątem przywiedzonym do*



poziomu; chodzi więc o wyznaczenie tego kąta gdy są wiadome kąty BAC, BAD, CAD.

Aby rozwiązać zagadnienie, z wierzchołka A jako środka i promieniem jakimkolwiek, nakreślmy sferę. Płasczyzny BAC, BAD, CAD wyznaczają na tej sferze trójkąt PQR, którego boki są wiadome jako miary danych kątów, i kąt QPR jest równy szukanemu kątowi EDF. Można więc wyrachować ten kąt przez jedną z formuł pierwszego przypadku rozwiązywania trójkątów sferycznych.

Biorąc na przykład formułę dostawy

$$\mathrm{dos}\frac{1}{2}\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\mathrm{wst}p\,\mathrm{wst}(p-a)}{\mathrm{wst}b\,\mathrm{wst}c}},$$

trzeba w niej uczynić kąt P=A, bok QR=a, PR=b, PQ=c.

Niech będą na zastosowanie liczby

$a=48^\circ 59' 37''$, $b=71^\circ 45' 23''$, $c=82^\circ 16' 36''$.

Mamy $2p=203^\circ 1' 36''$, $p=101^\circ 30' 48''$, $p-a=52^\circ 31' 11''$.

$$\begin{aligned}
\log \mathrm{wst}\,101^\circ 30' 48''=\log \mathrm{dos}\,11^\circ 30' 48'' &= \bar{1},9911722\\
\log \mathrm{wst}\,52^\circ 31' 11'' &= \bar{1},8995813\\
-\log \mathrm{wst}\,71^\circ 45' 23'' &= 0,0223980\\
-\log \mathrm{wst}\,82^\circ 16' 36'' &= 0,0039570\\
\hline
\log \mathrm{dos}^2\tfrac{1}{2}\mathrm{P} &= \bar{1},9171085\\
\log \mathrm{dos}\tfrac{1}{2}\mathrm{P} &= \bar{1},9585542
\end{aligned}$$

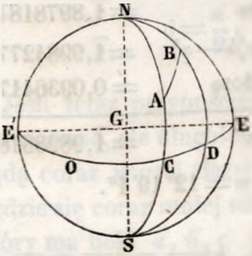
Więc kąt P$=49^\circ 16' 13'', 95$.

To zagadnienie służy w zdejmowaniu planów, gdy punkta które chcemy wyznaczyć znajdują się, jako zwykle, w różnych wysokościach nad płasczyzną poziomą.

Teodolit daje odrazu kąt dwójścienny P z przybliżeniem często dostatecznem.

231. Zagadnienie IV. *Mając dane szerokości i długości dwóch punktów globu, znaleźć odległość tych punktów.*

Niech będą A i B dwa dane punkta na sferze ziemskiej;



N biegun północny, ECE' równik; NAS i NBS południki punktów A i B. Przypuśćmy że długości, które się liczą na równiku, mają za początek punkt O; łuk OC jest długością wschodnią punktu A, a zaś łuk OE'C jego długością zachodnią względem O. Różnica długości OD i OC, czyli łuk CD, jest miarą kąta N zawartego między dwoma południkami NAS i NBS, a łuki AN i BN są dopełnieniami danych szerokości AC i BD. Jeśli więc poprowadzimy łuk koła wielkiego AB, będziemy mieli trójkąt sferyczny ABN, w którym wiadome są dwa boki NA, NB i kąt N zawarty między niemi; chodzi o wyrachowanie boku AB. Ten bok $AB = n$ otrzymuje się wprost przez jedną z formuł n^{ru} 205.

Jako przykład, szukajmy *odległości Warszawy* od *Paryża*.

W dziele pod tytułem *Connaissance des temps* (znajomość czasów) na rok 1869, wydawanem corocznie przez biuro długości astronomicznych w Paryżu, czytamy:

Paryż (obserwatorium) szerokość północna $\lambda = 48^0 50' 11''$ długość $L = 0^0 0' 0''$.

Warszawa (obserwatorium) szerokość północna $\lambda' = 52^0 13' 5''$, długość $L' = 18^0 41' 42''$.

Zatem mamy:

$$\text{kąt } N \text{ czyli } L' = 18^0 41' 42''$$
$$\text{bok } BN \text{ czyli } a = 90^0 - 52^0 13' 5''$$
$$\text{bok } AN \text{ czyli } b = 90^0 - 48^0 50' 11''.$$

Rachunek kąta posiłkowego φ.

$$\text{sty}\varphi = \text{sty}a\,\text{dos}N$$

$$\begin{aligned} \log \text{sty}a &= \bar{1},8893997 \\ \log \text{dos}N &= \bar{1},9764593 \\ \hline \text{los sty}\varphi &= \bar{1},8658589 \end{aligned}$$

$$\varphi = 36^0\,17'\,20$$

$$b - \varphi = 90^0 - 85^0\,7'\,31''$$

Rachunek odległości n.

$$\text{dos}n = \frac{\text{dos}a\,\text{dos}(b-\varphi)}{\text{dos}\varphi}.$$

$$\begin{aligned} \log \text{dos}a &= \bar{1},8978184 \\ \log \text{dos}(b-\varphi) &= \bar{1},9984277 \\ -\log \text{dos}\varphi &= 0,0936417 \\ \hline \log \text{dos}n &= \bar{1},9898878 \end{aligned}$$

$$n = 12^0\,19'\,1''.$$

Żeby wyrazić w metrach łuk $AB = n$, który mierzy w stopniach odległość między *Paryżem* i *Warszawą*, trzeba pamiętać że ćwierć południka ziemskiego zawiera 10000000 metrów; zatem jeden stopień zawiera $\frac{10000000}{90^0}$ metrów, a następnie odległość

$$AB = 10000000^m \cdot \frac{12^0\,19'\,1''}{90^0}.$$

Zamieniając stopnie na sekundy, znajdujemy

$$AB = \frac{44341'' \times 10000}{324} = 1368 \text{ kilometr.}$$

albo prawie 274 mil, licząc 5 kilometrów na milę.

Z FORMUŁ TRYGONOMETRYI SFERYCZNEJ WYWIEŚDZ FORMUŁY TRYGONOMETRYI PROSTOLINIJNEJ.

232. Wiadomo że, na sferze promienia 1, boki trójkąta sferycznego, wyrażone przez liczby a, b, c, są miarami kątów mających wierzchołek we środku tej sfery. Dla ogólności wyników które otrzymać chcemy, biorąc jakąkolwiek linię za jedność, uważajmy na sferze promienia R trójkąt sferyczny ABC, i oznaczmy długości jego boków przez a', b', c'; będziemy mieli

$$a=\frac{a'}{R},\quad b=\frac{b'}{R},\quad c=\frac{c'}{R}.$$

Jeśli teraz przypuścimy że promień R zwiększa się nieograniczenie, ale długości a', b', c' zostają stałe, liczby a, b, c będą coraz więcej dążyły do zera, i trójkąt sferyczny ABC będzie się coraz mniej różnił od trójkąta prostolinijnego A'B'C' który ma boki a', b', c' i kąty A', B', C'; tak że, gdy promień staje się nieskończenie wielkim, trójkąt sferyczny ABC staje się trójkątem prostolinijnym A'B'C'. Owoż, formuły dotyczące trójkąta sferycznego są niezależne od wielkości promienia sfery; a ponieważ one mają ciągle miejsce na wszelką wielkość tego promienia i nie przestają być prawdziwe gdy $R=\infty$, więc się stosują do trójkąta prostolinijnego A'B'C'.

233. To przekształcenie formuł trygonometryi sferycznej na odpowiednie w trygonometryi prostolinijnej otrzymuje się za pomocą następującej zasady :

Boki a', b', c' są granicami wieloczynów R*wst* a, R*wst* b, R*wst* c, *i także granicami wieloczynów* R*sty* a, R*sty* b, R*sty* c, gdy $R=\infty$.

Jakoż, z przyczyny $a'=a$R, mamy

$$1^{\circ}.\quad \mathrm{R\,wst}a=\frac{a'\,\mathrm{wst}a}{a},\quad \text{zatem}\quad gr.\mathrm{R\,wst}a=a'\,gr.\frac{\mathrm{wst}a}{a}.$$

Ale, gdy $R=\infty$, wtedy $a=0$, i $gr.\dfrac{\mathrm{wst}a}{a}=1$;

więc

$$gr.\mathrm{R\,wst}a=a'.$$

2°. Mamy także $\quad \mathrm{R\,sty}a=\dfrac{a'}{\mathrm{dos}a}\cdot\dfrac{\mathrm{wst}a}{a};$

zatem

$$gr.\,\mathrm{R\,sty}a = gr.\,\frac{a'}{\mathrm{dos}a}\cdot\frac{\mathrm{wsta}}{a} = gr.\,\frac{a'}{\mathrm{dos}a}\times gr.\,\frac{\mathrm{wst}a}{a}.$$

Owoż, gdy $\mathrm{R} = \infty$, wtedy $a = 0$ i następnie

$$gr.\,\frac{a'}{\mathrm{dos}a} = a'\,gr.\,\frac{1}{1-2\mathrm{wst}^2\frac{a}{2}} = a', \qquad gr.\,\frac{\mathrm{wst}a}{a} = 1;$$

więc

$$gr.\,\mathrm{Rsty}\,a = a'$$

Ustaliwszy te zasady, łatwo przekształcić formuły trygonometryi sferycznej na odpowiedające w trygonometryi prostolinijnej. I tak, biorąc na przykład równania

$$\frac{\mathrm{wst}a}{\mathrm{wstA}} = \frac{\mathrm{wst}b}{\mathrm{wstB}} = \frac{\mathrm{wst}c}{\mathrm{wstC}},$$

możemy je pisać jako następuje

$$\frac{\mathrm{R\,wst}a}{\mathrm{wstA}} = \frac{\mathrm{R\,wst}b}{\mathrm{wstB}} = \frac{\mathrm{R\,wst}c}{\mathrm{wstC}}.$$

Pod tym kształtem, widzimy zaraz że, gdy $\mathrm{R} = \infty$, liczniki stosunków stają się a', b', c' na mocy dowiedzionej zasady, i kąty A, B, C stają się kątami A′, B′, C′; więc otrzymujemy

$$\frac{a'}{\mathrm{wstA'}} = \frac{b'}{\mathrm{wstB'}} = \frac{c'}{\mathrm{wstC'}},$$

znane proporcye trygonometryi prostolinijnej.

Przekształcone takim samym sposobem analogie Nepera, dają wszystkie cztery formuły rozwiązywania drugiego przypadku trójkątów prostolinijnych. Co usprawiedliwia ich nazwisko, Uważajmy teraz fundamentalną formułę trygonometryi sferycznej

$$\mathrm{dos}\,a = \mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c + \mathrm{wst}\,b\,\mathrm{wst}\,c\,\mathrm{dos}\,A\,.$$

Aby wiedzieć co ona przedstawia w trygonometryi prostolinijnej, wyraźmy dostawy boków, to jest $\mathrm{dos}\,a$, $\mathrm{dos}\,b$, $\mathrm{dos}\,c$, w funkcyi wstaw biorąc $\mathrm{dos}\,a = 1 - 2\mathrm{wst}^2\frac{a}{2}$, etc. Podstawiwszy te wartości, będzie

$$\mathrm{wst}^2\frac{a}{2} = \mathrm{wst}^2\frac{b}{2} + \mathrm{wst}^2\frac{c}{2} - 2\mathrm{wst}^2\frac{b}{2}\mathrm{wst}^2\frac{c}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{wst}\,b\,\mathrm{wst}\,c\,\mathrm{dos}\,A\,,$$

albo

$$\left(\mathrm{R\,wst}\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\mathrm{R\,wst}\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\mathrm{R\,wst}\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{2}{\mathrm{R}^2}\left(\mathrm{R\,wst}\frac{b}{2}\right)^2\left(\mathrm{R\,wst}\frac{c}{2}\right)^2$$
$$- \frac{1}{2}\,\mathrm{R\,wst}\,b\,.\,\mathrm{R\,wst}\,c\,\mathrm{dos}\,A\,;$$

więc, gdy $\mathrm{R} = \infty$, otrzymujemy

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}bc\,\mathrm{dos}\,A$$

albo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\mathrm{dos}\,A\,.$$

Co jest właśnie fundamentalną formułą trygonometryi prostolinijnej.

Zobaczmy jeszcze jakiej własności trójkąta prostolinijnego odpowieda formuła

$$\mathrm{dos}\,a = \mathrm{dos}\,b\,\mathrm{dos}\,c\,.$$

Jeśli zamienimy dostawy na wstawy, biorąc po prostu $\mathrm{dos}\,a = \sqrt{1 - \mathrm{wst}^2 a}$, etc; znajdziemy

$$\mathrm{wst}^2 a = \mathrm{wst}^2 b + \mathrm{wst}^2 c - \mathrm{wst}^2 b\,\mathrm{wst}^2 c\,.$$

albo, co to samo,

$$(\mathrm{R\,wst}a)^2 = (\mathrm{R\,wst}b)^2 + (\mathrm{R\,wst}c)^2 - \frac{1}{\mathrm{R}^2}(\mathrm{R\,wst}b)^2(\mathrm{R\,wst}c)^2.$$

Więc, gdy $\mathrm{R} = \infty$, będzie

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Co wyraża znane dobrze twierdzenie geometryi.

Szukajmy nakoniec przekształcenia formuły

$$\mathrm{sty}\frac{\mathrm{S}}{2} = \sqrt{\mathrm{sty}\frac{p}{2}\,\mathrm{sty}\frac{p-a}{2}\,\mathrm{sty}\frac{p-b}{2}\,\mathrm{sty}\frac{p-c}{2}};$$

która daje zbytek sferyczny 2S w funkcyi trzech boków. Nazywając S' kwadraturę trójkąta sferycznego, to jest stosunek jego powierzchni do kwadratu zbudowanego na jedności linijnej, mamy

$$2\mathrm{S} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} - \pi \quad \text{i} \quad \mathrm{S}' = 2\mathrm{R}^2\mathrm{S};$$

na mocy tej równości, zadaną formułę można tak pisać

$$2\mathrm{R}^2\mathrm{sty}\frac{\mathrm{S}}{2} = \frac{\mathrm{S}'}{2}\,\frac{\mathrm{sty}\frac{1}{2}\mathrm{S}}{\frac{1}{2}\mathrm{S}} = 2\sqrt{\mathrm{R\,sty}\frac{p}{2}\,\mathrm{R\,sty}\frac{p-a}{2}\,\mathrm{R\,sty}\frac{p-b}{2}\,\mathrm{R\,sty}\frac{p-c}{2}};$$

więc, gdy $\mathrm{R} = \infty$, będzie

$$\mathrm{S}' = \sqrt{p'(p-a)(p-b')(p-c)}.$$

Znajdujemy tym sposobem powierzchnię trójkąta prostolinijnego w funkcyi trzech boków.

ZASTOSOWANIE TRYGONOMETRYI DO FIGUR SFERYCZNYCH.

234. Szukajmy najpierwej jakim sposobem można rozciągnąć własności figur płaskich do figur sferycznych, aby otrzymać odpowiedające twierdzenia.

Jeśli twierdzenie wyraża opisową własność figury płaskiej, wtedy, idąc za jego dowodzeniem przyzwoicie dobranem, można zwykle znaleźć podobne twierdzenie na sferze. Niech będzie na przykład twierdzenie: *W trójkącie* OAB *dwójsieczna* OC *kąta* AOB *dzieli bok przeciwległy* AB *na dwa odcinki proporcyonalne do boków przyległych.* Dowiedźmy tego twierdzenia jako następuje.

Trójkąty OCA i OCB dają

$$\frac{CA}{\text{wst}\frac{1}{2}O}=\frac{OA}{\text{wst}C} \quad \text{i} \quad \frac{CB}{\text{wst}\frac{1}{2}O}=\frac{OB}{\text{wst}C},$$

więc

$$\frac{CA}{CB}=\frac{OA}{OB}.$$

To dowodzenie stosuje się do trójkąta sferycznego OAB; dość tylko zamiast odcinków CA, CB i boków OA, OB, wziąć ich wstawy, i będzie

$$(1) \qquad \frac{\text{wst}\,CA}{\text{wst}\,CB}=\frac{\text{wst}\,OA}{\text{wst}\,OB}.$$

Więc w trójkącie sferycznym, dwójsieczna sferyczna kąta dzieli bok przeciwległy na dwa odcinki których wstawy są proporcyonalne do wstaw boków przyległych.

Dowiedzie się tak samo że: *w trójkącie sferycznym* OAB, *dwójsieczna sferyczna* OD *kąta zewnętrznego* O *wyznacza na boku przeciwległym* AB *dwa odcinki* DA *i* DB, *których wstawy są* *proporcyonalne do wstaw boków przyległych*, to jest

$$\frac{\text{wst DA}}{\text{wst DB}} = \frac{\text{wst OA}}{\text{wst OB}} . \tag{2}$$

Wzajemnice tych dwóch twierdzeń są prawdziwe

235. Z dwóch proporcyj (1) i (2) wynika trzecia

$$\frac{\text{wst CA}}{\text{wst CB}} = \frac{\text{wst DA}}{\text{wst DB}} ,$$

Z ostatniej proporcyi, mając wzgląd na znaki stosunków, wywodzimy stosunek nieharmoniczny

$$\frac{\text{wst CA}}{\text{wst CB}} : \frac{\text{wst DA}}{\text{wst DB}} = -1,$$

który można pisać symbolicznie $(\text{wst.ABCD}) = -1$.

Mówi się że cztery punkta A, B, C, D, leżące na jednym łuku koła wielkiego i dające stosunek nieharmoniczny wstaw odcinków równy -1, to jest $(\text{wst.ACBD}) = -1$, stanowią *układ harmoniczny* w którym punkta B i D są *sprzężone harmoniczne* względem łuku AC; i nawzajem punkta A i C są sprzężone harmoniczne względem łuku BD.
Dla tej samej przyczyny układ (O.ACBD) czterech łuków kół wielkich OA, OB, OC, OD, które się przecinają w punkcie O i przechodzą przez cztery punkta A, B, C, D układu harmonicznego, nazywa się pękiem *harmonicznym*.

236. Można niekiedy łatwo przejść z twierdzenia geometryi płaskiej do podobnego twierdzenia na sferze. I tak, *w czworoboku wpisanym w koło*, 1° *wieloczyn przekątnych jest równy summie wieloczynów z boków przeciwległych*; 2° *przekątne mają się jako summy wieloczynów z boków które się schodzą w ich skrajnościach*. Aby przeprowadzić to twierdzenie Ptolemeusza do geometryi sferycznej, uważajmy czworobok sferyczny ABCD wpisany w małe koło, i niech będą a, b, c, d, e, f jego boki i obie przekątne. Widzimy zaraz że cięciwy tych linij są bokami i przekątnemi czworoboku płaskiego ABCD wpisanego w to samo koło. Owoż, jeśli weźmiemy promień sfery za jedność, wstawy boków i przekątnych czworoboku sferycznego będą połowami odpowiedających cięciw; więc, na mocy rzeczonego twierdzenia, znajdujemy

1°. $$\text{wst}\frac{e}{2}\,\text{wst}\frac{f}{2} = \text{wst}\frac{a}{2}\,\text{wst}\frac{c}{2} + \text{wst}\frac{b}{2}\,\text{wst}\frac{d}{2}$$

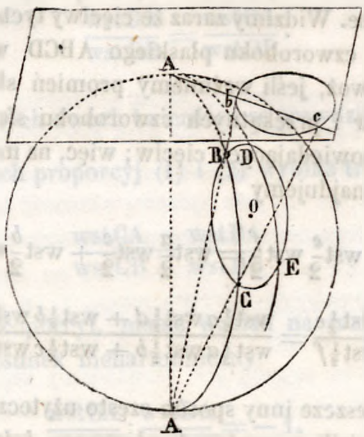
2°. $$\frac{\text{wst}\frac{1}{2}e}{\text{wst}\frac{1}{2}f} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}a\,\text{wst}\frac{1}{2}d + \text{wst}\frac{1}{2}b\,\text{wst}\frac{1}{2}c}{\text{wst}\frac{1}{2}a\,\text{wst}\frac{1}{2}b + \text{wst}\frac{1}{2}c\,\text{wst}\frac{1}{2}d}.$$

237. Oto jeszcze inny sposób często użyteczny. W geometryi płaskiej, *jeśli z punktu* A *płaszczyzny koła poprowadzono sieczną* ABC *do okręgu, wieloczyn odcinków* AB, AC *jest stały*, niezależny od kierunku siecznej; temu twierdzeniu odpowieda następujące w geometryi sferycznej :

Jeśli przez punkt A *na sferze poprowadzono do koła* O *sieczną sferyczną* ABC, *wieloczyn* $sty\frac{AB}{2}\,sty\frac{AC}{2}$ *jest stały.*

Aby dowieśdź ostatniego twierdzenia, zróbmy rzut stereograficzny figury na płaszczyznie stycznej do sfery w punkcie A, biorąc za punkt widzenia punkt A' średnicowo przeciwległy punktowi A. W tym rzucie, jako wiadomo, koło rzutuje się wedle koła; więc, nazywając b i c rzuty stereograficzne punktów B i C, ponieważ z wykreślenia sieczna sferyczna ABC ma za rzut stereograficzny sieczną prostą Abc, wiewieloczyn Ab . Ac jest stały. Owoż, odcinki Ab i Ac są proporcyonalne do $\text{sty}\frac{AB}{2}$ i $\text{sty}\frac{AC}{2}$, bo trójkąty prostokątne bAA' i cAA' dają $Ab = AA'\,\text{sty}\frac{AB}{2}$, i $Ac = AA'\,\text{sty}\frac{AC}{2}$.

Więc wieloczyn $\operatorname{sty}\frac{AB}{2}\operatorname{sty}\frac{AC}{2}$ jest stały.



Ztąd wynika twierdzenie : *Jeśli przez punkt* A *na sferze poprowadzono do małego koła* BCD *dwie sieczne sferyczne* ABC, ADE, *będzie*

$$\operatorname{sty}\frac{AB}{2}\operatorname{sty}\frac{AC}{2}=\operatorname{sty}\frac{AD}{2}\operatorname{sty}\frac{AE}{2}.$$

I NAWZAJEM, *cztery punkta* B, C, D, E *na sferze, zadość czyniące temu równaniu są na okręgu małego koła* BCD.

238. WNIOSEK. Gdy jedna z dwóch siecznych, na przykład AD, staje się styczną, wtedy

$$\operatorname{sty}\frac{AB}{2}\operatorname{sty}\frac{AC}{2}=\operatorname{sty}^2\frac{AD}{2}.$$

Gdy punkt A jest wewnątrz małego koła, poprowadziwszy przez ten punkt cięciwę sferyczną minimum KAK′, będzie

$$\operatorname{sty}\frac{AB}{2}\operatorname{sty}\frac{AC}{2}=\operatorname{sty}^2\frac{AK}{2}.$$

239. Uwaga. Wieloczyn $\operatorname{sty}\frac{AB}{2}\operatorname{sty}\frac{AC}{2}$ może się wyrazić w innym kształcie. Jakoż, oznaczmy przez O biegun małego koła BCD, przez R jego promień sferyczny, otrzymamy

$$\operatorname{sty}\frac{AB}{2}\operatorname{sty}\frac{AC}{2}=\operatorname{sty}\frac{AO+R}{2}\operatorname{sty}\frac{AO-R}{2}$$

albo

$$\operatorname{sty}\frac{AB}{2}\operatorname{sty}\frac{AC}{2}=\frac{\operatorname{dos}R-\operatorname{dos}AO}{\operatorname{dos}R+\operatorname{dos}AO}$$

Wieloczyn $\operatorname{sty}\frac{AB}{2}\operatorname{sty}\frac{AC}{2}$ jest dodatny albo odjemny, według jak odcinki AB i AC idą oba w jedną stronę albo w strony wprost przeciwne, to jest, według jak punkt A leży zewnątrz albo wewnątrz krymki sferycznej OBC. Co się zgadza z geometryą płaską.

240. Czasem samo podobieństwo dowodzeń nastręcza sposób odkrycia w trójkącie sferycznym własności odpowiedającej twierdzeniu geometryi płaskiej. I tak, w trójkącie prostolinijnym ABC, nazywając α ośródkowę boku BC, i posługując się fundamentalną formułą $a^2=b^2+c^2-2bc\operatorname{dos}A$, znajdujemy łatwo twierdzenie $b^2+c^2=2\alpha^2+\frac{a^2}{2}$. Owoż, w trójkącie sferycznym ABC, nazywając także α ośródkowę sferyczną AD boku a, i stosując fundamentalną formułę trygonometryi sferycznej, mamy najpierwej w trójkątach sferycznych ADC i ADB

$$\operatorname{dos}b=\operatorname{dos}\frac{a}{2}\operatorname{dos}\alpha+\operatorname{wst}\frac{a}{2}\operatorname{wst}\alpha\operatorname{dos}ADC,$$

$$\operatorname{dos}c=\operatorname{dos}\frac{a}{2}\operatorname{dos}\alpha-\operatorname{wst}\frac{a}{2}\operatorname{wst}\alpha\operatorname{dos}ADC;$$

a potem, dodając te równania, otrzymujemy szukaną własność

$$(1)\qquad \text{dos}b + \text{dos}c = 2\text{dos}\frac{a}{2}\text{dos}\alpha.$$

241. Uwaga. Ostatnie równanie pokazuje że, *Miejscem punktu* A *na sferze, którego odległości b i c od dwóch punktów niezmiennych* C *i* B *czynią summę dosb + dosc stałą, jest okrąg małego koła mający za biegun środek* D *odległości* BC.

Nie trudno także znaleźć twierdzenie odpowiedające temu które, w trójkącie prostolinijnym, daje rzut ośródkowej boku na jego kierunku. Jakoż, niech będzie DH rzut ośródkowej sferycznej AD na kierunku boku BC; rozumując przez podobieństwo dowodzeń jako wyżej, w przypuszczeniu że $\text{dos}c < \text{dos}b$ odciągamy przedostatnie równanie od poprzedzającego, i mamy

$$\text{dos}b - \text{dos}c = 2\text{wst}\frac{a}{2}\text{wst}\alpha\,\text{dosADC}.$$

Ale trójkąt sferyczny prostokątny ADH daje

$$\text{dosADH} = \text{dot}\alpha\,\text{styDH}.$$

Więc, ponieważ dosADC = dosADH z powyższego przypuszczenia, rugując dosADC, będzie

$$\text{dos}b - \text{dos}c = 2\text{wst}\frac{a}{2}\text{dos}\alpha\,\text{styDH};$$

zkąd, dzieląc stronami przez równanie (1), wynika żądany związek

$$(2)\qquad \text{sty}\frac{a}{2}\text{styDH} = \frac{\text{dos}b - \text{dos}c}{\text{dos}b + \text{dos}c} = \text{sty}\frac{b+c}{2}\,\text{sty}\frac{b-c}{2},$$

który odpowieda twierdzeniu geometryi

$$2a.\text{DH} = b^2 - c^2.$$

POPRZECZNE SFERYCZNE.

242. Twierdzenie. *W trójkącie sferycznym* ABC, *poprzeczna abc wyznacza na bokach sześć odcinków takich że*

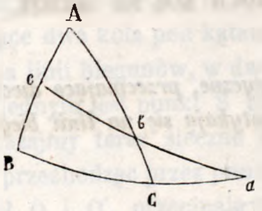


fig 1

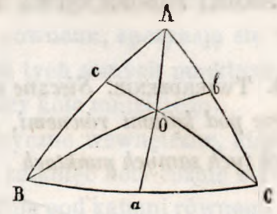


fig.2

$$\frac{\text{wst}\,a\text{B}}{\text{wst}\,a\text{C}} \cdot \frac{\text{wst}\,b\text{C}}{\text{wst}\,b\text{A}} \cdot \frac{\text{wst}\,c\text{A}}{\text{wst}\,c\text{B}} = +1.$$

Jakoż, w trójkącie sferycznym *ac*B (*fig.* 1), mamy

$$\frac{\text{wst}\,a\text{B}}{\text{wst}\,c\text{B}} = \frac{\text{wst}\,c}{\text{wst}\,a};$$

tak samo, w trójkątach sferycznych *ab*C i *bc*A,

$$\frac{\text{wst}\,b\text{C}}{\text{wst}\,a\text{C}} = \frac{\text{wst}\,a}{\text{wst}\,b}, \quad \frac{\text{wst}\,b\text{A}}{\text{wst}\,c\text{A}} = \frac{\text{wst}\,c}{\text{wst}\,b}.$$

Mnożąc te trzy proporcye stronami, i uważając na znaki stosunków, otrzymamy zwiastowane równanie.

243. Opierając się na ostatniem twierdzeniu łatwo dowieść łatwo następującego

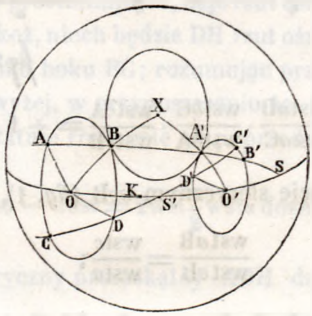
Twierdzenie. *W trójkącie sferycznym* ABC (*fig.* 2), *trzy poprzeczne sferyczne* OA, OB, OC, *poprowadzone przez jeden punkt sfery do wierzchołków, wyznaczają na bokach sześć odcinków takich że*

$$\frac{\text{wst}\,a\text{B}}{\text{wst}\,a\text{C}} \cdot \frac{\text{wst}\,b\text{C}}{\text{wst}\,b\text{A}} \cdot \frac{\text{wst}\,c\text{A}}{\text{wst}\,c\text{B}} = -1.$$

Uwaga. Ważne wzajemnice obydwóch twierdzeń są prawdziwe, i dowodzą się jako w geometryi płaskiej.

ŚRODKI PODOBIEŃSTWA DWÓCH KÓŁ NA SFERZE.

244. Twierdzenie. *Sieczne sferyczne, przecinające dwa koła na sferze pod kątami równemi, spotykają się na linii biegunów w dwóch tych samych punktach*



Można zawsze wyobrazić koło X, styczne zewnętrznie albo wewnętrznie do dwóch kół O, O' danych na sferze, i przez punkta zetknięć poprowadzić sieczną sferyczną która przecina te koła pod kątami równemi. Niech będzie ABA' jedna z takich siecznych, spotykająca linię biegunów OO' w punkcie S. Poprowadźmy promienie sferyczne OA, O'A', i nazwijmy je R, R'. Ponieważ kąty A i A' są równe, trójkąty sferyczne SOA i SO'A' dają

$$\frac{\text{wst}\,SO}{\text{wst}\,R} = \frac{\text{wst}\,SO'}{\text{wst}\,R'};$$

zkąd

$$\frac{\text{sty}\,\frac{1}{2}(SO+SO')}{\text{sty}\,\frac{1}{2}OO'} = \frac{\text{sty}\,\frac{1}{2}(R+R')}{\text{sty}\,\frac{1}{2}(R-R')},$$

albo, oznaczając przez K środek łuku OO',

$$(1)\qquad \mathrm{sty}KS = \frac{\mathrm{sty}\frac{1}{2}(R+R')\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}OO'}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}(R-R')}.$$

Ten wynik dowodzi że sieczne sferyczne zewnętrzne, przecinające dwa koła pod kątami równemi, spotykają się wszystkie na linii biegunów, w dwóch tych samych punktach z których jednym jest punkt S bliższy koła mniejszego.

Uważajmy teraz sieczne sferyczne wewnętrzne, które jako CD, przechodząc przez punkta zetknięć koła różnie stycznego do kół O i O', przecinają te koła pod kątami równemi i linię biegunów w punkcie S'. Rozumując jako wyżej, znajdziemy

$$(2)\qquad \mathrm{sty}KS' = \frac{\mathrm{sty}\frac{1}{2}(R-R')\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}OO'}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}(R+R')}.$$

Ta formuła pokazuje że sieczne wewnętrzne spotykają się także wszystkie na linii biegunów, w dwóch tych samych punktach, z których jednym jest punkt S' leżący między biegunami O i O'.

Punkta S i S' nazywają się *środkami podobieństw dwóch kół na sferze*; pierwszy S jest środkiem *podobieństwa prostego*, drugi S' środkiem *podobieństwa odwrotnego.*

Wynika z twierdzenia że 1°, *Wszelka sieczna sferyczna dwóch kół na sferze, przechodząca przez jeden ze środków podobieństwa, przecina te koła pod kątami równemi.*

2°. *Styczne sferyczne spólne dwom kołom przechodzą przez ich środki podobieństwa.* Zatem, gdy dwa koła na sferze są styczne między sobą, punkt ich zetknięcia jest środkiem podobieństwa, prostego albo odwrotnego według jak te koła są styczne zewnętrznie albo wewnętrznie.

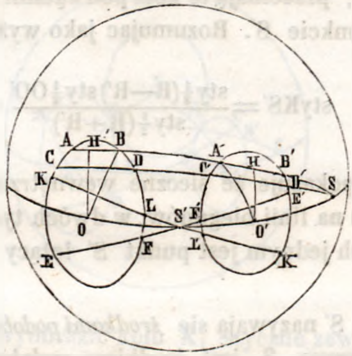
245. *Środki podobieństwa dwóch kół na sferze dzielą harmonicznie linię biegunów.* Jakoż, trójkąty sferyczne SOA, SO'A' mające kąt S spólny i kąty A, A′ równe, a trójkąty sferyczne S′OD, S′OD′ mające kąt S′ spólny i kąty D, D′ równe, dają

$$\frac{\text{wstSO}}{\text{wstR}}=\frac{\text{wstSO}'}{\text{wstR}'} \quad \text{i} \quad \frac{\text{wstS}'\text{O}}{\text{wstR}}=\frac{\text{wstS}'\text{O}'}{\text{wstR}'}$$

więc

$$\frac{\text{wstSO}}{\text{wstSO}'}=\frac{\text{wstS}'\text{O}}{\text{wstS}'\text{O}'}, \quad \text{albo} \quad (\text{wst}.\text{OO}'\text{SS}')=-1.$$

246. Twierdzenie. *Jeśli, przez jeden ze środków podobieństwa dwóch kół na sferze, poprowadzono dwie sieczne sferyczne, styczne połowy ich odcinków odpowiednych są proporcyonalne.*



Niech będą dwie sieczne sferyczne SA′A i SCC′; poprowadźmy prostopadłe sferyczne OH i O′H′ do cięciw AB i A′B′, i połączmy OA, O′A′. Trójkąty sferyczne prostokątne SOH AOH dają

$$\text{wstSH}=\text{styOH dotS} \quad \text{i} \quad \text{wstAH}=\text{styOH dotA};$$

zkąd

$$\frac{\text{wst SH}}{\text{wst AH}}=\frac{\text{dotS}}{\text{dotA}}.$$

Trójkąty sferyczne prostokątne SO′H′ A′O′H′ dają także

$$\frac{\text{wstSH}'}{\text{wstA}'\text{H}'}=\frac{\text{dotS}}{\text{dotA}'}.$$

Z tych dwóch proporcyj, ponieważ kąty A i A′ są równe, wynika trzecia

$$\frac{\mathrm{wst}SH}{\mathrm{wst}AH}=\frac{\mathrm{wst}SH'}{\mathrm{wst}A'H'},$$

która jest to samo co

$$\frac{\mathrm{sty}\frac{SA}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SA'}{2}}=\frac{\mathrm{sty}\frac{SB}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SB'}{2}}.$$

Uważając sieczną sferyczną SC′C, znajdziemy podobnie

$$\frac{\mathrm{sty}\frac{SC}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SC'}{2}}=\frac{\mathrm{sty}\frac{SD}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SD'}{2}}.$$

Owoż (237)

$$\frac{\mathrm{sty}\frac{SA}{2}\,\mathrm{sty}\frac{SB}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SA'}{2}\,\mathrm{sty}\frac{SB'}{2}}=\frac{\mathrm{sty}\frac{SC}{2}\,\mathrm{sty}\frac{SD}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SC'}{2}\,\mathrm{sty}\frac{SD'}{2}},$$

więc

$$\frac{\mathrm{sty}\frac{SA}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SA'}{2}}=\frac{\mathrm{sty}\frac{SC}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SC'}{2}}=\frac{\mathrm{sty}\frac{SB}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SB'}{2}}=\frac{\mathrm{sty}\frac{SD}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SD'}{2}}.$$

Dowiedzie się takim samym sposobem że sieczne sferyczne wewnętrzne SEF′ i SHH′ dają proporcye

$$\frac{\mathrm{sty}\frac{SE}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SE'}{2}}=\frac{\mathrm{sty}\frac{SH}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SH'}{2}}=\frac{\mathrm{sty}\frac{SF}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SF'}{2}}=\frac{\mathrm{sty}\frac{SK}{2}}{\mathrm{sty}\frac{SK'}{2}}.$$

247. Punkta A i B′, B i A′,... nazywają się *przeciwodpowiednemi* względem środka podobieństwa S′. punkta E i F′, F i E',... są przeciwodpowiedne względem środka podobieństwa S'. Cięciwy dwóch kół O i O', jako AC i B'D', łączące każda punkta przeciwodpowiedne skrajnościom drugiej, nazywają się *cięciwami przeciwodpowiednemi.*

Twierdzenie. *Dwa dwojany punktów przeciwodpowiednych, leżące na dwóch siecznych, przechodzących przez jeden środek podobieństwa, znajdują się na jednym okręgu koła małego*; takiemi są dwojany A, B' i D, C'; E, F' i F, E'.

Dowodzenie jako w geometryi płaskiej.

248. Uwaga. Formuły (1) i (2) n° 244 są ogólne, i dowodzą że dwa koła na sferze mają zawsze dwa środki podobieństwa. Ale, gdy dwa koła są spółbiegunowe, ich środki podobieństwa schodzą się w spólnym biegunie; a gdy dwa koła są równoległe, te środki schodzą się w biegunie koła mniejszego.

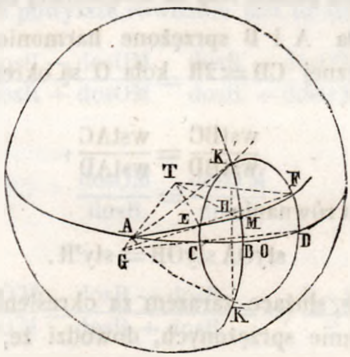
Styczne sferyczne spólne dwom kołom wyznaczają poprostu ich środki podobieństwa. Można łatwo wykreślić te dwa środki innym sposobem, który służy wtedy szczególniej gdy styczne sferyczne spólne nie istnieją. Dość tylko wyznaczyć biegun koła stycznego do dwóch kół danych, połączyć ten biegun z ich biegunami, prowadząc łuki kół wielkich które przetną owe okręgi w punktach przeciwodpowiednych; sieczna sferyczna przechodząca przez te punkta da odpowiedny środek podobieństwa. I tak, przypuśćmy że, mając dane koło O' wewnątrz koła O, chcemy znaleźć środek podobieństwa prostego S. Z biegunów O i O', promieniami $R-x$ i $x-R'$ kreślimy dwa łuki kół przecinające się w punkcie X; prowadzimy łuki kół wielkich XO i XO' które dają dwa punkta przeciwodpowiedne; i nakoniec przez te ostatnie prowadzimy sieczną sferyczną która wyznacza środek podobieństwa S. Możebność tego wykreślenia wymaga tylko żeby x zadość czyniło dwom nierównościom

$$\frac{R+R}{2}-\frac{OO'}{2}<x<\frac{R+R'}{2}+\frac{OO'}{2}.$$

249. Twierdzenie. *Trzy koła na sferze, uważane po dwa, mają sześć środków podobieństwa, takie że: 1°, trzy środki podobieństwa prostego leżą na jednym okręgu koła wielkiego które się nazywa* osią podobieństwa prostego; *każde dwa środki podobieństwa odwrotnego z trzecim nieodpowiednym środkiem podobieństwa prostego leżą także na jednym okręgu koło wielkiego który się nazywa* osią podobieństwa odwrotnego.

Łatwe dowodzenie przez poprzeczne sferyczne.

250. Biegunowa sferyczna względem koła. *Jeśli przez punkt* A *dany na sferze, poprowadzono do małego koła* O *sieczne sferyczne jako* AEF, *miejscem geometrycznem punktu* M, *sprzężonego harmonicznego z punktem* A *względem cięciwy sferycznej EF, jest okrąg koła wielkiego* MB *prostopadły do średnicy sferycznej* AO *małego koła przechodzącej przez punkt* A.



Jakoż, cięciwa EF i średnica CD małego koła O, leżące na płaszczyznach które się przecinają wedle promienia TA sfery, spotykają ten promień w punkcie G; a z założenia układ (wst.AMEF) albo, co to samo, pęk(T.AMEF) jest harmoniczny. Więc, oznaczając przez H punkt przecięcia promienia sfery TM i siecznej EF, układ prostolinijny punktów G, E, M, F będzie harmoniczny; i miejscem punktu H będzie biegunowa HK punktu G względem koła CDF, prostopadła do jego średnicy CD. Ztąd wynika że miejscem punktu M jest przecięcie MK sfery przez płaszczyznę THK prostopadłą do płaszczyzny ACD, to jest okrąg MB koła wielkiego prostopadły do średnicy sferycznej AO koła O.

Ten okrąg koła wielkiego MB nazywa się BIEGUNOWĄ (*sferyczną*) *punktu* A, *i nawzajem, punkt* A *jest* BIEGUNEM (*sferycznym*) *okręgu* MB *względem koła* O *na sferze.*

Własności biegunowej prostolinijnej stosują się do biegunowej sferycznej. I tak, biegunowa sferyczna punktu leżącego zewnątrz koła jest cięciwą punktów zetknięć stycznych sferycznych które przez ten punkt przechodzą. I nawzajem.

Biegunowe punktów leżących na jednym okręgu koła wielkiego przechodzą przez biegun sferyczny tego okręgu. I nawzajem, bieguny sferyczne okręgów kół wielkich, przechodzących przez jeden punkt, leżą na biegunowej tego punktu; etc.

251. Punkta A i B sprzężone harmonicznie względem średnicy sferycznej $CD = 2R$ koła O są określone przez proporcyę

$$\frac{\mathrm{wst}BC}{\mathrm{wst}BD} = \frac{\mathrm{wst}AC}{\mathrm{wst}AD},$$

z której wynika równanie

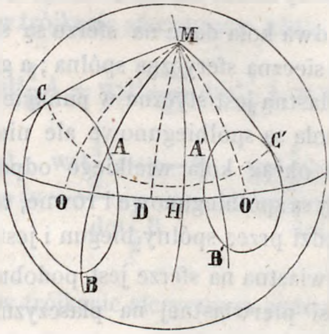
$$\mathrm{sty}OA\,\mathrm{sty}OB = \mathrm{sty}^2R.$$

To równanie, służące zarazem za określenie dwóch punktów harmonicznie sprzężonych, dowodzi że, gdy punkt A leży na okręgu koła małego O, jego biegunowa względem tego koła jest styczną w punkcie A; a gdy punkt A przypada w biegunie O, jego biegunową jest okrąg koła wielkiego mający punkt A za biegun.

252. OŚ PIERWIASTNA KÓŁ NA SFERZE. *Miejscem geometrycznem punktu* M *który daje wieloczyny równe*

$$sty\frac{MA}{2}\;sty\frac{MB}{2} = sty\frac{MA'}{2}\;sty\frac{MB'}{2}$$

względnie do dwóch kół O, O′ *na sferze, jest okrąg koła wielkiego prostopadły do linii biegunów* OO′.



Jakoż, nazywając R i R′ promienie sferyczne kół O, O′ wiemy (239) że powyższe równanie jest to samo co

$$\frac{\text{dos}R - \text{dos}OM}{\text{dos}R + \text{dos}OM} = \frac{\text{dos}R' - \text{dos}O'M}{\text{dos}R' + \text{dos}O'M},$$

albo

$$\frac{\text{dos}OM}{\text{dos}R} = \frac{\text{dos}O'M}{\text{dos}R'};$$

ztąd wynika

$$\frac{\text{dos}OM - \text{dos}O'M}{\text{dos}OM + \text{dos}O'M} = \frac{\text{dos}R - \text{dos}R'}{\text{dos}R + \text{dos}R'} = \text{sty}\frac{R-R'}{2}\,\text{sty}\frac{R+R'}{2}.$$

Owoż, w trójkącie sferycznym MOO′, oznaczając przez D środek boku OO′, przez DH rzut ośródkowej sferycznej DM na linii OO′, pierwsza strona ostatniego równania wyraża wieloczyn $\text{sty}\frac{OO'}{2}\text{sty}\,DH$; więc

$$\text{sty}DH = \frac{\text{sty}\frac{R-R'}{2}\,\text{sty}\frac{R+R'}{2}}{\text{sty}\frac{OO'}{2}}.$$

Co dowodzi że miejscem punktu M jest prostopadła sferyczna MH do linii biegunów OO'. Ta prostopadła MH nazywa się OSIĄ PIERWIASTNĄ *dwóch kół* O, O' *na sferze.*

UWAGA. Gdy dwa koła dane na sferze są sieczne, ich osią pierwiastną jest sieczna sferyczna spólna; a gdy te koła są styczne, osią pierwiastną jest styczna w punkcie spólnym. Nakoniec, gdy dwa koła są spółbiegunowe ale nierówne, ich osią pierwiastną jest okrąg koła wielkiego odpowiedający temu biegunowi; a gdy są spółbiegunowe i równe, wtedy ich oś pierwiastna przechodzi przez spólny biegun i jest niewyznaczona.

253. Oś pierwiastna na sferze jest podobna w swoich własnościach do osi pierwiastnej na płaszczyznie, i wykreśla się podobnie. Pojmiemy więc łatwo następujące twierdzenia:

Trzy osie pierwiastne trzech kół na sferze, branych po dwa, przecinają się w jednym punkcie który mianowano ŚRODKIEM PIERWIASTNYM tych kół.

Oś pierwiastna dwóch kół na sferze jest miejscem środków kół które je przecinają prostokątnie.

Miejscem punktów z których można prowadzić styczne równe do dwóch kół na sferze jest oś pierwiastna tych kół.

Cięciwy przeciwodpowiedne dwoch kół na sferze spotykają się na ich osi pierwiastnej.

254. KOŁA STYCZNE DO TRZECH KÓŁ NA SFERZE. Rozumując jako w geometryi płaskiej, nie trudno, po tem co poprzedza, rozwiązać wprost zagadnienia kół stycznych na sferze, opierając się na następującem twierdzeniu:

Gdy dwa koła, styczne do trzech kół na sferze, należą do jednego dwojanu, wtedy: 1°, *cięciwa sferyczna kół danych przechodzi przez ich środek pierwiastny*; 2°, *ta cięciwa zawiera, względem swego koła, biegun jednej osi podobieństwa trzech kół odpowiedającej uważanemu dwojanowi*; 3°, *linia biegunów kół stycznych jednego dwojanu jest prostopadła do tej osi.* (Po szczegóły odsyłamy do naszej geometryi, *wydanie* 2gie 1869 r.)

ĆWICZENIA.

I. Dowieśdź że, w trójkącie sferycznym ABC,

$$\mathrm{wst}^2\frac{b+c}{2}\,\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}A+\mathrm{wst}^2\frac{b-c}{2}\,\mathrm{dos}^2\frac{1}{2}A=\mathrm{wst}^2\frac{a}{2}.$$

$$\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\mathrm{dot}\frac{1}{2}A}=\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\mathrm{dot}\frac{1}{2}B}=\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{dot}\frac{1}{2}C}.$$

II. Dowieśdź że w trójkącie sferycznym prostokątnym

$$\mathrm{sty}^2\frac{a}{2}=\mathrm{sty}^2\frac{b}{2}+\mathrm{sty}^2\frac{c}{2}-\mathrm{sty}\frac{a}{2}\,\mathrm{sty}\frac{b}{2}\,\mathrm{sty}\frac{c}{2}.$$

$$\mathrm{sty}S=\mathrm{sty}\frac{b}{2}\,\mathrm{sty}\frac{c}{2}.$$

III. W trójkącie sferycznym ABC, nazywając R, r_a, r_b, r_c promienie sferyczne kół opisanego, wpisanego i zawpisanych, i czyniąc jako zwykle $A+B+C-\pi=2S$, dowieśdź że

$$1-\mathrm{dos}^2A-\mathrm{dos}^2B-\mathrm{dos}^2C+2\mathrm{dos}A\,\mathrm{dos}B\,\mathrm{dos}C$$
$$=4\mathrm{wst}S\,\mathrm{wst}(A-S)\,\mathrm{wst}(B-S)\,\mathrm{wst}(C-S).$$

$$\mathrm{sty}r=\frac{\sqrt{\mathrm{wst}S\,\mathrm{wst}(A-S)\,\mathrm{wst}(B-S)\,\mathrm{wst}(C-S)}}{2\mathrm{dos}\frac{1}{2}A\,\mathrm{dos}\frac{1}{2}B\,\mathrm{dos}\frac{1}{2}C}$$

$$\mathrm{sty}r_a=\frac{\sqrt{\mathrm{wst}S\,\mathrm{wst}(A-S)\,\mathrm{wst}(B-S)\,\mathrm{wst}(C-S)}}{2\mathrm{dos}\frac{1}{2}A\,\mathrm{wst}\frac{1}{2}B\,\mathrm{wst}\frac{1}{2}C}.$$

$$\frac{\mathrm{sty}r_a}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}A}=\frac{\mathrm{sty}r_b}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}B}=\frac{\mathrm{sty}r_c}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}C}=\frac{\mathrm{sty}r}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}A\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}B\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}C}.$$

$$\mathrm{sty}r=\frac{2\mathrm{wst}S\,\mathrm{dos}\frac{a}{2}\mathrm{dos}\frac{b}{2}\mathrm{dos}\frac{c}{2}}{\mathrm{wst}p}=\frac{\mathrm{wst}b\,\mathrm{wst}c\,\mathrm{wst}A}{2\mathrm{wst}p}.$$

$$\text{sty}r_a = \frac{2\text{wst}(\text{A}-\text{S})\,\text{dos}\tfrac{1}{2}a\,\text{wst}\tfrac{1}{2}b\,\text{wst}\tfrac{1}{2}c}{\text{wst}(p-a)} = \frac{\text{wst}b\,\text{wst}c\,\text{wstA}}{2\text{wst}(p-a)}.$$

$$\text{dotS} = \frac{\text{dos}\tfrac{1}{2}b\,\text{dos}\tfrac{1}{2}c\,\text{wstA}}{\text{wst}\tfrac{1}{2}a} = 2\text{dos}\frac{a}{2}\,\text{dos}\frac{b}{2}\,\text{dos}\frac{c}{2}\,\frac{\text{wstA}}{\text{wst}a}.$$

$$\text{styR}\,\text{wstS} = \text{sty}\frac{a}{2}\,\text{sty}\frac{b}{2}\,\text{sty}\frac{c}{2}.$$

$$\text{wstS} = \frac{\text{styR}\,\text{sty}r_a\,\text{sty}r_b\,\text{sty}r_c}{2\text{dos}\tfrac{1}{2}a\,\text{dos}\tfrac{1}{2}b\,\text{dos}\tfrac{1}{2}c} = \frac{\text{wst}p\,\text{styR}}{2\text{dos}\tfrac{1}{2}a\,\text{dos}\tfrac{1}{2}b\,\text{dos}\tfrac{1}{2}c}.$$

IV. W trójkącie sferycznym, oznaczając przez α ośródkowę boku a, przez D, E, F środki boków a, b, c, przez EF, DF, DE łuki kół wielkich; dowieśdź że

$$\text{dosS}\,\text{dos}\frac{a}{2} = \text{dosEF}.$$

$$\frac{\text{dosEF}}{\text{dos}\tfrac{1}{2}a} = \frac{\text{dosDF}}{\text{dos}\tfrac{1}{2}b} = \frac{\text{dosDE}}{\text{dos}\tfrac{1}{2}c} = \frac{1+\text{dos}a+\text{dos}b+\text{dos}c}{4\text{dos}\tfrac{1}{2}a\,\text{dos}\tfrac{1}{2}b\,\text{dos}\tfrac{1}{2}c} = \text{dosS}.$$

V. W trójkącie sferycznym ABC, oznaczając przez d dwójsieczną kąta A, dowieśdź że

$$\text{sty}d = \frac{2\text{wst}b\,\text{wst}c\,\text{dos}\tfrac{1}{2}\text{A}}{\text{wst}(b+c)}.$$

VI. Nazywając h, h', h'' trzy wysokości trójkąta sferycznego odpowiedające bokom $a, b, c,$ dowieśdź że

$$\text{wst}a\,\text{wst}h = \text{wst}b\,\text{wst}h' = \text{wst}c\,\text{wst}h''$$
$$= 2\sqrt{\text{wst}p\,\text{wst}(p-a)\,\text{wst}(p-b)\,\text{wst}(p-c)}.$$
$$\text{wst}a\,\text{wst}h = \text{wst}b\,\text{wst}c\,\text{wstA} = 2\Delta.$$

$$\frac{\text{wst}a}{\text{wstA}} = \frac{\text{wst}b}{\text{wstB}} = \frac{\text{wst}c}{\text{wstC}} = \frac{\text{wst}b\,\text{wst}c}{\text{wst}h} = \frac{\text{wst}a\,\text{wst}b\,\text{wst}c}{2\Delta}.$$

VII. W trójkącie sferycznym ABC, nazywając O i K bieguny kół opisanego i wpisanego, R i r promienie sferyczne tych kół; dowieśdź że

$$\mathrm{wst}a+\mathrm{wst}b+\mathrm{wst}c=4\mathrm{wst}\frac{a}{2}\,\mathrm{wst}\frac{b}{2}\,\mathrm{wst}\frac{c}{2}\,\frac{\mathrm{dosKO}}{\mathrm{wst}r\,\mathrm{wstR}},$$

$$\mathrm{wstA}+\mathrm{wstB}+\mathrm{wstC}=4\mathrm{dos}\frac{A}{2}\,\mathrm{dos}\frac{B}{2}\,\mathrm{dos}\frac{C}{2}\,\frac{\mathrm{dosKO}}{\mathrm{wst}r\,\mathrm{wstR}}.$$

VIII. Niech będzie H punkt przecięcia się trzech łuków kół wielkich AA′, BB′ CC′ z których każdy dzieli trójkąt sferyczny ABC na dwa trójkąty równowarte; dowieśdź że

$$\frac{\mathrm{sty}\frac{1}{2}\mathrm{HA}'}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}\mathrm{HA}}=\frac{\mathrm{sty}\frac{1}{2}\mathrm{HB}'}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}\mathrm{HB}}=\frac{\mathrm{sty}\frac{1}{2}\mathrm{HC}'}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}\mathrm{HC}}.$$

IX. Wierzchołki trójkątów sferycznych tej samej podstawy i równej powierzchni są na okręgu małego koła, a środki boków zmiennych znajdują się na okręgu wielkiego koła równoległego do tego małego koła.

X. Na bokach AB i AC trójkąta sferycznego ABC wzięto punkta F i E takie żeby

$$\frac{\mathrm{wstFA}}{\mathrm{wstFB}}=\frac{\mathrm{wstEA}}{\mathrm{wstEC}};$$

dowieśdź że: 1°, łuk AO koła wielkiego, łączący wierzchołek A z punktem przecięcia się O łuków kół wielkich BE i CF, przechodzi przez środek D boku BC; 2°, prostopadłe BH,CK spuszczone na EF są równe; 3°, nazywając P punkt spotkania łuków kół wielkich BC i EF, odległość DP jest równa ćwiercianowi.

XI. W trójkącie sferycznym ABC, przedłużając boki, utworzono trójkąty spełniające BCA′, ACB′, ABC′ i na nich opisano koła; dowieśdź że styczne promieni sferycznych trzech kół są proporcyonalne do stycznych półboków trójkąta ABC które odpowiedają tym kołom.

XII. W trójkącie sferycznym ABC, przedłużono łuk koła wielkiego EF, przechodzący przez środki boków AC i AB, aż do spotkania w L z bokiem a; po czem, zaczynając od punktu L, wzięto na łuku LE długość LM=EF, i na łuku LB długość $LN = \frac{a}{2}$; dowieśdź że trójkąt sferyczny LMN jest prostokątny przy N i bok MN równy połowie zbytku sferycznego.

XIII. Przez trzy wierzchołki trójkąta sferycznego ABC, poprowadzono do boków przeciwległych trzy łuki kół wielkich AA', BB', CC' które się przecinają w punkcie O wewnątrz trójkąta; dowieśdź że

$$\frac{\text{wst}OA \,\text{dos}OA'}{\text{wst}AA'} + \frac{\text{wst}OB \,\text{dos}OB'}{\text{wst}BB'} + \frac{\text{wst}OC \,\text{dos}OC'}{\text{wst}CC'} = 1,$$

Uwaga. Co się staje z tem równaniem, gdy punkt przecięcia O pada zewnątrz trójkąta?

XIV. Niech będzie trójkąt sferyczny ABC mający boki a, b, c; oznaczając przez A', B', C' kąty trójkąta prostolinijnego ABC którego bokami są cięciwy boków a, b, c, dowieśdź że

$$\text{wst}^2\frac{a}{2} + \text{wst}^2\frac{b}{2} + \text{wst}^2\frac{c}{2} = 2\text{wst}\frac{b}{2}\,\text{wst}\frac{c}{2}\,\text{dos}A'$$
$$+ 2\text{wst}\frac{a}{2}\,\text{wst}\frac{c}{2}\,\text{dos}B' + 2\text{wst}\frac{a}{2}\,\text{wst}\frac{b}{2}\,\text{dos}C'.$$

XV. Rozwiązać trójkąt sferyczny prostokątny, znając przeciwprostokątnę i promień sferyczny koła wpisanego.

XVI. Rozwiązać trójkąt sferyczny, znając

1°, podstawę, wysokość i kąt przy wierzchołku.

2°, podstawę, wysokość, i summę *albo* różnicę dwóch innych boków.

3°, bok, kąt przeciwległy i summę *albo* różnicę dwóch innych boków.

4°, bok, kąt przyległy i summę *albo* różnicę dwóch innych boków.

5°, promień sferyczny koła opisanego, jeden bok i powierzchnię.

6°, powierzchnię, jeden kąt, i punkt przez który ma przechodzić bok przeciwległy.

7°, znając summy $a + A$, $b + B$, $c + C$.

8°, znając trzy wysokości.

9°, znając trzy ośródkowe.

XVII. W trójkącie sferycznym, znaleźć odległości bieguna koła opisanego od boków, i odległości bieguna koła wpisanego od wierzchołków.

XVIII. W czworoboku sferycznym ABCD, oznaczając przez a, b, c, d, e, f boki i przekątne, przez g odległość sferyczną środków tych przekątnych, dowieśdź że

$$\mathrm{dos}\,a + \mathrm{dos}\,b + \mathrm{dos}\,c + \mathrm{dos}\,d = 4\,\mathrm{dos}\frac{e}{2}\,\mathrm{dos}\frac{f}{2}\,\mathrm{dos}\,g.$$

XIX. W czworoboku sferycznym *równokątnym* i mającym dwa boki przeciwległe równe, oznaczając przez a i b dwa boki przytykające, przez 2S zbytek sferyczny, dowieśdź że

$$\mathrm{sty}\frac{S}{2} = \mathrm{sty}\frac{a}{2}\,\mathrm{sty}\frac{b}{2}.$$

XX. Znając liczbę i wielkość ścian kąta wielościennego foremnego, wyrachować jego kąt dwójścienny, i kąty stożków opisanego i wpisanego.

XXI. Są dane na sferze koło O i dwa punkta A, B; poprowadzić przez te punkta koło któreby przecinało koło O tak żeby cięciwa łuku odciętego miała długość daną.

XXII. Gdy trzy koła na sferze przecinają się po dwa, ich cięciwy sferyczne spólne spotykają się w jednym punkcie.

XXIII. Na powierzchni sfery promienia R, nakreślono małe koło promienia r, podzielono jego okrąg na trzy części proporcyonalne do liczb 1, 2, 3, i połączono punkta podziału A, B, C łukami kół wielkich. Znając te ilości, wyrachować boki trójkąta sferycznego ABC w metrach, powierzchnię w metrach kwadratowych, i kąty w stopniach, minutach, sekundach.

Dane są $R = 6366198$ metrów i $r = R\mathrm{dos}\,48^0 51' 13''$.

XIV. Znając długości i szerokości trzech punktów A, B, C eżących na powierzchni ziemi, wyrachować powierzchnię trójkąta sferycznego ABC.

KSIEGA CZWARTA

ZASTOSOWANIE FUNKCYJ KOŁOWYCH DO ALGEBRY.

ILOŚCI UROJONE.

255. Rozwiązywanie równań stopnia drugiego prowadzi do wyrażeń kształtu

$$a + b\sqrt{-1}$$

które nazwano *ilościami urojonemi*. Litery a i b oznaczają ilości rzeczywiste, dodatne albo odjemne, a wyrażenie $\sqrt{-1}$ przedstawia pierwiastnik którego kwadrat jest -1. Trzeba dobrze zrozumieć tę fundamentalną zasadę że, ponieważ ilość urojona sprawdza równanie z którego pochodzi, to jest przywodzi do tożsamości $0=0$, jeśli, podstawiając ją za niewiadomę, wykonano wskazane działania jak gdyby pierwiastnik $\sqrt{-1}$ był istotną ilością, i wszędzie zamiast kwadratu z tego pierwiastnika położono -1, wolno uważać symbol $\sqrt{-1}$ jako ilość samoistą której kwadrat równa się -1.

Ilości urojone grają wielką rolę w matematyce, dlatego przez skrócenie kładzie się zwykle literę i zamiast $\sqrt{-1}$, i pisze się $a + bi$, pamiętając że $i^2 = -1$.

Żeby te wyrażenia urojone, nazwane ilościami urojonemi, mogły być użyte jako ilości, trzeba ściśle określić co należy rozumieć przez ilości urojone *równe*, i co znaczą ilości urojone większe albo mniejsze.

Otoż, mówi się że dwie ilości urojone $a + bi$ i $a' + b'i$ są równe gdy $a = a'$ i $b = b'$, to jest gdy *części rzeczywiste są równe między sobą, i części urojone także równe między sobą*; tym sposobem równanie

$$(1) \qquad a + bi = a' + b'i$$

znaczy dwa równania

$$a - a' = 0 \quad \text{i} \quad b - b' = 0.$$

Ztąd wynika że równanie (1) jest to samo co

$$a - a' + (b - b')i = 0.$$

Uważane pod tym względem, ilości urojone zogólniają matematyczne wyrażenia.

256. Można dać inny kształt ilości urojonej. Jakoż,

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);$$

więc, jeśli weźmiemy liczbę dodatną $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, i łuk α taki żeby $\text{dos}\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, i $\text{wst}\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, co zawsze możebne ponieważ summa kwadratów tych dwóch ułamków równa się jedności, otrzymamy

$$(2) \qquad a + bi = r(\text{dos}\alpha + i\,\text{wst}\alpha).$$

Liczba dodatna r nazywa się *modułem*, a łuk α *argumentem* ilości urojonej. Moduł jest liczbą wyznaczoną; argument, będąc dany przez swoją wstawę i dostawę, ma także jedną tylko wartość od 0 do 2π, ale można go zwiększyć albo zmniejszyć wielownikiem okręgu; co bynajmniej nie zmienia ilości urojonej.

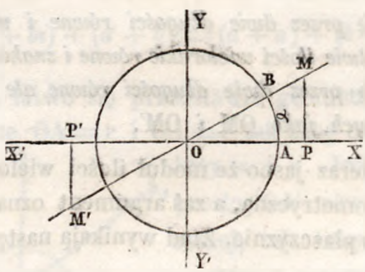
Wszystkie powyższe wyrażenia złożone z części rzeczywistej i części urojonej nazwano ogólnie *ilościami wielorakiemi.*

Wszelka liczba dodatna albo odjemna może być uważana jako ilość wieloraka, mająca za moduł swoją wartość samoistą, a za argument liczbę parzystą albo nieparzystą półokręgów. I tak, oznaczając przez A liczbę dodatną, będzie

$$+A = A(\text{dos}2k\pi + i\,\text{wst}2k\pi)$$
$$-A = A\,[\text{dos}(2k+1)\pi + i\,\text{wst}(2k+1)\pi]$$

W tem ogólnem pojęciu ilości i ich wyrażeniu, ilości rzeczywiste i ilości czysto urojone są szczególnemi przypadkami ilości wielorakich.

257. Geometrya daje sposób przedstawienia ilości urojonych, czyli wielorakich, co do wielkości i co do znaku. Obierz-



my punkt stały O na płaszczyznie, i poprowadźmy przez niego dwie osie prostokątne XX′ i YY′. Jeśli weźmiemy kąt albo raczej łuk koła AB równy argumentowi α, i długość OBM równą modułowi r, prosta OM będzie przedstawiała ilość wieloraką $r\,(\text{dos}\alpha + i\,\text{wst}\alpha)$.

I w samej rzeczy, zmieniając α od 0 aż do 2π, albo, jeśli chcemy, od 0 aż do $\pm\infty$, i biorąc przyzwoitą długość OM, można otrzymać wszelką ilość wieloraką $a + bi$.

Gdy $\alpha = 0$, ilość wieloraka $r(\text{dos}\,\alpha + i\,\text{wst}\,\alpha)$ staje się ilością rzeczywistą *dodatną* r, którą przedstawia część osi OX, równa długości r wziętej w kierunku OX. Gdy $\alpha = \pi$, ilość wieloraka staje się ilością rzeczywistą *odjemną* $-r$; przedstawia ją część osi OX′ równa długości r wziętej w kierunku OX′.

Gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ilość wieloraka staje się ri; tę ilość wyraża część osi YY′ równa długości r wziętej w kierunku OY prostopadłym do XX′. A gdy $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, ilość wieloraka staje się $-ri$; wyobraża ją długość r wzięta na osi YY′ w kierunku OY′ wprost przeciwnym kierunkowi OY.

Nakoniec, gdy się dodaje π do argumentu α, czynniki $\text{dos}\,\alpha$ i $\text{wst}\,\alpha$ zmieniają tylko znak; zatem wtedy ilość wieloraka $r(\text{dos}\,\alpha + i\,\text{wst}\,\alpha)$ zmienia sam tylko znak swojej wartości.

To pokazuje że *dwie ilości wielorakie równe przedstawiają się geometrycznie przez dwie długości równe i w tym samym kierunku; a zaś dwie ilości wielorakie równe i znaków przeciwnych przedstawiają się przez dwie długości równe ale w kierunkach wprost przeciwnych, jako* OM *i* OM′.

Pojmujemy teraz jasno że moduł ilości wielorakiej wyraża jej wielkość geometryczną, a zaś argument oznacza kierunek tej wielkości na płaszczyźnie. Ztąd wynikają następujące ważne wnioski.

Ilość wieloraka może być zero tylko wtedy gdy jej moduł jest zero. Żeby dwie ilości wielorakie były równe, trzeba i dość jest żeby ich moduły były równe i argumenta także równe albo się różniły wielownikiem okręgu. Z dwóch ilości wielorakich mających równy argument, albo argumenta różniące się wielownikiem okręgu, ta jest mniejsza której moduł mniejszy.

Z punktu M spuśćmy prostopadłe MP na oś XX′, będzie

$$a = r \operatorname{dos}\alpha = OP \quad \text{i} \quad b = r \operatorname{wst}\alpha = MP.$$

Widzimy tedy że część rzeczywista ilości wielorakiej jest równa rzutowi prostej OM na osi OX, a spółczynnik ilości i rzutowi tej samej prostej na osi OY.

Prosta OM przedstawiająca wielkość i kierunek ilości wielorakiej nazywa się *ilością geometryczną.*

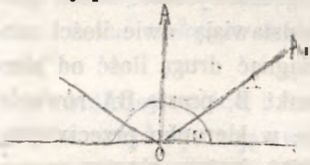
Przechodzimy teraz do czterech działań na ilościach urojonych.

DODAWANIE.

258. Można rozciągnąć do ilości urojonych prawidła czterech działań algebrycznych, byle tylko, uważając literę i jakoby ona oznaczała ilość rzeczywistą, zastąpiono wszędzie i^2 przez -1. Na mocy tej ugody, dodaje się ilości urojone $a+bi$ i $a'+b'i$ zbierając razem części rzeczywiste i także razem części urojone. Tym sposobem otrzymuje się summę

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$$

Ta summa łatwo się przedstawia geometrycznie. Poprowadźmy proste $OA=r$ i $OA'=r'$ tak żeby czyniły z osią OX kąty α i α'. Jeśli przeniesiemy prostę OA' równolegle do niej samej, tak żeby zaczynając od punktu A wzięła położenie AB;



prosta OB, zamykająca trójkąt OAB, będzie *summą geometryczną* dwóch ilości urojonych. I w samej rzeczy, rzut prostej OB na każdej z dwóch osi OX i OY jest równy odpowiedającemu rzutowi $a+a'$ i $b+b'$ łamanej OAB na tych osiach; więc prosta OB przedstawia geometrycznie summę

$$(a+a')+(b+b')i.$$

259. W trójkącie OAB, bok OB jest mniejszy od summy boków OA i AB, ale większy od ich różnicy. Więc *moduł summy dwóch ilości urojonych jest mniejszy od summy ich modułów ale większy od różnicy tych modułów.*

Gdy dwie ilości urojone mają argumenta równe albo różniące się wielownikiem półokręgu, wtedy trójkąt OAB jest linią prostą, i moduł summy tych ilości równa się summie albo różnicy ich modułów.

260. Takim samym sposobem jako dla dwóch, znajduje się summa wielu ilości urojonych, i *moduł summy ilukolwiek ilości wielorakich, nie przewyższa summy modułów tych ilości.*

ODCIĄGANIE.

261. Od jednej ilości urojonej $a+bi$ odciągnąć drugą urojoną $a'+b'i$ jestto znaleźć trzecią ilość która dodana do drugiej wydaje pierwszą. Więc różnica tych dwóch ilości jest

$$(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i.$$

Ta różnica otrzymuje się łatwo geometrycznie. Niech proste OB i OA′ (*fig. powyżej*) przedstawiają dwie ilości urojone $a+bi$ i $a'+b'i$. Żeby odciągnąć drugą ilość od pierwszej, dość poprowadzić, przez punkt B, prostę BA równoległą do prostej OA′ i jej równą ale w kierunku przeciwnym; prosta OA zamykająca trójkąt OBA będzie różnicą geometryczną wielkości OB i OA′. Albowiem dodana do wielkości OA′ czyli AB wydaje wielkość OB.

Uwaga. Moduł różnicy dwóch ilości urojonych jest zawarty, mówiąc ogólnie, między summą i różnicą ich modułów.

MNOŻENIE.

262. Wykonywając mnożenie dwóch ilości urojonych $a+bi$ i $a'+b'i$, wedle prawideł mnożenia wielomianów, otrzymujemy wieloczyn

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'+bb')+(ab'+ba')i$$

który jest ilością urojoną.

Dwie ilości urojone, $a+bi$ i $a'+b'i$, które się różnią samym tylko znakiem spółczynnika ilości i nazywają się *sprzężonemi*; ich wieloczyn jest rzeczywisty

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

Jeśli damy ilościom urojonym $a+bi$ i $a'+b'i$ kształt

$$r(\text{dos}\alpha+i\,\text{wst}\alpha) \quad \text{i} \quad r'(\text{dos}\alpha'+i\,\text{wst}\alpha'),$$

znajdziemy powyższy wieloczyn w postaci

$$rr'(\text{dos}\alpha\,\text{dos}\alpha'-\text{wst}\alpha\,\text{wst}\alpha')+rr'(\text{wst}\alpha\,\text{dos}\alpha'+\text{dos}\alpha\,\text{wst}\alpha')i,$$

albo prościej

$$(3) \qquad rr'[\text{dos}(\alpha+\alpha')+i\,\text{wst}(\alpha+\alpha')].$$

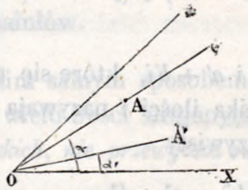
Więc *wieloczyn dwóch ilości urojonych jest ilością urojoną która ma za moduł wieloczyn modułów i za argument summę argumentów.*

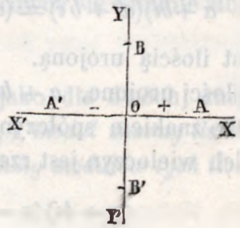
To prawidło jest ogólne, i stosuje się do jakiejkolwiek liczby czynników. Ztąd wynikają dwa ważne twierdzenia, takie same jak w ilościach rzeczywistych, które stanowią cechującą własność wieloczynu.

1° *Wieloczyn czynników urojonych nie zmienia wartości, gdy się przemienia miejsca tym czynnikom.* Co oczywiste na mocy powyższego prawidła.

2° *Aby wieloczyn czynników urojonych był zero, trzeba żeby* *jeden z tych czynników był zero.* Albowiem, moduł wieloczynu jest równy wieloczynowi modułów czynników: więc, żeby wieloczyn był zero, trzeba żeby jeden z tych modułów, a temsamem jeden z czynników urojonych, był zero.

263. Nie trudno okazać to wszystko geometrycznie. Niech





proste OA i OA' przedstawiają dwie ilości urojone $a + bi$ i $a + b'i$. Wiadomo że przez wieloczyn dwóch linij prostych należy rozumieć wieloczyn dwóch liczb które je mierzą. Żeby więc pomnożyć ilość geometryczną OA przez ilość geometryczną OA', trzeba najpierwej mnożyć długość OA przez liczbę oderwaną która mierzy długość OA', co daje długość OC; potem, trzeba obrócić OC, około punktu O, pod kątem COB równym kątowi XOA', co sprawia ilość geometryczną OB. Ta wielkość OB jest wieloczynem czynników geometrycznych OA i OA'; albowiem jej moduł jest równy wieloczynowi modułów i argument równy summie argumentów tych czynników.

Mnożenie ilości geometrycznych jasno pokazuje że ich wieloczyn składa się z mnożnej tak jako mnożnik składa się z jedności linijnej. To się właśnie zgadza z określeniem mnożenia ilości rzeczywistych.

Zastosujmy wyłożone prawidła do wieloczynu $i.i$. Ilość urojona i, jako wiemy, jest przedstawiona przez długość OB równą jedności i wziętą na osi OY w kierunku prostopadłym do XX'; żeby więc otrzymać wieloczyn ilości geometrycznej OB pomnożonej przez siebie samą, trzeba najpierwej mnożyć długość OB przez jedność, co daje wielkość OB, i potem obrócić tę wielkość pod kątem prostym około punktu O, co daje ilość geometryczną OA′ w kierunku OX′; więc wieloczyn $i.i = -1$. Ten wynik sprawdza fundamentalną ugodę $i^2 = -1$.

DZIELENIE.

264. Dzielić jedną ilość urojoną $a + bi$ przez drugą urojoną $a' + b'i$ jestto znaleźć trzecią ilość któraby mnożąc dzielnik wydała dzielnę. Stosując to określenie do dwóch ilości urojonych, wyrażonych w kształcie

$$r(\text{dos}\alpha + i\,\text{wst}\alpha) \quad \text{i} \quad r'(\text{dos}\alpha' + i\,\text{wst}\alpha'),$$

mamy zaraz iloraz

$$(4) \qquad \frac{r(\text{dos}\alpha + i\,\text{wst}\alpha)}{r'(\text{dos}\alpha' + i\,\text{wst}\alpha')} = \frac{r}{r'}\left[\,\text{dos}(\alpha - \alpha') + i\,\text{wst}(\alpha - \alpha')\right].$$

Więc *iloraz dwóch ilości urojonych jest ilością urojoną, która ma za moduł iloraz modułów i za argument różnicę argumentów dzielnej i dzielnika.*

Ztąd łatwo się wywodzi iloraz w funkcyi algebrycznej. Jakoż,

$$\frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{r}{r'}\left[\text{dos}\alpha\,\text{dos}\alpha' + \text{wst}\alpha\,\text{wst}\alpha' + (\text{wst}\alpha\,\text{dos}\alpha' - \text{dos}\alpha\,\text{wst}\alpha')i\right];$$

więc, podstawiając wartości wstaw, dostaw i modułów, będzie

$$\frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{aa' + bb' + (ba' - ab')i}{a'^2 + b'^2}.$$

Iloraz dwóch ilości urojonynh znajduje się łatwo geometrycznie. I tak, żeby podzielić ilość geometryczną OB przez ilość geometryczną OA, trzeba najpierwej podzielić długość OB przez liczbę oderwaną która mierzy długość OA', i tak otrzymaną wielkość obrócić około punktu O w stronę odjemną, pod kątem BOA równym kątowi A'OX; co daje iloraz OA.

POTĘGI.

265. Wieloczyn m czynników równych nazywa się potęgą m^{ta} jednego z nich. Więc, przypuszczając ilości urojone równe, z prawidła mnożenia wynika następujące prawidło potęg:

Żeby podnieść ilość urojoną $r(\text{dos}\alpha + i\,\text{wst}\alpha)$ do potęgi m^{tej} trzeba podnieść moduł do tej potęgi i pomnożyć argument przez wykładnik m; co daje

$$(5)\qquad [r(\text{dos}\alpha + i\,\text{wst}\alpha)]^m = r^m(\text{dos}m\alpha + i\,\text{wst}m\alpha).$$

To prawidło stosuje się do potęg ułamkowych i odjemnych, byle tylko uważano samą jedną wartość liczebną pierwiastnika. Jakoż, mamy

$$\left[r^{\frac{m}{n}}\left(\text{dos}\frac{m\alpha}{n} + i\,\text{wst}\frac{m\alpha}{n}\right)\right]^n = r^m(\text{dos}m\alpha + i\,\text{wst}m\alpha)$$
$$= [r(\text{dos}\alpha + i\,\text{wst}\alpha)]^m;$$

więc

$$(6)\qquad \left[r(\text{dos}\alpha + i\,\text{wst}\alpha)\right]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\text{dos}\frac{m\alpha}{n} + i\,\text{wst}\frac{m\alpha}{n}\right).$$

Jeśli wykładnik m jest liczbą odjemną całkowitą albo ułamkową, będzie

$$[r(\text{dos}\alpha + i\,\text{wst}\alpha)]^{-m} = \frac{1}{r^m(\text{dos}m\alpha + i\,\text{wst}m\alpha)}$$
$$= r^{-m}(\text{dos}m\alpha - i\,\text{wst}m\alpha);$$

więc

$$[r(\text{dos}\alpha + i\,\text{wst}\alpha)]^{-m} = r^{-m}[\text{dos}(-m\alpha) + i\,\text{wst}(-m\alpha)].$$

Gdy wykładnik jest niespółmierny, potęga nie przedstawia wyraźnego znaczenia; chyba że, uważając taki wykładnik jako granicę liczb spółmiernych nieskończenie przybliżonych, zastępujemy go przez jedną z tych liczb i przechodzimy do granicy.

Jeśli wykładnik m jest urojony, potęga nie ma żadnego sensu a *priori*, i może istnieć tylko jako symbol naprzód określony.

Uwaga. Druga strona równania (6) ma jedną tylko wartość, gdy tymczasem pierwsza, wyrażając pierwiastnik wskazu n, ma n wartości algebrycznych. Więc formuła (6) byłaby fałszywa, gdyby brano wartości algebryczne pierwiastnika nie zaś samą jedną wartość liczebną, jakośmy już powiedzieli. Damy później formułę ogólną.

266. *Prawidło wykładników,* Niech będzie ilość

$$a = r(\mathrm{dos}\,\alpha + \mathrm{i}\,\mathrm{wst}\,\alpha).$$

Mamy

$$a^m = r^m(\mathrm{dos}\,m\alpha + i\,\mathrm{wst}\,m\alpha), \qquad a^n = r^n(\mathrm{dos}\,n\alpha + i\,\mathrm{wst}\,n\alpha);$$

zatem

$$a^m . a^n = r^{m+n}[\,\mathrm{dos}(m+n)\alpha + i\,\mathrm{wst}(m+n)\alpha\,].$$

Ale właśnie

$$a^{m+n} = r^{m+n}[\,\mathrm{dos}(m+n)\alpha + i\,\mathrm{wst}(m+n)\alpha\,];$$

więc

$$a^m . a^n = a^{m+n}.$$

I następnie

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Więc w mnożeniu i dzieleniu potęg ilości urojonych, prawidło wykładników jest to samo co dla ilości rzeczywistych.

Ztąd wynika że, jakakolwiek jest ilość a, rzeczywista albo urojona, będzie zawsze

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Na zastosowanie, twórzmy potęgi po sobie idące ilości urojonej i. Mamy najpierwej $i^2 = -1$; po czem

$$i^3 = i^2 . i = -i$$
$$i^4 = i^3 . i = -i . i = -i^2 = -(-1) = +1$$
$$i^5 = i^4 . i = i$$
$$i^6 = i^4 . i^2 = -1.$$

. . . .

Ponieważ potęga $i^4 = i^0$, pojmujemy łatwo że te same wyniki powtórzą się okresowo co cztery; więc ogólnie

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

Potęgi parzyste ilości i są rzeczywiste, potęgi nieparzyste są urojone.

267. Szukajmy teraz czemu się równa ilość urojona $\sqrt{-A^2}$, To wyrażenie znaczy to samo co $\sqrt{A^2(\mathrm{dos}\,\pi + i\,\mathrm{wst}\,\pi)}$. Owoż, ilość pod pierwiastnikiem jest kwadratem zupełnym $\left[A\left(\mathrm{dos}\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{wst}\frac{\pi}{2}\right)\right]^2$; ztąd, uważając samą tylko wartość liczebną pierwiastnika, otrzymujemy

$$\sqrt{A^2(\mathrm{dos}\,\pi + i\,\mathrm{wst}\,\pi)} = A\left(\mathrm{dos}\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{wst}\frac{\pi}{2}\right) = Ai.$$

Więc

$$\sqrt{-A^2} = A\sqrt{-1}.$$

Możemy teraz łatwo wiedzieć czemu się równa wieloczyn $\sqrt{-a} . \sqrt{-b}$. Trzeba tylko rozróżnić dwa przypadki.

1°. Jeśli oba pierwiastniki są wzięte *liczebnie*, to jest z domyślnym znakiem +, wtedy

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} \quad \text{i} \quad \sqrt{-b} = \sqrt{b}\sqrt{-1};$$

zatem

$$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\sqrt{a}\sqrt{-1}\times\sqrt{b}\sqrt{-1}=\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{-1})^2=-\sqrt{ab}.$$

2°. Jeśli pierwiastniki $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-b}$ wyrażają wartości *algebryczne*, trzeba je uważać jako mające podwójny znak $\pm$; co daje

$$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\pm\sqrt{a}\sqrt{-1}\times\pm\sqrt{b}\sqrt{-1}=\pm\sqrt{ab}\,(\sqrt{-1})^2$$
$$=\pm\sqrt{ab}.$$

268. *Ilości odjemne.* Teorya ilości urojonych zawiera, jako przypadek szczególny, teoryę ilości odjemnych. I tak, niech będą A i B dwie ilości rzeczywiste jakiekolwiek, dodatne albo odjemne. Nazywając a i b wartości samoiste tych ilości, możemy je wyrazić w kształcie ilości urojonych

$$A=a(\text{dos}k\pi+i\,\text{wst}k\pi),\qquad B=b(\text{dos}k'\pi+i\,\text{wst}k'\pi).$$

Biorąc wieloczyn, mamy

$$A.B=ab[\text{dos}(k+k')\pi+i\,\text{wst}(k+k')\pi].$$

Ztąd wynikają, co do znaków, cztery możebne wieloczyny:

1°. Jeśli $k=0$ i $k'=0$, będzie $A=+a$ i $B=+b$; więc

$$+a\times+b=ab(\text{dos}0+i\,\text{wst}0)=+ab,$$

dlatego że ilość geometryczna ab, mająca argument 0, jest przedstawiona na osi OX w kierunku od O do X.

2°. Jeśli $k=1$, i $k'=0$, wtedy $A=-a$ i $B=+b$; więc

$$-a\times+b=ab(\text{dos}\pi+i\,\text{wst}\pi)=-ab,$$

ponieważ ilość geometryczna ab, mająca argument π, jest przedstawiona na osi OX′ w kierunku od O do X′.

3°. Jeśli $k=0$ i $k'=1$, wtedy $A=+a$ i $B=-b$;

więc

$$+a \times -b = ab(\mathrm{dos}\pi + i\,\mathrm{wst}\pi) = -ab.$$

4°. Jeśli $k=\pi$ i $k'=\pi$, wtedy $A=-a$, i $B=-b$; więc

$$-a \times -b = ab(\mathrm{dos}2\pi + i\,\mathrm{wst}2\pi) = +ab.$$

Jako widzimy, otrzymuje się tym sposobem prawidło znaków wieloczynu dwóch ilości jakichkolwiek, dodatnych albo odjemnych. Ale nie trzeba sobie robić złudzenia. Mnożenie jakiejkolwiek ilości przez ilość *odjemną* nie ma samo przez się żadnego sensu, i jest tylko symbolicznym wynikiem poprzedniczych działań. Powyższa teorya nie dowodzi prawidła znaków, bo go nic dowodzić nie może, ale je tylko sprawdza; co właśnie być powinno.

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ DWUMIENNYCH.

269. Niech będzie równanie dwumienne

$$(1) \qquad x^m - A = 0$$

w którem A oznacza ilość jakąkolwiek rzeczywistą albo urojoną. Wiemy że wszelka ilość A wyraża się ogólnie przez $R(\mathrm{dos}a + i\,\mathrm{wst}a)$; jeśli więc dane równanie ma piarwiastek rzeczywisty albo urojony, to jest, jeśli istnieje wyrażenie które podniesione do potęgi m wydaje $R(\mathrm{dos}a + i\,\mathrm{wst}a)$, to musi być kształtu $r(\mathrm{dos}\alpha + i\,\mathrm{wst}\alpha)$; zatem, żeby sprawdzało równania (1), trzeba i dość jest żeby było

$$r^m(\mathrm{dos}m\alpha + i\,\mathrm{wst}m\alpha) = R(\mathrm{dos}a + i\,\mathrm{wst}a).$$

To równanie znaczy że części rzeczywiste obydwóch stron są równe między sobą i części urojone także równe między sobą, to jest

$$r^m\mathrm{dos}m\alpha = R\,\mathrm{dos}a \quad \text{i} \quad r^m\mathrm{wst}m\alpha = R\,\mathrm{wst}a;$$

zkąd

$$r = R^{\frac{1}{m}} \quad \text{i} \quad \alpha = \frac{a + 2k\pi}{m},$$

oznaczając przez k liczbę całkowitą dodatną albo odjemną, i nawet 0.

Więc, wszystkie pierwiastki równania (1) są zawarte w formule|

$$(2) \qquad x = R^{\frac{1}{m}}\left(\operatorname{dos}\frac{a + 2k\pi}{m} + i\operatorname{wst}\frac{a + 2k\pi}{m}\right).$$

Owoż, żeby dwie wartości k' i k'' całkowitej k dawały dwa pierwiastki równe, trzeba i dość jest żeby różnica argumentów $\frac{2k'\pi}{m}$, $\frac{2k''\pi}{m}$ była wielownikiem z 2π, albo innemi słowy, żeby różnica $k'-k''$ była wielownikiem z m; więc formuła (2) daje m pierwiastków różnych, i tylko m, które się otrzymuje kładąc za k m całkowitych po sobie idących między $-\infty$ i $+\infty$, jako na przykład

$$0, 1, 2, 3, \ldots m-1.$$

Zwykle przywodzi się rozwiązywanie równania $x^m - A = 0$ do rozwiązywania równania $x^m - 1 = 0$. Jakoż, nazywając x_n jeden z pierwiastków pierwszego równania, uczyńmy

$$x = x_n y,$$

będzie

$$x^m = x^m{}_n y^m = A;$$

zkąd, ponieważ $x^m{}_n = A$, wynika

$$y^m = 1.$$

Więc znajdzie się wszystkie pierwiastki równania $x^m - A = 0$, mnożąc jeden z nich przez każdy z m pierwiastków jedności;

te zaś ostatnie są dane przez formułę $y = \text{dos}\frac{2k\pi}{m} + i\,\text{wst}\frac{2k\pi}{m}$, którą się wyprowadza z formuły (2) czyniąc $R=1$ i $a=0$. Wyznaczywszy pierwszy pierwiastek x_0 równania $x^m - A = 0$, otrzyma się wszystkie za pomocą formuły

$$(3)\qquad x = R^{\frac{1}{m}}\left(\text{dos}\frac{a}{m} + i\,\text{wst}\frac{a}{m}\right)\left(\text{dos}\frac{2k\pi}{m} + i\,\text{wst}\frac{2k\pi}{m}\right)$$

Własności pierwiastków równania $x^m - 1 = 0$.

270. Równanie dwumienne $x^m - 1 = 0$ ma m pierwiastków, z których pierwszy x_0, odpowiedający wartości $k=0$, równa się 1; a jeśli m jest parzyste, wtedy równanie ma drugi pierwiastek rzeczywisty $x_{\frac{m}{2}} = \text{dos}\,\pi + i\,\text{wst}\,\pi = -1$.

Wszystkie inne pierwiastki są urojone, i są po dwa sprzężone i wzajemne. Jakoż,

1°, jeśli weźmiemy

$$x_n = \text{dos}\frac{2n\pi}{m} + i\,\text{wst}\frac{2n\pi}{m},$$

będzie także

$$x_{m-n} = \text{dos}\frac{2(m-n)\pi}{m} + i\,\text{wst}\frac{2(m-n)\pi}{m}$$

albo

$$x_{m-n} = \text{dos}\frac{2n\pi}{m} - i\,\text{wst}\frac{2n\pi}{m}.$$

2°, Wieloczyn $\quad x_n x_{m-n} = 1.$

Ztąd wynika że pierwiastki równania $x^m - 1 = 0$ są dane przez formułę

$$(4)\qquad x = \text{dos}\frac{2k\pi}{m} \pm i\,\text{wst}\frac{2k\pi}{m},$$

w której za k trzeba położyć wartości $0, 1, 2, 3, ..$ aż do $\frac{m}{2}$ albo do $\frac{m-1}{2}$, według jak m jest parzyste albo nieparzyste.

Tym sposobem formuła (3), która daje pierwiastki równania $x^m - A = 0$, może się wyrazić przez

$$x = R^{\frac{1}{m}}\left(\text{dos}\frac{a}{m} + i\,\text{wst}\frac{a}{m}\right)\left(\text{dos}\frac{2k\pi}{m} \pm i\,\text{wst}\frac{2k\pi}{m}\right).$$

271. Gdy m jest liczbą nieparzystą $2n+1$, równanie $x^m - 1 = 0$ może się zniżyć do stopnia $\frac{m-1}{2}$. Jakoż, dzieląc to równanie przez $(x-1)x^n$, otrzymujemy

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \ldots \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

Uczyńmy teraz

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \text{i} \quad x^n + \frac{1}{x^n} = V_n;$$

ponieważ

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right),$$

mamy formułę

$$V_n = y V_{n-1} - V_{n-2}.$$

Owoż, $V_0 = 2$, $V_1 = y$; więc, posługując się tą formułą, znajdujemy zaraz wartości

$$V_2 = y^2 - 2,$$
$$V_3 = y^3 - 3y,$$
$$V_4 = y^4 - 4y^2 + 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

które podstawione dają równanie

$$\varphi(y) = 0$$

stopnia n. Pierwiastki tego równania, będąc summami pierwiastków urojonych równania $x^m - 1 = 0$, wyrażają się przez formułę

$$y = 2\mathrm{dos}\frac{2k\pi}{m},$$

w której za k trzeba podstawić całkowite $0, 1, 2, 3, .. \frac{m-1}{2}$

272. Twierdzenie. *Wieloczyn albo iloraz dwóch pierwiastków równania $x^m - 1 = 0$ jest pierwiastkiem tego równania*

1°. Niech będą dwa pierwiastki jakiekolwiek

$$x_n = \mathrm{dos}\frac{2n\pi}{m} + i\,\mathrm{wst}\frac{2n\pi}{m} \quad \text{i} \quad x_p = \mathrm{dos}\frac{2p\pi}{m} + i\,\mathrm{wst}\frac{2p\pi}{m};$$

ich wieloczyn

$$x_{n+p} = \mathrm{dos}\frac{2(n+p)\pi}{m} + i\,\mathrm{wst}\frac{(2n+p)\pi}{m}$$

jest pierwiastkiem który odpowieda wartości $n+p$ danej dla k.

2°. Iloraz tych dwóch pierwiastków

$$\frac{x_n}{x_p} = \mathrm{dos}\frac{2(n-p)\pi}{m} + i\,\mathrm{wst}\frac{2(n-p)\pi}{m}$$

jest także pierwiastkiem odpowiedającym wartości $n-p$ danej dla k.

273. Wniosek. *Potęgi pierwiastków równania $x^m - 1 = 0$ są pierwiastkami tego równania.* I tak $(x_n)^p = x_{np}$.

274. Twierdzenie. *Jeśli n jest pierwsze do m, pierwiastek x_n przez swoje potęgi po sobie idące, wydaje wszystkie pierwiastki równania dwumiennego $x^m - 1 = 0$.*

Mamy pierwiastek

$$x_n = \mathrm{dos}\frac{2n\pi}{m} + i\,\mathrm{wst}\frac{2n\pi}{m};$$

aby otrzymać jego potęgi po sobie idące $0, 1, 2, \ldots m-1$, trzeba mnożyć argument $\frac{2n\pi}{m}$ przez wykładniki $0, 1, 2, \ldots m-1$ tych potęg. Owoż wiadomo że, dzieląc przez m wielowniki po sobie idące

$$0n,\ 1n,\ 2n,\ 3n, \ldots (m-1)n$$

liczby n pierwszej do m, otrzymuje się, w pewnym porządku, reszty

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ m-1;$$

więc znajdujemy tym sposobem wszystkie m pierwiastków równania $x^m - 1 = 0$.

275. Wniosek. *Jeśli liczby n i m mają największy spólny dzielnik d, wtedy pierwiastek x_n, przez swoje potęgi, wydaje tylko wszystkie $\frac{m}{d}$ pierwiastków równania $x^{\frac{m}{d}} - 1 = 0$.*

Jakoż, niech będzie $m = dm'$ i $n = dn'$; pierwiastek x_n wyraża się przez

$$x_n = \operatorname{dos}\frac{2n\pi}{m} + i\operatorname{wst}\frac{2n\pi}{m} = \operatorname{dos}\frac{2n'\pi}{m'} + i\operatorname{wst}\frac{2n'\pi}{m'};$$

więc x_n zadość czyni równaniu $x^{m'} - 1 = 0$; a ponieważ n' jest pierwsze do m', pierwiastek x_n przez swoje potęgi po sobie idące, wydaje tylko wszystkie pierwiastki równania

$$x^{m'} - 1 = 0 \qquad \text{albo} \qquad x^{\frac{m}{d}} - 1 = 0.$$

Określenie. Nazywa się pierwiastkiem *pierwotnym* równania dwumiennego $x^m - 1 = 0$ wszelki jego pierwiastek który, przez swoje potęgi, wydaje wszystkie inne pierwiastki. Wynika z twierdzenia że 1°, *równanie dwumienne $x^m - 1 = 0$ ma tyle pierwiastków pierwotnych ile jest liczb mniejszych od m i pierwszych do m; 2°, pierwiastki pierwotne równania $x^m - 1 = 0$*

posiadają tę cechującą własność, że nie są pierwiastkami pierwotnemi żadnego równania stopnia mniejszego od m; *a zaś pierwiastki niepierwotne są pierwiastkami pierwotnemi równania dwumiennego którego stopień jest podwielownikiem wykładnika* m.

276. TWIERDZENIE. *Summa jednakowych potęg pierwiastków równania dwumiennego* $x^m - 1 = 0$ *jest zero, wyjąwszy tylko gdy wykładnik potęgi jest wielownikiem z* m. Jakoż, na mocy twierdzenia, pierwiastki tego równania są potęgami po sobie idącemi pierwiastku x_1, to jest wyrażają się przez

$$x_1^0,\ x_1^1,\ x_1^2,\ x_1^3, \ldots x_1^{m-1};$$

jeśli więc podniesiemy je do potęgi n, otrzymamy postępnię geometryczną

$$x_1^0,\ x_1^n,\ x_1^{2n},\ x_1^{3n}, \ldots x_1^{n(m-1)},$$

której stosunkiem jest x_1^n, a summą $\dfrac{x_1^{mn}-1}{x_1^n-1}$.

Owoż $\qquad x_1^{mn} = (x_1^m)^n = 1$;

więc summa wyrazów postępni jest zero.

Gdy n jest wielownikiem z m, każdy wyraz postępni staje się 1, i summa wyrazów równa się m.

277. TWIERDZENIE. *Gdy* n *i* p *są pierwsze między sobą, otrzymuje się wszystkie pierwiastki równania* $x^{np} - 1 = 0$ *mnożąc każdy pierwiastek równania* $x^n - 1 = 0$ *przez każdy pierwiastek równania* $x^p - 1 = 0$.

Niech będzie

$$x = \operatorname{dos}\frac{2k\pi}{np} + i \operatorname{wst}\frac{2k\pi}{np}$$

jeden z pierwiastków równania $x^{np} - 1 = 0$. Ponieważ n i p są pierwsze między sobą, można zawsze znaleźć dwie liczby całkowite λ i μ takie żeby było

$$p\lambda + n\mu = k, \qquad \text{albo} \qquad \frac{2\lambda\pi}{n} + \frac{2\mu\pi}{p} = \frac{2k\pi}{np};$$

więc mamy

$$x=\left(\operatorname{dos}\frac{2\lambda\pi}{n}+i\operatorname{wst}\frac{2\lambda\pi}{n}\right)\left(\operatorname{dos}\frac{2\mu\pi}{p}+i\operatorname{wst}\frac{2\mu\pi}{p}\right).$$

To dowodzi że wszelki pierwiastek równania $x^{np}-1=0$ jest wieloczynem jednego pierwiastku równania $x^n-1=0$ przez jeden pierwiastek równania $x^p-1=0$; zatem, otrzyma się wszystkie pierwiastki równania $x^{np}-1=0$ mnożąc, po dwa między sobą pierwiastki równań $x^n-1=0$ i $x^p-1=0$.

278. Wniosek. *Gdy n i p są pierwsze między sobą, otrzymuje się pierwiastki pierwotne równania $x^{np}-1=0$, mnożąc każdy* PIERWIASTEK PIERWOTNY *równania $x^n-1=0$ przez każdy pierwotny równania $x^p-1=0$.*

To wynika z formuły

$$x=\left(\operatorname{dos}\frac{2\lambda\pi}{n}+i\operatorname{wst}\frac{2\lambda\pi}{n}\right)\left(\operatorname{dos}\frac{2\mu\pi}{p}+i\operatorname{wst}\frac{2\mu\pi}{p}\right).$$

Albowiem, jeśli λ jest pierwsze do n, i μ pierwsze do p, summa dwóch ułamków niezredukowanych, $\frac{\lambda}{n}+\frac{\mu}{p}$ jest ułamkiem niezredukowanym $\frac{p\lambda+n\mu}{np}=\frac{k}{np}$;

co daje

$$\left(\operatorname{dos}\frac{2\lambda\pi}{n}+i\operatorname{wst}\frac{2\lambda\pi}{n}\right)\left(\operatorname{dos}\frac{2\mu\pi}{p}+i\operatorname{wst}\frac{2\mu\pi}{p}\right)$$

$$=\operatorname{dos}\frac{2k\pi}{np}+i\operatorname{wst}\frac{2k\pi}{np};$$

więc

$$x=\operatorname{dos}\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{wst}\frac{2k\pi}{n}$$

jest pierwiastkiem pierwotnym równania $x^{np}-1=0$.

279. Wniosek. Powyższe twierdzenie i jego wniosek są bardzo ważne, bo przywodzą rozwiązywanie równania $x^{npq\cdots}-1=0$, w którem $n, p, q,..$ są liczbami pierwszemi albo potęgami liczb pierwszych, do rozwiązywania równań prostszych $x^n-1=0$, $x^p-1=0$, $x^q-1=0$,... Dość wyznaczyć jeden tylko pierwiastek pierwotny każdego z tych ostatnich równań, ich wieloczyn będzie pierwiastkiem pierwotnym zadanego równania; a ten pierwisstek, przez swoje potęgi, wyda wszystkie inne pierwiastki tego równania.

WIELOKĄTY FOREMNE.

280. Niech będzie m punktów leżących na okręgu w równych przedziałach. Łącząc te punkta po kolei, tworzymy wielokąt foremny wypukły mający m boków. A jeśli je połączymy biorąc po k przedziałów, byle k było pierwsze do m, utworzymy, jako wiadomo, wielokąt foremny *gwiaździsty*, mający także m boków i którego obwód podpasuje k razy okrąg; biorąc po $m-k$ przedziałów tworzy się ten sam wielokąt. Ale, jeśli k i m mają spólny dzielnik d, tak utworzony wielokąt gwiaździsty posiada tylko $\frac{m}{d}$ boków i obiega $\frac{k}{d}$ razy okrąg. Istnieje więc tyle wielokątów foremnych mających m boków ile jest liczb pierwszych do m i mniejszych od $\frac{1}{2}m$.

Zagadnienie podziału okręgu koła na m części równych przywodzi się do rozwiązywania równania dwumiennego x^m-1. i *każdy pierwiastek pierwotny tego równania odpowieda wielokątowi foremnemu który ma m boków.*

Albowiem, jeśli podzielimy okrąg na m części równych i weźmiemy k przedziałów, łuk $\frac{2k\pi}{m}$, zawierający te przedziały i podpasany przez bok wielokąta foremnego, jest argumentem pierwotnego pierwiastku równania $x^m-1=0$.

Więc, biorąc promień koła za jedność, i nazywając b_k bok tego wielokąta, będzie

$$b_k = 2\text{wst}\frac{k\pi}{m} = 2\sqrt{\frac{1-\text{dos}\frac{2k\pi}{m}}{2}} = \sqrt{2-2\text{dos}\frac{2k\pi}{m}}.$$

Owoż, $2\text{dos}\frac{2k\pi}{m}$ jest właśnie summą dwóch pierwiastków pierwotnych sprzężonych, ponieważ k jest pierwsze do m z założenia. Do wyznaczenia tej summy może, w stosownym przypadku, służyć równanie $\varphi(y)=0$ któreśmy dali w n° (271).

Zastosujmy te zasady do kilku przykładów.

281. Trójkąt równoboczny. Podział okręgu na trzy części równe zależy od równania

$$x^3 - 1 = 0.$$

Odejmując pierwiastek 1, mamy równanie wzajemne

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

które, czyniąc $x + \frac{1}{x} = y$, daje

$$y + 1 = 0, \quad \text{zkąd} \quad 2\text{dos}\frac{2\pi}{3} = -1.$$

Jest więc jeden tylko trójkąt foremny, i jego bok $b=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$.

Szesciokąt foremny. Pierwiastki równania $x^6-1=0$ zależą od pierwiastków równań $x^2-1=0$ i $x^3-1=0$

Owoż, równanie $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ ma jeden tylko pierwiastek pierwotny -1, a równanie $\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1=0$ daje dwa pierwiastki pierwotne $x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$;

mnożąc te ostatnie przez -1, znajdujemy dwa jedyne pierwiastki pierwotne

$$\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

równania $x^6 - 1 = 0$. Jest więc jeden tylko sześciokąt foremny, i jego bok równa się 1.

282. Pięciokąt foremny. Równanie $x^5 - 1 = 0$ ma cztery pierwiastki pierwotne; co dowodzi że jest dwa pięciokąty foremne. Odjąwszy pierwiastek 1, zostaje równanie wzajemne

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

albo $\varphi(y) = y^2 + y + 1 = 0$

które daje

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Więc mamy pięciokąt wypukły którego bok jest

$$\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)^2},$$

i pięciokąt gwiaździsty którego bok jest

$$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)^2}.$$

Dziesięciokąt foremny. Pierwotne pierwiastki równania $x^{10} - 1 = 0$ są wieloczynami pierwotnych pierwiastków równań $x^2 - 1 = 0$ i $x^5 - 1 = 0$.

Odejmując pierwiastek 1, będzie

$$x + 1 = 0 \quad \text{i} \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Pierwiastki tych dwóch równań są wszystkie pierwotne; aby więc otrzymać pierwiastki pierwotne równania $x^{10} - 1$, dość jest pomnożyć przez -1 pierwiastki ostatniego równania które staje się

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0.$$

Owoż, to równanie jest wzajemne; więc czyniąc $x + \frac{1}{x} = y$, będzie

$$y^2 - y - 1 = 0, \quad \text{zkąd} \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

albo

$$2\text{dos}\frac{2\pi}{10} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad \text{dos}\frac{3\pi}{10} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

To dowodzi że istnieje dwa dziesięciokąty foremne, co zresztą widać a priori, dziesięciokąt wypukły którego bok jest

$$\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

i dziesięciokąt gwiaździsty którego bok równa się

$$\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Piętnastokąt foremny. Otrzyma się wszystkie pierwiastki. pierwotne równania $x^{15} - 1 = 0$, mnożąc, między sobą, po dwa, cztery pierwiastki pierwotne równania $x^5 - 1 = 0$ przez dwa pierwotne równania $x^3 - 1 = 0$. Są więc cztery dwojany pierwiastków pierwotnych sprzężonych które dają cztery piętnastokąty foremne. I tak, biorąc summę dwóch takich pierwiastków sprzężonych, znajdujemy naprzykład

$$2\text{dos}\frac{2\pi}{15} = \frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}{4},$$

zatem

$$b=\frac{1}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{18-6\sqrt{5}}\right)$$

albo

$$b=\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right).$$

Wyznaczone podobnie boki trzech piętnastokątów gwiaździstych są:

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{18-6\sqrt{5}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{18+6\sqrt{5}}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right),$$

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{18+6\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right).$$

283. Uwaga. Opierając się na twierdzeniu

Pierwiastki równania dwumiennego $x^m-1=0$, *gdy* m *jest liczbą pierwszą, wyrażają się algebrycznie przez formuły zawierające same pierwiastniki wskazu* $m-1$,

dowiedziono że, jeśli $m-1$ jest potęgą z 2, czyli *jeśli liczba pierwsza* m *równa się* 2^n+1, te pierwiastki przywodzą się do kształtu $A+B\sqrt{-1}$ w którym ilości A i B, zawierające same tylko pierwiastniki kwadratowe, wykreślają się za pomocą liniału i cyrkla.

Ztąd wynika że można wpisać w okrąg wielokąty foremne których liczba boków wyraża się przez 2^n+1, jeśli ta liczba jest pierwsza, jako

3, 5, 17, 257, 65537, ...

Ale dowodzenie powyższych twierdzeń wymaga rozwinięcia rachunków, które raczej do algebry wyższej nie do trygonometryi należą; i dlatego ich tutaj nie umieszczamy.

284. Za pomocą równań dwumiennych rozwiązują się równania trójmienne kształtu

$$(1) \qquad x^{2m} + px^m + q = 0.$$

Jakoż, to równanie, rozwiązane jako równanie drugiego stopnia, daje

$$x^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

i tym sposobem przywodzi się do rozwiązywania dwóch równań dwumiennych

$$x^m + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0, \qquad x^m + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0,$$

które już znamy.

285. Uważajmy szczególny przypadek w którym spółczynniki p i q są liczbami rzeczywistemi, ale $\frac{p^2}{4} < q$; wtedy

$$x^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \mathrm{R}(\mathrm{dos}a \pm i\,\mathrm{wst}a).$$

Zatem równanie (1) staje się

$$(x^m - \mathrm{R}\,\mathrm{dos}a - \mathrm{R}i\,\mathrm{wst}a)(x^m - \mathrm{R}\,\mathrm{dos}a + \mathrm{R}i\,\mathrm{wst}a) = 0$$

albo

$$(2) \qquad x^{2m} - 2\mathrm{R}x^m\,\mathrm{dos}a + \mathrm{R}^2 = 0.$$

Pierwiastki równań

$$x^m - \mathrm{R}(\mathrm{dos}a + i\,\mathrm{wst}a) = 0, \qquad x^m - \mathrm{R}(\mathrm{dos}a - i\,\mathrm{wst}a) = 0$$

są zawarte (269) w formułach

$$x = R^{\frac{1}{m}}\left(\operatorname{dos}\frac{2k\pi + a}{m} + i\operatorname{wst}\frac{2k\pi + a}{m}\right),$$

$$x = R^{\frac{1}{m}}\left(\operatorname{dos}\frac{2k\pi - a}{m} + i\operatorname{wst}\frac{2k\pi - a}{m}\right),$$

w których za k trzeba podstawić m liczb całkowitych po sobie idących jakichkolwiek. Owoż, podstawić w drugiej formule za k liczby $0, -1, -2, \ldots -(m-1)$ jest to samo co podstawić w formule $R^{\frac{1}{m}}\left(\operatorname{dos}\frac{2k\pi + a}{m} - i\operatorname{wst}\frac{2k\pi + a}{m}\right)$ za k liczby $0, 1, 2, \ldots (m-1)$; więc wszystkie $2m$ pierwiastków równania trójmiennego

$$x^{2m} - 2Rx^m \operatorname{dos} a + R^2 = 0$$

są dane przez formułę

$$x = R^{\frac{1}{m}}\left(\operatorname{dos}\frac{2k\pi + a}{m} \pm i\operatorname{wst}\frac{2k\pi + a}{m}\right),$$

w której za k trzeba podstawić m całkowitych po sobie idących jakichkolwiek.

TWIERDZENIE MOAWRA I KOTESA (*).

286. Na mocy tego co poprzedza, dzielniki pierwszego stopnia dwumianów

$$x^m - R(\operatorname{dos} a + i\operatorname{wst} a) \quad \text{i} \quad x^m - R(\operatorname{dos} a - i\operatorname{wst} a)$$

(*) Moivre i Cotes spółcześni rodacy Newtona, przy końcu wieku XVII i na początku XVIII.

są dane przez odpowiedające formuły

$$x - R^{\frac{1}{m}}\left(\mathrm{dos}\frac{2k\pi + a}{m} + i\,\mathrm{wst}\frac{2k\pi + a}{m}\right)$$

$$x - R^{\frac{1}{m}}\left(\mathrm{dos}\frac{2k\pi + a}{m} - i\,\mathrm{wst}\frac{2k\pi + a}{m}\right),$$

w których k bierze m wartości $0, 1, 2, \dots m-1$.

Owoż wieloczyn dzielników które odpowiedają tej samej wartości k daje trójmian rzeczywisty drugiego stopnia

$$x^2 - 2R^{\frac{1}{m}}x\,\mathrm{dos}\frac{2k\pi + a}{m} + R^{\frac{2}{m}};$$

więc, wieloczyn wszystkich trójmianów otrzymanych kładąc za k wartości $0, 1, 2, \dots m-1$, który to wieloczyn oznaczamy przez

$$\prod_{k=0}^{k=m-1}\left(x^2 - 2R^{\frac{1}{m}}x\,\mathrm{dos}\frac{2k\pi + a}{m} + R^{\frac{2}{m}}\right),$$

jest równy wieloczynowi dwóch uważanych dwumianów

$$[x^m - R(\mathrm{dos}a + i\,\mathrm{wst}a)][x^m - R(\mathrm{dos}a - i\,\mathrm{wst}a)]$$
$$= x^{2m} - 2Rx^m\mathrm{dos}a + R^2.$$

Mamy więc tosamość

$$\prod_{k=0}^{k=m-1}\left(x^2 - 2R^{\frac{1}{m}}x\,\mathrm{dos}\frac{2k\pi + a}{m} + R^{\frac{2}{m}}\right)$$
$$= x^{2m} - 2Rx^m\mathrm{dos}a + R^2,$$

która daje wszystkie dzielniki drugiego stopnia trójmianu

$$x^{2m} - 2Rx^m\mathrm{dos}a + R^2.$$

Żeby mieć także wszystkie dzielniki drugiego stopnia trójmianu

$$x^{2m} + 2\mathrm{R}x^m \operatorname{dos} a + \mathrm{R}^2,$$

dość jest uważać że ten trójmian można pisać

$$x^{2m} - 2\mathrm{R}x^m \operatorname{dos}(\pi + a) + \mathrm{R}^2;$$

więc, zamieniając a na $\pi + a$ w ostatniej tosamości, znajdujemy drugą tosamość

$$\prod_{k=0}^{k=m-1}\left(x^2 - 2\mathrm{R}^{\frac{1}{m}} x \operatorname{dos}\frac{(2k+1)\pi + a}{m} + \mathrm{R}^{\frac{2}{m}}\right)$$
$$= x^{2m} + 2\mathrm{R}x^m \operatorname{dos} a + \mathrm{R}^2,$$

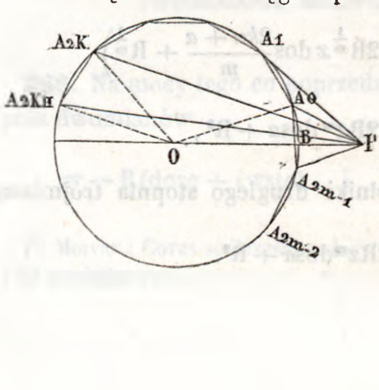
która daje żądane dzielniki

Pierwsze i drugie dzielniki przedstawiają się geometrycznie. Żeby znaleźć ich wyrażenie, trzeba najpierwej, dla jednorodności, uczynić $\mathrm{R} = r^m$; tym sposobem dwie powyższe formuły stają się

$$(1) \qquad \prod_{k=0}^{k=m-1}\left(x^2 - 2rx \operatorname{dos}\frac{2k\pi + a}{m} + r^2\right)$$
$$= x^{2m} - 2r^m x^m \operatorname{dos} a + r^{2m}.$$

$$(2) \qquad \prod_{k=0}^{k=m-1}\left(x^2 - 2rx \operatorname{dos}\frac{(2k+1)\pi + a}{m} + r^2\right)$$
$$= x^{2m} + 2r^m x^m \operatorname{dos} a + r^{2m}.$$

Niech będzie teraz okrąg O promienia r, podzielony na $2m$



części równych w punktach $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \ldots, \mathrm{A}_{2k}, \mathrm{A}_{2k+1}$; wyznaczmy, począwszy od A_0, łuk $\mathrm{A}_0\mathrm{B} = \frac{a}{m}$, i na promieniu OB weźmy długość $\mathrm{OP} = x$; po czem połączmy punkt P ze wszystkiemi punktami podziałów. Trójkąty POA_{2k}, POA_{2k+1} dają

$$\overline{PA}^2_{2k} = x^2 - 2rx \operatorname{dos}\frac{2k\pi + a}{m} + r^2,$$

$$\overline{PA}^2_{2k+1} = x^2 - 2rx \operatorname{dos}\frac{(2k+1)\pi + a}{m} + r^2;$$

Więc, na mocy formuł (1) i (2), będzie

$$\overline{PA}^2_0 . \overline{PA}^2_2 . \overline{PA}^2_4 \ldots \overline{PA}_{2m-2} = x^{2m} - 2r^m x^m \operatorname{dos} a + r^{2m},$$

$$\overline{PA}^2_1 . \overline{PA}^2_3 . \overline{PA}^2_5 \ldots PA_{2m-1} = x^{2m} + 2r^m x^m \operatorname{dos} a + r^{2m}.$$

To dowodzi że trójmian $x^{2m} - 2r^m x^m \operatorname{dos} a + r^{2m}$ jest równy wieloczynowi kwadratów odległości punktu P od punktów rzędu parzystego $A_0, A_2, A_4 \ldots$, a zaś trójmian $x^{2m} + 2r^m x^m \operatorname{dos} a + r^{2m}$ równy wieloczynowi kwadratów odległości tego samego punktu P od punktów rzędu nieparzystego $A_1, A_3, A_5, \ldots$

Te dwa równania stanowią twierdzenie Moawra.

287. Gdy kąt a jest zero, punkt P leży na promieniu OA_0; wtedy obie drugie strony powyższych równań są kwadratami zupełnemi; zatem

$$x^m - r^m = \pm PA_0 . PA_2 . PA_4 \ldots$$

$$x^m + r^m = PA_1 . PA_3 . PA_5 \ldots$$

Na tych dwóch równaniach zależy twierdzenie Kotesa (*Cotes*). W pierwszem równaniu trzeba wziąć znak $+$ albo $-$ według jak punkt P znajduje się zewnątrz albo wewnątrz okręgu.

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ TRZECIEGO STOPNIA

288. Niech będzie równanie zupełne trzeciego stopnia

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

mające spółczynniki a, b, c rzeczywiste. Jeśli zastąpimy x przez $x - \frac{a}{3}$, przywiedziemy to równanie do kształtu

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0;$$

w którym litery p i q oznaczają ilości rzeczywiste jakiekolwiek, dodatne albo odjemne.

Szukając pierwiastków tego równania, uczyńmy

$$x = y + z,$$

będzie

$$y^3 + z^3 + (3yz + p)(y + z) + q = 0.$$

A ponieważ dwie niewiadome y i z są związane jednem tylko równaniem, można jeszcze rozporządzić jedną z nich czyniąc

$$3yz + p = 0;$$

tym sposobem mamy do rozwiązywania dwa równania

$$(2) \qquad yz = -\frac{p}{3} \quad \text{i} \quad y^3 + z^3 = -q.$$

Widzimy zaraz że y^3 i z^3 są pierwiastkami równania drugiego stopnia

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

które daje

$$(3) \qquad \begin{aligned} y^3 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \\ z^3 &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \end{aligned}$$

Rozwiązując te równania dwumienne, znalezionoby trzy wartości dla y i trzy wartości dla z; coby dało dziewięć wartości dla x; gdy tymczasem równanie (1), trzeciego stopnia, nie może mieć więcej niż trzy pierwiastki. Ten zbytek wartości pochodzi ztąd że, zamiast równań (2), rozwiązaliśmy układ

$$y^3z^3 = -\frac{p^3}{27}, \qquad y^3 + z^3 = -q.$$

Tak działając, otrzymujemy dla y i z nietylko te wartości które zadość czynią układowi (2), ale jeszcze i takie które mu są obce i sprawdzają tylko ostatnie dwa równania.

Aby rozeznać prawdziwe wartości od obcych, uważajmy że, na mocy warunku $yz = -\frac{p}{3}$, trzeba dodawać, dla utworzenia pierwiastku x, te tylko wartości y i z których wieloczyn jest rzeczywisty. Co właśnie zrobimy, rozróżniając trzy możebne założenia dotyczące wartości y^3, z^3 danych przez formuły (3).

1°. Przypuśćmy najpierwej $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0.$

Ta nierówność pokazuje że p jest odjemne, i wartości y^3, z^3 są urojone; zatem, w równaniach (3) można uczynić

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -r^2\operatorname{wst}^2\alpha \quad \text{i} \quad \frac{-q}{2} = r\operatorname{dos}\alpha$$

co daje

$$(4) \qquad r = \sqrt{\frac{-p^3}{27}} \quad \text{i} \quad \operatorname{dos}\alpha = \frac{\frac{-q}{2}}{\sqrt{\frac{-p^3}{27}}}.$$

Za pomocą tych dwóch ilości, przekształcamy równania (3) na dwa inne

$$y^3 = r(\operatorname{dos}\alpha + i\operatorname{wst}\alpha)$$
$$z^3 = r(\operatorname{dos}\alpha - i\operatorname{wst}\alpha),$$

i z nich dopiero wywodzimy wartości

$$(5)\quad \begin{aligned} y &= \sqrt[3]{r}\left(\operatorname{dos}\frac{2k\pi+\alpha}{3} + i \operatorname{wst}\frac{2k\pi+\alpha}{3}\right) \\ z &= \sqrt[3]{r}\left(\operatorname{dos}\frac{2k\pi+\alpha}{3} - i \operatorname{wst}\frac{2k\pi+\alpha}{3}\right), \end{aligned}$$

mające część urojoną wydatną której równania (3) nie wykazują.

Żeby teraz mieć wieloczyn yz rzeczywisty, trzeba kombinować między sobą pierwiastki sprzężone, odpowiedające tej samej wartości dla k; tym sposobem część urojona znika, i zostaje

$$x = 2\sqrt[3]{r}\operatorname{dos}\frac{2k\pi+\alpha}{3}.$$

Ztąd, podstawiając za k wartości 0, 1, 2, otrzymujemy trzy pierwiastki równania (1),

$$2\sqrt[3]{r}\operatorname{dos}\frac{\alpha}{3},\quad 2\sqrt[3]{r}\operatorname{dos}\frac{2\pi+\alpha}{3},\quad 2\sqrt[3]{r}\operatorname{dos}\frac{4\pi+\alpha}{3},$$

albo

$$2\sqrt{\frac{-p}{3}}\operatorname{dos}\frac{\alpha}{3},\quad -2\sqrt{\frac{-p}{3}}\operatorname{dos}\frac{\pi-\alpha}{3},\quad -2\sqrt{\frac{-p}{3}}\operatorname{dos}\frac{\pi+\alpha}{3}.$$

Więc, *gdy ilość* $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ *jest odjemna, równanie* $x^3 + px + q = 0$ *ma wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste i nierówne.* Te pierwiastki są wyrachowalne przez logarytmy.

2° Gdy $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, *równanie ma dwa pierwiastki równe*; bo ten przypadek tem się tylko różni od poprzedzającego że w nim, na mocy równań (4), argument α jest zero; co właśnie czyni dwa ostatnie pierwiastki równe.

3°. Gdy $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$, drugie strony równań (2) są rzeczywiste; oznaczając przez A i B dwie wartości rzeczywiste y i z które zadość czynią tym równaniom, będzie

$$A=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$B=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Jeśli teraz nazwiemy j jeden z pierwiastków sześciennych urojonych jedności, drugi będzie j^2 (274), i wartości niewiadomych y i z wyrażą się przez

$$A,\ Aj,\ Aj^2 \quad \text{i} \quad B,\ Bj,\ Bj^2.$$

A ponieważ wartości dla y i z powinny czynić wieloczyn yz rzeczywisty, są tylko trzy możebne summy tych wartości które dają x, to jest

$$A+B,\qquad Aj+Bj^2,\qquad Aj^2+Bj;$$

ztąd, podstawiając za j i j^2 ich wartości

$$j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\qquad j^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

otrzymujemy

$$A+B,\qquad -\frac{A+B}{2}\pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}.$$

Więc, gdy ilość $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ *jest dodatna, równanie $x^3+px+q=0$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa urojone.*

Nie trudno, za pomocą kąta posiłkowego, wyrachować przez logarytmy pierwiastek rzeczywisty i spółczynnik ilości i; trzeba tylko rozróżnić dwa przypadki, p dodatne i p odjemne.

1°. Jeśli $p < 0$, ponieważ z założenia $\frac{-p^3}{27} < \frac{q^2}{4}$, można uczynić

$$\sqrt{\frac{-p^3}{27}} = \frac{q}{2}\,\mathrm{wst}\,\omega .$$

Podstawiając tę wartość, będzie najpierwej

$$A = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \frac{q}{2}\,\mathrm{dos}\,\omega} = \sqrt[3]{-q\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}\omega}$$

$$B = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \frac{q}{2}\,\mathrm{dos}\,\omega} = \sqrt[3]{-q\,\mathrm{dos}^2\tfrac{1}{2}\omega} ;$$

po czem, zastępując q przez jego wartość $\frac{2}{\mathrm{wst}\,\omega}\sqrt{\frac{-p^3}{27}}$, otrzymamy

$$A = \sqrt{\frac{-p}{3}}\sqrt[3]{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}\omega} \quad \text{i} \quad B = \sqrt{\frac{-p}{3}}\sqrt[3]{\mathrm{dot}\tfrac{1}{2}\omega}.$$

Weźmy teraz kąt posiłkowy φ taki żeby

$$\mathrm{sty}\,\varphi = \sqrt[3]{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}\omega} ,$$

będziemy mieli

$$A = \sqrt{\frac{-p}{3}}\,\mathrm{sty}\,\varphi \quad \text{i} \quad B = \sqrt{\frac{-p}{3}}\,\mathrm{dot}\,\varphi ;$$

zatem znalezione pierwiastki równania wyrażą się przez

$$\sqrt{\frac{-p}{3}}(\mathrm{sty}\,\varphi + \mathrm{dot}\,\varphi),$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-p}{3}}(\mathrm{sty}\,\varphi + \mathrm{dot}\,\varphi) \pm \frac{i}{2}\sqrt{-p}\,(\mathrm{sty}\,\varphi - \mathrm{dot}\,\varphi).$$

albo

$$\frac{2\sqrt{\frac{-p}{3}}}{\mathrm{wst}2\varphi} \quad \text{i} \quad \frac{-\sqrt{\frac{-p}{3}}}{\mathrm{wst}2\varphi} \pm i\sqrt{-p}\,\mathrm{dot}2\varphi.$$

Te wartości, jako widzimy, łatwo się wyrachują za pomocą logarytmów.

2⁰. Jeśli $p > 0$, uczyńmy

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\mathrm{sty}\omega;$$

będzie najpierwej

$$A = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \frac{q}{2\mathrm{dos}\omega}} = \sqrt[3]{\frac{q\,\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}\omega}{\mathrm{dos}\omega}}$$

$$B = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \frac{q}{2\mathrm{dos}\omega}} = \sqrt[3]{\frac{-q\,\mathrm{dos}^2\frac{1}{2}\omega}{\mathrm{dos}\omega}};$$

po czem, zastępując q przez jego wartość $\frac{2}{\mathrm{sty}\omega}\sqrt{\frac{p^3}{27}}$, przychodzi

$$A = \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\mathrm{sty}\frac{1}{2}\omega}, \quad \text{i} \quad B = -\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\mathrm{dot}\frac{1}{2}\omega}.$$

Biorąc ten sam kąt posiłkowy φ co poprzednio, mamy

$$A = \sqrt{\frac{p}{3}}\mathrm{sty}\varphi \quad \text{i} \quad B = -\sqrt{\frac{p}{3}}\mathrm{dot}\varphi;$$

więc uważane pierwiastki równania przedstawiają się przez

$$\sqrt{\frac{p}{3}}(\mathrm{sty}\varphi - \mathrm{dot}\varphi),$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{3}}(\mathrm{dot}\varphi - \mathrm{sty}\varphi) \pm \frac{i}{2}\sqrt{p}(\mathrm{sty}\varphi + \mathrm{dot}\varphi)$$

albo

$$-2\sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{dot}2\varphi \quad \text{i} \quad \sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{dot}2\varphi \pm \frac{i\sqrt{p}}{\mathrm{wst}2\varphi}.$$

Te wartości są także wyrachowalne przez logarytmy.

Uwaga. Rozwiązując układ (3) algebrycznie i rozumując jako w 3⁰, otrzymuje się zaraz trzy pierwiastki równania $x^3+px+q=0$, to jest:

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$x=-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$x=-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Te trzy pierwiastki zawierają się w jednej formule. Jakoż, uważajmy że biorąc za y każdą z wartości pierwszego pierwiastnika, mamy dla z odpowiedającą wartość $\frac{-p}{3y}$; więc wszystkie trzy pierwiastki zadanego równania są przedstawione, bez żadnej wątpliwości, przez formułę

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}},$$

w której pierwiastnik sześcienny ma trzy wartości.

289. Uwaga. Te formuły (*), jakkolwiek ważne teorycznie, nie są dogo-

(*) Znaleziona w r. 1534 przez matematyka włoskiego Tartaglia, a podstępnie ogłoszona przez jego spółczesnego ziomka *Kardana* (Cardan).

dne w zastosowaniu, z przyczyny dwóch pierwiastników położonych jeden na drugim; a co gorsza jeszcze, gdy równanie ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste, wtedy właśnie formuły dają je wszystkie trzy w kształcie urojonym. Jest więc niedorzeczność, którąby się usunęła gdyby można było zawsze wyciągnąć algebrycznie pierwiastek sześcienny z dwumianu $\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$, tak żeby część urojona została oddzielona od rzeczywistej w przypadku $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$. Czego dotąd zrobić nie potrafiono, i ten przypadek nazwano *niezredukowanym*. Wprowadzenie ilości moduł i argument znosi całą trudność, i poprawia główną wadę powyższych formuł.

Gdy jeden z pierwiastków równania $x^3+px+q=0$ jest spółmierny, wtedy dwumian $\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ jest sześcianem zupełnym. Jakoż, nazywając a ten pierwiastek, mamy

$$a^3+pa+q=0, \qquad \text{zkąd} \qquad -q=a(a^2+p);$$

zatem

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{27a^2(a^2+p)^2+4p^3}{4.27}=\left(\frac{3a^2+4p}{3}\right)\left(\frac{3a^2+p}{6}\right)^2$$

albo

$$\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=\frac{3a^2+p}{6}\sqrt{a^2+\frac{4p}{3}}\,.$$

Podstawiając te wartości, znajdziemy

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+pa}{2}+\frac{3a^2+p}{6}\sqrt{a^2+\frac{4p}{3}}}=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\frac{4p}{3}};$$

co łatwo sprawdzić można.

Więc

$$x=\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\frac{4p}{3}}\right)+\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\frac{4p}{3}}\right)=a.$$

PRZYKŁAD

$$x^3-21x+20=0.$$

Stosując powyższy rachunek, otrzymujemy

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-10+9\sqrt{-3}}=\frac{1}{2}(4+2\sqrt{-3});$$

więc

$$x=(2+\sqrt{-3})+(2-\sqrt{-3})=4.$$

Daliśmy ten przykład jedynie dla pokazania możebności rozwiązywania równań trzeciego stopnia, nie zaś jako sposób wyznaczenia pierwiastku spółmiernego, bo ten pierwiastek znajduje się poprostu za pomocą teoryi pierwiastków spółmiernych.

FORMUŁA MOAWRA.

290. Podnosząc do potęgi m^{tej} ilość urojoną $\text{dos}a+i\,\text{wst}a$ której modułem jest jedność, otrzymyjemy ważne równanie (265)

$$(1)\qquad (\text{dos}a+i\,\text{wst}a)^m=\text{dos}ma+i\,\text{wst}ma.$$

znane pod nazwiskiem *formuły* MOAWRA.

Ta formuła, na mocy wiadomego prawidła potęg, jest prawdziwa na wykładnik m całkowity albo ułamkowy, dodatny albo odjemny, byle brano samą jedną wartość liczebną pierwiastnika w przypadku wykładnika ułamkowego.

Jeśli chcemy mieć formulę ogólną na potęgę ułamkową, uważajmy że równanie

$$(2)\qquad \left(\text{dos}a+i\,\text{wst}a\right)^{\frac{m}{n}}=\text{dos}\frac{ma}{n}+i\,\text{wst}\frac{ma}{n},$$

prawdziwe dla samej wartości liczebnej pierwiastnika, przestaje być dokładne ogólnie; albowiem jego druga strona przedstawia jedną tylko z n wartości strony pierwszej. Żeby więc przedstawiała wszystkie n wartości, trzeba ją pomnożyć przez $\mathrm{dos}\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{wst}\frac{2k\pi}{n}$, to jest pisać

$$\left(\mathrm{dos}a + i\,\mathrm{wst}a\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\mathrm{dos}\frac{ma}{n} + i\,\mathrm{wst}\frac{ma}{n}\right)\left(\mathrm{dos}\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{wst}\frac{2k\pi}{n}\right),$$

albo

$$(3) \qquad \left(\mathrm{dos}a + i\,\mathrm{wst}a\right)^{\frac{m}{n}} = \mathrm{dos}\frac{ma+2k\pi}{n} + i\,\mathrm{wst}\frac{ma+2k\pi}{n}.$$

Otóż ogólna formuła Moawra na wykładnik jakikolwiek rzeczywisty.

Użycie formuły Moawra w przypadku wykładnika ułamkowego $\frac{m}{n}$ wymaga pewnej ostrożności. Symbol $A^{\frac{m}{n}}$ oznacza zwykle że trzeba najpierwej podnieść ilość A do potęgi $m$tej i potem z wyniku wyciągnąć pierwiastek ny. Wzięta w tem znaczeniu potęga ułamkowa $A^{\frac{m}{n}}$, jako pierwiastnik wskazu n, musi mieć n wartości; dlatego właśnie nie wolno uproszczać wykładnika $\frac{m}{n}$. Z tem zastrzeżeniem formuła (3) jest dokładna i ogólna.

Ale wyrażenie $A^{\frac{m}{n}}$ może także pochodzić ztąd że najpierwej wyciągnięto pierwiastek n z ilości A, a potem podniesiono wynik do potęgi $m$tej; co daje $(\sqrt[n]{A})^m = A^{\frac{m}{n}}$. Tak uważana potęga ułamkowa $A^{\frac{m}{n}}$ nie jest ta sama co poprzednia. Albowiem, jako wiadomo z algebry, gdy wykładnik $\frac{m}{n}$ może się uprościć i zamienić na ułamek niezredukowny $\frac{p}{q}$, wtedy potęga $A^{\frac{m}{n}}$ wzięta w drugiem znaczeniu, ma tylko q wartości. Więc, w tym przypadku, chcąc użyć formuły Moawra, trzeba najpierwej przywieśdź wykładnik $\frac{m}{n}$ do najprostszego kształtu, i dopiero zastosować formułę, to jest pisać

$$\left(\operatorname{dos}a+i\operatorname{wst}a\right)^{\frac{m}{n}}=\left(\operatorname{dos}a+i\operatorname{wst}a\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$=\operatorname{do}\frac{pa+2k\pi}{q}+i\operatorname{wst}\frac{pa+2k\pi}{q}.$$

Rozumie się samo z siebie że, gdy wykładnik $\frac{m}{n}$ jest niezredukowny, potęgi ułamkowe obydwóch znaczeń mają te same wartości, to jest

$$(\sqrt[n]{\mathrm{A}})^m=\sqrt[n]{\mathrm{A}^m}=\mathrm{A}^{\frac{m}{n}}.$$

Więc, jeśli m i n są pierwsze między sobą, wyrażenia

$$\operatorname{dos}\frac{m(a+2k\pi)}{n}+i\operatorname{wst}\frac{m(a+2k\pi)}{n}$$

i
$$\operatorname{dos}\frac{ma+2k\pi}{n}+i\operatorname{wst}\frac{ma+2k\pi}{n}$$

są zupełnie równowarte

MNOŻENIE ŁUKÓW.

291. Formuła Moawra daje sposób wyrażenia dostawy i wstawy wielownikow łuku w funkcyi potęg dostawy i wstawy tego łuku, to jest daje wartości $\operatorname{dos}ma$ i $\operatorname{wst}ma$ wyrażone przez potęgi $\operatorname{dos}a$ i $\operatorname{wst}a$; dość tylko rozwinąć potęgę $m^{\text{tą}}$ dwumianu $\operatorname{dos}a+i\operatorname{wst}a$, i porównać części rzeczywiste obydwóch stron między sobą, i części urojone także między sobą.

Jakoż,

$$\operatorname{dos} ma + i \operatorname{wst} ma = (\operatorname{dos} a + i \operatorname{wst} a)^m$$

$$= \operatorname{dos}^m a + \frac{m}{1} i \operatorname{wst} a \operatorname{dos}^{m-1} a - \frac{m(m-1)}{1.2} \operatorname{wst}^2 a \operatorname{dos}^{m-2} a$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} i \operatorname{wst}^3 a \operatorname{dos}^{m-3} a + \ldots$$

więc,

$$(1) \quad \operatorname{dos} ma = \operatorname{dos}^m a - \frac{m(m-1)}{1.2} \operatorname{wst}^2 a \operatorname{dos}^{m-2} a$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \operatorname{wst}^4 a \operatorname{dos}^{m-4} a \ldots$$

$$(2) \quad \operatorname{wst} ma = \frac{m}{1} \operatorname{wst} a \operatorname{dos}^{m-1} a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \operatorname{wst}^3 a \operatorname{dos}^{m-3} a$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{1.2.3.4.5} \operatorname{wst}^5 a \operatorname{dos}^{m-5} a - \ldots$$

W tych dwóch równaniach wyrazy drugiej strony są wszystkie stopnia m.

Trzeba uważać że $\operatorname{dos} ma$, zawierając same potęgi parzyste wstawy, może się wyrazić w funkcyi stosunkowej z $\operatorname{dos} a$, mającej wszystkie wyrazy jednakowej parzystości; nadto, $\operatorname{dos} ma$ gdy m jest parzyste, i $\operatorname{wst} ma$ gdy m jest nieparzyste, wyrażają się obie w funkcyi stosunkowej $\operatorname{wst} a$, mającej wszystkie wyrazy jednakowej parzystości.

292. Uwaga. Jeśli w formule

$$\operatorname{dos} ma + i \operatorname{wst} ma = (\operatorname{dos} a + i \operatorname{wst} a)^m$$

zamienimy a na $-a$, będzie

$$\operatorname{dos} ma - i \operatorname{wst} ma = (\operatorname{dos} a - i \operatorname{wst} a)^m$$

Ztąd wynikają dwie formuły niekiedy użyteczne

$$\mathrm{dos}\,ma = \frac{(\mathrm{dos}\,a + i\,\mathrm{wst}\,a)^m + (\mathrm{dos}\,a - i\,\mathrm{wst}\,a)^m}{2};$$

$$\mathrm{wst}\,ma = \frac{(\mathrm{dos}\,a + i\,\mathrm{wst}\,a)^m - (\mathrm{dos}\,a - i\,\mathrm{wst}\,a)^m}{2i}.$$

293. Dzieląc stronami równanie (2) przez (1), otrzymujemy formułę

$$(3)\quad \mathrm{sty}\,ma = \frac{\frac{m}{1}\mathrm{sty}\,a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\mathrm{sty}^3 a + \ldots}{1 - \frac{m(m-1)}{1.2}\mathrm{sty}^2 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\mathrm{sty}^4 a - \ldots}$$

która wyraża styma w funkcyi stosunkowej sty$a$.

DZIELENIE ŁUKÓW.

Formuły (1) i (2) dają ogólne rozwiązanie zagadnień dzielenia łuków którem się teraz zajmiemy.

294. *Znaleźć dos$\frac{a}{m}$, znając dos$a$.*

Jeśli w formule (1) zamienimy najpierwej a na $\frac{a}{m}$, i potem zastąpimy dos$\frac{a}{m}$, wst$\frac{a}{m}$ przez x, $\sqrt{1-x^2}$, otrzymamy równanie

$$(1)\qquad f(x) - \mathrm{dos}\,a = 0$$

w którem $f(x)$ oznacza wielomian stosunkowy całkowity stopnia m, złożony z wyrazów jednakowej parzystości, to jest kształtu $Ax^m + Bx^{m-2} + Cx^{m-4} + \ldots$

Można dowieśdź a priori że zagadnienie ma ogólnie m rozwiązań. Jakoż, łuki odpowiedające danej dos$a$ są $2k\pi +$ i $2k\pi - \alpha$; biorąc $m^{tą}$ cześć każdego z nich, tworzymy dwa wielokąty foremne mające m boków; te wielokąty są symetryczne względem średnicy AA', więc dos$\frac{a}{m}$ ma m wartości rzeczywistych i ogólnie różnych.

Nadto, summa wszystkich wartości, czyli summa pierwiastków równania, jest zero (70). A jeśli m jest parzyste, wierzchołki każdego z dwóch wielokątów są, po dwa, średnicowo przeciwne: więc wartości dos$\frac{a}{m}$ są równe i znaków przeciwnych; czego właśnie dowodzi samo równanie, które w tym razie zawiera tylko potęgi parzyste niewiadomej.

295. Uważajmy szczególny przypadek w którym dos$a = 1$; co przywodzi równanie (1) do

$$(2) \qquad f(x) - 1 = 0;$$

wtedy $\alpha = 0$, i pierwiastki równania (2) otrzymują się przez formułę

$$x = \text{dos}\frac{2k\pi}{m},$$

kładąc za k wartości $0, 1, 2, 3, \ldots m-1$.

Pierwszy pierwiastek jest $+1$; co do innych, zobaczmy najpierwej czy one są wszystkie różne. Owoż, żeby dwie dostawy, odpowiedające wartościom k i k', były równe, trzeba i dość jest żeby summa łuków równała się okręgowi, to jest powinno być

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{2k'\pi}{m} = 2\pi; \qquad \text{zkąd} \qquad k + k' = m.$$

$$\text{Ale} \qquad k < k', \qquad \text{więc} \qquad k < \frac{m}{2}.$$

Ta nierówność pokazuje że równanie (2) posiada $\frac{m-1}{2}$

albo $\frac{m-2}{2}$ pierwiastków podwójnych, według jak m jest nieparzyste albo parzyste.

1°. Przypuśćmy najpierwej m parzyste. W tem założeniu równanie (2) ma wszystkie pierwiastki równe i znaków przeciwnych; dwa są pojedyncze ± 1 odpowiedające wartościom 0 i $\frac{m}{2}$ dla k, wszystkie inne są podwójne.

Uczyńmy $x^2 = z$, równanie (2) stanie się

$$F(z) - 1 = 0.$$

Teraz, jeśli $m = 2(2\mu + 1)$, pierwiastki podwójne będą zawarte w równaniu

$$\frac{F(z)-1}{z-1} = \varphi(z)^2;$$

wyznaczymy więc te pierwiastki rozwiązując równanie $\varphi(z) = 0$ które jest stopnia $\frac{m-2}{2}$.

A jeśli $m = 4\mu$, równanie $f(x) - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki równe zero, odpowiedające wartościom $k = \frac{m}{4}$ i $k = \frac{3m}{4}$; wtedy

$$\frac{F(z)-1}{z(z-1)} = \varphi(z)^2;$$

i pierwiastki podwójne różne od zera, wyznaczą się rozwiązując równanie $\varphi(z) = 0$ które będzie stopnia $\frac{m-4}{4}$.

2°. Przypuśćmy powtóre m nieparzyste. W tem drugiem założeniu, równanie $f(x) - 1 = 0$ ma jeden tylko pierwiastek pojedynczy $+1$, a wszystkie inne podwójne i zawarte w równaniu

$$\frac{f(x)-1}{x-1} = \varphi(x)^2.$$

Można je znaleźć rozwiązując równanie $\varphi(x)=0$ które jest stopnia $\frac{m-1}{2}$. Ale, zważając że te pierwiastki wielowne wywodzą się z formuły

$$x=\text{dos}\frac{2k\pi}{m}$$

przez podstawienie za k wartości $1, 2, 3 \dots \frac{m-1}{2}$, widzimy zaraz że one są połowami pierwiastków równania wzajemnego $\varphi(y)$, któreśmy wskazali w n° 271; to zaś równanie otrzymuje się łatwiej niż powyższe.

296. Uważamy jeszcze drugi przypadek szczególny $\text{dos}\alpha=-1$, który daje równanie

$$(3) \qquad f(x)+1=0;$$

wtedy $\alpha=\pi$, i pierwiastki tego równania otrzymują się przez formułę

$$x=\text{dos}\frac{\pi+2k\pi}{m},$$

kładąc za k wartości $0, 1, 2, 3, \dots m-1$.

Przypuszczając najpierwej m parzyste, i rozumując jako w przypadku poprzedzającym, łatwo spostrzegamy że pierwiastki równania (3) są równe i znaków przeciwnych, a wszystkie są podwójne. Więc, jeśli $m=4\mu$, otrzyma się te pierwiastki rozwiązując równanie stopnia $\frac{m}{4}$; jeśli zaś $m=2(2\mu+1)$, równanie (3) ma jeden pierwiastek pojedynczy -1 odpowiedający wartości $k=\frac{m-1}{2}$, wszystkie inne są podwójne i zawarte w równaniu

$$\frac{f(x)+1}{x+1}=\varphi(x)^2.$$

Otrzymuje się te ostatnie, rozwiązując równanie $\varphi(x)=0$ które jest stopnia $\frac{m-1}{2}$.

297. *Znaleźć* $wst\frac{a}{m}$, *znając* $wsta$.

Jeśli w formule (2) nru 291 zamienimy a na $\frac{a}{m}$, i zastąpimy potem $\text{wst}\frac{a}{m}$, $\text{dos}\frac{a}{m}$ przez x, $\sqrt{1-x^2}$, otrzymamy, jeśli m jest nieparzyste, równanie

$$(1) \qquad f(x) - \text{wst}a = 0$$

w którem $f(x)$ oznacza wielomian stosunkowy i całkowity stopnia m, mający wszystkie wyrazy stopnia nieparzystego. Ale, jeśli m jest parzyste, znajdziemy równanie

$$\sqrt{1-x^2}\,f(x) - \text{wst}a = 0,$$

w którem $f(x)$ znaczy wielomian stopnia $m-1$ takiego samego składu jak poprzedzający. Podnosząc do kwadratu obie strony, będziemy mieli równanie stopnia $2m$

$$(1-x^2)f(x)^2 - \text{wst}^2 a = 0,$$

które możemy zniżyć do stopnia m kładąc $x^2=z$.

Widzimy tedy że dane zagadnienie ma m albo $2m$ rozwiązań, według jak m jest nieparzyste albo parzyste.

Do tych wyników łatwo się dochodzi geometrycznie. Jakoż, łuki mające daną $\text{wst}a$ są $2k\pi+\alpha$ i $(2k+1)\pi-\alpha$; więc otrzymamy wartość x przez formuły

$$x = \text{wst}\frac{2k\pi+\alpha}{m} \quad \text{i} \quad x = \text{wst}\frac{(2k+1)\pi-\alpha}{m}$$

podstawiając za k wartości $0, 1, 2, 3, \ldots m-1$.

Wstawy jednej formuły nie mogą być równe; bo różnica dwóch łuków tej formuły jest mniejsza od okręgu, a ich summa, zawierając łuk jakikolwiek α, nie może być ogólnie wielownikiem półokręgu.

Zobaczmy teraz czy wstawy dwóch formuł mogą być równe. Owoż, różnica dwóch łuków $\frac{2k\pi + \alpha}{m}$ i $\frac{2k'\pi + \pi - \alpha}{m}$, zawierając α jakiekolwiek, nie jest wielownikiem okręgu; żeby zaś ich summa była nieparzystym wielownikiem półokręgu, trzebaby

$$2(k + k') + 1 = (2n + 1)m,$$

co wymaga żeby m było nieparzyste. Więc niewiadoma x ma m albo $2m$ wartości rzeczywistych, według jak m jest nieparzyste albo parzyste. Dodajemy jeszcze, jako przedstawienie geometryczne, że, biorąc $m^{tą}$ część każdego z łuków odpowiedających danej wstawie, tworzy się dwa wielokąty foremne mające m boków. Gdy m jest nieparzyste, te wielokąty są symetryczne względem średnicy BB′, i dlatego wst$\frac{a}{m}$ ma tylko m wartości; a gdy m jest parzyste, owe wielokąty nie są symetryczne, ale wierzchołki każdego są po dwa średnicowo przeciwne, i dlatego wstawa ma wtedy $2m$ wartości które są równe i znaków przeciwnych.

Możnaby teraz szukać wst$\frac{a}{m}$, gdy wst$a = \pm 1$; ale, po tem cośmy w poprzedzającem zagadnieniu powiedzieli, to poszukiwanie nie potrzebuje już żadnych wyjaśnień.

Uwaga. Formuły (1) i (2) n° 291 pokazują że wyznaczenie dos$\frac{a}{m}$ w funkcyi wst$a$ zależy od równania stopnia $2m$; a zaś wyznaczenie wst$\frac{a}{m}$ w funkcyi dos$a$ zależy od równania stopnia m albo $2m$ według jak m jest parzyste albo nieparzyste.

298. *Znaleźć* $sty\frac{a}{m}$ *znając* $sty\,a$. To zagadnienie ma zawsze m rozwiązań. Jakoż, czyniąc $\text{sty}\frac{a}{m}=x$ i $\text{sty}\,a=b$, z formuły (3) numeru 293 wywodzimy równanie stopnia m

$$b\left[1-\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots\right]-\left[\frac{m}{1}x-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots\right]=0,$$

którego wszystkie pierwiastki są rzeczywiste.

I w samej rzeczy, danej $\text{sty}\,a$ odpowiedają łuki $k\pi+\alpha$; biorąc $m^{tą}$ część każdego z nich, mamy łuki zawarte w formule $\frac{k\pi+\alpha}{m}$. Owoż, ostatnie łuki są zakończone na wierzchołkach wielokąta foremnego mającego $2m$ boków, a te wierzchołki są po dwa średnicowo przeciwległe; więc istnieje dla $\text{sty}\frac{a}{m}$ różnych m wartości, które są właśnie pierwiastkami powyższego równania.

Te pierwiastki posiadają znamienitą własność, są funkcyą stosunkową jeden drugiego. I tak,

$$x=\text{sty}\frac{\alpha}{m}, \qquad x'=\text{sty}\frac{\alpha+\pi}{m}=\frac{x+\text{sty}\frac{\pi}{m}}{1-x\,\text{sty}\frac{\pi}{m}};$$

padobnie

$$x''=\text{sty}\frac{\alpha+2\pi}{m}=\frac{x+\text{sty}\frac{2\pi}{m}}{1-x\,\text{sty}\frac{2\pi}{m}};\ \text{etc.}$$

Więc, gdy jeden z pierwiastków jest wiadomy, wszystkie inne wywodzą się z niego *stosunkowo* i w tym samym kształcie.

299. Uwaga. Można zawsze sprowadzić dzielenie łuków do dzielenia przez liczby pierwsze. Niech będzie na przykład

$m = pq$, i przypuśćmy że znając dos$a$ chcemy znaleźć dos$\frac{a}{m}$.

Uczyńmy $x = \text{dos}\frac{a}{m} = \text{dos}\frac{a}{pq}$ i $y = \text{dos}\frac{a}{p}$, niewiadoma posiłkowa y będzie dana przez równanie stopnia p

$$\text{dos}a = \text{A}y^p + \text{A}_2 y^{p-2} + \text{A}_4 y^{p-4} + \ldots$$

a następnie niewiadoma x przez równanie stopnia q

$$y = \text{B}x^q + \text{B}_2 x^{q-2} + \ldots$$

Każda z p wartości y da q wartości dla x.

300. *Związek między dwiema liniami trygonometrycznemi dwóch łuków spółmiernych a i b.* Niech będzie $a = m\alpha$ i $b = n\alpha$, oznaczając przez m i n dwie całkowite pierwsze między sobą. Przypuśćmy na przykład że chcemy mieć związek między dos$a$ i dos$b$. Znajoma formuła daje

$$\text{dos}na = \text{dos}mn\alpha = \text{dos}^n a - \frac{n(n-1)}{1.2}\text{dos}^{n-2}a\,\text{wst}^2 a + \ldots$$

$$\text{dos}mb = \text{dos}mn\alpha = \text{dos}^m b - \frac{m(m-1)}{1.2}\text{dos}^{m-2}b\,\text{wst}^2 b + \ldots$$

Ztąd, odciągając, otrzymujemy równanie

$$0 = \text{dos}^n a - \frac{n(n-1)}{1.2}\text{dos}^{n-2}a\,\text{wst}^2 a + \ldots$$
$$- \text{dos}^m b + \frac{m(m-1)}{1.2}\text{dos}^{m-2}b\,\text{wst}^2 b - \ldots$$

które jest stopnia n dla dos$a$ i stopnia m dla dos$b$.

PRZYKŁAD. *Znając wst$a$ znaleźć wst$\frac{a}{6}$.*

Równanie które daje $\text{wst}\frac{a}{6} = x$ w funkcyi $\text{wst}a = b$, jest

$$b = \pm x\sqrt{1-x^2}\,[6(1-x^2)^2 - 20x^2(1-x^2) + 6x^4]$$

albo

$$b = \pm 2x\sqrt{1-x^2}(16x^4 - 16x^2 + 3).$$

Jeśli podniesiemy do kwadratu, znajdziemy równanie dwunastego stopnia

$$1024x^{12} - 3072x^{10} + 3456x^8 - 1792x^6 + 420x^4 - 36x^2 - b^2 = 0$$

które się przywodzi do równania stopnia szóstego.

Ale, uważając że dzielnik $6 = 2.3$, uczyńmy $\text{wst}\frac{a}{3} = y$ i $\text{wst}\frac{a}{6} = x$. Na mocy przytoczonej powyżej formuły, mamy

$$b = 3y(1-y^2) - y^3$$

albo

$$4y^3 - 3y + b = 0;$$

a następnie

$$y = \pm 2x\sqrt{1-x^2}$$

albo

$$4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0;$$

Tym sposobem, rozwiązywanie zagadnienia przywodzi się do rozwiązywania dwóch równań, z których jedno jest stopnia trzeciego a drugie dwukwadratowe.

Można było otrzymać a priori dwa ostatnie równania.

Jakoż, jeśli w równaniu

$$b = \pm 2x\sqrt{1-x^2}(16x^4 - 16x^2 + 3) = 0,$$

uczynimy $\pm 2x\sqrt{1-x^2} = y$, będzie

$$4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0;$$

a nakoniec

$$b = y(3 - 4y^2) \quad \text{albo} \quad 4y^3 - 3y + b = 0.$$

Wyrażenie potęg $\text{wst}^m a$ i $\text{dos}^m a$, w funkcyi linijnej wstaw i dostaw wielowników łuku a.

301. Takie wyrażenia stanowią zagadnienie odwrotne tego które formuła Moawra rozwiązuje.

Niech będą równania

$$(1)\qquad \text{dos}a + i\,\text{wst}a = u, \qquad \text{dos}a - i\,\text{wst}a = v,$$

które dają

$$2^m \text{dos}^m a = (u+v)^m, \qquad 2^m i^m \text{wst}^m a = (u-v)^m,$$

zkąd, rozwijając, wynika

$$2^m \text{dos}^m a = u^m + \frac{m}{1} u^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1.2} u^{m-2} v^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} u^{m-3} v^3 + \ldots + \frac{m}{1} u v^{m-1} + v^m,$$

$$2^m i^m \text{wst}^m a = u^m - \frac{m}{1} u^{m-1} v + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2} u^{m-2} v^2$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} u^{m-3} v^3 + - \ldots \mp \frac{m}{1} n v^{m-1} \pm v^m$$

albo, gromadząc wyrazy równo oddalone od skrajnych,

$$(2)\qquad 2^m \text{dos}^m a = (u^m + v^m) + muv(u^{m-2} + v^{m-2})$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{m-4} + v^{m-4}) + \ldots$$

$$(3)\qquad 2^m i^m \text{wst}^m a = (u^m \pm v^m) - muv(u^{m-2} \pm v^{m-2})$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{m-4} \pm v^{m-4}) - \ldots$$

znak + albo —, według jak m jest parzyste albo nieparzyste.

Owoż, oznaczając przez k liczbę całkowitą, równania (1) dają:

$$u^k + v^k = 2\mathrm{dos}ka\,, \qquad u^k - v^k = 2i\,\mathrm{wst}ka\,, \qquad u^k v^k = 1\,;$$

więc,

1°, jeśli m jest *parzyste*, zważając że rozwinięcia (2) i (3) mają tylko jeden wyraz środkowy, będzie

$$(4) \qquad 2^{m-1}\mathrm{dos}^m a = \mathrm{dos}\,ma + \frac{m}{1}\mathrm{dos}(m-2)a$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\mathrm{dos}(m-4)a + \ldots + \frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}}.$$

$$(5) \qquad 2^{m-1}(-1)^{\frac{m}{2}}\mathrm{wst}^m a = \mathrm{dos}\,ma - \frac{m}{1}\mathrm{dos}\,(m-2)a$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\mathrm{dos}(m-4)a - + \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}}.$$

2°, jeśli m jest *nieparzyste*, rozwinięcia (2) i (3) mają dwa wyrazy środkowe i dają

$$(6) \qquad 2^{m-1}\mathrm{dos}^m a = \mathrm{dos}\,ma + \frac{m}{1}\mathrm{dos}(m-2)a$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\mathrm{dos}(m-4) + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots\frac{m-3}{2}}{1.2\ldots\frac{m-1}{2}}\mathrm{dos}\,a\,.$$

$$(7) \qquad 2^{m-1}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\mathrm{wst}^m a = \mathrm{wst}\,ma - \frac{m}{1}\mathrm{wst}\,(m-2)a$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\mathrm{wst}\,(m-4) - + \ldots$$

$$+ (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\frac{m-1}{2}}\mathrm{wst}\,a\,.$$

Widzimy tedy że $\mathrm{dos}^m a$ wyraża się zawsze przez funkcyę linijną dostaw wielowników łuku; a zaś $\mathrm{wst}^m a$ wyraża się przez funkcyę linijną dostaw albo wstaw wielowników łuku, według jak wykładnik całkowity m jest parzysty albo nieparzysty.

ROZWINIĘCIA FUNKCYJ DOSx I WSTx NA SZEREGI POTĘG ROSNĄCYCH ŁUKU x.

Dowiedziemy najpierwej dwóch przybranych twierdzeń których potrzebujemy.

302. Twierdzenie I. *Granica stosunku* $\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$, *gdy całkowita* n *rośnie nieskończenie, jest zero.*

Niech będzie k liczba równa x albo większa od x; mamy

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}=\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{k}\cdot\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2}\cdots\frac{x}{n}.$$

Czynniki $\frac{x}{k+1}$, $\frac{x}{k+2}\cdots\frac{x}{n}$ są ułamkami mniejszemi od jedności, a ich liczba jest $n-k$;
więc

$$\frac{x}{1.2.3\ldots n}<\frac{x^k}{1.2\ldots k}\cdot\left(\frac{x}{k+1}\right)^{n-k};$$

Owoż, liczba $n-k$ może stać się większą od wszelkiej danej, a wiadomo że potęgi rosnące ułamka $\frac{x}{k+1}$ mają zero za granicę; więc,

$$gr.\,\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}=0 \qquad \text{gdy } n=\infty.$$

303. Twierdzenie II. *Granica potęgi* $dos^m \frac{a}{m}$, *gdy* m *rośnie nieskończenie, jest jedność.*

Wiemy że

$$\operatorname{dos}\frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m^2};$$

zatem

$$\operatorname{dos}^m\frac{x}{m} > \left(1 - \frac{x^2}{2m^2}\right)^m.$$

Rozwińmy drugą stronę nierówności wedle ustawy dwumianu, będzie

$$\operatorname{dos}^m\frac{x}{m} > 1 - \frac{m}{1}\,\frac{x^2}{2m^2} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{x^4}{2^2m^4} - \ldots$$

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\,\frac{x^{2n}}{2^n.m^{2n}} \mp \ldots$$

Owoż, jeśli m jest dostatecznie wielkie, w tem rozwinięciu każdy wyraz jest liczebnie mniejszy od poprzedzającego; albowiem, żeby przejść od wyrazu rzędu n do następującego, trzeba mnożyć przez $\frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{x^2}{2m^2} = \frac{1}{2m}\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)\frac{x^2}{n}$; a ten mnożnik może stać się tak małym jak się podoba; więc, pisząc powyższą nierówność jako następuje

$$\operatorname{dos}^m\frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m} + \left(\frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{x^4}{4m^4} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{x^6}{8m^6} + \ldots\right)$$

widzimy zaraz że $\operatorname{dos}^m\frac{x}{m}$ jest większa od ilości $1 - \frac{x^2}{2m}$ powiększonej summą liczb dodatnych; zatem

$$\operatorname{dos}^m\frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m}.$$

Ztąd wynika że $\operatorname{dos}^m\frac{x}{m}$ jest zawarta między dwiema bami 1 i $1-\frac{x^2}{2m}$, których różnica $\frac{x^2}{2m}$ maleje aż do zera w miarę jak m rośnie aż do nieskończoności; więc

$$gr.\text{dos}^m\frac{x}{m}=1 \qquad \text{gdy} \qquad m=\infty\,.$$

304. Uprzątnąwszy tę trudność, przystępujemy do naszego przedmiotu.

Czyniąc $a=\frac{x}{m}$ w formułach (1) i (2) n^ru^ 291, możemy pisać

$$\text{dos}x=\text{dos}^m\frac{x}{m}\left[1-\frac{m(m-1)}{1.2}\text{sty}^2\frac{x}{m}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\text{sty}^4\frac{x}{m}\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-2n+1)}{1.2\ldots 2n}\text{sty}^{2n}\frac{x}{m}-\ldots\right]$$

$$\text{wst}x=\text{dos}^m\frac{x}{m}\left[\frac{m}{1}\text{sty}\frac{x}{m}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\text{sty}^3\frac{x}{m}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)\ldots(m-2n)}{1.2\ldots(2n+1)}\text{sty}^{2n+1}\frac{x}{m}-\ldots\right]$$

albo jeszcze w innym kształcie

$$(1)\qquad \text{dos}x=\text{dos}^m\frac{x}{m}\left[1-\frac{x^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{\text{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^2+\ldots\right.$$
$$\left.\pm\frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{2n-1}{m}\right)\left(\frac{\text{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^{2n}\mp\ldots\right].$$

$$(2)\qquad \text{wst}x=\text{dos}^m\frac{x}{m}\left[\frac{x}{1}\,\frac{\text{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}-\frac{x^3}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{\text{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^3+\ldots\right.$$
$$\left.\pm\frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)}\left(1-\frac{1}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{2n}{m}\right)\left(\frac{\text{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^{2n+1}\mp\ldots\right].$$

Weźmy najpierwej równanie (1), i uważajmy że, aby przejść z wyrazu który ma n wyrazów przed sobą do następującego, trzeba mnożyć przez

$$\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}\left(1-\frac{2n}{m}\right)\left(1-\frac{2n+1}{m}\right)\left(\frac{\operatorname{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^2.$$

Owoż, 1°, czyniąc $a=\frac{x}{m}$, przypuśćmy x stałe a zaś m nieskończenie rosnące. W tem założeniu stosunek $\frac{\operatorname{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}$ dąży do jedności którą ma za granicę, gdy m zwiększając się przechodzi wszelką wielkość; albowiem

$$gr.\frac{\operatorname{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}=gr.\frac{\operatorname{wst}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\times gr.\frac{1}{\operatorname{dos}\frac{x}{m}}=1 \quad \text{gdy} \quad =\infty.$$

Zatem $\frac{\operatorname{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}=1+\varepsilon$; oznaczając przez ε ilość która jest tem bliższa zera im m jest większe.

2°, czynniki $1-\frac{2n}{m}$, $1-\frac{2n+n}{m}$ dążą do jedności w miarę jak m rośnie. Więc, jeśli weźmiemy $2n+1$ większe od $x(1+\varepsilon)$, co zawsze możebne, cały mnożnik będzie mniejszy od jedności, to jest

$$\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}\left(1-\frac{2n}{m}\right)\left(1-\frac{2n+1}{m}\right)\left(\frac{\operatorname{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^2<\frac{x^2(1+\varepsilon)}{(2n+1)^2}<1.$$

Ztąd wynika że wyrazy nawiasu, począwszy od tego który ma dzielnik $2n+1$, maleją, i tem bardziej dążą do zera im $2n$ jest większe, biorąc zawsze $m > 2n$.

Wyrazy nawiasu, jako widzimy, są naprzemian dodatne i odjemne. Dla skrócenia oznaczmy te wyrazy przez $u_0, u_2, \ldots u_{2n}, u_{2n+2} \ldots$, przez S_n summę n pierwszych, a przez S summę wszystkich; będzie

$$S = S_n + (u_{2n} - u_{2n+2}) + (u_{2n+4} - u_{2n+6}) + \ldots$$

$$S = S_n + u_{2n} - (u_{2n+2} - u_{2n+4}) - \ldots$$

To dowodzi że

$$S_n < S < S_n + u_{2n}.$$

Owoż, różnica dwóch liczb między które wpada summa S może stać się mniejszą od wszelkiej liczby oznaczonej, gdy m i $2n$ są przyzwoicie wielkie; więc summa wyrazów nawiasu ma pewną granicę, która się tem mniej różni od S_n im więcej wzięto wyrazów. Dla tej przyczyny wyrazy nawiasu stanowią, jako się mówi, *szereg zbieżny*, Ztąd wynika że, jeśli dla wyznaczenia przybliżonej wartości $\operatorname{dos} x$, weźmiemy pewną tylko liczbę wyrazów rozwinięcia, błąd popełniony będzie mniejszy od wyrazu idącego po tym na którym poprzestajemy, i będzie znaku przeciwnego.

Więc,

$$\operatorname{dos} x = \operatorname{dos}^m \frac{x}{m} \left[1 - \frac{x^2}{1.2}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(\frac{\operatorname{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^2 + \ldots \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\ldots\left(1 - \frac{2n-1}{m}\right)\left(\frac{\operatorname{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^{2n}(1-\theta) \right]$$

θ oznacza liczbę dodatną mniejszą od jedności.

Jeśli teraz liczba m rośnie do nieskończoności, ponieważ

$$gr.\ \mathrm{dos}^m\frac{x}{m}=1,\quad gr.\left(\frac{\mathrm{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^{2n}=1,$$ a czynniki

$1-\frac{1}{m}, 1-\frac{2}{m},\ldots 1-\frac{2n-1}{m}$ dążą do jedności, błąd pocho-

dzący z wyrazów zaniedbanych jest mniejszy od $\frac{\theta x^{2n}}{1.2..\,2n}$.

Ale ostatnia ilość, jeśli wezmiemy n dostatecznie wielkie, staje się mniejszą od wszelkiej ilości oznaczonej; więc szereg jest zbieżny, i jego summą jest $\mathrm{dos}x$; więc nakoniec

$$(3)\qquad \mathrm{dos}x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2\ldots6}+\ldots$$

Rozumując podobnie, znajdziemy

$$(4)\qquad \mathrm{wst}x=x-\frac{x}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^6}{1.2\ldots6}+\ldots$$

305. Uwaga. Te dwa szeregi są zbieżne na wszelką wartość łuku x; ponieważ błąd pochodzący z zaniedbania wyrazów rozwinięcia jest mniejszy od wyrazu idącego po tym na którym się zatrzymano, a ten wyraz jest tem bliższy zera im więcej wzięto wyrazów.

Na mocy tej uwagi szereg (4) daje

$$\mathrm{wst}x > x-\frac{x^3}{1.2.3};\quad \text{więc}\quad x-\mathrm{wst}x<\frac{x^3}{6}.$$

Biorąc szereg (3), będzie

$$\mathrm{dos}x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{1.2.3.4};\quad \text{więc}\quad \mathrm{dos}x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)<\frac{x^4}{24}.$$

Oba wyniki już nam wiadome.

ROZWINIĘCIA FUNKCYJ DOSx I WSTx NA WIELOCZYNY.

306. Formuły numeru 291 pokazują że, gdy m jest parzyste, dosma i $\dfrac{\text{wst}ma}{\text{wst}a\,\text{dos}a}$ są funkcyami całkowitemi z wst^2a; a gdy m jest nieparzyste, to wtedy $\dfrac{\text{dos}ma}{\text{dos}a}$ i $\dfrac{\text{wst}ma}{\text{wst}a}$ są funkcyami całkowitemi z wst^2a. Rozróżnijmy te dwa przypadki.

1°. Gdy m jest parzyste, dosma i odpowiedająca jej funkcya stają się obie zero na każdą wartość łuku a zawartą w formule $a=\dfrac{(2k+1)\pi}{2m}$; co dowodzi że ta funkcya stopnia $\dfrac{m}{2}$ względem wst^2a jest podzielna przez dwumiany kształtu $\left(1-\dfrac{\text{wst}^2a}{\text{wst}^2\dfrac{(2k+1)\pi}{2m}}\right)$; a że się przywodzi do jedności na wst$a$=0, więc, jeśli za k położymy liczby $0, 1, 2 \ldots \left(\dfrac{m}{2}-1\right)$, będziemy mieli tosamość

$$\text{dos}ma=\left(1-\frac{\text{wst}^2a}{\text{wst}^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\text{wst}^2a}{\text{wst}^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{wst}^2a}{\text{wst}^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right)$$

Szukajmy tak samo wieloczynu czynników który wyraża $\dfrac{\text{wst}ma}{\text{wst}a\,\text{dos}a}$. Ta ilość i odpowiedająca jej funkcya, stają się obie zero na każdą wartość łuku a zawartą w formule $a=\dfrac{k\pi}{m}$; co dowodzi że ta funkcya stopnia $\dfrac{m}{2}-1$ względem wst^2a, jest podzielna przez dwumiany kształtu $\left(1-\dfrac{\text{wst}^2a}{\text{wst}^2\dfrac{k\pi}{m}}\right)$, a że się równa ilości m na $\text{wst}a=0$; więc, podstawiając za k liczby $1, 2, 3 \ldots \left(\frac{m}{2}-1\right)$, mamy tosamość

$$\frac{\text{wst}ma}{\text{wst}a\,\text{dos}a}$$
$$=m\left(1-\frac{\text{wst}^2 a}{\text{wst}^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\text{wst}^2 a}{\text{wst}^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{wst}^2 a}{\text{wst}^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right).$$

Jeśli teraz zastąpimy a przez $\frac{x}{m}$, otrzymamy na m parzyste dwie szukane formuły, wyrażone podług wiadomej notacyi,

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\text{dos}x&=\prod_{k=0}^{k=\frac{m}{2}-1}\left(1-\frac{\text{wst}^2\frac{x}{m}}{\text{wst}^2\frac{(2k+1)\pi}{2m}}\right)\\ \text{wst}x&=m\,\text{wst}\frac{x}{m}\,\text{dos}\frac{x}{m}\prod_{k=1}^{k=\frac{m}{2}-1}\left(1-\frac{\text{wst}^2\frac{x}{m}}{\text{wst}^2\frac{k\pi}{m}}\right)\end{aligned}\right.$$

2°. Gdy m jest nieparzyste, wtedy $\frac{\text{dos}ma}{\text{dos}a}$ i $\frac{\text{wst}ma}{\text{wst}a}$ są funkcyami całkowitemi z $\text{wst}^2 a$. Rozumując jako wyżej, znajdziemy łatwo dwie inne formuły

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}\text{dos}x&=\text{dos}\frac{x}{m}\prod_{k=0}^{k=\frac{m-1}{2}-1}\left(1-\frac{\text{wst}^2\frac{x}{m}}{\text{wst}^2\frac{(2k+1)\pi}{2m}}\right)\\ \text{wst}x&=m\,\text{wst}\frac{x}{m}\prod_{k=1}^{k=\frac{m-1}{2}}\left(1-\frac{\text{wst}^2\frac{x}{m}}{\text{wst}^2\frac{k\pi}{m}}\right).\end{aligned}\right.$$

Formuły (1) i (2) służą do rozłożenia funkcyj dos$x$ i wst$x$ na jakąkolwiek skończoną liczbę czynników.

Gdy $m = \infty$, drugie strony otrzymanych formuł stają się wieloczynami zbieżnemi nieskończonej liczby czynników i przedstawiają wartości dos$x$ i wst$x$; żeby tego dowieśdź, przybieramy następujące twierdzenie :

307. *Gdy łuk x rośnie od 0 do $\frac{\pi}{2}$, stosunek $\frac{\text{wst}x}{x}$ maleje, a stosunek $\frac{\text{sty}x}{x}$ powiększa się; to jest wyraźniej*

$$\frac{\text{wst}x}{x} > \frac{\text{wst}(x+h)}{x+h} \quad \text{i} \quad \frac{\text{sty}x}{x} < \frac{\text{sty}(x+h)}{x+h},$$

przypuszczając że łuki x i h są oba dodatne i ich summa nie przechodzi $\frac{\pi}{2}$.

1°. W pierwszej założonej nierówności znieśmy mianowniki, i rozwińmy wst$(x+h)$, będzie

$$(x+h)\,\text{wst}x > x\,\text{wst}x\,\text{dos}h + x\,\text{dos}x\,\text{wst}h;$$

ta nierówność sprawdza się, bo oczywiście $x\,\text{wst}x > x\,\text{wst}x\,\text{dos}h$, a zaś $h\,\text{wst}x > x\,\text{dos}x\,\text{wst}h$ z przyczyny że $h\,\text{sty}x > x\,\text{wst}h$.

Jest więcej nawet. Stosunek $\frac{\text{wst}x}{x}$ maleje także w drugim ćwiercianie gdy x rośnie od $\frac{\pi}{2}$ do π, ponieważ licznik się zmniejsza a mianownik zwiększa.

2°. Jeśli w drugiej założonej nierówności wyrazimy styczne przez wstawy i dostawy, a potem zniesiemy mianowniki, będzie

$$(x+h)\,\text{wst}x\,\text{dos}(x+h) < x\,\text{wst}(x+h)\,\text{dos}x$$

albo

$$(x+h)[\text{wst}(2x+h)-\text{wst}h] < x[\text{wst}(2x+h)+\text{wst}h],$$

zkąd

$$\frac{\text{wst}(2x+h)}{2x+h} < \frac{\text{wst}h}{h}$$

nierówność dowiedziona przez 1°.

Wniosek. Z tego twierdzenia wynika wniosek którego właśnie potrzebujemy:

Gdy łuki x *i* $x+h$ *są zawarte między* 0 *i* $\frac{\pi}{2}$, *wtedy*

$$\frac{\text{wst}x}{\text{wst}(x+h)} > \frac{x}{x+h} > \frac{\text{sty}x}{\text{sty}(x+h)}.$$

308. To ustaliwszy, uważajmy że można wziąć całkowitę m dostatecznie wielką, tak żeby wartość liczebna łuku $\frac{x}{m}$ była mniejsza od $\frac{\pi}{2}$, i żeby $m\,\text{wst}\frac{x}{m} = x\dfrac{\text{wst}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}} < x$. Więc, w tem założeniu, jeśli zastąpimy stosunek wstaw przez stosunek ich łuków, na mocy powyższego wniosku będziemy mieli, co do wartości liczebnej, dwie nierówności

$$\text{dos}x < \prod_{k=0}^{k}\left(1-\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$$

$$\text{wst}x < \prod_{k=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

biorąc granicę wyższą k stosowną do użytej formuły.

Żeby wiedzieć od czego $\text{dos}x$ i $\text{wst}x$ są większe, wyraźmy stosunek wstaw przez stosunek stycznych. W tym celu, nazywając α i β dwa jakiekolwiek łuki koła, mamy widocznie

$$\frac{\text{wst}^2\alpha}{\text{wst}^2\beta}=\frac{\text{sty}^2\alpha}{\text{sty}^2\beta}(1+\text{sty}^2\beta)\,\text{dos}^2\alpha=\left(\frac{\text{sty}^2\alpha}{\text{sty}^2\beta}-1\right)\text{dos}^2\alpha+1\,;$$

zatem

$$1-\frac{\text{wst}^2\alpha}{\text{wst}^2\beta}=\left(1-\frac{\text{sty}^2\alpha}{\text{sty}^2\beta}\right)\text{dos}^2\alpha.$$

Przekształcając tym sposobem formuły (1) i (2), znajdziemy

$$\text{dos}x=\text{dos}^m\frac{x}{m}\prod_{k=0}^{k}\left(1-\frac{\text{sty}^2\dfrac{x}{m}}{\text{sty}^2\dfrac{(2k+1)\pi}{2m}}\right)$$

$$\text{wst}x=m\,\text{sty}\frac{x}{m}\,\text{dos}^m\frac{x}{m}\prod_{k=1}^{k}\left(1-\frac{\text{sty}^2\dfrac{x}{m}}{\text{sty}^2\dfrac{k\pi}{m}}\right)$$

biorąc granicę wyższą k stosowną do uważanej formuły.

W tych dwóch formułach zastąpmy stosunek stycznych przez stosunek łuków; na mocy okazanego wniosku i zważając przytem że m dostatecznie wielkie daje $m\,\text{sty}\frac{x}{m}=x\frac{\text{sty}\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}>x$,

będziemy mieli, co do wartości liczebnej, dwie nierówności

$$\text{dos}x>\text{dos}^m\frac{x}{m}\prod_{k=0}^{k}\left(1-\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$$

$$\text{wst}x>x\,\text{dos}^m\frac{x}{m}\prod_{k=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Znamy tedy dwie ilości między któremi są zawarte wartości $\text{dos}x$ i $\text{wst}x$.

Owoż, wiemy że

$$gr.\operatorname{dos}^m\frac{x}{m}=1 \quad \text{gdy} \quad m=\infty\,;$$

więc, nazywając θ i θ_1 dwie ilości dodatne które się stają zero gdy $m=\infty$, będzie

$$\operatorname{dos}x=(1-\theta)\prod_{k=0}^{k}\left(1-\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$$

$$\operatorname{wst}x=x(1-\theta_1)\prod_{k=0}^{k}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Jeśli teraz będziemy powiększali całkowitę m aż do nieskończoności, ilości θ i θ_1 będą coraz bardziej dążyły do zera; więc, przechodząc do granicy, mamy ostatecznie dwie formuły

$$(3)\qquad \begin{cases} \operatorname{dos}x=\prod_{k=0}^{k=\infty}\left(1-\dfrac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)\\ \operatorname{wst}x=x\prod_{k=1}^{k=\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\end{cases}$$

które wyznaczają $\operatorname{dos}x$ i $\operatorname{wst}x$ przez wieloczyny nieskończonej liczby czynników linijnych.

309. Z formuł (3), biorąc logarytmy, wywodzimy dwie inne

$$l\operatorname{dos}x=\prod_{k=0}^{k=\infty}l\left(1-\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$$

$$l\operatorname{wst}x=lx+\prod_{k=1}^{k=\infty}l\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

z których, wyrażając logarytmy przez szeregi i sumując, otrzymuje się dwa szeregi dostatecznie zbieżne, służące do wyrachowania wprost logarytmów $\operatorname{dos}x$, $\operatorname{wst}x$. Czytelnik znajdzie o tem obszerniejszą wiadomość w przedmowie do tablic Kalleta.

310. *Formuła* WALLISA. Jeśli w drugiej formule (3) uczynimy $x = \frac{\pi}{2}$, będzie

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{k=\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=0}^{k=\infty} \frac{(2k-1)(2k+1)}{2k.2k}$$

zkąd

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{k=\infty} \frac{2k.2k}{(2k-1)(2k+1)},$$

albo

(4) $$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

Ta znamienita formuła, którą znalazł angielski matematyk WALLIS (XVII[ty] wiek), daje wartość liczby $\frac{\pi}{2}$ jako granicę wieloczynu nieskończonej liczby czynników, naprzemian większych i mniejszych od jedności.

FUNKCYE KOŁOWE ZMIENNYCH UROJONYCH.

311. *Szeregi urojone.* Szereg

(1) $$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

którego wyrazy mają kształt

$$a_0 + b_0 i, \quad a_1 + b_1 i, \quad a_2 + b_2 i, \ldots$$

nazywa się zbieżnym, gdy części rzeczywiste jego wyrazów tworzą szereg zbieżny i tak samo spółczynniki ilości i, to jest gdy każdy z dwóch szeregów

(2) $$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots \\ b_0 + b_1 + b_2 + \ldots b_n + \ldots \end{cases}$$

jest zbieżny: a jeśli jeden z tych ostatnich jest rozbieżny, wtedy oczywiście szereg (1) jest także rozbieżny.

312. Twierdzenie. *Szereg urojony jest zbieżny, gdy szereg modułów jego wyrazów jest zbieżny.*

Niech będzie szereg

$$(3) \qquad r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \ldots$$

którego wyrazy są odpowiednio modułami wyrazów szeregu (1). Wartości samoiste wyrazów szeregów (2) są mniejsze od odpowiedających wyrazów szeregu (3); więc, gdy szereg (3) jest zbieżny, tem bardziej szeregi (2) są zbieżne, i temsamem szereg (1) jest zbieżny.

Ten warunek dostateczny zbieżności szeregu urojonego nie jest konieczny; albowiem, weźmy szereg urojony

$$(1-i)-\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{i}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\right)+\ldots$$

szeregi

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \quad \text{i} \quad -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$$

są oba zbieżne, więc uważany szereg jest zbieżny; a jednakże szereg modułów jego wyrazów, to jest

$$\frac{\sqrt{2}}{1}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}+\ldots$$

jest rozbieżny.

313. Twierdzenie. *Oznaczając przez x i m dwie ilości rzeczywiste, jest*

$$gr.\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x \quad \text{gdy} \quad m=\infty \cdot$$

Aby dowieśdź tego twierdzenia, przypuśćmy najpierwej m całkowite i dodatne, i rozwińmy potęgę $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ wedle formuły dwumianu; nazywając n liczbę całkowitą dodatną, mniejszą od m ale którą można wziąć tak wielką jak się podoba, otrzymujemy

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1+\frac{x}{1}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{1.2}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{1.2.3}+\dots$$
$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-2}{m}\right)\frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}+\mathrm{R}_n.$$

R_n znaczy summę $m-n$ wyrazów, to jest

$$\mathrm{R}_n=\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-2}{m}\right)\frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}+$$
$$\times\left[\frac{1-\frac{n-1}{m}}{n}x+\frac{\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\left(1-\frac{n}{m}\right)}{n(n+1)}x^2+\dots\right]$$

Owóż, summa wyrazów w klamrach jest mniejsza od summy postępni geometrycznej

$$\frac{x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{x^3}{n^3}+\frac{x^4}{n^4}+\dots$$

a ostatnia summa jest mniejsza od $\frac{x}{n-x}$, biorąc n takie żeby $\frac{x}{n}<1$; więc, oznaczając przez θ liczbę dodatną mniejszą od 1, będzie

$$\mathrm{R}_n=\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-2}{m}\right)\frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}\cdot\frac{\theta x}{n-x}.$$

Przypuśćmy teraz że n zostaje niezmienne, a zaś m rośnie bez granic; dwa powyższe równania, w których $m = \infty$, stają się

$$gr.\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + gr.R_n$$

$$gr.R_n = \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{\theta x}{n-x}.$$

A jeśli nadto zwiększać będziemy coraz bardziej całkowitę n, reszta R_n będzie coraz więcej dążyła do zera swej granicy; więc mamy

$$gr.\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

szereg zbieżny jakakolwiek jest wielkość zmiennej x,

Gdy $x=1$, summę tego szeregu oznaczono przez e; zatem

$$gr.\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{4}{1.2.3} + \ldots$$

Ważną jest rzeczą wiedzieć że liczba e nie zależy od kształtu liczby m; i, jakiekolwiek jest m, całkowite albo ułamkowe, liczba e równa się zawsze $gr.\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ gdy $m=\infty$.

Jakoż, gdy $m=\frac{p}{q}$ jest dodatne ułamkowe, albo niespółmierne, istnieje oczywiście dwie liczby całkowite μ i $\mu+1$ między które wpada $\frac{p}{q}$; co daje

$$\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^\mu < \left(1+\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q}} < \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1}$$

albo

$$\frac{\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}}{1+\frac{1}{\mu+1}} < \left(1+\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q}} < \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu\left(1+\frac{1}{\mu}\right).$$

Ale, gdy $\frac{p}{q}=\infty$,

$$gr.\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}=e=gr.\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu},$$

$$gr.\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)=1=gr.\left(1+\frac{1}{\mu}\right);$$

więc

$$gr.\left(1+\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q}}=e.$$

Gdy m jest liczbą odjemną jakąkolwiek $-n$, wtedy

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

więc

$$gr.\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e.$$

To ustaliwszy, widzimy że

$$gr.\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}=gr.\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^{x}=\left[gr.\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^{x}=e^{x};$$

więc ostatecznie

$$(4)\quad gr.\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}=e^{x}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\dots$$

314. Uwaga. Dowiedziono że liczba e, podstawa logarytmów neperyańskich, i jej kwadrat są niespółmierne; żeby znaleźć przybliżoną wartość liczby e, trzeba uważać że, w szeregu który ją daje, jest

$$R_n<\frac{1}{1.2\dots(n-1)}\cdot\frac{1}{n-1};$$

więc, zaniedbując wszystkie wyrazy tego szeregu idące po n^{tym}, popełnia się błąd mniejszy od tego wyrazu podzielonego przez $n-1$. Tym sposobem otrzymuje się

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

315. Możemy teraz uważać funkcye kołowe z punktu widzenia daleko rozleglejszego niż ten z któregośmy się dotąd na nie zapatrywali. I tak, dowiedliśmy że, na wszelką wielkość zmiennej rzeczywistej x, jest zawsze

$$\text{wst}x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \ldots$$

$$\text{dos}x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \ldots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Ale jest więcej jeszcze. Trzy szeregi

$$(5)\quad \begin{cases} z - \dfrac{z^3}{1.2.3} + \dfrac{z^5}{1.2.3.4.5} - \dfrac{z^7}{1.2.3..7} + \ldots \\ 1 - \dfrac{z^2}{1.2} + \dfrac{z^4}{1.2.3.4} - \dfrac{z^6}{1.2\ldots6} + \ldots \\ 1 + \dfrac{z}{1} + \dfrac{z^2}{1.2} + \dfrac{z^3}{1.2.3} + \ldots \end{cases}$$

nie przestają być zbieżne, gdy zmiennej z dajemy wartość urojoną jakąkolwiek. Albowiem, nazywając r moduł zmiennej z, widzimy że moduły wyrazów tych trzech szeregów tworzą szeregi zbieżne

$$r + \frac{r^3}{1.2.3} + \frac{r^5}{1.2.3.4.5} + \frac{r^7}{1.2\ldots7} + \ldots$$

$$1 + \frac{r^2}{1.2} + \frac{r^4}{1.2.3.4} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$1 + \frac{r}{1} + \frac{r^2}{1.2} + \frac{r^3}{1.2.3} + \frac{r^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Ostatni szereg ma za summę e^r, a summa każdego z dwóch pierwszych jest mniejsza od e^r. Jeśli więc określimy funkcye wstz, dosz, e^z przez szeregi (5), biorąc jako tosamość

$$\text{wst}z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

$$\text{dos}z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

będziemy mogli dawać zmiennej z wartości rzeczywiste albo urojone jakiekolwiek.

Inne funkcye kołowe określają się przez równania

$$\text{sty}z = \frac{\text{wst}z}{\text{dos}z} \qquad \text{sie}z = \frac{1}{\text{dos}z}$$

$$\text{dot}z = \frac{\text{dos}z}{\text{wst}z} \qquad \text{dosie}z = \frac{1}{\text{wst}z},$$

dowiedzione dla zmiennej rzeczywistej.

316. Tak ogólnie określone funkcye kołowe wiążą się z funkcyą wykładniczą e^z. Jakoż, z określenia mamy

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1} - \frac{z^2}{1.2} - \frac{iz^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{iz^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

więc

(6) $$e^{iz} = \text{dos}z + i\,\text{wst}z.$$

Zastąpmy teraz i przez $-i$, będzie także

$$e^{-iz} = \text{dos}z - i\,\text{wst}z;$$

Zkąd wynika dwie ważne formuły

$$(7)\qquad \text{dos}z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \text{wst}z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Jeśli w dwóch ostatnich formułach zastąpimy z przez iz, otrzymamy dwie następujące równie użyteczne (*)

$$(8)\qquad \text{dos}iz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \text{wst}iz = i\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

To wszystko dowodzi, że trzy funkcye dos$z$, wst$z$, e^z tworzą jedną tylko funkcyę.

317. Twierdzenie. *Otrzymuje się wieloczyn dwóch ilości wykładniczych urojonych e^z, $e^{z'}$ dodając wykładniki jako w ilościach rzeczywistych*, to jest

$$e^z . e^{z'} = e^{z+z'}.$$

Oznaczmy przez S_n, S'_n, S''_n summy n wyrazów trzech szeregów odpowiedających trzem funkcyom wykładniczym e^z, $e^{z'}$, $e^{z+z'}$, to jest:

$$S_n = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$S'_n = 1 + \frac{z'}{1} + \frac{z'^2}{1.2} + \frac{z'^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$S''_n = 1 + \frac{z+z'}{1} + \frac{(z+z')^2}{1.2} + \frac{(z+z')^3}{1.2.3} + \ldots;$$

nazywając ρ i ρ' moduły zmiennych z i z', uczynimy podobnie

(*) Gdy zmienna z jest rzeczywista, funkcye dosiz i $\frac{\text{wst}iz}{i}$ nazywają się pierwsza *dostawą hiperboliczną* druga *wstawą hiperboliczną*. Zobacz notę na końcu dzieła.

$$\Sigma_n = 1 + \frac{\rho}{1} + \frac{\rho^2}{1.2} + \frac{\rho^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\Sigma'_n = 1 + \frac{\rho'}{1} + \frac{\rho'^2}{1.2} + \frac{\rho'^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\Sigma''_n = 1 + \frac{\rho+\rho'}{1} + \frac{(\rho+\rho')^2}{1.2} + \frac{(\rho+\rho')^3}{1.2.3} + \ldots;$$

i weźmy jeszcze

$$\Sigma''_{2n-1} = 1 + \frac{\rho+\rho'}{1} + \ldots \frac{(\rho+\rho')^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots + \frac{(\rho+\rho')^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)}.$$

Widzimy łatwo że

$$\Sigma''_n < \Sigma_n.\Sigma'_n < \Sigma''_{2n-1}$$

albowiem, oczywiście wieloczyn $\Sigma_n.\Sigma'_n$ zawiera wszystkie wyrazy summy Σ''_n i zawiera jeszcze inne; a zaś przeciwnie summa Σ''_{2n-1} zawiera wszystkie wyrazy tego wieloczynu i zawiera także inne.

Owoż, wyrazy skrajne powyższej podwójnej nierówności dążą do jednej granicy, więc

$$gr.(\Sigma_n.\Sigma'_n - \Sigma''_n) = 0.$$

Na mocy tego równania, wracając do szeregów urojonych, mamy

$$gr.(mod.\,S_n.S'_n - mod.\,S''_n) = 0,$$

zkąd wnosimy że

$$gr.(S_n.S'_n - S''_n) = 0$$

albo

$$gr.(S_n.S'_n) = gr.\,S''_n.$$

Ale

$$gr.\,S_n = e^z, \quad gr.\,S'_n = e^{z'}, \quad gr\,S''_n = e^{z+z'}$$

więc

(9) $$e^z.e^{z'} = e^{z+z'}.$$

318. Wniosek. Funkcya wykładnicza urojona e^z jest funkcyą okresową mającą okres urojony $2\pi i$. Jakoż, dodając $2\pi i$ do zmiennej urojonej z, będzie

$$e^{z+2\pi i} = e^z . e^{2\pi i} = e^z(\text{dos}2\pi + i\,\text{wst}2\pi) = e^z.$$

Jeśli dodamy półokres, to jest πi, do zmiennej urojonej z, funkcya wykładnicza zmieni tylko znak; albowiem

$$e^{z+\pi i} = e^z\, e^{\pi i} = e^z(\text{dos}\pi + i\,\text{wst}\pi) = -e^z.$$

319. Funkcye $\text{wst}z$, $\text{dos}z$ zmiennej urojonej z są okresowe i mają ten sam okres 2π, jak gdyby zmienna była rzeczywista : co jasno pokazują formuły (7), w których dodaniem 2π do zmiennej z nie przeinaczamy bynajmniej funkcyj wykładniczych.

Te same formuły dowodzą także że *funkcya* $\text{dos}z$ *jest funkcyą parzystą, a zaś* $\text{wst}z$ *funkcyą nieparzystą*, to jest

$$\text{dos}(-z) = \text{dos}z, \qquad \text{wst}(-z) = -\,\text{wst}z.$$

Nakoniec z formuł (7) wynika

$$\text{sty}z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}.$$

Co pokazuje że $\text{sty}z$ jest funkcyą okresową mającą okres π, i funkcyą nieparzystą.

320. Twierdzenie. $\text{wst}^2 z + \text{dos}^2 z = 1.$

Bo
$$\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = e^{iz} . e^{-iz} = 1.$$

321. Zobaczmy teraz jak się rozwijają fundamentalne formuły $\text{dos}(z+z')$ i $\text{wst}(z+z')$ gdy łuki z i z' są urojone. Podług formuł (7) i (9) jest

$$\operatorname{dos}(z+z')=\frac{e^{(z+z')i}+e^{-(z+z')i}}{2}=\frac{e^{iz}.e^{iz'}+e^{-iz}.e^{-iz'}}{2}$$

$$=\frac{(\operatorname{dos}z+i\operatorname{wst}z)(\operatorname{dos}z'+i\operatorname{wst}z')+(\operatorname{dos}z-i\operatorname{wst}z)(\operatorname{dos}z'-i\operatorname{wst}z')}{2}$$

albo, wykonywając wieloczyny,

(10) $$\operatorname{dos}(z+z')=\operatorname{dos}z\operatorname{dos}z'-\operatorname{wst}z\operatorname{wst}z'$$

Otrzymuje się tak samo

$$\operatorname{wst}(z+z')=\operatorname{wst}z\operatorname{dos}z'+\operatorname{dos}z\operatorname{wst}z'.$$

Formuły zupełnie takie same jak dla łuków rzeczywistych. Ztąd wynika że wszystkie formuły trygonometryi, wywiedzione z formuł odnoszących się do dodawania łuków, nie przestają być prawdziwe gdy te łuki są urojone. Tym sposobem znajdujemy zaraz że

$$\operatorname{dos}z=\operatorname{wst}\left(\frac{\pi}{2}-z\right),$$

bo $\operatorname{wst}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\operatorname{wst}\frac{\pi}{2}\operatorname{dos}z-\operatorname{dos}\frac{\pi}{2}\operatorname{wst}z=\operatorname{dos}z$; etc.

322. Szukajmy nakoniec wartości funkcyj wykładniczych i kołowych, gdy zmienna urojona z bierze wartość $x+iy$.

Mamy $$e^{x+iy}=e^{x}.e^{iy}$$

$$\operatorname{dos}(x+iy)=\operatorname{dos}x\operatorname{dos}iy-\operatorname{wst}x\operatorname{wst}iy$$

$$\operatorname{wst}(x+iy)=\operatorname{wst}x\operatorname{dos}iy+\operatorname{dos}x\operatorname{wst}iy;$$

podstawiając za e^{iy} $\operatorname{dos}iy$ i $\operatorname{wst}iy$, ich wiadome wartości, otrzymamy

(11) $$\left\{\begin{aligned} e^{x+iy}&=e^{x}(\operatorname{dos}y+i\operatorname{wst}y)\\ \operatorname{dos}(x+iy)&=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\operatorname{dos}x+i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\operatorname{wst}x\\ \operatorname{wst}(x+iy)&=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\operatorname{wst}x+i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\operatorname{dos}x\end{aligned}\right.$$

Te formuły zawsze prawdziwe, jakiekolwiek nadamy wartości rzeczywiste albo urojone zmiennym x i y, są użyteczne wtedy zwłaszcza gdy trzeba pzyprowadzić do zwyczajnego kształtu ilości urojonych funkcye e^z, dosz, wstz w których zmienna z ma wartość urojoną $x+iy$.

323. Nie trudno także znaleźć wartość $\mathrm{sty}(x+iy)$; albowiem, jakiekolwiek są zmienne x i y, mamy z określenia

$$\mathrm{sty}(x+iy)=\frac{\mathrm{wst}(x+iy)}{\mathrm{dos}(x+iy)}=\frac{\mathrm{wst}(x+iy)\,\mathrm{dos}(x-iy)}{\mathrm{dos}(x+iy)\,\mathrm{dos}(x-iy)}$$

$$=\frac{\mathrm{wst}2x+\mathrm{wst}2iy}{\mathrm{dos}2x+\mathrm{dos}2iy};$$

więc, z przyczyny formuł (8), będzie

$$(12)\qquad \mathrm{sty}(x+iy)=\frac{2\mathrm{wst}2x+i(e^{2y}-e^{-2y})}{2\mathrm{dos}2x+(e^{2y}+e^{-2y})}.$$

Ztąd, czyniąc $x=0$, wywodzimy

$$\mathrm{sty}iy=i\frac{(e^y+e^{-y})(e^y-e^{-y})}{(e^y+e^{-y})^2}=i\,\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}.$$

wynik który formuły (8) dają odrazu.

324. Podobieństwo, któreśmy widzieli między funkcyami kołowemi i wykładniczemi, istnieje także między funkcyami kołowemi odwrotnemi i logarytmami.

Wiemy że wszelka ilość rzeczywista albo urojona $z=a+bi$, może się zawsze wyrazić w kształcie $z=r(\mathrm{dos}\alpha+i\,\mathrm{wst}\alpha)$. Otóż, nazywa się *logarytmem neperyańskim* ilości wielorakiej $r(\mathrm{dos}\alpha+i\,\mathrm{wst}\alpha)$, wykladnik potęgi do której trzeba podnieść liczbę e żeby otrzymać $r(\mathrm{dos}\alpha+i\,\mathrm{wst}\alpha)$. Ten logarytm jest kształtu $x+iy$; trzeba więc szukać wartości rzeczywistych dla x i y któreby zadość czyniły równaniu

$$e^{x+iy}=r(\mathrm{dos}\alpha+i\,\mathrm{wst}\alpha),$$

albo

$$e^x(\text{dos}\,y + i\,\text{wst}\,y) = r(\text{dos}\,\alpha + i\,\text{wst}\,\alpha).$$

Owoż, żeby te dwie ilości wielorakie były równe, trzeba i dość jest żeby ich moduły e^x i r były równe, a ich argumenta y i α były także równe albo się różniły wielownikiem okręgu 2π; co daje dwa równania

$$e^x = r \quad \text{albo} \quad x = lr, \quad \text{i} \quad y = \alpha + 2k\pi,$$

w których lr znaczy logarytm neperyański liczby dodatnej $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, α wyraża łuk najmniejszy możebny mający dostawę $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i wstawę $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, a zaś k oznacza liczbę całkowitą jakąkolwiek dodatną albo odjemną. Więc ilość

$$z = a + bi = r(\text{dos}\,\alpha + i\,\text{wst}\,\alpha) = re^{\alpha i}$$

ma nieskończoną liczbę logarytmów neperyańskich, i wszystkie są dane przez formułę

13 $$l((z)) = lr + (\alpha + 2k\pi)i,$$

w której przez notacyę $l((z))$ chcemy wyrazić że bierzemy wszystkie logarytmy ilości z, nie zaś sam jeden togarytm arytmetyczny jako lr.

Gdy z jest liczbą rzeczywistą dodatną, można wziąć $\alpha = 0$; wtedy

$$l((z)) = lr + 2k\pi i.$$

To pokazuje ze liczba rzeczywista dodatna ma jeden tylko logarytm rzeczywisty, to jest arytmetyczny lr odpowiedający wartości $k=0$, i nieskończoną liczbę logarytmów urojonych.

Jeśli z jest liczbą rzeczywistą odjemną, można wziąć $\alpha = \pi$; wtedy

$$l((z)) = lr + (2k + 1)\pi i,$$

te wszystkie logarytmy są urojone.

Ztąd wynika

$$(14)\quad \begin{cases} l((+1)) = 2k\pi i, & l((-1)) = (2k+1)\pi i. \\ l((\pm i)) = \left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) i \end{cases}$$

325. Przechodzimy teraz do funkcyj kołowych odwrotnych. Widzimy zaraz że symbole

$$\text{łuk}\,\text{wst}z, \quad \text{łuk}\,\text{dos}z, \quad \text{łuk}\,\text{sty}z, \quad \text{etc.}$$

przedstawiają wyrażenia urojone których wstawa, dostawa, styczna, etc. jest równa ilości urojonej z; te łuki urojone są z natury swojej niewyznaczone, tak jako łuki rzeczywiste odpowiedające danym liniom trygonometrycznym.

Niech będzie łuk $\text{dos}z = u$; ten symbol znaczy ilość u taką żeby było

$$\text{dos}u = z.$$

Ale wiemy że

$$e^{iu} = \text{dos}u + i\,\text{wst}u = z \pm i\sqrt{1-z^2};$$

ztąd wywodzimy

$$u = -il\left(\left(z \pm i\sqrt{1-z^2}\right)\right).$$

albo, co to samo,

$$\text{łuk}\,\text{dos}z = il\left(\left(z \pm i\sqrt{1-z^2}\right)\right).$$

Ponieważ wieloczyn dwóch ilości $z \pm i\sqrt{1-z^2}$ jest równy jedności, te ilości mają moduły odwrotne jeden drugiego, i argumenta równe ale znaków przeciwnych; zatem, nazywając ρ i ω moduł i argument jednej z dwóch ilości, mamy temsamem $\frac{1}{\rho}$ i $-\omega$ moduł i argument drugiej; co daje

$$l\left(\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)\right) = l\rho + (2k\pi + \omega)i,$$

$$l\left(\left(z - i\sqrt{1-z^2}\right)\right) = -l\rho + (2k\pi - \omega)i.$$

Więc wszystkie wartości łuku u są zawarte w podwójnej formule

$$u = 2k\pi \pm (\omega - il\rho).$$

Jeśli oznaczymy przez u_0 jedną z wartości u, na przykład tę która odpowieda na $k=0$, wszystkie wartości łuku u będą dane przez formułę

$$u = 2k\pi \pm u_0.$$

Gdy zmienna z jest rzeczywista i jej wartość liczebna nie przewyższa jedności, wtedy pierwiastnik $\sqrt{1-z^2}$ jest rzeczywisty i $\rho = 1$; zatem wszystkie wartości łuku u są rzeczywiste i zawarte w formule $u = 2k\pi \pm \omega$. Inaczej wszystkie są urojone.

326. Szukając tak samo wartości funkcyi odwrotnej $u = \text{łuk wst}z$, znajdujemy

$$\text{wst}u = z, \qquad e^{iu} = \text{dos}u + i\,\text{wst}u = \pm\sqrt{1-z^2} + iz;$$

zkąd

$$u = -il\left(\left(\pm\sqrt{1-z^2} + iz\right)\right)$$

albo

$$\text{łuk wst}z = il\left(\left(\pm\sqrt{1-z^2} - iz\right)\right).$$

Owoż, wieloczyn dwóch ilości w nawiasach jest równy -1; co pokazuje że moduły tych ilości są ρ i $\frac{1}{\rho}$, ich argumenta ω i $\pi - \omega$. Więc wszystkie wartości łuku u mieszczą się w dwóch formułach

$$u = 2k\pi + \omega - il\rho.$$

$$u = (2k+1)\pi - (\omega - il\rho).$$

A jeśli nazwiemy u_0 jedną z tych wartości, wszystkie wyrażą się przez

$$u = 2k\pi + u_0, \qquad u = (2k+1)\pi - u_0.$$

Gdy z jest ilością rzeczywistą której wartość liczebna nie przechodzi jedności, $\rho = 1$; wtedy wszystkie wartości łuku u są rzeczywiste i wyrażone przez

$$2k\pi + \omega \quad \text{albo przez} \quad (2k+1)\pi - \omega.$$

327. Weźmy jeszcze $u = \text{łuk}\,\text{sty}\,z$. Mamy zaraz

$$z = \text{sty}\,u = \frac{\text{wst}\,u}{\text{dos}\,u} = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{i(e^{iu} + e^{-iu})} = \frac{e^{2iu} - 1}{i(e^{2iu} + 1)},$$

zkąd wyprowadzamy

$$e^{2iu} = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Więc

$$u = \frac{1}{2i}\, l\left(\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)\right).$$

albo

$$\text{łuk}\,\text{sty}\,z = \frac{1}{2}\, il\left(\left(\frac{1 - iz}{1 + iz}\right)\right).$$

Niech będą ρ i ρ' moduły dzielnej i dzielnika; jeśli nazwiemy ω argument dzielnej, widzimy łatwo że $-\omega$ jest argumentem dzielnika; zatem $\frac{\rho}{\rho'}$ i 2ω są modułem i argumentem ilorazu $\frac{1 + iz}{1 - iz}$. Ztąd wynika

$$u = \omega + \frac{1}{2i}\, l\frac{\rho}{\rho'} + k\pi.$$

Jeśli z jest rzeczywiste, $\rho = \rho'$; wtedy wszystkie wartości łuku u są rzeczywiste $u = \omega + k\pi$.

328. Gdybyśmy, w poprzedzających zadaniach, wzięli zmienną z w kształcie wydatnym $a+bi$, rachunki byłyby zawilsze i formuły mniej ogólne. I tak, uważajmy na przykład łuk dos$(a+bi)$. Czyniąc

$$\text{łuk dos}(a+bi)=x+iy,$$

będzie

$$\frac{e^y+e^{-y}}{2}\operatorname{dos}x - i\,\frac{e^y-e^{-y}}{2}\operatorname{wst}x = a+bi.$$

To równanie znaczy dwa równania

$$(1)\qquad \frac{e^y+e^{-y}}{2}\operatorname{dos}x = a, \qquad \frac{e^y-e^{-y}}{2}\operatorname{wst}x = -b,$$

które dają

$$(2)\qquad e^y = \frac{a}{\operatorname{dos}x} - \frac{b}{\operatorname{wst}x}, \qquad e^{-y} = \frac{a}{\operatorname{dos}x} + \frac{b}{\operatorname{wst}x};$$

odsuwając przypadek szczególny $\operatorname{dos}x=0$ albo $\operatorname{wst}x=0$.

Ztąd wynika

$$\frac{a^2}{\operatorname{dos}^2x} + \frac{b^2}{\operatorname{wst}^2x} = 1,$$

albo

$$\operatorname{wst}^4x - (1-a^2-b^2)\operatorname{wst}^2x - b^2 = 0$$
$$\operatorname{dos}^4x - (1+a^2+b^2)\operatorname{dos}^2a + a^2 = 0.$$

Z dwóch ostatnich równań, uważając że wst^2x i dos^2x powinny być dodatne i czynić summę równą $+1$, wywodzimy

$$\operatorname{wst}^2x = \frac{1-a^2-b^2+\sqrt{(1-a^2-b^2)^2+4b^2}}{2}$$

$$\operatorname{dos}^2x = \frac{1+a^2+b^2-\sqrt{(1+a^2+b^2)^2-4a^2}}{2}$$

$$= \frac{2a^2}{1+a^2+b^2+\sqrt{(1+a^2+b^2)^2-4a^2}};$$

po czem, wyciągając pierwiastek kwadratowy i bacząc że, na mocy równania (1), dos$x$ ma znak ilości a, otrzymujemy

$$(3)\qquad \operatorname{dos}x=\frac{2a}{\sqrt{(1+a)^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}}.$$

Jeśli teraz oznaczymy przez x_0 jedną z wartości łuku x, przez y_0 wartość dla y odpowiedającą temu łukowi, równania (2) i (3) dadzą

$$x=2k\pi\pm x_0,\qquad y=\pm y_0;$$

biorąc razem znaki wyższe albo niższe. Więc ogólnie

$$\text{łuk}\operatorname{dos}(a+bi)=2k\pi\pm(x_0+iy_0).$$

329. Przypadki szczególne dos$x=0$, albo wst$x=0$, nie objęte równaniami (2), mieszczą się w ogólniejszych, $a=0$ albo $b=0$, które teraz roztrząsnąć należy.

1°. Gdy $a=0$, wtedy dos$x=0$, i wst$x=\pm 1$ według jak ilości b i $(e^{-y}-e^{y})$ mają te same znaki albo znaki przeciwne; zatem $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$. Równania (1) dają;

$$e^{-y}-e^{y}=\pm 2b,\ \text{zkąd}\ e^{y}=\mp b+\sqrt{b^2+1}\ \text{i}\ y=l\left(\sqrt{b^2+1}\mp b\right).$$

Więc, w tem założeniu,

$$\text{łuk}\operatorname{dos}bi=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}+il\left(\sqrt{b^2+1}\mp b\right);$$

biorąc razem oba znaki wyższe albo oba niższe, według jak b i $(e^{-y}-e^{y})$ mają ten sam znak albo znaki przeciwne.

2°. Gdy $b=0$, wtedy może być wst$x=0$ albo $y=0$. Pierwsze założenie wst$x=0$, prowadzi do wartości dos$x=\pm 1$ ze znakiem ilości a. Równania (1) dają

$$e^{y}+e^{-y}=\pm 2a,\ \text{zkąd}\ e^{y}=\pm a+\sqrt{a^2-1}\ \text{i}\ y=l\left(\pm a\pm\sqrt{a^2-1}\right)$$

co wymaga $a^2>1$.

Więc, jeśli $a > 1$, będzie

$$\text{łuk dos}\, a = 2k\pi + il\left(a \pm \sqrt{a^2 - 1}\right);$$

jeśli zaś $a < -1$, wtedy

$$\text{łuk dos}\, a = (2k+1)\pi + il\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 1}\right).$$

Uważajmy nakoniec drugie założenie $y = 0$, które daje $\text{dos}\, x = a$; w tym przypadku zagadnienie wtedy tylko jest możebne gdy a mieści się między -1 i $+1$.

Formuły przypadków szczególnych 1^0 i 2^0, otrzymują się wszystkie wprost z ogólnej formuły którąśmy w n° 325 wskazali.

330. Uwaga. Te wszystkie przykłady dostatecznie dowodzą, że wprowadzenie ilości urojonych do analizy uproszcza rachunek i zogólnia formuły.

Ilości urojone, uważane jako wyniki algebry konieczne do uzupełnienia twierdzeń, nie zaś joko wielkości geometryczne pojęte *a priori*, grają wielką rolę w tak zwanych *funkcyach podwójnie okresowych*. Dlatego wyłożyliśmy teoryę tych ilości dość obszernie, i ze ścisłością jaką w dziele elementarnem dać można.

ĆWICZENIA.

I. Dowieśdź że równania

$$0 = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{1.2\ldots7}{x^7} + \ldots$$

$$0 = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5}{1.2.3.5} + \ldots$$

nie mają pierwiastków urojonych, ani pierwiastków równych.

II. Dowieśdź że, gdy n jest liczbą nieparzystą, jakiekolwiek jest a, istnieje zawsze równanie

$$\mathrm{dos}\, na$$

$$= 2^{n-1} \mathrm{dos}\, a\, \mathrm{dos}\left(a + \frac{2\pi}{n}\right) \mathrm{dos}\left(a + \frac{4\pi}{n}\right) \ldots \mathrm{dos}\left(a + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$$

III. Pierwiastki spólne dwom równaniom dwumiennym $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$ są pierwiastkami równania $x^d - 1 = 0$; nazywając d największy spólny dzielnik wykładników m i n.

IV. Oznaczając przez a, b, c czynniki pierwsze liczby całkowitej $\mathrm{N} = a^\alpha b^\beta c^\gamma$, dowieśdź że formuła

$$\mathrm{N}\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)$$

wyraża ile jest liczb pierwszych mniejszych od N i pierwszych do N.

V. Pokazać że równanie

$$z^4 - z^3 - 4z^2 + 4z + 1 = 0,$$

pochodzące z podzielenia $x^{15} - 1$ przez $\dfrac{(x^3 - 1)(x^5 - 1)}{x - 1}$,

gdzie uczyni ono $x + \dfrac{1}{x} = z$, wynika z wyrugowania y między dwoma równaniami

$$z^2 - yz + y - 2 = 0 \quad \text{i} \quad y^2 - y - 1 = 0.$$

Tym sposobem rozwiązywanie powyższego równania stopnia 4^{go} zależy od rozwiązywania dwóch równań drugiego stopnia.

VI. Kwadraty z boków czterech piętnastokątów foremnych są pierwiastkami równania

$$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1 = 0.$$

VII. Wyznaczyć $\operatorname{dos}\frac{a}{m}$ wiedząc że $\operatorname{dos}a=0$.

Zastosować biorąc $m=6$ i $m=7$.

VIII. Oznaczając przez α łuk rzeczywisty zawarty między 0 i $\frac{\pi}{2}$, przez z zmienną rzeczywistą albo urojoną której moduł jest mniejszy od α, dowieśdź że

$$mod.\frac{\operatorname{sty}z}{\operatorname{sty}\alpha} < mod.\frac{z}{\alpha}.$$

IX. Dowieśdź że

1°, gdy m jest parzyste

$$\operatorname{dos}mx=(-1)^{\frac{m}{2}}\left[1-\frac{m^2}{1.2}\operatorname{dos}^2x+\frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\operatorname{dos}^4x\right.$$

$$\left.-\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\operatorname{dos}^6x+\ldots\right],$$

$$\operatorname{wst}mx=1\,(-)^{\frac{m}{2}+1}\operatorname{wst}x\left[\frac{m}{1}\operatorname{dos}x-\frac{m(m^2-2^2)}{1.2.3}\operatorname{dos}^3x\right.$$

$$\left.+\frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\operatorname{dos}x^5-+\ldots\right]$$

2°, gdy m jest nieparzyste

$$\operatorname{dos}mx=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left[\frac{m}{1}\operatorname{dos}x-\frac{m(m^2-1)^2}{1.2.3}\operatorname{dos}^3x\right.$$

$$\left.+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\operatorname{dos}^5x-+\ldots\right]$$

$$\operatorname{wst}mx=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\operatorname{wst}a\left[1-\frac{(m^2-1)}{1.2}\operatorname{dos}^2x\right.$$

$$\left.+\frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{1.2.3.4}\operatorname{dos}^4x-\ldots\right]$$

X. Dowieśdź że, jakiekolwiek jest m, parzyste albo nieparzyste,

$$\operatorname{dos} mn = \Sigma(-1)^n 2^{m-2n-1} \frac{m(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n+1)}{1.2.3\ldots n} \operatorname{dos}^{m-2n} x,$$

$$\frac{\operatorname{wst} mn}{\operatorname{wst} x} = \Sigma(-1)^n 2^{m-2n-1} \frac{(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-2n)}{1.2.3\ldots n} \operatorname{dos}^{m-2n-1} x.$$

Te formuły są ogólne, byle tylko w przypadku $n=0$ uważano spółczynniki literalne

$$\frac{m(m-n-1)\ldots(m-2n+1)}{1.2.3\ldots n} \quad \text{i} \quad \frac{(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

jako równe jedności.

XI. Dowieśdź że *summa pierwiastników niezredukownych, pomnożonych każdy przez ilość stosunkową dodatną albo odjemną, nie może być ilością stosunkową*, to jest że równanie

$$A\sqrt[n]{a} + B\sqrt[p]{b} + C\sqrt[q]{c} + \ldots = H$$

w którem A, B, C, oznaczają ilości stosunkowe jakiekolwiek, i a, b, c liczby dodatne, jest niemożebne.

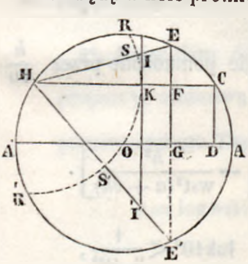
XII. Dowieśdź że nie można, przez pierwiastniki rzeczywiste, wyrazić pierwiastków równania stopnia trzeciego gdy one są wszystkie rzeczywiste

NOTY.

NOTA I.

Dowodzenie geometryczne twierdzenia *Summa wstaw ma się do ich różnicy, jako styczna połowy summy odpowiedających kątów ma się do stycznej połowy ich różnicy.*

Niech będą w kole promienia wziętego za jedność łuki AE$=a$ i AC$=b$; poprowadźmy równoległę CH i prostopadłę EE′ do średnicy AA′; a potem z punktu H jako środka, promieniem OA nakreślimy łuk koła RR′, i w punkcie K poprowadźmy styczną II′ do tego łuku; będziemy mieli



$$CE = a - b, \qquad CE' = a + b,$$

$$EG = \text{wst}a, \qquad CD = \text{wst}b,$$

$$FE = \text{wst}a - \text{wst}b, \qquad FE' = \text{wst}a + \text{wst}b,$$

$$KI = \text{sty}KHS = \text{sty}\tfrac{1}{2}(a-b), \qquad KI' = \text{sty}KHS = \text{sty}\tfrac{1}{2}(a+b)\,.$$

Owoż, w trójkącie HEE′, wiadome twierdzenie daje

$$\frac{FE'}{FE} = \frac{KI'}{KI};$$

więc

$$\frac{\text{wst}(a+b)}{\text{wst}(a-b)} = \frac{\text{sty}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{sty}\frac{1}{2}(a-b)}.$$

NOTA II.

Błąd pochodzący z użycia proporcyi tablicowej $\frac{h}{10}=\frac{\delta}{\Delta}$.

Proporcya tablicowa, za pomocą której szuka się przyrostu δ logarytmu linii trygonometrycznej łuku, albo liczby h sekund tego łuku, nie jest dokładna (stronica 105); ważną więc jest rzeczą wiedzieć na jakie przybliżenie znalezionego wyniku liczyć wolno. W tym celu szereg *Taylora* posłuży.

1°. Aby wyznaczyć granicę wyższą błędu $\pm\left(\delta-\frac{h\Delta}{10}\right)$ w szukaniu $\log \mathrm{wst}(a+h)$, mamy

$$\delta=\log \mathrm{wst}(a+h)-\log \mathrm{wst}a=\log e\left[\frac{h\,\text{łuk}1''}{\mathrm{st}ya}-\frac{h^2\text{łuk}^2 1''}{2\mathrm{wst}^2(a+\theta h)}\right]$$

$$\Delta=\log \mathrm{wst}(a+10'')-\log \mathrm{wst}a=\log e\left[\frac{10\,\text{łuk}1''}{\mathrm{st}ya}-\frac{10^2\text{łuk}^2 1''}{2\mathrm{wst}^2(a+\theta_1 10'')}\right];$$

ztąd, od pierwszego równania odciągając drugie pomnożone przez $\frac{h}{10}$, otrzymujemy

$$\delta-\frac{h\Delta}{10}=\frac{\log e\,\text{łuk}^2 1''}{2}\left[\frac{10h}{\mathrm{wst}^2(a+\theta_1 10'')}-\frac{h^2}{\mathrm{wst}^2(a+\theta h)}\right].$$

Uważając teraz że $\log e<\frac{1}{2}$, $h<10$, $\text{łuk}10''<\frac{1}{2.10^4}$, będzie liczebnie

$$\pm\left(\frac{10h}{\mathrm{wst}^2(a+\theta_1 10'')}-\frac{h^2}{\mathrm{wst}^2(a+\theta h)}\right)<\frac{100}{\mathrm{wst}^2 a}$$

i następnie

$$\pm\left(\delta-\frac{h\Delta}{10}\right)<\frac{\text{łuk}^2 10''}{4\mathrm{wst}^2 a}<\frac{1}{16.10^8\mathrm{wst}^2 a}.$$

Otóż, biorąc $a=5^0$, znajdujemy $16\mathrm{wst}^2 5^0=5,121\ldots$; co pokazuje że, gdy łuk a ma 5 stopni albo więcej, granica wyższa błędu $\delta-\frac{h\Delta}{10}$

wyraża się, co do wartości liczebnej, przez

$$\pm\left(\delta-\frac{h\Delta}{10}\right)<\frac{1}{10^7\times 1,21}.$$

Więc, gdy łuk a jest większy od łuku 5^0, albo przynajmniej mu równy, błąd pochodzący z użycia proporcyi tablicowej do wyznaczenia logarytmu $\mathrm{wst}(a+h)$ nie dosięga jedności siódmego rzędu dziesiętnego; a można nawet dowieśdź że ten błąd nie dochodzi do połowy jedności rzeczonego rzędu.

Ale, jeśli $a=1^0$, ponieważ $16\mathrm{wst}^2 1^0=0{,}0048\ldots$ błąd pochodzący z proporcyi tablicowej, w łukach od 1 do 5 stopni, może przechodzić kilka jedności siódmego rzędu dziesiętnego. Dlatego też w proporcyi tablicowej takich łuków bierze się przedział $1''$, co daje

$$\pm(\delta-h\Delta)<\frac{1}{16.10^{10}\mathrm{wst}^2 a}<\frac{1}{10^7\times 4,8}.$$

Tym sposobem błąd nie dosięga nawet ćwierci jedności siódmego rzędu dziesiętnego.

2^0. Mając dany $\log\mathrm{wst}(a+h)$, gdy się szuka liczby sekund h przez proporcyę tablicową, popełnia się błąd $\pm\left(h-\frac{10\delta}{\Delta}\right)$. Nietrudno, za pomocą szeregu *Taylora*, wyznaczyć granicę wyższą tego błędu. Jakoż,

$$\delta=\log\mathrm{wst}(a+h)-\log\mathrm{wst}a=\frac{h\,\mathrm{łuk}1''\log e\,\mathrm{dos}(a+\theta h)}{\mathrm{wst}(a+\theta h)}$$

$$\Delta=\log\mathrm{wst}(a+10'')-\log\mathrm{wst}a=\frac{10\,\mathrm{łuk}1''\log e\,\mathrm{wst}(a+\theta_1 10'')}{\mathrm{wst}a(a+\theta_1 10'')};$$

ztąd wynika

$$\frac{10\delta}{\Delta}-h=\frac{h\,\mathrm{wst}(\theta_1 10''-\theta h)}{\mathrm{wst}(a+\theta h)\,\mathrm{dos}(a+\theta_1 10'')}.$$

Więc, uważając wartość liczebną, znajdujemy

$$\pm\left(\frac{10\delta}{\Delta}-h\right)<\frac{10\,\mathrm{łuk}10''}{\mathrm{wst}a\,\mathrm{dos}(a+10'')}<\frac{1}{2.10^3\mathrm{wst}a\,\mathrm{dos}(a+10'')}.$$

Owoż, wieloczyn $2\mathrm{wst}a\,\mathrm{dos}(a+10'')=\mathrm{wst}(2a+10'')-\mathrm{wst}10''$

rośnie gdy łuk a powiększa się od 0^0 do $45^0 5''$; a ponieważ $a = 5^0$ daje $2 \text{wst} 5^0 \text{dos} 5^0 11'' = 0{,}173\ldots$, więc

$$\pm \left(\frac{10\delta}{\Delta} - h\right) < \frac{1}{10^2 \times 1{,}7}.$$

To dowodzi że w łukach od 5^0 do 85^0, błąd z użycia proporcyi tablicowej do wyznaczenia liczby h sekund nie dosięga setnej części sekundy. Ale trzeba pamiętać że jest drugi błąd pochodzący z ilorazu $\frac{10\delta}{\Delta}$, w którym δ i Δ są na mniej niż pół jedności; ten błąd mniejszy od $\frac{10}{\Delta}$ (*zobacz* naszą Arytmetykę), może wpływać na setne sekund. Z przyczyny tych dwóch błędów w rachunku liczby h, nie przechodzi się zwykle poza setne części sekundy.

Jeśli łuk a jest zawarty między 1^0 i 5^0, albo między 85^0 i 90^0, ponieważ $2 \text{wst} 1^0 \text{dos} 1^0 10'' = 2 \text{dos} 89^0 \text{wst} 88^0 59' 50'' = 0{,}0348\ldots$, błąd z proporcyi tablicowej jest mniejszy od $\frac{1}{10 \times 3{,}4}$ sekundy; ale summa dwóch błędów może wpływać na sekundy. Dlatego właśnie trzeba wyznaczać takie łuki przez dostawy, albo lepiej jeszcze przez styczne jeśli można, jakeśmy to na swojem miejscu wyłożyli.

NOTA III.

WSTAWA I DOSTAWA HIPERBOLICZNA.

Jeśli, biorąc promień koła za jedność, oznaczymy przez x i y spółrzędne punktu M okręgu, odniesione do dwóch średnic prostokątnych AA′, BB′ (fig. na stronicy 4), i nazwiemy z długość łuku AM, będzie

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = 1, \qquad x = \text{dos} z, \qquad y = \text{wst} z,$$

i powierzchnia wycinka AOM wyrazi się przez $\frac{1}{2} z$. To dowodzi że spółrzędne x, y punktu M są dostawą i wstawą łuku z, albo dostawą i wstawą powierzchni wycinka kołowego dwa razy większego od wycinka AOM.

Uważajmy teraz hiperbolę równoboczną której pół-oś rzeczywista jest wzięta za jedność. Jeśli nazwiemy x, y spółrzędne punktu M tej krzywej, jej równanie będzie

(2) $$x^2 - y^2 = 1;$$

a oznaczając przez $\frac{1}{2}z$ powierzchnię wycinka hiperbolicznego AOM, otrzymujemy przez analizę

$$\frac{1}{2}z = \frac{1}{2}xy - \int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Więc

$$z = \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = l\left(x + \sqrt{x^2-1}\right);$$

co daje

$$x + \sqrt{x^2-1} = e^z \quad \text{i} \quad x - \sqrt{x^2-1} = e^{-z},$$

zkąd

(3) $$x = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{i} \quad y = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Otóż, przez podobieństwo do funkcyj kołowych, nazwano odciętę x i rzędnę y, punktu M hiperboli równobocznej, *dostawą hiperboliczną* i *wstawą hiperboliczną* łuku z, albo dostawą i wstawą hiperboliczną powierzchni wycinka hiperbolicznego dwa razy większego od wycinka AOM. Więc, przedstawiając te nowe linie trygonometryczne przez notacyę dos hip$z$, wst hip$z$, znajdujemy, na mocy równań (2) i (3), fundamentalne formuły

(4) $$\begin{cases} \operatorname{dos}^2\operatorname{hip}z - \operatorname{wst}^2\operatorname{hip}z = 1 \\ \operatorname{dos}\operatorname{hip}z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{dos}iz \\ \operatorname{wst}\operatorname{hip}z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \dfrac{\operatorname{wst}iz}{i}. \end{cases}$$

GŁÓWNIEJSZE OMYŁKI DRUKU.

Str.	linia.		
5	8		*zamiast* maleje *czytaj* rośnie.
24	11	od dołu,	przywrócić w tytule wyraz Związki który wypadł.
27	9		*zamiast* (1) *czytaj* 1.
84	1	od dołu,	*zamiast* 2dosiea *czytaj* 2dosie2*a*.
85	10		*zamiast* łuk dos $\frac{4}{5}$ *czytaj* łuk wst $\frac{4}{5}$.
86	3		*zamiast* x—dos φ *czytaj* $x$dos φ,
102	2	od dołu	*zamiast* $\frac{\text{wst } 10''}{\text{łuk } 10''}$ *czytaj* $\frac{\text{łuk } 10''}{\text{wst } 10''}$
104	3	od dołu,	*zamiast* sty 64 26′ 20″ *czytaj* sty 64° 36′ 20″.
107	13	od dołu,	*zamiast* log dot 69° 58″, *czytaj* log dot 69° 58″, 3.
109	1 i 2		*zamiast* $\bar{1}$, 08494639 *czytaj* $\bar{1}$, 8494639.
151	11		Na początku linii brakuje numeru 130.
165	5		*zamiast* 9,8540287 *czytaj* 9,8540448.
id.	7		*zamiast* 6,7665054 *czytaj* 6,7665215.
id.	8		*zamiast* 5841244 *czytaj* 5841461.
166	8	od dołu	*zamiast* 9,9552975 *czytaj* 9,9553078.
id.	7	id.	*zamiast* 3,9499624 *czytaj* 3,9499127.
id.	6	id.	*zamiast* 8910,5 *czytaj* 8910,7.
172	5		Na początku linii brakuje numeru 142.
173	1		Na początku linii brakuje numeru 2°.
190	9	od dołu	Na początku linii brakuje numeru 156.
215	6	od dołu	Na początku linii brakuje numeru 183.
216	10		*zamiast* numeru 183 *czytaj* 184.
219			*zamiast* numerów 184 i 185 *czytaj* 185 i 186.
220	11	od dołu	*zamiast* numeru 186 *czytaj* 187.
221	11		brakuje numeru 188 na początku linii.
244	9		*zamiast* B $\geqq$ *czytaj* B $\geqq$ C.
162	10		*zamiast* 35° 23° 30″, 12 *czytaj* 35° 23′ 30″, 52.
id.	12	od odołu	*zamiast* 9, 7628008 *czytaj* 9, 7628020.
id.	11	id.	*zamiast* 3, 0344950 *czytaj* 3, 0344962.
id.	10	id.	*zamiast* 1082^m, 667 *czytaj* 1082^m, 670.
id.	4	id.	*zamiast* 3, 0344949 *czytaj* 3, 0344962.
id.	3	id.	*zamiast* 3, 1829639 *czytaj* 3, 1829640.
id.	2	id.	*zamiast* 9, 8515310 *czytaj* 6, 8515322.
id.	1	id.	*zamiast* 35° 23′ 30″, 24 *czytaj* 35° 23′ 30″, 518.