KURS

MECHANIKI ROZUMOWEJ

DZIEŁA MATEMATYCZNE

PROFESSORA G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO.

ARYTMETYKA. Kurs zupełny, zawierający działania skrócone, teoryę przybliżeń liczebnych, błędy samoiste i względne; noty dotyczące własności liczb; wiele rozwiązanych zagadnień i ćwiczenia, in-8°, Paryż, 1866. 4 fr.

GEOMETRYA. Kurs zupełny, drugie wydanie całkiem przerobione, zawierające całą geometryę starożytnych i metody geometryi nowoczesnej, a mianowicie: teoryę poprzecznych, biegunowych, oś pierwiastną, koło styczne do trzech kół; podział jednokreślny, inwolucyę; przecięcia stożkowe; jednokładność figur, płaszczyznę pierwiastną i biegunową, koła styczne na sferze, sferę styczną do czterech sfer; maximum figur w przestrzeni; zasady perspektywy, wiedzę o helicy i o stożkowej sferycznej, przekształcenia przez promienie wodzące odwrotne, etc., in-8°, z figurami w tekscie. Paryż, 1869. 8 fr.

TRYGONOMETRYA. Kurs zupełny, zawierający teoryę funkcyj kołowych, teoryę rzutów prostolinijnych i powierzchnych; trygonometryę prostolinijną i sferyczną; poprzeczne prostolinijne i sferyczne, biegunowę i oś pierwiastną sferyczną; teoryę ilości urojonych; własności pierwiastków n^{ych} jedności; wielokąty foremne; twierdzenie i formułę MOAWRA; równanie stopnia 3^{go}, funkcye kołowe zmiennych urojonych; wstawę i dostawę hiperboliczną. In-8°. Paryż, 1870. 4 fr. 50 c.

KURS MECHANIKI ROZUMOWEJ, w dwóch tomach. Tom pierwszy obejmuje Statykę i dynamikę punktu; twierdzenie pracy przysposobionej. In-8°. Paryż, 1873. 10 fr.

POD PRASSĄ. — Tom drugi MECHANIKI ROZUMOWEJ, zawierający Dynamikę układów materyalnych, hidrostatykę i hidrodynamikę.

Paryż. — Drukarnia E. MARTINET, ulica Mignon, 2.

KURS
MECHANIKI ROZUMOWEJ

PRZEZ

G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO

PROFESSORA MATEMATYKI W PARYŻU

TOM PIERWSZY

STATYKA — DYNAMIKA PUNKTU

NA CZTERECHSETNĄ ROCZNICĘ URODZIN

KOPERNIKA

NAKŁADEM WŁAŚCICIELA BIBLIOTEKI KÓRNICKIÉJ

PRZEWODNICZĄCEGO W TOWARZYSTWACH

NAUKOWÉJ POMOCY I NAUK ŚCISŁYCH W PARYŻU

1873

JANOWI Hr. DZIAŁYŃSKIEMU

SWOJEMU DAWNEMU UCZNIOWI,

NINIEJSZE DZIEŁO

MECHANIKĘ ROZUMOWĄ

JAKO UZNANIE USŁUG NA POLU NARODOWEJ OŚWIATY,

Z UCZUCIEM SZACUNKU I WDZIĘCZNOŚCI POŚWIĘCA

AUTOR

G.-H. NIEWĘGŁOWSKI.

DO CZYTELNIKA.

Idąc za przykładem najsławniejszych Matematyków, położyliśmy teoryę równowagi przed teoryą ruchu. Postępować inaczej jestto wywracać naturalny porządek rzeczy; osiemnaście wieków przedziela początek Statyki od początku Dynamiki, Archimedesa od Galileusza.

Równowaga nie jest prostem pojęciem umysłu, utworzonem dla ułatwienia wstępu do umiejętności ruchu; jest ona rzeczywistością istniejącą sama przez się. Budowa gmachów, sklepień, mostów, okrętów opiera się tylko na ustawach równowagi; ustawy ruchu nie grają tu żadnej roli. Są nawet machiny służące jedynie do wyznaczenia równowagi między ciężarami ciał. Równowaga, oparta na samej wiedzy siły i punktu materyalnego, nie zależy od czasu; raz ustalona trwa nieokreślenie dopóki zostaje ten sam porządek rzeczy; gdy przeciwnie, ruch zależy od czasu i od wiedzy massy; niedość znać ruch punktu materyalnego w danej chwili, trzeba jeszcze wiedzieć co się z nim stanie w ciągu czasu i jaką krążnę opisze. Równowaga, jako widzimy, jest o wiele prostsza od ruchu. Od prostych rzeczy do składanych każe iść logika, i tak postępuje geniusz umiejętności. Naturalnie więc wypada zaczynać Mechanikę od Statyki, a wzmocnimy więcej to zdanie gdy dodamy że Dynamika przywodzi się do Statyki za pomocą tak zwanej zasady D'Alemberta.

Powiemy więcej jeszcze. Niezaprzeczalnie umiejętność równowagi i umiejętność ruchu mają każda oddzielne zasady swojego rodzaju zastosowania; nie można zwinąć jednej na korzyść drugiej. Obie zależą oczywiście od ustaw przepisanych materyalnemu światu; z tą jednak różnicą że umiejętność ruchu potrzebuje więcej założeń niż umiejętność równowagi. Ale, co jest bardzo ważnego to właśnie to że, gdyby się zmodyfikowały niektóre ustawy natury, Dynamika byłaby całkiem zmieniona, gdy tymczasem Statyka pozostałaby tem czem jest. Trzebaż lepszego dowodu aby pokazać że Statyka jest fundamentalną podstawą Mechaniki?

Moda zaczynania Mechaniki od Cynematyki nie datuje oddawna, i dzisiaj już nawet ustaje. Mechanika rozumowa powraca do stanu normalnego z którego ją strącili ci którzy w szczytnej umiejętności widzieli tylko prostą naukę niezbędnie potrzebną do machin. Mówić o skutkach bez przyczyn, wykładać najpierwej teoryę składania ruchów a potem teoryę składania sił, nie zdaje nam się metodą dydaktyczną: a cóż dopiero składanie przyspieszeń *całych*, gdzie wszystko tem mniej jasne im więcej geometrycznych wykreśleń i różnego rzędu nikłych wielkości! Zaiste, nie taimy, są pewne delikatne punkta w teoryi składania sił; ale tych trudności składanie przyspieszeń nie unika. I tak, gdy dwie siły P, P′, przyłożone każda osobno do punktu materyalnego, dają mu przyspieszenia j, j', uczeni którzy określają równość sił przez równość przyspieszeń mówią że te dwie siły P, P′, przyłożone razem i działające w tę samą stronę, nadają punktowi przyspieszenie równe summie $j+j'$. Bez wątpienia, nie można zaprzeczyć że istnieje w naturze siła która sprawia przyspieszenie $j+j'$ w ruchu tego punktu; ale nic nie pokazuje żeby ta jedyna siła była równa summie $P + P'$. Jakaż więc korzyść wykładania przyspieszeń przed siłami?

Te uwagi dostatecznie usprawiedliwiają rozkład naszego dzieła, które zresztą jest całkiem zgodne z wykładem Mechaniki rozumowej w Uniwersytecie Francyi.

Pierwszy tom dzieła zawiera STATYKĘ punktu i układów materyalnych, i DYNAMIKĘ punktu materyalnego; drugi tom będzie obejmował DYNAMIKĘ układów materyalnych, HIDROSTATYKĘ i HIDRODYNAMIKĘ.

Wyłożyliśmy równowagę ciał bryłowych za pomocą dwojanów; bo tym sposobem unika się suchej teoryi momentów sił a ułatwia składanie sił w przestrzeni. Tę część Mechaniki dwojany uwydatniają i niejako ożywiają. Żeby jednak nie narzucać dwojanów uczonym professorom którzy bez nich wykładają Mechanikę, daliśmy w notach teoryę momentów sił. i składanie sił w przestrzeni, przywiedzione do dwóch sił z których jedna będzie przechodziła przez punkt dany. Nadto, wyłożyliśmy w całej możebnej rozległości ZASADĘ PRĘDKOŚCI PRZYSPOSOBIONYCH czyli, jako dziś mówią, OGÓLNE TWIERDZENIE PRACY PRZYSPOSOBIONEJ; ztąd wyprowadziliśmy na nowo wszystkie warunki równowagi ciał bryłowych jakichkolwiek, tak że mogą służyć tym nawet którzy Dynamikę przed Statyką stawiają.

Nie potrzebujesz, łaskawy Czytelniku, żebym ci wyszczególniał przedmioty rozbierane w tym pierwszym tomie; spis rzeczy daje o nich ogólne wyobrażenie. Czytając co się spodoba z samego dzieła, będziesz mógł łatwo sądzić o metodach i ścisłości dowodzeń, a nade wszystko o czystości języka o którą mi zawsze, w moich dziełach, najwięcej chodziło.

Niczego w życiu nie pragnąłem tyle jak napisać Mechanikę rozumową; bo wiedziałem że jej dotąd nasza litteratura nie posiada. Moje dobre chęci nie byłyby zapewne nigdy przyszły do skutku gdyby się nie był znalazł wzniosłego serca wydawca, właściciel pięknej biblioteki Kórnickiej, Jan Hr. Działyński. Niech mu za to będzie cześć i narodowa wdzięczność.

Światły Czytelniku, czy moje dzieło, owoc kilkunastoletniego wykładu Mechaniki rozumowej i długich poszukiwań, jest takie jakiegobyś sobie życzył, rozważ i oceń pamiętając na « IN MAGNIS VOLUISSE ».

G. H. Niewęgłowski.

Paryż, 19 Lutego 1873 roku,
W CZTERECHSETNĄ ROCZNICĘ URODZIN
KOPERNIKA

SPIS RZECZY

ZAWARTYCH W TOMIE PIERWSZYM.

Stronica.

Wstęp 1

STATYKA.

ROZDZIAŁ I.

SKŁADANIE I ROZKŁADANIE SIŁ.

Siły przyłożone do jednego punktu 5
Wynikowa i składowe 7
Wynikowa sił działających w linii prostej 7
Wynikowa dwóch sił tworzących kąt 9
Równoległobok sił 10
Wielokąt sił 16
Równoległościan sił 17
Rzuty sił 18
Wynikowa sił równoległych. Dwojan 21
Składanie dwojanów 25
Równoległobok i równoległościan dwojanów .... 30 — 32
Składanie sił w przestrzeni 33

ROZDZIAŁ II.

RÓWNANIA RÓWNOWAGI.

Równowaga sił przyłożonych do punktu wolnego w przestrzeni 38
Twierdzenie: Rzut wielokąta płaskiego albo spaczonego na osi jakiejkolwiek jest zero 39
Równowaga punktu na powierzchni albo na linii .... 39 — 44
Równania równowagi układu bryłowego wolnego w przestrzeni .... 47 — 58
Równowaga sił na płaszczyznie 48
Moment siły względem punktu 49
Równowaga sił równoległych 53
Moment siły względem płaszczyzny 54
Równowaga sił jakichkolwiek w przestrzeni 56
Moment siły względem linii prostej 59
Warunek żeby układ sił miał wynikowę 60
Dwojan minimum 63
Dwa zagadnienia równowagi .... 66 — 67
Równowaga układu bryłowego niezupełnie wolnego w przestrzeni .... 68 — 78

Stronic

Jeden punkt stały, oś stała, płaszczyzna, przypadek osobliwy....... 68 — 7
Ciało opierające się na dwóch płaszczyznach, zagadnienie.......... 76 — 78
Uwaga ogólna dotycząca równowagi.............................. 78

ROZDZIAŁ III.

ZASTOSOWANIE TEORYI SIŁ RÓWNOLEGŁYCH DO PRZYPADKU CIĘŻKOŚCI.

Środki ciężkości, określenia.............................. 80
Własności ogólne środka ciężkości. Twierdzenie Leibnica........... 85
Wyznaczenie środków ciężkości.............................. 87
Środek ciężkości linij : obwodu trójkąta, helicy, łuku koła, paraboli, cykloidy, spiralnej.............................. 88 — 100
Środek ciężkości powierzchni : środek ciężkości rzutu powierzchni stożkowej, środek ciężkości trójkąta, trapezu, czworoboku jakiegokolwiek, wycinka i odcinka koła, odcinka paraboli, cykloidy, figury sferycznej.............................. 102 — 123
Środek ciężkości trójkąta sferycznego.............................. 124
Spółrzędne biegunowe do wyznaczenia środka ciężkości.............. 124
Środek ciężkości powierzchni obrotowych : strefy sferycznej, cykloidalnej 129
Twierdzenie Guldina. Zogólnienie tego twierdzenia.............. 135
Objętość pnia graniastonu albo walca.............................. 138
Środek ciężkości objętości obrotowych : odcinka sferycznego, odcinka paraboloidy, hiperboloidy o dwóch płachtach.............................. 141
Środek ciężkości ciał bryłowych.............................. 143
Środek ciężkości piramidy i stożka, graniastonu i walca, odcinka ellipsoidy, odcinka paraboidy.............................. 148 — 152
Spółrzędne biegunowe i napółbiegunowe w przestrzeni. Środek ciężkości wycinka sferycznego, klina sferycznego, wrzecienia sferycznego, powierzchni półsferza.............................. 153 — 163

ROZDZIAŁ IV.

WIELOKĄT SZNURKOWY I ŁAŃCUSZKOWA.

Równowaga wielokąta sznurkowego.............................. 164
Mosty wiszące.............................. 174
Równowaga nici giętkiej nierozciągalnej.............................. 177
Łańcuszkowa.............................. 186
Kilka cechujących własności łańcuszkowej; środek ciężkości jest możebnie najniżej w łańcuszkowej.............................. 199
Krzywa mostów wiszących.............................. 200
Łańcuszkowa równej wytrzymałości.............................. 204

ROZDZIAŁ V.

PRZYCIĄGANIE POWSZECHNE.

Przyciąganie proporcyonalne do mass i w stosunku odwrotnym kwadratu odległości; potęgownik i funkcya sił.............................. 207

Stronica.

Teorya potęgownika.......................... 211
Potęgownik przyciągania warstwy sferycznej jednorodnej, i sfery....... 212
Przyciąganie walca wydrążonego nieokreślonego.................. 219
Przyciąganie ciał bardzo odległych.......................... 222
Przyciąganie proporcyonalne do mass i do odległości................ 224
Przyciąganie ellipsoid.......................... 225
Powierzchnie spółogniskowe i punkta odpowiedające............ 225—228
Działanie ellipsoidy na punkt wewnętrzny.................... 229
Twierdzenie Newtona: przyciąganie warstwy ellipsoidalnej jednorodnej. 236
Twierdzenia Iworego i Maklaurina.......................... 237
Działanie ellipsoidy na punkt zewnętrzny.................... 241
Ellipsoida obrotowa spłasczona i ellipsoida obrotowa wydłużona........ 244
Przyciąganie wzajemne dwóch sfer jednorodnych.................. 247

DYNAMIKA.

RUCH PUNKTU MATERYALNEGO.

ROZDZIAŁ I.

ZASADY I OKREŚLENIA.

Co trzeba rozumieć przez ciało przywiedzione do punktu materyalnego.. 249
Ruch jednostajny. Prędkość, ruch zmienny.................... 250
Dwa zagadnienia ruchu jednostajnego.......................... 252

Pierwsza zasada. *Bezwładność materyi*...................... 254

Druga zasada. Równość działania i oddziaływania................ 256

Prędkość w ruchu zmiennym.......................... 257
Ruch prostolinijny.......................... 259
Ruch jednostajnie zmienny.......................... 260
Przyspieszenie. Ruch jednostajnie przyspieszony.............. 261
Prędkość należna wysokości.......................... 262
Siły ciągłe, siły chwilowe. Siły stałe albo zmienne.............. 262
Siły zewnętrzne, siły wewnętrzne.......................... 263

Trzecia zasada. Niezależność ruchu względnego od ruchu spólnego.... 264

Ustawa niezależności skutków sił jednocześnie działających.......... 267
Proporcyonalność sił do przyspieszeń.......................... 267
Określenie massy punktów materyalnych.......................... 268
Proporcyonalność sił do mass.......................... 269
Związek między siłą massą i przyspieszeniem.................. 270
Ilość ruchu. Dwie siły stałe są proporcyonalne do ilości ruchu........ 271
Jedność massy.......................... 272

Stronica.

Miara siły zmiennej. Miara massy........ 274
Całkowania gdy jest wiadoma siła w funkcyi czasu, albo prędkości, albo odciętej punktu........ 274
Pierwszy przykład, spadek ciał ciężkich w próżni........ 277
Drugi przykład, spadek ciał ciężkich w powietrzu........ 280
Trzeci przykład, równanie różniczkowe ruchu ciała ciężkiego na płaszczyznie poziomej, bez tarcia. Machina *Atwooda*........ 286
Czwarty przykład, spadek ciała przyciąganego w stosunku odwrotnym kwadratu odległości od środka ziemi........ 287
Dwa zagadnienia ruchu, przypadek całki osobliwej........ 289—292

ROZDZIAŁ II.

RÓWNANIA RUCHU PUNKTU MATERYALNEGO W PRZESTRZENI.

Równania ruchu prostolinijnego jednostajnego........ 294
Prędkość rzutu punktu materyalnego na osi jakiejkolwiek........ 295
Zagadnienie ruchu jednostajnego........ 296
Ruch krzywolinijny jakikolwiek; równania różniczkowe tego ruchu........ 298
Siła poruszająca rzut punktu materyalnego na osi jakiejkolwiek........ 300
Trzy zagadnienia. Przyspieszenie w ruchu krzywolinijnym........ 301—306
Przyspieszenie rzutu punktu materyalnego na osi jakiejkolwiek........ 308
Ruch punktu materyalnego na danej powierzchni albo linii........ 309
Ruch pocisków w próżni........ 312
Ruch pocisków w powietrzu........ 318—321
Krążna strzału rdzennego artylleryi........ 326
Siła styczenna, siła dośrodkowa........ 327
Siła odśrodkowa, przykład procy........ 331
Siła bezwładności........ 334
Trzy zagadnienia........ 335

ROZDZIAŁ III.

TWIERDZENIA ZASADNICZE.

Twierdzenie ilości ruchu........ 341
Twierdzienie momentu ilości ruchu, Zasada powierzchni........ 343
Składowa prędkości wedle promienia wodzącego i składowa prostopadła do niego........ 350
O pracy sił........ 350
Zasada sił żywych........ 354
Równanie sił żywych, i całka sił żywych........ 356 — 358
Powierzchnie poziomu........ 359
Ruch punktu materyalnego pod działaniem ciężkości; płaszczyzny poziome 363
Ruch punktu ciężkiego na danej linii; przypadek osobliwy........ 365
Dwa zagadnienia o sile odśrodkowej........ 373

ROZDZIAŁ IV.

TEORYA WAHADEŁ.

Stronica.

Wahadło pojedyncze kołowe w próżni 375
Wahadło cykloidalne proponowane przez HUGENSA (*Huyghens*) 386
Krzywa tosamoczesna (*tautochrona*) 387
Krzywa najkrótszego czasu (*brachistochrona*) 389
Wahadło kołowe pojedyncze w powietrzu 392
Wyznaczenie wartości przyspieszenia g, (w Paryżu $g = 9^m,8088$) 396
Wahadło cykloidalne w powietrzu 396
Wahadło stożkowe 398

ROZDZIAŁ V.

TEORYA RUCHÓW WZGLĘDNYCH.

Ruch układu bryłowego około punktu stałego 410
Formuły EULERA 413
Oś chwilowa wirowania 415
Teorya analityczna ruchów względnych 416
Przyspieszenie dośrodkowe składane. Twierdzenie KORIOLISA 422
Równania różniczkowe ruchu względnego 425
Siła odśrodkowa składana. Różne przypadki ruchu względnego . . 425—426
Zagadnienie: Ruch punktu koła pionowego które się toczy po linii prostej; cykloida zwyczajna, wydłużona, skurczona 428
Równowaga względna punktu materyalnego 430
Przykład równowagi względnej: wahadło stożkowe opisujące stożek obrotowy ruchem jednostajnym 431
Równowaga na powierzchni ziemi 433
Ciężkość, jej kierunek 434
Wpływ słońca i księżyca na ciężkość 435
Ruch względny na powierzchni ziemi 437
Spadek ciał ciężkich, zboczenie na wschód, zboczenie na południe. 438—441
Wahadło stożkowe pod wpływem ruchu wirowego ziemi 443

ROZDZIAŁ VI.

SIŁY ŚRODKOWE, RUCH PLANET.

Równania różniczkowe ruchu punktu materyalnego pod działaniem siły środkowej 447
Ruch względny dwóch punktów które się nawzajem przyciągają 451
Ruch planet około słońca. Ustawy KEPLERA 453
Anomalia prawdziwa, anomalia excentryczna, czas średni 462
Zagadnienie KEPLERA 466
Ustawa ciążenia powszechnego, sprawdzenie zasad Mechaniki 470
Massy planet 472
Wpływ ciał niebieskich na ciężar ciał ziemskich 476

Stronica.

Ruch punktu materyalnego przyciąganego przez pewny środek proporcyonalnie do odległości.... 478
Ruch punktu przyciąganego przez środek stały w stosunku odwrotnym sześcianu odległości.... 483

ROZDZIAŁ VII.

ZASADA PRĘDKOŚCI PRZYSPOSOBIONYCH ALBO TWIERDZENIE PRACY PRZYSPOSOBIONEJ.

Określenia i twierdzenia pracy przysposobionej.... 492
Moment siły względem osi.... 493
Twierdzenie ogólne pracy przysposobionej.... 497
Równowaga ciał bryłowych niezmiennych.... 501
Równowaga układów bryłowych niezupełnie wolnych.... 505
Układ punktów materyalnych ze związkami.... 507
Warunki równowagi wywiedzione ze związków wyrażonych przez równania między spółrzędnemi.... 509
Równowartość dwóch układów sił.... 513
Równowaga ciał bryłowych ciężkich.... 519
Równowaga względna ciał na ziemi.... 520
Równowaga stała, niestała, obojętna ciał ciężkich mających związki.... 521
Mosty zwodzone jako przykład równowagi obojętnej.... 522
Równowaga ciał ciężkich stojących na płaszczyznie poziomej.... 523

NOTY I DODATKI.

Nota pierwsza. Drugie dowodzenie równoległoboku sił.... 527

Nota druga. Teorya momentów sił. Składanie sił w przestrzeni.... 528

Nota trzecia. Znakomity przykład całkowania przez części, przez Sturma.... 536

Nota czwarta. Nowa metoda do wyznaczenia całek wielownych, zastosowana do przyciągania ellipsoid jednorodnych, przez Lejeune-Dirichlet. 537

Nota piąta. Szereg ogólny z którego się wywodzi szereg Lagrangea... 541

MECHANIKA ROZUMOWA

WSTĘP.

1. W obecnym stanie umiejętności fizycznych, wszystko zdaje się przekonywać że ciała składają się z pewnych cząstek niepodzielnych które, nie przytykając jedne do drugich, wywierają na siebie wzajemne działania zwane *cząsteczkowemi*. Z różnych poszukiwań można się domyślać że te składowe cząstki są niezmiernie małe, i w odstępach daleko większych niż ich rozmiary. Jednakże dotąd żadne doświadczenie nic stanowczego nie dało w tym względzie.

Ciało nieskończenie małe we wszystkich rozmiarach nazywa się *punktem materyalnym*. Ale nie trzeba brać za punkta materyalne cząstek składowych ciała, bo te cząstki, jakkolwiek małe, mają przecież rozmiary skończone. Punkta materyalne powinny być uważane jako pojęcia umysłu, potrzebne do zastosowania Analizy, i używane tylko bezwzględnie na ich rozmiary.

2. Mówi się że ciało jest w spoczynku, gdy wszystkie jego punkta zajmują te same miejsca w przestrzeni; przeciwnie ciało jest w ruchu, gdy ustawicznie przechodzi z jednego położenia do drugiego, albo nawet gdy niektóre tylko jego punkta zmieniają miejsca. Oczywiście punkt materyalny w spoczynku nie może sam sobie nadać ruchu, ani mając ruch zmienić jego ustawy; tak że, raz w spoczynku, zostawałby w nim zawsze, a raz w ruchu, poruszałby się ciągle jedna-

kowo, gdyby nic zewnątrz na niego nie działało. Na tem właśnie polega fundamentalna zasada *bezwładności* materyi. Jeśli więc punkt materyalny przechodzi ze spoczynku do ruchu, albo jeśli ustawa jego ruchu się zmienia, to dlatego że jakaś zewnętrzna przyczyna działa na niego. Ta przyczyna ruchu albo modyfikacyi ruchu została nazwana *siłą*.

3. Siła. Wiedza siły jest niezaprzeczalnie jedną z najprostszych, bo pochodzi z doświadczenia. Jakoż, gdy chcemy utrzymać ciało ciężkie, przeszkodzić żeby nie upadło, albo je przestawić z jednego miejsca na drugie, musimy wydobyć z siebie pewne wysilenie którego niewątpliwe mamy uczucie. Wiemy nawet czy to wysilenie jest mniejsze albo większe od innego, chociaż go jeszcze mierzyć nie umiemy. To wszystko jasno dowodzi że wiedza siły nie ma nic przypuszczonego, jest rzeczywistością; a chociaż natura sił, tak jako istota materyi, zostaje niedościgłą tajemnicą, to nic nie szkodzi; albowiem nie naturę sił ale tylko ich skutki mamy do uważania.

Ruchy ciał, które spostrzegamy około siebie albo w przestrzeni, objawiają nam siły różnego nazwiska. I tak, ciało upuszczone z jakiejkolwiek wysokości spada na ziemię, z przyczyny działania siły zwanej ciężkością; ruch ciał elektryzowanych albo magnesowanych, które się przybliżają jedne do drugich albo oddalają, jest wynikiem działania *sił elektrycznych* albo *sił magnetycznych*. Ziemia i inne planety krążą około słońca, z przyczyny którą nazwano *przyciąganiem powszechnem*; albo, mówiąc ściślej, ruchy ciał niebieskich odbywają się jak gdyby było między niemi przyciąganie. Pręt stalowy, mocno wzdłuż potarty, wydaje drganie które pochodzi z działania tak zwanych *sił cząsteczkowych* (molekularnych). Jestestwa żyjące ściągnięciem swoich muskułów tworzą *siły muskularne*. Sprężystość pary wodnej, rozprężliwość gazów, dają siły rozmaitego użytku w przemyśle; wybuch prochu sprawia *siłę rzutu* pocisków; i t. d....

Gdy siła działa na punkt materyalny któremu przeszkoda nie pozwala wziąć ruchu, wtenczas ta siła wywiera na przeszkodę *parcie* albo *tężność*. I tak, działanie ciężkości, na ciało leżące na stole, wywiera na ten stół *parcie* które niekiedy zostawia po sobie wydatny wycisk; a jeśli ciało jest zawieszone na sznurku którego wyższa skrajność została utkwiona, wtedy działanie ciężkości stanowi *tężność* sznurka. Parcie i tężność, przytoczone jako przykłady, są tu skutkiem jednej siły; ale, pojmuje się łatwo że, w innych okolicznościach, mogą one być wynikiem sił różnych.

4. Gdy punkt materyalny, albo ciało, pod działaniem sił, zostaje w tym samym stanie spoczynku albo ruchu jak gdyby te siły nie istniały, mówi się że ten punkt albo ciało jest w równowadze; wtedy mówi się także że te siły są także w równowadze.

Gdy punkt materyalny zostaje w spoczynku chociaż na niego działają siły, wtedy można powiedzieć że te siły niszczą się między sobą. Ale, gdy ciało pod działaniem sił zostaje w spoczynku, te siły nie niszczą się koniecznie, i mogą sprawiać odkształcenie samego ciała, stanowiąc nowe związki między jego punktami.

Nie podpada żadnej wątpliwości, i przyjmuje się jako pewnik, że, nie naruszając w niczem stanu spoczynku albo ruchu w układzie punktów materyalnych, mających związki jakiekolwiek, można przydać albo odjąć pewną liczbę sił, byle one czyniły sobie równowagę.

Można oczywiście, nie nadwerężając równowagi jakiegokolwiek układu punktów materyalnych, ustalić jeden albo kilka z tych punktów; bo tym sposobem utrudza się tylko sam ruch możebny układu. Jeśli więc przedtem istniała równowaga tem bardziej będzie istniała potem.

5. Mechanika jest umiejętnością sił, równowagi i ruchu.

Mechanika dzieli się na dwie główne części. Pierwsza część, nazwana Statyką (η στατικη), zajmuje się składaniem sił i warunkami równowagi. Druga część, mianowana Dynamiką (Δύναμις potęga, siła), wykazuje związek między siłami i ruchem jaki one ciałom nadają. Przedmiotem Dynamiki jest wyznaczyć ruch którego siły są dane, albo nawzajem znaleźć siły które sprawiają ruch dany.

Statyka, oparta na wiedzy siły i punktu materyalnego, jest poprostu umiejętnością geometryczną; bo warunki równowagi są niezależne od czasu i od ruchu. Dynamika jest więcej zawiła; do wiedzy siły potrzebuje jeszcze znajomości czasu, i wiedzy *massy* ciała to jest ilości materyi która je składa. Albowiem ruch ciała zależy zarazem od sił, od trwania ich działań, i od massy ciała.

Można badać ruch ciał nie zajmując się siłami które go sprawiły, albo modyfikują. Takie samoiste uważanie samego tylko ruchu stanowi część Mechaniki którą nazwano CYNEMATYKĄ (Κίνημα ruch). W Cynematyce ciała mogą być uważane jakoby pozbawione materyi z której są utworzone, to jest jako ciała czysto geometryczne, ożywione ruchem zależnym tylko od czasu. Cynematyka jest właściwie umiejętnością osobną, która trzyma miejsce między Geometryą i Mechaniką. Jest ona użytecznem dopełnieniem Dynamiki; i dlatego wyłożymy jej główne twierdzenia po Dynamice punktu, jako wstęp do Dynamiki układów bryłowych.

STATYKA

ROZDZIAŁ PIERWSZY

SKŁADANIE I ROZKŁADANIE SIŁ.

SIŁY PRZYŁOŻONE DO JEDNEGO PUNKTU.

6. W każdej sile są trzy rzeczy do uważania: punkt przyłożenia tej siły, jej kierunek i natężenie.

1° Punktem przyłożenia siły jest punkt materyalny na który ona działa bezpośrednio; a że ten punkt jest nieskończenie mały, jego położenie w przestrzeni wyznacza się tak jako punktu geometrycznego, przez spółrzędne prostolinijne albo biegunowe.

2° Kierunkiem siły jest linia prosta wedle której poruszałby się punkt materyalny, pod działaniem tej siły, gdyby wychodził ze stanu spoczynku wolny od wszelkiej przeszkody. Uważa się zawsze siłę jakoby ciągnęła punkt do którego jest przyłożona. Kierunek siły wyznacza się przez kąty które linia prosta, wskazująca stronę jej działania, tworzy z pół-osiami spółrzędnych dodatnych.

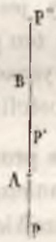
3° Żeby umieć porównywać siły, trzeba wiedzieć co się rozumie przez dwie siły równe. Otóż, mówi się że *dwie siły są równe, gdy przyłożone do jednego punktu w strony wprost przeciwne, czynią sobie równowagę.* Dwie siły mogące czynić równowagę tej samej sile są równe.

Wiedza równości sił prowadzi do wyobrażenia sił podwójnych, potrójnych,... I tak, jeśli dwie siły, równe sile P, działają na jeden punkt i w jednym kierunku, a siła P′, działając na ten sam punkt i w tym samym kierunku, może sprawić ten sam skutek co te dwie siły wzięte razem, mówi się że siła P′ jest równa 2P ; tak samo wyraża się przez 3P, 4P,... nP siłę która może zastąpić *trzy, cztery,... n* sił równych P, działających razem na jeden punkt i w tym samym kierunku. Zogólniając znaczenie sił wielownych, mówimy : siła $\frac{P}{n}$, siła $\frac{mP}{n}$, i nakoniec siła $\sqrt[n]{P}$; etc. Na mocy tego co poprzedza, łatwo się pojmuje stosunek sił, to jest ich wielkość w porównaniu jednych do drugich.

Natężenie czyli wielkość siły wyraża się przez jej stosunek do siły wziętej za jedność.

Ztąd wynika że, mogąc oszacować siły w liczbach, można je wyznaczyć przez linie proste. Jakoż, biorąc na kierunku siły odcinek, idący od punktu jej przyłożenia w stronę działania i wyrażający jej natężenie, mamy linię prostą która przedstawia zarazem wielkość tej siły, jej kierunek i stronę w którą działa.

7. Zmiana punktu przyłożenia siły. Gdy w układzie punktów



materyalnych siła P jest przyłożona do punktu A, można, nie naruszając jej skutku, przyłożyć tę siłę do innego punktu B jej kierunku, byle ten punkt był niezmiennie związany z pierwszym punktem A. Jakoż, do punktu B przyłóżmy dwie siły przeciwne P′, P″ równe sile P, i działające wedle prostej AB w kierunkach BP′, BP″ ; te dwie siły równe i wprost przeciwne niszczą się, i niezmieniają w niczem działania siły P. Ale siły P, P″, równe i przeciwne, czynią sobie równowagę za pomocą punktów A i B których odległość jest niezmienna ; zostaje więc tylko siła P′ przyłożona do punktu B, która jest właśnie siłą P przeniesioną do jednego z punktów swego kierunku.

Uwaga. W naturze ciała nie mają punktów niezmiennie połączonych; ich punkta materyalne, a raczej cząstki składowe, mogą się mniej więcej zbliżać do siebie albo oddalać. Dlatego też obecne twierdzenie, prawdziwe w Mechanice rozumowej, jest tylko przez przybliżenie zastosowalne w Mechanice ciał naturalnych.

8. Składowe i wynikowa. Gdy siły działające na układ punktów materyalnych, niezmiennie z sobą powiązanych, są takie że wprowadzając siłę P otrzymanoby równowagę, wtedy można zastąpić te wszystkie siły przez jedną siłę P. Jakoż, wprowadzając siłę P łącznie z siłą równą i wprost przeciwną, nie naruszamy w niczem skutku sił danego układu; a ponieważ z założenia siła P czyni równowagę tym ostatnim, zostaje więc tylko siła równa i przeciwna sile P. Ta jedyna siła, mogąca zastąpić wszystkie inne, nazywa się ich *wynikową* (niewłaściwie wypadkową); a nawzajem te ostatnie siły nazywają się *składowemi.*

9. Jeden układ sił nie może mieć dwóch wynikowych. Albowiem, gdyby dany układ sił przywodził się do dwóch wynikowych różnych R i R′, układ punktów materyalnych, pod działaniem tych sił będący, mógłby wziąć zarazem dwa różne ruchy; co oczywiście niemożebne. Więc, gdy pewna liczba sił ma wynikowę, ta wynikowa jest jedyna; to znaczy, innemi słowy, że niema dwóch sposobów różnych składania pewnej liczby sił w jedną. Wyznaczenie wynikowej danego układu sił wchodzi do zagadnienia równowagi.

10 W układzie punktów materyalnych wolnych, dwie siły nie mogą nigdy czynić sobie równowagi jeśli nie są równe i wprost przeciwne. Jakoż, gdyby takie dwie siły P, P′ były w równowadze, możnaby zerwać tę równowagę przystawiając w punkcie przyłożenia siły P, naprzykład, siłę P″ równą i wprost przeciwną sile P. Tym sposobem układ trzech sił P, P′, P″, z przyczyny że siły P i P′ niszczą się z założenia, miałby wynikowę P″, a zaś z przyczyny że siły P i P″ niszczą się także jako równe i wprost przeciwne, miałby drugą wynikowę. Co niemożebne.

Zajmiemy się teraz składaniem sił przyłożonych do jednego punktu.

11. Wynikowa sił działających w linii prostej. Przyjmują zwykle za widoczne że dwie siły przyłożone do jednego punktu, działające w tym samym kierunku i w tę samą stronę, dodają się, to

jest mogą być zastąpione przez siłę jedyną, która się równa ich summie i działa w tę samą stronę co te siły. Mimo tej pozornej oczywistości, wolimy dać dowodzenie, rozróżniając dwa przypadki.

1° *Dwie siły przyłożone do jednego punktu, działające w jednym kierunku i obie w jedną stronę, mają wynikowę równą ich summie i skierowaną w tę samą stronę.*

Niech będą najpierwej dwie siły P, Q mające spólną miarę f, tak że $P = mf$, $Q = nf$; oznaczając przez m i n dwie liczby całkowite. Zastępując siły P i Q przez mf i nf, to jest przez m więcej n sił równych, mamy jeydną siłę

$$R = (m + n)f = P + Q$$

która jest wynikową sił P i Q.

Jeśli siły P i Q są niespółmierne, można zawsze wyobrazić siłę Q′ spółmierną z P, i tak mało różną od Q jak się podoba. Owóż, nazywając R′ wynikowę sił spółmiernych P i Q′, będzie, na mocy tego co poprzedza,

$$R' = P + Q';$$

więc

$$gr.R' = gr.(P + Q') = P + gr.Q,$$

albo

$$R = P + Q.$$

2° *Dwie siły przyłożone do jednego punktu, w kierunkach wprost przeciwnych, mają wynikowę równą ich różnicy i skierowaną w stronę siły większej.*

Jakoż, przypuszczając $P > Q$, mamy

$$P = Q + R.$$

Widzimy tym sposobem że do punktu A są przyłożone trzy siły, to jest : dwie siły Q równe i wprost przeciwne które się niszczą, i zostająca siła R równa różnicy $P - Q$, która jest wynikową sił P i Q.

Z tych dwóch twierdzeń, zogólniając, łatwo wnosimy że :

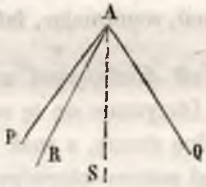
Wynikowa ilukolwiek sił działających w linii prostej jest równa ich summie algebrycznej. Otrzymuje się tę summę dając znak *więcej* siłom działającym w jedną stronę, a znak *mniej* tym które działają w stronę przeciwną, i od summy pierwszych sił odciągając summę drugich.

12. Wynikowa dwóch sił tworzących kąt. *Dwie siły* P, Q, *przyłożone do punktu* A *w kierunkach* AB, AC *tworzących kąt* BAC, *mają wynikowę* R *która leży na płaszczyznie tych sił, i w ich kącie.*

1° Ponieważ dwie siły P, Q, przyłożone pod kątem BAC, do punktu materyalnego A, nie mogą być w równowadze (10), ten punkt pod ich działaniem nabiera dążności do ruchu w pewnym kierunku wyznaczonym. Owóż, przykładając w kierunku wprost przeciwnym dostateczną siłę, można zniszczyć tę dążność do ruchu w samej chwili jej zaczęcia, to jest w chwili przykładania dwóch sił, i utrzymać punkt A w równowadze; więc siła R równa i przeciwna tej sile jest wynikową dwóch sił P, Q.

2° Ta wynikowa dwóch sił P, Q pod kątem PAQ znajduje się na płasczyznie kierunków AP, AQ i wewnątrz kąta PAQ. Bo inaczej, możnaby przez punkt A poprowadzić płasczyznę, któraby zostawiała z jednej strony obie składowe P, Q, a z drugiej ich wynikowę R; więc punkt materyalny A mógłby wziąć ruch z dwóch zarazem stron tej płasczyzny. Co oczywiście niemożebne.

13. *Gdy dwie siły* P, Q, *przyłożone pod kątem do jednego punktu materyalnego* A, *są równe, ich wynikowa ma kierunek dwójsiecznej tego kąta.* Bo niema żadnej przyczyny żeby ta wynikowa była bliżej jednego ramienia niż drugiego.



Uwaga. Wynikowa dwóch sił nierównych P i Q, działających pod kątem na jeden punkt materyalny, jest bliżej siły większej. Albowiem, przypuszczając $P = Q + T$, dwie siły równe Q, działające w kierunkach AP, AQ, będą miały wynikowę S która jest dwójsieczną kąta PAQ; a oczywiście dwie siły S i T mają wynikowę R w kącie PAS.

RÓWNOLEGŁOBOK SIŁ.

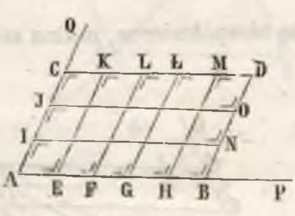
14. Twierdzenie przybrane. *W ukośniku* ABCD *cztery siły równe* P,

przyłożone do dwóch wierzchołków przeciwległych A, C, *w kierunku ramion kątów* A i C, *są w równowadze.*

Jakoż, w wierzchołku A wynikowa dwóch sił równych P ma

kierunek przekątnej AC, która jest dwójsieczną kątów A i C ; zaś w wierzchołku C wynikowa dwóch sił równych P ma kierunek tej samej przekątnej ale w stronę CA. Te dwie wynikowe, z przyczyny symetryi figury, są oczywiście równe, to jest wydają ten sam skutek ; a że są wprost przeciwne, więc czynią sobie równowagę.

15. Twierdzenie. *Wynikowa dwóch sił przyłożonych do jednego punktu i przedstawionych, co do kierunku i do wielkości, przez dwie linie proste, jest przedstawiona, co do kierunku i do wielkości, przez przekątnę równoległoboku wystawionego na tych dwóch liniach.*

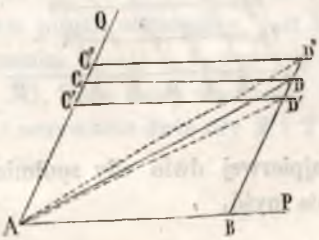


1° Uważajmy najpierwej dwie siły spółmierne P, Q, i niech będą, dla utkwienia myśli,

$$P = 5f, \quad Q = 3f.$$

Jeśli na kierunkach sił P, Q weźmiemy dwie proste AB, AC proporcyonalne do liczb 5, 3, i wystawimy na nich równoległobok ABDC, przekątna AD wyznaczy kierunek wynikowej tych sił. Na dowodzenie tego, podzielmy bok AB na 5 części równych a bok AC na 3 części równe, i przez punkta podziałów poprowadźmy do tych boków równoległe, które podzielą równoległobok na ukośniki równe. To uczyniwszy, w pierwszym ukośniku EI, przyłóżmy do każdego z dwóch wierzchołków przeciwległych E, I dwie siły f w kierunku ramion kątów E i I; te cztery siły będą w równowadze (14), i skutek sił P, Q nie będzie w niczem naruszony. Przyłóżmy tak samo dwie siły f do dwóch wierzchołków przeciwległych każdego z ukośników następnych FJ, GC, HK, BL, NŁ, OM. Tym sposobem skutek sił P i Q nie jest w niczem zmieniony. Ale teraz, przypuszczając wszystkie punkta podziałów stale połączone, można uważać że 5 sił f, działające w kierunku BA, są przyłożone w punkcie A w którym niszczą siłę wprost przeciwną $P = 5f$; podobnie 3 siły f, działające w kierunku CA, mogą być uważane jako przyłożone do punktu A w którym niszczą siłę wprost przeciwną $Q = 3f$; nadto, w punktach E i K dwie siły f równe i przeciwne niszczą się; tak samo w punktach F i L,..., i podobnie w punktach I i N,... Zostaje więc tylko 5 sił f w kierunku CD i 3 siły f w kierunku BD; a to są właśnie siły P i Q przyłożone do punktu D, w kierunkach CD i BD. Ztąd wnosimy że wynikowa sił P, Q, przyłożonych do punktu A, przechodzi przez punkt D; więc ta wynikowa ma kierunek przekątnej AD równoległoboku zbudowanego na prostych AB i AC.

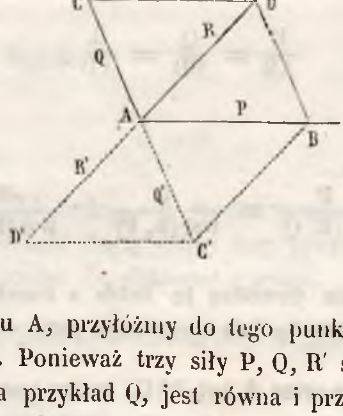
2° Jeśli siły P, Q są niespółmierne, można zawsze wyobrazić dwie



siły Q′ i Q″ spółmierne z siłą P, i zawierające między sobą siłę Q od której się rożnią tak mało jak się podoba. Przypuszczając siłę Q′

mniejszą od siły Q a siłę Q″ większą, weźmy proste, AB, AC, AC′, AC″ proporcyonalne do sił P, Q, Q′ Q″, i wystawmy równoległoboki ABDC, ABD′C′, ABD″C″. Na mocy 1°, wynikowa dwóch sił spółmiernych P i Q′, przedstawionych przez proste AB i AC′, ma kierunek przekątnej AD′ równoległoboku ABD′C′; ale, ponieważ Q > Q′, wynikowa sił P i Q jest w kącie D′AC. Podobnie, wynikowa dwóch sił spółmiernych P i Q″ ma kierunek przekątnej AD″ równoległoboku ABD″C″; a ponieważ Q < Q″, wynikowa sił P i Q jest w kącie D″AB. To dowodzi że wynikowa sił P i Q jest w kącie D′AD″, i temsamem czyni z przekątną AD równoległoboku ABDC kąt mniejszy od kąta D′AD″. Owoż, biorąc siły Q′ i Q″ coraz mniej się różniące między sobą, można uczynić kąt D′AD″ tak małym jak się podoba; tym sposobem kąt wynikowéj z przekątną AD, powinienby stać się mniejszym od wszelkiej ilości naznaczonéj; ale, ten kąt jest stateczny, więc nie może być tylko zero. Zatem, wynikowa dwóch sił jakichkolwiek, przedstawionych przez dwie proste AB, AC jest skierowana wedle przekątnéj równoległoboku wystawionego na tych liniach (*).

Aby wyznaczyć natężenie wynikowéj R dwóch sił P i Q, przyło-



żonych do punktu A, przyłóżmy do tego punktu siłę R′ równą i przeciwną sile R. Ponieważ trzy siły P, Q, R′ są w równowadze, jedna z nich, na przykład Q, jest równa i przeciwna wynikowéj dwóch innych P i R′. Jeśli więc przez punkt B poprowadzimy, równolegle do przekątnej AD, prostę BC która przetnie w C′ przedłuże-

(*) Zob. *inne dowodzenie* na końcu dzieła, Nota I.

nie boku AC, i przez punkt C′, równolegle do BA, prostę C′D′ która przetnie w D′ przedłużenie przekątnej AD, długość AD′ będzie przedstawiała natężenie czyli wielkość siły R′; albowiem, wszelka inna długość łącznie z długością AB dałaby równoległobok którego przekątna miałaby kierunek różny od AC′. Owóż, AD′ = BC′ = AD; więc przekątna AD wyraża natężenie wynikowej R dwóch sił P i Q.

Mamy zatem ogólne twierdzenie : *Wynikowa dwóch sił* P *i* Q, *przyłożonych do punktu materyalnego* A *w dwóch kierunkach jakichkolwiek, jest przedstawiona, co do wielkości i do kierunku, przez przekątnę* AD *równoległoboku* ABDC, *wystawionego na liniach* AB, AC *które przedstawiają te siły co do wielkości i do kierunku.*

Nawzajem, *jakakolwiek siła* R *może być zawsze zastąpiona przez dwie siły* P, Q; *z jednym tylko warunkiem, że te dwie siły będą przedstawione, co do wielkości i do kierunku przez boki równoległoboku któregoby* R *była przekątną.*

16. Ponieważ w równoległoboku ABDC, bok BD jest równy bokowi AC i do niego równoległy, dwie siły PQ i ich wynikowa R są przedstawione, co do wielkości i do kierunku, przez trzy boki AB, BD, AD trójkąta ABD w którym kąt B jest spełnieniem kąta PAQ. Co daje

$$\frac{P}{AB} = \frac{Q}{BD} = \frac{R}{AD}$$

albo

$$(1) \qquad \frac{P}{\text{wst}\,(R, Q)} = \frac{Q}{\text{wst}\,(R, P)} = \frac{R}{\text{wst}\,(P, Q)}.$$

Ostatnie równania dowodzą że *każda z trzech sił* P, Q, R *jest proporcyonalna do wstawy kąta utworzonego przez dwie inne.*

Nadto, oznaczając przez θ kąt PAQ, mamy jeszcze

$$(2) \qquad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \text{ dos } \theta.$$

Jeśli kąt θ jest prosty, wtedy, nazywając α kąt wynikowej R ze składową P, będzie

$$(3) \qquad P = R \operatorname{dos} \alpha, \qquad Q = R \operatorname{wst} \alpha,$$

$$R^2 = P^2 + Q^2,$$

z równaniem warunkowem

$$\operatorname{dos}^2\alpha + \operatorname{wst}^2\alpha = 1.$$

To wszystko pokazuje że składanie dwóch sił przyłożonych do jednego punktu, i rozkładanie jednej siły na dwie inne, są prostem zagadnieniem rozwiązywania trójkątów.

Gdy siły P i Q są równe, równoległobok staje się ukośnikiem; wtedy równanie (2) daje

$$R^2 = 2P^2(1 + \operatorname{dos} \theta) = 4P^2 \operatorname{dos}^2 \frac{\theta}{2};$$

ztąd

$$R = 2P \operatorname{dos} \frac{\theta}{2}.$$

Biorąc $\theta = \frac{2\pi}{3}$, będzie

$$R = P.$$

Ten wynik dowodzi że trzy siły równe, przyłożone do jednego punktu, których kierunki dzielą cztery kąty proste na trzy równe części, są w równowadze. Co widoczne *à priori*.

Uwaga. Gdy kąt θ malejąc dochodzi do zera, równanie (2) staje się

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ = (P + Q)^2$$

zkąd

$$R = P + Q;$$

a gdy kąt θ rosnąc dosięga wartości π, równanie (2) bierze kształt

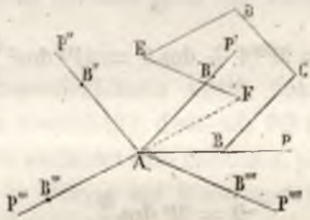
$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ = (P - Q)^2$$

zkąd, przypuszczając $P > Q$, wywodzimy

$$R = P - Q.$$

Te dwa wyniki zgadzają się z dwoma już wiadomemi twierdzeniami.

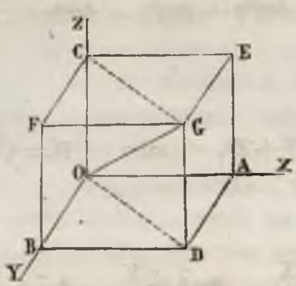
17. Wielokąt sił. Za pomocą równoległoboków, można wyznaczyć wynikowę jakiejkolwiek liczby sił P, P′, P″,..... przyłożonych



do jednego punktu, i przedstawionych przez proste AB, AB′ AB″...; dość tylko złożyć najpierwej dwie siły P, P′; potem złożyć ich wynikowę z siłą P″; następnie tę nową wynikowę z siłą P‴; i tak dalej, aż do ostatniej siły. Ale, otrzymuje się prościej tę wynikowę przez wielokąt którego boki mają wielkość i kierunek linij przedstawiających dane siły. Biorąc, naprzykład, prostę AB która przedstawia siłę P, za pierwszy bok wielokąta, przez wierzchołek B prowadzi się bok BC, mający wielkość i kierunek prostej AB′ która przedstawia siłę P′; przez wierzchołek C bok CD, mający wielkość i kierunek prostej AB″ która przedstawia siłę P″; i tak dalej, aż do ostatniej siły. Prosta AF, zamykająca wielokąt, przedstawia wielkość i kierunek wynikowej sił danych P, P′, P″.....

Ztąd wnosimy że, *jeśli wielokąt sił*, płaski albo spaczony według tego jak siły są albo nie są wszystkie na jednej plaszczyznie, *sam się zamyka, te siły są w- równowadze;* i NAWZAJEM, *jeśli dane siły są w równowadze wielokąt sił sam się zamykać musi.*

18. Równoległościan sił. Uważajmy w szczególności przypadek



trzech sił X, Y, Z, przyłożonych do jednego punktu O i przedstawionych przez trzy proste OA, OB, OC. Widzimy łatwo że prosta OG, zamykająca wielokąt skośny OADG, przedstawia wynikowę tych trzech sił, i jest przekątną równoległościanu OADBC wystawionego na trzech prostych OA, OB, OC. Co zresztą widoczne, bo siły X i Y dają wynikowę OD, a ta ostatnia złożona z siłą Z daje wynikowę $OG = R$.

Nawzajem, można zawsze rozłożyć siłę R, którą prosta OG przedstawia, na trzy inne siły w kierunkach jakichkolwiek XX', YY', ZZ'; byle te kierunki przechodziły przez punkt przyłożenia O danej siły R. Albowiem, prowadząc przez punkt G trzy płaszczyzny równoległe do płaszczyzn XOY, XOZ, YOZ, tworzymy równoległościan którego trzy krawędzie przyległe OA, OB, OC przedstawiają trzy składowe X, Y, Z, mające żądane kierunki XX', YY', ZZ'.

Gdy trzy składowe X, Y, Z są prostopadłe między sobą, nazywając a, b, c kąty jakie czyni kierunek wynikowej R z kierunkami tych składowych, będzie

$$(4) \qquad X = R \operatorname{dos} a, \qquad Y = R \operatorname{dos} b, \qquad Z = R \operatorname{dos} c.$$

Te równania dają wielkość i kierunek wynikowej, gdy składowe są wiadome.

Jakoż, dodając kwadraty, mamy

$$R^2(\operatorname{dos}^2 a + \operatorname{dos}^2 b + \operatorname{dos}^2 c) = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

ale kąty a, b, c powinny zadość czynić równaniu warunkowemu

$$\mathrm{dos}^2 a + \mathrm{dos}^2 b + \mathrm{dos}^2 c = 1\,;$$

więc

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad \text{albo} \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

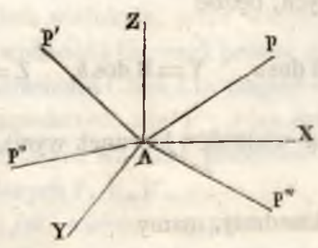
A zatem

$$\mathrm{dos}\, a = \frac{X}{R}, \quad \mathrm{dos}\, b = \frac{Y}{R}, \quad \mathrm{dos}\, c = \frac{Z}{R}\,.$$

Trzeba uważać że siedem ilości X, Y, Z, R, a, b, c są związane czterema równaniami; więc, mając dane trzy z tych ilości, byle między niemi była przynajmniej jedna siła, można wyznaczyć wszystkie inne.

19. Rzuty sił. Nazywa się rzutem *siły na osi* albo *na płaszczyźnie* rzut linii prostej która przedstawia tę siłę co do wielkości i do kierunku. Jeśli oznaczymy przez α, β, γ kąty siły P z trzema osiami spółrzędnemi prostokątnemi, rozumiejąc przez kąt siły z osią kąt ostry albo rozwarty, jaki czyni jej kierunek działania z pół-osią spółrzędnych dodatnych; wtedy wieloczyny $P\,\mathrm{dos}\alpha$, $P\,\mathrm{dos}\beta$, $P\,\mathrm{dos}\gamma$, wyrażające trzy składowe siły P, będą rzutami tej siły na trzech osiach spółrzędnych, a zaś wieloczyny $P\,\mathrm{wst}\gamma$, $P\,\mathrm{wst}\beta$, $P\,\mathrm{wst}\alpha$ jej rzutami na trzech płaszczyznach spółrzędnych xy, xz, yz.

Za pomocą rzutów na trzech osiach spółrzędnych, łatwo się wy-



znacza wynikowę sił przyłożonych do jednego punktu, gdy jest wiadoma wielkość każdej siły i jej kąty z temi osiami. Jakoż, niech będą siły P, P′, P″... przyłożone do punktu A; poprowadźmy przez ten punkt trzy osie prostokątne AX, AY, AZ, i nazwijmy $\alpha, \beta\, \gamma$; $\alpha'\, \beta'\, \gamma'$;..... kąty kierunków sił z osiami. Poczem, rozłóżmy siłę P na trzy siły, mające kierunki dodatne albo odjemne na osiach spółrzędnych; te trzy składowe będą wyrażone, co do wielkości i do znaku, przez wieloczyny $P \cos\alpha$, $P \cos\beta$, $P\cos\gamma$. Tak samo składowe siły P′ wyrażają przez $P\cos\alpha'$, $P\cos\beta'$, $P\cos\gamma'$; etc. Owoż, siły działające wedle każdej ze trzech osi składają się w jedną która jest ich summą algebryczną, a te trzy summy są oczywiście trzema składowemi wynikowej R sił danych; więc, nazywając a, b, c kąty wynikowej z pół-osiami spółrzędnych dodatnych, będzie

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
R\cos a &= P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots\\
R\cos b &= P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots\\
R\cos c &= P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots
\end{aligned}
$$

albo, oznaczając przez Σ summę wyrazów podobnych względnie do wszystkich sił, mamy prościej

$$
\begin{aligned}
R\cos a &= \Sigma P\cos\alpha,\\
R\cos b &= \Sigma P\cos\beta,\\
R\cos c &= \Sigma P\cos\gamma.
\end{aligned}
$$

Ztąd wyprowadzamy

$$R = \sqrt{(\Sigma P\cos\alpha)^2 + (\Sigma P\cos\beta)^2 + (\Sigma P\cos\gamma)^2}.$$

$$\cos a = \frac{\Sigma P\cos\alpha}{R},\quad \cos b = \frac{\Sigma P\cos}{R},\quad \cos c = \frac{\Sigma P\cos\gamma}{R}.$$

20. Natężenie wynikowej zależy tylko od wielkości sił składowych i od ich kątów, a bynajmniej od osi spółrzędnych, ani temsamem od kątów α, β, γ, α'..... Aby to wyraźniej okazać, podnieśmy do kwadratu obie strony równań (5) i dodajmy; bacząc na

równania warunkowe

$$\mathrm{dos}^2\alpha + \mathrm{dos}^2\beta + \mathrm{dos}^2\gamma = 1\,,$$
$$\mathrm{dos}^2\alpha' + \mathrm{dos}^2\beta' + \mathrm{dos}^2\gamma' = 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

znajdziemy

$$\begin{aligned} R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + \ldots\ldots \\ + 2PP'(\mathrm{dos}\,\alpha\,\mathrm{dos}\,\alpha' + \mathrm{dos}\,\beta\,\mathrm{dos}\,\beta' + \mathrm{dos}\,\gamma\,\mathrm{dos}\,\gamma') \\ + 2PP''(\mathrm{dos}\,\alpha\,\mathrm{dos}\,\alpha'' + \mathrm{dos}\,\beta\,\mathrm{dos}\,\beta'' + \mathrm{dos}\,\gamma\,\mathrm{dos}\,\gamma'') + \ldots \\ + 2P'P''(\mathrm{dos}\,\alpha'\,\mathrm{dos}\,\alpha'' + \mathrm{dos}\,\beta'\,\mathrm{dos}\,\beta'' + \mathrm{dos}\,\gamma'\,\mathrm{dos}\,\gamma'') + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Owoż,

$$\mathrm{dos}\,\alpha\,\mathrm{dos}\,\alpha' + \mathrm{dos}\,\beta\,\mathrm{dos}\,\beta' + \mathrm{dos}\,\gamma\,\mathrm{dos}\,\gamma' = \mathrm{dos}(P, P')\,;\ \text{etc.}$$

więc

$$\begin{aligned} R^2 = P^2 + P'^2 + \ldots\ldots 2PP'\,\mathrm{dos}(P,P') \\ + 2PP''\,\mathrm{dos}(P, P'') + \ldots\ldots 2P'P''\,\mathrm{dos}(P', P'') + \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

To równanie dowodzi twierdzenia geometryi : *W wielokącie płaskim albo spaczonym, kwadrat jednego boku jest równy summie kwadratów innych boków, więcej podwójny wieloczyn każdych dwóch boków przez dostawę kąta zawartego.*

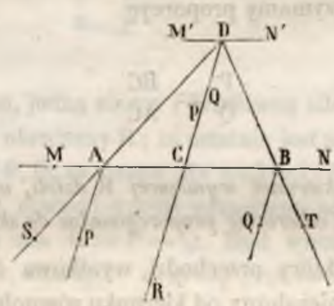
21. Często rozkłada się daną siłę P na dwie tylko, z których jedna działa na osi AX, na przykład, a druga na płasczyznie YZ prostopadłej do AX. Te dwie siły wyrażone przez $P\,\mathrm{dos}\,\alpha$ i $P\,\mathrm{wst}\,\alpha$ są rzutami siły P na osi i na płasczyznie. Jeśli tak rozłożono wszystkie siły P, P′, P″,... przyłożone do punktu A, wynikowa sił działających na osi AX będzie summą $P\,\mathrm{dos}\,\alpha + P'\,\mathrm{dos}\,\alpha + P''\,\mathrm{dos}\,\alpha'' + \ldots\ldots$ która, jakośmy widzieli, równa się wieloczynowi $R\,\mathrm{dos}\,a$; to się wyraża mówiąc : wynikowa sił *szacowanych* wedle osi jakiejkolwiek jest równa algebrycznej summie tych sił szacowanych wedle tej samej osi.

Siły P wstα, P' wstα', P'' wstα'',... składają się w jedną wynikowę która przechodzi przez punkt ich przyłożenia.

Z tego wszystkiego wynika ważne twierdzenie. *Gdy siły są przyłożone do jednego punktu,* RZUT *ich wynikowéj na* OSI *albo na* PŁASCZYZNIE *jest wynikową odpowiednych rzutów tych sił.*

SKŁADANIE SIŁ RÓWNOLEGŁYCH.

22. WYNIKOWA DWÓCH SIŁ RÓWNOLEGŁYCH. 1° Niech będą dwie siły P, Q równoległe i działające w jedną stronę, przyłożone do



dwóch punktów A, B połączonych niezmiennie. Przyłóżmy w A i B dwie siły M, N równe i przeciwne, działające wedle prostej AB; te siły, niszcząc się nawzajem, nie naruszą w niczem skutku sił P, Q. Ale siły M i P mają wynikowę S w kącie MAP, a siły N i Q wynikowę T w kącie NBQ: kierunki AS i BT sił S i T spotykają się w punkcie D, bo $SAB + TBA > 180°$; więc te siły mają wynikowę która przechodzi przez punkt D i jest wewnątrz kąta SDT. Poprowadźmy przez D równoległę $M'N'$ do AB, i równoległę DC do kierunku sił P, Q. Przypuszczając punkt D niezmiennie związany z A i B, możemy do niego przenieść siły S, T, i rozłożyć pierwszą na składowe P, M w kierunkach DC, DM', a drugą na składowe Q, N w kierunkach DC, DN'. Owoż, w punkcie D, dwie siły M, N, równe i przeciwne, niszczą się; zostają więc tylko dwie siły P, Q, skierowane wedle DC, które się dodają. Ztąd wnosimy że *dwie siły równoległe, działające w jedną stronę, mają zawsze wyni-*

kowę, która się równa ich summie, leży na ich płasczyznie, jest równoległa do każdéj z nich i działa wewnątrz tych sił w tę samą stronę.

Aby wyznaczyć kierunek wynikowej, uważajmy że, w punkcie D, składowe P, M siły S są proporcyonalne do boków DC, AC trójkąta DCA; a zaś składowe Q, N siły T proporcyonalne do boków DC, BC trójkąta DCB. Co daje

$$\frac{P}{CD} = \frac{M}{AC} \quad \text{i} \quad \frac{Q}{CD} = \frac{N}{BC}.$$

Jeśli więc, bacząc że siły M, N są równe, podzielimy stronami te dwie równości, otrzymamy proporcyę

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC},$$

która pokazuje że *kierunek wynikowej* R *dzieli, w punkcie* C, *odległość* AB *na części odwrotnie proporcyonalne do składowych* P, Q.

Punkt C przez który przechodzi wynikowa dwóch sił równoległych P, Q, jest niezależny od kierunku równoległości; nie zależy nawet od wielkości samoistej tych sił, byle tylko ich stosunek i punkta przyłożenia zostawały te same. Dlatego punkt C nazywa się zwykle *punktem przyłożenia* wynikowej.

Z tego co poprzedza i z powyższej proporcyi wywodzimy trzy oddzielne równania

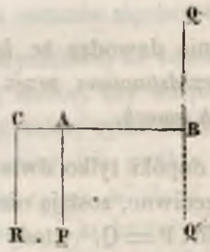
$$(7) \quad \begin{cases} R = P + Q \\ \dfrac{P}{BC} = \dfrac{Q}{AC} = \dfrac{R}{AB}, \end{cases}$$

które wyrażają związki dwóch sił równoległych i ich wynikowej. Dwa ostatnie równania pokazują że *każda z trzech sił równoległych* P, Q, R *jest przedstawiona przez linię prostą która łączy punkta przyłożenia dwóch innych.*

Trzy równania (7) wyznaczają trzy z sześciu ilości P, Q, R, BC.

AC, AB, gdy trzy inne są dane; byle między danemi była przynajmniej jedna siła i jeden odcinek.

2° Uważajmy teraz dwie siły P, Q, równoległe skierowane w strony przeciwne. Przypuszczając $P > Q$, możemy, na mocy 1°, rozłożyć



siłę P na dwie inne, jedną równą i przeciwną sile Q w punkcie B, drugą $P - Q$ którą nazwiemy R; ta ostatnia jest przyłożona w punkcie C zewnątrz sił P, Q, ze strony siły większej P. Owóż, w punkcie B, dwie siły Q równe i wprost przeciwne niszczą się; zostaje więc tylko jedyna siła $R = P - Q$. Ztąd wnosimy że *dwie siły równoległe nierówne, działające w strony przeciwne, mają wynikowę, która się równa ich różnicy, leży na ich płaszczyznie, jest równoległa do każdej z nich i działa zewnątrz tych sił w stronę większej.*

Do wyznaczenia punktu C, przez który przechodzi wynikowa R, mamy proporcyę

$$\frac{BC}{P} = \frac{AB}{P - Q}$$

zkąd

$$BC = \frac{P}{P - Q} \cdot AB.$$

Punkt C, przez który przechodzi wynikowa dwóch sił równoległych, jest niezależny od kierunku równoległości i od samoistej wielkości tych sił, i dlatego nazywa się *punktem przyłożenia wynikowej sił równoległych.*

Okazane powyżej związki wyrażają się przez równania

$$R = P - Q,$$

$$(8) \qquad \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

Ostatnie dwa równania dowodzą że *każda ze trzech sił równoległych* P, Q, R *jest przedstawiona przez linię prostą która łączy punkta przyłożenia dwóch innych.*

Równania (8) istnieją dopóki tylko dwie siły P i Q, równoległe i działające w strony przeciwne, zostają nierówne, jakkolwiek mała jest ich różnica. Ale, jeśli $P = Q$, wtedy $R = 0$ i $BC = \infty$. Te osobliwe wyniki nie są dowodem, ale tylko niejakim wskazem, że *dwie siły równoległe równe i działające w strony przeciwne nie mają wynikowej.*

Układ takich dwóch sił będziemy nazywali *dwojanem* (*). Dowiedziemy później że dwojan nie ma wynikowej, i nie jest w równowadze.

23. Uważajmy teraz jakąkolwiek liczbę sił równoległych P, P′, P″,.. które są przyłożone do punktów A, A′, A″,... związanych niezmiennie między sobą. Przypuszczając że dane siły ciągną wszystkie w jedną stronę, składamy najpierwej dwie z tych sił w jedną; potem tę nową siłę składamy z trzecią; i tak dalej postępując aż do ostatniej, otrzymujemy wynikowę wszystkich sił danych, równą ich summie i do nich równoległą. Punkt przyłożenia wynikowej wyznacza się przez ciąg proporcyj któreśmy wyżej podali.

Gdy dane siły równoległe nie działają wszystkie w tę samą stronę, szukamy wynikowej sił które ciągną w jedną stronę, i wynikowej sił które ciągną w stronę przeciwną. Tym sposobem cały układ sił danych przywodzi się do dwóch sił równoległych, działających w dwie strony przeciwne; każda z tych dwóch sił jest równa summie sił jednego kierunku, te dwie wynikowe częściowe, w ogóle, składają się w jedną siłę, równą ich różnicy i do nich równoległą,

(*) Dotąd nazywano ten układ *parą sił*; nazwisko dziwaczne i niedogodne.

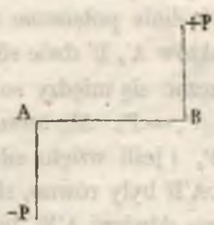
skierowaną w stronę siły większej; jej punkt przyłożenia wyznacza się sposobem już wiadomym.

Jeśli dwie wynikowe częściowe są równe i wprost przeciwne, dany układ sił jest w równowadze; ale, jeśli te dwie wynikowe, równoległe i równe, nie są wprost przeciwne, wtedy dany układ sił równoległych stanowi dwojan. Wiec, ogólnie, wynikowa sił równoległych jest równa ich summie algebrycznej i do nich równoległa.

Punkt przyłożenia wynikowej sił równoległych, czy one ciągną wszystkie w tę samą stronę, czy też jedne ciągną w jedną stronę a drugie w przeciwną, zależy tylko od stosunku wielkości tych sił, i od figury którą tworzą ich punkta przyłożenia. Tak że, jeśli wszystkie siły zmienią razem wielkość i kierunek, byle miały te same punkta przyłożeń, i zachowały między sobą równoległość i ten sam stosunek, ich wynikowa będzie zawsze przechodziła przez ten sam punkt, który, dla tej szczególnej własności, nazywa się *środkiem* sił równoległych.

SKŁADANIE DWOJANÓW.

24. Wiemy już że dwie siły równoległe równe i działające w strony przeciwne stanowią dwojan.

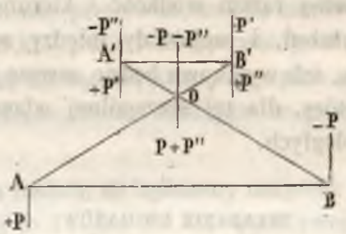


I tak, dwie siły $+P$ i $-P$, równoległe i równe, ale działające w strony przeciwne, przyłożone do dwóch skrajności A i B linii prostej AB, tworzą dwojan, który wyrażamy pisząc $(P, -P)$. *Ramieniem dźwigni* dwojanu jest prostopadła spólna AB do kierunku jego sił $+P$ i $-P$; a wieloczyn jednej z tych sił przez ramie dźwigni nazywa się *momentem dwojanu;* i tak, P.AB jest momentem dwojanu $(P, -P)$. Aby dwojan był zero, trzeba i dość jest żeby jego moment był zero.

Przez działanie dwojanu trzeba rozumieć działanie jego sił, każdej osobno, nie zaś ich działanie złożone które nie przedstawia żadnego określonego sensu.

Składanie dwojanów opiera się na dwóch następujących twierdzeniach.

25. Twierdzenie I. *Można przenieść dwojan równolegle, na jego płaszczyźnie albo na płaszczyźnie równoległej, i zmienić wielkość ramienia dźwigni; byle się tylko moment dwojanu nie zmienił, i nowe ramie było stale związane z dawnem, skutek działania dwojanu ten sam zostanie.*



Niech będzie dwojan (P, — P) mający moment P.AB; weźmy za nowe ramie dźwigni prostę A'B', równoległą do prostej AB, i, przypuszczając te dwie linie połączone niezmiennie, przyłóżmy do każdego z dwóch punktów A', B' dwie siły P', P'' równe i wprost przeciwne. Te siły, niszcząc się między sobą, nie naruszają w niczem działania dwojanu (P, — P). Ale teraz, jeśli siły równe P', P'' są równoległe do siły P, i jeśli wzięto siłę P' i prostę A'B' tak żeby momenta P.AB, P'.A'B' były równe, skutek działania dwojanu (P', — P'), mającego ramie dźwigni A'B', będzie taki sam jak dwojanu (P, — P).

Jakoż, trójkąty podobne AOB, A'OB' dają

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} = \frac{AB}{A'B'};$$

a z równania

$$P.AB = P'.A'B'$$

wynika

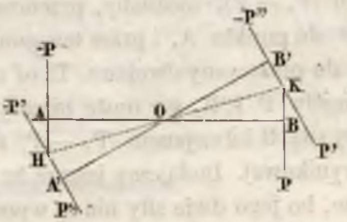
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{P'}{P}.$$

Więc mamy

$$\frac{P'}{P} = \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}.$$

Dwa ostatnie równania dowodzą że wynikowa dwóch sił równoległych P, P″, przyłożonych do punktów A, B′ jest równa summie P + P″ i przechodzi przez punkt O; tak samo wynikowa dwóch sił równoległych — P, — P″, przyłożonych do punktów B, A′, jest równa summie — P — P″, i przechodzi także przez punkt O. Owóż, te dwie wynikowe, równe i wprost przeciwne, niszczą się; zostaje więc tylko dwojan (P′, — P′), mający ramie dźwigni A′B′, którego działanie jest to samo co dwojanu (P, — P).

26. Twierdzenie II. *Można obrócić dwojan, na jego płaszczyźnie, około środka ramienia dźwigni, nie zmieniając w niczem skutku działania; byle tylko nowe ramie dźwigni było stale związane z dawnem.*

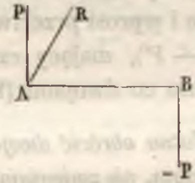


Na płaszczyźnie danego dwojanu (P, — P), przez środek O ramienia dźwigni AB, poprowadźmy prostę A′B′ równą prostej AB, i, przypuszczając te dwie linie połączone niezmiennie, przyłóżmy do każdego z punktów A′, B′, dwie siły P′, P″ wprost przeciwne, prostopadłe do A′B′ i równe sile P. Te siły, niszcząc się między sobą, nie wpływają na działanie dwojanu (P, — P). Ale teraz, dwie siły równe —P, P″, przyłożone do punktów A, A′, mogą być uważane jako przyłożone do punktu H ściśle związanego z danym układem;

wynikowa tych dwóch sił ma kierunek prostej HO która jest zarazem dwójsieczną kątów AHA' i AOA', z przyczyny równości trójkątów prostokątnych HOA, HOA'. Tak samo, wynikowa dwóch sił równych P',—P", które można uważać jako przyłożone w punkcie K, ma kierunek dwójsiecznej K'O kątów BKB' i BOB'. Owóż, te dwie wynikowe, oczywiście równe i wprost przeciwne, niszczą się; zostaje więc tylko dwojan (P', — P') mający ramie dźwigni A'B', a on jest właśnie dwojanem (P, — P) który się obrócił na swojej płaszczyznie około środka O ramienia dźwigni.

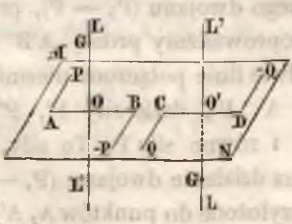
Na mocy tego co poprzedza, można przedstawiać dwojany przez ich momenta, to jest pisać P.AB zamiast (P, — P).

27. Nietrudno teraz dowieśdź że *Dwojan nie ma wynikowej*, albo innemi słowy, że *Jedna siła nie może trzymać w równowadze dwojanu.*



Jakoż, gdyby były równowaga między siłą R przyłożoną w punkcie A i dwojanem (P, — P), możnaby, przenosząc dwojan, przywieśdź jego siłę P do punktu A, i przez ten punkt poprowadzić oś stałą, prostopadłą do płaszczyzny dwojanu. Ta oś nie narusza równowagi; ale, niszcząc siły P i R, nie może niszczyć siły — P. Więc równowaga między siłą R i dwojanem (P, — P) nie istnieje; zatem dwojan nie ma wynikowej. Dodajemy jeszcze że dwojan nie może być w równowadze, bo jego dwie siły nie są wprost przeciwne (10).

28. Przyjmując pewną ugodę, łatwo określić to co się nazywa



stroną obrotu dwojanu P.AB. W tym celu, przez środek ramienia dźwigni AB, poprowadźmy do płaszczyzny MN dwojanu P.AB prostopadłę LL′ która się nazywa jego *osią;* poczem wyobraźmy sobie że widz, stojący na tej płaszczyznie wzdłuż osi LL′, patrzy na stronę w którą siły dwojanu mogłyby obrócić ramie dźwigni około jego środka O, gdyby ten punkt był ustalony. W dwojanie (P, — P) widz, oparty wzdłuż pół-osi OL, spostrzegałby dążność do ruchu ramienia dźwigni AB około środka O, od lewej ręki do prawej, tak właśnie jak się obracają wskazówki zegaru. Otóż, strona obrotu ramienia dźwigni dwojanu tak jako wskazówki zegaru nazywa się stroną obrotu tego dwojanu. W dwojanie (Q, — Q) widz, stojący na jego płaszczyznie i oparty wzdłóż pół-osi OL′, spostrzegałby obrot możebny dwojanu w stronę przeciwną wskazówek zegaru. Dla tej przyczyny kierunkiem osi w obydwóch dwojanach jest L′L.

To ustaliwszy, jeśli na pół-osi OL, około której dwojan (P, — P) obracałby się jako wskazówki zegaru, weźmiemy długość OG równą jego momentowi P.AB = Pp, prosta OG, wyrażająca zarazem moment dwojanu, kierunek jego płasczyzny i stronę obrotu, wyznacza go zupełnie. Tak określoną prostę OG, Poinsot, twórca dwojanów, nazywa *osią dwojanu;* a zaś Cauchy i Sturm mianują tę prostę OG *momentem linijnyn dwojanu.* Jedna i druga nazwa zostawia do życzenia.

Za pomocą momentu linijnego (albo osi dwojanu w znaczeniu wyżej określonem) dwojany przedstawiają się geometrycznie, tak jako siły, przez linię prostą daną z wielkości i kierunku; z tą jednak istotną różnicą że, w dwojanach ta linia może się przenosić w przestrzeni równolegle do siebie samej, gdy tymczasem w siłach może się tylko przenosić wzdłuż swojego kierunku.

Wynika ztąd ogólne twierdzenie.

Dwa dwojany mające te same momenta linijne są równowarte.

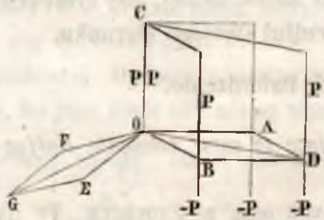
29. Dwojany mające osie równoległe. Te dwojany leżące na jednej płasczyznie, albo na dwóch płasczyznach równoległych, można zamienić na inne mające równe ramiona dźwigni, i sprowadzić na jedną płasczyznę tak, żeby miały spólną oś i spólne ramie dźwigni. W tem położeniu, siły nowych dwojanów, będące w linii prostej, składają się w jedną siłę równą ich summie algebrycznej. Jeśli

teraz, oznaczając przez Pp, $P'p'$, $P''p''$,... momenta danych dwojanów, weźmiemy p za spólne ramie dźwigni nowych dwojanów, wynikowa ich sił będzie równa summie $P + \frac{P'p'}{p} + \frac{P''p''}{p} + \ldots$, w której trzeba uważać za dodatne siły ciągnące w jedną stronę, a za odjemne te które ciągną w stronę przeciwną. Zatem moment dwojanu wynikowego równa się wieloczynowi

$$\left(P + \frac{P'p'}{p} + \frac{P''p''}{p} + \ldots\right)p = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots$$

Owóż, moment linijny dwojanu wynikowego będzie właśnie równy summie algebrycznej, która stanowi drugą stronę powyższego równania, jeśli damy momentom linijnym znak więcej albo mniej, według jak odpowiedające im dwojany mają obrót wskazówek zegaru albo obrót przeciwny. Więc *dwojany mające osie równoległe składają się tak jako siły w linii prostej, przez dodawanie; i moment linijny dwojanu wynikowego jest równy summie algebrycznej momentów linijnych składowych.*

30. Równoległobok dwojanów. *Moment linijny dwojanu wynikowego dwóch dwojanów, których płaszczyzny przecinają się, jest przedstawiony, co do wielkości i do kierunku, przez przekątnę równoległoboku wystawionego na momentach linijnych dwojanów składowych.*



Niech będą dwa dwojany na dwóch płaszczyznach CA, CB przecinających się wedle prostej OC. Przypuszczając że te dwojany, sprowadzone do sił równych P skierowanych wedle OC, mają momenta

P.OA, P.OB, dopełnijmy równoległoboku OADB, i do punktu D przyłóżmy dwie siły przeciwne, równe sile P i do niej równoległe; przez co nie naruszymy w niczem danych dwojanów. Ale teraz, dwa dwojany P.OA, P.DB, mające momenta linijne równe i znaków przeciwnych, niszczą się; zostaje więc tylko dwojan P.OD który jest wynikowym dwojanów uważanych.

To mając, przez punkt O poprowadźmy proste OE, OF odpowiednio prostopadłe do płasczyzn CA, CB, i równe ramionom dźwigni OA, OB; dopełnijmy równoległoboku OEGF. Cztery proste OA, OB, OE, OF są na płasczyznie prostopadłej do OC; zatem kąty EOF, AOB, mające ramiona odpowiednio prostopadłe, są równe. Ztąd wnosimy że równoległoboki OEGF, OADB, mające kąt równy zawarty między dwoma bokami równemi, każdy każdemu, są równe; więc przekątna OG = OD, i kąt GOE = DOA, a następnie kąt GOD = EOA; ale ostatni jest prosty, więc kąt GOD jest także prosty. To dowodzi że przekątna OG jest prostopadła do płasczyzny COD dwojanu wynikowego P.OD. Uważajmy teraz że momenta linijne trzech dwojanów P.OA, P.OB, P.OD są proporcyonalne do trzech prostych OE, OF, OG. Owóż, jeśli weźmiemy siłę P za jedność sił, te trzy proste będą odpowiednio momentami linijnemi dwojanów składowych i wynikowego; więc *moment linijny dwojanu wynikowego jest przekątną równoległoboku wystawionego na momentach linijnych dwojanów składowych.*

31. Uwaga. Powyższe dowodzenie nastręcza sposób rozkładania dwojanu (P, —P) na dwa inne, mające tę samą siłę P i leżące na dwóch płasczyznach jakichkolwiek; byle tylko płasczyzny trzech dwojanów przecinały się wedle tej samej linii prostej. Jakoż, niech będzie dwojan P.OD na płasczyznie CD, i dwie płasczyzny CA, CB które przecinają płasczyznę CD wedle prostej OC (ost. fig.). Przez punkt O poprowadźmy, do prostej OC, płasczyznę prostopadłą, która przetnie trzy płasczyzny CA, CB, CD wedle prostych OA, OB, OD; poczem, na przekątnej OD wystawmy równoległobok OADB. To uczyniwszy, jeśli przyłożymy do punktu B dwie siły przeciwne, równe sile P i do niej równoległe, nie naruszymy w niczem dwojanu P.OD. Ale teraz mamy dwa dwojany P.OB i P.BD; pierwszy jest na płasczyznie CB, a drugi, równoległy do płasczyzny CA, może się przenieść na tę płasczyznę,

na której prosta OA będzie jego ramieniem dźwigni. Więc dwojan P.OD jest to samo co dwa dwojany P.OA i P.OB, leżące na dwóch płaszczyznach danych i mające siłę P.

32. Wielokąt dwojanów. Za pomocą równoległoboku dwojanów składa się dwojany jako siły, i znajduje się dwojan wynikowy budując wielokąt dwojanów z ich momentów linijnych; prosta zamykająca ten wielokąt jest momentem linijnym dwojanu wynikowego. Ztąd wnosimy że, jeśli wielokąt dwojanów sam się zamyka, te dwojany są w równowadze; i nawzajem, jeśli dwojany są w równowadze, to ich wielokąt sam się zamykać powinien.

Równoległościan dwojanów. Uważajmy w szczególności przypadek trzech dwojanów, których momenta linijne L, M, N, przedstawione przez proste OA, OB, OC, (*fig. stronicy* 17), przechodzą przez punkt O. Widzimy łatwo że, jako w równoległościanie sił, prosta OG zamykająca wielokąt OADG wyraża moment linijny dwojanu wynikowego, który nazwiemy G, i jest przekątną równoległościanu wystawionego na trzech prostych OA, OB, OC. Nawzajem, można zawsze rozłożyć dwojan, którego momentem linijnym jest OG, na trzy inne, mające osie skierowane wedle trzech prostych OX, OY, OZ jakichkolwiek, byle tylko tworzyły trójścian obejmujący w sobie prostę OG.

Gdy momenta linijne składowe L, M, N są prostopadłe między sobą, nazywając λ, μ, ν kąty które moment linijny wynikowy G czyni ze swojemi składowemi, będzie

$$
13.\quad \begin{cases} L = G\,\mathrm{dos}\lambda, \quad M = G\,\mathrm{dos}\mu, \quad N = G\,\mathrm{dos}\nu, \\ G^2 = L^2 + M^2 + N^2 \end{cases}
$$

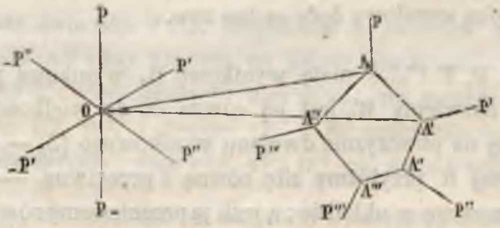
Ztąd

$$
\mathrm{dos}\lambda = \frac{L}{G}, \qquad \mathrm{dos}\mu = \frac{M}{G}, \qquad \mathrm{dos}\nu = \frac{N}{G}.
$$

Trzeba uważać że siedem ilości L, M, N, G, λ, μ, ν są związane czterema równaniami, i nadto równaniem warunkowem $\mathrm{dos}^2\lambda + \mathrm{dos}^2\mu + \mathrm{dos}^2\nu = 1$; wiec, mając dane trzy z tych ilości, byle między niemi znajdował się przynajmniej jeden dwojan, można wyznaczyć wszystkie inne.

SKŁADANIE SIŁ W PRZESTRZENI.

33. Niech będą siły P, P′, P″... przyłożone do układu punktów A, A′, A″,... niezmiennie między sobą powiązanych, czyli



jako się zwykle mówi, przyłożone do *układu bryłowego.* Weźmy jakikolwiek punkt O przestrzeni, i, przypuszczając że jest niezmiennie połączony z układem A, A′, A″,.., przyłóżmy do niego po dwie siły przeciwne, odpowiednio równe siłom P, P′, P″,... i do nich równoległe; te siły niszcząc się nie naruszą w niczem danego układu. Owóż, siła P przyłożona do punktu A, i siła — P przyłożona do punktu O, stanowią dwojan (P, — P); zostaje więc siła P przyłożona do punktu O, to jest właśnie siła P przeniesiona równolegle do siebie samej z punktu A do O. Zkąd wnosimy że *można przenieść siłę równolegle do niej samej, do jakiegokolwiek punktu przestrzeni niezmiennie związanego z punktem przyłożenia; byle tylko zważano na dwojan powstający z tego przeniesienia.* Tym sposobem przenosi się wszystkie inne siły P′, P″, P‴,... do punktu O. Tak przeniesione siły, będąc przyłożone do jednego punktu O, składają się wszystkie w jedną wynikowę R, i wszystkie dwojany przeniesienia składają się w jeden dwojan wynikowy (S, — S).

Jeśli będziemy brali coraz inny punkt przeniesienia, wynikowa R będzie się tylko przenosiła równolegle do siebie samej, zachowując tę samą wielkość i kierunek; ale dwojan wynikowy (S, — S) będzie się zmieniał ciągle. Siła R, niezależna od punktu do którego przeniesiono wszystkie siły układu, nazywa się *wynikową przeniesienia.*

Ztąd wynika że, jeśli dany układ sił jest w równowadze, te siły przeniesione równolegle do siebie samych, do jakiegokolwiek punktu przestrzeni ściśle z układem związanego, muszą sobie czynić równowagę ; i dwojany pochodzące z tego przeniesienia muszą także same między sobą czynić równowagę, albowiem siła pojedyncza nie może trzymać w równowadze dwojanu (27).

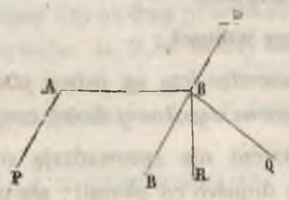
Więc równowaga układu sił jakichkolwiek wymaga dwóch warunków statycznych, to jest : *trzeba i dość jest żeby wynikowa przeniesienia i dwojan wynikowy były osobno zero.*

Jeśli siły P, P′ P″.... mają wynikowę R, wynikowa przeniesienia, którą nazwiemy R′, jest jej równa co do wielkości i do kierunku, i leży na płasczyznie dwojanu wynikowego (S, — S). Jakoż, do wynikowej R przyłóżmy siłę równą i przeciwną — R, ta siła uczyni równowagę w układzie ; a jeśli ją przeniesiemy równolegle do niej samej do punktu O, do którego cały układ został przeniesiony, to przeniesienie da dwojan (R, — R). Teraz, ponieważ siły P, P′, P″,..., — R są w równowadze, siła — R musi niszczyć w punkcie O wynikowę przeniesienia R′, a zaś dwojan (R, — R) niszczyć dwojan wynikowy (S, — S) tego przeniesienia. Co wymaga żeby siły — R i R′ były równe i wprost przeciwne, i żeby momenta linijne dwojanów (R, — R), (S, — S) były także równe i wprost przeciwne ; więc te dwojany znajdują się oba na jednej płasczyznie przechodzącej przez punkt O. Ztąd łatwo wnosimy że wynikowa przeniesienia R′ nie jest niczem innem tylko wynikową R, przeniesioną równolegle do siebie samej do punktu O, i leży na płasczyznie dwojanu wynikowego (S, — S) przeniesienia.

Nawzajem, jeśli wynikowa przeniesienia R jest na płasczyznie dwojanu wynikowego (S, — S), dany układ sił ma wynikowę równą sile R. Albowiem, na płasczyznie dwojanu (S, — S) można przenieść siłę R równolegle do niej samej tak, żeby wynikający dwojan (R, — R) zniszczył dwojan (S, — S). Zostanie więc tym sposobem sama siła R która będzie wynikową danego układu.

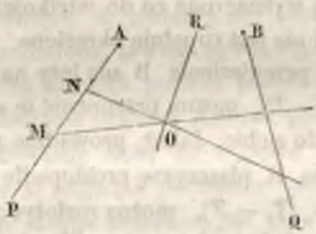
Z wszystkiego co poprzedza wnieść należy że układ sił P, P′, P″... nie ma wynikowej, jeśli wynikowa R przeniesienia i dwojan wynikowy (S, — S) nie są na jednej płasczyznie.

34. *Dwie siły* P, Q *nie leżące na jednej płasczyznie nie mają wynikowej.*



Niech będą dwie siły P i Q, przyłożone do punktów A i B, których kierunki AP i BQ nie leżą na jednej płasczyznie. Jeśli przeniesiemy siłę P, równolegle do niej samej, do punktu B, wynikowa R sił BP, BQ, i dwojan (P, — P) przeniesienia nie będą na jednej płasczyznie; więc siły AP i BQ nie mają wynikowej.

35. Można, nie opierając się na teoryi dwojanów, łatwo dowieśdź że dwie siły nie leżące na jednej płasczyznie nie mają wynikowej.



Albowiem, przypuszczając że takie dwie siły P, Q mają wynikowę, przyłóżmy siłę R równą i wprost przeciwną tej wynikowej, otrzymamy układ trzech sił P, Q, R w równowadze. Owoż, nie zepsujemy równowagi, jeśli przymocujemy niezmiennie dwa punkta M, O, wzięte na kierunkach sił P, R. Ale te punkta niszczą działanie sił P, R, nie naruszając w niczem siły Q; więc, ponieważ równowaga istnieje, siła Q musi spotykać linię MO. Bo inaczej dany układ, pod działaniem zostającej siły Q, mógłby się obracać około linii MO jako osi. Uważajmy teraz że punkta M i O są dowolne; jeśli więc przymocujemy stale punkt N kierunku siły P, i poprowadzimy prostę NO, rozumując jako wyżej, zobaczymy że, dla utrzymania równowagi w układzie, siła Q powinna spotykać oś NO. Zatem siła Q, mając spotykać zarazem obie osie MO i NO, musi leżeć na płaszczyznie MON na której się znajduje siła P. Więc dwie siły P, Q nie mogą mieć wynikowej jeśli nie są na jednej płaszczyznie.

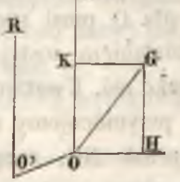
Ztąd wynika ważny wniosek:

Trzy siły w równowadze leżą na jednej płaszczyznie i każda iest równa i wprost przeciwna wynikowej dwóch innych.

36. Siły w przestrzeni nie sprowadzają się zawsze do jedynej wynikowej, jakośmy dopiero co okazali; ale mogą się zawsze przywieśdź do jednej siły i dwojanu, albo, co wychodzi na jedno, do dwóch sił z których jedna przechodzi przez punkt dany O. Jakoż, przypuszczając że punkt O jest stale związany z układem punktów materyalnych na który działają siły, nazwijmy R wynikowę przeniesienia tych sił do punktu O, i (T, — T) dwojan wynikowy; widzimy zaraz że siły R i T, przyłożone do punktu O, składają się w jedną siłę S. Więc wszystkie siły przywodzą się do dwóch sił S i T, z których pierwsza przechodzi przez punkt dany O. Ale te dwie siły nie są wyznaczone co do wielkości i do kierunku, i ich działanie na układ nie jest zupełnie określone.

Jeśli wynikowa przeniesienia R nie leży na płasczyznie dwojanu wynikowego (T, — T), można przemienić tę siłę i dwojan na dwie siły prostopadłe do siebie. Jakoż, prowadząc przez kierunek wynikowej przeniesienia R płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny dwojanu wynikowego (T, — T), można rozłożyć siłę R na dwie składowe prostokątne, jedną S prostopadłą do płaszczyzny dwojanu, a drugą V do niej równoległą. Ta ostatnia, przyzwoicie przeniesiona, daje dwojan który niszczy dwojan wynikowy (T, — T); zostają więc dwie siły S i T prostokątne między sobą.

37. Są punkta przestrzeni w których wynikowa przeniesienia jest



prostopadła do płasczyzny dwojanu wynikowego. Ten przypadek na szczególną zasługuje uwagę. Niech będzie OR wynikowa przeniesienia do punktu O, i OG moment linijny dwojanu wynikowego. Rozłóżmy moment linijny OG na dwa prostokątne OH, i OK, ostatni w kierunku OR. Nazywając G, H, K te trzy momenta, mamy

$$H = G \operatorname{wst}(G, R), \qquad K = G \operatorname{dos}(G, R).$$

Owoż, jeśli weźmiemy, na prostopadłej OO′ do płasczyzny GOR, punkt O′ taki żeby było $R \,.\, OO' = H$, i do niego przeniesiemy równolegle wynikowę R, utworzymy dwojan $R \,.\, OO'$ równy i przeciwny dwojanowi H, jako widać na figurze. Te dwa dwojany niszczą się; zostaje więc dwojan K i wynikowa R prostopadła do jego płasczyzny w punkcie O′. Dwojan K jest *minimum* między temi które się otrzymuje sprowadzając dany układ sił do jednej siły i dwojanu.

Gdyby przeniesiono wynikowę R z punktu O′ do innego punktu jej kierunku O′R, dwojan K zostałby ten sam. Ale, jeśli wynikowa R będzie przeniesiona, zawsze równolegle do siebie samej, z punktu O′ do jakiegokolwiek punktu przestrzeni leżącego poza linią O′R, to przeniesienie utworzy dwojan prostopadły do dwojanu K, i te dwa dwojany złożą się w jeden wynikowy większy od K. Ztąd wynika że *miejscem punktów w przestrzeni, do których przeniesione siły dają dwojan minimum, jest linia prosta* OR, *przedstawiająca zarazem kierunek wynikowej przeniesienia i osi dwojanu wynikowego*.

Ta prosta O′R nazywa się *osią główną* albo osią środkową dwojanów. Damy później jej równanie.

Gdy układ sił ma wynikowę, dwojan wynikowy minimum jest zero, a osią główną jest linia prosta wyrażająca kierunek wynikowej. Ta oś znika w równowadze. Gdy zaś układ sił przywodzi się do dwojanu, wielkość tego dwojanu i kierunek jego osi są stateczne, niezależne od punktu przeniesienia.

ROZDZIAŁ II.

RÓWNANIA RÓWNOWAGI.

RÓWNOWAGA SIŁ PRZYŁOŻONYCH DO PUNKTU WOLNEGO W PRZESTRZENI.

38. Niech będą siły $P, P', P'', \ldots$ przyłożone do punktu materyalnego A; rozłóżmy je, za pomocą równoległościanu sił, na składowe równoległe do trzech osi spółrzędnych jakichkolwiek. Składowemi siły P będą X, Y, Z, które trzeba uważać jako dodatne albo odjemne, według tego jak działają w stronę pół-osi dodatnych albo odjemnych; podobnie, składowemi siły P' będą X', Y', Z'; etc. Jeśli teraz zrobimy summę algebryczną składowych znajdujących się na jednej osi, otrzymamy wielkość i znak ich wynikowej. Tym sposobem wszystkie dane siły przywodzą się do trzech sił działających wedle osi spółrzędnych, i ich wartości są wyrażone przez

$$\Sigma X, \quad \Sigma Y, \quad \Sigma Z.$$

Owoż, gdyby te trzy siły, przyłożone do jednego punktu, nie były zero każda osobno, toby się złożyły w jedną któraby nie była zero, i równowaga nie istniałaby; więc warunki konieczne i dostateczne równowagi są

$$(1) \qquad \begin{aligned} X + X' + X'' + \ldots &= 0, \\ Y + Y' + Y'' + \ldots &= 0, \\ Z + Z' + Z'' + \ldots &= 0, \end{aligned}$$

albo krócej

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0.$$

39. Jeśli spółrzędne są prostokątne, nazywając α, β, γ; α'..... kąty jakie siły P, P', P''..... tworzą z trzema pół-osiami dodatnemi, trzy równania równowagi będą

$$(2)\quad \begin{cases} P \cos\alpha + P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + \ldots = 0 \\ P \cos\beta + P' \cos\beta' + P'' \cos\beta'' + \ldots = 0 \\ P \cos\gamma + P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' + \ldots = 0 \end{cases}$$

albo krócej

$$\Sigma P \cos\alpha = 0, \quad \Sigma P \cos\beta = 0. \quad \Sigma P \cos\gamma = 0.$$

40. W równaniach (1), składowe $X, Y, Z, X', \ldots$ są rzutami pochyłemi sił $P, P', P'', \ldots$ na trzech osiach pochyłokątnych, a zaś w równaniach (2) składowe $P \cos\alpha$, $P \cos\beta$, $P \cos\gamma$, $P' \cos\alpha'$,..... są rzutami (prostopadłemi) tychże sił na trzech osiach prostokątnych. Jedne i drugie równania wyrażają następujące twierdzenie geometryi :

Rzut obwodu wielokąta zamkniętego, płaskiego albo spaczonego, na jakiejkolwiek osi jest zero.

Nawzajem, *jeśli rzut obwodu wielokąta jest zero na trzech osiach stanowiących trójścian, wielokąt jest zamknięty.* Albowiem, jeśliby ten wielokąt nie był zamknięty, rzut jego obwodu mógłby tylko być zero na osiach odpowiadających płaszczyznom rzutującym które są równoległe do prostej zamykającej wielokąt. Owoż, ta prosta nie może być równoległa zarazem do trzech płaszczyzn spółrzędnych; więc wielokąt musi być zamknięty.

To twierdzenie tłumaczy dlaczego trzeba trzech równań dla równowagi punktu wolnego, i dlaczego te równania są dostateczne. Z tej przyczyny równania (1) i (2), chociaż są różnego kształtu, stanowią dwa układy równowarte; każdy z tych układów jest konieczny i dostateczny dla równowagi.

41. Równowaga punktu zostającego na powierzchni. Jeśli siła działająca na punkt materyalny A, zmuszony znajdować się na

danej powierzchni, jest normalną do tej powierzchni, punkt zostanie w spoczynku; bo jego ruch, gdyby był możebny, mógłby się zacząć tylko w kierunku stycznej do powierzchni. Owoż, w punkcie A powierzchni, wszystkie styczne są prostopadłe do normalnej, i temsamem wszystkie kierunki ruchu są jednakowe względnie do siły; niema tedy żadnej przyczyny, żeby ruch punktu zaczynał się raczej w jednym kierunku niż w drugim; więc się nie zacznie w żadnym. Ale, jeśli punkt materyalny A, leżący na danej powierzchni, której opuścić nie może, podlega sile pochyłej do powierzchni, to nie zostanie w spoczynku. Bo można rozłożyć tę siłę na dwie inne siły, z których jedna ma kierunek normalny do powierzchni, a druga jest na płaszczyznie stycznej; pierwsza prze punkt A ku powierzchni i jest zniszczona przez jej opór, druga mająca cały skutek posunie ten punkt na powierzchni, jeśli niema obcej przeszkody.

Ztąd wynika że powierzchnia materyalna swoim oporem niszczy tylko te siły które są do niej normalne, ale nie niszczy innych. Więc ogólnie, żeby punkt materyalny, na który działają siły P, P′, P″,..., mógł się utrzymać w równowadze na powierzchni na której musi zostawać, trzeba i dość jest żeby wynikowa R tych wszystkich sił była normalną do powierzchni.

Wyraźmy te warunki analitycznie. Niech będą X, Y, Z składowe wynikowej R sił P, P′, P″,..., i $f(x, y, z) = 0$ równanie powierzchni. Dostawy kątów, jakie wynikowa czyni z trzema składowemi, są proporcyonalne do X, Y, Z; a zaś dostawy kątów, jakie normalna do powierzchni w punkcie (x, y, z) czyni z trzema osiami prostokątnemi, są proporcyonalne do $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$. Więc, ponieważ wynikowa powinna mieć kierunek normalnej, trzeba i dość jest żeby było

$$(3) \qquad \frac{X}{\frac{df}{dx}} = \frac{Y}{\frac{df}{dy}} = \frac{Z}{\frac{df}{dz}}.$$

Wyraża się te dwa jedyne warunki równowagi punktu na powierzchni, mówiąc że summy sił szacowanych względem trzech osi muszą być proporcyonalne do pochodnych równania powierzchni, odniesionych do punktu przyłożenia.

Jeśli, dając kierunek i natężenie sił P, P′, P″,... nie oznaczono położenia punktu materyalnego A na powierzchni, spółrzędne x, y, z tego punktu w równowadze wyznaczą się za pomocą dwóch równań powyższych i równania powierzchni $f(x, y, z) = 0$.

Z tem wszystkiem może być jeszcze do dopełnienia inny warunek równowagi. W samej rzeczy, gdyby powierzchnia stawiła opór w jedną tylko stronę, wtedy wynikowa sił danych powinna działać w stronę przeciwną; bo inaczej nie byłaby zniszczona. I tak, gdyby punkt materyalny A był tylko położony na powierzchni, której przeniknąć nie może ale z której może być zdjęty, w tym przypadku nie dość jest dla równowagi żeby wynikowa sił była normalną do powierzchni, trzeba jeszcze żeby parła punkt w stronę przeciwną oporu tej powierzchni.

42. Punkt materyalny A, pod działaniem sił P, P′, P″,... zostający w równowadze na danej powierzchni, wywiera na nią parcie zniszczone przez jej opór. Ten opór powierzchni, równy i przeciwny parciu jakie ona wytrzymuje, jest pewną siłą normalną której natężenie oznaczymy przez N. Jeśli więc zastąpimy powierzchnię przez siłę N, będziemy mogli uważać punkt materyalny A, zostający na powierzchni, jako całkiem wolny w przestrzeni, pod działaniem sił P, P′, P″, i N. Tym sposobem rzecz się przywodzi do wyrażenia równowagi tych wszystkich sił. Wprawdzie wielkość siły N jest nieznana a priori, wiadomo tylko że działa wedle normalnej, w jedną albo w drugą jej stronę; ale, jako zaraz zobaczymy, siła N łatwo się wyruguje. Aby znaleźć równania szukanej równowagi, nazwijmy λ, μ, ν kąty jakie jeden z dwóch kierunków normalnej tworzy z trzema osiami prostokątnemi; z równania powierzchni $f(x, y, z) = 0$ otrzymamy

$$\operatorname{cos}\lambda = \pm \frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}}.$$

Trzeba zostawić podwójny znak $\pm$, bo siła N może działać w jedną albo w drugą stronę normalnej. A jeśli dla skrócenia uczynimy

$$V = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

składowe siły N będą

$$N \cos\lambda = NV \frac{df}{dx}, \qquad N \cos\mu = NV \frac{df}{dy}, \qquad N \cos\nu = NV \frac{df}{dz}.$$

Więc, nazywając X, Y, Z składowe wynikowej R sił P, P', P''... będziemy mieli trzy równania równowagi

$$X + NV \frac{df}{dx} = 0 \qquad Y + NV \frac{df}{dy} = 0, \qquad Z + NV \frac{df}{dz} = 0$$

które wyrażają że wynikowa sił danych jest normalną do wiadomej powierzchni.

Rugując teraz N, albo, co to samo, NV, otrzymujemy równania

$$\frac{X}{\frac{df}{dx}} = \frac{Y}{\frac{df}{dy}} = \frac{Z}{\frac{df}{dz}}$$

To są właśnie dwa już wiadome warunki równowagi punktu materyalnego na powierzchni.

Jeśli tym równaniom staje się zadość, istnieje równowaga, można wyznaczyć opór N. Jakoż, mamy

$$N = \frac{-X}{V\frac{df}{dx}} = \frac{-Y}{V\frac{df}{dy}} = \frac{-Z}{V\frac{df}{dz}} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Co pokazuje że V ma znak przeciwny ilorazom $\frac{X}{\frac{df}{dx}}$, $\frac{Y}{\frac{df}{dy}}$, $\frac{Z}{\frac{df}{dz}}$, a opór N powierzchni jest siłą równą i przeciwną wynikowej R sił danych.

Aby dać przykład równowagi punktu materyalnego na powierzchni, uważajmy dwa punkta $A(x_0, y_0, z_0)$ i $B(x, y, z)$ złączone linią prostą niezmienną $AB = r$; i przypuśćmy że punkt A zostaje niezmienny a punkt B ruchomy; ten ostatni będzie się mógł poruszać tylko na powierzchni sferycznej, mającej równanie

$$f(x, y, z,) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0.$$

Ztąd

$$\frac{df}{dx} = 2(x - x_0), \qquad \frac{df}{dy} = 2(y - y_0), \qquad \frac{df}{dz} = 2(z - z_0).$$

Więc, oznaczając jako zwykle, przez X, Y, Z summy algebryczne rzutów, na trzech osiach spółrzędnych, sił $P, P', P'', \ldots$ które działają na punkt ruchomy B, mamy dla równowagi tego punktu dwa równania

$$\frac{X}{x - x_0} = \frac{Y}{y - y_0} = \frac{Z}{z - z_0}.$$

Te równania dowodzą że wynikowa sił danych $P, P', P'', \ldots$, działająca wedle promienia sfery w jedną albo w drugą stronę, jest prostopadła do tej sfery. Zresztą, biorąc odwrotności otrzymujemy równania

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}$$

które wyrażają linię prostą przechodzącą przez punkt $A(x_0, y_0, z_0)$, i wedle której działa siła mająca składowe X, Y, Z.

Więc, żeby linia prosta, której jedna skrajność jest stała a druga podległa siłom $P, P', P'', \ldots$ utrzymała się w równowadze, trzeba i dość jest żeby wynikowa R wszystkich sił działała wedle tej prostej, w jedną albo w drugą stronę.

Ale, jeśli punkta A i B są połączone nicią nierozciągalną, wtedy dla równowagi trzeba zawsze żeby wynikowa R miała kierunek prostej AB, i nadto jeszcze żeby działała w stronę AB, od punktu stałego A do ruchomego B. Opór prostej niezmiennej AB, jako także tężność nici AB, jest siłą równą i przeciwną wynikowej R; co oczywiste.

Przypuszczając że wielkość i kierunek sił P, P′, P″... są dane, łatwo wyznaczyć położenie prostej AB w równowadze. Jakoż, równania powierzchni i równowagi dają

$$\frac{X}{x - x_0} = \frac{Y}{y - y_0} = \frac{Z}{z - z_0} = \frac{R}{r};$$

a zatem

$$x = x_0 + \frac{Xr}{R}, \quad y = y_0 + \frac{Yr}{R}, \quad z = z_0 + \frac{Zr}{R}.$$

43. Równowaga punktu na linii krzywej. Gdy punkt materyalny A, pod działaniem sił P, P′, P″,..., musi zostawać na danej krzywej, rozumując jako w równowadze punktu na powierzchni, widzimy łatwo że, w obecnym przypadku, dla równowagi trzeba i dość jest żeby wynikowa wszystkich sił przyłożonych była normalną do krzywej, to jest znajdowała się na płaszczyznie normalnej w punkcie A. Owoż, dostawy kątów, jakie wynikowa R sił P, P′, P″..... czyni z pół-osiami dodatnemi, są $\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}$; a zaś dostawy kątów, jakie styczna do danej krzywej w punkcie A czyni z temi osiami, są $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; oznaczając przez ds i x, y, z różniczkę łuku krzywej i spółrzędne odpowiedające punktowi A. *Ponieważ w punkcie A normalna jest prostopadła do stycznej*, dostawa ich kąta jest zero; zatem

$$\frac{X}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R}\frac{dz}{ds} = 0.$$

Więc równanie równowagi punktu materyalnego A na danej krzywej jest

$$(4) \qquad Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Linia krzywa, jako przecięcie dwóch powierzchni, przedstawia się przez dwa równania

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0;$$

zatem, biorąc x za zmienną niezależną, otrzymamy prostsze równania równowagi punktu A,

$$X + Y\frac{dy}{dx} + Z\frac{dz}{dx} = 0.$$

Jeśli położenie punktu A nie jest dane na linii krzywej, wtedy mamy do jego wyznaczenia powyższe równanie równowagi z dwoma równaniami tej krzywej.

44. Gdy punkt A jest naprzód dany na linii krzywej, uprości się równanie równowagi biorąc styczną za oś $x^{ów}$ naprzykład; albowiem że wtedy $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dx} = 0$, co przywodzi równanie równowagi do

$$X = 0.$$

Ten wynik łatwo się tłumaczy. Rozkładając każdą z sił P, P′, P″,... na dwie, z którychby jedna była skierowana wedle stycznej a druga znajdowała się na płaszczyznie normalnej do danej krzywej, widzimy zaraz że wynikowa ostatnich sił jest normalną do krzywej; więc jedynym warunkiem równowagi jest równanie $X = 0$.

45. Można otrzymać równanie równowagi (4) innym sposobem który znać nie zaszkodzi. Oznaczmy, jako zwykle, przez N opór danej krzywej, albo jeszcze tężność wiązadła które zmusza punkt materyalny do zostawania na niej; przez λ, μ, ν kąty jakie kierunek oporu czyni z trzema osiami prostokątnemi; przez X, Y, Z summy algebryczne rzutów sił P, P′, P″,... na tych osiach. Jeśli zastąpimy

daną krzywę przez siłę N, punkt A będzie wolny; zatem trzy równania równowagi wyrażą się przez

$$X + N \operatorname{dos}\lambda = 0,$$
$$Y + N \operatorname{dos}\lambda = 0,$$
$$Z + N \operatorname{dos}\lambda = 0.$$

Aby wyrugować N, pomnóżmy te równania odpowiednio przez dx, dy, dz, i dodajmy stronami; znajdziemy

$$Xdx + Ydy + Zdz + N(dx \operatorname{dos}\lambda + dy \operatorname{dos}\mu + dz \operatorname{dos}\nu) = 0$$

Ale ilość $\frac{dx}{ds}\operatorname{dos}\lambda + \frac{dy}{ds}\operatorname{dos}\mu + \frac{dz}{ds}\operatorname{dos}\nu$, wyrażająca dostawę kąta normalnej ze styczną w punkcie A krzywej, jest zero; więc równanie przywodzi się do

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0;$$

co właśnie stanowi wiadomy już warunek równowagi. Trzy poprzednie równania wyznaczają wielkość i znak składowych $N \operatorname{dos}\lambda$, $N \operatorname{dos}\mu$, $N \operatorname{dos}\nu$, które są równe i znaków przeciwnych składowym X, Y, Z. To dowodzi że opór danej krzywej, albo tężność wiązadła, jest siłą równą i przeciwną wynikowej sił działających na punkt materyalny A; co oczywiście być powinno.

Na zastosowanie, uważajmy punkt materyalny który musi zostawać na okręgu koła mającego równania

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0, \qquad z - z_0 = 0.$$

Te równania dają

$$(x - x_0)dx + (y - y_0)dy = 0, \qquad dz = 0,$$

albo

$$\frac{dx}{y - y_0} = -\frac{dy}{x - x_0} = \frac{dz}{0};$$

zatem równanie (4) staje się

$$X(y - y_0) - Y(x - x_0) = 0$$

albo

$$\frac{X}{x - x_0} = \frac{Y}{y - y_0}$$

Ostatnie równanie, do którego składowa Z nie wchodzi, pokazuje że wynikowa sił P, P′, P″,... jest na płasczyznie normalnej do okręgu koła w punkcie A.

Gdy siły P, P′, P″,... są dane z wielkości i kierunku, wtedy spółrzędne położenia punktu A w równowądze, wyznaczone za pomocą powyższych równań, są

$$x = x^0 + \frac{Xr}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad y = y^0 + \frac{Yr}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad z = z_0.$$

Jeśli wynikowa sił P, P′, P″... jest prostopadła do płasczyzny okręgu na którym punkt materyalny A musi zostawać, będzie

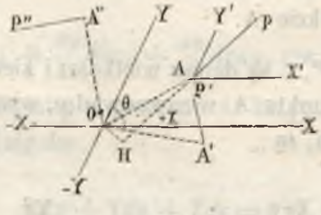
$$X = 0, \quad Y = 0, \quad \text{i} \quad x = x_0 + \frac{0}{0}, \quad y = y_0 + \frac{0}{0}, \quad z = z_0.$$

W tym przypadku położenie punktu A w równowadze jest istotnie niewyznaczone. Jednakże, gdyby punkt A był tylko położony na okręgu, wtedy trzebaby koniecznie żeby wynikowa sił parła ten punkt do okręgu.

RÓWNOWAGA UKŁADU BRYŁOWEGO WOLNEGO W PRZESTRZENI.

Możnaby odrazu dać równania ogólne równowagi sił przyłożonych do punktów materyalnych, niezmiennie z sobą połączonych, które stanowią tak zwany układ bryłowy wolny w przestrzeni; i dopiero, z tego ogólnego przypadku, przejść do szczególnych, w których siły leżą na jednej płasczyznie, albo są równoległe między sobą w przestrzeni. Taki sposób wykładu byłby niezaprzeczalnie logiczny, ale nie byłby dość prosty. Wolimy więc zacząć od przypadków szczególnych, i, stopniując trudności, wznieść się do przypadku ogólnego. Czynimy to jeszcze nie tylko dlatego że łatwiej przechodzić od rzeczy prostych do składawnych, niż nawzajem; ale także z przyczyny że, tak postępując, znajdujemy łatwo ogólne twierdzenia momentów sił, które ważna teorya dwojanów uwydatnia.

45 Równowaga sił na płasczyznie. Niech będą siły P, P′ P″,.....



leżące na jednej płasczyznie, przyłożone do punktów A, A′, A″..... układu bryłowego niezmiennego. Weźmy na płasczyznie tych sił, punkt O za początek spółrzędnych; poprowadźmy dwie osie spółrzędne OX, OY, i oznaczmy przez X i Y, X′ i Y′, X″ i Y″,... składowe sił P, P′, P″,... przez x i y, x' i y', x'' i y'',... spółrzędne punktów przyłożenia A, A′, A″,..., odniesione do tych osi. Owoż, jeśli do punktu O, stale połączonego z układem, przeniesiemy wszystkie siły równolegle do nich samych, wiemy zaraz że dla równowagi trzeba i dość jest żeby wynikowa przeniesienia była zero, i dwojan wynikowy był także zero. Dopełnia się pierwszego warunku, wyrażając że składowe sił, odniesione do osi spółrzędnych, dają na każdej summę algebryczną zero; aby zaś dopełnić drugiego warunku, ponieważ wszystkie dwojany, pochodzące z przeniesienia sił zadanych, są na jednej płasczyznie, dość wyrazić że summa algebryczna ich momentów jest zero.

Więc równania równowagi sił leżących na jednej płasczyznie są

$$X + X' + X'' + \ldots = 0 \qquad Y + Y' + Y'' + \ldots = 0$$

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0,$$

albo prościej

$$(5)\qquad \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Pp = 0.$$

46. Moment siły względem punktu (*). Nazywa się *momentem siły względem punktu*, wieloczyn tej siły przez jej odległość od tego punktu. I tak, jeśli z punktu O spuścimy prostopadłę OH na kierunek AP siły P, wieloczyn P.OH albo Pp będzie momentem siły P względem punktu O. Ten punkt O nazywa się *środkiem momentów*.

Teraz powyższe trzy równania równowagi mogą się tak wysłowić:

Aby siły leżące na jednej płasczyznie, i przyłożone do układu punktów niezmiennie powiązanych między sobą ale wolnych w przestrzeni, były w równowadze, trzeba i dość jest żeby składowe sił, równoległe do dwóch osi spółrzędnych na ich płasczyznie, czyniły summę zero na każdej z tych osi, i żeby summa momentów sił względem jakiegokolwiek punktu płasczyzny było także zero.

47. Gdy summy ΣX i ΣY nie są obie zero, wtedy, jakakolwiek jest summa ΣPp, dany układ sił ma wynikowę. Albowiem, jeśli $\Sigma Pp = 0$, ta wynikowa istnieje oczywiście; a jeśli ΣPp nie jest zero, wynikowa przeniesienia i dwojan wynikowy, znajdujące się na jednej płasczyznie, przywodzą się do jednej siły która jest wynikową układu.

Nazwijmy R tę wynikowę, X_1, Y_1 jej składowe, i Rr moment wynikowej względem początku O spółrzędnych. Jeśli do wynikowej R przyłożymy siłę — R równą i wprost przeciwną, uczynimy równowagę w układzie; więc będzie

$$\Sigma X - X_1 = 0, \quad \Sigma Y - Y_1 = 0, \quad \Sigma Pp - Rr = 0.$$

Ztąd

$$(6)\qquad X_1 = \Sigma X, \quad Y_1 = \Sigma Y,$$

$$(7)\qquad Rr = \Sigma Pp.$$

(*) Zobacz notę na końcu tomu.

Dwa pierwsze równania dają wartość składowych wynikowej R. Znając te wartości i kąt osi spółrzędnych, mamy wielkość wynikowej

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + 2\Sigma X . \Sigma Y \operatorname{dos}\theta} .$$

Równanie (7) wyraża ogólne twierdzenie momentów sił względem punktu leżącego na ich płasczyznie, które się tak wysłowia:

Gdy siły, leżące na jednej płasczyznie mają wynikowę, moment tej wynikowej względem jakiegokolwiek punktu płasczyzny jest równy summie momentów sił składowych.

W tej summie trzeba dać znak *więcej* momentom których siły mają dążność do obrotu swych punktów przyłożenia, około punktu O, w tę samą stronę, a znak *mniej* tym których siły obróciłyby te punkta w stronę przeciwną.

Ztąd wynika że momenta dwóch sił względem punktu wziętego na kierunku ich wynikowej są równe.

Jeśli $\Sigma X = 0$ i $\Sigma Y = 0$ ale $\Sigma Pp \gtrless 0$, układ P, P′, P″...... przywodzi się do dwojanu wynikowego.

48. Równanie momentów może wziąć inny kształt, dogodniejszy w zastosowaniu. Jakoż, zamiast przenosić do punktu O siłę P, przenieśmy jej składowe X, Y. W tym celu, przyłóżmy do punktu O, w kierunku osi $x^{ów}$ dwie siły X, — X równe i wprost przeciwne, a w kierunku osi $y^{nów}$ dwie siły Y, — Y także równe i wprost przeciwne; przez co nie naruszymy w niczem skutku sił układu. Mamy więc w punkcie O dwie składowe X, Y, i dwa dwojany (X — X), (Y — Y) których momenta linijne są liczebnie $Xy \operatorname{wst}\theta$, $Yx \operatorname{wst}\theta$. Jeśli teraz uważać będziemy za dodatne składowe X, Y które powiększają spółrzędne x, y punktu przyłożenia, za odjemne te które je zmniejszają, i, bacząc na znaki składowych i spółrzędnych, obejrzymy różne położenia sił, zobaczymy łatwo że dwojan (X, — X), naprzykład, zmienia stronę swojego obrotu gdy jeden tylko z dwóch czynników wieloczynu Xy zmienia znak, a ten dwojan nie zmienia strony obrotu gdy oba czynniki zachowują

swoje znaki, albo je zmieniają oba zarazem. Otóż, na mocy przyjętej ugody (28), dwojan (X, — X) jest dodatny a dwojan (Y, — Y) odjemny. To dowodzi że moment linijny dwojanu (X, — X) ma znak wieloczynu Xy, a zaś moment linijny dwojanu (Y, — Y) ma znak przeciwny znakowi wieloczynowi Yx. Ztąd wnosimy że momenta linijne tych dwóch dwojanów wyrażają się, co do wielkości i do znaku, przez wieloczyny $\mathrm{X}y \operatorname{wst}\theta, -\mathrm{Y}x \operatorname{wst}\theta$. A że te dwojany są na jednej płaszczyznie, więc ich momenta linijne czynią summę algebryczną $(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x)\operatorname{wst}\theta$. Tak samo dwojany pochodzące z przeniesienia składowych X' i Y', X'' i Y'',... dają summy $(\mathrm{X}'y' - \mathrm{Y}'x')\operatorname{wst}\theta$, $(\mathrm{X}''y'' - \mathrm{Y}''x'')\operatorname{wst}\theta$,... Więc, dodając te wszystkie summy, otrzymujemy dla równowagi dwojanów równanie

$$\Sigma \mathrm{P}p = (\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x + \mathrm{X}'y' - \mathrm{Y}'x' + \mathrm{X}''y'' - \mathrm{Y}''x'' + \ldots)\operatorname{wst}\theta = 0$$

albo

$$\Sigma(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x) = 0$$

Dobrze jest uważać że

$$\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x = \frac{\mathrm{P}p}{\operatorname{wst}\theta}.$$

Wiemy że układ sił P, P′, P″,... ma wynikowę R gdy summy ΣX i ΣY nie są obie zero; szukajmy teraz punktu przyłożenia tej wynikowej. Jeśli oznaczymy przez X_1, Y_1 składowe wynikowej R, przez x_1, y_1 spółrzędne punktu jej przyłożenia, równanie (7) daje zaraz

$$\mathrm{X}_1 y_1 - \mathrm{Y}_1 x_1 = \Sigma(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x).$$

Więc, czyniąc $\Sigma(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x) = \mathrm{G}$,

mamy

$$\mathrm{Y}_1 x_1 - \mathrm{X}_1 y_1 + \mathrm{G} = 0. \tag{8}$$

To równanie pierwszego stopnia na x_1, y_1 przedstawia, na płasczyznie sił P, P′, P″,... miejsce punktów przyłożenia wynikowej R, to jest linię prostą wedle której ona działa. Co właśnie być powinno.

49. Zwykle dla uproszczenia bierze się osie spółrzędne prostokątne. W tem założeniu nazywając $\alpha, \alpha', \alpha''$,... kąty jakie siły P, P′... czynią z osią odciętych, trzy równania równowagi, znalezione w numerze 45, stają się

$$P \operatorname{dos} \alpha + P' \operatorname{dos} \alpha' + P'' \operatorname{dos} \alpha'' + \ldots = 0,$$

$$P \operatorname{wst} \alpha + P' \operatorname{wst} \alpha' + P'' \operatorname{wst} \alpha'' + \ldots = 0$$

$$P(y \operatorname{dos} \alpha - x \operatorname{wst} \alpha) + P'(y' \operatorname{dos} \alpha' - x' \operatorname{wst} \alpha')$$
$$+ P''(y'' \operatorname{dos} \alpha'' - x'' \operatorname{wst} \alpha'') + \ldots = 0.$$

albo krócej

$$\Sigma P \operatorname{dos} \alpha = 0, \quad \Sigma P \operatorname{wst} \alpha = 0$$

$$\Sigma P(x \operatorname{dos} \alpha - y \operatorname{wst} \alpha) = 0.$$

Gdy układ P, P′, P″,... ma wynikowę R która czyni kąt a z osią odciętych, siła równa i przeciwna ma tę samą wielkość R, ale czyni z osią odciętych kąt $a + \pi$, i jej składowe są

$$R \operatorname{dos}(\pi + a) = - R \operatorname{dos} a, \quad R \operatorname{wst}(\pi + a) = - R \operatorname{wst} a.$$

Jeśli więc do wynikowej R przyłożymy siłę równą i wprost przeciwną, która sprawi równowagę w układzie, będziemy mieli

$$\Sigma P \operatorname{dos} \alpha - R \operatorname{dos} a = 0, \quad \Sigma P \operatorname{wst} a - R \operatorname{wst} a = 0.$$

$$\Sigma P(y \operatorname{dos} \alpha - x \operatorname{wst} \alpha) - R(y_1 \operatorname{dos} a - x_1 \operatorname{wst} a) = 0.$$

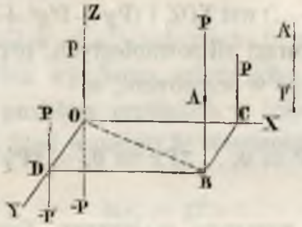
Ostatnie równanie jest to samo co (8); dwa pierwsze dają składowe wynikowej R, jej wielkość i kierunek, to jest

$$R \operatorname{dos} a = \Sigma P \operatorname{dos} \alpha, \quad R \operatorname{wst} a = \Sigma P \operatorname{wst} \alpha,$$

$$R = \sqrt{(\Sigma P \operatorname{dos} \alpha)^2 + (\Sigma P \operatorname{wst} \alpha)^2},$$

$$\operatorname{sty} a = \frac{\Sigma P \operatorname{wst} \alpha}{\Sigma P \operatorname{dos} \alpha}.$$

50. Równowaga sił równoległych. Niech będą siły równoległe P, P′, P″,... przyłożone do układu punktów A, A′, A″.....



w przestrzeni, niezmiennie między sobą powiązanych. Przez jakikolwiek punkt O przestrzeni, poprowadźmy prostę OZ równoległą do kierunku sił danych, i dwie dowolne proste OX, OY. Jeśli weźmiemy te trzy proste za osie spółrzędnych, i oznaczymy przez x, y dwie odcięte punktu przyłożenia A siły P, wtedy x, y będą spółrzędnemi punktu B w którym kierunek siły P przebija płaszczyznę XY. Owoż, przypuszczając początek spółrzędnych O niezmiennie połączony z układem punktów A, A′...., możemy zastąpić siłę P przez siłę równą tego samego kierunku, przyłożoną do punktu O, i przez dwojan (P, — P) mający BO wstBOZ za ramie dźwigni. Rozłóżmy ten dwojan na dwa inne leżące na płaszczyznach ZX, ZY. Żeby to uczynić, na przekątnej OB dopełnijmy równoległoboku OCBD, i do wierzchołka D przyłóżmy dwie siły przeciwne, równe sile P i do niej równoległe; poczem przenieśmy dwojan P.BD na płaszczyznę równoległą ZX. Tym sposobem otrzymujemy dwa dwojany składowe; jeden jest na płaszczyznie ZX i ma ramie dźwigni OC wstZOX, drugi na płaszczyznie ZY ma ramie dźwigni

OD wst ZOY. Oczywiście te dwa dwojany są to samo co dwojan P . OB wst ZOB. Co do znaków, widzimy łatwo że między dwojanami leżącemi na płasczyznach spółrzędnych, te są dodatne których momenta linijne znajduje się z tej samej strony co pół-osie spółrzędnych dodatnych. Zatem, jeśli będziemy uważali za dodatne te z sił P, P′, P″... które powiększają rzędne punktów przyłożenia, a za odjemne te które je zmniejszają, momenta linijne dwóch składowych dwojanów, mających siły P, P′... wyrażą się przez $-Px$ wst ZOX, i $-Py$ wst ZOY, $P'x'$ wst ZOX i $P'y'$ wst ZOY,...

Tak uważane siły równoległe P, P′, P″... przeniesione do punktu O, dają summę algebryczną $P+P'+P''+\ldots\ldots$; a dwojany powstające z tego przeniesienia dają dwojany składowe na płasczyznach ZX i ZY, których momenta linijne czynią summy algebryczne $(Px+P'x'+P''x''+\ldots)$ wst XOZ i $(Py+P'y'+P''y''+\ldots)$ wst YOZ. Więc warunki równowagi sił równoległych, przyłożonych do układu bryłowego wolnego w przestrzeni, są

$$(9) \qquad \Sigma P = 0, \quad \Sigma Px = 0, \quad \Sigma Py = 0.$$

51. Moment siły względem płasczyzny. Nazywa się *momentem siły względem płasczyzny* wieloczyn tej siły przez spółrzędnę punktu przyłożenia odpowiedającą tej płasczyznie. I tak, wieloczyny Px, Py są momentami siły P względem płasczyzn YZ, XZ. Jako widzimy, moment siły względem płasczyzny zależy od punktu przyłożenia siły a nie od jej kierunku; gdy przeciwnie, moment siły względem punktu zależy od kierunku siły a nie od jej punktu przyłożenia.

Wprowadzając nazwisko momentu, wysłowia się powyższe równania jako następuje :

Dla równowagi sił równoległych, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest żeby summa algebryczna tych sił była zero, i żeby summa algebryczna ich momentów względem dwóch płasczyzn, przecinających się równolegle do sił, była zero na każdej z tych płasczyzn.

52. Gdy siły równoległe P, P′, P″,... nie są w równowadze, a mają wynikowę R, przechodzącą przez punkt którego dwie odcięte są x_1, y_1; wtedy, ponieważ przykładając do wynikowej R

siłę — R, równą i wprost przeciwną, czynimy równowagę, będzie

$$\Sigma P - R = 0, \quad \Sigma Px - Rx_1 = 0, \quad \Sigma Py - Ry_1 = 0;$$

zkąd

$$(10) \qquad R = \Sigma P, \quad Rx_1 = \Sigma Px, \quad Ry_1 = \Sigma Py.$$

Te równania wyznaczają wynikowę R, bo dają jej wielkość i położenie w przestrzeni; byle tylko wartość R nie była zerem.

Jeśli $R = 0$, a summy ΣPx, ΣPy są różne od zera, wtedy $x = \infty$ i $y = \infty$; w tym przypadku układ danych sił P, P′, P″... przywodzi się do dwojanu.

53. Wiemy że środek sił równoległych, to jest punkt przez który przechodzi zawsze ich wynikowa, zależy tylko od stosunku tych sił między sobą i od punktów przyłożeń, a bynajmniej od kierunku równoległości (22). Ztąd wnosimy że równanie momentów

$$Rx_1 = \Sigma Px$$

stosuje się do wszelkiej płasczyzny, jakikolwiek jest względem niej kierunek sił równoległych. Albowiem jeśli, nie zmieniając punktów przyłożeń ani wielkości i równoległości sił między sobą, nadamy siłom kierunek równoległy do płasczyzny, powyższe równanie będzie miało miejsce; więc ono jest zawsze prawdziwe, ponieważ te momenta zostają niezmienne gdy siły zmieniają kierunki.

Tym sposobem zostaje dowiedzione ogólne twierdzenie momentów sił równoległych względem płasczyzny :

Moment wynikowej sił równoległych względem jakiejkolwiek płasczyzny jest równy summie algebrycznej ich momentów.

Aby, za pomocą tego twierdzenia, wyznaczyć środek sił równoległych, trzeba wziąć summy momentów sił względem trzech płasczyz spółrzędnych; to jest

$$Rx_1 = \Sigma Px, \quad Ry_1 = \Sigma Py, \quad Rz_1 = \Sigma Pz;$$

zkąd

$$(11) \qquad x_1 = \frac{\Sigma Px}{R}, \quad y_1 = \frac{\Sigma Py}{R}, \quad z_1 = \frac{\Sigma Pz}{R}.$$

Te równania pokazują że środek sił równoległych leży na płasczyznie względem której summa momentów jest zero. I tak, jeśli $\Sigma Px = 0$, a zaś $R \gtrless 0$, będzie $x_1 = 0$. Co dowodzi że środek sił równoległych leży na płasczyznie Yz.

54. Gdy siły równoległe są na jednej płasczyznie, ten szczególny przypadek, który łatwo wprost okazać, wywodzi się z ogólnego; dość tylko uczynić $y = 0$ w formułach (9), a będzie

$$(12) \qquad \Sigma P = 0 \quad \text{i} \quad \Sigma Px = 0.$$

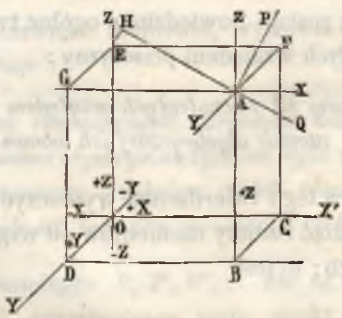
Więc, dla równowagi sił równoległych leżących na jednej płasczyznie, i przyłożonych do układu bryłowego wolnego w przestrzeni, trzeba i dość jest żeby summa algebryczna tych sił była zero, i summa algebryczna ich momentów względem jakiegokolwiek punktu płasczyzny było także zero.

Jeśli summa ΣP nie jest zero, siły równoległe leżące na jednej płasczyznie mają wynikowę R, którą następujące formuły wyznaczają,

$$R = \Sigma P \quad \text{i} \quad Rx_1 = \Sigma Px,$$

$$x_1 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}.$$

55. Równowaga sił jakichkolwiek w przestrzeni. Niech będą



siły P, P′, P″... przyłożone do punktów A, B, C.... układu bryłowego; oznaczmy przez (X, Y, Z), (X', Y', Z'),... składowe tych sił względem trzech osi jakichkolwiek OX, OY, OZ, i przez (x, y, z), (x', y', z'),... spółrzędne punktów przyłożenia.

Uważajmy jedną z sił danych, naprzykład siłę P przyłożoną do punktu A (x, y, z). Możemy przenieść składowę AZ równolegle do niej samej do początku O spółrzędnych, to jest zastąpić ją przez siłę równą i równoległą OZ, i przez dwojan (Z, — Z) leżący na płaszczyznie ABOZ. Ten dwojan rozkłada się na dwa, leżące na płaszczyznach ZX i ZY; pierwszy ma ramie dźwigni OC wst ZOX, drugi ramie dźwigni OD wst ZOY. Momenta linijne tych dwojanów, na mocy wiadomej ugody znaków, wyrażają się przez

$$-Zx \text{ wst } ZOX, \qquad + Zy \text{ wst } ZOY.$$

Rozumując podobnie, znajdziemy łatwo że składowa AX przeniesiona do punktu O, równolegle do siebie samej, daje siłę równą i równoległą OX, i dwa dwojany które leżą na płaszczyznach XY, XZ, i mają momenta linijne $-Xy$ wst XOY, $+Xz$ wst XOZ.

Nakoniec, składowa AY, przeniesiona do O, daje siłę równą i równoległą OY, i dwa dwojany leżące na płaszczyznach YX, YZ, których momenta linijne są $+Yx$ wst YOX. $-Yz$ wst YOZ,

Dodając teraz momenta linijne dwojanów leżących na jednej płaszczyznie, będziemy mieli, zamiast siły P, jej trzy składowe X, Y, Z przyłożone do punktu O, i trzy dwojany leżące na płaszczyznach spółrzędnych, których momenta linijne, odpowiedające trzem osiom spółrzędnym XX', YY', ZZ', są

$$(Zy - Yz) \text{ wst } YOZ, \qquad (Xz - Zx) \text{ wst } ZOX, \qquad (Yx - Xy) \text{ wst } XOY.$$

Te trzy ilości wyrażają składowe dwojanu powstającego z przeniesienia siły P, równolegle do niej samej, do punktu O.

Jeśli tak samo przeniesiemy do punktu O składowe wszystkich sił danych, równając do zera, każdą summę składowych równoległych do jednej z trzech osi spółrzędnych, i każdą summę momentów linijnych składowych odpowiedających jednej z tych osi.

otrzymamy *sześć* następujących równań

$$(13)\begin{cases} \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0, \\ \Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0. \end{cases}$$

tóre są konieczne i dostateczne do równowagi układu bryłowego niezmiennego i wolnego w przestrzeni (*).

Te sześć równań nazywają się *równaniami ogólnemi równowagi*, dlatego że się stosują do równowagi układu materyalnego jakiegokolwiek, chociaż wtedy nie są już dostateczne.

56. Gdy osie spółrzędne są prostokątne, nazywając α, β, γ kąty które siła P czyni z temi osiami, będzie

$$X = P \operatorname{dos}\alpha, \quad Y = P \operatorname{dos}\beta, \quad Z = P \operatorname{dos}\gamma.$$

Zatem powyższe sześć równań równowagi stają się

$$\Sigma P \operatorname{dos}\alpha = 0, \quad \Sigma P \operatorname{dos}\beta = 0 \quad \Sigma P \operatorname{dos}\gamma = 0,$$

$$\Sigma P(y \operatorname{dos}\gamma - z \operatorname{dos}\beta) = 0, \; \Sigma P(z \operatorname{dos}\alpha - x \operatorname{dos}\gamma) = 0, \; \Sigma P(x \operatorname{dos}\beta - y \operatorname{dos}\alpha) = 0.$$

Trzy ostatnie równania mogą się przedstawić w innej postaci, która ważną gra rolę w Mechanice. Jakoż, siła P rozkłada się na dwie, $P \operatorname{dos}\gamma$ i $P \operatorname{wst}\gamma$; pierwsza jest rzutem siły P na osi OZ, druga jej rzutem na płasczyznie prostopadłej do tej osi. Przypuszczając w ostatniej figurze osie spółrzędne prostokątne, widzimy że siła $P \operatorname{wst}\gamma$, którą nazwiemy Q, leży na płasczyznie AFEG prostopadłej do OZ i jest wynikową sił $P \operatorname{dos}\alpha$, $P \operatorname{dos}\beta$; zatem moment siły Q, względem punktu spotkania E osi z płasczyzną, jest równy summie algebrycznej tych dwóch składowych, i wyraża

(*) Aby łatwiej pamiętać trzy ostatnie równania, dość uważać że się otrzymują przez przemianę kołową liter x, y, z napisanych na okręgu koła, od lewej ręki ku prawej. I tak, około osi $x^{ów}$, moment linijny zawiera litery idące po x w porządku y, z; około osi $y^{nów}$, litery idące po y w porządku z, x; nakoniec około osi $z^{dów}$, litery idące po z w porządku x, y.

się przez

$$Qq = P(x \operatorname{dos}\beta - y \operatorname{dos}\alpha),$$

gdzie q, znacząc odległość punktu E od kierunku siły Q, jest najkrótszą odległością kierunków siły P i osi OZ.

Owóż, druga strona powyższej równości przedstawia na osi OZ rzut momentu linijnego dwojanu, z przeniesienia siły P do punktu O tej osi, wziętego za początek spółrzędnych; więc summa wszystkich rzutów momentów linijnych, na osi OZ, jest

$$(14) \qquad \Sigma P(x \operatorname{dos}\beta - y \operatorname{dos}\alpha) = \Sigma Qq = \Sigma Pq \operatorname{wst}\gamma.$$

Moment siły względem linii prostej. Nazywa się *momentem siły względem linii prostej czyli osi*, moment rzutu tej siły, na płaszczyznie prostopadłej do osi, względem punktu spotkania osi z płaszczyzną. Formuła pokazuje że ten moment jest równy wieloczynowi siły przez jej najkrótszą odległość od osi i przez wstawę kąta siły z osią.

Żeby równanie (14) było zawsze prawdziwe, trzeba uważać moment siły względem linii prostej jako dodatny albo odjemny, według jak siła ma dążność do obracania, w jedną stronę albo w stronę przeciwną, ciała do którego jest przyłożona a któreby mogło się obracać tylko skoło tej prostej.

Wprowadzając nazwę momentu sił względem linii prostej, wysłowia się zwykle trzy ostatnie warunki równowagi mówiąc że :

W równawadze układu bryłowego wolnego w przestrzeni, summy momentów sił względem trzech osi spółrzędnych prostopadłych są osobno zero.

Uwaga. Znając spółrzędne punktu przyłożenia A siły P i jej kąty, nietrudno otrzymać ramie dźwigni p dwojanu (P, — P). Jakoż,

$$p^2 = \overline{OA}^2 \operatorname{wst}^2(OA,P) = \overline{OA}^2 - \overline{OA}^2 \operatorname{dos}^2(OA,P),$$

albo

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \operatorname{dos}\alpha + y \operatorname{dos}\beta + z \operatorname{dos}\gamma)^2;$$

więc

$$p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2}.$$

57. Jeżeli dany układ sił nie jest w równowadze ale ma wynikowę R, aby wyznaczyć tę ostatnią sposobem ogólnym, weźmy osie spółrzędne jakiekolwiek, i niech będą X_1, Y_1, Z_1 trzy składowe wynikowej, x_1, y_1, z_1 spółrzędne jej punktu przyłożenia. Wprowadzając siłę równą i wprost przeciwną sile R, to jest przyłożoną do tego samego punktu i mającą składowe $-X_1$, $-Y_1$, $-Z_1$, uczynimy równowagę. Więc, jeśli dla skrócenia oznaczymy przez X, Z, Z summy sił szacowanych wedle trzech osi spółrzędnych, przez L, M, N summy momentów linijnych składowych które odpowiedają tym osiom, będziemy mieli, podług ogólnych równań równowagi (13),

$$X - X_1 = 0, \qquad Y - Y_1 = 0, \qquad Z - Z_1 = 0.$$

$$L - Z_1 y_1 + Y_1 z_1 = 0, \quad M - X_1 z_1 + Z_1 x_1 = 0, \quad N - Y_1 x_1 + X_1 y_1 = 0,$$

Pierwsze trzy równania dają składowe

$$X_1 = X, \qquad Y_1 = Y, \qquad Z_1 = Z;$$

wyznaczają zatem wielkość i kierunek szukanej wynikowej.

Na mocy tych wartości, trzy ostatnie równania stają się

$$\begin{aligned} Zy_1 - Yz_1 &= L, \\ (15) \qquad Xz_1 - Zx_1 &= M, \\ Yx_1 - Xy_1 &= N. \end{aligned}$$

Te równania nie są oddzielne; albowiem, mnożąc je odpowiednio przez składowe X, Y, Z, z których jedna przynajmniej nie jest zero, i dodając stronami, mamy równanie warunkowe i nierówność

$$(16) \qquad LX + MY + NZ = 0 \quad \text{i} \quad R \gtrless 0$$

którym powinno się zadość uczynić żeby poprzedzające równania były zgodne, i temsamem wynikowa możebna. Jeśli równanie warunkowe i nierówność sprawdzają się, trzy równania (15) przywodzą się do dwóch, a będąc pierwszego stopnia względem x_1, y_1, z_1, przedstawiają linię prostą. Więc dany układ sił może być zastąpiony przez jedną siłę, mającą składowe X, Y, Z, i przyłożoną do jakiegokolwiek punktu tej linii prostej która, zresztą, według jej równań jest równoległa do wynikowej sił X, Y, Z.

Jeśli

$$L = M = N = 0 \quad \text{i} \quad R \gtrless 0,$$

równania (15) dają

$$\frac{x_1}{X} = \frac{y_1}{Y} = \frac{z_1}{Z}.$$

To dowodzi że siły danego układu mają wynikowę, która przechodzi przez początek spółrzędnych.

58. Można łatwo mieć kąt jaki wynikowa przeniesienia czyni z płaszczyzną dwojanu wynikowego, Jakoż, ta wynikowa R czyni z trzema osiami spółrzędnemi prostokątnemi kąty których dostawy są $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$, a zaś moment linijny G dwojanu wynikowego czyni z temi samemi osiami kąty mające dostawy $\frac{L}{G}$, $\frac{M}{G}$, $\frac{N}{G}$; więc, nazywając θ kąt wynikowej R z osią dwojanu wynikowego G, będzie

$$\operatorname{dos}\theta = \frac{LX + MY + NZ}{GR}.$$

Żeby dany układ sił miał wynikowę jedyną, wynikowa R przeniesienia powinna być równoległa do płaszczyzny dwojanu wynikowego, czyli prostopadła do osi tego dwojanu ; więc

$$\frac{LX + MY + NZ}{GR} = 0,$$

zkąd

$$LX + MY + NZ = 0 \quad \text{i} \quad R \gtrless 0.$$

Co sprawdza już wiadome warunki otrzymane ogólniej.

59. Ponieważ wynikowa sił i ich rzuty na osi albo na płaszczyznie nie zmieniają się, gdy te siły przenoszą się, równolegle do siebie samych, do jednego punktu; więc, na mocy twierdzenia dowiedzionego w n° 21, mamy następujące ogólniejsze:

Gdy siły jakiekolwiek w przestrzeni mają wynikowę, rzut tej wynikowej na linii prostej, albo na płaszczyznie, jest wynikową rzutów sił składowych.

Co się tyczy momentów sił względem linii prostej; nazywając a, b, c kąty wynikowej R z trzema osiami prostokątnemi, jeśli weźmiemy na przykład ostatnie z równań (15), mamy zaraz

$$R(x_1 \operatorname{dos} b - y_1 \operatorname{dos} a) = N = \Sigma(Yx - Xy),$$

bo

$$Rs \operatorname{wst} c = \Sigma(Yx - Xy)\ ;$$

gdzie s znaczy najkrótszą odległość wynikowej R od osi OZ.

Owóż,

$$\Sigma(Yx - Xy) = \Sigma Pq \operatorname{wst} \gamma;$$

więc

$$(17) \qquad Rs \operatorname{wst} c = \Sigma Pq \operatorname{wst} \gamma.$$

Z kąd ogólne twierdzenie momentów sił względem linii prostej:

Gdy siły dane w przestrzeni mają wynikowę, moment tej wynikowej względem jakiejkolwiek linii prostej est równy summie algebrycznej momentów sił składowych.

Owoż, summa momentów sił względem linii prostej jest to samo co rzut na niej momentu linijnego dwojanu, który pochodzi z przeniesienia wszystkich sił do jednego z punktów tej linii. Ztąd twierdzenie

Między summami momentów sił względem linij prostych przechodzących przez jeden punkt, ta jest maximum która jest wzięta względem osi dwojanu przeniesienia w tym punkcie.

Summa momentów sił jest ta sama względem wszystkich prostych które czynią kąt równy z osią dwojanu przeniesienia, albo które tworzą stożek obrotowy około tej osi. Ta summa jest zero względem wszystkich prostopadłych do osi dwojanu. Zatem

Między summami maximum momentów sił względem linij prostych w przestrzeni, ta jest minimum *która jest wzięta względem osi dwojanu minimum.*

60. Gdy równaniu warunkowemu (16) nie staje się zadość, układ sił nie ma wynikowej, i przywodzi się do dwojanu G i do siły R nie równoległej do jego płasczyzny. Szukajmyż wartości dwojanu *minimum*, i równań jego osi. Aby je otrzymać, trzeba wprowadzić do układu: 1° siłę równą i przeciwną sile R, 2° dwojan równowarty i przeciwny dwojanowi G; i wyrazić warunki równowagi. W tym celu, biorąc osie spółrzędne jakiekolwiek, oznaczmy przez X_1, Y_1, Z_1 składowe siły R, przez x_1, y_1, z_1 spółrzędne jej punktu przyłożenia, przez L_1, M_1, N_1 składowe momentu linijnego G; będziemy mieli na wyrażenie równowagi sześć następujących równań:

$$X - X_1 = 0, \qquad Y - Y_1 = 0, \qquad Z - Z_1 = 0$$

$$L - Z_1 y_1 + Y_1 z_1 - L_1 = 0,$$

$$M - X_1 z_1 + Z_1 x_1 - M_1 = 0,$$

$$N - Y_1 x_1 + X_1 y_1 - L_1 = 0.$$

Trzy pierwsze równania dają składowe siły R,

$$X_1 = X, \qquad Y_1 = Y, \qquad Z_1 = Z$$

Przez podstawienie tych wartości trzy ostatnie równania stają się:

$$Zy_1 - Yz_1 = L - L_1,$$

$$Xz_1 - Zx_1 = M - M_1,$$

$$Yx_1 - Xy_1 = N - N_1.$$

Jeśli je pomnożymy odpowiednio przez X, Y, Z i dodamy, znajdziemy równanie warunkowe i nierówność

$$LX + MY + NZ - L_1X - M_1Y - N_1Z = 0 \quad \text{i} \quad R \gtrless 0.$$

Owoż, wiemy że moment linijny dwojanu minimum, który nazywamy K, schodzi się z kierunkiem wynikowej R; więc trzy składowe L_1, M_1, N_1 dwojanu K, z odpowiednemi składowemi X, Y, Z siły R, są w stosunku K : R. Zatem, na mocy ostatniego równania warunkowego, mamy

$$\frac{L_1}{X} = \frac{M_1}{Y} = \frac{Z_1}{Z} = \frac{K}{R} = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Ztąd wywodzimy wartość dwojanu minimum

$$K = \frac{(LX + MY + NZ)R}{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{18}$$

Przypuszczając osie spółrzędne prostokątne, znajdujemy

$$K = G\left(\frac{LX}{GR} + \frac{MY}{GR} + \frac{NZ}{GR}\right) = G \cos(G,R);$$

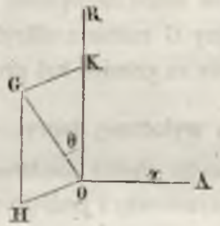
wynik już wiadomy.

Podstawmy teraz wartości L_1, M_1, N_1, wyprowadzone z powyższego ciągu stosunków, w równanie któreśmy poprzednio otrzymali, będzie

$$(19)\quad \begin{cases} Zy_1 - Yz_1 = L - \dfrac{KX}{R} \\ Xz_1 - Zx_1 = M - \dfrac{KY}{R} \\ Yx_1 - Xy_1 = N - \dfrac{KN}{R}. \end{cases}$$

Te trzy równania, z których każde wywodzi się z dwóch innych, przedstawiają *oś główną* dwojanu, czyli *oś środkową*.

Uwaga. Osie dwojanów równych tworzą około osi głównej dwojanu hiperboloidę obrotową o jednej płachcie. Jakoż, niech będzie



OR oś główna i OK dwojan minimum. Przez jakikolwiek punkt A przestrzeni poprowadźmy płaszczyznę AOH prostopadłą do osi głównej OR, i przez punkt O prostopadłę OH do płaszczyzny AOR. Jeśli przeniesiemy siłę R równolegle do niej samej z punktu O do A, utworzymy dwojan (R, — R) którego momentem linijnym, będzie $OH = R.OA = Rr$. Owóż, dwojany OH i OK składają się w jeden wynikowy, którego momentem linijnym jest przekątna OG równoległoboku wystawionego na OH i OK; więc, oznaczając przez K, G momenta linijne OK, OG, przez θ kąt GOR, otrzymujemy

$$\operatorname{stg}\theta = \frac{Rr}{K} \quad \text{i} \quad G^2 = K^2 + R^2r^2.$$

Wartości G i θ są funkcyą jednej zmiennej r; to dowodzi że, dla wszystkich punktów okręgu OA mającego oś OR, dwojany są równe, i ich osie tworzą, około osi głównej, hiperboloidę obrotową której szyją jest koło OA a pół-osią urojoną $r \operatorname{dot} \theta = \frac{K}{R}$. Ta hiperboloida ma równanie

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - \frac{R^2 z^2}{K^2} = 1,$$

które się zmienia tylko z ilością r. Ztąd pochodzi jeszcze inna własność osi głównej. Dla wszelkiego punktu powierzchni walcowej której ta linia jest osią, dwojan wynikowy ma tę samą wartość. Oś dwojanu ma ten sam kierunek dla wszystkich punktów jednej krawędzi walca, a zmienia go przechodząc od jednej krawędzi do drugiej, ale zachowuje to samo nachylenie na oś główną i tę samą odległość. Moment linijny G rośnie z odległością r od osi głównej, a jego kąt θ z tą osią ma za granicę kąt prosty.

61. Dla zastosowania wyłożonej teoryi, rozwiążmy zagadnienie. *Znaleźć warunki równowagi dwóch punktów materyalnych* A, A′, *złączonych linią prostą niezmienną i podległych siłom* P, P′.

Oznaczmy przez x, y, z, i x', y', z' spółrzędne prostokątne punktów A i A′, przez α, β, γ, i α', β', γ' kąty sił P i P′ z pół-osiami spółrzędnych dodatnych; mamy, wedle wiadomych formuł, sześć równań równowagi:

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} P \operatorname{dos}\alpha + P' \operatorname{dos}\alpha' &= 0 \\ P \operatorname{dos}\beta + P' \operatorname{dos}\beta' &= 0 \\ P \operatorname{dos}\gamma + P' \operatorname{dos}\gamma' &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned} P(y \operatorname{dos}\gamma - z \operatorname{dos}\beta) + P'(y' \operatorname{dos}\gamma' - z' \operatorname{dos}\beta') &= 0 \\ P(z \operatorname{dos}\alpha - x \operatorname{dos}\gamma) + P'(z' \operatorname{dos}\alpha' - x' \operatorname{dos}\gamma') &= 0 \\ P(x \operatorname{dos}\beta - y \operatorname{dos}\alpha) + P'(x' \operatorname{dos}\beta' - y' \operatorname{dos}\alpha') &= 0. \end{aligned}$$

Trzy ostatnie równania, na mocy trzech pierwszych, stają się

$$P\{(y-y')\cos\gamma-(z-z')\cos\beta\}=0$$

$$P\{(z-z')\cos\alpha-(x-x')\cos\gamma\}=0$$

$$P\{(x-x')\cos\beta-(y-y')\cos\alpha\}=0,$$

i są to samo co dwa równania zawarte w następującej formule

$$\text{(C)}\qquad \frac{P\cos\alpha}{x-x'}=\frac{P\cos\beta}{y-y'}=\frac{P\cos\gamma}{z-z'}.$$

Co stanowi tylko dwa oddzielne równania.

Widzimy tedy że sześć równań ogólnych równowagi przywodzą się, w tym szczególnym przypadku, do pięciu, to jest do równań (A) i (C). Równania (A) wyrażają że siły P, P′ są równe, i skierowane w strony przeciwne wedle jednej prostej albo wedle dwóch prostych równoległych; zaś równania (C) pokazują że siła P działa wedle prostej która łączy punkta przyłożeń A i A′ obydwóch sił P i P′. Więc, dla równowagi danego układu, trzeba i dość jest żeby siły P i P′, przyłożone do skrajności linii prostej AA′ niezmiennej, były równe i działały wedle tej linii w strony przeciwne.

Gdyby, przypuszczając linię prostą AA′ niezmienną, przyłożono do skrajności A siły P, Q,... a do skrajności A′ siły P′, Q′,... wtedy warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi byłoby: żeby wynikowa sił P, Q,... równała się wynikowej sił P′, Q′,... i żeby obie wynikowe miały kierunek danej prostej AA′, ale działały w strony przeciwne.

62. Rozwiążmy jeszcze drugie ZAGADNIENIE: *Znaleźć warunki równowagi trójkątu niezmiennego* AA′A″, *do którego wierzchołków są przyłożone odpowiedne siły* P, P′, P″.

Weźmy wierzchołek A″ za początek spółrzędnych prostokątnych; zachowując notacyę użytą wyżej, będziemy mieli sześć równań równowagi, w następującym kształcie,

$$
(A) \quad \begin{aligned}
&P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' = 0 \\
&P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' = 0 \\
&P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' = 0
\end{aligned}
$$

$$
(B) \quad \begin{aligned}
&P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') = 0 \\
&P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + P'(z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma') = 0 \\
&P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') = 0.
\end{aligned}
$$

Równania (A) wyrażają że każda z trzech sił P, P′, P″, przeniesionych równolegle do siebie samych do jednego punktu, jest równa i wprost przeciwna wynikowej dwóch innych. Owoż, na mocy równania (B), dwa dwojany powstające z przeniesienia sił P, P′ do wierzchołka A″ niszczą się; więc siły P, P′ leżą na jednej płaszczyznie przechodzącej przez A″, i mają wynikowę która czyni równowagę sile P″ w tym punkcie. Ztąd wnosimy że, dla równowagi trójkąta niezmiennego, do którego wierzchołków są przyłożone odpowiednio trzy siły, trzeba i dość jest żeby te siły leżały na jego powierzchni, i żeby jedna z sił była równa i wprost przeciwna wynikowej dwóch innych. Co się właśnie zgadza z już wiadomem twierdzeniem.

Jeśli na każdy z wierzchołków trójkąta niezmiennego działa kilka sił, składając te siły w jedną wynikowę przy każdym wierzchołku, przywodzimy zagadnienie do poprzedzającego, w którem wyrażenie warunków równowagi nie przedstawia już żadnej trudności.

Kończąc, zwracamy uwagę na tę okoliczność że, w żadnym z dwóch przypadków równowagi trójkąta dopiero co rozbieranych, szóste równanie równowagi nie wywodzi się z pięciu innych, tak jakośmy widzieli w równowadze linii prostej niezmiennej (61).

RÓWNOWAGA UKŁADU BRYŁOWEGO NIEZUPEŁNIE WOLNEGO W PRZESTRZENI.

63. JEDEN PUNKT STAŁY. Niech będzie układ bryłowy poddany siłom P, P′..., i mający punkt stały O około którego może się

obracać. Przypuszczając ten układ w równowadze, pojmujemy łatwo że punkt O wytrzymuje pewne parcie któremu przeciwstawi opór. Owoż, zastępując punkt O przez siłę R, równą oporowi, a raczej równą i przeciwną parciu, możemy uważać układ bryłowy jako wolny w przestrzeni. Więc, oznaczając przez X_1, Y_1, Z_1 składowe siły R_1, i biorąc punkt O za początek spółrzędnych, mamy sześć równań równowagi, to jest najpierwej

$$(20) \qquad \Sigma X + X_1 = 0, \quad \Sigma Y + Y_1 = 0, \quad \Sigma Z + Z_1 = 0;$$

a potem, uważając że siła R przyłożona do początku O nie daje dwojanu, będzie

$$(21) \qquad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Trzy ostatnie równania, nie zawierające parcia R_1, są trzema warunkami równowagi. Ponieważ one sprawdzają równanie warunkowe (16), i pokazują że dwojan wynikowy z przeniesienia sił do punktu stałego O jest zero; więc, *dla równowagi układu bryłowego mającego punkt stały, trzeba i dość jest żeby siły przyłożone miały wynikowę, i żeby kierunek tej wynikowej przechodził przez punkt stały.*

Łatwo wprost otrzymać warunki równowagi. Jakoż, równowaga sił nie zależy od punktu do którego przenosimy te siły; ale, jeśli je przeniesiemy do punktu stałego O, ten punkt niezmienny zniszczy wynikowę sił przeniesionych, a nie zniszczy dwojanu który pochodzi z tego przeniesienia; więc trzeba tylko i dość jest dla równowagi żeby ten dwojan był zero z siebie samego. Co właśnie wymaga trzech ostatnich równań.

Co do parcia na punkt O, trzy pierwsze równania (20) dają

$$-X_1 = \Sigma X, \quad -Y_1 = \Sigma Y, \quad -Z_1 = \Sigma Z.$$

To pokazuje że parcie, jakie układ bryłowy wywiera na punkt stały O, jest równe wynikowej sił tego układu. Co z resztą przez się widoczne.

Jeśli układ w równowadze ma tylko dwie siły P, P′; ponieważ dwa dwojany powstające z ich przeniesienia do punktu stałego O niszczą się na mocy równań $L=0$, $M=0$, $N=0$, te siły leżą na jednej płaszczyznie przechodzącej przez O, są odwrotnie proporcyonalne do swoich odległości od tego punktu, i działają w strony przeciwne.

To są właśnie trzy konieczne i zarazem dostateczne warunki równowagi w machinie zwanej *dźwignią*, o której później będzie mowa.

Uwaga. Gdy układ bryłowy obraca się około punktu stałego, można mu zawsze uczynić równowagę jedną tylko siłą. Albowiem, jakiekolwiek są siły którym ten układ podlega, można je zawsze zastąpić przez dwie siły S i T (44), tak żeby jedna z nich przechodziła przez punkt stały układu. Zostaje więc druga siła T którą się zrównoważy siłą równą i przeciwną.

64. Dwa punkta stałe czyli oś. Jeśli w układzie bryłowym są dwa punkta stałe, ten układ, pod działaniem sił danych, może się tylko obracać około osi przechodzącej przez te dwa punkta, które przypuszczamy dostatecznie wytrzymałe. Oznaczając przez O i H te dwa punkta stałe, weźmy O za początek spółrzędnych, prostę OH za oś z, i dwie osie OX, OY jakiekolwiek. Uczyńmy $OH=h$. Siły układu przeniesione równolegle do siebie samych do punktu O, dają wynikowę R i dwojan wynikowy $(S, -S)$; owoż, punkt stały O niszczy wynikowę R, a oś stała OZ niszczy dwojany składowe na płasczyznach ZX i ZY; zostaje tedy na płasczyznie XY sam dwojan N, którego zniszczyć oś OZ nie może. Więc, gdy układ bryłowy może się tylko obracać około osi OZ, warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi jest równanie

$$(22) \qquad N=0, \quad \text{czyli} \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

To równanie wyraża że składowe sił na płasczyznie XY, a temsamem na płasczyznie prostopadłej do osi obrotu, mają wynikowę której kierunek spotyka oś obrotu. Ta wynikowa rozkłada się na dwie siły prostopadłe do osi i przyłożone w punktach stałych O, H które je niszczą.

Zatem, gdy układ bryłowy obraca się około stałej osi, nie ślizgając się po niej, można mu zawsze uczynić równowagę jedną siłą prostopadłą do tej osi.

Szukajmy jeszcze innym sposobem warunków równowagi. Jeśli zastąpimy punkta stałe O i H przez siły równe i przeciwne parciom które układ bryłowy na nie wywiera, będziemy mogli uważać ten układ z punktami O i H jako wolny w przestrzeni. Więc, nazywając X_1, Y_1, Z_1 i X_2, Y_2, Z_2 składowe dwóch sił które wyrażają opór punktów O i H, i zważając że spółrzędne pierwszego punktu są zero a drugiego $x=0$, $y=0$, $z=h$, otrzymujemy zaraz sześć następujących równań :

$$\Sigma X + X_1 + X_2 = 0,$$

$$\Sigma Y + Y_1 + Y_2 = 0,$$

$$\Sigma Z + Z_1 + Z_2 = 0,$$

$$\Sigma(Zy - Yz) - hY_2 = 0,$$

$$\Sigma(Xz - Zx) + hX_2 = 0,$$

$$\Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Ostatnie równanie $\Sigma(Yx - Xy) = 0$, niezależne od oporu osi, stanowi warunek konieczny i dostateczny równowagi układu, jakośmy wyżej znaleźli.

Pierwsze pięć równań wskazują warunki wytrzymałości osi obrotu. Z nich wywodzimy składowe parć (ciśnień) w punktach O H, to jest :

$$-X_2 = \frac{M}{h}, \quad -Y_2 = \frac{L}{h}, \quad -Z_1 - Z_2 = \Sigma Z,$$

$$-X_1 = \Sigma X - \frac{M}{h}, \quad -Y_1 = \Sigma Y - \frac{L}{h}.$$

Dwie pierwsze wartości i dwie ostatnie pokazują że w punktach O i H parcia prostopadłe do osi są wyznaczone. Trzecie równanie, samo jedno zawierające składowe Z_1 i Z_2, daje tylko ich summę; co dowodzi że parcie wzdłuż osi obrotu dla każdego z punktów O i H osobno jest niewyznaczone. To pochodzi ztąd że punkta O i H są uważane jako złączone niezmiennie, matematycznie; zatem parcie wywarte na jeden z tych punktów w kierunku osi, jest zarazem wywarte na drugi, te zaś dwa parcia mające ten sam kierunek składają się w jedno równe ich summie (*równ.* 22).

Jest tu bardzo ważna uwaga do zrobienia. Wyznaczone parcia ciała na podpory osi stosują się tylko do równowagi; stan ruchu zmienia zupełnie ich wartości statyczne, jako później zobaczymy.

Gdy układ ma tylko dwie siły, leżące na płasczyznach prostopadłych do osi, warunek równowagi zależy na tem żeby te siły były odwrotnie proporcyonalne do swoich odległości od osi, i działały w strony przeciwne.

Wszystko co poprzedza stosuje się do machiny zwanej *kołowrotem.*

65. Przypuśćmy teraz że układ bryłowy obracając się około osi AB może się po niej posuwać. W tym przypadku, oś niszczy wszystkie siły których kierunek jest do niej prostopadły, ale nie może niszczyć żadnej innej; trzeba więc, dla równowagi, żeby summa składowych równoległych do osi obrotu było zero. Zatem warunki równowagi są dane przez dwa równania.

$$(23) \qquad \Sigma Z = 0 \quad \text{i} \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0,$$

które wyrażają, pierwsze że układ bryłowy nie może się posuwać po osi OZ, drugie że nie może się obracać około tej osi. Te ważne znaczenia równań będą nam później użyteczne.

66. Trzy punkta stałe czyli płasczyzna. Niech będzie układ bryłowy, czyli ciało niezmiennego kształtu które się opiera na płasczyznie w pewnej liczbie punktów. Ta płasczyzna może tylko stawić opór normalny, to jest wydawać oddziaływania czyli siły normalne przyłożone w punktach zetknięcia z ciałem; te zaś siły, równoległe między sobą i skierowane w jedną stronę, składają się w jedną wynikowę której kierunek przechodzi wewnątrz wielokąta mającego za wierzchołki punkta zetknięć. Więc, *gdy ciało poddane*

siłom, opiera się na płasczyznie stałej w wielu punktach, trzeba i dość jest dla równowagi żeby siły miały wynikowę któraby parła ciało ku płasczyznie, i żeby kierunek wynikowej był normalny do płasczyzny i przechodził wewnątrz wielokąta mającego za wierzchołki punkta zetknięć,

Biorąc płasczyznę, na której opiera się ciało, za płasczyznę XY, i normalnę do niej za oś rzędnych OZ, przypuśćmy najpierwej że ciało opiera się jednym tylko punktem A na płasczyznie XY, i weźmy ten punkt za początek spółrzędnych. Jeśli zastąpimy opór płasczyznyprzez siłę normalną Z_1 mającą kierunek OZ, będziemy mogli uważać ciało jako zupełnie wolne w przestrzeni. Więc, ponieważ siła Z_1 nie daje dwojanu, mamy zaraz sześć równań

$$(24) \quad \begin{cases} \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + Z_1 = 0, \\ L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0. \end{cases}$$

Pięć z tych równań są warunkami równowagi ; szóste daje parcie na płasczyznę, to jest

$$-Z_1 = \Sigma Z,$$

które, jakośmy naprzód wiedzieli, jest równe wynikowej sił przyłożonych.

Jeśli ciało opiera się dwoma punktami A i B na płasczyznie XY, weźmy punkt A za początek spółrzędnych, prostę AB za oś $x_{ów}$, i uczyńmy $AB = a$. Zastępując opór płasczyzny przez siły normalne Z_1 i Z_2, przyłożone w punktach A i B, mamy zaraz sześć równań

$$(25) \quad \begin{cases} \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + Z_1 + Z_2 = 0, \\ \Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) - aZ_2 = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0. \end{cases}$$

Są więc cztery równania równowagi; a dwa inne dają parcia na płasczyznę w punktach zetknięć A i B, to jest

$$-Z_2 = \frac{-M}{a}, \quad \text{i} \quad -Z_1 = \Sigma Z + \frac{M}{a}.$$

Te dwa dwa parcia są wyznaczone. Ale, jeśli ciało opiera się na płaszczyznie więcej niż dwoma punktami w linii prostej, parcia w tych punktach są niewyznaczone. I tak, dajmy na to że ciało ma z płaszczyzną trzy punkta spólne A, B, C w linii prostej; weźmy A za początek spółrzędnych, AB za oś $x^{\text{ów}}$, i uczyńmy $AB = a$, $AC = a'$; będzie

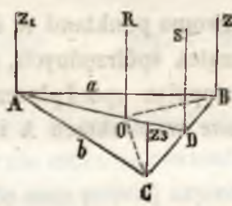
$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0,$$

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) - aZ_2 - a'Z_3 = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Są jeszcze te same cztery równania równowagi jako wyżej, i tylko dwa do wyznaczenia parcia w trzech punktach. Więc te parcia nie są już wyznaczone. To pochodzi ztąd że przypuszczamy trzy punkta A, B, C leżące na linii matematycznej, nie giętkiej; zatem siła normalna przyłożona w punkcie B może się rozkładać na dwie siły równoległe przyłożone w punktach A i C.

Tym sposobem parcie w punkcie B może się całkiem albo w części przenieść do punktów A i C; i nawzajem. W naturze tak się nie dzieje; bo ciała naturalne nie mają punktów stałych, ich kształt zmienia się z czasem.

Uważajmy teraz ciało opierające się na płaszczyznie XY trzema



punktami A, B, C nie w linii prostej. Biorąc AB i AC za osie $x^{\text{ów}}$ i $y^{\text{ów}}$, uczyńmy $AB = a$, $AC = b$, i wyraźmy opór płaszczyzny przez siły normalne Z_1, Z_2, Z_3 przyłożone odpowiednio w A, B, C; będziemy mieli

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0 \\ \Sigma(Zy - Yz) + bZ_3 = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) - aZ_2 = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0. \end{array} \right.$$

Są tylko trzy równania równowagi; trzy inne służą do wyznaczenia trzech sił Z_1, Z_2, Z_3.

Natężenia tych sił, czyli parcia na płaszczyznę XY, otrzymują się łatwo geometrycznie. Jakoż, niech będzie, wewnątrz trójkąta ABC, punkt O przez który przechodzi wynikowa R sił działających na ciało; pociągnijmy prostę AO aż do spotkania D z bokiem BC, i rozłóżmy siłę R na dwie składowe równoległe Z_1, S, przechodzące przez punkta A, D; będziemy mieli

$$\frac{R}{AD} = \frac{Z_1}{OD}.$$

Owoż, proste AD i OD są proporcyonalne do trójkątów ABC i OBC; zatem

$$\frac{R}{ABC} = \frac{Z_1}{OBC} = \frac{Z_2}{OAC} = \frac{Z_3}{OAB}.$$

Więc ciało położone na płasczyznie stałej XY, której dotyka w trzech punktach zetknięć A, B, C nie w linii prostej, wywiera na tę płasczyznę parcia proporcyonalne do powierzchni trójkątów OBC, OAC, OAB.

Jeśli ciało położone na płasczyznie stałej ma więcej niż trzy punkta podpory, wtedy parcia w tych punktach nie są wyznaczone. Łatwo się o tem przekonać analitycznie. Albowiem, nazywając Z_1, Z_2, Z_3, Z_4..... opór płasczyzny w punktach których spółrzędne są x_1 i y_1, x_2 i y_2, x_3 i y_3,... mamy sześć równań

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + \ldots = 0,$$

$$\Sigma(Zy - Yz) + Z_1 y_1 + Z_2 y_2 + \ldots = 0,$$

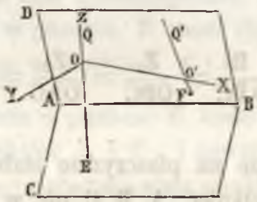
$$\Sigma(Xz - Zx) - Z_1 x_1 - Z_2 x_2 - \ldots = 0,$$

$$\Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Widzimy teraz że są zawsze trzy równania równowagi, jakakolwiek jest liczba punktów podpory; ale także trzy tylko równania do wyznaczenia n niewiadomych Z_1, Z_2, Z_3,.... Więc parcia w punktach podpory zostają niewyznaczone skoro ich liczba przechodzi trzy. Że tak się rzeczy nie mają w zastosowaniu, to dlatego że nie istnieje żadne ciało naturalne niezmiennego kształtu i doskonałej wytrzymałości.

Gdy ciało, poddane siłom P, P′ P″,... opiera się zarazem na kilku płasczyznach, trzeba i dość jest dla równowagi żeby te siły przywodziły się do innych, któreby parły ciało do płasczyzn, i którychby kierunki, normalne do tych płasczyzn, przechodziły wewnątrz wielokątów utworzonych przez punkta podpory.

Dla utkwienia myśli, uważajmy dwie płasczyzny ABC, ABD, i



przypuśćmy że siły P, P′... przywodzą się do dwóch sił normalnych do tych płasczyzn w punktach przyłożenia E, F. Nazwijmy Q i Q′ dwie siły kierunków normalnych EQ i FQ, równe i wprost przeciwne parciom jakie płasczyzny wytrzymują w E i F. Zastępując tym sposobem płasczyzny ABC, ABD przez siły Q, Q′, czynimy równowagę siłom P, P′, P″,... i mamy ciało bryłowe wolne wprzestrzeni.

Teraz, aby wyrazić warunki równowagi jak najprościej możebnie, weźmy za oś rzędnych normalnę EQ, za oś $x^{ów}$ najkrótszą odległość OO′ dwóch normalnych EQ, FQ′, za oś $y^{nów}$ prostopadłę do płasczyzny ZOX; uczyńmy $OO' = a$ i nazwijmy θ kąt dwóch płasczyzn ABC, ABD. Biorąc O i O′ za punkta przyłożenia sił Q i Q′, co wolno, i zważając że

$$\mathrm{dos}(O'Q', OZ) = \mathrm{dos}\,\theta, \qquad \mathrm{dos}(O'Q', OY) = \mathrm{wst}\,\theta;$$

otrzymujemy łatwo sześć równań

$$
(27) \begin{cases} \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y + Q' \operatorname{wst} \theta = 0, \quad \Sigma Z + Q + Q' \operatorname{dos} \theta = 0, \\ L = 0, \quad M - Q' a \operatorname{dos} \theta = 0, \quad N + Q' a \operatorname{wst} \theta = 0. \end{cases}
$$

Rugując Q i Q', znajdujemy cztery równania

$$
\Sigma X = 0, \quad L = 0, \quad N - a\Sigma Y = 0, \quad M - N \operatorname{dot} \theta = 0
$$

które wyrażają warunki równowagi danego układu.

Wartości

$$
Q' = \frac{M}{a \operatorname{dos} \theta} = \frac{-\Sigma Y}{\operatorname{wst} \theta},
$$

$$
Q = \Sigma Y \operatorname{dot} \theta - \Sigma Z
$$

oznaczają natężenie ciśnień które ciało w równowadze wywiera na płaszczyzny.

Jeśli dwie siły normalne Q i Q' są na jednej płaszczyznie, wtedy $a = 0$; zatem początek spółrzędnych O jest punktem spotkania normalnych EQ, FQ', i równania (27) stają się

$$
\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y + Q' \operatorname{wst} \theta = 0, \quad \Sigma Z + Q + Q' \operatorname{dos} \theta = 0
$$

$$
L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.
$$

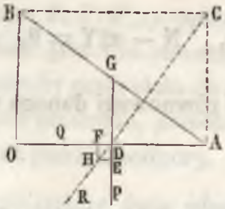
W tym przypadku, warunkom

$$
L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0 \quad \text{i} \quad R \gtreqless 0
$$

staje się zadość; więc układ sił P, P',... ma wynikowę która przechodzi przez punkt spotkania normalnych EQ, FQ'. Ta wynikowa leży na płaszczyznie dwóch normalnych i w ich kącie; bo jej rzut ΣX na osi OX, prostopadłej do płaszczyzny tych normalnych, jest zero, a ona sama jest równa i wprost przeciwna wynikowej dwóch sił normalnych Q i Q'.

68. Na zastosowanie weźmy następujący przykład.

ZAGADNIENIE. *Linia prosta* AB *opiera się na dwóch płaszczyznach, poziomej* OA *i pionowej* OB; *w jej punkcie* G *jest przyłożony ciężar* P. *Jaką siłę* Q *trzeba przyłożyć w* A *aby wstrzymać ślizganie się tego punktu prostej* AB?



Na mocy tego co poprzedza, widzimy zaraz że siły działające na prostę AB powinny się rozkładać na dwie prostopadłe do płaszczyzn OA i OB w punktach A i B. Zatem wynikowa sił P i Q, przeniesionych do punktu D musi przechodzić przez punkt spotkania prostopadłych AC i BC; co wymaga żeby było

$$\frac{Q}{P} = \frac{EH}{ED} = \frac{AD}{AC}.$$

Owoż,

$$\frac{AD}{AO} = \frac{AG}{AB},$$

więc

$$Q = \frac{AG \cdot OA}{AB \cdot OB} \cdot P.$$

Jeśli punkt G jest środkiem prostej AB, i $OB = \frac{1}{2} OA$, wtedy $Q = P$.

69. UWAGA OGÓLNA. Wszystko cośmy powiedzieli o równowadz

układów stosuje się tylko do układów bryłowych niezmiennych, to jest takich których punkta materyalne ani się zbliżać do siebie ani oddalać nie mogą. Ta samoista niezmienność kształtu układów materyalnych, czyli ciał, nie istnieje w naturze. Ale są ciała naturalne które, podległe siłom zwykle działającym, tak mało kształt zmieniają że trzeba długiego czasu aby zmianę dostrzedz i ocenić. Takiemi są naprzykład materyały, dostatecznej wytrzymałości, używane do budowy. Można więc, przez przybliżenie, stosować do tych ciał naturalnych wszystko co należy do równowagi układów bryłowych. Wyniknie ztąd pewny błąd, ale niezawodnie ten błąd będzie tem mniejszy im więcej ciała naturalne zbliżą się do ciał idealnych, któreśmy nazwali układami bryłowemi niezmiennemi. Nie będzie nawet żadnego błędu, jeśli będziemy uważali układ materyalny w równowadze z kształtem jaki wziął ostatecznie pod działaniem sił przyłożonych.

Gdy układ materyalny jest w równowadze, można oczywiście przypuścić, nie naruszając w niczem stanu równowagi, że ten układ ma kształt niezmienny; zatem siły, przyłożone do różnych jego punktów, które sobie czynią równowagę na układzie przekształconym teorycznie na bryłowy niezmienny, muszą zadość czynić wurunkom równowagi tego układu. Więc sześć równań wyrażających tę równowagę, które są konieczne i dostateczne dla równowagi układów bryłowych, istnieją także w równowadze ciał naturalnych. A chociaż te równania konieczne nie wystarczają już dla równowagi ciał naturalnych, możemy niewątpliwie użyć ich do wyznaczenia sił niewiadomych które do nich wchodzą. Pojmujemy teraz jasno że, jeśli potrzebujemy tych sześciu równań równowagi, albo tylko pewnych związków które są ich następstwem, możemy zastosować, do sił działających na jakikolwiek układ materyalny w równowadze, wszystko co się tycze składania sił przyłożonych do układu bryłowego albo zastąpienia jednego układu sił przez drugi; ale te składania i zastąpienia jednych sił przez drugie są tylko idealne, i nie mogą się uskuteczniać rzeczywiście bez zmiany stanu równowagi układu materyalnego, jeśli punkta przyłożenia sił nie są połączone niezmiennie.

ROZDZIAŁ III.

ZASTOSOWANIE TEORYI SIŁ RÓWNOLEGŁYCH DO PRZYPADKU CIĘŻKOŚCI.

ŚRODKI CIĘŻKOŚCI.

70. Wszystkie ciała zostawione sobie samym biorą ruch ku ziemi, czyli jako się mówi, spadają na ziemię; przyczyną tego ruchu jest siła nazwana *ciężkością*. Ciężkość działa na każdą cząstkę materyalną, w kierunku prostopadłym do powierzchni wód stojących. Ten kierunek nazywa się linią *pionową* albo *wierzchołkową* miejsca, a przedłużony w górę i na dół, wyznacza dwa punkta zwane *zenit* nad głową i *nadir* pod nogami. Wszelka płaszczyzna, wszelka linia, prostopadła do linii pionowej, jest płaszczyzną poziomą (horyzontalną), linią poziomą; a płaszczyzna przechodząca przez linię pionową jest płaszczyzną pionową. Jeśli zawiesimy ciało na nici zupełnie giętkiej, ta nić wyciąga się zaraz w linię prostą mającą kierunek pionowy; jeśli przetniemy nić, ciało upada wedle przedłużenia tej linii; nadto tężność nici która utrzymuje zawieszone ciało w spoczynku jest ciągle ta sama. To dowodzi że na tem samem miejscu ziemi ciężkość wywiera, na ciało które nie bierze ruchu, działanie ciągłe w kierunku stałym i z natężeniem stałem. Ten kierunek i natężenie ciężkości zmieniają się z położeniem ciała na powierzchni; natężenie zmienia się z szerokością geograficzną i z wysokością; ale te zmiany nie są dostrzegalne w małej rozległości, a tem mniej w różnych punktach jednego ciała. Gdyby ziemia była sferą jednorodną, albo złożoną z warstew spółśrodkowych jednostajnych, i nie miała żadnego ruchu, prostopadle do wód stających przechodziłyby przez jej środek. Rzeczy nie mają się tak zupełnie: ale jednak te prostopadłe przechodzą bardzo blizko środka ziemi; a ponieważ ten środek jest daleko, i promień ziemski dość wielki w porównaniu z rozmiarami ciał których oceniamy równowagę albo ruch na powierzchni ziemi, kierunki działań ciężkości na punkta

jednego ciała, to jest pionowe poprowadzone przez te punkta, mogą być uważane jako równoległe. Zresztą, niema potrzeby znać figury ziemi, aby stwierdzić doświadczeniem równoległość i stałość natężenia ciężkości, w daleko większej rozciągłości niż rozmiary ciał któremi się zwykle zajmujemy.

Ciężkość działa na wszystkie części tak wewnętrzne jako zewnętrzne które składają ciało; ponieważ trzeba tego samego wysilenia aby utrzymać całe ciało, albo wszystkie razem części na które je rozłożyć można.

Wiemy nadto, że ciała lekkie jako puch, albo ciężkie jako kula ołowiana, całe albo podzielone na części, spadają w próżni, z jednej wysokości z tą samą prędkością i w tym samym kierunku. To dowodem że ciężkość działa jednakowo na wszystkie cząstki składowe ciała, jakakolwiek jest ich natura.

Ztąd wynika że działania ciężkości na cząstki składowe ciał mogą być uważane jako siły równolegle między sobą i proporcyonalne do massy tych cząstek; a jeśli jeszcze przypuścimy że ciało może być wzięte za układ bryłowy niezmienny, będziemy właśnie w przypadku do którego się stosuje teorya sil równoległych. Aby więc tylko pojąć skutki ciężkości, dość będzie uważać ciała naturalne jako zbiór punktów materyalnych, niezmiennie między sobą powiązanych, podległych siłom równym i równoległym działającym w jedną stronę.

Wynikowa tych wszystkich sił równoległych, która jest równa ich summie i do nich równoległa, nazywa się *ciężarem* albo wagą ciała, a środek tych sił równoległych, niezależny od ich kierunku względem położenia ciała, nazywa się *środkiem ciężkości.*

Więc, w granicach prawdziwości założeń, środek ciężkości ciała jest punktem przez który przechodzi kierunek ciężaru, jakiekolwiek położenie bierze ciało względem płaszczyzny poziomej. Jeśli środek ciężkości jest ustalony, wtedy ciało zostaje w równowadze we wszystkich położeniach jakie około niego wziąć może; bo wynikowa działań, które ciężkość wywiera na wszystkie cząstki składowe, będzie zniszczona przez niezmienność środka ciężkości; ma się rozumieć, jeśli jest jednym z punktów tego ciała albo z niem niezmiennie połączony.

Tym sposobem można, w zagadnieniach mechaniki, nie zważać na ciężkość ciała, byle do środka ciężkości tego ciała przyłożono siłę równą jego ciężarowi i do niego równoległą. W tem znaczeniu, wolno uważac każde ciało jakoby przywiedzione do swojego środka ciężkości, w którymby cała jego massa była zkoncentrowana.

Wyłuszczona własność środka ciężkości ciał nie może służyć za określenie, bo nie widać a priori czy taki punkt istnieje (*). Uważaliśmy wprawdzie jego istnienie za niewątpliwe, ale opierając się na przypuszczonéj wiedzy działań ciężkości; co jest tylko przybliżeniem, rzeczywiście tem większem im są mniejsze rozmiary ciała i kształt mniej zmienny.

71. Gdy ciało jest jednorodne, to jest takie którego wszystkie części są tej samej natury, wtedy objętości równe mają ciężary równe, albo mówiąc ściślej, ciężar ciała jednorodnego jest proporcyonalny do jego objętości. Jeśli materya dwóch ciał jednorodnych jest różna, ciężar jest ogólnie różny w równych objętościach. Nazywa się *ciężarem gatunkowym* ciała jednorodnego ciężar pewnej jego objętości wziętej za jedność, albo innemi słowy, stosunek ciężaru ciała do objętości. Za jedność ciężaru bierze się *gramm*, to jest ciężar 1^szo^ centymetra sześciennego wody dystylowanej z gęstością największą możebną która przypada w temperaturze 4°, a ten ciężar wyznaczony w próżni. Ciężar ciała zmienia się z miejscem ziemi; ale, ponieważ ciężary wszystkich ciał zmieniają się w tym samym stosunku, jako później zobaczymy, ciężar gatunkowy ciała jest wszędzie jednakowy.

72. Jeśli ciało nie jest jednorodne, jego ciężar nie będzie proporcyonalny do objętości. Aby dobrze wiedzieć co trzeba rozumieć przez ciężar gatunkowy takiego ciała, w danym punkcie M, niech będzie p ciężar i v objętość cząstki niezmiernie małej w której się punkt materyalny M znajduje; stosunek $\frac{p}{v}$ jest *ciężarem średnim* tej cząstki. Otóż, gdy objętość v dąży do zera, ten stosunek dąży do pewnej granicy którą właśnie nazwano *ciężarem gatunkowym ciała w punkcie* M. Z tego określenia wynika że ciężarem gatunko-

(*) Poinsot, w jednej z not swojej *Statyki* dowodzi że ciała naturalne nie mają takiego punktu.

wym ciała w punkcie M jest ciężar jakiby miała jedność objętości materyi która oblega ten punkt M.

73. Gdy są wiadome ciężary i środki ciężkości danej liczby ciał, można dwiema metodami znaleźć środek ciężkości układu tych ciał, niezmiennie połączonych między sobą.

Pierwsza metoda zależy na składaniu sił równoległych, biorąc jedną po drugiej; tym sposobem dochodzi się do ostatniej wynikowej, której punkt przyłożenia jest środkiem ciężkości danego układu.

Druga metoda opiera się na twierdzeniu momentów sił równoległych, za pomocą którego wyznacza się spółrzędne środka ciężkości względem trzech płaszczyzn spółrzędnych. Stosując tę metodę, oznaczmy przez p ciężar jednego z ciał układu, przez x, y, z spółrzędne jego środka ciężkości, a przez x_1, y_1, z_1 spółrzędne środka ciężkości całego układu; nakoniec uczyńmy $\mathrm{P} = p + p' + p'' + \ldots$, będzie (53).

$$x_1 = \frac{\Sigma px}{\mathrm{P}}, \quad y_1 = \frac{\Sigma py}{\mathrm{P}}, \quad z_1 = \frac{\Sigma pz}{\mathrm{P}}.$$

74. Określenie środka ciężkości ciał, jako środka sił równoległych, nie jest ani ścisłe ani ogólne. I w saméj rzeczy, istnienie tego punktu, zależące od istnienia wynikowej działań ciężkości, zdaje się polegać na tem żeby rozmiary ciała były dosyć małe; co jest rzeczą nieokreśloną, niepewną. A jeśli ciało ma kształt zmienny, albo jeśli chodzi o układ ciał niezależnych od siebie, jako na przykład ziemia i księżyc, albo planety; wtedy wynikowa działań ciężkości jest tylko czczym wyrazem bez wyznaczonego sensu, i środek ciężkości, określony jako wyżej, staje się punktem zmyślonym.

W zastosowaniach Mechaniki środek ciężkości, albo, jako mówi Euler, *punkt bezwładności*, gra ważną rolę; trzeba więc go określić z całą ścisłością. Owoż, można uważać za widoczne, a dowiedziemy w Dynamice, że, na tem samem miejscu ziemi, ciężar ciała jest proporcyonalny do swej massy; co daje

$$p = mg,$$

oznaczając przez m massę punktu materyalnego mającego ciężar p, i przez g ciężar jedności massy. Jeśli więc, w ostatnich formułach, zastąpimy p przez mg, i P przez Mg, znosząc czynnik g, spólny obydwom wyrazom każdego ze trzech ułamków, otrzymamy

$$x_1 = \frac{\Sigma mx}{M}, \quad y_1 = \frac{\Sigma my}{M}, \quad z_1 = \frac{\Sigma mz}{M}.$$

Te formuły jako widzimy, nie zawierają już ani śladu działania ciężkości, którąśmy uważali aby przyjść do wiedzy środka ciężkości. Więc punkt określony temi nowemi formułami istnieje zawsze; ten właśnie punkt, zwany *środkiem massy*, nazywać będziemy środkiem ciężkości układu bryłowego niezmiennego. Będzie on tylko wtedy punktem przyłożenia wynikowej działań ciężkości kiedy ciało jest dostatecznie małe. Ostatnie określenie środka ciężkości jest ogólne, rozciąga się łatwo do ciała zmiennego jakiegokolwiek, albo do układu mass jakkolwiek położonych w przestrzeni.

75. Gdy ciało jest jednorodne, massa jakiejkolwiek jego cząstki jest proporcyonalna do jej objętości; więc, nazywając D gęstość i v objętość cząstki mającej massę m, będzie

$$m = v\mathrm{D}.$$

Zatem, jeśli zastąpimy, w ostatnich formułach, m przez vD i M przez VD, znosząc czynnik D, spólny obydwom wyrazom trzech ułamków, znajdziemy

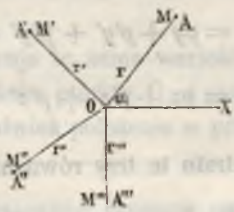
$$x_1 = \frac{\Sigma vx}{V}, \quad y_1 = \frac{\Sigma vy}{V}, \quad z_1 = \frac{\Sigma vz}{V}.$$

Te formuły pokazują że położenie środka ciężkości ciał jednorodnych zależy jedynie od kształtu ich figury; przeto wyznaczenie środka ciężkości w takich ciałach jest poprostu zagadnieniem geometryi.

Ztąd zaraz łatwo wnieść można że, gdy ciało jednorodne jest zamknięte powierzchnią wypukłą, jego środek ciężkości znajduje się wewnątrz tej powierzchni.

WŁASNOŚCI OGÓLNE ŚRODKA CIĘŻKOŚCI.

76. Twierdzenie. *Dane są massy* m, m', m'',... *stanowiące układ niezmienny, jeśli do ich środków ciękości* A, A', A'',.. *przyłożono siły przechodzące przez środek ciężkości* O *układu, i przedstawione co do wielkości i kierunku przez wieloczyny* m.OA, m'.OA', m''.OA''...; *te siły będą w równowadze.* I nawzajem (*).



Jakoż, biorąc punkt O za początek spółrzędnych, poprowadźmy jakąkolwiek oś OX, i oznaczmy, względnie do niej, przez x odciętę punktu A, przez α kąt prostej OA z pół-osią dodatną OX, przez X składowę wynikowej wszystkich sił; i nakoniec nazwijmy r odległość OA; będzie

$$X = \Sigma mr \cos\alpha = \Sigma mx.$$

Ale, na mocy wiadomych formuł, mamy

$$\Sigma mx = Mx_1,$$

i następnie

$$X = Mx_1.$$

Więc, jeśli $x_1 = 0$, będzie $X = 0$; i nawzajem, jeśli $X = 0$ będzie $x_1 = 0$. Co dowodzi twierdzenia, ponieważ oś OX jest jakakolwiek.

(*) Gdy $m = m' = m_, ' = \ldots$ i zamiast mass równych wzięto ciężary równe, ten szczególny przypadek jest twierdzeniem Leibnica.

77. Okażemy teraz inną własność środka ciężkości. Niech będzie niezmienny układ ciał mających ciężary $p, p', p'',\ldots$ i środki ciężkości A, A', A'',... Oznaczmy przez $r, r', r''\ldots, r_1$ odległości środków ciężkości tych ciał i ich układu od punktu O przestrzeni, a dla skrócenia uczyńmy $AA' = \rho_1$, $AA'' = \rho_2,\ldots$ $A'A'' = \rho'_2,\ldots$; jeśli weźmiemy trzy osie prostokątne przechodzące przez punkt O, zachowując zwykłą notacyę, będziemy mieli

$$Px_1 = px + p'x' + p''x'' + \ldots$$

$$Py_1 = py + p'y' + p''y'' + \ldots$$

$$Pz_1 = pz + p'z' + p''z'' + \ldots$$

Podnieśmy do kwadratu te trzy równania i dodajmy stronami, otrzymamy

$$P^2r_1^2 = p^2r^2 + p'^2r'^2 + p''^2r''^2 + \ldots + 2pp'(xx' + yy' + zz') + \ldots$$
$$+ 2p'p''(x'x'' + y'y'' + z'z'') + \ldots$$

Owoż,

$$\rho_1^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z') = r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy' + zz),$$

zkąd

$$xx' + yy' + zz' = r^2 + r'^2 - \rho_1^2;$$

więc

$$P^2r_1^2 = p^2r^2 + p'^2r'^2 + \ldots + pp'(r^2 + r'^2 - \rho_1^2) + pp''(r^2 + r''^2 - \rho_2^2) + \ldots$$
$$+ p'p''(r'^2 + r''^2 - \rho'^2_2) + \ldots$$

Wszystkie wyrazy zawierające r^2 dają wieloczyn $pr^2(p + p' + p'' + \ldots)$, i tak samo wyrazy zawierające r'^2, $r''^2,\ldots$; zatem, ponieważ $P = p + p' + p'' + \ldots$, będzie

$$P^2r_1^2 = P(pr^2 + p'r'^2 + \ldots) - pp'\rho_1^2 - pp''\rho_2^2 - \ldots - p'p''\rho'^2_2 - \ldots$$

więc

$$\Sigma pr^2 = Pr_1^2 + \frac{1}{P} \Sigma pp'\rho^2.$$

Ta formuia dowodzi że summa Σpr^2 jest najmniejsza możebna gdy $r_1 = 0$, to jest gdy punkt O przypada w środku ciężkości układu.

Widzimy także że summa Σpr^2 zostaje stała, gdy się r_1 nie zmienia.

Zatem, Σpr^2 zachowuje tę samą wartość, gdy środek ciężkości układu opisuje sferę około punktu O, a sam układ, nie zmieniając kształtu, bierze jakiekolwiek położenie w przestrzeni.

WYZNACZENIE ŚRODKÓW CIĘŻKOŚCI.

78. Chociaż linie i powierzchnie nie posiadają ani massy ani ciężaru, są jednak uważane jako mające środek ciężkości. Albowiem, można przypuścić że te figury geometryczne są granicami odpowiedających figur materyalnych, albo że są złożone z cząsteczek materyalnych mających massy proporcyonalne do ich wielkości. Środek tych wszystkich mass składowych jest, przez podobieństwo, nazwany środkiem ciężkości linii albo powierzchni. Zamiast mass można uważać siły równoległe, albo ciężary, przyłożone do cząstek składowych figury proporcyonalnie do ich wielkości, i wyznaczyć punkt przyłożenia wynikowej.

Mówi się że linia albo powierzchnia jest jednorodna, gdy jej części równowarte mają massy równe, albo gdy poddane siłom równoległym, proporcyonalnym do ich wielkości, dają wynikowe równe. We wszystkiem co następuje będzie mowa o samych liniach albo powierzchniach jednorodnych.

Często można uprościć wyznaczenie środka ciężkości ciał jednorodnych, opierając się na zasadach następujących.

1° *Środek figury jest jej środkiem ciężkości.*

Albowiem, środek figury jest punktem takim, że wszelka płasczyzna przezeń poprowadzona dzieli tę figurę na dwie części symetryczne Otóż, środek ciężkości ciała jednorodnego jest punktem jedynym którego położenie zależy tylko od figury tego ciała; niema więc żadnej przyczyny żeby się znajdował raczej z jednej strony tej płaszczyzny niż z drugiej; więc się znajduje na samej płaszczyznie. Zatem, środek ciężkości, mając się znajdować zarazem na każdej płaszczyznie którą poprowadzić można przez środek figury, jest spólnem przecięciem tych płaszczyzn, czyli jest we środku figury.

2° *Jeżeli ciało ma płaszczyznę symetryi, jego środek ciężkości jest na tej płaszczyznie.*

Bo niema przyczyny żeby się znajdował raczej z jednej strony tej płaszczyzny niż z drugiej.

Tak samo rozumując widzimy że:

3° *Jeśli ciało ma oś symetryi, jego środek ciężkości jest na tej osi.*

4° *Jeśli ciało ma płaszczyznę średnicową, jego środek ciężkości jest na tej płaszczyznie.*

Z tych zadań wynikają następujące twierdzenia:

Środek ciężkości linii prostej jest we środku jej długości.

Środek ciężkości okręgu koła, powierzchni koła, powierzchni sfery i jej objętości jest we środku figury.

Środek ciężkości równoległoboku, równoległościanu jest na przecięciu przekątnych.

Środek ciężkości walca obrotowego jest we środku jego osi.

ŚRODEK CIĘŻKOŚCI LINIJ.

79. Nietrudno, za pomocą składania sił równoległych, znaleźć środek ciężkości obwodów prostolinijnych. Trzeba tylko uważać boki jako linie materyalne podległe siłom równoległym, działającym w jedną stronę, które są proporcyonalne do ich długości i przyłożone do ich środków; punkt przyłożenia wynikowej tych sił będzie środkiem ciężkości obwodu.

Jako przykład, wyznaczmy *środek ciężkości obwodu trójkąta* ABC.

W tym celu, wyobraźmy sobie że do środków D, E, F boków BC, AC, AB są przyłożone siły równoległe, działające w jedną

stronę i proporcyonalne do długości tych boków. Składamy najpierwej dwie siły przyłożone do punktów D, E, i niech będzie H punkt przyłożenia ich wynikowej; poczem, składamy tę wynikowę częściową z siłą przyłożoną do punktu F, i znajdujemy ostateczną wynikowę której punkt przyłożenia G, leżący na linii FH, jest środkiem ciężkości obwodu trójkąta ABC. Uważajmy teraz że punkt H otrzymuje się przez proporcyę

$$\frac{HD}{HE} = \frac{AC}{BC}.$$

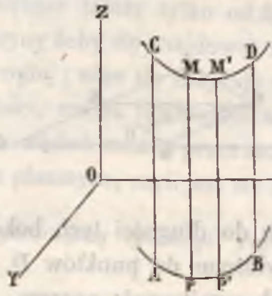
Ale prosta DF, łącząca środki boków BC, BA, jest połową boku AC, i tak samo prosta EF jest połową boku BC; zatem mamy

$$\frac{HD}{HE} = \frac{FD}{FE}.$$

Ta proporcya pokazuje że linia FH, na której się znajduje środek ciężkości obwodu trójkąta ABC, jest dwójsieczną kąta DFE. Dowiedzionoby podobnie że ten środek ciężkości znajduje się także na dwójsiecznych kątów DEF i EDF. Więc środek ciężkości obwodu trójkąta jest środkiem koła wpisanego w drugi trójkąt który ma za wierzchołki środki boków pierwszego.

80. Szukajmy, za pomocą ogólnej metody momentów sił równoległych, środka ciężkości G jakiejkolwiek linii CD, którą odniesiemy do trzech osi prostokątnych. Wiemy że przez moment figury matematycznej względem płaszczyzny, trzeba rozumieć moment sił

równoległych do tej płaszczyzny, przyłożonych do cząstek składowych



figury proporcyonalnie do ich wielkości. Owoż, linia CD jest jednorodna z założenia; więc jej moment i momenta cząstek linijnych składowych, względem płaszczyzny XY naprzykład, wyrażają się przez wieloczyny z długości tych linij i z rzędnych, odpowiedających punktom przyłożenia wynikowej wszystkich sił i każdej z sił składowych.

Aby otrzymać te momenta, uważajmy na linii CD jakikolwiek punkt M (x, y, z) i punkt sąsiedni M' $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$; uczyńmy łuk $CM = s$, $MM' = \Delta s$. Jeśli oznaczymy przez l długość linii CD, i przez z_1 rzędnę jej środka ciężkości G, długość l będzie dana przez całkę

$$l = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

wziętą w granicach odpowiedających skrajnościom C i D linii CD; a zaś moment tej linii względem płaszczyzny XY wyrazi się przez wieloczyn lz_1. Moment cząstki linijnej składowej Δs względem tej samej płaszczyzny będzie $(z + \varepsilon)\Delta s$. W tym wieloczynie ilość ε dąży do zera, w miarę jak punkt M' zbliża się do M. Owoż, można zawsze obrać M' tak blizko M żeby od M do M' punkta łuku Δs szły ciągle oddalając się od płaszczyzny XY, albo się do niej zbliżając; tym sposopem środek ciężkości łuku Δs będzie się znajdował między dwiema płaszczyznami równoległemi do XY, a przechodzącemi przez M i M'. Więc ilość ε jest mniejsza od przyrostu Δz który się może stać tak małym jak się podoba. Jeśli teraz weźmiemy summmę momentów wszystkich cząstek składających linię CD, będziemy mieli

$$lz_1 = \Sigma(z + \varepsilon)\Delta s = \Sigma z\Delta s + \Sigma\varepsilon\Delta s.$$

To równanie ma miejsce jakakolwiek jest ustawa, wedle której linia CD została podzielona na cząstki Δs; więc będzie jeszcze istniało gdy te cząstki, w liczbie tak wielkiej jak się podoba, staną się nieskończenie małemi. Biorąc zatem granice otrzymujemy

$$lz_1 = \text{gr.}\,\Sigma z\Delta s + gr.\,\Sigma\varepsilon\Delta s$$

Ale wiemy z Analizy że

$$\text{gr.}\Sigma\Delta s = \int zds, \qquad \text{gr.}\,\Sigma\varepsilon\Delta s = 0\;;$$

więc

$$lz_1 = \int zds.$$

Mamy tedy, do wyznaczenia spółrzędnych środka ciężkości jakiejkolwiek linii CD, cztery formuły

$$l = \int ds,$$

$$lx_1 = \int xds,$$

$$ly_1 = \int yds,$$

$$lz_1 = \int zds.$$

Te cztery całki powinny być wzięte między granicami odpowiedającemi skrajnościom C i D linii krzywej CD.

Jeśli krzywa CD jest płaska, wtedy, uważając jej płasczyznę za płasczyznę xy, będzie $z=0$, i powyższe cztery formuły przywiodą się do dwóch

$$x_1 = \int x ds, \quad y_1 = \int y ds.$$

81. Środek ciężkości helicy. Aby dać przykład użycia wszystkich formuł, szukajmy środka ciężkości helicy, biorąc dla tej linii o podwójnej krzywiznie równania

$$x = \mathrm{R} \operatorname{dos} u, \quad y = \mathrm{R} \operatorname{wst} u, \quad z = m\mathrm{R}u.$$

Mamy zaraz

$$ds = \mathrm{R}\sqrt{1+m^2}\,du\,;$$

zatem

$$l = \mathrm{R}\sqrt{1+m^2}\int_0^u du = \mathrm{R}u\sqrt{1+m^2},$$

$$lx_1 = \mathrm{R}^2\sqrt{1+m^2}\int_0^u \operatorname{dos} u\,du = \mathrm{R}^2\sqrt{1+m^2}\operatorname{wst} u,$$

$$ly_1 = \mathrm{R}^2\sqrt{1+m^2}\int_0^u \operatorname{wst} u\,du = \mathrm{R}^2\sqrt{1+m^2}(1-\operatorname{dos} u),$$

$$lz_1 = \mathrm{R}^2 m\sqrt{1+m^2}\int_0^u u\,du = \mathrm{R}^2 m\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{u^2}{2},$$

Zkąd, dzieląc przez wartość l, otrzymujemy

$$x_1 = \frac{y}{u}, \quad y_1 = \frac{\mathrm{R}-x}{u}, \quad z_1 = \frac{z}{2}.$$

Dla pierwszego półskrętu helicy będzie

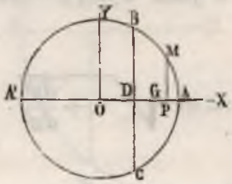
$$x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{2\mathrm{R}}{\pi}, \quad z_1 = \frac{m\pi\mathrm{R}}{2};$$

a dla całego pierwszego skrętu

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = m\pi\mathrm{R}.$$

To pokazuje że środek ciężkości helicy, złożonej z kilku skrętów, jest we środku jej wysokości.

82. Łuk koła. Szukajmy teraz środka ciężkości łuku BAC koła. Łuk koła jest symetryczny względem średnicy która go dzieli na



dwie równe części; ztąd wnosimy że środek ciężkości G łuku BAC znajduje się na średnicy AA'. Dość więc będzie wyznaczyć odległość OG tego punktu od środka koła O. W tym celu, biorąc średnicę AA' za oś odciętych, i średnicę prostopadłą za oś rzędnych, uważajmy punkt M(x, y) łuku AB. Jeśli, dla skrócenia, uczynimy łuk AM$=s$, łuk BAC $= l$, i nazwiemy a promień koła, będziemy mieli

$$x = a \operatorname{dos} \text{MOA} = a \operatorname{dos} \frac{s}{a} \cdot$$

Zatem

$$lx_1 = a \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \operatorname{dos} \frac{s}{a}\, ds = 2a \int_0^{\frac{1}{2}l} \operatorname{dos} \frac{s}{a}\, ds = 2a^2 \operatorname{wst} \frac{l}{2a},$$

albo

$$lx_1 = ac$$

oznaczając przez c cięciwę BC.

Więc

$$x_1 = \frac{ac}{l} \cdot$$

Ta formuła pokazuje że *odległość środka ciężkości łuku koła, od środka tego koła, jest czwartą proporcyonalną do długości łuku, jego cięciwy i promienia koła.*

Można innym sposobem zastosować rachunek całkowy do wyznaczenia środka ciężkości łuku koła. Żeby to uczynić, zamiast wyrażać x w funkcyi s jako wyżej, wyraźmy s w funkcyi x; będziemy mieli

$$ds = dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

uważając że pierwiastnik powinien mieć znak ilorazu $\frac{ds}{dx}$. Ten warunek wymaga, w obecnym przypadku, żeby pierwiastnik miał znak + od punktu C do A, a znak — od A do B. Uniknie się tej niedogodności dwóch znaków, całkując od A do B i podwajając otrzymany wynik. Co daje

$$lx_1 = -2\int_a^x x dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Owoż, z równania koła

$$x^2+y^2=a^2$$

wywodzimy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};$$

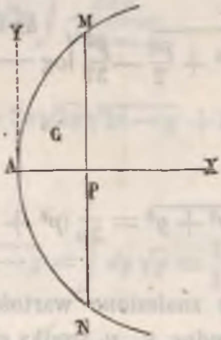
podstawiając tę wartość, i wykonywając wskazane całkowanie, znajdujemy

$$lx_1 = -2a\int_a^x \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2a\sqrt{a^2-x^2} = ac.$$

Więc

$$x_1 = \frac{ac}{l}.$$

83 Środek ciężkości łuku paraboli.



Równanie paraboli jest

$$y^2 = 2px,$$

zkąd

$$ydy = pdx.$$

Zatem, na mocy wiadomych formuł, mamy

$$l = \frac{1}{p}\int_0^y \sqrt{p^2 + y^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2p}\left(y\sqrt{p^2 + y^2} + p^2 \log \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}\right).$$

Następnie

$$lx_1 = \int_0^x xdx \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} = \int_0^x dx \sqrt{x^2 + \frac{px}{2}}$$

$$= \int_0^x dx \sqrt{\left(x + \frac{p}{4}\right)^2 - \frac{p^2}{16}}.$$

Ta całka wywodzi się łatwo z poprzedzającej, w której zamiast y trzeba położyć $x + \frac{p}{4}$, i zamienić p^2 na $-\frac{p^2}{16}$; poczem wyznaczyć ilość stateczną tak żeby na $x=0$ było $lx_1=0$. Co da

$$lx_1 = \frac{1}{2}\left(x+\frac{p}{4}\right)\sqrt{x^2+\frac{px}{2}} - \frac{p^2}{32}\log\frac{4x+p+4\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}}{p}.$$

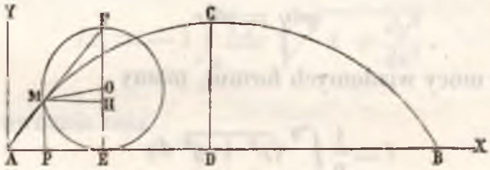
Dla y_1 mamy

$$ly_1 = \frac{1}{p}\int_0^y ydy\sqrt{p^2+y^2} = \frac{1}{3p}(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^2}{3}.$$

Jeśli teraz podzielimy znalezione wartości lx_1 ly_1 przez wartość l, otrzymamy spółrzędne x_1, y_1 środka ciężkości łuku paraboli.

Środek ciężkości łuku MAN paraboli znajduje się na jego osi symetryi AX, i ma tę samą odciętę x_1 co łuk AM.

84. Środek ciężkości łuku cykloidy.



Równanie cykloidy, odniesione do osi AX, AY, jest dla łuku AC

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1},$$

nazywając a promień koła rodzącego.

Mamy najpierwej

$$l = \int_0^y \frac{ds}{dy}dy = \sqrt{2a}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{2a-y}}$$

$$= 4a - 2\sqrt{2a(2a-y)}.$$

Następnie.

$$lx_1 = \sqrt{2a}\int \frac{xdy}{\sqrt{2a-y}}$$

$$= -2x\sqrt{2a}\sqrt{2a-y} + 2\sqrt{2a}\int dx\sqrt{2a-y}.$$

Ale

$$\int dx\sqrt{2a-y} = \int dy\sqrt{y} = \frac{2}{3}y\sqrt{y} + C.$$

Podstawiając tę wartość, i wyznaczając stateczną dowolną tak, żeby na $x = 0$ i $y = 0$ było $lx_1 = 0$, otrzymujemy

$$lx_1 = \frac{4}{3}y\sqrt{2ay} - 2x\sqrt{2a(2a-y)}.$$

Nakoniec,

$$ly_1 = \sqrt{2a}\int_0^y \frac{ydy}{\sqrt{2a-y}} = \frac{16a^2}{3} - \frac{2}{3}(4a+y)\sqrt{2a(2a-y)}.$$

Łuk AC, połowa obwodu cykloidy, ma długość $l = 4a$, $y = 2a$; zatem spółrzędne jego środka ciężkości są :

$$x_1 = \frac{4a}{3} \quad \text{i} \quad y_1 = \frac{4a}{3},$$

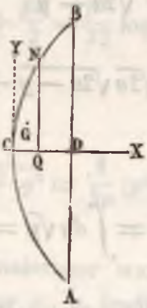
albo

$$x_1 = \frac{2CD}{3} = y_1.$$

Srodek ciężkości całego łuku ACB cykloidy znajduje się na jego osi symetryi CD, i ma tę samą rzędnę $y_1 = \frac{4a}{3}$ co łuk AC.

85. Uważajmy teraz cykloidę odniesioną do normalnej i do

stycznej w wierzchołku C, wziętych za osie spółrzędne CX, CY; i szukajmy środka ciężkości łuku CNQ.



W tym przypadku równanie cykloidy, dla łuku CB, jest

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{x} - 1}.$$

Zatem, nazywając l długość łuku CN, mamy

$$l = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \int_0^x dx \sqrt{\frac{2a}{x}} = 2\sqrt{2ax}.$$

Następnie

$$lx_1 = \int xds = \sqrt{2a}\int_0^x dx\sqrt{x} = \frac{2}{3}x\sqrt{2ax}.$$

Dla otrzymania y_1, mamy

$$ly_1 = \int yds = \sqrt{2a}\int_0^x y\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Zcałkujmy częściami, będzie

$$ly_1 = \sqrt{2a}\left(2y\sqrt{x} - 2\int\sqrt{2a - x}\,dx\right)$$

$$= 2\sqrt{2a}\left(y\sqrt{x} + \frac{2}{3}(2a - x)^{\frac{3}{2}} + C\right).$$

Żeby wyznaczyć stateczną dowolną, uważajmy że dla $x = 0$ powinno być $ly_1 = 0$; co daje $C = -\frac{4}{3}a\sqrt{2a}$.

Więc

$$ly_1 = 2\sqrt{2a}\left\{y\sqrt{x} + \frac{2}{3}(2a - x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}a\sqrt{2a}\right\}.$$

Dzieląc wartości lx_1, ly_1 przez l, znajdziemy spółrzędne środka ciężkości łuku CN cykloidy,

$$x_1 = \frac{1}{3}x$$

$$y_1 = y + \frac{2}{3\sqrt{x}}\left\{(2a - x)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{2a}\right\}.$$

Żeby mieć środek ciężkości połowy obwodu cykloidy, czyli łuku CB, trzeba uczynić $x = 2a$, $y = \pi a$; co daje

$$x_1 = \frac{2a}{3}, \qquad y_1 = a\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

Środek ciężkości całego łuku ACB cykloidy znajduje się na jego osi symetryi CD, i ma odciętę $x_1 = \frac{2a}{3}$. Wynik zgodny z otrzymanym poprzednio (84).

86. Gdy równanie danej linii jest funkcyą spółrzędnych biegunowych, trzeba wyrazić ilości l, lx_1, ly_1 za pomocą tych spółrzędnych. Owoż, nazywając r i θ spółrzędne biegunowe punktu M linii krzywej, mamy

$$x = r\,\mathrm{dos}\,\theta, \qquad y = r\,\mathrm{wst}\,\theta,$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2};$$

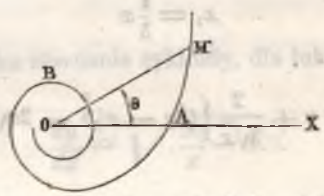
więc całki, wyznaczające środek ciężkości zadanego łuku krzywej, są:

$$l = \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta},$$

$$lx_1 = \int x ds = \int r \operatorname{dos}\theta\, d\theta \sqrt{\frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2},$$

$$ly_1 = \int y ds = \int r \operatorname{wst}\theta d\theta \sqrt{\frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2}.$$

Jako przykład, szukajmy środka ciężkości łuku BM spiralnej



logarytmicznej, wyrażonej przez równanie

$$r = ae^{m\theta}.$$

Różniczkując znajdujemy

$$dr = mae^{m\theta} d\theta,$$

następnie

$$ds = a\sqrt{1 + m^2}\, e^{m\theta} d\theta\cdot$$

Zatem

$$l = a\sqrt{1 + m^2} \int e^{m\theta} d\theta,$$

$$lx_1 = a^2 \sqrt{1 + m^2} \int e^{2m\theta} \operatorname{dos}\theta\, d\theta$$

$$ly_1 = a^2 \sqrt{1 + m^2} \int e^{2m\theta} \operatorname{wst}\theta\, d\theta.$$

Pierwsza całka nie przedstawia żaduej trudności; dwie inne otrzymują się za pomocą dwóch następujących równań

$$\int e^{2m\theta} \operatorname{dos}\theta d\theta = e^{2m\theta} \operatorname{wst}\theta - 2m \int e^{2m\theta} \operatorname{wst}\theta d\theta,$$

$$\int e^{2m\theta} \operatorname{wst}\theta d\theta = - e^{2m\theta} \operatorname{dos}\theta + 2m \int e^{2m\theta} \operatorname{dos}\theta d\theta,$$

z których zaraz wywodzimy

$$\int e^{2m\theta} \operatorname{dos}\theta d\theta = \frac{\operatorname{wst}\theta + 2m \operatorname{dos}\theta}{1 + 4m^2} \cdot e^{2m\theta},$$

$$\int e^{2m\theta} \operatorname{wst}\theta d\theta = \frac{2m \operatorname{wst}\theta - \operatorname{dos}\theta}{1 + 4m^2} \cdot e^{2m\theta}.$$

Gdy obie granice całkowania będą wiadome, wyrachuje się łatwo wszystkie trzy całki określone, i następnie wartości spółrzędnych x_1, y_1 środka ciężkości.

W szczególnym przypadku, gdy skrajność B łuku BM spiralnej logarytmicznej przypada w jej punkcie niemaltycznym O, wtedy długość tego łuku od O do M jest dana przez całkę określoną

$$l = a\sqrt{1 + m^2} \int_{-\infty}^{\theta} e^{m\theta} d\theta = \frac{a}{m} \sqrt{1 + m^2}\, e^{m\theta}.$$

Wartości dwóch innych całek, określonych w tych samych granicach, są

$$lx_1 = \frac{a^2\sqrt{1 + m^2}}{1 + 4m^2} (\operatorname{wst}\theta + 2m \operatorname{dos}\theta) e^{2m\theta},$$

$$ly_1 = \frac{a^2\sqrt{1 + m^2}}{1 + 4m^2} (2m \operatorname{wst}\theta - \operatorname{dos}\theta) e^{2m\theta}.$$

Ztąd wywodzimy

$$x_1 = \frac{am}{1 + 4m^2} (\operatorname{wst}\theta + 2m \operatorname{dos}\theta) e^{m\theta},$$

$$y_1 = \frac{am}{1 + 4m^2} (2m \operatorname{wst}\theta - \operatorname{dos}\theta) e^{m\theta}.$$

Jeśli punkt M schodzi się z punktem A który leży na osi OX, dość uczynić $\theta = 0$ w ostatnich formułach, aby mieć długość łuku od $\theta = 0$ aż do $\theta = -\infty$, i spółrzędne jego środka ciężkości. Otrzymujemy więc

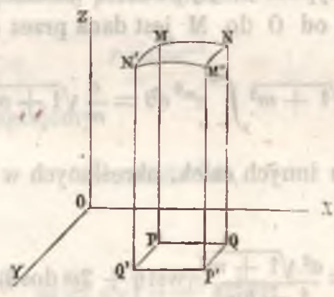
$$l = \frac{a}{m}\sqrt{1+m^2}$$

$$x_1 = \frac{2am^2}{1+4m^2}, \qquad y_1 = -\frac{am}{1+4m^2}.$$

Rzędna y_1 jest odjemna; co można było przewidzieć.

ŚRODEK CIĘŻKOŚCI POWIERZCHNI.

87. Niech będą dwa punkta sąsiednie $M(x, y, z)$ i $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, wzięte na powierzchni jakiejkolwiek, odniesionej do trzech osi spółrzędnych prostokątnych. Poprowadźmy przez każdy z punktów M i M', dwie płaszczyzny równo-



ległe do płaszczyzn zx i zy. Te płaszczyzny utworzą na powierzchni czworobok krzywolinijny MNM'N', który będzie miał za rzut na płaszczyznie xy prostokąt $PQP'Q' = \Delta x \Delta y$. Owoż, wiemy z Analizy że, nazywając ζ kąt jaki płaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie M czyni z płaszczyzną xy, cząstka składowa powierzchni ma za miarę

$$\frac{dxdy}{\cos\zeta}, \quad \text{albo} \quad dxdy\sqrt{1+p^2+q^2};$$

gdzie wartości

$$p = \frac{dz}{dx} \quad \text{i} \quad q = \frac{dz}{dy}$$

znaczą pochodne cząstkowe funkcyi z względem zmiennych niezależnych x i y.

Więc czworobok nieokreślnie mały MNM'N' wyraża się przez

$$\text{MNM'N'} = \Delta x \Delta y (\sqrt{1+p^2+q^2} + \alpha)$$

α jest ilością która niknie z przyrostami Δx, Δy.

To ustaliwszy, uważajmy że rzędna środka ciężkości czworoboku krzywolinijnego MNM'N' jest $z+\beta$. Ilość β jest mniejsza od Δz, bo środek ciężkości tego czworoboku mieści się między dwiema płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny xy, i przechodzącemi przez punkta M, M'. Widzimy teraz łatwo że moment czworoboku MNM'N' względem płaszczyzny xy wyraża się przez wieloczyn

$$(z+\beta)\Delta x \Delta y (\sqrt{1+p^2+q^2} + \alpha) = z\Delta x \Delta y \sqrt{1+p^2+q^2} + \gamma \Delta x \Delta y;$$

nazywając γ ilość zmienną która niknie z przyrostami Δx, Δy.

Jeśli więc weźmiemy summę wszystkich cząstek składowych danej powierzchni, oznaczając przez S jej miarę, przez x_1, y_1, z_1 spółrzędne jej środka ciężkości, będzie

$$Sx_1 = \Sigma\Sigma z \Delta x \Delta y \sqrt{1+p^2+q^2} + \Sigma\Sigma\gamma\Delta x\Delta y.$$

To równanie, istniejąc ciągle jakkolwiek małe są Δx i Δy, będzie jeszcze prawdziwe gdy te przyrosty staną się nieskończenie małemi. Ale wtedy, jako już wiemy,

$$\text{gr. } \Sigma\Sigma\gamma\Delta x\Delta y = 0,$$

$$\text{gr. } \Sigma\Sigma z \quad \sqrt{1+p^2+q^2} = \int\int z dx dy \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Więc ostatecznie

$$Sz_1 = \int\int z\,dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Mamy tedy do wyznaczenia spółrzędnych x_1, y_1, z_1 cztery formuły

$$S = \int\int dxdy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$Sx_1 = \int\int xdxdy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$Sy_1 = \int\int ydxdy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$Sz_1 = \int\int zdxdy\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Granice tych czterech całek określonych są te same. Aby pokazać jak się rachunek wykonywa, uważajmy pierwszą całkę. Przede wszystkiem trzeba z równania powierzchni $F(x, y, z,) = 0$ wyciągnąć wartość z w funkcyi x, y, i podstawić ją w pierwiastniku $\sqrt{1+p^2+q^2}$. Poczem, dla znalezienia granic całkowania, trzeba wyrugować z między równaniami

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{dF}{dz} = 0\,;$$

zkąd wynika równanie

$$\varphi(x, y) = 0,$$

które przedstawia na płaszczyznie xy obwód rzutu danej powierzchni. To równanie rozwiązane na y daje ogólnie dwie wartości $y = \varphi_0(x)$ i $y = \varphi_1(x)$.

Nakoniec, trzeba wyrugować y między równaniami

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0\,;$$

zkąd wynika równanie $\psi(x) = 0$ które daje ogólnie dwie wartości $x = a$ i $x = b$. Ostatnie wartości wyrażają równania dwóch płaszczyzn równoległych do płaszczyzny xy, i poprowadzonych przez dwa punkta skrajne powierzchni, jeden mniej drugi więcej oddalony od płaszczyzny zy.

To uczyniwszy, całkuje się różniczkę $dy\sqrt{1+p^2+q^2}$, uważając x jako ilość stałą, od $y=\varphi_0(x)$ aż do $y=\varphi_1(x)$; poczem mnoży się znalezioną całkę przez dx, i całkuje się nową różniczkę od $x=a$ do $x=b$, przypuszczając $a<b$. Te dwa całkowania, wykonane jedno po drugiem, wyrażają się przez całkę podwójną określoną

$$S=\int_a^b dx\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dy.$$

88. Gdy powierzchnia jest płaska, te wszystkie formuły dają się uprościć. Jakoż, biorąc płaszczyznę danej powierzchni za płaszczyznę xy, będzie $z=0$ a temsamem $p=0$, $q=0$, i formuły przywodzą się do następujących

$$S=\int\int dxdy,$$

$$Sx_1=\int\int xdxdy,$$

$$Sy_1=\int\int ydxdy.$$

Całkuje się najpierwej względem y, między wartościami y_0 i y_1, danemi w funkcyi x przez równanie krzywej która określa powierzchnię. Poczem, otrzymaną różniczkową funkcyę x całkuje się między wartościami $x=a$ i $x=b$, które są odciętemi dwóch stycznych do obwodu powierzchni, poprowadzonych równolegle do osi $y^{\text{nów}}$.

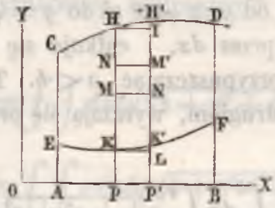
Zcałkowane względem y, powyższe formuły stają się

$$S=\int_a^b(y-y_0)dx,$$

$$Sx_1=\int_a^b(y-y_0)xdx.$$

$$Sy_1=\frac{1}{2}\int_a^b(y^2-y_0^2)dx.$$

Ostatnie formuły można wprost otrzymać, sposobem który znać trzeba. Niech będzie jakikolwiek punkt $M(x,y)$ na powierzchni CDFE, i punkt $M'(x+dx, y+dy)$ nieskończenie sąsiedni. Przez



te punkta poprowadźmy równoległe do osi OX i do OY, które utworzą prostokąt MNM'N'; oznaczmy przez y_0 i y_1 rzędne KP i HP, krzywych EF i CD, odpowiedające odciętej $OP = x$ punktu M; nakoniec, nazwijmy a i b odcięte skrajne OA, OB. Prostokąt $MNM'N' = dxdy$ jest cząstką składową powierzchni; jeśli więc, uważając x za ilość stałą, będziemy zmieniali y od y_0 do y_1, otrzymamy summę prostokątów $dxdy$, równą prostokątowi HKLI który się wyraża przez $(y_1 - y_0)dx$; ten prostokąt różni się od trapezu krzywolinijnego HKK'H' ilością nieskończenie małą drugiego rzędu. Owoż, $(y_1 - y_0)dx$ jest różniczką powierzchni CEFD którąśmy oznaczyli przez S, więc mamy

$$S = \int_a^b (y_1 - y_0)dx.$$

Formuła zupełnie ta sama co otrzymana wyżej, ponieważ y_1 znaczy rzędnę krzywej CD wyrażoną wprzódy przez y.

Teraz, uważajmy że środek ciężkości trapezu krzywolinijnego HKK'H' różni się nieskończenie mało od środka ciężkości prostokąta HKLI, którego środek jest na przecięciu przekątnych i temsamem nieskończenie blizko środka boku HK; można więc, zaniedbując nieskończenie małe wyższego rzędu, wziąć dla środka ciężkości trapezu krzywolinijnego spółrzędne x, $\frac{y_0 + y_1}{2}$. Tym sposobem moment zadanego trapezu względem płaszczyzny ZOY wyraża się przez $(y_1 - y_0)xdx$, a jego moment względem płaszczyzny ZOX przez $(y_1 - y_0)\dfrac{y_0 + y_1}{2}dx = \dfrac{1}{2}(y_1^2 - y_0^2)dx$.

Więc

$$Sx_1 = \int_a^b (y_1 - y_0)xdx,$$

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_a^b (y_1^2 - y_0^2)dy;$$

formuły zupełnie te same co otrzymane poprzednio.

89. Jeśli powierzchnia jest zawarta między krzywą CD, osią OX i dwiema równoległemi do osi OY, trzy ostatnie formuły stają się

$$S = \int_a^b ydx,$$

$$Sx_1 = \int_a^b yxdx,$$

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_a^b y^2dx.$$

Gdy osie spółrzędne są pochyłe, pod kątem θ, czworobok MNM'N' jest równoległobokiem mającym za miarę $dxdy\,\text{wst}\,\theta$; wtedy trzeba wziąć

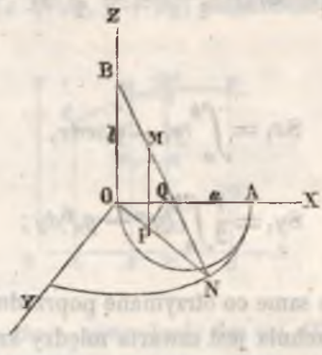
$$S = \text{wst}\,\theta\int_a^b ydx,$$

$$Sx_1 = \text{wst}\,\theta\int_a^b yxdx,$$

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\,\text{wst}\,\theta\int_a^b y^2dx.$$

90. Na zastosowanie ogólnych formuł, niech będzie stożek mający za wierzchołek punkt B osi rzędnych OZ, a za podstawę koło promienia OA na płaszczyznie xy. Uczyńmy $OA = a$, $OB = b$

na OA jako średnicy i na płaszczyznie xy wystawmy półkole, i szu-



kajmy środka ciężkości części powierzchni stożkowe której rzutem jest to półkole.

Aby otrzymać ten środek ciężkości, uważajmy najpierwej że, w obecnym przypadku, płaszczyzna styczna do stożka ma zawsze to samo nachylenie na płaszczyznę xy; więc $\operatorname{dos}\zeta$ jest ilością stałą, i wyraża się przez

$$\operatorname{dos}\zeta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Weźmy potem punkt $M(x, y, z)$ krawędzi BN powierzchni stożkowej, którego rzutem na półkolu OA jest punkt $P(x, y)$. Ponieważ półkole wystawione na średnicy OA ma równanie

$$u^2 = ax - x^2,$$

stosując ogólne formuły otrzymujemy

$$S = \frac{1}{\operatorname{dos}\zeta}\int_0^a dx\int_0^u dy = \frac{1}{\operatorname{dos}\zeta}\int_0^a \sqrt{ax-x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{8\operatorname{dos}\zeta}.$$

$$Sx_1 = \frac{1}{\operatorname{dos}\zeta}\int_0^a\int_0^u xdxdy = \frac{1}{\operatorname{dos}\zeta}\int_0^a xdx\sqrt{ax-x^2} = \frac{\pi a^3}{16\operatorname{dos}\zeta}.$$

$$Sy_1 = \frac{1}{\operatorname{dos}\zeta}\int_0^a\int_0^u ydxdy = \frac{1}{2\operatorname{dos}\zeta}\int_0^a (ax-x^2)dx = \frac{a^3}{12\operatorname{dos}\zeta}.$$

Nakoniec, dla wyznaczenia wartości z_1, uważajmy że trójkąty podobne MPN, BON dają

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{BO}} = \frac{\mathrm{ON} - \mathrm{OP}}{\mathrm{ON}};$$

zkąd

$$z = \frac{b}{a}\,(a - \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Zatem

$$\mathrm{S}z_1 = \frac{b}{a \operatorname{dos} \zeta} \int_0^a \int_0^u (a - \sqrt{x^2 + y^2})\,dx\,dy.$$

Wykonajmy całkowanie względem zmiennej y, w granicach od $y = 0$ do $y = u = \sqrt{ax - x^2}$; zważając najpierwej że

$$\int_0^y dx \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{2} \log \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x},$$

znajdziemy

$$\mathrm{S}z_1 = \frac{b}{a \operatorname{dos} \zeta} \int_0^a dx \Big\{ a\sqrt{ax - x^2} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - ax}$$

$$- \frac{x^2}{2} \log(\sqrt{a} + \sqrt{a - x}) + \frac{x^2}{4} \log x \Big\}$$

Owoż,

$$\int_0^a a\,dx\sqrt{ax - x^2} = \frac{\pi a^3}{8},$$

$$\int_0^a x\,dx\sqrt{a^2 - ax} = \sqrt{a}\int_0^a x(a - x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{4a^3}{15}.$$

$$\int_0^a x^2 \log x\,dx = \frac{a^3 \log a}{3} - \frac{a^3}{9},$$

$$\int_0^a x^2 \log(\sqrt{a} + \sqrt{a - x})\,dx = \frac{a^3 \log a}{6} + \frac{1}{3}\int_0^a \frac{x^3\,dx}{2\sqrt{a - x}(\sqrt{a} + \sqrt{a - x})}.$$

Aby mieć ostatnią całkę, połóżmy $\sqrt{a-x}=t;$

zkąd $x=a-t^2,$ i $dx=-2tdt.$

Podstawiając te wartości, będzie

$$\int_0^a \frac{x^3dx}{2\sqrt{a-x}(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}=\int_0^{\sqrt{a}}(\sqrt{a}-t)^3(\sqrt{a}+t)^2dt=-\frac{11a^3}{30}.$$

Jeśli poniesiemy te wszystkie wartości całek określonych do równania wyżej wskazanego, otrzymamy ostatecznie

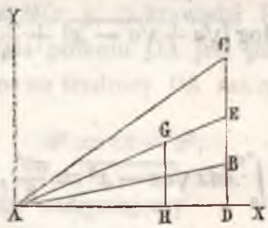
$$Sz_1=\frac{ba^2}{\mathrm{dos}\zeta}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{2}{9}\right).$$

A więc mamy

$$x_1=\frac{a}{2},\qquad y_1=\frac{2a}{3},\qquad z_1=b\left(1-\frac{16}{9\pi}\right).$$

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem środka ciężkości powierzchni płaskich; do czego nam posłużą formuły numeru 89.

91. Trójkąt. Szukajmy, najpierwej środka ciężkości trójkąta ABC. Aby go wyznaczyć po prostu, weźmy dwie osie spółrzędne przecho-



dzące przez wierzchołek A, AX prostopadłą i AY równoległą do boku przeciwnego BC. W tem założeniu linie proste AC, AB mają za równania

$$y=mx,\qquad y_0=m_0x.$$

Zatem, nazywając h wysokość AD trójkąta ABC, otrzymujemy zaraz

$$S = \int_0^h (y - y_0)dx = \int_0^h (m - m_0)xdx = (m - m_0)\frac{h^2}{2}.$$

$$Sx_1 = \int_0^h (y - y_0)xdx = \int_0^h (m - m_0)x^2dx = (m - m_0)\frac{h^3}{3},$$

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_0^h (y^2 - y_0^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^h (m^2 - m_0^2)x^2dx = (m^2 - m_0^2)\frac{h^3}{6}.$$

Ztąd wynika

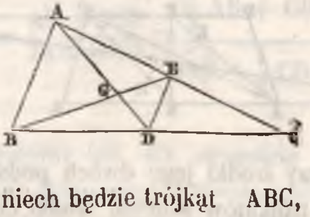
$$x_1 = \frac{2h}{3}, \quad y_1 = (m + m_0)\frac{h}{3}.$$

Owoż, uważajmy że $\frac{(m + m_0)h}{2}$ wyraża rzędnę DE środka E podstawy BC; co daje $y_1 = \frac{2DE}{3}$. Mamy więc

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{DE}{AD}.$$

To równanie dowodzi że środek ciężkości G trójkąta ABC znajduje się na ośródkowej AE podstawy BC, a wartość odciętej $x_1 = \frac{2}{3}AD$ pokazuje że ten punkt jest na *jednej trzeciej* części ośródkowej AE począwszy od podstawy. Więc środek ciężkości trójkąta jest na przecięciu jego trzech ośródkowych.

92. Środek ciężkości trójkąta wyznacza się łatwo bez rachunku

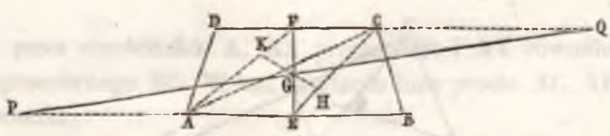


całkowego. Jakoż, niech będzie trójkąt ABC, i ośródkowa AD boku BC. Jeśli przez tę ośródkowę poprowadzimy płasczyznę pros topadłą do płaszczyzny trójkąta, będziemy mieli płaszczyznę średnicową, odpowiedającą cięciwom równoległym do boku BC. Owoż, wiemy (78) że ta płaszczyzna zawiera środek ciężkości trójkąta; zatem ośródkowa AD, jej przecięcie z płaszczyzną trójkąta, zawiera go także. Dowiedzie się podobnie że środek ciężkości trójkąta znajduje się na ośródkowej BE boku AC. Więc ten środek jest w punkcie przecięcia G trzech ośródkowych trójkąta ABC. Nadto linia DE, łącząca środki boków AC, BC, jest równoległa do boku AB; zatem dwa trójkąty GDE, GAB są podobne; a że DE jest połową boku AB, GD jest także połową boku GA. Więc środek ciężkości trójkąta ABC jest na ośródkowej AD podstawy BC, i przypada na jej trzeciej części poczynając od podstawy.

Dobrze jest uważać że środek ciężkości trzech ciężarów równych, przyłożonych do wierzchołków trójkąta, jest ten sam co środek ciężkości trójkąta. I w samej rzeczy, te ciężary są to trzy siły równe i równolegle przyłożone do trzech punktów A, B, C. Owoż, dwie z tych sił, przyłożone do B i C, składają się w jedną siłę, podwójną każdej z nich i przyłożoną do środka D boku BC; ta zaś siła składa się z siłą przyłożoną do A w ostateczną wynikowę, przyłożoną do takiego punktu ośródkowej AD żeby jego odległość od A była dwa razy większa niż odległość od D. Więc punkt przyłożenia ostatecznej wynikowej jest na przecięciu trzech ośródkowych trójkąta. Co dowodzi założonego twierdzenia.

Biorąc momenta trzech sił równoległych, przedstawiających powyższe ciężary, i moment ich wynikowej, widzimy łatwo że odległość środka ciężkości trójkąta, od linii prostej zewnętrznej, jest średnią odległością jego trzech wierzchołków od tej linii.

93. Trapez. Środek ciężkości G trapezu ABCD znajduje się na



linii EF, która łączy środki jego dwóch podstaw; bo ten trapez jest różnicą dwóch trójkątów których środki ciężkości leżą na kierunku linii EF. Aby znaleźć drugą linię na której się także znajduje środek ciężkości trapezu, poprowadźmy przekątnę AC, która rozłoży trapez na dwa trójkąty ABC, ACD. Owoż, środek ciężkości H trójkąta ABC leży na ośródkowej CE boku AB, tak że $HE = \frac{1}{3} CE$; podobnie środek ciężkości K trójkąta ACD leży na ośródkowej AF boku CD, tak że $KF = \frac{1}{3} AF$. Ztąd wnosimy że środek ciężkości trapezu ABCD jest na przecięciu G linij EF i HK.

Można jeszcze znaleźć odległości x i y środka ciężkości G trapezu od jego dwóch podstaw AB, CD, stosując twierdzenie momentów (53) do układu sił równoległych, które przedstawiają ciężary dwóch trójkątów składowych ABC, ACD i są przyłożone w punktach H, K. Wyobraźmy sobie te siły jako prostopadłe do płaszczyzny trapezu, i weźmy ich momenta względem każdej z dwóch płaszczyzn, poprowadzonych przez podstawy AB, CD równolegle do kierunków tychże sił. A ponieważ trapez i dwa trójkąty składowe mają spólną wysokość, którą nazwiemy h, ciężary tych trójkątów przyłożone w punktach H, K, i ciężar wynikowy przyłożony w G, są proporcyonalne do linij AB, CD, AB + CD; mamy więc dwa równania momentów

$$(AB + CD)x = AB \cdot \frac{h}{3} + CD \cdot \frac{2h}{3},$$

$$(AB + CD)y = AB \cdot \frac{2h}{3} + CD \cdot \frac{h}{3};$$

zkąd, dzieląc stronami, wywodzimy

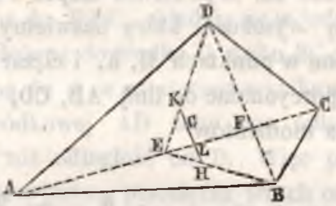
$$\frac{x}{y} = \frac{AB + 2CD}{2AB + CD} = \frac{\frac{1}{2}AB + CD}{AB + \frac{1}{2}CD}.$$

Jeśli teraz przedłużymy bok BA długością AP równą podstawie CD, a zaś bok DC długością CQ równą podstawie AB, i poprowadzimy prostę PQ która przetnie prostę EF w punkcie G, trójkąty GEP, GFQ będą podobne i dadzą

$$\frac{GE}{GF} = \frac{EP}{FQ} = \frac{\frac{1}{2}AB + CD}{AB + \frac{1}{2}CD}.$$

To pokazuje że odległości x, y środka ciężkości trapezu od podstaw AB, CD, są proporcyonalne do odcinków GE, GF prostej EF która łączy środki tych podstaw; ale już wiemy że ten środek ciężkości leży na prostej EF, więc punkt G jest właśnie środkiem ciężkości trapezu.

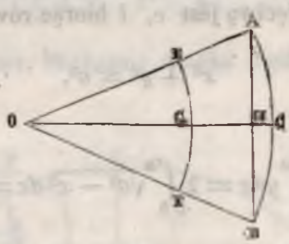
94. Czworobok jakikolwiek. Dla znalezienia środka ciężkości czworoboku jakiegolwiek ABCD, rozkładamy ten czworobok, prze-



kątną AC, na dwa trójkąty ACB, ACD których wyznaczamy środki ciężkości H, K. Środek ciężkości G danego czworoboku dzieli odległość HK na dwie części odwrotnie proporcyonalne do powierzchni trójkątów ACB, ACD; żeby go nakreślić, uważajmy że te dwa trójkąty, mające spólną podstawę AC, są proporcyonalne do odległości wierzchołków B, D od podstawy, a temsamem proporcyonalne do odcinków BF, DF przekątnej BD. Owoż, nazywając L punkt przecięcia przekątnej AC z prostą HK która jest równoległa do przekątnej BD, widzimy że w trójkącie EBD odcinki BF, DF są proporcyonalne do odcinków HL, KL; więc, jeśli weźmiemy $KG = HL$ punkt G będzie środkiem ciężkości czworoboku ABCD.

95. Wycinek i odcinek koła. Szukajmy najpierwej środka cięż-

kości *wycinka* OACB koła. Ten wycinek jest symetryczny wzglę-



dem promienia OC, przechodzącego przez środek C podstawy ACB; zatem jego środek ciężkości G znajduje się na promieniu OC. Dość więc będzie znaleźć odległość OG tego punktu od środka koła. W tym celu, wyobraźmy łuk AB podzielony na łuki równe nieskończenie małe; wycinek OACB zostanie rozłożony na nieskończenie małe wycinki mające te łuki za podstawy. Każdy z tych wycinków składowych, tak małych jak się podoba, może być uważany jako trójkąt równoramienny, którego środek ciężkości jest na dwóch trzecich ośródkowej, poczynając od wierzchołka O. A że ta ośródkowa ma za granicę promień koła OA, środki ciężkości wycinków nieskończenie małych są nieskończenie blizko łuku EF, nakreślonego ze środka O promieniem $OE = \frac{2}{3}OA$. Nadto, ponieważ te wszystkie wycinki są równe, ich środki ciężkości są jednostajnie rozstawione na łuku koła nieskończenie mało różnego od łuku EF. Ztąd wnosimy że środek ciężkości wycinka OACB jest ten sam co łuku EF. Jeśli więc oznaczymy przez a promień koła, przez l długość łuku AB i przez c jego cięciwę będziemy mieli (82)

$$OG = \frac{\frac{2}{3}a \cdot \frac{2}{3}c}{\frac{2}{3}l} = \frac{2}{3} \cdot \frac{ac}{l}.$$

2° Szukajmy teraz środka ciężkości *odcinka kołowego* ABC (*fig. powyż.*). Ponieważ ten odcinek ma oś symetryi OC, jego środek ciężkości leży na tej osi; dość więc będzie wyznaczyć odległość x_1 tego punktu od środka koła O. Owoż, nazywając h apotemę OH łuku BC którego cięciwą jest c, i biorąc równanie koła

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

mamy

$$S = 2\int_h^a ydx = 2\int_h^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{al - ch}{2},$$

$$Sx_1 = 2\int_h^a yxdx = 2\int_h^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{2}{3}(a^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Więc

$$x_1 = \frac{4(a^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}}{3(al - ch)},$$

albo

$$x_1 = \frac{c^3}{6(al - ch)}.$$

Gdy odcinek koła jest półkolem, wtedy

$$x_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi}.$$

96. Odcinek paraboli. Jeśli chcemy znaleźć środek ciężkości odcinka AMP paraboli (*fig. stronicy* 93) biorąc dla tej stożkowej równanie

$$y^2 = 2px,$$

i stosując formuły numeru 89, będziemy mieli:

$$S = \int_0^x ydx = \sqrt{2p}\int_0^x \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\, x\sqrt{2px} = \frac{2}{3}\, xy.$$

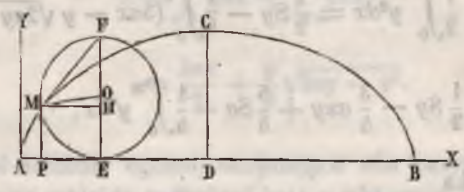
$$Sx_1 = \int_0^x yxdx = \sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{}{5}\, x^2y,$$

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_0^x y^2dx = \int_0^x pxdx = \frac{px^2}{2} = \frac{1}{4}\, xy^2.$$

Więc

$$x_1 = \frac{3}{5}x, \quad y_1 = \frac{3}{8}y.$$

97. Odcinek cykloidy. Szukajmy środka ciężkości odcinka AMP cykloidy.



Równanie łuku AC tej krzywej jest

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1} \quad \text{albo} \quad dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$

Zatem, nazywając S powierzchnię odcinka AMP, mamy

$$S = \int_0^y ydx = \int_0^y \frac{y^2dy}{\sqrt{y_2ay - y^2}} = 2a\int_0^y \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}} - \int_0^y \sqrt{2ay - y^2}dy;$$

$$= 3a\int_0^x dx - y\sqrt{2ay - y^2} - \int_0^y \frac{y^2dy}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$

Zkąd

$$S = \frac{3ax}{2} - \frac{y}{2}\sqrt{2ay - y^2}.$$

Następnie,

$$Sx_1 = \int_0^x xdS = \int_0^x yxdx = Sx - \frac{1}{2}\int_0^x (3ax - y\sqrt{2ay - y^2})dx$$

$$= Sx - \frac{3a}{2}\int_0^x xdx + \frac{1}{2}\int_0^y y^2dy$$

$$= Sx - \frac{3ax^2}{4} + \frac{y^3}{6}.$$

Więc

$$Sx_1 = \frac{3ax^2}{4} - \frac{1}{2}xy\sqrt{2ay - y^2} + \frac{y^3}{6}.$$

Podobnie,

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_0^x y^2dx = \frac{1}{2}Sy - \frac{1}{4}\int_0^y (3ax - y\sqrt{2ay - y^2})dy$$

$$= \frac{1}{2}Sy - \frac{3}{4}axy + \frac{5}{4}Sa - \frac{1}{4}\int_0^x y^2dx;$$

Ztąd wynika

$$Sy_1 = \frac{5}{4}a^2x - \frac{y}{12}(2y + 5a)\sqrt{2ay - y^2}.$$

Otrzyma się spółrzędne x_1, y_1, dzieląc wartości Sx_1, Sy_1 przez S.

Dla połowy cykloidy mamy

$$S = \frac{3}{2}\pi a^2, \quad Sx_1 = \frac{3}{4}a^3\left(\pi^2 + \frac{16}{9}\right)a, \quad Sy_1 = \frac{5}{4}\pi a^3.$$

Więc spółrzędne środka ciężkości połowy powierzchni cykloidy są

$$x_1 = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{8}{9\pi}\right), \quad y_1 = \frac{5}{6}a.$$

Środek ciężkości całej powierzchni cykloidy leży na osi symetryi CD, i ma rzędną

$$y_1 = \frac{5}{6}a.$$

Gdy dany odcinek cykloidy przechodzi połowę jej powierzchni, trzeba go rozdzielić na dwie części. Do pierwszej, która powinna być równa połowie powierzchni cykloidy, stosuje się równanie łuku AC $\frac{dy}{dx} = +\sqrt{\frac{2a}{y} - 1}$; a zaś do drugiej równanie łuku CB

$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{2a}{y} - 1}$. Tym sposobem całkowania wykonają się w dwóch częściach, i ich rachunek będzie tylko trochę dłuższy od poprzedzającego. I tak, będzie na przykład

$$S = \int_0^{\pi a} ydx + \int_{\pi a}^{x} ydx.$$

$$= \frac{3ax}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{2ay - y^2}.$$

Żeby mieć formuły ogólne, obejmujące oba przypadki, trzeba wziąć równanie cykloidy w funkcyi kąta u jaki czyni promień koła tworzącego, przechodzący przez punkt opisujący. M, z promieniem przechodzącym przez punkt zetknięcia tego koła. Co daje

$$x = a(u - \text{wst}\, u), \qquad y = a(1 - \text{dos}\, u).$$

Za pomocą tych formuł, zważając że

$$dx = a(1 - \text{dos}\, u)du,$$

mamy zaraz

$$S = \int_0^x ydx = a^2 \int_0^u \left(\frac{3}{2} - 2\,\text{dos}\, u + \frac{\text{dos}\, 2u}{2}\right) du$$

$$= \frac{a^2}{4}(6u - 8\,\text{wst}\, u + \text{wst}\, 2u).$$

Potem

$$Sx_1 = \int_0^x yxdx = a^3 \int_0^u (1 - \text{dos}\, u)^2 (u - \text{wst}\, u) du$$

$$= a^3 \int_0^u du \left\{ \left(\frac{3}{2} - 2\,\text{dos}\, u + \frac{\text{dos}\, 2u}{2}\right) u - (1 - 2\,\text{dos} u + \text{dos}^2 u)\, \text{wst}\, u\, du \right\}$$

$$= \frac{a^3}{4}\left(3u^2 - 8u\,\text{wst} u + u\,\text{wst}\, 2u - 4\,\text{dos}\, u + 3\,\text{wst}^2 u + \frac{4}{3}\,\text{dos}^3 u + \frac{8}{3}\right).$$

Nakoniec

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_0^x y^2 dx = \frac{a^3}{2}\int_0^u (1 - \operatorname{dos} u)^3 du$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^u \left(\frac{5}{2} - \frac{15}{4}\operatorname{dos} u + \frac{3}{2}\operatorname{dos} 2u - \frac{1}{4}\operatorname{dos} 3u\right) du$$

$$= \frac{a^3}{8}\left(10u - 15 \operatorname{wst} u + 3 \operatorname{wst} 2u - \frac{1}{3}\operatorname{wst} 3u\right).$$

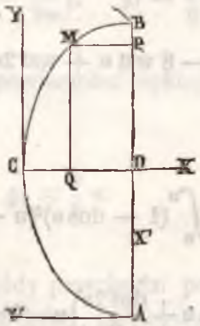
Dzieląc teraz wartości Sx_1, Sy_1 przez S, otrzymuje się środek ciężkości jakiegokolwiek odcinku cykloidy. Aby mieć środek ciężkości powierzchni całej cykloidy, trzeba uczynić $u = 2\pi$ co daje;

$$x_1 = \pi a, \qquad y = \frac{5}{6}a$$

wynik już wiadomy.

Gdyby chciano znaleźć środek ciężkości krójki cykloidy, zawartej między dwiema rzędnemi odpowiedającemi wartościom u_0 i u_1 kąta u, trzebaby wyznaczyć całki S, Sx_1, Sy_1, wykonywając całkowania w granicach od u_0 do u_1. Co nie przedstawia żadnej trudności.

98. Uważajmy jeszcze cykloidę odniesioną do normalnej wierzchołka jako osi odciętych i do stycznej jako osi rzędnych; i szukajmy



środka ciężkości odcinku CMQ, biorąc równanie cykloidy w funkcyi kąta u.

Aby je otrzymać, niech będą AP i MQ spółrzędne punktu M cykloidy względem dawnych osi AX′, AY′, a zaś CQ $= x$, MQ $= y$ jego spółrzędne względem nowych osi CX, CY. Widzimy łatwo że wszystkie punkta łuku CB są dane przez równania

$$\mathrm{AP} = a(u - \mathrm{wst}\, u) = \pi a + y$$

$$\mathrm{MP} = a(1 - \mathrm{dos}\, u) = 2a - x$$

zkąd wyprowadzamy

$$x = a(1 + \mathrm{dos}\, u),$$

$$y = a(u - \pi - \mathrm{wst}\, u).$$

A jeśli uczynimy $u - \pi = z$, będziemy mieli żądane równania

$$x = a(1 - \mathrm{dos}\, z)$$

$$y = a(z + \mathrm{wst}\, z).$$

Posługując się temi równaniami cykloidy, i uważając szczególniej na to że

$$dy = a(1 + \mathrm{dos}\, z),$$

znajdujemy zaraz trzy całki potrzebne do wyznaczenia środka ciężkości odcinka CMQ.

$$\mathrm{S} = \int_0^x ydx = xy - \int_0^y xdy = xy - a^2 \int_0^z \mathrm{wst}^2 z\, dz$$

$$= xy - \frac{a^2}{2}\int_0^z (1 - \mathrm{dos}\, 2z)dz;$$

więc

$$\mathrm{S} = xy - \frac{a^2}{4}(2z - \mathrm{wst}\, 2z).$$

Tak samo

$$Sx_1 = \int_0^x yxdx = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}\int_0^y x^2dy.$$

Owóż,

$$\int_0^y x^2dy = a^3\int_0^z \mathrm{wst}^2 z(1 - \mathrm{dos}\, z)dz$$

$$= a^3\int_0^z\left(\frac{1 - \mathrm{dos}\, 2z}{2} - \mathrm{wst}^2 z\, \mathrm{dos}\, z\right)dz$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(z - \frac{1}{2}\,\mathrm{wst}\, 2z - \frac{1}{3}\,\mathrm{wst}^3 z\right);$$

więc

$$Sx_1 = \frac{1}{2}x^2y - \frac{a^3}{4}\left(z - \frac{1}{2}\,\mathrm{wst} 2z - \frac{1}{3}\,\mathrm{wst}^3 z\right).$$

Podobnie

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_0^x y^2dx = \frac{1}{2}xy^2 - \int_0^y xydy.$$

Ale

$$\int_0^y xydy = a^3\int_0^z (z + \mathrm{wst}\, z)\, \mathrm{wst}^2 z dz$$

$$= a^3\int_0^z\left(\frac{1 - \mathrm{dos} 2z}{2}\,.\,z + \frac{3\mathrm{wst} z - \mathrm{wst} 3z}{4}\right)dz$$

więc, wykonawszy całkowania, otrzymujemy

$$Sy_1 = \frac{1}{2}xy - \frac{a^3}{4}\left(z^2 + z\,\mathrm{wst}\, 2z - \frac{\mathrm{dos}\, 2z}{2} - 3\mathrm{dos} z + \frac{\mathrm{dos}\, 3z}{3} + \frac{19}{6}\right).$$

Wartości Sx_1, Sy_1, podzielone przez wartość S wyznaczają środek ciężkości odcinka CMQ cykloidy. Gdy ten odcinek staje się połową powierzchni cykloidy, wtedy znajduje się jego środek ciężkości czyniąc $z=\pi$ w powyższych formułach; co daje dla CBD, połowy powierzchni cykloidy,

$$x_1 = \frac{7}{6}a, \qquad y = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{9\pi}\right)a \text{ (*)}.$$

99. Za pomocą następującego twierdzenia można łatwo, w wielu przypadkach, wyznaczyć środek ciężkości figury sferycznej.

Jeśli, biorąc trzy jakiekolwiek proste OX, OY, OZ *przechodzące przez środek sfery promienia* R, *oznaczymy przez* S *powierzchnię figury nakreślonej na sferze, przez* S_x, S_y, S_z *jej rzuty na płaszczyznach* YOZ, ZOX, XOY, *i przez* x_1, y_1, z_1 *odległości środka ciężkości figury* S *od tych płaszczyzn; będzie*

$$\frac{x_1}{S_x} = \frac{y_1}{S_y} = \frac{z_1}{S_z} = \frac{R}{S}.$$

Na dowodzenie tego, nazwijmy z odległość, od płaszczyzny XOY, punktu M któremu odpowieda nieskończenie mała cząstka składowa powierzchni S; będziemy mieli (87).

$$Sz_1 = \int\int \frac{zdxdy}{\operatorname{dos}\zeta}.$$

Ale, promień OM czyni z normalną do płaszczyzny XOY kąt ζ; co daje

$$z = R \operatorname{dos}\zeta.$$

Więc

$$Sz_1 = R\int\int dxdy = RS_z.$$

Ząd wynika równanie

$$\frac{z_1}{S_z} = \frac{R}{S},$$

które dowodzi twierdzenia.

(*) *Zob.* notę na końcu tomu.

Widzimy więc że dość jest znać powierzchnię figury nakreślonej na sferze, i jej rzuty na trzech płaszczyznach przechodzących przez środek sfery, aby można wyznaczyć środek ciężkości tej figury.

100. Środek ciężkości trójkąta sferycznego. Stosując powyższe twierdzenie, nazwijmy a, b, c boki trójkąta sferycznego, A, B, C kąty przeciwległe, i przypuśćmy że linie proste OX, OY, OZ przystają odpowiednio do promieni OA, OB, OC.

Owoż, powierzchnia trójkąta sferycznego ABC ma za miarę

$$S = \frac{\pi R^2}{2}(A + B + C - 2);$$

rzut tej powierzchni na płaszczyznie AOB wyraża się przez rzuty na niej wycinków kołowych AOB, COB, COA, to jest

$$S_z = \text{pow}\,(AOB) - \text{pow}\,(COB)\,\text{dos}\,B - \text{pow}\,(COA)\,\text{dos}\,A$$

$$= \frac{\pi R^2}{4}(c - a\,\text{dos}\,B - b\,\text{dos}\,A).$$

Więc, na mocy dowiedzionego wyżej twierdzenia, będzie

$$z_1 = R.\frac{S_z}{S} = \frac{R}{2}\cdot\frac{c - a\,\text{dos}\,B - b\,\text{dos}\,A}{A + B + C - 2}.$$

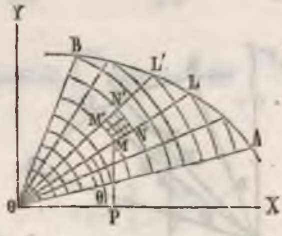
Tak samo

$$y_1 = \frac{R}{2}\cdot\frac{b - c\,\text{dos}\,A - a\,\text{dos}\,C}{A + B + C - 2},$$

$$x_1 = \frac{R}{2}\cdot\frac{a - b\,\text{dos}\,C - c\,\text{dos}\,B}{A + B + C - 2}.$$

101. Pokażemy teraz jak spółrzędne biegunowe mogą służyć do wyznaczenia środka ciężkości powierzchni płaskich.

Przypuśćmy najpierwej że trzeba znaleźć środek ciężkości wycinku OAB, zawartego między linią krzywą AB i dwoma promieniami wodzącemi OA, OB. Można rozłożyć powierzchnię wycinku na trapezy kołowe nieskończenie małe, jako MNN'M', prowadząc promienie wodzące OL, OL',... i łuki kół MM' NN'... nieskoń-



czenie bliskie jedne drugich, mające środek w punkcie O. Owoż, jeśli nazwiemy r i θ spółrzędne biegunowe wierzchołka M trapezu, będzie bok $\mathrm{MN} = \Delta r$ i łuk $\mathrm{MM'} = r\Delta\theta$; więc ten trapez, który jest różnicą dwóch wycinków kołowych ONN' i OMM', ma za miarę

$$\frac{1}{2}(r + \Delta r)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r^2\Delta\theta = r\Delta r\Delta\theta + \frac{1}{2}\Delta r^2\Delta\theta.$$

To pokazuje że cząstką nieskończenie małą, składową powierzchni, jest $rdrd\theta$. Środek ciężkości tej cząstki leży nieskończenie blizko punktu M; a że spółrzędne tego punktu są

$$x = r\,\mathrm{dos}\,\theta, \qquad y = r\,\mathrm{wst}\,\theta,$$

więc momenta cząstki $rdrd\theta$ względem dwóch płaszczyzn spółrzędnych prostokątnych ZOX i ZOY wyrażają się przez

$$rdrd\theta \,.\, r\,\mathrm{dos}\,\theta \quad \text{i} \quad rdrd\theta \,.\, r\,\mathrm{wst}\,\theta.$$

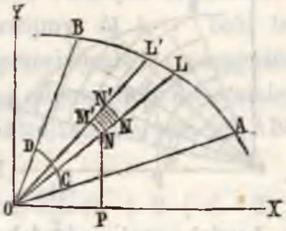
Ztąd wyprowadzamy, do wyznaczenia środka ciężkości wycinka OAB, trzy formuły

$$\mathrm{S} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_0^{r_1} rdr,$$

$$\mathrm{S}x_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \mathrm{dos}\,\theta d\theta \int_0^{r_1} r^2dr,$$

$$\mathrm{S}y_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \mathrm{wst}\,\theta d\theta \int_0^{r_1} r^2dr.$$

Po tem co poprzedza, nietrudno znaleźć środek ciężkości powierzchni zawartej między dwiema liniami krzywemi AB, CD, i dwoma promieniami wodzącemi OA, OB.



Jakoż, cząstką nieskończenie małą, składową powierzchni, jest $rdrd\theta$; mamy więc, do wyznaczenia środka ciężkości powierzchni płaskiej, ogólne formuły:

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \int_{r_0}^{r_1} rdr,$$

$$Sx_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \mathrm{dos}\,\theta \int_{r_0}^{r_1} r^2 dr,$$

$$Sy_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \mathrm{wst}\,\theta d\theta \int_{r_0}^{r_1} r^2 dr,$$

w których θ_0, θ_1 znaczą kąty AOX i BOX, zaś r_0, r_1 wyrażają promienie wodzące, odpowiedne tym kątom w liniach krzywych CD i AB.

Dla lepszego wyjaśnienia szczegółów metody, powtórzymy dwa następujące, już rozwiązane, zagadnienia.

1° *Znaleźć środek ciężkości wycinka kołowego.* Wiemy że ten środek ciężkości leży na osi symetryi wycinka; dość więc wyznaczyć jego odległość od środka koła. Owoż, jeśli weźmiemy oś symetryi wycinka za oś biegunową, uważając punkt M(r, θ) powierzchni i nazywając R, l, c, promień koła, łuk i cięciwę, będziemy mieli:

$$S = \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} d\theta \int_0^R r dr = R^2 \int_0^{\theta_1} d\theta = \frac{1}{2} Rl,$$

$$Sx_1 = \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} \operatorname{dos}\theta \, d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} R^3 \int_0^{\theta_1} \operatorname{dos}\theta \, d\theta = \frac{1}{3} R^2 c;$$

więc

$$r_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{Rc}{l}.$$

Co sprawdza wynik otrzymany innym sposobem.

2° Znaleźć środek ciężkości odcinka kołowego. Ten środek ciężkości leży na osi symetryi odcinka. Jeśli więc weźmiemy tę linię za oś biegunową i nazwiemy h apotemę łuku odcinka, będziemy mieli, dla jego cięciwy, równanie

$$r \operatorname{dos}\theta = h;$$

a następnie, stosując formuły ogólne, otrzymamy

$$S = \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} d\theta \int_{\frac{h}{\operatorname{dos}\theta}}^R r dr = \int_0^{\theta_1} \left(R^2 - \frac{h^2}{\operatorname{dos}^2\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} (Rl - ch),$$

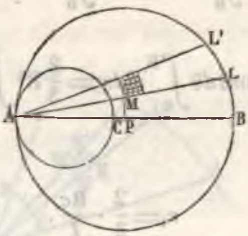
$$Sx_1 = \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} \operatorname{dos}\theta \, d\theta \int_{\frac{h}{\operatorname{dos}\theta}}^R r^2 dr = \frac{2}{3} \int_0^{\theta_1} \left(R^3 \operatorname{dos}\theta - \frac{h^3}{\operatorname{dos}\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{3} (R^2 - h^2) c. = \frac{c^3}{12}.$$

Ztąd wyprowadzamy wiadomy wynik

$$x_1 = \frac{c^3}{6(Rl - ch)}.$$

102. *Znaleźć środek ciężkości powierzchni zawartej między dwoma kołami* AB, AC, *stycznemi wewnętrznie w punkcie* A.



Oznaczmy przez a i a_0 średnice tych dwóch kół, i weźmy za oś biegunową średnicę AB która, będąc osią symetryi całej figury, zawiera jej środek ciężkości. Jeśli więc nazwiemy θ kąt MAB, promienie wodzące r_0 i r_1, które odpowiedają temu kątowi w kołach AC i AB, wyrażą się przez

$$r_0 = a_0 \operatorname{dos}\theta \quad \text{i} \quad r_1 = a \operatorname{dos}\theta;$$

będziemy więc mieli

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a_0 \operatorname{dos}\theta}^{a \operatorname{dos}\theta} r dr = (a^2 - a_0^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{dos}^2\theta \, d\theta,$$

$$Sx_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{dos}\theta d\theta \int_{a_0 \operatorname{dos}\theta}^{a \operatorname{dos}\theta} r^2 dr = \frac{2}{3}(a^3 - a_0^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{dos}^4\theta d\theta.$$

Wszystko przywodzi się do wyrachowania dwóch całek określonych $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{dos}^2\theta d\theta$ i $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{dos}^4\theta d\theta$, które nie przedstawiają żadnej trudności. Albowiem mamy zaraz

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{dos}^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{dos} 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{dos}^4\,\theta d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\mathrm{dos}\,2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3+4\mathrm{dos}2\theta+\mathrm{dos}4\theta)d\theta = \frac{3\pi}{16}.$$

Więc

$$S = \frac{\pi}{4}(a^2 - a_0^2),$$

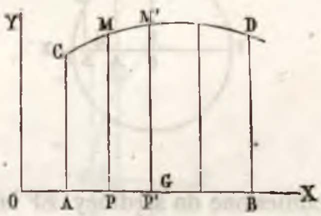
$$Sx_1 = \frac{\pi}{8}(a^3 - a_0^3);$$

zkąd

$$x_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2 - aa_0 + a_0^2}{a - a_0}.$$

POWIERZCHNIE OBROTOWE.

103. Niech będzie powierzchnia utworzona obrotem linii krzy-



wej płaskiej CD około osi leżącej zewnątrz na płaszczyznie tej linii. Weźmy oś obrotu OX i prostopadłę OY, za osie spółrzędne.

Środek ciężkości powierzchni obrotowej znajduje się na osi obrotu; dość więc wyznaczyć jego odległość $OG = x_1$ od początku O spółrzędnych. W tym celu, uważajmy na krzywej CD dwa punkta sąsiednie $M(x, y)$ i $M'(x + dx, y + dy)$. Owoż, łuk nieskończenie mały $MM' = ds$ tworzy, swoim obrotem około osi OX, pas nieskończenie wązki który można wziąć za powierzchnię boczną pnia stożka, zaniedbując nieskończenie małe drugiego rzęd;

zatem miarą tego pasa jest $2\pi yds$. Jeśli więc nazwiemy S powierzchnię utworzoną przez krzywę CD, będzie

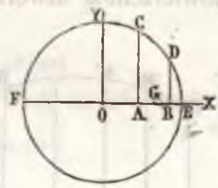
$$S = 2\pi \int yds.$$

Moment tego nieskończenie wązkiego pasa, względem płasczyzny ZOY prostopadłej do osi OX, jest $2\pi yxds$; więc

$$Sx_1 = 2\pi \int yxds.$$

Granice między któremi mają być wzięte obie całki odpowiedają skrajnościom krzywej tworzącej CD.

104. Na zastosowanie, szukajmy środka ciężkości G *strefy sferycznej*, utworzonej całkowitym obrotem łuku CD około średnicy EF.



Równanie koła, odniesione do średnicy EF i do prostopadłej OY przechodzącej przez środek O sfery, jest

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0;$$

zkąd

$$xdx + ydy = 0,$$

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{Rdx}{y}.$$

Zatem, nazywając a, b, odcięte OA, OB odpowiedające skrajnościom C, D łuku tworzącego, i oznaczając przez S powierzchnię strefy, mamy

$$S = 2\pi \int_{s_0}^{s} y ds = 2\pi R \int_a^b dx = 2\pi R(b - a).$$

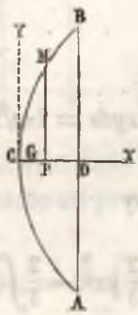
$$Sx_1 = 2\pi \int_{s_0}^{s} xy ds = 2\pi R \int_a^b x dx = \pi R(b^2 - a^2).$$

Więc

$$x_1 = \frac{a + b}{2}.$$

To pokazuje że środek ciężkości strefy sferycznej jest na średnicy prostopadłej do jej podstaw i w równej od nich odległości.

105. Strefa cykloidalna. Środek ciężkości strefy, utworzonej całkowitym obrotem łuku cykloidalnego CM około normalnej CD



wierzchołka C, leży na tej linii. Żeby znaleźć jego odległość CG, weźmy równanie cykloidy odniesione do normalnej i stycznej wierzchołka cykloidy; będzie

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{x} - 1};$$

zkąd

$$ds = \sqrt{2a}\,\frac{dx}{\sqrt{x}},$$

a zatem

$$S = 2\pi\sqrt{2a}\int_0^x y\,\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Owoż, całkując częściami, znajdujemy

$$\int_0^x y\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2y\sqrt{x} - 2\int_0^x \sqrt{2a-x}\,dx$$

$$= 2y\sqrt{x} + \frac{4}{3}(2a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}a\sqrt{2a};$$

więc

$$S = 4\pi\left(y\sqrt{2ax} + \frac{2}{3}(2a-x)\sqrt{2a(2a-x)} - \frac{8a^2}{3}\right).$$

Następnie

$$Sx_1 = 2\pi\int_0^s xyds = 2\pi\sqrt{2a}\int_0^x y\sqrt{x}\,dx.$$

Całkując częściami, mamy

$$\int y\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}yx^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int x\sqrt{2a-x}\,dx;$$

ale

$$\int x\sqrt{2a-x}\,dx = \int\left\{-(2a-x)^{\frac{3}{2}} + 2a(2a-x)^{\frac{1}{2}}\right\}dx$$

$$= \frac{2}{5}(2a-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(2a-x)^{\frac{3}{2}} + C;$$

więc, wyznaczywszy stateczną C tak żeby na $x=0$ było $Sx_1=0$, otrzymamy ostatecznie

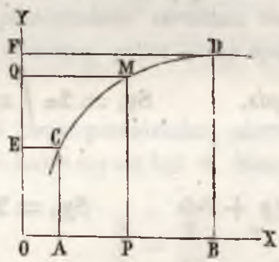
$$Sx_1=\frac{4}{3}\pi\left\{xy\sqrt{2ax}+\frac{2}{15}(4a+3x)(2a-x)\sqrt{2a(2a-x)}-\frac{32a^3}{15}\right\}.$$

Ztąd, dzieląc przez wartość S, wywodzi się odciętę x_1.

Chcąc mieć środek ciężkości powierzchni utworzonej obrotem połowy cykloidy CB około normalnej CD, trzeba uczynić $x=2a$, $y=\pi a$; co daje

$$x_1=\frac{2a}{3}\cdot\frac{\pi-\frac{8}{15}}{\pi-\frac{4}{3}}.$$

106. Jest prosty związek między dwiema powierzchniami, utworzonemi obrotem tej samej linii około dwóch osi prostokątnych.



Jakoż, nazywając S i T powierzchnie utworzone przez krzywę CD, która się obraca kolejno około osi prostokątnych OX i OY, mamy

$$Sx_1=2\pi\int xyds,$$

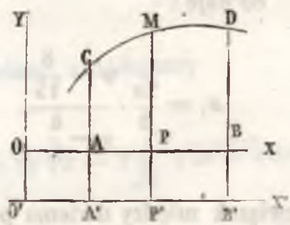
$$Ty_1=2\pi\int xyds.$$

Ale całka $\int xyds$ zostaje ta sama w obydwóch przypadkach;

więc

$$Sx_1 = Ty_1, \quad \text{albo} \quad \frac{S}{T} = \frac{y_1}{x_1}.$$

Jest tu jeszcze mała uwaga do zrobienia. Jeśli łuk CD, zamiast obracać się około osi OX, obraca się około równoległej O′X′, oddalonej od OX długością $OO' = k$; przypuszczając ten łuk CD ponad obiema równoległemi OX, O′X′, i nazywając S, S′ dwie



powierzchnie obrotowe względne do osi OX, O′X′, będziemy mieli

$$S = 2\pi \int yds, \qquad Sy_1 = 2\pi \int xyds,$$

$$S' = 2\pi \int (y+k)ds \qquad Sy'_1 = 2\pi \int x(y+k)ds.$$

Ostatnie dwie całki przywodzą się do pierwszych; albowiem

$$S' = 2\pi \int yds + 2\pi k \int ds$$

$$S'y'_1 = 2\pi \int xyds + 2\pi k \int xds.$$

Owoż, wyrachowano całki $\int xds$, $\int yds$, aby mieć środek ciężkości łuku CD; więc już niema nowych rachunków do wykonania.

TWIERDZENIE GULDINA.

107. Powierzchnia S utworzona całym obrotem krzywej płaskiej, około osi leżącej zewnątrz na jej płasczyznie, wyraża się przez

$$S = 2\pi \int yds.$$

Owoż, jeśli nazwiemy l długość krzywej tworzącej, jej moment względem osi obrotu OX będzie

$$ly_1 = \int yds;$$

więc

$$S = l \times 2\pi y.$$

To pokazuje że *powierzchnia obrotowa ma za miarę wieloczyn z linii południkowej tworzącej przez okrąg opisany jej środkiem ciężkości.*

Nazwijmy teraz S′ część powierzchni obrotowej zawartą między dwoma południkami które czynią kąt θ. Mamy oczywiście

$$\frac{S'}{S} = \frac{\theta}{2\pi},$$

zkąd

$$S' = l \times \theta y_1.$$

Więc ogólnie, gdy krzywa płaska obraca się około osi która leży na jej płasczyznie i zostawia ją całą z jednej strony, *część powierzchni obrotowej, zawarta między dwoma południkami, ma za miarę długość krzywej tworzącej pomnożoną przez łuk opisany jej środkiem ciężkości.*

2° Objętość V utworzona przez powierzchnię płaską, zawartą między dwiema krzywemi i dwiema rzędnemi y_0, y które odpowiedają odciętym a, b, wyraża się przez

$$V = \pi\int_a^b (y^2 - y_0^2)dx$$

Owoż, jeśli nazwiemy S powierzchnię tworzącą, jej moment względem osi obrotu OX będzie

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_a^b (y^2 - y_0^2)dx;$$

więc

$$V = S.\,2\pi y_1.$$

To dowodzi że *objętość utworzona* CAŁKOWITYM *obrotem powierzchni płaskiej około osi leżącej na jej płaszczyznie, jest równa wieloczynowi z tej powierzchni przez okrąg opisany jej środkiem ciężkości.*

Jeśli teraz oznaczymy przez V′ część objętości obrotowej, zawartą między dwoma południkami które czynią kąt θ, rozumując jako w przypadku 1°, znajdziemy łatwo że

$$V' = S\,.\,\theta y_1.$$

Te dwa zadania 1° i 2° są znane pod nazwiskiem *twierdzenia Guldina,* chociaż znajduje się już w *Zbiorach matematycznych* PAPPUS-a.

Na zastosowanie, przypuśćmy że koło promienia a obraca się około osi zewnętrznej leżącej na jego płaszczyznie. Oznaczając przez h odległość środka koła od osi, przez S i V powierzchnię i objętość utworzone przez okrąg i powierzchnię tego koła, będzie

$$S = 2\pi a\,.\,2\pi h = 4\pi^2 ah, \qquad V = \pi a^2\,.\,2\pi h = 2\pi^2 a^2 h.$$

Podobnie, objętość utworzona obrotem ellipsy mającej pół-osie a i b wyraża się przez

$$V = \pi ab\,.\,2\pi h = 2\pi^2 abh.$$

Za pomocą twierdzenia *Guldina* nietrudno znaleźć środek ciężkości łuku koła. Jakoż, przypuszczając że cięciwa c tego łuku jest równoległa do osi $x_{\delta\omega}$, mamy dla powierzchni strefy sferycznej

$$S = 2\pi Rc = l \,.\, 2\pi y_1;$$

zkąd $$y_1 = \frac{Rc}{l}.$$

Uwaga. Twierdzenie Guldina, dotyczące objętości, może się

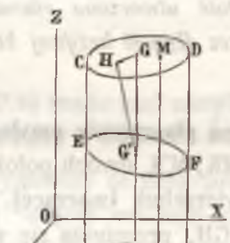
zogólnić w ten sposób : *Jeśli powierzchnia płaska przenosi się w przestrzeni tak, że jeden z jej punktów posuwa się ciągle po jakiejkolwiek krzywej* GH, *do której płaszczyzna tej powierzchni zostaje normalną; wtedy objętość utworzona równa się wieloczynowi powierzchni tworzącej przez długość krzywej ktarą jej środek ciężkości opisuje.*

Jakoż, niech będą, na płasczyznie przylegającej do krzywej GH w punkcie M, ślady MK, M'K dwóch położeń nieskończenie sąsiednich płasczyzny powierzchni tworzącej. Płasczyzny MK, M'K', normalne do krzywej GH, przecinają się wedle prostej która ma punkt K za rzut i jest osią koła krzywizny w punkcie M linii GH. Więc, gdy powierzchnia tworząca przechodzi z położenia któremu odpowieda ślad MK do położenia nieskończenie sąsiedniego, mającego ślad M'K, można ją uważać jakoby się obracała około osi koła krzywizny K. Zatem, objętość utworzona, takim nieskończenie małym obrotem powierzchni, ma za miarę wieloczyn tej powierzchni przez nieskończenie mały łuk opisany jej środkiem ciężkości. To wszystko stosuje się do objętości podobnie utworzonej przez powierzchnię ruchomą, gdy ona przechodzi z położenia M'K do nieskończenie bliskiego położenia M''K ; i tak następnie. Ztąd wynika ostatecznie że cała objętość, utworzona tak określonym ruchem powierzchni płaskiej, równa się wieloczynowi tej powierzchni przez długość linii krzywej którą jej środek ciężkości opisał.

Można sobie łatwo wyobrazić ruch powierzchni tworzącej, przypuszczając że płasczyzna tej powierzchni jest najpierwej nawinięta na powierzchnię rozwijalną, będącą miejscem geometrycznem osi kół krzywizny kierownicy GH; a ta płasczyzna, rozwijając się potem, zostaje ciągle normalną do kierownicy GH, i jest przez nią przecięta zawsze w tym samym punkcie. Takim ciągiem nieskończenie małych obrotów, powierzchnia płaska tworzy objętość którąśmy wyznaczyli.

108. Objętość walca ściętego. Wiedza środka ciężkości nastręcza sposób wyrażenia objętości walca ściętego albo graniastonu ściętego.

Niech będzie najpierwej wałec prosty ścięty ABDC, w którym podstawa CD jest nachylona na krawędzie. Jeśli oznaczymy



przez x, y, z, spółrzędne punktu M podstawy wyższej CD walca ściętego, który ma podstawę niższą AB na płasczyznie XY i krawędzie prostopadłe do tej płasczyzny, objętość V walca wyrazi się przez

$$V = \int\int z dx dy.$$

A jeśli jeszcze nazwiemy S powierzchnię podstawy CD, i weźmiemy jej moment względem płasczyzny XY, będzie

$$Sz_1 = \int\int \frac{zdxdy}{\mathrm{dos}\zeta};$$

zkąd, ponieważ ζ jest kątem stałym dwóch podstaw walca, wynika

$$S\,\mathrm{dos}\,\zeta \, . \, z_1 = \int\int zdxdy.$$

Owóż, oznaczając przez S' powierzchnię podstawy AB, mamy

$$S'z_1 = S\,\mathrm{dos}\zeta \, . \, z_1 = \int\int zdxdy;$$

więc

$$V = S'z_1.$$

To pokazuje że objętość walca prostego ściętego, albo graniastonu prostego ściętego, równa się wieloczynowi jego podstawy przez odległość środka ciężkości podstawy wyższej od niższej.

Aby mieć twierdzenie ogólniejsze, uważajmy najpierwej że środki ciężkości dwóch podstaw walca ściętego są na jednej równoległej do jego krawędzi. Albowiem, oznaczając przez x_1 i y_1 odcięte środka ciężkości G podstawy wyższej CD, a przez x'_1 i y'_1 odcięte środka ciężkości G′ podstawy niższej AB, momenta tych dwóch podstaw względem płasczyzn ZY i ZX będą:

$$Sx_1 = \int\int \frac{xdxdy}{\mathrm{dos}\zeta}, \quad Sy_1 = \int\int \frac{ydxdy}{\mathrm{dos}\zeta},$$

albo

$$S'x_1 = \int\int xdxdy, \quad S'y_1 = \int\int ydxdy.$$

Ale jest także

$$S'x'_1 = \int\int xdxdy, \quad S'y'_1 = \int\int ydxdy.$$

Więc

$$x_1 = x'_1, \quad y_1 = y'_1.$$

To dowodzi że środki ciężkości wszystkich przecięć, zrobionych przez jakiekolwiek płaszczyzny spotykające krawędzie boczne walca, albo graniastonu, są na jednej linii równoległej do tych krawędzi.

Uważajmy teraz walec CDFE (fig. wyżej), mający krawędzie pochyłe do obydwóch podstaw. Jeśli zrobimy przecięcie proste AB zewnątrz podstawy niższej EF, i oznaczymy przez S, S′, S″ powierzchnie podstaw CD, AB, EF, i przez G, G′, G″, ich środki ciężkości; na mocy tego co poprzedza, będziemy mieli

$$\text{obj.}(ABDC) = S' . GG' \quad \text{i} \quad \text{obj.}(ABFE) = S' . G''G'.$$

Więc

$$\text{obj.}(EFDC) = S'(GG' - G''G') = S' . GG''.$$

Ztąd TWIERDZENIE:

Objętość walca ściętego, albo graniastonu ściętego, równa się wieloczynowi powierzchni przecięcia prostego przez odległość środków ciężkości obydwóch podstaw.

Można jeszcze inaczej wysłowić to twierdzenie. Jakoż, jeśli z punktu G″ spuścimy prostopadłę G″H na płaszczyznę podstawy CD, kąt GG″H będzie nachyleniem płaszczyzny CD na płaszczyznę przecięcia prostego AB; zatem objętość walca ściętego EFDC wyraża się przez

$$\text{obj.}(EFDC) = S \operatorname{dos} GG''H . GG''.$$

Ale trójkąt prostokątny HGG″ daje

$$GG'' \operatorname{dos} GG''H = HG'';$$

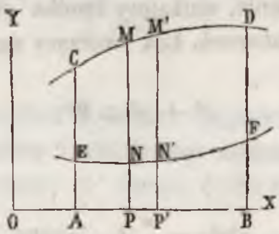
więc

$$\text{obj.}(EFDC) = S . HG''.$$

To równanie pokazuje że *objętość walca ściętego, albo graniastonu ściętego, ma za miarę wieloczyn jednej podstawy przez odległość od niej środka ciężkości drugiej.*

OBJĘTOŚCI OBROTOWE.

109. Niech będzie powierzchnia płaska, zawarta między dwiema



liniami krzywemi CD, EF, i dwiema prostemi CA, DB, prostopadłemi do osi OX leżącej zewnątrz figury. Ta powierzchnia, swoim obrotem około osi OX, tworzy objętość której środek ciężkości znajduje się oczywiście na osi obrotu. Aby wyznaczyć ten punkt, weźmy zewnątrz figury oś rzędnych OY prostopadłą do osi obrotu OX, i oznaczmy przez a, b odcięte OA, OB, a przez y, y_0 rzędne MP, NP dwóch krzywych CD, EF, odpowiedające odciętej $\mathrm{OP} = x$.

Owoż, wiemy z Analizy że objętość utworzona obrotem nieskończenie małej krójki MM'P'P około osi OX wyraża się przez $\pi(y^2 - y_0^2)dx$; zatem objętość utworzona całym obrotem powierzchni płaskiej CDFE około osi OX ma za miarę

$$\mathrm{V} = \pi \int_a^b (y^2 - y_0^2)dx.$$

Uważajmy teraz że moment objętości utworzonej przez krójkę MM'N'N względem płaszczyzny ZOY wyraża się przez $\pi(y^2 - y_0^2)xdx$; bo środek ciężkości tej objętości nieskończenie małej znajduje się na osi obrotu OX, między punktami P, P' nieskończenie sąsiedniemi. Ztąd wnosimy że

$$\mathrm{V}x_1 = \pi \int_a^b (y^2 - y_0^2)xdx.$$

Więc

$$x_1 = \frac{\int_a^b (y^2 - y_0^2) x dx}{\int_a^b (y^2 - y_0^2) dx}.$$

110. Na zastosowanie, szukajmy środka ciężkości *odcinka sferycznego o dwóch podstawach.* Łuk tworzący ma za równanie

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

zatem będzie

$$V = \pi \int_a^b (R^2 - x^2) dx = \frac{\pi}{3}(b - a)(3R^2 - a^2 - ab - b^2),$$

$$Vx_1 = \pi \int_a^b (R^2 - x^2) x dx = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2)(2R^2 - a^2 - b^2).$$

Więc

$$x_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{(a + b)(2R^2 - a^2 - b^2)}{3R^2 - a^2 - ab - b^2}.$$

Gdy jedna z podstaw staje się zero, odcinek sferyczny jest krymką sferyczną; wtedy, wprowadzając wysokość h tej krymki, otrzymamy jej środek ciężkości czyniąc w ostatniej formule $b = R$ i $a = R - h$; co daje

$$x_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2R - h)^2}{3R - h}.$$

111 Niech będzie $y^2 = 2px$ równanie paraboli tworzącej paraboloidę obrotową; środek ciężkości tej objętości wyznaczy się przez odciętę

$$x_1 = \frac{\int_0^x x^2 dx}{\int_0^x x dx} = \frac{2}{3} x.$$

Weźmy teraz parabolę $y = ax^2$ za linię tworzącą. Środek ciężkości figury mającej kształt lejka, utworzonej obrotem paraboli około stycznej wierzchołka, wyznaczy się przez odciętę

$$x_1 = \frac{\int_0^x x^5 dx}{\int_0^x x^4 dx} = \frac{5}{6} x.$$

Ale, jeśli chodzi o środek ciężkości objętości zawartej między powierzchnią paraboliczną i płaszczyzną utwrozoną obrotem osi paraboli, wtedy, nazywając X odciętę która odpowieda skrajnej rzędnej, będzie

$$x_1 = \frac{\int_0^X (X^4 - x^4) x dx}{\int_0^X (X^4 - x^4) dx} = \frac{5}{12} X.$$

112. Środek ciężkości objętości zawartej, między jedną z dwóch płacht hiperboloidy obrotowej, podstawą walca obrotowego mającą pół-oś urojoną za promień podstawy, i powierzchnią boczną tego walca, wyznacza się przez odciętę

$$x_1 = \frac{\int_0^{a\sqrt{2}} b^2 x dx - \frac{b^2}{a^2} \int_a^{a\sqrt{2}} (x^2 - a^2) x dx}{\int_0^{a\sqrt{2}} b^2 dx - \frac{b^2}{a^2} \int_a^{a\sqrt{2}} (x^2 - a^2) dx} = \frac{9}{56} (1 + 2\sqrt{2}) a.$$

ŚRODEK CIĘŻKOŚCI CIAŁ BRYŁOWYCH.

113. Ciała naturalne, jako wiadomo, składają się z niezmiernej liczby cząstek, będących w odległości jedne od drugich daleko większej niż ich rozmiary. Te ciała zmieniają ciągle swój kształt. Ale, aby mieć ich środek ciężkości, uważamy je za układy bryłowe nie-

zmienne, co jest tylko prostem założeniem; i wyobrażamy sobie że materya składająca te bryły jest rozsypana w całej przestrzeni objętej ich powierzchnią, przypuszczając że materya każdej cząstki składowej jest rozpostarta nietylko w przestrzeni którą ta cząstka rzeczywiście zajmuje, ale jeszcze i w części przestrzeni która istnieje między nią i cząstkami składowemi sąsiedniemi. Jeśli więc rozłożymy objętość pozorną ciała, na części nieskończenie małe we wszystkich rozmiarach, każda z tych części będzie napełniona materyą, i, w poszukiwaniu środka ciężkości, będzie można wziąć te pełne części przestrzeni zamiast cząstek składowych ciała które się w tej przestrzeni istotnie znajdują.

Zmyśliwszy taką ciągłość materyi w tej samej massie ciała, będziemy mogli zastosować rachunek całkowy do wyznaczenia środka ciężkości. Jakoż, weźmy za cząstkę nieskończenie małą objętości, równoległościan którego dwoma wierzchołkami przeciwległemi są dwa punkta sąsiednie M(x, y, z), M$'(x+dx, y+dy, z+dz)$, i krawędziami różniczki dx, dy, dz. Objętość tego równoległościanu wyraża się przez $kdxdydz$, a ciężar części materyalnej w nim zawartej przez $k\rho dxdydz$. Czynnik ρ znaczy ciężar gatunkowy ciała w punkcie M, i jest funkcyą spółrzędnych tego punktu; a spółczynnik k staje się 1 gdy spółrzędne są prostokątne. Zatem ciężar P całego ciała przedstawia się przez całkę potrójną

$$\mathrm{P} = k\int\int\int \rho dxdydz.$$

Aby otrzymać moment ciężaru ciała względem płaszczyzny, uważajmy że można, za spółrzędne środka ciężkości części materyalnej $k\rho dxdydz$, wziąć spółrzędne x, y, z punktu M do którego się ta część odnosi. Albowiem, składając siły którym są podległe punkta materyalne zawarte w równoległościanie $kdxdydz$, widzimy łatwo że punkt przyłożenia wynikowej znajduje się wewnątrz, na odległość nieskończenie małą od ścian, a ta odległość jest mniejsza od krawędzi dx, dy, dz. Ztąd wnosimy że moment części materyalnej względem płaszczyzny yz jest

$$k\rho(x+\alpha)dxdydz \quad \text{albo} \quad k\rho xdxdydz + k\rho\alpha dxdydz.$$

Owoż, wyraz $k\rho\alpha dxdydz$ jest nieskończenie mały względem $k\rho xdxdydz$; więc granicą summy wyrazów $k\rho\alpha dxdydz$ jest zero, i mamy

$$\mathrm{P}x_1 = k\int\int\int \rho xdxdydz.$$

Ztąd wynika

$$x_1 = \frac{\int\int\int \rho xdxdydz}{\int\int\int \rho dxdydz}$$

$$y_1 = \frac{\int\int\int \rho ydxdydz}{\int\int\int \rho dxdydz} \qquad z_1 = \frac{\int\int\int \rho zdxdydz}{\int\int\int \rho dxdydz}.$$

Granice tych czterech całek potrójnych są te same. Dla pokazania jak się całkowania wykonywać mają, weźmy pierwszą całkę $\int\int\int \rho dxdydz$.

Równanie powierzchni ciała daje, ogólnie, dwie wartości dla rzędnej z, mniejszą z_0 i większą Z, które są funkcyami odciętych x, y. Można najpierwej całkować względem z między granicami z_0 i Z, to jest wziąć summę różniczek ρdz, przypuszczając że x i y zostają stałe, a zaś z przechodzi przez wszystkie wartości od z_0 do Z. Otrzymuje się tym sposobem całkę określoną

$$dxdy\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \rho dz$$

która jest funkcyą x, y, i wyraża ciężar części ciała graniastonnej nieskończenie szczupłej, zawartej między czterema płasczyznami z których dwie są równoległe do zx a dwie do zy.

Poczem, z równania śladu, na płasczyznie xy, walca równoległego do OZ i opisanego na powierzchni ciała, wyciągamy, ogólnie, dwie wartości dla y, mniejszą y_0 i większą Y, które są funkcyami odciętej x; to uczyniwszy, całkujemy względem y, uważając x za ilość stałą. Tak otrzymujemy całkę określoną podwójną

$$dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} \rho dz$$

która jest funkcyą x, i wyraża ciężar krójki ciała, zawartej między dwiema płasczyznami równoległemi do yz.

Nakoniec, mając równania $x = a$, $x = b$ dwóch płasczyzn równoległych do płasczyzny zy, i przechodzących przez dwa punkta powierzchni ciała, z których pierwszy jest najmniej a drugi najwięcej oddalony od tej płasczyzny, całkujemy względem x między granicami a i b; i znajdujemy ostatecznie całkę określoną potrójną

$$\mathrm{P} = k \int_a^b dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} \rho dz.$$

Otrzymane takim sposobem, cztery całki potrójne wyznaczają to co przez przybliżenie nazywa się środkiem ciężkości ciała różnorodnego. Ciężar gatunkowy ρ tego ciała zmienia się w różnych punktach wedle pewnej ustawy, którą naprzód znać trzeba aby całkowanie było możebne.

114. Jeśli ciało jest jednorodne, ρ jest ilością stałą; wtedy, zważając że $\frac{\mathrm{P}}{\rho} = \mathrm{V}$ wyraża objętość ciała, powyższe formuły stają się

$$\mathrm{V} = k \int\int\int dxdydz, \qquad x_1 = \frac{\int\int\int xdxdydz}{\int\int\int dxdydz}$$

$$y_1 = \frac{\int\int\int ydxdydz}{\int\int\int dxdydz}, \qquad z_1 = \frac{\int\int\int zdxdydz}{\int\int\int dxdydz}.$$

W tym przypadku można zaraz wykonać jedno całkowanie, naprzykład względem z w granicach z_0 i Z; co daje

$$V = k\int\int\int(Z - z_0)dxdy, \qquad x_1 = \frac{\int\int(Z - z_0)xdxdy}{\int\int(Z - z_0)dxdy}.$$

$$y_1 = \frac{\int\int(Z - z_0)ydxdy}{\int\int(Z - z_0)dxdy}, \qquad z_1 = \frac{\frac{1}{2}\int\int(Z^2 - z_0^2)dxdy}{\int\int(Z - z)dxdy}.$$

Granice całkowania względem x i y zostają te same co przedtem.

115. Trzeba uważać że całka podwójna

$$u = k\int_0^Y\int_0^Z dydz$$

wyraża powierzchnię przecięcia bryły przez płaszczyznę równoległą do płaszczyzny yz. Więc, jeśli można wyznaczyć powierzchnię u w funkcyi samej odciętej x, otrzyma się objętość bryły jednem tylko całkowaniem

$$= \int_a^b udx.$$

Gdy w ciele jednorodnem przecięcia równoległe mają środki ciężkości w linii prostej, wtedy środek ciężkości ciała znajduje się na tej linii. Jakoż, formuły wyznaczające ten punkt stosują się tak dobrze do spółrzędnych pochyłych jako do prostokątnych; można więc za oś x wziąć linię prostą na której leżą środki przecięć ciała, a za płaszczyznę yz płaszczyznę równoległą do tych przecięć. W tem założeniu będzie

$$y_1 = \frac{\int dx\int\int ydydz}{\int\int\int dxdydz}, \qquad z_1 = \frac{\int dx\int\int zdydz}{\int\int\int dxdydz}.$$

Owoż, całki podwójne $\int\int ydydz$, $\int\int zdydz$ są zero dla wszelkiej wartości x, bo są proporcyonalne do momentów przecięcia u, wziętych względem płasczyzn xz i xy które zawierają środek ciężkości tego przecięcia; więc $y_1 = 0$ i $z_1 = 0$.

Teraz, ponieważ powierzchnia u przecięcia wyraża się w funkcyi samej odciętej x, środek ciężkości ciała jest wyznaczony przez formułę która zawiera tylko dwie całki pojedyncze,

$$x_1 = \frac{\int_a^b uxdx}{\int_a^b udx}.$$

Zastosujmy wyłożoną teoryę do kilku przykładów.

116. Środek ciężkości piramidy i stożka. Wszystkie przecięcia równoległe do podstawy piramidy, albo stożka, są podobne między sobą; zatem ich powierzchnie są proporcyonalne do kwadratów odległości od wierzchołka, i mają środki ciężkości na linii łączącej środek ciężkości podstawy z wierzchołkiem. Ztąd wynika że środek ciężkości piramidy, albo stożka, leży na tej linii; dość więc tylko wyznaczyć jego odległość od wierzchołka. Aby to uczynić po prostu, weźmy rzeczoną linię środków ciężkości za oś $x^{ów}$, a płasczyznę równoległą do podstawy i przechodzącą przez wierzchołek, za płasczyznę yz; jeśli potem oznaczymy przez b podstawę i przez a odległość jej środka ciężkości od wierzchołka, będziemy mieli

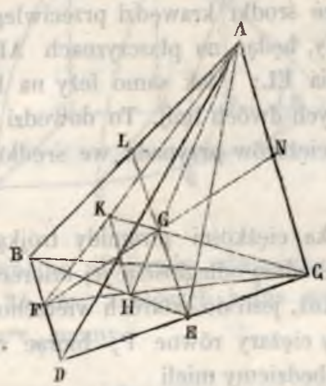
$$\frac{u}{b} = \frac{x^2}{a^2}.$$

Więc

$$x_1 = \frac{\int_0^a uxdx}{\int_0^a udx} = \frac{\int_0^a x^3dx}{\int_0^a x^2dx} = \frac{3}{4}a.$$

To wszystko pokazuje że środek ciężkości piramidy, albo stożka, znajduje się na linii łączącej środek ciężkości podstawy z wierzchołkiem, i w odległości $\frac{1}{4}$ tej linii poczynając od podstawy.

117. Łatwo, bez rachunku całkowego, wyznaczyć środek cięż-



kości piramidy trójkątnej ABCD. Jakoż, płasczyzna poprowadzona przez krawędź AB i przez środek E krawędzi CD jest płasczyzną średnicową, odpowiedającą cięciwom równoległym do CD; zatem środek ciężkości piramidy leży na tej płasczyznie; dla podobnej przyczyny, ten środek leży także na płasczyznie średnicowej przechodzącej przez krawędź AC i przez środek F krawędzi BD; więc się znajduje na linii AH która łączy środek ciężkości H ściany BCD z wierzchołkiem przeciwległym A. Dowiedzie się tak samo że środek ciężkości piramidy znajduje się na linii CK która łączy środek ciężkości K ściany ABD z wierzchołkiem przeciwległym C. Więc ten punkt jest przecięciem się G dwoch linii AH i CK. Owoż, z położenia punktów H i K wynika że w trójkącie FAC prosta HK jest równoległa do boku AC i równa jego trzeciej części; zatem trójkąty GHK, GAC są podobne i GH jest trzecią częścią odległości GA. Więc nakoniec GH jest czwartą częścią linii AH.

Jeśli do czterech wierzchołków piramidy trójkątnej przyłożono cztery ciężary równe, środek ciężkości tego układu ciężarów będzie środkiem ciężkości piramidy. Jakoż, dwa ciężary równe P, przyłożone w A i B, składają się w jedną siłę 2P przyłożoną we środku L krawędzi AB; podobnie dwa ciężary także równe P, przyłożone w C i D, składają się w jedną siłę 2P, przyłożoną we środku E krawędzi CD. Te dwie wynikowe częściowe równe składają się w ostateczną wynikowę, przyłożoną we środku prostej EL. Ztąd wnosimy że ta wynikowa przechodzi przez punkt w którym się przecinają linie łączące środki krawędzi przeciwległych. Owoż, środek ciężkości piramidy, będąc na płasczyznach ABE i CDL, leży na linii ich przecięcia EL; i tak samo leży na linii FN; więc jest przecięciem się tych dwóch linij. To dowodzi że środek ciężkości układu czterech ciężarów przypada we środku ciężkości piramidy ABCD.

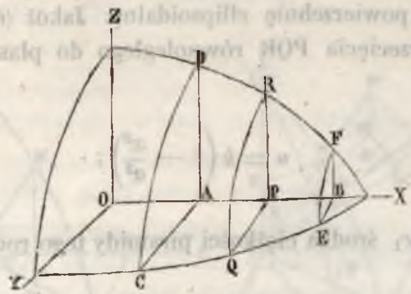
Odległość środka ciężkości piramidy trójkątnej od płasczyzny zewnętrznej jest średnią odległością jej czterech wierzchołków od tej płasczyzny. Jakoż, jeśli do czterech wierzchołków piramidy trójkątnej przyłożymy ciężary równe P, biorąc momenta względem danej płasczyzny, będziemy mieli

$$4Px_1 = Px + Px' + Px'' + Px'''; \text{ zkąd } x_1 = \frac{x + x' + x'' + x'''}{4}; \text{ etc.}$$

118. Graniaston i walec. Ponieważ wszystkie przecięcia równoległe do podstawy są równe, ich środki ciężkości leżą na linii łączącej środki ciężkości podstaw; zatem środek ciężkości graniastonu znajduje się na tej linii. Owoż, jeśli podzielimy graniaston, płasczyznami równoległemi do podstaw, na krójki nieskończenie cienkie, summa momentów wszystkich krójek będzie zero względem płasczyzny równo oddalonej od podstaw; więc środek ciężkości graniastonu leży na tej płasczyznie. Ztąd wnosimy że *środek ciężkości graniastonu, albo walca, jest we środku prostej która łączy środki ciężkości jego podstaw.*

119. Odcinek ellipsoidy. Szukajmy środka ciężkości odcinka ellipsoidy, zawartego między dwiema płasczyznami równoległemi ACD, BEF które są jego podstawami.

Ponieważ w ellipsoidzie przecięcia równoległe są ellipsami, mającemi środki na średnicy sprzężonej z płasczyznami tych przecięć, środek ciężkości odcinka ellipsoidy leży na średnicy sprzężonej z podstawą; dość więc znaleźć jego odległość od środka ellipsoidy.



Owoż, biorąc równanie ellipsoidy odniesione do trzech średnic sprzężonych $2a$, $2b$, $2c$ z których jedna sprzężona z podstawą odcinka jest osią $x^{ów}$, mamy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

zkąd wywodzimy

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

równanie przecięcia równoległego do płaszczyzny yz. Powierzchnia u tego przecięcia wyraża się przez

$$u = k\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right);$$

więc, nazywając α, β odcięte OA, OB, będzie

$$x_1 = \frac{\int_\alpha^\beta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) x dx}{\int_\alpha^\beta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(\alpha + \beta)(2a^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{3a^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta}.$$

Ta wartość niezależna od średnic $2b$ i $2c$ stosuje się do środka ciężkości odcinka sfery mającej promień a.

120. Można jeszcze łatwo znaleźć środek ciężkości piramidy trójkątnej, mającej za krawędzie trzy pół-średnice sprzężone a, b, c, i za podstawę powierzchnię ellipsoidalną. Jakoż (*ostat. fig.*), powierzchnia przecięcia PQR równoległego do płaszczyzny yz wyraża się przez

$$u = k\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right);$$

więc odcięta x_1 środka ciężkości piramidy tego rodzaju jest

$$x_1 = \frac{\int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) x dx}{\int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx} = \frac{3}{8} a.$$

Zatem, z przyczyny symetryi rachunku, będzie

$$y_1 = \frac{3}{8} b, \qquad z_1 = \frac{3}{8} c.$$

121. Odcinek paraboloidy. Mając dane równania

$$y^2 = 2px \quad \text{i} \quad z^2 = 2qx$$

dwóch parabol głównych, szukajmy środka ciężkości odcinka paraboloidy, wyznaczonego przez płaszczyznę prostopadłą do osi głównej. Ten środek ciężkości leży na osi głównej, dość więc znaleźć jego odciętę na tej osi.

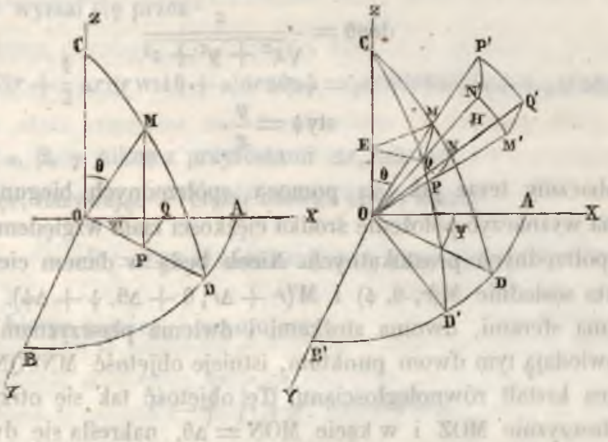
Owoż,

$$u = \pi yz = 2\pi x \sqrt{pq};$$

więc

$$x_1 = \frac{\int_0^x x^2 dx}{\int_0^x x dx} = \frac{2}{3} x.$$

122. Gdy równanie powierzchni ciała jest dane w funkcyi spółrzędnych biegunowych, trzeba także wyrazić ciężar tego ciała i jego



momenta w funkcyi spółrzędnych tego samego rodzaju. Owoż, wiemy że punkt M w przestrzeni jest określony przez spółrzędne biegunowe następujące : promień wodzący OM $= r$, kąt MOZ $= \theta$ nazwany w Astronomi *dopełnieniem szerokości*, kąt dwójścienny MOZX $= \psi$ zwany *długością* (geograficzną). Te spółrzędne wyznaczają punkt M przez przecięcia się trzech powierzchni, to jest : sfery promienia r, stożka obrotowego mającego kąt 2θ, i płaszczyzny przechodzącej przez oś OZ a czyniącej z płaszczyzną ZX kąt ψ

Spółrzędne prostolinijne prostokątne x, y, z wyrażają się łatwo w funkcyi spółrzędnych biegunowych r, θ, ψ, jako pokazuje pierwsza figura która zaraz daje

$$x = \mathrm{OP}\,\mathrm{dos}\,\psi = r\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\psi,$$

$$y = \mathrm{OP}\,\mathrm{wst}\,\psi = r\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\psi,$$

$$z = \mathrm{OM}\,\mathrm{wst}\,\mathrm{MOP} = r\,\mathrm{dos}\,\theta.$$

Ztąd nawzajem spółrzędne r, θ, ψ wywodzą się w funkcyi spółrzędnych x, y, z :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{dos}\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\text{sty}\psi = \frac{y}{x}.$$

Zobaczmy teraz jak, za pomocą spółrzędnych biegunowych, można wyznaczyć położenie środka ciężkości ciała względem trzech osi spółrzędnych prostokątnych. Niech będą w danem ciele dwa punkta sąsiednie $M(r, \theta, \psi)$ i $M'(r + \Delta r, \theta + \Delta\theta, \psi + \Delta\psi)$. Między dwiema sferami, dwoma stożkami i dwiema płasczyznami, które odpowiedają tym dwom punktom, istnieje objętość MNPQN'P'Q'M' mająca kształt równoległościanu. Tę objętość tak się otrzymuje: na płasczyznie MOZ i w kącie MON $= \Delta\theta$, nakreśla się dwa łuki podobne MN i P'Q' promieniami r i $r + \Delta r$. Wynika ztąd trapez kołowy MNQ'P' który, będąc różnicą dwóch wycinków kołowych, wyraża się przez

$$\frac{1}{2}(r + \Delta r)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r^2\Delta\theta = \left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right)\Delta r\Delta\theta.$$

Jeśli teraz obrócimy płasczyznę MOZ około osi OZ o kąt $\Delta\psi$, trapez MNQ'P' weźmie położenie M'N'QP i swoim obrotem utworzy niby równoległościan MNPQM'. Objętość tego niby równoległościanu równa się, na mocy twierdzenia Guldina, wieloczynowi powierzchni trapezu kołowego MNQ'P' przez łuk koła opisany jego środkiem ciężkości H. Owoż, z przyczyny że punkt H jest nieskończenie blizko punktu M, łuk opisany przez H różni się nieskończenie mało od łuku opisanego przez M; a długość ostatniego łuku, którego promieniem jest prostopadła ME do OZ, wyraża się przez ME $. \Delta\psi = r\,\text{wst}\theta\Delta\psi$. Więc objętość MNPQM' ma za miarę

$$\left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right)(r\,\text{wst}\theta + \alpha)\Delta r\Delta\theta\Delta\psi;$$

α niknie z przyrostami Δr, $\Delta\theta$, $\Delta\psi$.

To ustaliwszy, uważajmy ciało niejednorodne. Jeśli nazwiemy ρ ciężar gatunkowy w punkcie M ciała, ciężar gatunkowy średni nieskończenie małej bryłki MNPQM' będzie $\rho+\beta$, i cały jej ciężar wyrazi się przez

$$(\rho+\beta)(r+\frac{1}{2}\Delta r)(r\,\text{wst}\,\theta+\alpha)\Delta r\Delta\theta\Delta\psi=\rho r^2\,\text{wst}\,\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\psi+\gamma\Delta r\Delta\theta\Delta\psi.$$

gdzie α, β, γ nikną z przyrostami Δr, $\Delta\theta$, $\Delta\psi$.

Więc, nazywając P ciężar danega ciała, mamy

$$P=\Sigma\Sigma\Sigma\rho r^2\,\text{wst}\theta\,\Delta r\Delta\theta\Delta\psi+\Sigma\Sigma\Sigma\gamma\Delta r\Delta\theta\Delta\psi\,;$$

zkąd, biorąc granice, otrzymujemy

$$P=\int\int\int\rho r^2\,\text{wst}\theta\,dr d\theta d\psi.$$

Uważajmy teraz że środek ciężkości nieskończenie małej bryłki MNPQM' jest wewnątrz niej i nieskończenie blizko punktu M; albowiem różnice spółrzędnych tych dwóch punktów są mniejsze od Δr, $\Delta\theta$, $\Delta\psi$. Można więc wziąć spółrzędne punktu M, za spółrzędne środka ciężkości bryłki. Tym sposobem, zastępując spółrzędne prostokątne x, y, z punktu M przez ich wartości $r\,\text{wst}\theta\,\text{dos}\psi$, $r\,\text{wst}\theta\,\text{wst}\psi$, $r\,\text{dos}\theta$, mamy do wyznaczenia spółrzędnych x_1, y_1, z_1 środka ciężkości ciała cztery następujące formuły:

$$P=\int\int\int\rho r^2\,\text{wst}\theta\,dr d\theta d\psi,$$

$$Px_1=\int\int\int\rho r^3\,\text{wst}^2\theta\,\text{dos}\psi\,dr d\theta d\psi,$$

$$Py_1=\int\int\int\rho r^3\,\text{wst}^2\theta\,\text{wst}\psi\,dr d\theta d\psi,$$

$$Pz_1=\int\int\int\rho r^3\,\text{wst}\theta\,\text{dos}\theta\,dr d\theta d\psi.$$

Granice wszystkich czterech całek potrójnych są te same. Aby pokazać jak się całkowanie odbywa, weźmy pierwszą całkę $\int\int\int \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\psi$. Dla znalezienia granic całkowania, trzeba odróżnić przypadki w których początek spółrzędnych znajduje się wewnątrz ciała albo zewnątrz

1° Jeśli początek O spółrzędnych jest wewnątrz ciała, całkuje się najpierwej względem r, uważając θ i ψ za ilości stałe, od $r = 0$ do $r = \varphi(\theta, \psi)$; ostatnia wartość jest dana przez równanie powierzchni ciała $F(r, \theta, \psi) = 0$. Wynikiem tego całkowania jest funkcya spółrzędnych θ, ψ, która wyraża ciężar piramidy nieskończenie szczupłej, mającej wierzchołek O i krawędź $r = \varphi(\theta, \psi)$.

Można potem całkować względem θ, uważając ψ jako ilość stałą, od $\theta = 0$ do $\theta = \pi$; znajduje się tym sposobem funkcyę spółrzędnej ψ, która wyraża ciężar części ciała, zawartej w kącie dwójściennym $d\psi$, między krawędzią OZ i powierzchnią tego ciała. Nakoniec, całkuje się względem ψ od $\psi = 0$ do $\psi = 2\pi$. Te trzy całkowania dają ciężar P, wyrażony potrójną całką określoną

$$P = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\varphi(\theta,\psi)} \rho r^2 dr.$$

2° Jeśli początek spółrzędnych i oś OZ są zewnątrz danego ciała, przypuszczając że równanie powierzchni $F(r, \theta, \psi) = 0$ daje dwie wartości dla r, mniejszą, r_0 i większą R które są funkcyami spółrzędnych θ, ψ, całkuje się względem r od r_0 do R, uważając θ i ψ za stałe. Poczem, uważając ψ za ilość stałą w równaniu $F(r, \theta, \psi) = 0$, otrzymuje się równanie linii krzywej, która jest przecięciem powierzchni z płasczyzną przechodzącą przez OZ i czyniącą kąt ψ z płasczyzną ZX. Niech będą wtedy θ_0 i θ_1 kąty jakie dwie styczne do tej krzywej, wychodzące z początku spółrzędnych, czynią z osią OZ; te kąty są funkcyami spółrzędnej ψ; znając je, całkuje się względem θ od $\theta = \theta_0$ do $\theta = \theta_1$, co daje pewną funkcyę ilości ψ. Nakoniec, całkuje się względem ψ od $\psi = \psi_0$ do $\psi = \psi_1$, nazywając ψ_0 i ψ_1 kąty jakie dwie płasczyzny styczne do powierzchni ciała, i przechodzące przez OZ, czynią z płasczyzną ZX.

Ale, gdy początek spółrzędnych jest zewnątrz ciała wskroś którego oś OZ przenika, wtedy trzeba całkować od $\theta = 0$ do $\theta = \theta_1$, i od $\psi = 0$ do $\psi = 2\pi$.

Uwaga. Za pomocą metody nieskończenie małych dochodzi się łatwo do wyżej otrzymanych formuł. Jakoż, w czworoboku różnolinijnym MNPQ, bok $MN = rd\theta$ i bok $MQ = r \operatorname{wst}\theta d\psi$. Ztąd wynika

$$\textit{Powierzchnia}\quad MNPQ = (r^2 \operatorname{wst}\theta + \varepsilon) d\theta d\psi,$$
$$\textit{Objętość}\quad MNPQM' = (r^2 \operatorname{wst}\theta + \eta) dr d\theta\psi.$$

Więc, zaniedbując nieskończenie małe rzędu wyższego nad zachowany, znajdujemy dla nieskończenie małej cząstki powierzchni wartość $r^2 \operatorname{wst}\theta d\theta d\psi$, a dla nieskończenie małej cząstki objętości wartość $r^2 \operatorname{wst}\theta dr d\theta d\psi$; zatem ciężar nieskończenie małej bryłki wyraża się przez $\rho r^2 \operatorname{wst}\theta dr d\theta d\psi$. Ztych różniczek przechodzi się bez żadnej trudności do czterech wiadomych formuł.

123. Dla ułatwienia całkowań używa się czasem spółrzędnych napół-biegunowych, biorąc tylko na płasczyznie xy spółrzędne biegunowe. W tym przypadku tak rozkładamy daną objętość na części nieskończenie małe: opisujemy na powierzchni walec równoległy do osi OZ, i uważamy jego ślad na płasczyznie xy; przez OZ prowadzimy ciąg płasczyzn nieskończenie blizkich jedna drugiej, i potem wyobrażamy nieskończoną liczbę powierzchni walcowych, mających za spólną oś linię rzędnych OZ, a za podstawy koła spółśrodkowe których promienie zmieniają się stopniami nieskończenie małemi. Tym sposobem, powierzchnia zawarta śladem walca na płasczyznie xy zostaje podzielona na trapezy kołowe których miarą jest $rdrd\psi$, jakośmy to już widzieli (101); każdemu z tych trapezów odpowieda cząstka graniastonna objętości, nieskończenie szczupła, mająca wysokość z, i której miarą jest $zrdrd\psi$.

Więc, uważając że $x = r \operatorname{dos}\psi$, $y = r \operatorname{wst}\psi$, i nazywając ρ ciężar gatunkowy ciała, mamy do wyznaczenia środka ciężkości następujące formuły:

$$P = \int\int \rho z r dr d\psi, \qquad Px_1 = \int\int \rho z r^2 \operatorname{dos}\psi\, dr\, d\psi,$$

$$Py_1 = \int\int \rho z r^2 \operatorname{wst}\psi\, dr\, d\psi, \qquad Pz_1 = \frac{1}{2}\int\int \rho z^2 r dr d\psi,$$

W przypadku dość ogólnym, gdy objętość danego ciała mieści się między dwiema powierzchniami położonemi odpowiednio jedna nad drugą, formuły do wyznaczenia środka ciężkości są

$$P = \int\int \rho(z - z_0) r dr d\psi, \qquad Px_1 = \int\int \rho(z - z_0) r^2 \operatorname{dos}\psi \, dr d\psi,$$

$$Py_1 = \int\int \rho(z - z_0) r^2 \operatorname{wst}\psi \, dr d\psi, \qquad Pz_1 = \frac{1}{2}\int\int \rho(z^2 - z_0^2) r dr d\psi.$$

W całkowaniu tych i poprzednich formuł trzeba wyrazić ρ, z i z_0 w funkcyi spółrzędnych r i θ.

124. Jakiekolwiek są spółrzędne, i jakimkolwiek sposobem podzielono objętość danego ciała na cząstki nieskończenie małe, oznaczając przez dv objętość cząstki składowej, przez ρ jej gęstość, przez M całą massę ciała, będziemy mieli formuły ogólne następujące

$$M = \int\int\int \rho dv, \qquad Mx_1 = \int\int\int \rho x dv,$$

$$My_1 = \int\int\int \rho y dv, \qquad Mz_1 = \int\int\int \rho z dv.$$

Jeśli ciało jest jednorodne, ρ jest ilością stałą; wtedy, $M = V\rho$, i powyższe formuły stają się

$$V = \int\int\int dv, \qquad Vx_1 = \int\int\int x dv,$$

$$Vy_1 = \int\int\int y dv, \qquad Vz_1 = \int\int\int z dv.$$

125. Środek ciężkości powierzchni na których przypuszczono rozpostartą skoncentrowaną massę, wyznacza się za pomocą spółrzędnych prostolinijnych albo biegunowych.

Daliśmy już formuły w funkcyi spółrzędnych prostolinijnych dla powierzchni jednorodnych; dość więc tylko wprowadzić do nich czynnik ρ.

Aby otrzymać formuły w funkcyi spółrzędnych biegunowych, trzeba, wprowadzając czynnik ρ, pomnożyć wartość $r^2 \mathrm{wst}\,\theta d\theta d\psi$, nieskończenie małej cząstki powierzchnej, przez odpowiedające spółrzędne jej środka ciężkości, i wskazać całkowania. Co daje

$$M=\int\int \rho r^2 \mathrm{wst}\theta\, d\theta\, d\psi, \qquad Mx_1=\int\int \rho r^3 \mathrm{wst}^2\theta \,\mathrm{dos}\psi\, d\theta\, d\psi,$$

$$My_1=\int\int \rho r^3 \mathrm{wst}^2\theta\, \mathrm{wst}\psi\, d\theta d\psi, \quad Mz_1=\int\int \rho r^3 \mathrm{wst}\theta \,\mathrm{dos}\theta\, d\theta d\psi.$$

r jest ogólnie funkcyą zmiennych θ i , a granice całkowania te same co dla objętości.

Nakoniec, jeśli chcemy znaleźć formuły w funkcyi spółrzędnych napół-biegunowych, trzeba uważać że każdemu trapezowi kołowemu $rdrd\psi$ odpowieda nieskończenie mała cząstka powierzchna, która się wyraża przez $\dfrac{rdrd\psi}{\mathrm{dos}\zeta}$ a jej massa przez $\rho.\dfrac{rdrd\psi}{\mathrm{dos}\zeta}$. Więc szukane formuły są

$$M=\int\int \rho.\frac{rdrd\psi}{\mathrm{dos}\zeta}. \qquad Mx_1=\int\int \rho.\frac{r^2 \mathrm{dos}\psi\, drd\psi}{\mathrm{dos}\zeta}.$$

$$My_1=\int\int \rho.\frac{r^2 \mathrm{wst}\psi drd\psi}{\mathrm{dos}\zeta}, \qquad Mz_1=\int\int \rho.\frac{zrdrd\psi}{\mathrm{dos}\zeta}.$$

W ostatniej formule, z powinno być wyrażone w funkcyi spółrzędnych r i ψ.

Weźmy teraz na zastosowanie kilka przykładów które lepiej wyjaśnią wyłożoną teoryę.

126. *Znaleźć środek ciężkości* WYCINKA SFERYCZNEGO *w którym ciężar gatunkowy* ρ *jest funkcyą samego promienia wodzącego* r.

Biorąc oś symetryi wycinka za oś rzędnych a środek sfery za początek spółrzędnych, i całkując względem θ i ψ które są niezależne od r, mamy :

$$M = 2\pi(\operatorname{dos}\theta_0 - \operatorname{dos}\theta)\int_0^R \rho r^2 dr,$$

$$Mz_1 = \pi(\operatorname{dos}^2\theta_0 - \operatorname{dos}^2\theta)\int_0^R \rho r^3 dr;$$

zkąd

$$z_1 = \frac{(\operatorname{dos}\theta_0 + \operatorname{dos}\theta)\int_0^R \rho r^3 dr}{2\int_0^R \rho r^2 dr}.$$

Aby wykonać całkowania, trzeba znać naprzód funkcyę ρ. Jeśli ρ jest ilością stałą, będzie

$$z_1 = \frac{3}{8}(\operatorname{dos}\theta_0 + \operatorname{dos}\theta)R;$$

wynik już wiadomy.

127. *Środek ciężkości* KLINA SFERYCZNEGO. Klinem sferycznym nazywa się część sfery zawarta między dwoma półkolami wielkiemi i wrzecieniem sferycznem : jego środek ciężkości jest na przecięciu się dwóch płaszczyzn prostokątnych symetryi. Biorąc krawędź klina za oś rzędnych, jedną ze ścian za płaszczyznę zx, i oznaczając przez C kąt klina, będzie

$$V = \frac{1}{3}R^3\int_0^C d\psi\int_0^\pi \operatorname{wst}\theta d\theta = \frac{2}{3}C.R^3,$$

$$Vx_1 = \frac{1}{4}R^4\int_0^C d\psi\int_0^\pi \operatorname{wst}^2\theta \operatorname{dos}\theta d\theta = \frac{1}{8}\pi R^4 \operatorname{wst} C,$$

zkąd

$$x_1 = \frac{3}{16}\pi.R\,\frac{\operatorname{wst} C}{C}.$$

Ta wartość wyraża, na linii przecięcia jednej ściany klina z płaszczyzną symetryi prostopadłą do krawędzi, odległość rzutu jego środka ciężkości od tej krawędzi.

128. *Środek ciężkości* WRZECIENIA SFERYCZNEGO *mającego kąt* C. Rozumując jako wyżej, i nazywając S powierzchnię wrzecienia, znajdujemy

$$S = R^2 \int_0^C d\psi \int_0^\pi \text{wst}\,\theta d\theta = 2C.R^2,$$

$$Sx_1 = R^3 \int_0^C \text{dos}\,\psi d\psi \int_0^\pi \text{wst}^2\,\theta d\theta = \frac{1}{2}\pi R^3 \,\text{wst}\, C,$$

więc

$$x_1 = \frac{\pi}{4}.\frac{R\,\text{wst}\,C}{C}.$$

129. Jest dany stożek prosty mający za wysokość rzędnę OS $= h$, i za podstawę koło promienia OA $= a$; na tym promieniu jako

średnicy, na płasczyznie xy, nakreślono koło i na niem wystawiono walec prosty. *Znaleźć środek ciężkości części walca zamkniętej powierzchnią stożka.*

Ten środek ciężkości znajduje się na płasczyznie symetryi zx; dość więc będzie wyznaczyć spółrzędne x_1, z_1.

Posługując się spółrzędnemi na pół-biegunowemi, i uważając że $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PN}}=\frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{ON}}$, zkąd $z=\frac{h}{a}(a-r)$, otrzymujemy

$$\mathrm{V}=\frac{2h}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{a\,\mathrm{dos}\,\psi}(a-r)r\,dr=2ha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\mathrm{dos}^2\psi}{2}-\frac{\mathrm{dos}^3\psi}{3}\right)d\psi,$$

$$\mathrm{V}x_1=\frac{2h}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{dos}\,\psi d\psi\int_0^{a\,\mathrm{dos}\,\psi}(a-r)r^2dr=2ha^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\mathrm{dos}^4\psi}{3}-\frac{\mathrm{dos}^5\psi}{4}\right)d\psi,$$

$$\mathrm{V}z_1=\frac{h^2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{a\,\mathrm{dos}\,\psi}(a-r)^2r\,dr=2h^2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\mathrm{dos}^2\psi}{2}-\frac{2\,\mathrm{dos}^3\psi}{3}+\frac{\mathrm{dos}^4\psi}{4}\right)d\psi.$$

Owoż,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{dos}^2\psi dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\mathrm{dos}\,2\psi}{2}\,d\psi=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{dos}^3\psi d\psi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{dos}\psi\,\mathrm{wst}^2\psi d\psi=\frac{2}{3},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{dos}^4\psi d\psi=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{dos}^2\psi d\psi=\frac{3\pi}{16},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{dos}^5\psi d\psi=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{dos}^3\psi d\psi=\frac{8\pi}{15}.$$

Więc, podstawiając te wartości i dokończając rachunków, znajdujemy ostatecznie

$$x_1=\frac{3a}{10}\cdot\frac{15\pi-32}{9\pi-16},\quad z_1=\frac{h}{8}\cdot\frac{99\pi-256}{9\pi-16}.$$

Wyznaczyć środek ciężkości powierzchni półsferza, w której gęstość każdego punktu jest proporcyonalna do jego odległości od podstawy.

Biorąc oś symetryi półsferza za oś rzędnych, nazywając M massę półsferza, i wyrażając przez kz gęstość jego punktów, mamy

$$M = k\int\int\frac{zrdrd\psi}{\cos\zeta}, \quad Mz_1 = k\int\int\frac{z^2rdrd\psi}{\cos\zeta}.$$

Owoż

$$\cos\zeta = \frac{z}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R};$$

zatem

$$M = kR\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R rdr = k\pi R^3,$$

$$Mz_1 = kR\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}\, rdr = \frac{2}{3}\, k\pi R^4.$$

Więc

$$z_1 = \frac{2}{3}\, R.$$

ROZDZIAŁ IV.

WIELOKĄT SZNURKOWY I ŁAŃCUSZKOWA.

RÓWNOWAGA WIELOKĄTA SZNURKOWEGO.

131, Nazywa się *wielokątem sznurkowym* układ punktów A, B, C, D,.... F połączonych między sobą sznurkami nierozciągalnemi. Skrajności A i F są zazwyczaj punktami niezmiennemi,

na których wielokąt sznurkowy jest zawieszony ; ale, jeśli nie są ustalone, wtedy, dla utrzymania wielokąta w równowadze, trzeba przyłożyć do punktów A i F dwie siły w kierunkach BA i EF dwóch sznurków skrajnych. Wierzchołki B, C, D.... kątów wielokąta są węzłami do których są przyłożone siły jakiekolwiek P, P′, P″...., działające za pośrednictwem sznurków przywiązanych w tych punktach. A ponieważ siły przyłożone do jednego punktu składają się w jedną wynikowę, niema potrzeby przypuszczać, w jednym wierzchołku wielokąta sznurkowego, więcej niż trzy sznurki, jeden dla siły dwa dla dwóch tężności.

Mając dany taki wielokąt, aby wiedzieć pod jakiemi warunkami jego równowaga istnieje, uważajmy najpierwej że, w stanie równowagi, każdy sznurek pośredni, jako CD, jest ciągnięty przez dwie siły równe i wprost przeciwne, które można przypuścić przyłożone w jego skrajnościach C, D, na mocy założenia nierozciągalności sznurków. Pojmuje się łatwo działanie tych dwóch sił następującym sposobem. Gdyby przecięto sznurek CD w punkcie I, równowaga byłaby zerwana, i wierzchołki C, D wzięłyby ruch, każdy z nich pod działaniem pewnej siły. Owoż, dwie siły są zniszczone w punkcie I przez ten sam opór sznurka łączącego wierzchołki C i D; więc one są równe i wprost przeciwne, i działają w kierunku sznurka CD. Każda z tych dwóch sił stanowi to co nazwano *tężnością* sznurka.

Widzimy teraz łatwo że, dla równowagi wielokąta sznurkowego, każdy jego wierzchołek powinien być osobno w równowadze pod działaniem sił i tężności które na niego wpływwywierają. Więc, oznaczając przez S i S′ siły przyłożone do skrajności A i F, w kierunkach BA i EF sznurków skrajnych, a przez T_1, T_2, T_3,... tężności sznurków pośrednich BC, CD,....; przez a, b, c i a', b', c'; a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2...., α, β, γ, α', β', γ',.... kąty jakie siły S i S′, tężności T_1, T_2,...., w wierzchołkach B, C,... i siły P, P′, P″... czynią z trzema osiami prostokątnemi, będziemy mieli równania:

w wierzchołku B

$$\begin{aligned} &S \cos a + P \cos \alpha + T_1 \cos a_1 = 0, \\ (B)\qquad &S \cos b + P \cos \beta + T_1 \cos b_1 = 0, \\ &S \cos c + P \cos \gamma + T_1 \cos c_1 = 0; \end{aligned}$$

w wierzchołku C

$$\begin{aligned} &-T_1 \cos a_1 + P' \cos \alpha' + T_2 \cos a_2 = 0, \\ (C)\qquad &-T_1 \cos b_1 + P' \cos \beta' + T_2 \cos b_2 = 0, \\ &-T_1 \cos c_1 + P' \cos \gamma' + T_2 \cos c_2 = 0; \end{aligned}$$

tak samo w wierzchołku D; etc. Jeśli dodamy te wszystkie równania, wyrugujemy niewiadome tężności sznurków pośrednich, i znajdziemy

$$S \operatorname{dos} a + P \operatorname{dos} \alpha + P' \operatorname{dos} \alpha' + P'' \operatorname{dos} \alpha'' + \ldots + S' \operatorname{dos} a' = 0,$$

$$(1)\quad S \operatorname{dos} b + P \operatorname{dos} \beta + P' \operatorname{dos} \beta' + P'' \operatorname{dos} \beta'' + \ldots + S' \operatorname{dos} b' = 0,$$

$$S \operatorname{dos} c + P \operatorname{dos} \gamma + P' \operatorname{dos} \gamma' + P'' \operatorname{dos} \gamma'' + \ldots + S' \operatorname{dos} c' = 0.$$

Te równania wyrażają że trzeba, dla równowagi wielokąta sznurkowego, żeby wszystkie siły zewnętrzne S, S′, P, P′.... przyłożone w jego wierzchołkach, przeniesione równolegle do siebie samych do jakiegokolwiek punktu przestrzeni, czyniły sobie równowagę.

Nawzajem, jeśli siły zewnętrzne zadość czynią temu warunkowi, można zawsze znaleźć figurę równowagi wielokąta sznurkowego mającego dane boki; byle te boki były nierozciągalne, jako założono.

Jakoż, dajmy pierwszemu bokowi AB wielokąta kiernuek siły skrajnej S, i skierujmy potem drugi bok BC w stronę przeciwną wynikowej T_1 sił S, P; poczem, umieśćmy następujący bok CD w kierunku przeciwnym wynikowej T_2 sił T_1 i P′, albo co wychodzi na jedno, wynikowej sił S, P, P′ przeniesionych równolegle do siebie samych do punktu C. Postępujmy tak dalej aż do ostatniego wierzchołka E, w którym postawmy ostatni bok EF, w kierunku przeciwnym wynikowej sił T_3 i P‴ to jest wynikowej sił S, P, P′, P‴ przeniesionych równolegle do siebie samych do punktu E. Wedle tej budowy, i na mocy równań (1), ostatni bok EF będzie miał kierunek danej siły S′. A ponieważ z założenia wszystkie siły zewnętrzne S, S′, P, P′, P″...., przeniesione równolegle do siebie samych do punktu E, czynią sobie około niego równowagę, albo co to samo, ponieważ w każdym wierzchołku siły i tężności niszczą się nawzajem, wszystkie wierzchołki wielokąta sznurkowego uważane osobno są w równowadze. Więc cały wielokąt pod działaniem sił danych zostaje w równowadze.

To wszystko, niezależne od wielkości i od liczby boków, jest prawdziwe w wielokącie sznurkowym którego boki stają się nieskończenie małemi; a więc stosuje się do linii krzywej która jest granicą wielokąta.

Powyższa budowa wielokąta sznurkowego, w równowadze pod siłami danemi, jasno pokazuje że tężność każdego boku (sznurka) jest wynikową wszystkich sił zewnętrznych, działających z jednej strony tego boku i przeniesionych równolegle do siebie samych do jednego z jego punktów.

Można jeszcze, za pomocą powyższej budowy, znaleźć spółrzędne wierzchołków wielokąta względem trzech osi prostokątnych jakichkolwiek, przechodzących przez punkt skrajny A. Jakoż, znając wielkość i kierunek pierwszego boku AB, mamy zaraz spółrzędne wierzchołka B, rzutując bok AB na te trzy osie. Poczem, znając także wielkość boku BC, i wiedząc że ma kierunek wynikowej sił S i P, do trzech rzutów boku AB dołączamy rzuty boku BC; tym sposobem otrzymujemy spółrzędne wierzchołka C. I tak dalej postępując, znajdziemy spółrzędne wierzchołków następujących D, E,...

132. Nietrudno otrzymać wprost równania równowagi wielokąta sznurkowego, sposobem równie prostym jak ogólnym, który stanowi ważną zasadę w Mechanice. Ta zasada polega na następującej oczywistej prawdzie: *Gdy układ jakichkolwiek punktów jest w równowadze, nie narusza się w niczem tej równowagi przypuszczając że układ stał się bryłowym niezmiennym.* Owóż, przypuszczając że wielokąt sznurkowy w równowadze stał się bryłowym niezmiennym, widzimy zaraz że, dla istnienia jego równowagi, siły wprost przyłożone powinny być takie, żeby przeniesione równolegle do siebie samych, do jakiegokolwiek punktu przestrzeni, czyniły sobie w nim równowagę. Co daje natychmiast trzy równania równowagi, któreśmy wyżej znaleźli.

Aby teraz wyznaczyć tężność T_2 sznurka CD, na przykład, wyobraźmy sobie że odcięto część DEF wielokąta sznurkowego a zostawiono część ABCD. Równowaga zostającej części nie będzie zepsuta, jeśli przyłożono do punktu D siłę T_2 w kierunku CD; zatem, ponieważ siły S, P, P′ i T_2 są w równowadze, siła T_2, czyli tężność sznurka CD od C ku D, jest równa i wprost przeciwna wynikowej sił S, P, P′. Więc ogólnie, tężność jednego sznurka jest wynikową wszystkich sił zewnętrzych, znajdujących się z jednej jego strony, i przeniesionych równolegle do siebie samych, do jakiegokolwiek punktu tego sznurka.

133. Uwaga. Możnaby się tu zapytać co się staje z drugim ogólnym warunkiem równowagi, albo wyraźniej, czem tu są summy algebryczne momentów sił względem każdej z trzech osi spółrzędnych? Te summy momentów sił są zero, na mocy równań (B), (C).... równowagi w każdym wierzchołku wielokąta sznurkowego. Jakoż, biorąc trzy osie spółrzędne prostokątne, oznaczmy przez x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2,.... x_n, y_n, z_n spółrzędne wierzchołków B, C,.... E; poczem, aby otrzymać summę momentów sił względem osi OX, wyrażoną przez $\Sigma(Zy - Yz)$, pomnóżmy przez y_1 trzecie równanie (B) a przez $-z_1$ drugie, i dodajmy, będzie

$$S(y_1 \operatorname{dos} c - z_1 \operatorname{dos} b) + P(y_1 \operatorname{dos}\gamma - z_1 \operatorname{dos}\beta) + T_1(y_1 \operatorname{dos} c_1 - z_1 \operatorname{dos} b_1) = 0.$$

Mnożąc podobnie przez y_2 i $-z_2$ równania (C), i dodając, mamy

$$-T_1(y_2 \operatorname{dos} c_1 - z_2 \operatorname{dos} b_1) + P'(y_2 \operatorname{dos}\gamma' - z_2 \operatorname{dos}\beta')$$
$$+ T_2(y_2 \operatorname{dos} c_2 - z_2 \operatorname{dos} b_2) = 0.$$

Teraz uważajmy że summa

$$T_1(y_1 \operatorname{dos} c_1 - z_1 \operatorname{dos} b_1) - T_1(y_2 \operatorname{dos} c_1 - z_2 \operatorname{dos} b_1)$$
$$= T_1 \left\{ (y_1 - y_2) \operatorname{dos} c_1 - (z_1 - z_2) \operatorname{dos} b_1 \right\} = 0;$$

albowiem równania boku BC

$$\frac{x - x_1}{\operatorname{dos} a_1} = \frac{y - y_1}{\operatorname{dos} b_1} = \frac{z - z_1}{\operatorname{dos} c_1},$$

dają

$$\frac{x_1 - x_2}{\operatorname{dos} a_1} = \frac{y_1 - y_2}{\operatorname{dos} b_1} = \frac{z_1 - z_2}{\operatorname{dos} c_1};$$

zkąd

$$(y_1 - y_2) \operatorname{dos} c_1 - (z_1 - z_2) \operatorname{dos} b_1 = 0.$$

Więc

$$S(y_1 \cos c - z_1 \cos b) + P(y_1 \cos\gamma - z_1 \cos\beta) + P'(y_2 \cos\gamma' - z_2 \cos\beta')$$
$$+ T_2(y_2 \cos c_2 - z_2 \cos b_2) = 0.$$

To dowodzi że dodając wszystkie równania (B), (C), (D),..., przyzwoicie pomnożone, znajdziemy ostateczne równanie

$$S(y_1 \cos c - z_1 \cos b) + \Sigma P(y \cos\gamma - z \cos\beta) + S'(y_n \cos c' - z_n \cos b') = 0$$

które wyraża że summa momentów sił zewnętrznych, względem osi OX, jest zero. Tak samo względem dwóch innych osi spółrzędnych.

134. Gdy figura wielokąta sznurkowego w równowadze jest wiadoma, wtedy łatwo otrzymać stosunek dwóch sił albo tężności jakichkolwiek. Jakoż, każdy wierzchołek wielokąta jest osobno w równowadze pod działaniem tężności i sił do niego przyłożonych; a że te siły i tężności, będąc w liczbie trzech, muszą leżeć na jednej płaszczyznie, więc mamy:

w wierzchołku B

$$\frac{S}{\text{wst}\,CBP} = \frac{P}{\text{wst}\,ABC} = \frac{T_1}{\text{wst}\,ABP},$$

w wierzchołku C

$$\frac{T_1}{\text{wst}\,DCP'} = \frac{P'}{\text{wst}\,BCD} = \frac{T_2}{\text{wst}\,BCP'},$$

i tak dalej. Z tych proporcyj wywodzi się odrazu stosunek dwóch sił albo tężności.

135. *Wielokąt* Varignon-a. Warunki równowagi wielokąta sznurkowego i tężności jego boków wyrażają się geometrycznie za pomocą wykreślenia które podał Varignon. Przez jakikolwiek punkt O przestrzeni (*druga fig. powyż.*) poprowadźmy prostę ON, którąby przedstawiała wielkość i kierunek siły S; a przez punkt N prostę

NN_1 która przedstawia wielkość i kierunek siły P. Linia N_1O, zamykająca trójkąt ONN_1 przedstawi tężność T_1 boku BC i jego kierunek. Jeśli teraz, przez punkt N_1 poprowadzimy prostę N_1N_2 któraby przedstawiała siłę P′ co do wielkości i kierunku, i połączymy N_2O, linia N_2O będzie wyrażała tężność T_2 boku CD i jego kierunek. Podobnie postępując, dojdziemy do prostej N_3N_4 która przedstawia wielkość i kierunek ostatniej siły P‴, i linia N_4O będzie wyrażała tężność ostatniego boku EF i jego kierunek, to jest będzie przedstawiała natężenie i kierunek siły S′. Owoż, tak działając wykreśliliśmy wielokąt sił zewnętrznych; trzeba więc dla równowagi żeby ten wielokąt był zamknięty. Sprawdza się tym sposobem ustawa na mocy której do równań równowagi powinny wchodzić same jedne siły zewnętrzne, jakakolwiek jest natura układu poddanego ich działaniu. Taki jest pierwszy, konieczny warunek równowagi wielokąta sznurkowego. Drugim jest, żeby boki tego wielokąta były równoległe do przekątnych NO, N_1O,... Nakoniec trzecim warunkiem, żeby każdy bok mógł wytrzymać odpowiedną tężność którą te przekątne przedstawiają.

136. Jeśli punkta skrajne A i F wielokąta są stałe, siły S i S′ nie są już dane, ale wyrażają, wzięte w kierunku przeciwnym, parcia jakie te punkta wytrzymują. Znając wielkość i kierunek sił P, P′, P″,... można wyznaczyć oba parcia z wielkości i kierunku. Jokoż, biorąc punkt A za początek spółrzędnych, i wyrachowawszy rzuty całego wielokąta na trzech osiach prostokątnych, zrówna się je do odpowiedających spółrzędnych wierzchołka F które są wiadome; co dostarczy trzech równań. Nadto, są trzy równania równowagi (1) i dwa równania posiłkowe

$$\operatorname{dos}^2 a + \operatorname{dos}^2 b + \operatorname{dos}^2 c = 1, \quad \operatorname{dos}^2 a' + \operatorname{dos}^2 b' + \operatorname{dos}^2 c' = 1.$$

To wszystko razem czyni *osiem* równań dostatecznych do wyznaczenia ośmiu niewiadomych S, S′, a, b, c, a', b', c'.

Znając figurę wielokąta sznurkowego w równowadze, otrzymuje się łatwo parcia w punktach skrajnych A i F przez proporcye któreśmy wyżej wskazali.

137. Gdy kierunki sznurków skrajnych AB, EF spotykają się

w pewnym punkcie O, siły S i S′ mają wynikowę, a temsamem siły P, P′, P″, P‴, mają wynikowę równą i przeciwną; więc, jeśli wielokąt jest w równowadze i ma obie skrajności A, F ustalone, wyznaczy się parcie które każda z tych skrajności wytrzymuje, przenosząc dane siły, równoległe do nich samych, do punktu O, i rozkładając ich wynikowę na dwie siły skierowane wedle sznurków skrajnych.

138. Przypuśćmy teraz że jeden z wierzchołków wielokąta, na przykład C, jest, nie węzłem jako dotąd, ale kółkiem ruchomem przez które przesuwa się sznurek. Ta okoliczność wymaga nowego warunku równowagi. Jakoż, niech będzie siła P′ przyłożona do kółka C, i cały wielokąt w równowadze. Istniejąca równowaga nie zepsuje się, jeśli ustalimy wierzchołki B i D; ale, w tem założeniu, punkt C może się poruszać tylko na powierzchni ellipsoidy obrotowej, mającej za ogniska punkta B i D a za wielką oś linię BC + CD. Trzeba więc dla równowagi żeby siła P′, działająca na punkt C, była normalną do ellipsoidy, i parła punkt C do jej powierzchni wewnętrznej. Owoż, płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej jest prostopadła do płaszczyzny południkowej, przechodzącej przez punkt zetknięcia, i zawiera styczną do południka i styczną do równoleżnika; więc siła P′ jest normalna do ellipsy południkowej przechodzącej przez punkt C; zatem dzieli kąt BCD = C na dwie równe części.

Ztąd wynika że tężności dwóch sznurków BC i CD, przytykających do kółka C, powinny być równe; co daje

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{2} P' \operatorname{sie} \frac{1}{2} C.$$

Gdyby wszystkie wierzchołki wielokąta sznurkowego były kółkami ruchomemi, tężności wszystkich sznurków byłyby równe; coby dało

$$S = S' = T_1 = T_2 = \ldots$$

$$\frac{P}{\operatorname{dos}\frac{1}{2}B} = \frac{P'}{\operatorname{dos}\frac{1}{2}C} = \frac{P''}{\operatorname{dos}\frac{1}{2}D} = \ldots = 2S;$$

Więc, w tym przypadku, trzeba żeby siły P, P'... były proporcyonalne do dostaw połowy odpowiednych kątów wielokąta.

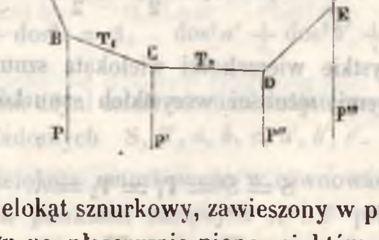
Jeśli kółko C jest nieruchome a tylko sznurek może się wolno przez nie przesuwać; wtedy, dla równowagi w punkcie C, trzeba oczywiście i dość jest żeby tężności T_1 i T_2 były równe.

139. Wielokąt sznurkowy jest płaski, gdy wszystkie siły zewnętrzne S, S', P, P'... są równoległe do jednej płaszczyzny, którą nazwiemy MN. Jakoż, w tem założeniu płaszczyzna ABP jest równoległa do płaszczyzny MN; a że sznurek BC leży na płaszczyznie ABP, więc jest równoległy do płaszczyzny MN. Dowiedzie się następnie że sznurek CD, leżący na płaszczyznie BCP', równoległej do płaszczyzny MN, jest równoległy do tej ostatniej; i tak dalej. Więc wielokąt ABCDEF, mający wszystkie boki równoległe do płaszczyzny MN, znajduje się cały na płaszczyznie równoległej do MN. Biorąc płaszczyznę wielokąta za płaszczyznę xy, warunki równowagi wyrażają się przez dwa równania, odniesione do dwóch osi prostokątnych,

$$S \operatorname{dos} a + P \operatorname{dos} \alpha + P' \operatorname{dos} \alpha' + \ldots + S' \operatorname{dos} a' = 0$$

$$S \operatorname{wst} a + P \operatorname{wst} \alpha + P' \operatorname{wst} \alpha' + \ldots + S' \operatorname{wst} a' = 0.$$

140. Tężności wszystkich boków łatwo się wyznaczają, gdy siły pośrednie P, P', P''..., przedstawiają ciężary, a punkta skrajne A, F



są stałe. Jakoż, wielokąt sznurkowy, zawieszony w punktach A i F, jest oczywiście cały na płaszczyznie pionowej która przez nie przechodzi; jeśli więc obierzemy na tej płaszczyznie dwie osie prostokątne, poziomą i pionową, będziemy mieli dwa proste równania równowagi

$$S \operatorname{dos} a + S' \operatorname{dos} a' = 0,$$

$$S \operatorname{wst} a + S' \operatorname{wst} a' = P + P' + P'' + \ldots$$

które dają tężności S, S' sznurków skrajnych AB, EF.

Co do tężności T_1, T_2,... sznurków pośrednich; ponieważ w każdym wierzchołku wielokąta powinna być równowaga między przyłożonym ciężarem i tężnościami dwóch boków przytykających, mamy:

w wierzchołku B

$$S \operatorname{dos} a + T_1 \operatorname{dos} a_1 = 0$$

$$S \operatorname{wst} a + T_1 \operatorname{wst} a_1 = P;$$

w wierzchołku C

$$-T_1 \operatorname{dos} a_1 + T_2 \operatorname{dos} a_2 = 0$$

$$-T_1 \operatorname{wst} a_1 + T_2 \operatorname{wst} a_2 = P';$$

i tak dalej, aż do ostatniego wierzchołka E. Te równania dają tężności T_1, T_2,... w funkcyi już wiadomej tężności S.

Ztąd wynika ciąg równań

$$-S \operatorname{dos} a = T_1 \operatorname{dos} a_1 = T_2 \operatorname{dos} a_2 = \ldots$$

które dowodzą że składowe poziome tężności wszystkich sznurków są równe.

141. Uwaga. Gdy kilka sznurków utrzymują jeden punkt pod działaniem danej siły, aby znaleźć ich tężności, trzeba rozłożyć siłę równą i przeciwną danej na inne siły mające kierunki tych sznurków. Otóż, jeśli niema więcej niż trzy sznurki nieleżące na jednej płaszczyznie, ten rozkład jest jedyny, i tężności są wyznaczone. Ale, jeśli liczba sznurków przechodzi trzy, zagadnienie jest niewyzna-

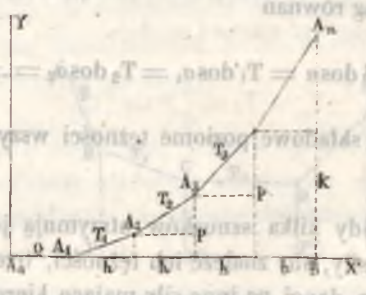
czone; bo można oczywiście wieloma sposobami rozłożyć jedną siłę na kilka innych w kierunkach danych. Mieliśmy już przykład podobnego niewyznaczenia, gdyśmy szukali jakie parcie wywiera ciało na płasczyznę na której się opiera w więcej niż trzech punktach. W rzeczywistości jednak te parcia i tężności są wyznaczone; albowiem punkta dotknięć płasczyzny materyalnej uginają się, a każdy sznurek mniej więcej się wydłuża.

Doświadczenie pokazało że, dopóki tężność sznurka, nici metallicznej, albo sztaby, nie jest blizko ich zerwania się, wydłużenie jest proporcyonalne do długości, i do ciężaru zawieszonego na jednej skrajności, a odwrotnie proporcyonalne do powierzchni przecięcia normalnego. W takim stanie, nazywając l długość pierwotną, l' wydłużenie, p ciężar zawieszony, ι powierzchnię przecięcia normalnego, a spółczynnik stateczny zależący od natury i od kształtu sznurka albo sztaby, będzie

$$l' = \frac{lp}{a\iota}.$$

MOSTY WISZĄCE.

142. Teorya wielokąta sznurkowego służy do wyznaczenia kształtu łańcuchów które utrzymują most wiszący. Te łańcuchy powinny być wielokątami płaskiemi. W budowie takiego mostu, zwykłym



warunkiem jest żeby sztaby, łączące wierzchołki wielokąta łańcuchowego z pomostem, były równo od siebie oddalone, a głównym żeby te sztaby wytrzymywały równe tężności, to jest żeby każda z nich ponosiła równą część całego ciężaru mostu. Zazwyczaj w mostach wiszących jest jeden bok poziomy A_0A_1 wytrzymujący tężność Q. Biorąc skrajność A_0 tego boku za początek spółrzędnych, jego kierunek A_0X za oś odciętych i prostopadłę A_0Y za oś rzędnych, uważajmy jedną część $A_0A_1A_2...A_n$ łańcucha; i oznaczmy przez a_1, a_2,... kąty boków A_1A_2, A_2A_3,... z poziomą A_0X, przez h rzut poziomy spólny wszystkim bokom, przez p ciężar przyłożony do każdego wierzchołka.

Wiemy już że składowe poziome tężności wszystkich boków są równe; co daje

$$T_1 \operatorname{dos} a_1 = Q = T_2 \operatorname{dos} a_2 = \ldots$$

Ponieważ każdy wierzchołek wielokąta zostaje w równowadze pod ciężarem p i dwiema tężnościami boków przytykających, składowe pionowe tych tężności są :

$$T_1 \operatorname{wst} a_1 = p,$$

$$T_2 \operatorname{wst} a_2 = T_1 \operatorname{wst} a_1 + p = 2p,$$

$$T_3 \operatorname{wst} a_3 = T_2 \operatorname{wst} a_2 + p = 3p.$$

. . . .

Więc ogólnie

$$T_i \operatorname{dos} a_i = Q,$$

$$T_i \operatorname{wst} a_i = ip ;$$

zkąd

$$\operatorname{sty} a_i = \frac{ip}{Q} .$$

Zatem tężność T_i wyraża się przez formułę

$$T_i = \frac{Q}{\operatorname{dos} a_i} = \sqrt{Q^2 + i^2p^2},$$

która pokazuje że tężność każdego boku jest proporcyonalna do siecznej jego nachylenia na poziom, i zwiększa się ze wskazem i.

To ustaliwszy, nietrudno znaleźć rzędne y_1, y_2, y_3,... wierzchołków wielokąta. Jakoż, mamy zaraz

$$y_1 = h \,\mathrm{sty}\, a_1 = \frac{hp}{Q},$$

$$y_2 = y_1 + h \,\mathrm{sty}\, a_2 = \frac{hp}{Q} + \frac{2hp}{Q} = \frac{hp}{Q}(1+2),$$

$$y_3 = y_2 + h \,\mathrm{sty}\, a_3 = \frac{hp}{Q}(1+2) + \frac{3hp}{Q} = \frac{hp}{Q}(1+2+3);$$

więc ogólnie

$$y_i = y_{i-1} + h \,\mathrm{sty}\, a_i = \frac{hp}{Q}(1+2+3+\ldots+i) = \frac{hp}{Q} \cdot \frac{i(i+1)}{2}.$$

Ale ilość Q jeszcze niewiadoma; aby ją wyznaczyć, zastosujmy ostatnią formułę do rzędnej skrajnej y_n, której wartość k jest naprzód dana; będzie

$$k = \frac{hp}{Q} \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

ztąd

$$Q = \frac{n(n+1)h}{2k} \cdot p.$$

To dowodzi że tężność Q boku poziomego jest proporcyonalna do ciężaru p i do przedziału h, a odwrotnie proporcyonalna do rzędnej skrajnej k.

Jeśli teraz wyrugujemy ilość Q z wartości y_i, będziemy mieli spółrzędne wierzchołka wskazu i,

$$y_i = \frac{i(i+1)}{n(n+1)} \cdot k$$

$$x_i = ih.$$

Znając spółrzędne dwóch wierzchołków po sobie idących, łatwo się otrzymuje długość odpowiedającego boku. I tak, oznaczając przez l_i długość boku A_iA_{i+1}, mamy

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \sqrt{h^2 + \left\{\frac{2(i+1)}{n(n+1)}\right\}^2 k^2}.$$

Nakoniec, szukajmy linii krzywej na której leżą wszystkie wierzchołki wielokąta łańcuchowego. Jeśli nazwiemy x, y spółrzędne wierzchołka A_i, będzie

$$x = ih,$$

$$y = \frac{i(i+1)k}{n(n+1)};$$

rugując i między temi dwoma równaniami, otrzymujemy równanie

$$y = \frac{k(x^2 + hx)}{n(n+1)h^2}$$

które przedstawia parabolę

Uwaga. Ciężar łańcucha i sztab, którymy zaniedbali, zwiększając się z rozmiarami mostu, zmienia jednostajny rozkład parcia i wpływa na figurę łańcucha. Ztąd wynika że gdyby wyrachowano łańcuch i sztaby dla kształtu ściśle parabolicznego, równowaga byłaby niemożebna; bo różne części mostu nie wytrzymałyby parcia do którego nie były przeznaczone. Powyższa teorya stosuje się więc tylko z przybliżeniem, praktycznie wyrachowanem, do mostów wiszących.

RÓWNOWAGA NICI GIĘTKIEJ NIEROZCIĄGALNEJ.

143. Będziemy teraz szukali warunków równowagi nici giętkiej i nierozciągalnej, zawieszonej w obydwóch skrajnościach A, B, której wszystkie punkta są pod działaniem sił jakichkolwiek. Jeśli oznaczymy przez μ massę jednego z tych punktów, i przez P siłę odniesioną do jedności massy, siła przyłożona do tego punktu wyrazi się przez μP.

Niech będzie łuk MM' = Δs nici AB w równowadze. Oczywiście obie części AM i BM wywierają na siebie działania równe i prze-

ciwne w punkcie M; i tak samo części AM', BM' działają wzajemnie na siebie w punkcie M'. Gdyby więc przecięto nić w punkcie M, równowaga byłaby zerwana, aleby ją utrzymano przykładając do tego punktu przyzwoitą siłę, która się nazywa *tężnością* nici w punkcie M. Uważając nić AB jako granicę wielokąta sznurkowego, łatwo się pojmuje że łuk MM' jest nietylko poddany siłom zewnętrznym μP, ale jeszcze podległy dwom tężnościom T i T', które działają w jego skrajnościach M, M' wedle stycznych do nici, i w kierunkach przeciwnych. Żeby jednak nie zostawić wątpliwości, dajmy dowodzenie podług Sturma (*) że tężność T w punkcie M jest styczną do linii utworzonej przez nić.

Przypuszczając nić AMB w równowadze, wyobraźmy sobie że łuk MM' stał się bryłowym, i przymocujmy punkt M'; przez co nie naruszymy w niczem istniejącej równowagi. Ale, w tym stanie, wedle warunków równowagi układu bryłowego mającego punkt stały, dwojany pochodzące z przeniesienia, do punktu M', siły T i sił μP działających na punkta łuku MM', powinny się niszczyć między sobą. A ponieważ siły μP nie są koniecznie na jednej płaszczyznie, widzimy zaraz że moment dwojanu (T, — T) jest mniejszy od summy momentów dwojanów (μP, — μP), albo najwięcej równy. Owóż, moment dwojanu (T, — T) równa się T. MM' wst (T, MM'); a zaś moment dwojanu (μP, — μP), oczywiście mniejszy od μP . μM', jest tembardziej mniejszy od μP . MM', byle tylko łuk Δs był dostatecznie mały; w tem zawsze możebnem założeniu, summa momentów dwojanów, które pochodzą z przeniesienia sił μP do punktu M',

(*) Zobacz *Cours de Mécanique de l'Ecole polytechnique par* Sturm. Paris, 1861.

jest mniejsza od $MM' . \Sigma\mu P$. Mamy więc

$$T . MM' \operatorname{wst}(T, MM') < MM' \Sigma\mu P,$$

zkąd

$$\operatorname{wst}(T, MM') < \frac{\Sigma\mu P}{T}.$$

Nazwijmy ε wieloczyn, największy możebny jaki się otrzymuje mnożąc przecięcia normalne łuku MM' przez odpowiedającą gęstość punktów od M do M', i niech wtedy P_1 znaczy największą wartość siły P; będzie tem bardziej

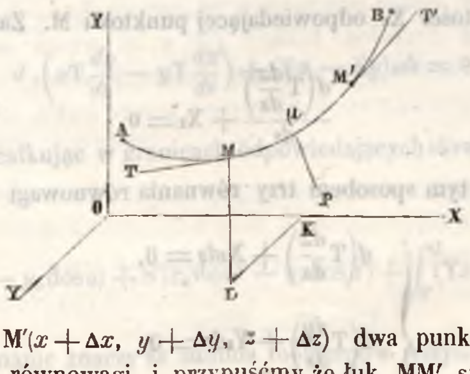
$$\operatorname{wst}(T, MM') < \frac{P_1 \varepsilon \Delta s}{T}.$$

A że tężność T jest ilością skończoną, ztąd wnosimy że

$$\operatorname{gr.} \operatorname{wst}(T, MM') = 0.$$

W tej granicy cięciwa MM' staje się styczną do linii jaką nić tworzy w punkcie M; więc tężność T ma kierunek stycznej do nici w tym punkcie.

To ustaliwszy, nietrudno znaleźć warunki równowagi nici. Biorąc trzy osie spółrzędnych prostokątne, oznaczmy przez



$M(x, y, z)$, $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ dwa punkta sąsiednie w położeniu równowagi, i przypuśćmy że łuk MM' stał się bryłowym niezmiennym. Ponieważ tą przemianą nie psuje się równowagi jeśli przedtem istniała, trzeba więc żeby łuk MM', uważany osobno był w równowadze pod działaniem wszystkich sił które na niego wpływ wywierają. Co wymaga żeby składowe tych sił, równoległe do trzech osi spółrzędnych, czyniły summy algebryczne zero, i żeby summy momentów sił były także zero względem każdej z trzech osi. Owoż, siły działające na łuk MM′ są najpierwej dwie tężności T i T′, styczne w jego skrajnościach M, M′ do nici; i potem siły kształtu μP, przyłożone do wszystkich punktów od M do M′. Tężność T ma składowe $-\mathrm{T}\frac{dx}{ds}$, $-\mathrm{T}\frac{dy}{ds}$, $-\mathrm{T}\frac{dz}{ds}$, a tężność T′ składowe $\mathrm{T}\frac{dx}{ds}+\Delta\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right)$, $\mathrm{T}\frac{dy}{ds}+\Delta\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right)$, $\mathrm{T}\frac{dz}{ds}+\Delta\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right)$; składowe siły μP są μX, μY, μZ. Więc, biorąc summę wszystkich składowych równoległych do osi $x^{ów}$, otrzymujemy

$$\Delta\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right)+\Sigma(\mu\mathrm{X})=0.$$

Jeśli nazwiemy ε wieloczyn z przecięcia normalnego łuku Δs w jednym z jego punktów przez gęstość tego punktu, ilość ε będzie wyrażała massę jedności długości nici, i oczywiście summa $\Sigma(\mu\mathrm{X})$ będzie zawarta między największą i najmniejszą wartością wieloczynu $\mathrm{X}\varepsilon\Delta s$, jakkolwiek mały jest łuk Δs; zląd wynika że gr $\frac{\Sigma(\mu\mathrm{X})}{\Delta s}$ równa się wartości $\mathrm{X}\varepsilon$ odpowiedającej punktowi M. Zatem

$$\frac{d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right)}{ds}+\mathrm{X}\varepsilon=0.$$

Znajdujemy tym sposobem trzy równania równowagi

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned} &d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right)+\mathrm{X}\varepsilon ds=0,\\ &d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right)+\mathrm{Y}\varepsilon ds=0,\\ &d\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right)+\mathrm{Z}\varepsilon ds=0.\end{aligned}\right.$$

Te trzy równania, konieczne dla równowagi nici, są zarazem dostateczne; można albowiem sprawdzić że, jeśli siły działające na nić, łącznie z tężnościami S i S′ w punktach skrajnych A i B, zadość im czynią, to czynią także zadość sześciu zrównaniom ogólnym równowagi.

Jakoż, zcałkójmy pierwsze równanie w granicach odpowiedających skrajnościom nici; oznaczając przez l długość nici, przez a, b, c i a', b', c' kąty jakie styczne MT i M′T′ do linii AMB w punktach A i B czynią z osiami spółrzędnych, otrzymamy

$$\mathrm{S}\cos a + \mathrm{S}'\cos a' + \int_0^l \mathrm{X}\epsilon ds = 0$$

To równanie wyraża że summa algebryczna składowych równoległych do osi OX, wszystkich sił działających na nić, jest zero. Całkując dwa inne równania, otrzyma się dwie summy zero składowych równoległych do osi OY i OZ.

Aby mieć równania momentów, pomnóżmy pierwsze z równań (1) przez y a drugie przez x, i odciągnijmy, będzie

$$xd\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) - yd\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) + (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)\epsilon ds = 0.$$

albo

$$d.\left(x\mathrm{T}\frac{dy}{ds} - y\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) + (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)\epsilon ds = 0.$$

Zatem, całkując w granicach odpowiedających skrajnościom nici, mamy

$$\mathrm{S}(x_0\cos b - y_0\cos a) + \mathrm{S}'(x_n\cos b' - y_n\cos a') + \int_0^l (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)\epsilon ds = 0.$$

To równanie znaczy że summa momentów wszystkich sił działających na nić, względem osi OZ, jest zero.

Otrzyma się tak samo dwa inne równania momentów.

144. Żeby znaleźć wartość tężności T w punkcie $M(x, y, z)$, wykonajmy wskazane różniczkowania w równaniach (1); będzie

$$(2)\quad \begin{cases} dT\frac{dx}{ds} + Td\frac{dx}{ds} + X\epsilon ds = 0 \\ dT\frac{dy}{ds} + Td\frac{dy}{ds} + Y\epsilon ds = 0 \\ dT\frac{dz}{ds} + Td\frac{dz}{ds} + Z\epsilon ds = 0. \end{cases}$$

Pomnóżmy te równania odpowiednio przez $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ i dodajmy; uważając że równanie

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1$$

daje

$$\frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds} = 0,$$

otrzymamy

$$(3)\qquad dT + \epsilon(Xdx + Ydy + Zdz) = 0.$$

Jeśli nić jest jednorodna w całej długości, ϵ będzie ilością stateczną; a jeśli nadto przypuścimy że summa $Xdx + Ydy + Zdz$ jest różniczką dokładną funkcyi $f(x, y, z)$ trzech spółrzędnych x, y, z, uważanych jako zmienne niezależne, wtedy, jakiekolwiek związki między temi trzema zmiennemi istnieć mogą, całkując znajdziemy

$$T = f(x, y, z) + C.$$

Dla innego punktu $M_0(x_0, y_0, z_0)$ będzie tak samo

$$T_0 = f(x_0, y_0, z_0) + C.$$

Zatem

$$T - T_0 = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

To dowodzi że przyrost tężności nici, od punktu M_0 do M, jest niezależny od jej figury, ponieważ nie zależy bynajmniej od punktów pośrednich między M_0 i M, ale tylko od wartości jakie funkcya $f(x, y, z)$ bierze w tych dwóch punktach. Wynik podobny do tego który zobaczymy w Dynamice pod nazwiskiem *twierdzenie* SIŁ ŻYWYCH.

Widzimy tedy że, znając tężność nici w jednym jakimkolwiek punkcie M_0, można zaraz wyrachować jej tężność we wszystkich innych.

145. Dajmy równaniu (3) następującą postać

$$dT + P\epsilon ds\left(\frac{X}{P}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P}\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Nawias wyraża dostawę kąta jaki siła P czyni ze styczną do nici w punkcie M; więc, nazywając θ ten kąt, mamy

$$dT + P\epsilon ds \operatorname{dos}\theta = 0.$$

Pod tym kształtem równanie jasno pokazuje że, czy nić jest albo nie jest jednorodna, tężność T w dwóch tylko przypadkach może być ilością stateczną.

1° Gdy $P = 0$; wtedy oczywiście nić, nie będąc pod działaniem żadnej siły, nie ma żadnej tężności.

2° Gdy $\operatorname{dos}\theta = 0$, to jest gdy siła P jest normalna do nici we wszystkich jej punktach, wtedy

$$dT = 0, \quad \text{zkąd} \quad T = C.$$

Wzajemnica oczywista.

W przypadku stałej tężności, nietrudno wyznaczyć stosunek P : T. Jakoż, z równań (2), czyniąc w nich $dT = 0$, wyprowadzamy

$$T^2\left\{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right\} = P^2\epsilon^2 ds^2.$$

Ale ilość w klamrach ma za miarę stosunek $\frac{ds^2}{R^2}$ w którym R znaczy promień krzywizny nici w punkcie M;

więc

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}} = \mathrm{P}\varepsilon,$$

zkąd

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{R}\varepsilon}.$$

Jeśli teraz, w tych samych równaniach (2), podstawimy za T, X, Y, Z ich wartości $\mathrm{P}\varepsilon\mathrm{R}$, $\mathrm{P}\,\mathrm{dos}\,\alpha$, $\mathrm{P}\,\mathrm{dos}\,\beta$, $\mathrm{P}\,\mathrm{dos}\,\gamma$, otrzymamy

$$\mathrm{dos}\,\alpha = -\frac{\mathrm{R}d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \mathrm{dos}\,\beta = -\frac{\mathrm{R}d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \mathrm{dos}\,\gamma = -\frac{\mathrm{R}d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Znalezione wyniki pokazują że, gdy nić ma tę samą tężność w całej długości, siła P jest w stosunku odwrotnym promienia krzywizny nici, i działa w każdym punkcie wedle przedłużenia tego promienia.

Te okoliczności mogą się urzeczywiścić gdy nić jest wytężona, na danej powierzchni, przez dwie siły które ją ciągną w obydwóch skrajnościach. Przypuszczając ustaloną równowagę i nie zważając na tarcie, widzimy łatwo że opory powierzchni w punktach dotknięć nici są to małe siły, normalne do tej powierzchni a temsamem normalne do wytężonej nici. Ztąd wnosimy że tężność nici jest jednakowa we wszystkich punktach; zatem, siły które ciągną nić w jej skrajnościach muszą być równe między sobą, i równe spólnej tężności. Nadto, płaszczyzna *przylegająca* w każdym punkcie nici jest normalna do danej powierzchni. Ta własność jest określeniem linii geodezyjnej. Więc, w przypadku o którym mowa nić bierze kształt linii geodezyjnej; a wiemy że na danej powierzchni linia geodezyjna jest najkrótszą drogą od jednego punktu do drugiego. Czego się łatwo dowodzi przez *Rachunek zmienności.*

146. Aby znaleźć kształt nici w równowadze pod działaniem sił danych, dość byłoby zcałkować najpierwej równania (1),

coby dało

$$-\mathrm{T}\frac{dx}{ds}=\mathrm{A}+\int \mathrm{X}\varepsilon ds,$$

$$-\mathrm{T}\frac{dy}{ds}=\mathrm{B}+\int \mathrm{Y}\varepsilon ds,$$

$$-\mathrm{T}\frac{dz}{ds}=\mathrm{C}+\int \mathrm{Z}\varepsilon ds;$$

poczem, rugując T, byłoby

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mathrm{B}+\int \mathrm{Y}\varepsilon ds}{\mathrm{A}+\int \mathrm{X}\varepsilon ds},\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{\mathrm{C}+\int \mathrm{Z}\varepsilon ds}{\mathrm{A}+\int \mathrm{X}\varepsilon ds}.$$

Gdyby zcałkowano dwa ostatnie równania różniczkowe, mianoby równania linii krzywej któraby przedstawiała figurę nici w równowadze.

Ale całkowania nie mogą się wykonać, w ogólnym stanie kwestyi w którym ε, X, Y, Z nie są określone.

Można działać inaczej. Wyrugujmy najpierwej dT z równań (2) biorąc je po dwa, znajdziemy

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{T}\left(\frac{dy}{ds}d\frac{dx}{ds}-\frac{dx}{ds}d\frac{dy}{ds}\right)+\varepsilon ds\left(\mathrm{X}\frac{dy}{ds}-\mathrm{Y}\frac{dx}{ds}\right)=0\\
&\mathrm{T}\left(\frac{dz}{ds}d\frac{dx}{ds}-\frac{dx}{ds}d\frac{dz}{ds}\right)+\varepsilon ds\left(\mathrm{X}\frac{dz}{ds}-\mathrm{Z}\frac{dx}{ds}\right)=0\\
&\mathrm{T}\left(\frac{dz}{ds}d\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}d\frac{dz}{ds}\right)+\varepsilon ds\left(\mathrm{Y}\frac{dz}{ds}-\mathrm{Z}\frac{dy}{ds}\right)=0.
\end{aligned}\right.$$

Te trzy równania nie są oddzielne, bo oczywiście każde wywodzi się z dwóch innych. Podstawiając wartość T w dwa którekolwiek z tych równań, albo dzieląc je stronami przez trzecie, otrzymamy dwa równania różniczkowe które zcałkowane, w przypadkach określonych, dadzą równania figury nici w równowadze.

W szczególnym przypadku, gdy siła P jest styczną do nici w każdym punkcie, nić wytęża się w linii prostej. I w samej rzeczy, mamy wtedy

$$\frac{X}{\frac{dx}{ds}} = \frac{Y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{Z}{\frac{dz}{ds}};$$

zatem

$$X\frac{dy}{ds} - Y\frac{dx}{ds} = 0, \quad X\frac{dz}{ds} - Z\frac{dx}{ds} = 0, \quad Y\frac{dz}{ds} - Z\frac{dy}{ds} = 0.$$

Z przyczyny tych równości dwa ostatnie, naprzykład, równania (4) stają się

$$\frac{dz}{ds}\,d\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d\frac{dz}{ds} = 0, \qquad \frac{dz}{ds}\,d\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\,d\frac{dz}{ds} = 0;$$

zkąd, całkując, otrzymujemy

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

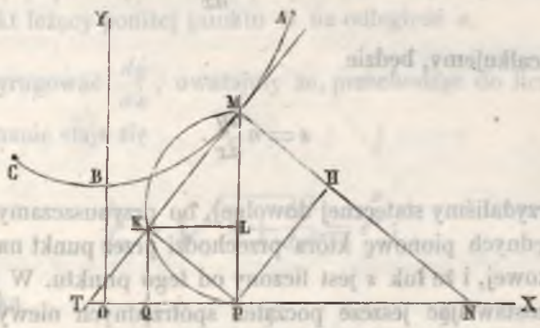
równania linii prostej.

Nawzajem, jeśli nić wytęża się w linii prostej, to dlatego że siła która na nią działa jest właśnie skierowana wedle tej prostej. Co widoczne.

ŁAŃCUSZKOWA.

147. Nazywa się łańcuszkową linia krzywa którą tworzy łańcuch giętki, albo nić ciężka i jednorodna, zawieszona na dwóch punktach stałych A i C.

Wszystkie siły działające na różne punkta łańcuszkowej są pionowe; ztąd wnosimy że ta krzywa leży cała na płaszczyźnie przechodzącej przez dwa jej punkta zawieszenia. Zresztą niema żadnej przyczyny żeby którykolwiek z punktów łańcuszkowej znajdował się raczej z jednej strony tej płasczyzny niż z drugiej. Weźmy na płasczyźnie linii łańcuszkowej dwie osie prostokątne, jedną po-



ziomą OX i drugą pionową OY w kierunku przeciwnym ciężkości, będziemy mieli $X=0$; a jeśli oznaczymy przez ϖ ciężar jedności długości nici która jest jednorodna, ciężar łuku ds wyrazi się przez ϖds, i będzie $Y\varepsilon ds = -\varpi ds$.

Zatem ogólne równania równowagi nici przywodzą się do dwóch

$$(5)\qquad d\left(T\frac{dx}{dx}\right)=0 \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right)-\varpi ds=0.$$

Całkując pierwsze równanie, otrzymujemy

$$T\frac{dx}{ds}=C.$$

Ten wynik pokazuje że składowa pozioma tężności jest ta sama we wszystkich punktach łańcuszkowej. Owoż, w punkcie najniższym B styczna jest równoległa do OX, co daje $\frac{dx}{ds}=1$; więc stateczna C wyraża tężność w tym punkcie; jeśli ją oznaczymy przez ϖa, a będzie nową stateczną którą później wyznaczymy. Tym sposobem mamy

$$(6)\qquad T\frac{dx}{ds}=\varpi a, \quad \text{zkąd} \quad T=\varpi a\frac{ds}{dx};$$

za pomocą tej wartości drugie równanie (5) staje się

$$ds = a . d\frac{dy}{dx};$$

jeśli je zcałkujemy, będzie

$$s = a\frac{dy}{dx}. \tag{7}$$

Nie przydaliśmy statecznej dowolnej, bo przypuszczamy że wzięto za oś rzędnych pionowę która przechodzi przez punkt najniższy B łańcuszkowej, i że łuk s jest liczony od tego punktu. W tem założeniu, zostawiając jeszcze początek spółrzędnych niewyznaczony, dla $s = 0$ mamy $\frac{dy}{dx} = 0$.

Szukajmy teraz równania łańcuszkowej. Jeśli w przedostatniem równaniu zastąpimy ds przez $dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$, znajdziemy następujące

$$dx = \frac{a . d\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

Pomnóżmy obie strony ostatniego przez $\frac{dy}{dx}$, otrzymamy drugie,

$$dy = \frac{a\frac{dy}{dx}d\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

Te dwa równania całkują się natychmiast, i dają

$$x = a\log\left(\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\right), \quad \text{i} \quad y = a\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Niema potrzeby przydawać stałecznej do żadnego z tych dwóch równań, jeśli, jako przypuszczamy, za oś rzędnych wzięto pionowę przechodzącą przez punkt najniższy B, i za początek spółrzędnych punkt leżący poniżej punktu B na odległość a.

Aby wyrugować $\frac{dy}{dx}$, uważajmy że, przechodząc do liczb, pierwsze równanie staje się

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = e^{\frac{x}{a}};$$

ztąd wynika

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + \frac{dy}{dx}} = e^{-\frac{x}{a}}.$$

Dodając te dwa równania stronami, będzie

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a};$$

więc

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right). \tag{8}$$

Takie jest najprostsze równanie łańcuszkowej w kształcie skończonym, które pokazuje że ta krzywa jest symetryczna względem osi rzędnych wziętej jakośmy powiedzieli. Rzędna $OB = a$ punktu najniższego B łańcuszkowej jest jej parametrem.

Można otrzymać łuk s łańcuszkowej w funkcyi x. Jakoż, odciągając jedno od drugiego równania któreśmy dopiero co dodawali, będzie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

ta wartość poniesiona do równania (7) daje

$$(9)\qquad s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

148. Z dwóch równań

$$y = a\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \qquad s = a\frac{dy}{dx}$$

wynika trzecie

$$y^2 = a^2 + s^2, \quad \text{albo} \quad s = \sqrt{y^2 - a^2},$$

które daje wyprostowany łuk łańcuszkowej w funkcyi y.

Trzy powyższe równania tłumaczą się łatwo geometrycznie.

Pierwsze, które można pisać

$$a = y\frac{dx}{ds}$$

dowodzi że rzut rzędnej punktu M na normalnej w tym punkcie jest równy parametrowi łańcuszkowej. Jakoż, w trójkącie prostokątnym MPH (*fig. powyż.*),

$$\text{MH} = \text{MP} \cos \text{HMP} = y\frac{dx}{ds} = a.$$

Ta pierwsza własność daje sposób wyznaczenia stycznej w punkcie M danym na łańcuszkowej; dość jest wykreślić na MP jako średnicy okrąg, i potem drugi okrąg z punktu P jako środka promieniem a; te dwa okręgi przetną się w punkcie K należącym do stycznej którą będzie prosta MK.

Drugie równanie $s = a\dfrac{dy}{dx}$ pokazuje że rzut rzędnej punktu M na stycznej w tym punkcie jest równy łukowi BM. I w samej rzeczy, w trójkącie prostokątnym KPM

$$\text{MK} = \text{KP} \operatorname{sty} \text{KMP} = a\frac{dy}{dx} = s.$$

Trzecie równanie $s^2 + a^2 = y^2$ dowodzi że, jeśli ze spodka P rzędnej punktu M spuszczono prostopadłę PK na styczną MT, ta prostopadła będzie parametrem łańcuszkowej, a odcinek MK stycznej wyrazi długość łuku BM.

Jeśli chcemy znaleźć powierzchnię OBMP zarartą między dwiema osiami, łańcuszkową BM i rzędną MP, będziemy mieli

$$S = \int_0^x y dx = \frac{a}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = as.$$

Więc powierzchnia OBMP jest równorarta prostokątowi MHPK.

Uważajmy nakoniec że miejscem punktów K takich żeby było MK = łuk BM jest *rozwijająca* łańcuszkowej; KP jest styczną do tej krzywej.

Nietrudno za pomocą ogólnych formuł, znaleźć rozwijającą łańcuszkowej; te formuły, jeśli oznaczymy spółrzędne punktu K przez u, v i uczynimy MK $= s$, będą

$$u = x - s\frac{dx}{ds}, \qquad v = y - s\frac{dy}{ds}.$$

Trzeba wyrugować x, y, s za pomocą równań odnoszących się do łańcuszkowej. Wyrażając najpierwej x i y w funkcyi s, i potem rugując tę niewiadomę, dochodzi się do szukanej rozwijającej.

Ale rozwijającą łańcuszkowej łatwiej wprost otrzymać, wyrażając tylko warunek że styczna KP do rozwijającej w punkcie K ma długość KP stałą, równą rzędnej a punktu najniższego B łańcuszkowej. I w samej rzeczy, nazywając u, v spółrzędne punktu K, mamy

$$\frac{\mathrm{KQ}}{\mathrm{wst\,KPQ}} = \mathrm{KP} \quad \text{albo} \quad v\sqrt{1 + \frac{du^2}{dv^2}} = a,$$

zkąd

$$du = -\frac{dv}{v}\sqrt{a^2 - v^2};$$

zkąd, całkując, wywodzimy równanie szukanej rozwijającej

$$(10)\qquad u = \int \frac{vdv}{\sqrt{a^2 - v^2}} - a^2 \int \frac{dv}{v\sqrt{a^2 - v^2}}$$

$$= -\sqrt{a^2 - v^2} + a \log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - v^2}}{v}\right).$$

Nie trzeba przydawać statecznej dowolnej, dlatego że powinno być zarazem $u = o$ i $v = a$.

Rozwijająca łańcuszkowej jest symetryczna względem osi $y^{nów}$ do której dotyka w punkcie B, i ma oś $x^{ów}$ za niemaltyczną.

Uwaga. Można bez całkowania znaleźć łatwo rozwijającą łańcuszkowej. Jakoż, uważając trójkąty prostokątne KPM i KPQ, mamy zaraz

$$\overline{KP}^2 = PM \,.\, PL$$

albo

$$a^2 = yv, \qquad \text{zkąd} \qquad y = \frac{a^2}{v}\,.$$

$$OQ = OP - PQ = OP - \sqrt{\overline{KP}^2 - \overline{KQ}^2}\,,$$

albo

$$u = x - \sqrt{a^2 - v^2} \qquad \text{zkąd} \qquad x = u + \sqrt{a^2 - v^2}.$$

Podstawiając te wartości x i y w równaniu łańcuszkowej, otrzymujemy równanie rozwijającej

$$\frac{2a}{v} = e^{\frac{u + \sqrt{a^2 - v^2}}{a}} + e^{-\frac{u + \sqrt{a^2 - v^2}}{a}}\,.$$

które się różni tylko kształtem od wyżej znalezionego.

149. Szukajmy teraz tężności w punkcie M łańcuszkowej. Znaleźliśmy już

11 $$T = \varpi a \frac{ds}{dx} \quad \text{i} \quad y = a\frac{ds}{dx},$$

zatem $$T = \varpi y.$$

To pokazuje że tężność w każdym punkcie łańcuszkowej jest proporcyonalna do rzędnej tego punktu.

Możemy otrzymać tężność wprost z formuły ogólnej

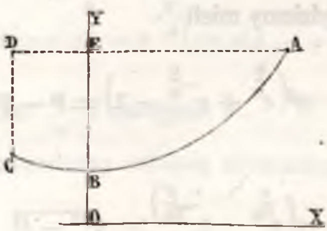
$$dT + \epsilon(Xdx + Ydy + Zdz) = 0,$$

czyniąc w niej, stosownie do danego określenia łańcuszkowej, $X = 0$, $Z = 0$, $Y\epsilon = -\varpi$; co daje

$$dT = \varpi dy, \quad \text{zkąd} \quad T = \varpi y.$$

Nie trzeba przydawać statecznej dowolnej, dlatego że dla $y = a$ powinno być $T = \varpi a$.

150. Zostaje nakoniec do pokazania jak, mając dane dwa punkta zawieszenia A, C łańcuszkowej i długość łuku AC, można wyznaczyć stateczną a, która wchodzi do jej równania.



Poprowadźmy pionową CD, i poziomą AD która spotyka pionową BY w punkcie E. Ilości dane są $CD = b$, $AD = c$ i łuk $ABC = l$; niewiadome są $OB = a$, $BE = k$, $AE = h$, $DE = h'$.

Mamy zaraz

$$h + h' = c.$$

Wyrażając, za pomocą formuły $s=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$, że summa długości łuków AB i BC jest równa l, znajdujemy drugie równanie,

$$l=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{h}{a}}-e^{-\frac{h}{a}}-e^{-\frac{h'}{a}}+e^{\frac{h'}{a}}\right).$$

Tak samo, wyrażając za pomocą formuły $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ że różnica rzędnych punktów A i C jest równa b, znajdujemy trzecie równanie

$$b=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{h}{a}}+e^{-\frac{h}{a}}-e^{-\frac{h'}{a}}-e^{\frac{h'}{a}}\right).$$

Jeśli weźmiemy summę i różnicę dwóch ostatnich równań, otrzymamy dwa prostsze

$$a\left(e^{\frac{h}{a}}-e^{-\frac{h'}{a}}\right)=l+b$$

$$a\left(e^{\frac{h'}{a}}-e^{-\frac{h}{a}}\right)=l-b.$$

Mnożąc te równania stronami i uważając że $h+h'=c$, wyrugujemy h, h', i będziemy mieli

$$a^2\left(e^{\frac{c}{a}}+e^{-\frac{c}{a}}-2\right)=l^2-b^2;$$

zkąd

$$a\left(e^{\frac{c}{2a}}-e^{-\frac{c}{2a}}\right)=\sqrt{l^2-b^2}.$$

Aby ułatwić wyrachowanie niewiadomej a, przynajmniej przez przybliżenie, uczyńmy $\frac{c}{2a}=m$, będzie

$$\frac{e^m-e^{-m}}{2m}=\frac{\sqrt{l^2-b^2}}{c};$$

poczem, rozwinąwszy na szeregi obie ilości wykładnicze, znajdziemy

$$(12) \qquad \frac{m^2}{1.2.3}+\frac{m^4}{1.2.3.4}+\frac{m^6}{1.2\ldots6}+\ldots=\frac{\sqrt{l^2-b^2}-c}{c}.$$

To równanie ma zawsze tylko jeden pierwiastek dodatny. Żeby tego dowieśdź, uważajmy najpierwej że druga strona równania jest dodatna jako pierwsza; albowiem oczywiście $l^2>b^2+c^2$. Owoż, jeśli $m=0$ pierwsza strona jest zero, a staje się nieskończenie wielką gdy $m=\infty$; a że ona rośnie sposobem ciągłym gdy m się zwiększa, więc istnieje zawsze wartość dodatna dla m, i tylko jedna, która czyni pierwszą stronę równą drugiej.

Jeśli łuk ABC mało się różni od swej cięciwy AC, wtedy $\frac{\sqrt{l^2-b^2}-c}{c}$ i temsamem m są ilościami bardzo małemi; można więc, zaniedbując wyższe potęgi niewiadomej m i rozwiązując równanie przybliżone, znaleźć wartość dla m bez znacznego błędu. Biorąc naprzykład

$$m^2=\frac{6\sqrt{l^2-b^2}-6c}{c}, \quad \text{będzie} \quad a=\frac{c}{2m}=\frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{6\sqrt{l^2-b^2}-6c}}.$$

Z równania

$$l+b=a\left(e^{\frac{h}{a}}-e^{-\frac{h'}{a}}\right)=a\left(1-e^{-\frac{c}{a}}\right)e^{\frac{h}{a}}$$

otrzymamy wartość $\frac{h}{a}$, i następnie h'.

Nareszcie, wyprowadzimy ostatnią niewiadomę k z oczywistego równania

$$a+k=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{h}{a}}+e^{-\frac{h}{a}}\right).$$

Gdy oba punkta zawieszenia A i C mają tę samą wysokość, wtedy

$$b=0, \quad \text{i} \quad h=h'=\frac{c}{2}.$$

151. Łańcuszkowa posiada wiele znamienitych własności; przytoczymy niektóre.

1° Widzieliśmy że łańcuszkowa jest krzywą wyprostowalną, w której łuk $s=\sqrt{y^2-a^2}$.

2° W łańcuszkowej promień krzywizny jest wszędzie równy normalnej, jako w kole, ale skierowany w stronę przeciwną.

Oznaczając przez N długość normalnej i przez R promień krzywizny w punkcie M, mamy

$$\mathrm{N}=y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \quad \text{i} \quad \mathrm{R}=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

zatem

$$\mathrm{R}=\frac{\mathrm{N}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{y\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Owoż, równanie różniczkowe łańcuszkowej

$$y=a\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

daje

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{y^2}{a^2} \quad \text{i} \quad y\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^2}{a^2};$$

więc

$$\mathrm{R}=\mathrm{N}.$$

Ten promień krzywizny ma kierunek przeciwny normalnej N; bo się zawsze znajduje wewnątrz wklęsłości linii krzywej, a normalna w łańcuszkowej przypada właśnie zewnątrz tej wklęsłości.

3° Ze wszystkich krzywych płaskich równoobwodowych, które można poprowadzić między dwoma punktami, ta która swoim obrotem około osi leżącej na jej płasczyznie tworzy powierzchnię najmniejszą możebną jest łańcuszkowa. Za pomocą *Rachunku zmienności* widzimy łatwo że twierdzenie wyraża się przez równania

$$\int_{s_0}^{s_1} y ds = \text{min.} \quad \text{i} \quad \int_{s_0}^{s_1} ds = l.$$

To minimum względne przywodzi się, jako wiadomo, do minimum samoistnego całki $\int_{s_0}^{s_1} (y+a) ds$. Ale, ponieważ a jest ilością stałą, żądana linia nie różni się od tej którą znajdziemy szukając samoistego minimum całki $\int_{s_0}^{s_1} y ds$. Owoż, ostatnie minimum wymaga żeby było

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 0,$$

to jest

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\delta y ds + y \frac{dx}{ds} \delta dx + y \frac{dy}{ds} \delta dy \right) = 0.$$

albo

$$\left(y \frac{dx}{ds} \delta x + y \frac{dy}{ds} \delta y \right)_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \delta x d \left(y \frac{dx}{ds} \right) + \delta y d \left(y \frac{dy}{ds} \right) - \delta y ds \right\} = 0.$$

Zatem, wedle prawideł Rachunku zmienności, powinno być osobno

$$\left(y \frac{dx}{ds} \delta x + y \frac{dy}{ds} \delta y \right)_0^1 = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ \delta x d \left(y \frac{dx}{ds} \right) + \delta y d \left(y \frac{dy}{ds} \right) - \delta y ds \right\} = 0.$$

Pierwsze równanie sprawdza się oczywiście, bo zmienności

δx_0, δy_0, δx_1, δy_1 są zero; drugie bierze następującą postać

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\delta x - \frac{dx}{dy}\delta y\right) d\left(y\frac{dx}{ds}\right) = 0.$$

Więc trzeba i dość jest żeby było

$$d\left(y\frac{dx}{ds}\right) = 0;$$

zkąd

$$y\,\frac{dx}{ds} = c \quad \text{albo} \quad y = c\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

oznaczając przez c stateczną dowolną.

Moglibyśmy już na tem poprzestać, albowiem, ostatni wynik będąc równaniem różniczkowem łańcuszkowej, jakośmy już widzieli (147), dowodzi założonego twierdzenia. Ale idźmy dalej i zcałkujmy ostatnie równanie. Jest najpierwej

$$c\,\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - c^2};$$

ztąd

$$x = \int\frac{c\,dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = c\log\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c'}\right),$$

gdzie c' oznacza drugą stateczną dowolną.

Przechodząc do liczb, równanie całkowe staje się

$$y + \sqrt{y^2 - c^2} = c'e^{\frac{x}{c}};$$

mamy zaś widocznie

$$y - \sqrt{y^2 - c^2} = \frac{c^2}{y + \sqrt{y^2 - c^2}} = \frac{c^2}{c'}e^{-\frac{x}{c}}.$$

Z tych dwóch równań wywodzimy

$$y = \frac{1}{2}c'e^{\frac{x}{c}} + \frac{c^2}{2c'}e^{-\frac{x}{c}}.$$

Ostatnie równanie może się znacznie uprościć. Jakoż, uważając że równanie różniczkowe $\frac{cdy}{dx} = \sqrt{y^2 - c^2}$ na $y = c$ daje $\frac{dy}{dx} = 0$, widzimy zaraz że stateczna c jest rzędną punktu najniższego szukanej krzywej. Jeśli więc, nie zmieniając osi $x^{\text{ów}}$, przeniesiemy oś $y^{\text{nów}}$ równolegle do niej samej aż do punktu najniższego tej krzywej, wtedy, czyniąc $x = 0$, $y = c$ w jej równaniu, znajdziemy między statecznemi c i c' następujący związek

$$2c = c' + \frac{c^2}{c'} \quad \text{albo} \quad (c' - c)^2 = 0,$$

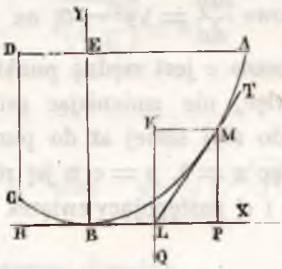
który daje $c' = c$. Podstawiając tę wartość, otrzymujemy już znane, najprostsze możebne, równanie łańcuszkowej

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

4° Ze wszystkich linij równoobwodowych które łączą dwa punkta przestrzeni, łańcuszkowa ma środek ciężkości najniżej możebnie. To twierdzenie jest następstwem poprzedzającego. Jakoż, linia niewiadoma jest oczywiście płaska; zatem, na mocy twierdzenia *Guldina*, powierzchnia obrotowa, przez nią utworzona, ma za miarę wieloczyn obwodu przez okrąg opisany jego środkiem ciężkości. Owoż, łańcuszkowa tworzy, w tych samych okolicznościach, powierzchnię obrotową minimum; więc jej środek ciężkości opisuje około osi obrotu okrąg najmniejszy możebny. Więc ten środek ciężkości jest najbliżej osi, a temsamem najniżej możebnie gdy oś jest pozioma.

KRZYWA MOSTÓW WISZĄCYCH.

152. Zobaczmy teraz jaką krzywę tworzy nić ciężka jednorodna ABC, zawieszona w obydwóch skrajnościach A i C, gdy siły



pionowe które na nią działają są proporcyonalne, nie do łuków ds, ale do ich rzutów poziomych. Ta krzywa jest przybliżoną figurą łańcucha mostów wiszących, gdy się nie zważa na ciężar samego łańcucha i jego wiązadeł z pomostem.

Oczywiście szukana krzywa jest cała na płaszczyznie pionowej, przechodzącej przez punkta zawieszenia A i C. Jeśli tedy obierzemy na tej płaszczyznie dwie osie prostokątne, poziomą i pionową, i oznaczymy przez ϖ siłę która działa na część nici mającą za rzut poziomy jedność długości, przez T jej tężność w punkcie $M(x, y)$, ogólne formuły równowagi nici dadzą

$$(13) \qquad d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0 \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \varpi dx = 0.$$

Całkując oba równania, mamy

$$T\frac{dx}{ds} = C \quad \text{i} \quad T\frac{dy}{ds} = \varpi x + C'.$$

Ale, jeśli nazwiemy ϖa tężność nici w punkcie najniższym B, i weźmiemy ten punkt za początek spółrzędnych, będzie zarazem

$x = 0$, $\frac{dx}{ds} = 1$, $\frac{dy}{ds} = 0$, $c = \varpi a$, $c' = 0$; tym sposobem powyższe równania stają się

$$[14] \qquad \mathrm{T}\frac{dx}{ds} = \varpi a, \qquad \mathrm{T}\frac{dy}{ds} = \varpi x.$$

Pierwsze pokazuje że składowa pozioma tężności nici jest stała, a drugie że składowa pionowa tężności w punkcie M jest proporcyonalna do odciętej tego punktu.

Tężność T wywodzi się bezpośrednio z tych dwóch równań, które dają

$$(15) \qquad \mathrm{T} = \varpi\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Tężność nici, jako widać, powiększa się z odciętą x.

Żeby znaleźć równanie krzywej która przedstawia kształt nici, podzielmy stronami równania (14), będzie

$$a\frac{dy}{dx} = x;$$

zkąd, całkując, otrzymujemy

$$(16) \qquad 2ay = x^2.$$

Nie przydaliśmy stałecznej dowolnej, bo, wedle wziętego układu osi spółrzędnych, powinno być zarazem $x = 0$ i $y = 0$. Równanie dowodzi że nić w równowadze pod danemi siłami ma postać paraboli, której oś jest pionowa, wierzchołek w punkcie najniższym B, i parametrem pewna stałeczna a.

Można dojść do tych wyników bez żadnego całkowania. Niech będzie ABC szukana krzywa; weźmy za osie spółrzędnych styczną BX w punkcie najniższym B i prostę BY prostopadłą do BX; oznaczmy przez T tężność łańcucha w punkcie M, i przez H jego tężność w punkcie B. Przypuszczając równowagę ustaloną, dajmy na to że łuk BM stał się bryłowym; widzimy zaraz że musi być równowaga między siłami T, H i wszystkiemi siłami działającemi na cząstki łuku BM. Ostatnie siły mają wynikowę pionową która przechodzi przez środek L odciętej x; albowiem, jeśli wyobrazimy łuk BM podzielony na niezmierną ilość cząstek mających rzuty równe na BX, siły pionowe działające na te cząstki, będąc proporcyonalne do ich rzutów, i mogąc być uważane jako przyłożone we środkach tych rzutów, składają się w jedną wynikowę Q która jest równa ich summie i przechodzi przez środek L rzutu łuku BM. Nadto, ponieważ siły H, Q, T są w równowadze, kierunek stycznej MT przechodzi przez punkt L; ztąd wynika że te trzy siły, czyniące sobie równowagę około punktu L, są proporcyonalne do boków trójkąta prostokątnego PLM. Owoż, siła Q, jako proporcyonalna do rzutu x łuku BM, wyraża się przez ϖx; można podobnie wyrazić siłę H przez ϖa, oznaczając przez a pewną ilość stałą. Więc będzie

$$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{LP}} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{PM}} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{LM}}$$

albo

$$\frac{\varpi a}{\frac{1}{2}x} = \frac{\varpi x}{y} = \frac{\mathrm{T}}{\sqrt{y^2 + \frac{x^2}{4}}}.$$

Dwa pierwsze stosunki dają $2ay = x^2$, równanie szukanej krzywej; a ze trzech stosunków razem wynika $\mathrm{T} = \varpi\sqrt{a^2 + x^2}$, tężność łańcucha w punkcie M.

153. Zajmiemy się teraz wyznaczeniem statecznej a która wchodzi do równania figury łańcucha i do wyrażenia tężności, znając punkta zawieszenia A, C i długość ABC łańcucha. Jeśli poprowadzimy, jakośmy to już czynili, pionową CD i poziomą AD, ilości wiadome są $\mathrm{CD} = b$, $\mathrm{AD} = c$ i długość łuku $\mathrm{ABC} = l$; niewiadome będą : parametr paraboli a, $\mathrm{AE} = h$, $\mathrm{DE} = h'$ i $\mathrm{BE} = k$.

Mamy zaraz

$$h + h' = c.$$

Równanie (16) paraboli daje

$$h^2 = 2ak, \quad h'^2 = 2a(k - b),$$

ztąd, przez odciąganie, otrzymujemy

$$h^2 - h'^2 = 2ab.$$

ale

$$h^2 - h'^2 = (h + h')(h - h') = c(h - h');$$

zatem

$$c(h - h') = 2ab,$$

zkąd

$$h - h' = \frac{2ab}{c}.$$

Więc, dodając i odciągając stronami równania pierwsze i ostatnie, znajdujemy

$$h = \frac{c}{2} + \frac{ab}{c}, \qquad h' = \frac{c}{2} - \frac{ab}{c}.$$

Nazwijmy s długość łuku BA paraboli, będziemy mieli

$$s = \frac{1}{a}\int_0^s dx\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x}{2a}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a}{2}\log\left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right).$$

Z podstawienia w tej formule kolejno $x = h$ i $x = h'$ wynikają wartości samoiste łuków BA i BC; więc, równając ich summę do l, otrzymujemy

$$2al = h\sqrt{a^2 + h^2} + h'\sqrt{a^2 + h'^2} + a^2\log\frac{(h + \sqrt{a^2 + h^2})(h' + \sqrt{a^2 + h'^2})}{a^2}.$$

Jeśli w tem równaniu podstawimy za h i h' już wiadome wartości, będziemy mieli, względem niewiadomej a, równanie przestępne które ją wyznaczy.

W przypadku szczególnym gdy punkta A i C zawieszenia łańcucha mają tę samą wysokość, równanie się trochę upraszcza; wtedy $b = 0$, $h = h' = \frac{c}{2}$, a zatem

$$al = h\sqrt{a^2 + h^2} + a^2 \log \frac{h + \sqrt{a^2 + h^2}}{a}.$$

Jeśli długość łuku ABC niewiele się różni od swojej cięciwy AC, stosunek $\frac{h}{a}$ jest bardzo mały, bo $\frac{h}{a} = \frac{2k}{h}$ z przyczyny równania $2ak = h^2$; w tym razie można rozwinąć ilości $\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}$, $\log\left(\frac{h + \sqrt{a^2 + h^2}}{a}\right)$ na szeregi.

154. Łańcuszkowa równej wytrzymałości. Nazywa się łańcuszkową równej wytrzymałości krzywa przedstawiająca figurę łańcucha giętkiego, zawieszonego w obydwóch skrajnościach, którego grubość zmienia się od jednego punktu do drugiego proporcyonalnie do tężności. Jeśli, oznaczając przez ϖ ciężar jedności długości łańcucha, weźmiemy na jego płasczyznie dwie osie prostokątne, poziomą i pionową, będziemy mieli równania równowagi w punkcie M(x, y).

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) = 0, \qquad d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) - \varpi ds = 0.$$

Zcałkujmy te dwa równania; nazywając T_0 tężność w punkcie najniższym, otrzymamy

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = \mathrm{T}_0, \qquad \mathrm{T}\frac{dy}{ds} = \int \varpi ds.$$

Ztąd wynika

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{\varpi}{\mathrm{T}_0} ds$$

albo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varpi}{\mathrm{T}_0} \cdot \frac{ds}{dx}.$$

Owoż, warunek równej wytrzymałości łańcucha wyraża się przez równanie

$$T = a\varpi,$$

w którem a znaczy pewną ilość stałą; możemy więc wyrugować ϖ z ostatniego równania różniczkowego. Uważając że $a\varpi = T_0 \frac{ds}{dx}$, i rugując $\frac{\varpi}{T_0}$, znajdujemy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{ds^2}{dx^2} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right);$$

zkąd

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Zcałkujmy to równanie. Biorąc oś rzędnych przechodzącą przez punkt najniższy, w którym $x = 0$ i $\frac{dy}{dx} = 0$, otrzymamy

$$\text{łuk sty}\,\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a};$$

zkąd

$$dy = \text{sty}\,\frac{x}{a}\,dx.$$

Zcałkujmy jeszcze; biorąc punkt najniższy za początek spółrzędnych, znajdziemy ostatecznie

$$\frac{y}{a} = \log\frac{1}{\text{dos}\,\frac{x}{a}}, \quad \text{albo} \quad e^{\frac{y}{a}}\,\text{dos}\,\frac{x}{a} = 1.$$

Takie jest równanie krzywej zwanej łańcuszkową równej wytrzymałości.

Teraz można wyznaczyć ilość stałą a. Jej wartość wynika z równania $T_0 = a\varpi_0$, w którem ilość a znaczy długość jaką trzebaby dać części łańcucha, mającej jego grubość w punkcie najniższym, ażeby ciężar $a\varpi_0$ tej części był równy tężności T_0; a wiadomo że tężność T_0 w punkcie najniższym jest to samo co składowa pozioma tężności w punktach zawieszenia A albo C.

Odcięta x łańcuszkowej równej wytrzymałości jest oczywiście największa możebna gdy $\frac{dy}{dx} = \infty$, czyli gdy $\operatorname{sty} \frac{x}{a} = \infty$;

co daje $\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}$. Tej wartości odpowieda $y = \infty$.

Więc, jakkolwiek jest długi łańcuch, krzywa przedstawiająca jego figurę nie dosięga nigdy obszerności πa.

Nakoniec ilość ϖ wyraża się łatwo w funkcyi x,

$$\varpi = \frac{T}{a} = \frac{T_0}{a}\frac{ds}{dx} = \frac{T_0}{a}\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{T_0}{a \operatorname{dos} \frac{x}{a}}.$$

ROZDZIAŁ V.

PRZYCIĄGANIE POWSZECHNE.

155. Wszystkie zjawiska niebieskie dowodzą że ciała materyalne wywierają na siebie wzajemne działanie takie, jak gdyby się przyciągały. To przyciąganie powszechne jest proporcyonalne do massy każdego z ciał, i w stosunku odwrotnym kwadratu ich odległości. Aby należycie zrozumieć tę ustawę powszechnego przyciągania ciał Natury, trzeba sobie wyobrazić dwa punkta leżące na jedność odległości, i przypuścić że w każdym, nie tracąc nic ze swojego działania, jest skoncentrowana cała materya stanowiąca jedność massy; takie dwa punkta materyalne wywierają wzajemnie na siebie siłę przyciągania równą, której natężenie oznaczono liczbą f. Otóż, wysłowiona ustawa zależy na tem, że wzajemne przyciąganie dwóch punktów materyalnych, mających massy m, m' i będących w odległości r jeden od drugiego, wyraża się przez

$$\frac{fmm'}{r^2}.$$

To ustaliwszy, uważajmy ogólnie punkt materyalny K przyciągany przez ciało kształtu jakiegokolwiek. Każdy punkt tego ciała wywiera na punkt K przyciąganie proporcyonalne do swojej massy i w stosunku odwrotnym kwadratu odległości; wynikowa tych wszystkich przyciągań stanowi przyciąganie całego ciała. Żeby je wyrazić, weźmy za początek spółrzędnych jakikolwiek punkt stały O wewnątrz ciała przyciągającego, i poprowadźmy trzy osie prostokątne OX, OY, OZ; uważajmy massę dm, nieskończenie małej cząstki ciała, jako zjednoczoną w jego punkcie M mającym spółrzędne x, y, z; oznaczmy przez μ massę punktu przyciąganego K, i przez α, β, γ jego spółrzędne; nakoniec niech r znaczy odległość KM tych dwóch punktów daną przez równanie

$$(1) \qquad r^2 = (\alpha - x)^2 + \beta - y)^2 + (\gamma - z)^2.$$

Wedle ustawy przyciągania wyżej określonej, siła z jaką punkt M ciała przyciąga punkt materyalny K ma za miarę $\frac{f\mu dm}{r^2}$, i działa w kierunku KM, to jest od K do M. Owoż, dostawy kątów tego kierunku z trzema pół-osiami spółrzędnych dodatnych są:

$$-\frac{\alpha - x}{r}, \quad -\frac{\beta - y}{r}, \quad -\frac{\gamma - z}{r};$$

zatem, składowe działania punktu M na K wyrażają się przez

$$-f\mu \frac{\alpha - x}{r^3} dm, \quad -f\mu \frac{\beta - y}{r^3} dm, \quad -f\mu \frac{\gamma - z}{r^3} dm.$$

Jeśli więc oznaczymy przez X, Y, Z składowe całego przyciągania jakie dane ciało wywiera na punkt materyalny K, będzie

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= -f\mu \int\int\int \frac{\alpha - x}{r^3} dm, \\ Y &= -f\mu \int\int\int \frac{\beta - y}{r^3} dm, \\ Z &= -f\mu \int\int\int \frac{\gamma - z}{r^3} dm. \end{aligned} \right.$$

Potrójne całkowania rozciągają się do całej massy ciała przyciągającego.

Trzeba wziąć znak $+$ jeśli jest odpychanie.

Te trzy całki potrójne przywodzą się do jednej. Jakoż, mamy

$$Xd\alpha + Yd\beta + Zd\gamma =$$

$$= -f\mu \int\int\int \left\{ (\alpha - x)d\alpha + (\beta - y)d\beta + (\gamma - z)d\gamma \right\} \frac{dm}{r^3};$$

ale równanie (1) daje pochodne cząstkowe ilości r względem α, β, γ,

$$3)\quad \frac{dr}{d\alpha} = \frac{\alpha - x}{r}, \quad \frac{dr}{d\beta} = \frac{\beta - y}{r}, \quad \frac{dr}{d\gamma} = \frac{\gamma - z}{r},$$

zkąd

$$(\alpha - x)d\alpha + (\beta - y)d\beta + (\gamma - z)d\gamma = rdr;$$

podstawiając tę wartość i potem całkując względem r, otrzymujemy

$$\int (\mathrm{X}d\alpha + \mathrm{Y}d\beta + \mathrm{Z}d\gamma) = f\mu \int\int\int \frac{dm}{r}.$$

Jeśli więc położymy

$$\int\int\int \frac{dm}{r} = \mathrm{V}$$

weźmiemy pochodne względem α, β, γ, różniczkując pod znakiem $\int$, byle funkcya $\frac{1}{r}$, pod tym znakiem będąca, nie przechodziła przez wartość nieskończenie wielką między granicami całkowań, znajdziemy formuły

$$\mathrm{X} = f\mu \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha}, \quad \mathrm{Y} = f\mu \frac{d\mathrm{V}}{d\beta}, \quad \mathrm{Z} = f\mu \frac{d\mathrm{V}}{d\gamma},$$

które pokazują że trzy całki potrójne, wyrażające składowe przyciągania punktu K przez dane ciało, wywodzą się z jednej całki potrójnej V.

Gauss, w swoich poszukiwaniach o przyciąganiu ciał, nazwał funkcyę V *potęgownikiem* (potential) ciała przyciągającego.

Powyższa własność potęgownika, niezawisła od gęstości stałej albo zmiennej ciała przyciągającego, nie zależy od ustawy przyciągania, i istnieje gdy to przyciąganie jest funkcyą jakąkolwiek odległości. W tym ogólnym przypadku, jeśli oznaczymy przez F(r) przyciąganie wzajemne dwóch *jedności* massy na odległość r jedna od drugiej, i nazwiemy m jedną z cząstek ciała przyciągającego, działanie tej cząstki na punkt K wyrazi się przez $\mu m F(r)$, i składowe wzajemnego przyciągania będą

$$-\mu m F(r)\frac{dr}{d\alpha}, \qquad -\mu m F(r)\frac{dr}{d\beta}, \qquad -\mu m F(r)\frac{dr}{d\gamma};$$

a jeśli położymy

$$\varphi(r) = -\int F(r)dr,$$

te trzy składowe staną się

$$\frac{\mu d . m\varphi(r)}{d\alpha}, \qquad \frac{\mu d . m\varphi(r)}{d\beta}, \qquad \frac{\mu d . m\varphi(r)}{d\gamma}.$$

Wszystkie inne cząstki m', m'',... ciała przyciągającego dadzą podobne wyrażenia. Więc składowe całego przyciągania jakie ciało na punkt K wywiera są

$$X = \frac{\mu d . \Sigma m\varphi(r)}{d\alpha},$$

$$Y = \frac{\mu d . \Sigma m\varphi(r)}{d\beta},$$

$$Z = \frac{\mu d . \Sigma m\varphi(r)}{d\gamma}.$$

Summa Σ rozciąga się do wszystkich cząstek m, m', m'',... ciała przyciągającego.

Jeśli teraz położymy

$$U = \Sigma m\varphi(r),$$

składowe całego przyciągania wyrażą się przez

$$X = \mu\frac{dU}{d\alpha}, \quad Y = \mu\frac{dU}{d\beta}, \quad Z = \mu\frac{dU}{d\gamma}.$$

Gdy massy m nie są zkoncentrowane w punktach osobnych, ale zapełniają całą przestrzeń uważaną, albo są rozpostarte na powierzchni, wtedy zamiast summy Σ trzeba wziąć całkę potrójną, albo podwójną, stosownie do przypadku.

156. Są siły w naturze, jako przyciąganie powszechne, elektryczność, magnetyzm, których składowe, równoległe do trzech osi prostokątnych, mogą się wyrazić przez pochodne pewnej funkcyi spółrzędnych punktu przyłożenia. Tę funkcyę Hamilton i Jacoby nazwali *funkcyą sił*. Wedle tego określenia, całka U jest funkcyą sił, a potęgownik V jej szczególnym przypadkiem.

Znając funkcyę sił, można zaraz mieć składową całego działania w kierunku jakimkolwiek. I tak, składowa całego przyciągania jakie dane ciało wywiera, wedle kierunku ds, na punkt materyalny $K(\alpha, \beta, \gamma)$, wyraża się przez

$$X\frac{d\alpha}{ds}+Y\frac{d\beta}{ds}+Z\frac{d\gamma}{ds}=\mu\left(\frac{dU}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds}+\frac{dU}{d\beta}\frac{d\beta}{ds}+\frac{dU}{d\gamma}\frac{d\gamma}{ds}\right)=\mu\frac{dU}{ds}.$$

TEORYA POTĘGOWNIKA.

157. Gdy przyciąganie jest w stosunku odwrotnym kwadratu odległości, potęgownik V i jego pochodne α, β, γ, są funkcyami skończonemi i ciągłemi tych zmiennych, dopóki tylko punkt przyciągany znajduje się po za massą przyciągającą; bo wtedy odległość r nie staje się zero, i funkcya $\frac{1}{r}$ nie przechodzi przez wartość nieskończenie wielką. To wynika z samych formuł które dają wartości V, X, Y, Z. Ale, jeśli punkt przyciągany należy do ciała przyciągającego, funkcya $\frac{1}{r}$ przechodzi przez wartość nieskończenie wielką, jest więc wątpliwość czy funkcye V, X, Y, Z nieprzestają być ciągłemi. Aby usunąć niepewność, dość wyrazić potęgownik V w funkcyi spółrzędnych biegunowych, biorąc punkt przyciągany K za początek tych spółrzędnych i zachowując równoległość osi prostokątnych; to jest, trzeba w poprzedzających formułach, uczynić

$$(4)\quad x-\alpha=r\,\mathrm{dos}\theta,\quad y-\beta=r\,\mathrm{wst}\theta\,\mathrm{dos}\psi,\quad z-\gamma=r\,\mathrm{wst}\theta\,\mathrm{wst}\psi;$$

gdzie r znaczy odległość KM, θ kąt(KM, KX'). ψ kąt płaszczyzn (MKX', XY).

Tym sposobem, nazywając ρ gęstość ciała w punkcie przyciągającym M, wyrazimy massę dm przez

$$dm = \rho r^2 \operatorname{wst}\theta\, dr d\theta d\psi,$$

i następnie potęgownik przez

$$V = \int\int\int \frac{dm}{r} = \int\int\int \rho r \operatorname{wst}\theta\, dr d\theta d\psi.$$

Zatem, na mocy formuł (3) i (4), będzie

$$X = f\mu \frac{dV}{d\alpha} = -f\mu \int\int\int \rho \operatorname{wst}\theta \operatorname{dos}\theta\, dr d\theta d\psi,$$

$$Y = f\mu \frac{dV}{d\beta} = -f\mu \int\int\int \rho \operatorname{wst}^2\theta \operatorname{dos}\psi\, dr d\theta d\psi,$$

$$Z = f\mu \frac{dV}{d\gamma} = -f\mu \int\int\int \rho \operatorname{wst}^2\theta \operatorname{wst}\psi\, dr d\theta d\psi.$$

Te wartości jasno pokazują że, w powszechnem przyciąganiu, potęgownik V i składowe X, Y, Z, otrzymane za pomocą jego pochodnych pierwszych względem α, β, γ, są zawsze ilościami ciągłemi, jakiekolwiek punkt przyciągany ma położenie względem ciała przyciągającego.

158. Potęgownik przyciągania warstwy sferycznej. Uważajmy warstwę sferyczną, zawartą między dwiema sferami spółśrodkowemi promieni a i A, złożoną z warstew jednorodnych; i szukajmy jakie przyciąganie ta warstwa wywiera na punkt materyalny K.

Oznaczmy punkt przyciągający M warstwy sferycznej przez spółrzędne biegunowe r, θ, ψ odniesione do jej środka O, i nazwijmy l odległość OK, u odległość KM; będzie

$$u^2 = r^2 - 2lr \operatorname{dos}\theta + l^2.$$

Zatem

$$V = \int\int\int \frac{dm}{u} = \int\int\int \frac{\rho r^2 \operatorname{wst}\theta \, dr d\theta d\psi}{\sqrt{r^2 - 2lr \operatorname{dos}\theta + l^2}}.$$

Całka powinna być wzięta względem ψ od 0 aż do 2π, względem θ od 0 aż do π, i względem r od a do A.

Całkowania względne do ψ i θ wykonywają się zaraz i dają

$$V = \frac{2\pi}{l}\int_a^A \rho r dr \left(\sqrt{r^2 + 2lr + l^2} - \sqrt{r^2 - 2lr + l^2}\right).$$

Pierwiastniki są kwadratami zupełnemi; ale, według jak l jest większe albo mniejsze od r, będzie

$$l + r - (l - r) = 2r,$$

$$r + l - (r - l) = 2l.$$

Z przyczyny tej różnicy wyrażeń, trzeba uważać trzy przypadki położenia punktu przyciąganego K względnie do warstwy przyciągającej.

1° Jeśli punkt K jest zewnątrz warstwy sferycznej, wtedy $l > A$. Zatem w całkowaniu wszystkie wartości zmiennej r są mniejsze od l, i potęgownik bierze kształt

$$V = \frac{2\pi}{l}\int_a^A \rho r . 2r dr = \frac{4\pi}{l}\int_a^A \rho r^2 dr.$$

Owoż, całka określona $4\pi\int_a^A \rho r^2 dr$ oznacza massę M warstwy sferycznej mającej promienie a i A; więc

$$V = \frac{M}{l}.$$

Ztąd, nazywając G natężenie przyciągania punktu K przez warstwę sferyczną w kierunku KO, wywodzimy

$$(5)\qquad G = - f\mu \frac{M}{l^2}$$

Ten wynik wyraża TWIERDZENIE : *Warstwa sferyczna jednorodna, albo złożona z warstewek spółśrodkowych jednorodnych, wywiera na punkt zewnętrzny przyciąganie zupełnie takie samo jak gdyby cała massa tej warstwy była zgęszczona w jej środku.*

2° Jeśli punkt K znajduje się wewnątrz sfery wydrążonej, otoczony warstwą sferyczną, wtedy $l < a$; zatem wszystkie wartości jakie zmienna r bierze w całkowaniu są większe od l, i potęgownik ma kształt

$$V = \frac{2\pi}{l} \int_a^A \rho r \,.\, 2l dr = 4\pi \int_a^A \rho r dr.$$

Ta całka jest niezależna od l; co dowodzi że potęgownik jest ilością stałą dla wszystkich punktów wewnątrz sfery wydrążonej ; więc

$$(6)\qquad G = - f\mu \frac{dV}{dl} = 0.$$

Ztąd TWIERDZENIE : *Warstwa sferyczna jednorodna, albo złożona z warstewek spółśrodkowych jednorodnych, nie wywiera żadnego przyciągania na punkt będący wewnątrz jej powierzchni mniejszej.*

3° Nakoniec, jeśli punkt przyciągany K leży w samej warstwie sferycznej przyciągającej, w tym przypadku l zawiera się między a i A ; zatem wartości dla r, które się przedstawiają w całkowaniu, są jedne mniejsze drugie większe od l. Trzeba więc rozłożyć całkę określoną na dwie inne. Dla pierwszej, granice są a i l; dla drugiej, l i A. Tym posobem mamy

$$V = \frac{4\pi}{l} \int_a^l \rho r^2 dr + 4\pi \int_l^A \rho r dr.$$

Gdy gęstość ρ jest stateczna, całkowania mogą się wykonac i dają

(7) $$V = \frac{2}{3}\pi\rho\left(3A^2 - l^2 - \frac{2a^3}{l}\right), \text{ zkąd } G = -\frac{4}{3}\pi f\mu\rho l + \frac{4\pi f\mu a^3}{3l^2}.$$

Ten trzeci przypadek, w którym warstwa sferyczna przyciąga punkt wewnątrz niej leżący, przywodzi się do dwóch poprzedzających. Jakoż, wyobraźmy powierzchnię sferyczną spółśrodkową, przechodzącą przez punkt przyciągany K, ta powierzchnia rozdzieli warstwę sferyczną na dwie części; na mocy 2°, część obejmująca punkt przyciągany nie wywiera na niego żadnego działania; zostaje więc tylko druga część której działanie na punkt zewnętrzny K jest takie samo jak gdyby cała massa tej części była zjednoczona w jej środku.

Ale, żeby mieć wyrażenie przyciągania przez drugą część warstwy, trzeba znać ustawę wedle której zmienia się jej gęstość w funkcyi odległości od środka. Przypuśćmy naprzykład że gęstość ρ, począwszy od powierzchni wewnętrznej na której ma wartość ρ_0, maleje w postępni arytmetycznej, i w odległości r od środka nabywa wartości $\rho_0 - cr$. Massa warstwy sferycznej zawartej między sferami promieni a i l ma za miarę

$$4\pi\int_a^l(\rho_0 - cr)r^2dr = \pi l^3\left(\frac{4}{3}\rho_0 - cl\right) - \pi a^3\left(\frac{4}{3}\rho_0 - ca\right).$$

Ta massa, zjednoczona w środku swojej warstwy, wywierałaby na punkt K przyciąganie wyrażone przez

$$\pi f\mu\left\{l\left(\frac{4}{3}\rho_0 - cl\right) - \frac{a^3}{l^2}\left(\frac{4}{3}\rho_0 - ca\right)\right\},$$

które jest właśnie istotnem przyciąganiem jakie cała warstwa sferyczna na punkt K wywiera.

159. Powyższe twierdzenia są prawdziwe jakkolwiek mała jest grubość $A - a$ warstwy sferycznej, więc się stosują do warstwy nieskończenie cienkiej, a temsamem do sfery złożonej z warstew gęstości różnej ale jednostajnej dla każdej.

Gdy sfera jednorodna działa na punkt materyalny wewnętrzny, leżący na odległość l od jej środka, aby otrzymać potęgownik i natężenie przyciągania, dość jest uczynić $a = 0$ w formule (7); co daje

$$(8) \qquad V = \frac{2}{3}\pi\rho(3A - l^2) \quad \text{i} \quad G = -\frac{4}{3}\pi f\mu\rho l.$$

Więc *przyciąganie jakie sfera jednorodna wywiera na punkt leżący na jej powierzchni albo wewnątrz jest proporcyonalne do odległości od środka.*

Ta zmiana ustawy przyciągania powszechnego jest tylko pozorna; aby ją wytłumaczyć, dość jest podstawić w formule (5) wartość $M = \frac{4}{3}\pi\rho l^3$; a będzie

$$G = -\frac{f\mu}{l^2}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho l^3 = -\frac{4}{3}\pi f\mu\rho l.$$

160. Potęgownik przyciągania powszechnego posiada ważną własność, bardzo użyteczną do jego wyznaczenia, którą teraz wyłożymy. Mamy ogólnie

$$\frac{dU}{d\alpha} = \Sigma\frac{m(x-\alpha)}{r^3}, \quad \frac{dU}{d\beta} = \Sigma\frac{m(y-\beta)}{r^3}, \quad \frac{dU}{d\gamma} = \Sigma\frac{m(z-\gamma)}{r^3}.$$

Przypuszczając że r nie przechodzi przez zero, weźmy pochodne drugie tych wartości względem α, β, γ; będzie

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} = \Sigma m\left\{\frac{3(x-\alpha)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right\},$$

$$\frac{d^2U}{d\beta^2} = \Sigma m\left\{\frac{3(y-\beta)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right\},$$

$$\frac{d^2U}{d\gamma^2} = \Sigma m\left\{\frac{3(z-\gamma)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right\}.$$

ztąd, dodając, otrzymujemy

$$(9) \qquad \frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\beta^2} + \frac{d^2U}{d\gamma^2} = 0.$$

Dopóki punkt przyciągany znajduje się po za ciałem przyciągającem, r nie może być zero, i pochodne drugie potęgownika zostają skończone, a temsamem równanie (9) ma miejsce. Ale, jeśli punkt przyciągany leży wewnątrz ciała przyciągającego, rzeczone pochodne będą zawierały pod znakiem Σ funkcyę która staje się nieskończenie wielką na $r = 0$; wtedy ich summa nie jest zero, i równanie (9) nie istnieje. LAPLACE który je znalazł nie uważał tego przypadku.

Aby wiedzieć czemu się równa prawdziwa wartość trzech powyższych pochodnych w obecnym przypadku, opiszmy około punktu K nieskończenie małą sferę promienia h, i nazwijmy ξ, η, ζ spółrzędne jej środka; poczem, rozłóżmy całkę U na dwie inne, pierwszą U′ wziętą wewnątrz sfery h, drugą U″ wewnętrz ciała przyciągającego prócz objętości sfery h. Będzie

$$U = U' + U'',$$

zatem

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\beta^2} + \frac{d^2U}{d\gamma^2} = \frac{d^2U'}{d\alpha^2} + \frac{d^2U'}{d\beta^2} + \frac{d^2U'}{d\gamma^2} + \frac{d^2U''}{d\alpha^2} + \frac{d^2U''}{d\beta^2} + \frac{d^2U''}{d\gamma^2}.$$

Ale, na mocy równania (9),

$$\frac{d^2U''}{d\alpha^2} + \frac{d^2U''}{d\beta^2} + \frac{d^2U''}{d\gamma^2} = 0;$$

więc

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\beta^2} + \frac{d^2U}{d\gamma^2} = \frac{d^2U'}{d\alpha^2} + \frac{d^2U'}{d\beta^2} + \frac{d^2U'}{d\gamma^2}.$$

Oznaczmy teraz przez ρ_1, ρ_2 najmniejszą i największą gęstość ciała zawartego wewnątrz sfery h, przez l odległość punktu K od środka tej sfery; będziemy mieli

$$l^2 = (\alpha - \xi)^2 + (\beta - \eta)^2 + (\gamma - \zeta)^2,$$

zkąd

$$l\frac{dl}{d\alpha} = \alpha - \xi, \quad l\frac{dl}{d\beta} = \beta - \eta, \quad l\frac{dl}{d\gamma} = \gamma - \zeta.$$

Gdyby sfera h była jednorodna gęstości ρ, jej potęgownik U' miałby wartość $\frac{2}{3}\pi\rho(3h^2-l^2)$ (158); więc wartość potęgownika U', zawarta między $\frac{2}{3}\pi\rho_1(3h^2-l^2)$ i $\frac{2}{3}\pi\rho_2(3h^2-l^2)$, wyraża się przez

$$U' = \frac{2}{3}\pi\left\{\rho_1 + (\rho_2-\rho_1)\theta\right\}(3h^2-l^2),$$

gdzie θ znaczy ułamek między 0 i 1.

To ustaliwszy, bierzemy pierwszą pochodnę potęgownika U' względem α, i znajdujemy na mocy tego co poprzedza,

$$\frac{dU'}{d\alpha} = -\frac{4}{3}\pi\left\{\rho_1 + (\rho_2-\rho_1)\theta\right\}(\alpha-\xi)$$

$$+\frac{2}{3}\pi(\rho_2-\rho_1)\frac{d\theta}{d\alpha}(3h^2-l^2);$$

bierzemy następnie drugą pochodnę względem α, i otrzymujemy

$$\frac{d^2U'}{d\alpha^2} = -\frac{4}{3}\pi\left\{\rho_1 + (\rho_2-\rho_1)\theta\right\} + \varepsilon,$$

oznaczając przez ε summę wszystkich wyrazów które nikną gdy h staje się zero.

Ztąd wynika że

$$\text{gr.}\ \frac{d^2U'}{d\alpha^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho.$$

Znajduje się tak samo

$$\text{gr.}\ \frac{d^2U'}{d\beta^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho, \quad \text{gr.}\ \frac{d^2U'}{d\gamma^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho.$$

Więc

$$(10) \qquad \frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\beta^2} + \frac{d^2U}{d\gamma^2} = -4\pi\rho.$$

ρ jest zarazem gęstością ciała przyciągającego i punktu materyalnego przyciąganego który, w obecnym przypadku, jest częścią tego ciała. Można uważać ostatnią formułę, którą podał POISSON, jako ogólną, obejmującą oba przypadki punktu przyciąganego, zewnętrznego i wewnętrznego, byle brano $\rho = 0$ gdy ten punkt leży zewnątrz ciała przyciągającego.

161. PRZYCIĄGANIE WALCA WYDRĄŻONEGO NIEOKREŚLONEGO (*). Formuły (9) i (10) mogą służyć, powiedzieliśmy, do wyznaczenia potęgownika, z którego się wywodzą składowe przyciągania w kierunku jakimkolwiek. Dla przykładu, *szukajmy jakie przyciąganie wywiera, na punkt materyalny, walec obrotowy nieokreślonéj długości, złożony z warstew jednorodnych których gęstość jest funkcyą odległości od jego osi.*

Kierunek w którym ten walec nieokreślony przyciąga jakikolwiek punkt materyalny jest oczywiście prostopadły do osi. Weźmy więc płaszczyznę przechodzącą przez punkt przyciągany, i prostopadłą do osi, za płaszczyznę xy, punkt jej spotkania z osią za początek spółrzędnych prostokątnych, i tę oś za oś rzędnych. Ponieważ walec jest symetryczny względem osi, jego przyciąganie jest funkcyą samej tylko odległości r punktu przyciąganego od tej osi, i wyraża się przez

$$f\mu \frac{dV}{dr}.$$

Zważając teraz że potęgownik V nie zależy od rzędnej γ punktu przyciąganego, mamy, dla wszystkich punktów leżących po za massą przyciągającą, równanie

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} = 0;$$

a zaś dla każdego punktu przyciąganego, który jest częścią massy przyciągającej, równanie

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} = -4\pi\rho.$$

(*) Zobacz *Mécanique* p. DUHAMEL, 3e édition. Paris, 1863.

Owoż

$$\frac{d.V}{d\alpha}=\frac{dV}{dr}\frac{dr}{d\alpha}, \quad \frac{d.V}{d\beta}=\frac{dV}{dr}\frac{dr}{d\beta},$$

a równanie

$$r^2=\alpha^2+\beta^2$$

daje

$$\frac{dr}{d\alpha}=\frac{\alpha}{r}, \quad \frac{dr}{d\beta}=\frac{\beta}{r};$$

będzie zatem

$$\frac{d.V}{d\alpha}=\frac{dV}{dr}.\frac{\alpha}{r}, \quad \frac{d.V}{d\beta}=\frac{dV}{dr}.\frac{\beta}{r}.$$

Weźmy teraz pochodne drugie, znajdziemy

$$\frac{d^2.V}{d\alpha^2}=\frac{d^2V}{dr^2}.\frac{\alpha^2}{r^2}+\frac{dV}{dr}\left(\frac{1}{r}-\frac{\alpha^2}{r^3}\right),$$

$$\frac{d^2.V}{d\beta^2}=\frac{d^2V}{dr^2}.\frac{\beta^2}{r^2}+\frac{dV}{dr}\left(\frac{1}{r}-\frac{\beta^2}{r^3}\right).$$

Jeśli więc poniesiemy te wartości do dwóch głównych równań, będziemy mieli ostatecznie

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=0,$$

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=-4\pi\rho.$$

Te równania są linijne względem $\frac{dV}{dr}$; ale, zamiast je całkować jako takie, uważajmy że, znosząc mianownik rdr, mamy zaraz różniczki dokładne

$$d.r\frac{dV}{dr}=0,$$

$$d.r\frac{dV}{dr}=-4\pi\rho r dr;$$

zkąd całkując otrzymujemy

$$\frac{dV}{dr}=\frac{C}{r},$$

$$r\frac{dV}{dr}=-4\pi\int\rho r dr+\text{stateczna},$$

gdzie C jest stateczną dowolną.

Aby wyznaczyć stateczną C, przypuśćmy najpierwej że punkt przyciągany znajduje się wewnątrz mniejszej powierzchni warstwy walcowej. W tym przypadku, gdy $r=0$, to jest gdy punkt przyciągany leży na osi walca, stateczna C powinna oczywiście być zero; więc ta stateczna jest zero dopóki tylko punkt przyciągany znajduje się wewnątrz wydrążenia walca, i temsamem

$$\frac{dV}{dr}=0.$$

To dowodzi że *warstwa malcowa nieokreślonej długości, złożona z warstew jednorodnych spólnej osi, nie wywiera żadnego przyciągania na punkt materyalny leżący wewnątrz jej powierzchni mniejszej.*

Przypuśćmy teraz że punkt przyciągany jest częścią massy przyciągającej. W tym przypadku, nazywając a promień powierzchni mniejszej walca, i zważając że, podług tego co poprzedza, $\frac{dV}{dr}$ jest zero dla $r=a$, mamy, dla punktu przyciąganego wewnątrz warstwy,

$$\frac{dV}{dr}=-\frac{4\pi}{r}\int_a\rho r dr.$$

A jeśli punkt przyciągany leży na powierzchni większej walca mającej promień b, będzie

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi}{b}\int_a^b \rho r dr.$$

Nakoniec, szukajmy wartości $\frac{dV}{dr}$ dla punktów zewnętrznych. Dla tych punktów jest zawsze

$$\frac{dV}{dr} = \frac{C}{r}.$$

Ale uważajmy że zmienna r nie ma ciągłości w przejściu od punktów przyciąganych wewnętrznych do zewnętrznych; i dlatego stateczna C nie zachowuje, względnie do punktów zewnętrznych, wartości jakie ma względnie do wewnętrznych. Aby wyznaczyć stateczną C w obecnym przypadku, uczyńmy $r = b$, to jest przypuśćmy że punkt przyciągany znajduje się na powierzchni zewnętrznej walca, będzie, na mocy poprzedzającego przypadku,

$$\frac{C}{b} = -\frac{4\pi}{b}\int_a^b \rho r dr;$$

więc

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi}{r}\int_a^b \rho r dr.$$

To pokazuje że *przyciąganie jakie warstwa walcowa nieokreślonej długości, złożona z warstew jednorodnych spólnej osi, wywiera na punkt materyalny zewnętrzny jest w stosunku odwrotnym odległości od osi.*

DZIAŁANIE CIAŁA JAKIEGOKOLWIEK NA PUNKT MATERYALNY BARDZO ODLEGŁY.

162. Weźmy trzy osie prostokątne jakiekolwiek OX, OY, OZ. Jeśli ciało, kształtu i gęstości jakiejkolwiek, działa na punkt mate-

ryalny $K(\alpha, \beta, \gamma)$, którego odległość jest bardzo wielka względnie do rozmiarów tego ciała, wtedy w rachunku funkcyi sił $U = \Sigma \frac{m}{r}$, można rozwinąć ilość $\frac{1}{r}$ w szereg uszykowany według potęg spółrzędnych x, y, z punktu przyciągającego M. Jakoż, czyniąc $OK = R$, mamy

$$\frac{1}{r} = \left\{R^2 - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + x^2 + y^2 + z^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{R}\left\{1 + \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{R^2} + \frac{3(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)R^2}{2R^4} + \ldots\right\},$$

więc

$$U = \Sigma \frac{m}{r} =$$

$$\frac{1}{R}\Sigma m + \frac{\alpha}{R^3}\Sigma mx + \frac{\beta}{R^3}\Sigma my + \frac{\gamma}{R^3}\Sigma mz$$

$$+ \frac{3}{2R^5}\Sigma m(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - \frac{3}{2R^3}\Sigma m(x^2 + y^2 + z^2) + \ldots$$

Obierzmy teraz za początek spółrzędnych środek ciężkości G ciała przyciągającego, będzie

$$\Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0, \quad \Sigma mz = 0\,;$$

zatem, nazywając M massę ciała, otrzymujemy

$$U = \frac{M}{R} + \frac{3}{2R^5}\Sigma m(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - \frac{3}{2R^3}\Sigma m(x^2 + y^2 + z^2) + \ldots$$

Owoż, jeśli odległość R punktu przyciąganego K od ciała jest bardzo wielka względem rozmiarów tego ciała, można, poprzestając na pierwszym wyrazie, wziąć

$$U = \frac{M}{R} = \frac{M}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}};$$

zkąd się wywodzi

$$X = -\frac{f\mu M\alpha}{R^3}, \quad Y = -\frac{f\mu M\beta}{R^3}, \quad Z = -\frac{f\mu M\gamma}{R^3}.$$

Te wartości trzech składowych przyciągania pokazują że ich wynikowa $\frac{f\mu M}{R^2}$ przechodzi przez środek ciężkości ciała przyciągającego, i działa na punkt K w kierunku KG.

Ztąd FUNDAMENTALNE TWIERDZENIE : *Jeśli odległość punktu materyalnego przyciąganego jest bardzo wielka względem rozmiarów ciała przyciąganego, przyciąganie jest prawie to samo, co do wielkości i do kierunku, jak gdyby całkowita massa tego ciała była zjednoczona w jego środku ciężkości.*

Zastosujmy te wyniki do przyciągania księżyca przez ziemię. Wiedząc że odległość księżyca od ziemi wynosi około 60 promieni ziemskich, mamy przybliżenie $\frac{1}{60^2} = \frac{1}{3600}$ względne do rozmiarów tych dwóch ciał. Ale, zważając że ciała niebieskie są, prawdopodobnie, złożone z warstew sferycznych jednorodnych, pojmujemy łatwo że środek ich figury musi być, z bardzo małą różnicą, środkiem ciężkości. Ta okoliczność zmniejsza błąd pochodzący z zaniedbania wyrazów szeregu, i spółczynnik względności błędów jest zapewne mniejszy od $\frac{1}{3600}$; tem więcej że błąd byłby prawie żaden, gdyby ziemia była sferą złożoną z warstew spółśrodkowych jednorodnych.

163. *Inna ustawa przyciągania.* Przypuśćmy że dwa punkta materyalne przyciągają się proporcyonalnie do mass i do odległości, jakośmy tego mieli przykład w działaniu sfery jednorodnej na punkt leżący na jej powierzchni. W tem, założeniu można łatwo wyrachować przyciąganie jakie ciało, kształtu jakiegokolwiek, wywiera na punkt materyalny gdziekolwiek umieszczony.

Weźmy trzy osie spółrzędne prostokątne, przecinające się we środku ciężkości ciała przyciągającego, i przypuśćmy że oś $x^{ów}$ przechodzi przez punkt przyciągany. Niech będą x, y, z spółrzędne nieskończenie małej cząstki dm składającej ciało, α odległość punktu przyciąganego massy μ od początku O spółrzędnych; trzy składowe przyciągania cząstki dm będą

$$-f(\alpha - x)\mu dm, \quad fy\mu dm, \quad fz\mu dm.$$

Zatem, biorąc summy wszystkich przyciągań punktu materyalnego przez nieskończenie małe cząstki ciała, albo przez punkta materyalne danego układu, mamy

$$X = -f\mu\Sigma(x - \alpha)dm, \quad Y = f\mu\Sigma ydm, \quad Z = f\mu\Sigma zdm.$$

Owoż, na mocy wiadomej własności środka ciężkości,

$$\Sigma xdm = 0, \quad \Sigma ydm = 0, \quad \Sigma zdm = 0;$$

więc, nazywając M massę ciała przyciągającego, otrzymujemy

$$X = -f\mu M\alpha, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Ztąd TWIERDZENIE : *Gdy ciało, albo układ punktów materyalnych, przyciąga punkt materyalny w położeniu jakiemkolwiek, proporcyonalnie do odległości, przyciąganie jest takie samo jak gdyby cała massa przyciągająca była zjednoczona w swoim środku ciężkości.*

PRZYCIĄGANIE ELLIPSOID.

164. Dowiedziemy najpierwej kilku twierdzeń potrzebnych do wykładu przyciągania ellipsoid.

Powierzchniami spółogniskowemi nazywają się powierzchnie drugiego rzędu których przecięcia główne mają spólne ogniska. Niech będą a, b, c pół-osie jednej ellipsoidy; otrzymuje się równanie ellipsoidy spółogniskowej, odniesione do tych samych osi, nazywając a', b', c' jej pół-osie i kładąc

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2, \quad a'^2 - c'^2 = a^2 - c^2, \quad b'^2 - c'^2 = b^2 - c^2,$$

albo

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2 = t;$$

zkąd

$$a'^2 = a^2 + t, \quad b'^2 = b^2 + t, \quad c'^2 = c^2 + t.$$

Więc równanie ellipsoidy, spółogniskowej z ellipsoidą mającą pół-osie a, b, c, jest

$$\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{c^2+t} = 1.$$

TWIERDZENIE. *Przez każdy punkt przestrzeni można ogólne poprowadzić trzy powierzchnie spółogniskowe z ellipsoidą daną przez równanie*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Te powierzchnie przecinają się prostokątnie.

Jakoż, w równaniu

$$\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{c^2+t} = 1,$$

które przedstawia powierzchnie spółogniskowe z daną ellipsoidą, znieśmy mianowniki, uważając x, y, z za ilości stałe; otrzymamy równanie trzeciego stopnia na t

$$x^2(b^2+t)(c^2+t) + y^2(a^2+t)(c^2+t) + z^2(a^2+t)(b^2+t)$$
$$-(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t) = 0.$$

To równanie ma wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste i nierówne; jeśli pół-osie a, b, c są różne; albowiem, przypuszczając $a^2 > b^2 > c^2$,

podstawienia $\quad t = -a^2, \; -b^2, \; -c^2, \; +\infty$

dają wyniki $\quad + \quad - \quad + \quad -$.

Na samo spojrzenie na zmienności znaków, widzimy zaraz że równanie ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste, których wartości są zawarte między $-a^2$ i $-b^2$, $-b^2$ i $-c^2$, $-c^2$ i $+\infty$.

Trzy powierzchnie spółogniskowe, odpowiedające tym pierwiastkom są różnego rodzaju. Powierzchnia odpowiedająca pierwiastkowi zawartemu między $-a^2$ i $-b^2$ jest hiperboloidą o dwóch płachtach; ta która odpowieda pierwiastkowi zawartemu między $-b^2$ i $-c^2$ jest hiperboloidą o jednej płachcie; nakoniec ostatnia jest ellipsoidą.

Jeśli $a=b$, dana ellipsoida jest obrotową około osi $z^{ów}$; wtedy powierzchnia spółogniskowa będzie

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+t}+\frac{z^2}{c^2+t}=1;$$

zkąd, znosząc mianowniki, wynika równanie drugiego stopnia na t,

$$(x^2+y^2)(c^2+t)+z^2(a^2+t)-(a^2+t)(c^2+t)=0.$$

Jakiekolwiek jest a^2, większe albo mniejsze od c^2, rozumując jako wyżej, znajdziemy łatwo że pierwiastki tego równania są rzeczywiste; jednemu z nich odpowieda hiperboloida o jednej płachcie, albo o dwóch, drugiemu odpowieda ellipsoida.

Więc dana ellipsoida ma zawsze jedną ellipsoidę spółogniskową, i tylko jedną, przez dany punkt przechodzącą.

Nazwijmy teraz λ, μ, ν pierwiastki równania trzeciego stopnia na t, albo tylko λ i μ pierwiastki równania drugiego stopnia na t. Równania dwóch powierzchni spółogniskowych z daną ellipsoidą i przechodzących przez punkt $\mathrm{M}(x, y, z)$, będą

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=1;$$

ztąd, odciągając stronami, otrzymujemy

$$\left\{\frac{x^2}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}\right\}(\lambda-\mu)=0;$$

a ponieważ pierwiastki równań na t, trzeciego stopnia, albo drugiego, są nierówne, musi być

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}=0.$$

Owoż, to równanie znaczy że, w punkcie M, normalne do dwóch powierzchni uważanych są prostopadłe między sobą; więc powierzchnie spółogniskowe, przechodzące przez jeden punkt, przecinają się prostokątnie.

165. Dwa punkta $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$ na dwóch ellipsoidach spółogniskowych nazywają się *odpowiedajacemi*, gdy ich spółrzędne są proporcyonalne do pół-osi równoległych, to jest gdy

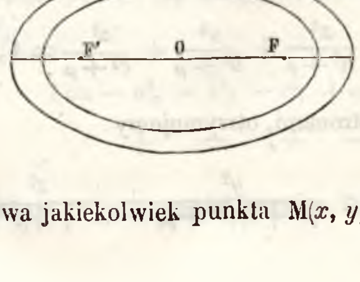
$$\frac{x}{a}=\frac{x'}{a'},\quad \frac{y}{b}=\frac{y'}{b'},\quad \frac{z}{c}=\frac{z'}{c'}.$$

Z tego określenia wynika równanie

$$\rho\frac{dxdydz}{abc}=\rho\frac{dx'dy'dz'}{a'b'c'},$$

które dowodzi że, w dwóch ellipsoidach spółogniskowych jednorodnych, massy dwóch cząstek nieskończenie małych odpowiedających są proporcyonalne do wieloczynów trzech osi.

Twierdzenie. *Odległość dwóch punktów wziętych na dwóch ellipsoidach spółogniskowych jest równa odległości ich punktów odpowiedajacych.*



Jakoż, weźmy dwa jakiekolwiek punkta $M(x, y, z)$ i $N(x_1, y_1, z_1)$

na jednej ellipsoidzie, punkta im odpowiedające na ellipsoidzie spółogniskowej będą

$$M'\left(\frac{a'x}{a}, \frac{b'y}{b}, \frac{c'z}{c}\right) \quad \text{i} \quad N'\left(\frac{a'x_1}{a}, \frac{b'y_1}{b}, \frac{c'z_1}{c}\right).$$

Zatem

$$\overline{MN'}^2 = \left(x - \frac{a'x_1}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{b'y_1}{b}\right)^2 + \left(z - \frac{c'z_1}{c}\right),$$

$$\overline{NM'}^2 = \left(x_1 - \frac{a'x}{a}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{b'y}{b}\right)^2 + \left(z_1 - \frac{c'z}{c}\right)^2.$$

Ztąd wynika

$$\overline{MN'}^2 - \overline{NM'}^2 = (a^2 - a'^2)\,.\,\frac{x^2 - x_1^2}{a^2} + (b^2 - b'^2)\frac{y^2 - y_1^2}{b^2}.$$

$$+ (c^2 - c'^2)\,.\,\frac{z^2 - z_1^2}{c^2}.$$

Ale $a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2$;

co daje

$$\overline{MN'}^2 - \overline{NM'}^2 = (a^2 - a'^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2}\right) = 0;$$

więc

$$MN' = NM'.$$

DZIAŁANIE ELLIPSOIDY NA PUNKT WEWNĘTRZNY.

166. Niech będzie ellipsoida o trzech osiach nierównych $2a$, $2b$, $2c$, jednorodna i gęstości ρ, która przyciąga punkt wewnętrzny $K(\alpha, \beta, \gamma$ mający massę μ; jeśli nazwiemy x, y, z spółrzędne punktu przycią-

gającego M, składowe całego przyciągania przedstawią się przez

$$X = f\mu\rho \int\int\int \frac{x-\alpha}{r^3}\, dxdydz,$$

$$Y = f\mu\rho \int\int\int \frac{y-\beta}{r^3}\, dxdydz,$$

$$Z = f\mu\rho \int\int\int \frac{z-\gamma}{r^3}\, dxdydz.$$

Wyraźmy te składowe przez spółrzędne biegunowe, biorąc ich początek w punkcie przyciąganym K i zachowując równoległość osi prostokątnych, to jest czyniąc

$$x = r\,\mathrm{dos}\,\theta + \alpha, \qquad y = r\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\psi + \beta, \qquad z = r\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{wst}\,\psi + \gamma,$$

gdzie r, θ, ψ mają wiadome znaczenie (157).

Po czem, uważając że w układzie spółrzędnych biegunowych objętość cząstki nieskończenie małej ma za miarę $r^2\,\mathrm{wst}\,\theta\, dr d\theta d\psi$, otrzymujemy

$$1 \quad \left\{ \begin{aligned} X &= f\mu\rho \int\int\int \mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\theta\, dr d\theta d\psi, \\ Y &= f\mu\rho \int\int\int \mathrm{wst}^2\theta\,\mathrm{dos}\,\psi\, dr d\theta d\psi, \\ Z &= f\mu\rho \int\int\int \mathrm{wst}^2\theta\,\mathrm{wst}\,\psi\, dr d\theta d\psi. \end{aligned} \right.$$

Granice całkowania są : dla ψ od 0 do 2π, dla θ od 0 do π, dla r od 0 aż do wartości odpowiedającej punktowi powierzchni ellipsoidy.

Zcałkujmy najpierwej względem r pierwszą formułę, będziemy mieli

$$X = f\mu\rho \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\theta\, d\theta d\psi.$$

Aby znaleźć wartość r w funkcyi θ i ψ, wyraźmy równanie ellipsoidy przez spółrzędne biegunowe; będzie

$$\frac{(r\operatorname{dos}\theta+\alpha)^2}{a^2}+\frac{(r\operatorname{wst}\theta\operatorname{dos}\psi+\beta)^2}{b^2}+\frac{(r\operatorname{wst}\theta\operatorname{wst}\psi+\gamma)^2}{c^2}-1=0;$$

ztąd, jeśli dla skrócenia położymy

$$\mathrm{L}=\frac{\operatorname{dos}^2\theta}{a^2}+\frac{\operatorname{wst}^2\operatorname{dos}^2\psi}{b^2}+\frac{\operatorname{wst}^2\theta\operatorname{wst}^2\psi}{c^2}$$

$$\mathrm{M}=\frac{\alpha\operatorname{dos}\theta}{a^2}+\frac{\beta\operatorname{wst}\theta\operatorname{dos}\psi}{b^2}+\frac{\gamma\operatorname{wst}\theta\operatorname{wst}\psi}{c^2}$$

$$\mathrm{N}=1-\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2},$$

otrzymamy

$$\mathrm{L}r^2+2\mathrm{M}r-\mathrm{N}=0.$$

To równanie ellipsoidy, drugiego stopnia na r, ma oczywiście dwa pierwiastki rzeczywiste i znaków przeciwnych; pierwiastek dodatny sam jeden przystoi naszemu zadaniu, jego wartość jest

$$r=\frac{-\mathrm{M}+\sqrt{\mathrm{M}^2+\mathrm{LN}}}{\mathrm{L}}.$$

Więc, podstawiając tę wartość, mamy

$$\mathrm{X}=-f\mu\rho\int\int\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}\operatorname{wst}\theta\operatorname{dos}\theta\, d\theta d\psi+f\mu\rho\int\int\frac{\sqrt{\mathrm{M}^2+\mathrm{LN}}}{\mathrm{L}}\operatorname{wst}\theta\operatorname{dos}\theta\, d\theta\psi.$$

Druga podwójna całka jest zero. Albowiem, kąt θ bierze wartości spełniające θ' i $\pi-\theta'$, a kąt ψ wartości ψ' i $\pi+\psi'$; z podstawienia takich kątów wynika że L zachowuje tę samą wartość, a zaś M zmienia tylko znak, N jest niezmienne; zaiem części nieskończenie małe, składające drugą podwójną całkę, będąc po dwie równe i znaków przeciwnych, niszczą się. Zostaje więc tylko, podstawiając wartość dla M w pierwszej całce,

$$X = -\frac{f\mu\rho\alpha}{a^2}\int\int\frac{\text{wst}\,\theta\,\text{dos}^2\theta d\theta d\psi}{L} + \frac{f\mu\rho\beta}{b^2}\int\int\frac{\text{wst}^2\theta\,\text{dos}\,\theta\,\text{dos}\,\psi d\theta d\psi}{L}$$

$$+\frac{f\mu\rho\gamma}{c^2}\int\int\frac{\text{wst}^2\theta\text{dos}\theta\text{wst}\psi d\theta d\psi}{L}.$$

Ale dwie ostatnie całki podwójne są zero, z przyczyny wyżej wskazanej. Więc zostaje nareszcie

$$X = -\frac{f\mu\rho\alpha}{a^2}\int\int\frac{\text{wst}\,\theta\,\text{dos}^2\theta d\theta d\psi}{L}.$$

Dość teraz zcałkować względem θ od 0 do $\frac{\pi}{2}$ podwajając wynik, bo części składające tę całkę są równe po dwie; względem ψ dość zcałkować także od 0 do $\frac{\pi}{2}$, ale mnożąc wynik przez 4. Co daje

$$X = -\frac{8f\mu\rho\alpha}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{wst}\,\theta\,\text{dos}^2\theta d\theta d\psi}{L}.$$

Aby wykonać całkowanie względem ψ, uważajmy że ilość L może wziąć następującą postać

$$L = \left(\frac{\text{dos}^2\theta}{a^2} + \frac{\text{wst}^2\theta}{b^2}\right)\text{dos}^2\psi + \left(\frac{\text{dos}^2\theta}{a^2} + \frac{\text{wst}^2\theta}{c^2}\right)\text{wst}^2\psi;$$

podstawiając tę wartość i czyniąc $\text{sty}\psi = t$, mamy

$$X = -\frac{8f\mu\rho\alpha}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{wst}\theta\,\text{dos}^2\theta d\theta\int_0^{\infty}\frac{dt}{\left(\frac{\text{dos}^2\theta}{a^2} + \frac{\text{wst}^2\theta}{b^2}\right) + \left(\frac{\text{dos}^2\theta}{a^2} + \frac{\text{wst}^2\theta}{c^2}\right)t^2};$$

zkąd, całkując względem t, otrzymujemy

$$X = -\frac{4\pi f\mu\rho\alpha}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{wst}\,\theta\,\text{dos}^2\theta d\theta}{\left(\frac{\text{dos}^2\theta}{a^2} + \frac{\text{wst}^2\theta}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\text{dos}^2\theta}{a^2} + \frac{\text{wst}^2\theta}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Połóżmy teraz $\cos\theta = u$, będzie

$$X = -\frac{4\pi f\mu\rho bc\alpha}{a^2}\int_0^1 \frac{u^2du}{\left(1+\frac{b^2-a^2}{a^2}.u^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{c^2-a^2}{a^2}.u^2\right)^{\frac{1}{2}}};$$

a jeśli jeszcze nazwiemy λ i λ' excentryczności dwóch ellips głównych, to jest jeśli, przypuszczając $a < b < c$, uczynimy

$$\frac{b^2-a^2}{a^2} = \lambda^2 \quad \text{i} \quad \frac{c^2-a^2}{a^2} = \lambda'^2,$$

znajdziemy ostatecznie

$$X = -\frac{4\pi f\mu\rho bc\alpha}{a^2}\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)}}.$$

Ta całka jest elliptyczna

Składowe Y i Z mogą się wyprowadzić ze składowej X. Jakoż, gdybyśmy byli wzięli za kąt θ kąt promienia wodzącego z osią OY, rachunek składowej Y byłby się różnił od rachunku składowej X samą tylko wzajemną przemianą liter a i b; więc ze składowej X wywiedziemy składowę Y, zamieniając a na b i nawzajem; tym sposobem, oznaczając przez v $\cos\theta$ i kładąc β zamiast α, mamy

$$Y = -\frac{4\pi f\mu\rho ac\beta}{b^2}\int_0^1 \frac{v^2dv}{\left(1-\frac{b^2-a^2}{a^2}.v^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{c^2-b^2}{a^2}.v^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Owoż,

$$\frac{b^2-a^2}{b^2} = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad \frac{c^2-b^2}{b^2} = \frac{c^2-a^2-(b^2-a^2)}{b^2} = \frac{\lambda'^2-\lambda^2}{1+\lambda^2};$$

więc

$$Y = -\frac{4\pi f\mu\rho ac\beta}{b^2}\int_0^1 \frac{v^2dv}{\left(1-\frac{\lambda^2v^2}{1+\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\lambda'^2-\lambda^2}{1+\lambda^2}.v^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

To wyrażenie może się uprościć. Albowiem, zachowując te same granice całkowania, można położyć

$$v^2 = \frac{(1+\lambda^2)u^2}{1+\lambda^2 u^2};$$

co daje

$$1 - \frac{\lambda^2 v^2}{1+\lambda^2} = 1 - \frac{\lambda^2 u^2}{1+\lambda^2 u^2} = \frac{1}{1+\lambda^2 u^2},$$

$$1 + \frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{1+\lambda^2}.v^2 = 1 + \frac{(\lambda'^2 - \lambda^2)u^2}{1+\lambda^2 u^2} = \frac{1+\lambda'^2 u^2}{1+\lambda^2 u^2}.$$

$$vdv = \frac{(1+\lambda^2)udu}{(1+\lambda^2 u^2)^2} \quad \text{i} \quad v^2 dv = \frac{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Podstawiając te wartości, będzie

$$Y = -\frac{4\pi f\mu\rho ac\beta}{b^2}(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}\int_0^1 \frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Zupełnie podobnem przekształceniem znajdziemy

$$Z = -\frac{4\pi f\mu\rho ab\gamma}{c^2}(1+\lambda'^2)^{\frac{3}{2}}\int_0 \frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nakoniec, zważając że

$$1+\lambda^2 = 1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

$$1+\lambda'^2 = 1 + \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2},$$

otrzymujemy, dla trzech składowych przyciągania, następujące wyrażenia

$$
(2)\quad \begin{cases}
X = -\dfrac{4\pi f\mu\rho bc\alpha}{a^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)}}, \\[2ex]
Y = -\dfrac{4\pi f\mu\rho bc\beta}{a^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)}}, \\[2ex]
Z = -\dfrac{4\pi f\mu\rho bc\gamma}{a^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2du}{(1+\lambda'^2u^2)\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)}}.
\end{cases}
$$

Jako widzimy, spółrzędne α, β, γ punktu przyciąganego nie wchodzą do całek; każda składowa przyciągania, jakie ellipsoida jednorodna wywiera na punkt materyalny wewnętrzny, jest proporcyonalna do spółrzędnej równoległej tego punktu, i zbliża go do środka.

Powyższe formuły stosują się do przyciągania punktu wewnętrznego, jakkolwiek jest mała jego odległość od powierzchni ellipsoidy.

Tym formułom można dać kształt symetryczniejszy. Połóżmy; jako czyni Jacoby,

$$u = \frac{a}{\sqrt{a^2+t}}$$

będzie

$$du = -\frac{adt}{2(a^2+t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Podstawiając te wartości, otrzymamy ostatecznie

$$X = -\frac{2\pi f\mu\rho\alpha}{a^2}\int_0^\infty \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\left(1+\frac{t}{c^2}\right)}}$$

$$Y = -\frac{2\pi f\mu\rho\beta}{b^2}\int_0^\infty \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\left(1+\frac{t}{c^2}\right)}}$$

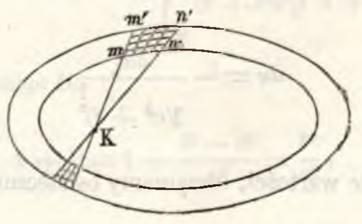
$$Z = -\frac{2\pi f\mu\rho\gamma}{c^2}\int_0^\infty \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{c^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\left(1+\frac{t}{c^2}\right)}}.$$

167. Działanie warstwy ellipsoidalnej na punkt wewnętrzny. Przypuśćmy, w formułach (2), że osie ellipsoidy zwiększają się proporcyonalnie albo zmniejszają; ponieważ stosunek $\frac{bc}{a^2}$ i excentryczności λ^2, λ'^2 nie zmieniają się, składowe X, Y, Z przyciągania zostają te same. Więc, przydając albo ujmując ellipsoidzie warstwy spółśrodkowe jednokładne, nie zmienia się bynajmniej jej działania na punkt wewnętrzny.

Ztąd wynika ważne twierdzenie podane przez Newtona :

Warstwa ellipsoidalna jednorodna, albo złożona z warstewek jednorodnych zawartych między dwiema powierzchniami ellipsoidalnemi spółśrodkowemi jednokładnemi, nie wywiera żadnego działania na punkt leżący wewnątrz jej powierzchni mniejszej.

Tego twierdzenia łatwo dowieśdź geometrycznie. Niech będzie punkt K wewnątrz mniejszej powierzchni warstwy ellipsoidalnej :



poprowadźmy przez ten punkt stożek nieskończenie cienki, i przypuśćmy że rozmiary *mn*, *m′n′* są nieskończenie małe względem rozmiaru *mm′*. W tem założeniu, objętości obydwóch części stożka mają podstawy które mogą być uważane jako proporcyonalne do kwadratów odległości od jego wierzchołka K. Owoż, w ellipsach spółśrodkowych jednokładnych odcinki tej samej siecznej, zawarte między ich obwodami, są równe; zatem objętości dwóch części stożka, mając jeden rozmiar równy, są proporcyonalne do kwadratów tych odległości. Nadto, ponieważ warstwa ellipsoidalna jest jednorodna, albo złożona z warstewek jednorodnych, przyciąganie dwóch części stożkowych w każdej warstewce są równe; a że mają kierunki przeciwne, więc czynią sobie równowagę.

Twierdzenie Newtona stosuje się do elektryczności. W tym przypadku, uważając że grubość warstwy, zawartej między dwiema ellipsoidami spółśrodkowemi jednokładnemi, jest maximum przy wierzchołkach największej ze trzech osi, pojmuje się łatwo że płyn elektryczny, albo działacz elektryczny, gromadzi się w tych wierzchołkach, i temwięcej im ellipsoida jest bardziej wydłużona.

TWIERDZENIA IVOREGO I MAKLAURINA.

168. Umiejąc rozwiązać zagadnienie przyciągania jakie ellipsoida jednorodna wywiera na punkt będący wewnątrz niej, albo na jej powierzchni, można do tego przypadku sprowadzić przyciąganie przez ellipsoidę punktu zewnętrznego Służą ku temu dwa sławne twierdzenia które znać należy. Jedno podał Maklaurin, a dowiódł go tylko w przypadku szczególnym; drugie znalazł Ivory. Damy najpierwej dowodzenie ostatniego, z którego łatwo i ogólnie wywodzi się pierwsze.

Twierdzenie Ivorego. *Przyciągania jakie dwie ellipsoidy spółogniskowe nawzajem wywierają, równolegle do każdej osi, na dwa punkta odpowiedające położone na ich powierzchniach, mają się jako wieloczyny dwóch osi prostopadłych do każdej składowej.*

Niech będą a, b, c pół-osie ellipsoidy jednorodnej która przyciąga punkt zewnętrzny K mający spółrzędne α, β, γ; nazwijmy x, y, z spółrzędne punkta przyciągającego M tej ellipsoidy. Jeśli, nie wyłuszczając ustawy przyciągania, oznaczymy ogólnie przez $F(r)$ przyciąganie wzajemne dwóch jedności massy na odległość r jedna od drugiej, składowa X tego przyciągania wyrazi się przez

$$X = \mu\rho \int\int\int F(r) \frac{x - \alpha}{r} dx dy dz.$$

Owoż,

$$F(r) \frac{x - \alpha}{r} dx = F(r) dr = d.\varphi(r);$$

jeśli więc zcałkujemy względem x, nazywając r_1, r_2 odległości punktu K od punktów które leżą zarazem na powierzchni ellipsoidy i na graniastonie równoległym do osi $x^{ów}$, mającym rzut $dydz$ na płaszczyznie YZ, otrzymamy

$$X = \mu\rho \int\int \left\{ \varphi(r_1) - \varphi(r_2) \right\} dy dz.$$

Wyobraźmy sobie teraz, przechodzącą przez punkt przyciągany K, ellipsoidę spółogniskową z ellipsoidą przyciągającą, i nazwijmy a', b', c' jej pół-osie; składowa X' przyciągania jakie ta idealna ellipsoida, tej samej gęstości ρ co pierwsza, wywiera na punkt K' leżący na powierzchni pierwszej ellipsoidy i odpowiedający punktowi K, ma za miarę

$$X' = \mu\rho \int\int \left\{ \varphi(r'_1) - \varphi(r'_2) \right\} dy' dz'.$$

W tem wyrażeniu x', y', z' oznaczają spółrzędne punktu przyciągającego M' drugiej ellipsoidy, r'_1, r'_2 odległości punktu K' od dwóch punktów leżących zarazem na jej powierzchni i na graniastonie równoległym do osi $x^{ów}$, mającym rzut $dy'dz'$ na płaszczyznie yz. Owoż, nic nie przeszkadza brać za M' punkta takie, żeby punkta skrajne graniastonu całkowania względem x', w składowej X', były odpowiedającemi punktów skrajnych graniastonu całkowania względem x w składowej X; wtedy będzie

$$r'_1 = r_1, \quad r'_2 = r_2, \quad dy'dz' = \frac{b'c'}{bc} dy dz.$$

Więc, jeśli podstawimy te wartości, znajdziemy

$$X' = \mu\rho \int\int \left\{ \varphi(r_1) - \varphi(r_2) \right\} \frac{b'c'}{bc} dydz = \frac{b'c'}{bc} X.$$

Ztąd wnosimy

$$\frac{X}{X'} = \frac{bc}{b'c'}.$$

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{ac}{a'c'},$$

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{ab}{a'b'}.$$

Te trzy równości wyrażają twierdzenie *Ivory*, które, jako widać z dowodzenia, jest niezależne od ustawy przyciągania.

Za pomocą twierdzdnia Ivory, przyciąganie ellipsoidy wywarte na punkt zewnętrzny przywodzi się do przyciągania jakie ellipsoida spółogniskowa, przechodząca przez punkt przyciągany, wywiera na punkt wewnętrzny odpowiedający.

169. *Ważne następstwo twierdzenia Ivory.* Niech będą dwie sfery spółśrodkowe jednorodne, mające promienie a, A; oznaczmy przez P natężenie z jakiem sfera A przyciąga punkt materyalny m leżący na powierzchni sfery a wewnętrznej, przez p natężenie przyciągania jakie sfera a wywiera na punkt A leżący na powierzchni sfery otaczającej A.

Na mocy twierdzenia *Ivory*, będzie

$$\frac{X}{X'} = \frac{A^2}{a^2} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'} = \frac{P}{p};$$

zkąd

$$P = \frac{A^2}{a^2} p,$$

wynik niezależny od ustawy przyciągania. Owoż, jeśli chcemy mieć ustawę przyciągania taką, żeby warstwa sferyczna jednorodna nie wywierała żadnego działania na punkt leżący wewnątrz jej powierzchni mniejszej, trzeba żeby działanie P sfery A na punkt m było niezależne od promienia A; dopełni się tego warunku biorąc

$$p = \frac{C}{A^2},$$

gdzie C jest ilością stałą. W tem założeniu, działanie sfery jakiejkolwiek na punkta zewnętrzne jest w stosunku odwrotnym kwadratów ich odległości od środka tej sfery. A że można przypuścić sferę tak małą jak się podoba, ta sama ustawa przyciągania daje także przyciąganie jakie jeden punkt materyalny wywiera na drugi. Ztąd ważny wniosek:

Jedyna ustawa przyciągania, wedle której warstwa sferyczna jednorodna nie wywiera żadnego działania na punkta leżące wewnątrz jej powierzchni mniejszej, jest ustawa naturalna przyciągania w stosunku odwrotnym kwadratu odległości.

170. Twiedzenie Maklaurina. *Dwie ellipsoidy spółogniskowe jednorodne wywierają na ten sam punkt zewnętrzny działania proporcyonalne do swych mass i w tym samym kierunku.*

To twierdzenie może się wyprowadzić jako następstwo z twierdzenia *Ivorego,* które się stosuje do wszelkiej ustawy przyciągania.

Niech będą X, Y, Z i X′, Y′, Z′ składowe przyciągania punktu zewnętrznego K(α, β, γ) przez dwie ellipsoidy spółogniskowe, mające pół-osie a, b, c i a', b', c'; nazwijmy X_1, Y_1, Z_1 składowe przyciągania jakie trzecia ellipsoida spółogniskowa, mająca pół-osie a_1, b_1, c_1 i przechodząca przez punkt przyciągany K, wywiera na punkt odpowiedający K′ wzięty na pierwszej ellipsoidzie i mający spółrzędne $\frac{a\alpha}{a_1}$, $\frac{b\beta}{b_1}$, $\frac{c\gamma}{c_1}$; nakoniec, oznaczmy przez X_2, Y_2, Z_2 składowe przyciągania punktu K przez tę trzecią ellipsoidę.

Na mocy twierdzenia *Ivorego,* mamy

$$\frac{X}{X_1} = \frac{bc}{b_1c_1}, \quad \frac{Y}{Y_1} = \frac{ac}{a_1c_1}, \quad \frac{Z}{Z_1} = \frac{ab}{a_1b_1}.$$

Owoż, dla każdego punktu wewnętrznego, składowe przyciągania ellipsoidy są proporcyonalne do spółrzędnej równoległej tego punktu (formuły 2); co daje

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\frac{a\alpha}{a_1}}{\alpha} = \frac{a}{a_1}, \quad \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{b}{b_1}, \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{c}{c_1}.$$

Ztąd, mnożąc stronami pierwsze równania przez drugie, wynika

$$\frac{X}{X_2} = \frac{abc}{a_1b_1c_1} = \frac{Y}{Y_2} = \frac{Z}{Z_2}.$$

Ale, wedle ostatnich równań, mamy podobnie

$$\frac{X'}{X_2} = \frac{a'b'c'}{a_1b_1c_1} = \frac{Y'}{Y_2} = \frac{Z'}{Z_2};$$

więc, dzieląc stronami, otrzymujemy

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'} = \frac{abc}{a'b'c'}.$$

Te równania wyrażają twierdzenie *Maklaurina*, które jest prawdziwe dla wszelkiej ustawy przyciągania.

DZIAŁANIE ELLIPSOIDY NA PUNKT ZEWNĘTRZNY.

171. Do wyrachowania składowych przyciągania jakie ellipsoida jednorodna wywiera na punkt materyalny zewnętrzny, użyjemy twierdzenia Ivorego.

Niech będą a, b, c pół-osie ellipsoidy która przyciąga punkt zewnętrzny $K(\alpha, \beta, \gamma)$, i a', b', c' pół-osie ellipsoidy spółogniskowej przechodzącej przez ten punkt. Składowe X', Y', Z' przyciągania jakie ta ostatnia wywiera na punkt odpowiedający $K'(\alpha', \beta', \gamma')$ wyrachowane wedle formuł (2), są

$$X' = -\frac{4\pi f\mu\rho b'c'\alpha}{a'^2}\int_0^1 \frac{u^2du}{\left(1+\frac{b'^2-a'^2}{a'^2}\,.\,u^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{c'^2-a'^2}{a'^2}\,.\,u^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y' = -\frac{4\pi f\mu\rho b'c'\beta'}{a'^2}\int_0^1 \frac{u^2du}{\left(1+\frac{b'^2-a'^2}{a'^2}\,.\,u^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{c'^2-a'^2}{a'^2}\,.\,u^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Z' = -\frac{4\pi f\mu\rho b'c'\gamma}{a'^2}\int_0^1 \frac{u^2du}{\left(1+\frac{b'^2-a'^2}{a'^2}\,.\,u^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{c'^2-a'^2}{a'^2}\,.\,u^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Owoż, z przyczyny że ellipsoidy są spółogniskowe, mamy

$$b'^2 - a'^2 = b^2 - a^2, \qquad c'^2 - a'^2 = c^2 - a^2;$$

jeśli więc położymy

$$\frac{u}{a'} = \frac{v}{a},$$

co daje 0 i $\frac{a}{a'}$ dla granic całkowania względem v, i jeśli potem pomnożymy trzy składowe X', Y', Z' odpowiednio przez $\frac{bc}{b'c'}$, $\frac{ac}{a'c'}$, $\frac{ab}{a'b'}$, uważając że $a'\alpha' = a\alpha$, $b'\beta' = b\beta$, $c'\gamma' = c\gamma$, otrzymamy, na mocy twierdzenia Ivorego, składowe przyciągania jakie dana ellipsoida wywiera na punkt zewnętrzny K. Te składowe będą, zachowując literę u zamiast v,

$$(3)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{4\pi f\mu\rho bc\alpha}{a^2}\displaystyle\int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}} \\[2ex] Y = -\dfrac{4\pi f\mu\rho bc\beta}{a^2}\displaystyle\int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}} \\[2ex] Z = -\dfrac{4\pi f\mu\rho bc\gamma}{a^2}\displaystyle\int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Niewiadoma a' jest jedną z pół-osi ellipsoidy spółogniskowej z daną i przechodzącej przez punkt przyciągany; zatem wyznaczy się wartość a' przez równanie

$$\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{a'^2 + b^2 - a^2} + \frac{\gamma^2}{a'^2 + c^2 - a^2} = 1.$$

To równanie daje zawsze jedną tylko wartość dodatną dla a'^2; bo przez dany punkt jedną tylko ellipsoidę spółogniskową z daną ellipsoidą poprowadzić można (164).

172. Jeśli punkt przyciągany znajduje się na powierzchni ellipsoidy przyciągającej, wtedy $a' = a$, i druga granica całek jest 1; co się zgadza z formułami (2), i sprawdza je w przypadku gdy punkt przyciągany leży na powierzchni ellipsoidy przyciąganej.

Jeśli punkt przyciągany jest wewnątrz ellipsoidy przyciągającej, trzeba uważać samo tylko działanie ellipsoidy spółśrodkowej jednokładnej, przechodzącej przez ten punkt. A że wartości odpowiedające stosunkowi $\frac{bc}{a^2}$ i excentrycznościom λ, λ' w ellipsoidzie jednokładnej są te same co w ellipsoidzie danej, składowe X, Y, Z wyrażają także działanie ellipsoidy na punkt wewnętrzny. Więc formuły (3) obejmują formuły (2), i są ogólne.

173. Powyższe formuły ogólne wyprowadzają się wszystkie trzy z jednej całki która wchodzi do pierwszej. Jakoż, połóżmy

$$\mathrm{F} = \int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2 du}{(1 + \lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}};$$

jeśli zróżniczkujemy tę całkę względem λ, będzie

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\lambda} = -\lambda \int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2 u^2 du}{(1 + \lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Owoż,

$$\frac{u^2}{1+\lambda^2 u^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2(1+\lambda^2 u^2)};$$

podstawiając tę wartość, mamy

$$\lambda\frac{dF}{d\lambda} = -\int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}};$$

zkąd

$$\int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda dF}{d\lambda} + F = \frac{d\,.\,\lambda F}{d\lambda}.$$

Więc

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} X &= -\frac{4\pi f\mu\rho bc\alpha}{a^2} F, \\ Y &= -\frac{4\pi f\mu\rho bc\beta}{a^2}\frac{d\,.\,\lambda F}{d\lambda}, \\ Z &= -\frac{4\pi f\mu\rho bc\gamma}{a^2}\frac{d\,.\,\lambda' F}{d\lambda'}. \end{aligned} \right.$$

Gdy dana ellipsoida jest obrotową, całki elliptyczne które dają przyciąganie przywodzą się do funkcyj kołowych albo logarytmicznych.

174. *Ellipsoida obrotowa spłasczona.* Jeśli $b = c > a$, mamy ellipsoidę obrotową około osi $a^{\text{ów}}$, spłasczoną przy biegunach; wtedy $\lambda' = \lambda$, i składowe przyciągania stają się

$$X = -\frac{4\pi f\mu\rho b^2\alpha}{a^2}\int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2 du^2}{1+\lambda^2 u^2}$$

$$\frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma} = -\frac{4\pi f\mu\rho b^2}{a^2}\int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^2}.$$

le

$$\int_0^u \frac{u^2du}{1+\lambda^2u^2} = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^u du - \frac{1}{\lambda^3}\int_0^u \frac{d.\lambda u}{1+\lambda^2u^2} = \frac{1}{\lambda^3}(\lambda u - \text{łuk sty}\,\lambda u),$$

$$\int_0^u \frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^2} = -\frac{1}{2\lambda^3}\frac{\lambda u}{1+\lambda^2u^2} + \frac{1}{2\lambda^3}\,.\,\text{łuk sty}\,\lambda v.$$

Więc

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} X &= -\frac{4\pi f\mu\rho b^2\alpha}{\lambda^3a^2}\left(\frac{\lambda a}{a'} - \text{łuk sty}\,\frac{\lambda a}{a'}\right),\\ \frac{Y}{\beta} &= \frac{Z}{\gamma} = \frac{2\pi f\mu\rho b^2}{\lambda^3a^2}\left(\text{łuk sty}\,\frac{\lambda a}{a'} - \frac{\lambda aa'}{a'^2+\lambda^2a^2}\right).\end{aligned}\right.$$

Trzeba uczynić $a'=a$, gdy punkt przyciągany leży na powierzchni ellipsoidy albo wewnątrz. Jeśli $\lambda = 0$, ellipsoida staje się sferą, ale formuły (5) biorą kształt $\frac{0}{0}$; wiadomym sposobem znajduje się łatwo prawdziwą wartość, która się zgadza z odpowiedającym przypadkiem przyciągania sfery.

175. *Ellipsoida obrotowa wydłużona.* Jeśli $a = b < c$, ellipsoida jest obrotową około osi $z^{\text{dów}}$, i wydłużoną ku biegunom: wtedy $\lambda=0$, i formuły (3) stają się

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = -\frac{4\pi f\mu\rho c}{a}\int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2du}{(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$Z = -\frac{4\pi f\mu\rho c\gamma}{a}\int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2du}{(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Owoż, mamy

$$\int_0^u \frac{u^2du}{\sqrt{1+\lambda'^2u^2}} = \frac{u\sqrt{1+\lambda'^2u^2}}{2\lambda'^2} - \frac{1}{2\lambda'^3}\log(\lambda'u + \sqrt{1+\lambda'^2u^2})\,;$$

a jeśli, uważając że

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+\lambda'^2u^2}} = \frac{1}{\lambda'}\log(\lambda' u + \sqrt{1+\lambda'^2u^2}),$$

weźniemy pochodnę względem λ', będzie

$$\lambda' \int_0^u \frac{u^2du}{(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\lambda'^2}\log(\lambda' u + \sqrt{1+\lambda'^2u^2}) - \frac{\lambda' u}{\lambda'^2\sqrt{1+\lambda'^2u^2}}.$$

Zatem

$$(6)\left\{\begin{aligned} &\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = -\frac{2\pi f\mu\rho c}{\lambda'^3 a}\left\{\frac{\lambda' a}{a'}\sqrt{1+\frac{\lambda'^2a^2}{a'^2}} - \log\left(\frac{\lambda' a}{a'} + \sqrt{1+\frac{\lambda'^2a^2}{a'^2}}\right)\right\} \\ &Z = -\frac{4\pi f\mu\rho c\gamma}{\lambda'^3 a}\left\{\log\left(\frac{\lambda' a}{a} + \sqrt{1+\frac{\lambda'^2a^2}{a'^2}}\right) - \frac{\frac{\lambda' a}{a'}}{\sqrt{1+\frac{\lambda'^2a^2}{a'^2}}}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Jeśli przypuścimy $c = a$ czyli $\lambda' = 0$, ellipsoida stanie się sferą, wtedy formuły (6) wezmą kształt $\frac{0}{0}$, ale ich prawdziwa wartość, znaleziona wiadomym sposobem, zgadza się z tą która odpowieda uważanemu przypadkowi.

Teorya przyciągań ellipsoid zajmowała najsławniejszych Matematyków, których genialne prace są zaszczytem ludzkiego rozumu.

W niedawnych czasach, PP. Chasles i Lejeune-Dirichlet ogłosili znamienite pamiętniki. Dajemy wyciąg z pracy ostatniego na końcu tomu.

176. Uważajmy teraz przyciąganie jakie wywierają na siebie wzajemnie dwa ciała rozmiarów skończonych. Oznaczmy przez x, y, z spółrzędne jakiegokolwiek punktu pierwszego ciała, przez x', y', z' spółrzędne także jakiegokolwiek punktu drugiego ciała, przez r odległość tych dwóch punktów materyalnych, przez dm, dm' ich massy; składowe wzajemnego przyciągania rzeczonych punktów będą

$$f\frac{x'-x}{r^3}dmdm', \qquad f\frac{y'-y}{r^3}dmdm', \qquad f\frac{z'-z}{r^3}dmdm',$$

Te trzy siły cząstkowe, rozciągnięte do wszystkich punktów materyalnych które składają dwa ciała nawzajem się przyciągające, dadzą składowe wynikowej przyciągań i składowe dwojanu przeniesienia, wyrażone przez sześciórne całki

$$X = f\int\int\int\int\int\int \frac{x' - x}{r^3} dmdm',$$

$$Y = f\int\int\int\int\int\int \frac{y' - y}{r^3} dmdm',$$

$$Z = f\int\int\int\int\int\int \frac{z' - z}{r^3} dmdm',$$

$$L = f\int\int\int\int\int\int \frac{z'x - y'z}{r^3} dmdm',$$

$$M = f\int\int\int\int\int\int \frac{x'z - z'x}{r^3} dmdm',$$

$$N = f\int\int\int\int\int\int \frac{y'x - x'y}{r^3} dmdm'.$$

Jeśli trójmian $LX + MY + NZ = 0$, całe wzajemne przyciąganie przywodzi się do jedynej wynikowej, i oba ciała ciążą jedno ku drugiemu w linii prostej; w przypadku przeciwnym, te dwa ciała będą miały dążność do obracania się jedno około drugiego.

Ale całkowania powyższych równań, nawet w szczególnych przypadkach, przedstawiają wielkie trudności. Musimy więc poprzestać na jednym z najprostszych przykładów, i uważać tylko przyciąganie wzajemne dwóch ciał sferycznych jednorodnych albo złożonych z warstew sferycznych spółśrodkowych jednorodnych. Niech będzie tedy M massa jednej z dwóch sfer i O jej środek, M′ massa drugiej sfery i O′ jej środek. Wiemy (159) że przyciąganie jakie sfera O wywiera na jakikolwiek punkt P′ sfery O′ jest takie samo jak gdyby cała massa M była zjednoczona w jej środku O. Owoż, działanie punktu O mającego massę M na każdy punkt sfery O′ jest równe i przeciwne działaniu każdego z tych punktów na punkt O; zatem wynikowa działań punktu O na wszystkie punkta sfery O′ jest równa i przeciwna wynikowej wszystkich działań punktów tej sfery na punkt O. Ale, jakośmy powiedzieli, przyciąganie sfery O′ wywarte na punkt O jest takie samo jak gdyby cała massa M′ była zjednoczona w jej środku O′. Ztąd wynika że wzajemne przyciąganie dwóch sfer jest to samo co przyciąganie ich środków O, O′ w którychby ich massy M, M′ były zjednoczone; więc to przyciąganie wyraża się poprostu przez $\frac{fMM'}{R^2}$; R znaczy odległość OO′. Co daje twierdzenie

Dwie sfery jednorodne, albo złożone z warstew jednorodnych gęstości jakichkolwiek, których wszystkie punkta przyciągają się proporcyonalnie do mass i w stosunku odwrotnym kwadratów odległości, wywierają jedna na drugą takie samo działanie jak gdyby massa każdej była zjednoczona w jej środku.

Za pomocą szali tarcia, zmierzono ilość przyciągania dwóch sfer, których znano massę i odległość; tym sposobem potrafiono wyznaczyć wartość spółczynnika f, i znaleziono że $f = \frac{341}{10^{10}}$, biorąc metr i kilogram za jedności. (Zobacz *Leçons de Mécanique analytique* par l'Abbé Moigno. Paris 1868.)

DYNAMIKA

RUCH PUNKTU MATERYALNEGO.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

ZASADY I OKREŚLENIA.

177. Po równowadze ciał, w naturalnym porządku przychodzi teorya ich ruchu. Ale kwestya ruchu ciał naturalnych jest wieloraka, i przedstawia różnego rodzaju trudności których przezwyciężyć wszystkich od razu nie można. Aby więc uprościć ze wszech miar zawiłe zagadnienie ruchu, musimy najpierwej przypuścić ciała przywiedzione do pojedyńczych punktów materyalnych, to jest, nie zważając na ich rozmiary, i usuwając niektóre utrudniające okoliczności, wyłożyć teoryę ruchu punktów materyalnych pod działaniem sił które są do nich przyłożone. Nabywszy dokładnej wiedzy ruchu układów idealnych, będziemy dopiero w stanie wyłożyć teoryę ruchu ciał naturalnych w całej rzeczywistości, i przyjść do poznania ustaw tego ruchu. Zresztą, takie widzenie rzeczy jest logiczne i w powszechnem używaniu. Kiedy mówimy że kula rzucona w przestrzeń przebiega linię krzywą, uważamy tę kulę jako punkt materyalny, to jest jakoby była przywiedziona do swojego środka ciężkości w którymby cała jej massa została zkoncentrowana. Wyrażamy się w takim samym sensie, gdy mówimy że ziemia i inne planety opisują ellipsy około słońca. To jasno pokazuje że teorya ruchu punktów materyalnych jest nietylko metodycznie konieczna, ale jeszcze użyteczna przez siebie samą; nią się teraz zajmiemy.

178. Wiedza czasu nie daje się sprowadzić do żadnej wiedzy

prostszej, dlatego też czasu określić nie można. Ale można i trzeba określić równość czasów, aby mieć miarę trwania ruchu. Pojmujemy łatwo że dwa przeciągi czasu sę równe, jeśli dwa tosame ciała, znajdujące się zupełnie w tych samych okolicznościach, przebiegają przestrzenie równe w tych przeciągach. Co ma istotnie miejsce, gdy upuszczamy z jednej wysokości, w dwóch epokach różnych, jedno ciało ciężkie, albo dwa tosame ciała ciężkie; te ciała, pod działaniem ciężkości, spadają w czasach równych na powierzchnię ziemi. Wiedza równości czasów prowadzi do wiedzy stosunku, spółmiernego albo niespółmiernego, dwóch czasów jakichkolwiek. Jednością czasu, ogólnie przyjętą, jest sekunda.

RUCH JEDNOSTAJNY.

179. Ruch punktu materyalnego nazywa się *jednostajnym*, gdy ten punkt przebiega przestrzenie równe w czasach równych, jakkolwiek małe są te czasy. To znaczy że w ruchu jednostajnym drogi przebieżone są proporcyonalne do czasów.

Wszelki ruch który nie jest jednostajny nazywa się *ruchem zmiennym*. Między ruchami zmiennemi trzeba odróżnić *ruch okresowy*, albo okresowo jednostajny, w którym przestrzenie przebieżone w czasach równych są równe; ale te czasy są określone, stałe, i nie mogą być tak małe jak się podoba. Różne ruchy, które się nam wydają jednostajnemi w naturze, są rzeczywiście ruchami jednostajnie okresowemi; jako, naprzykład, chód zwierząt, obrót pozorny słońca około ziemi, posuwanie się skazówek zegaru; etc.

Ruch jednostajny albo zmienny może być prostolinijny albo krzywolinijny. Ruch prostolinijny i jednostajny jest najprostszy ze wszystkich ruchów i służy za wyraz porównania.

180. Ruchy jednostajne różnią się między sobą większą albo mniejszą bystrością albo powolnością każdego z nich. Naturalną miarą stopnia bystrości albo powolności ruchu jest droga którą punkt materyalny przebiega w jedności czasu; tę drogę nazwano *prędkością* tego punktu.

Zatem, *prędkością punktu materyalnego w ruchu jednostajnym jest stosunek przestrzeni przebieżonej do czasu użytego na jej przebieżenie.*

Tak określona prędkość jest liczbą oderwaną, wyrażoną przez stosunek liczb które mierzą przestrzeń przebieżoną i czas. Ale zwykle czas jest uważany jako liczba oderwana, i wtedy *prędkość jest linią*, a trzeba się domyślać *przebieżoną w jednej sekundzie;* ztąd wynika że punkt którego prędkość jest wyrażona liczbą 1 przebiega *jedność* długości w *jedności* czasu.

Widzimy, wedle tych określeń, że liczba wyrażająca prędkość zależy od jedności czasu i od jedności długości; jest ona tem większa im jedność czasu większa, a zaś tem mniejsza im jedność długości większa. Ale stosunek prędkości w dwóch ruchach jednostajnych zostaje stały gdy się zmienia te jedności w stosunku jakimkolwiek. Jakoż, nazwijmy a i a' prędkości dwóch ruchów jednostajnych. Jeśli jedność czasu staje się m razy większa, te prędkości staną się ma i ma', i będzie

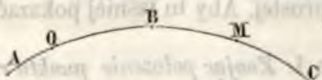
$$\frac{ma}{ma'}=\frac{a}{a'}.$$

Jeśli zaś jedność długości stała się n razy większa, prędkości wyrażą się przez $\frac{a}{n}$ i $\frac{a'}{n}$, i będzie

$$\frac{\frac{a}{n}}{\frac{a'}{n}}=\frac{a}{a'}.$$

Te uwagi o wpływie różnych jedności na prędkość są niezbędnie potrzebne do rozpoznania *jednorodności* formuł Mechaniki.

181. Równanie ruchu jednostajnego. Gdy punkt M porusza się na linii prostej albo krzywej AC, wedle ustawy jakiejkolwiek, jego odległość od punktu stałego O, wziętego za początek na tej linii,



jest funkcyą czasu upłynionego od pewnej ugodnej epoki. Oznaczając przez t ten czas, przez s odległość OM, będzie ogólnie

$$s = f(t); \tag{1}$$

kształt funkcyi $f(t)$ zależy od ustawy ruchu.

To równanie daje w każdej chwili położenie punktu ruchomego M na linii AC, i dlatego nazywa się równaniem ruchu tego punktu.

Owoż, w ruchu jednostajnym, punkt M, przebiegając przestrzeń a w jedności czasu, przebiegnie przestrzeń at w jakimkolwiek czasie t; więc, jeśli oznaczymy przez B położenie punktu M w czasie $t = 0$, i nazwiemy b odległość OB, otrzymamy równanie ruchu jednostajnego

$$s = at + b.$$

Znalezione równanie, *linijne* między s i t, będzie przedstawiało wszelki ruch jednostajny, jeśli ilościom s, a, t, b nadamy znaki *więcej* albo *mniej*, stosownie do przypadku. I tak, ilości b i s są dodatne albo odjemne, wedle położenia punktów B i M z jednej albo z drugiej strony początku O. Prędkość a, która wyraża przestrzeń przebieżoną w jedności czasu, powinna być uważana jako dodatna albo odjemna, według jak kierunek ruchu idzie w jedną stronę albo w stronę przeciwną. Nakoniec, trzeba uważać czas jako dodatny albo odjemny, według jak odpowieda ruchowi odbytemu po umówionej epoce albo przed tą epoką. Tym sposobem, nazywając v prędkość, mamy, do wyrażenia ustawy ruchu jednostajnego, dwa ogólne równania

$$(2) \qquad \begin{aligned} s &= at + b \\ v &= a. \end{aligned}$$

Wszystkie zagadnienia ruchu jednostajnego rozwiązują się za pomocą teoryi linii prostej. Aby to jaśniej pokazać weźmy przykład.

182. Zagadnienie I. *Znając położenie punktu ruchomego w dwóch epokach danych, i wiedząc że jego ruch na linii znanej jest jednostajny, znaleźć równanie tego ruchu.*

Niech będą s', s'' odległości dwóch wiadomych położeń punktu ruchomego M od punktu O, wziętego za początek na linii wiadomej; t', t'' czasy upłynione od chwili *początkowej* aż do chwil odpowiedających tym dwom położeniom.

Mamy ogólne równanie ruchu jednostajnego

$$s = at + b.$$

To równanie powinno się sprawdzać przez ilości wiadome t', t'', s', s''; co daje

$$s' = at' + b \quad \text{i} \quad s'' = at'' + b;$$

ztąd wynika

$$s - s' = a(t - t') \quad \text{i} \quad s' - s'' = a(t' - t'').$$

Więc, dzieląc stronami dwa ostatnie równania, otrzymujemy szukane równanie ruchu

$$s - s' = \frac{s' - s''}{t' - t''}(t - t').$$

Prędkość tego ruchu jest

$$v = \frac{s' - s''}{t' - t''}.$$

183. Zagadnienie II. *Punkt leżący na równiku przebiega w 24 godzinach okrąg którego promień ma 6377946 metrów; jaka jest jego prędkość na sekundę?*

Mamy $s = 2\pi . 6377946^{\mathrm{m}}$ i $t = 86400''$;

więc

$$v = \frac{6377946^{\mathrm{m}} . 2 . 3{,}1415}{86400} = 463^{\mathrm{m}}{,}8.$$

184. Nim pójdziemy dalej, wyłożymy najpierwej dwie główne zasady, to jest *zasadę bezwładności materyi, i zasadę równości działania i oddziaływania*; na właściwem miejscu wskażemy *zasadę niezależności ruchu względnego od ruchu spólnego*. Te albowiem trzy zasady są fundamentami Dynamiki. A chociaż samem rozumowaniem dowieśdź ich nie można, a przynajmniej dotąd nie potrafiono, i żadne doświadczenie wprost tych zasad nie ustaliło, ciągła zgoda teoryi na nich opartej z naturalnemi zjawiskami, jest dostatecznem zapewnieniem ich prawdziwości.

Pierwsza zasada. — Bezwładność materyi. *Punkt materyalny w spoczynku nie może sam sobie nadać ruchu, ani mając ruch zmienić jego ustawy; tak że, będąc raz w spoczynku zostawałby w nim zawsze, a będąc raz w ruchu poruszałby się jednakowo, gdyby żadna przyczyna zewnętrzna na niego nie działała.*

Ta własność materyi, być bezwładną, odróżnia ją od jestestw żyjących które posiadają samodzielność i poruszają się własnowolnie.

Wyraz *bezwładność* nie powinien nigdy być rozumiany w znaczeniu *niemoc*. Bezwładność nie wyraża bynajmniej żeby materya nie była zdolna działania; wiemy albowiem że wiele sił pochodzi właśnie z działania jakie cząstki materyalne wywierają jedne na drugie. Ale, jeśli jest widoczne że jedno ciało może mieć w drugiem siłę która mu ruch nadaje, albo jego ruch modyfikuje, to niemniej oczywiste że żaden punkt materyalny nie posiada w sobie samym przyczyny własnego ruchu, chociaż może działać na inny punkt materyalny jako przyczyna ruchu. Jeśli więc punkt materyalny porusza się w przestrzeni, a żadna siła zewnętrzna na niego nie działa, jego ruch musi być prostolinijny i jednostajny. Bo rzeczywiście niema żadnej przyczyny, żeby ten punkt ruchomy zmieniał kierunek odebranego ruchu raczej w jedną stronę niż w drugą, albo jego prędkość przeinaczał. Wprawdzie tak się nam rzeczy nie przedstawiają w naturze; ruchy które dajemy ciałom na powierzchni ziemi zwolniają się stopniowo, i nakoniec ustają; zdaje nam się nawet że ciała zatrzymują się same z siebie. Jednakże, przypatrzywszy się bliżej, spostrzegamy zaraz że, jeśli te ruchy, wszczęte na powierzchni ziemi, ustają po pewnym czasie, to dlatego że na nie działają siły których usunąć nie możemy. I tak, ciężkość, tarcie, opór powietrza, i t. d. wpływają na wszystkie ruchy ciał ziemskich, i niszczą ich prędkość. Widzimy nadto że, gdy ciało, ile można wolne, odebrało popęd, to przez pewny czas zachowuje ruch jednostajny i w linii prostej, a ten ruch trwa tem dłużej im przeszkody które się mu opierają są mniejsze. Takim jest naprzykład ruch kuli toczącej się na płaszczyźnie poziomej, dobrze wygładzonej. Ta płaszczyzna niszczy działanie ciężkości; a im mniejsze przeciwstawi tarcie, tem dłużej kula zachowuje odebrany ruch jednostajny i prostolinijny. Ztąd logicznie wnieść możemy że, gdyby punkt ruchomy, niepodległy żadnej sile, odebrał popęd i nie spotykał żadnej przeszkody, jego ruch byłby jednostajny i prostolinijny.

Bezwładność pokazuje się wydatnie w różnych zjawiskach. I tak, moździeż nabity zawiera bombę do której jest przywiązany powróz, a część tego powrozu leżąca na ziemi ma ze dwadzieścia metrów długości. Dają ognia, bomba wylata i powróz się urywa. Dlatego że część powrozu zostająca na ziemi zachowała swój stan spoczynku.

Osoba stoi na statku który płynie jednostajnie; jeśli statek uderzy o jaką zawadę, ta osoba zostaje jakoby pchnięta *naprzód*, w stronę ruchu; i może nawet być gwałtownie obalona, na mocy prędkości nabytej którą zachowuje.

Jeśli zaś osoba stoi na statku który jest w spoczynku, a statkowi raptem nadano ruch, osoba zostaje pchnięta *wtył*, właśnie z przyczyny *prędkości zero* którą ma w tej chwili.

Wysiadając z powozu, podczas gdy on jeszcze w ruchu, jeśli się go nie trzymamy możemy upaśdź w stronę ruchu; bo, w chwili gdy nasze stopy zatrzymają się przez zetknięcie z ziemią, ciało posiada jeszcze prędkość którą miało spólną z powozem.

Tym sposobem, gdy koń zatrzymuje się nagle w biegu, niedoświadczony jeździec który na nim siedzi upada na jego szyję.

Tak samo, gdy okręt w biegu uderza o skopuł, jego maszty zachowując nabytą prędkość łamią się.

Na bezwładności opiera się sposób osadzenia siekiery na toporzysku. Włożywszy właściwy koniec toporzyska w siekierę, uderza się żywo drugim końcem o jaką twardą zawadę, o mur. Siekiera, która nabyła prędkości toporzyska, posiada ją jeszcze gdy toporzysko się zatrzymuje ; zbliża się więc do muru przez całą krótką chwilę w której toporzysko już w spoczynku. Tym sposobem toporzysko wbija się coraz więcej w siekierę.

185. Druga zasada. Równość działania i oddziaływania. Oto na czem polega ta zasada spostrzeżona przez Newtona.

Jeśli na punkt materyalny A *działa siła wypływająca z punktu materyalnego* B, *to nawzajem z punktu* A *wypływa siła która działa na punkt* B. *Te dwie siły mają kierunek linii prostej* AB, *są sobie równe i wprost przeciwne ; jedna z nich sprawia działanie a druga oddziaływanie.*

Przeciwieństwo działania i oddziaływania nie pokazuje w którą stronę punkta A i B nabierają dążności do ruchu. Skutek zobopólnego działania tych dwóch punktów materyalnych może być taki sam jak gdyby między niemi było wzajemne przyciąganie, albo wzajemne odpychanie; w pierwszym przypadku oba punkta zbliżają się do siebie, w drugim się oddalają.

Magnes w położeniu stałem przyciąga żelazo ruchome, na przykład zawieszone na nici ; a jeśli przeciwnie magnes jest ruchomy a żelazo w położeniu stałem, oddziaływanie żelaza przyciąga magnes. Jeśli zaś magnes i żelazo są oba ruchome, na przykład oba zawieszone, albo oba pływające na czółenkach, wtedy każdy z nich przyciąga drugi.

Gdy osoba ciągnie sznurek przywiązany do gwoździa utkwionego w murze, ten gwóźdź oddziaływa przez sznurek na jej rękę ; i to oddziaływanie może ją skaleczyć, jeśli działanie przejdzie pewną granicę.

Osoba stojąca na desce opartej w obydwóch końcach na słupkach; jeśli chce podskoczyć, wznosi się na palcach stóp, i szybkim ruchem z góry na dół pcha nogami deskę która, pod tem *działaniem,* ugina się najpierwej; ale zaraz potem *oddziaływa* i odpycha osobę z dołu do góry, nadając jej żądaną prędkość.

Człowiek swoim chodem, na gruncie poziomym, rozwija dwa działania; jedno poziome, powstające wtedy tylko gdy ciężar człowieka sprawia na gruncie dostateczne tarcie które wstrzymuje idącego od pośliznięcia się wtył; drugie działanie jest pionowe. Dwa oddziaływania, przeciwne tym dwom działaniom, pchają człowieka naprzód i jakoby go podnoszą.

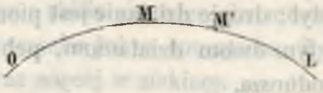
Działanie poziome staje się widocznem gdy człowiek wykonywa chód na lekkim wózku, stojącym na gruncie gładkim. Ten wózek toczy się w stronę przeciwną chodu.

186. Prędkość w ruchu zmiennym. W ruchu zmiennym przestrzenie przebieżone przez punkt materyalny nie są proporcyonalne do czasów użytych na ich przebieżenie; nie można więc określać prędkości mówiąc, jako w ruchu jednostajnym, że jest przestrzenią przebieżoną w jedności czasu; bo ta przestrzeń nie jest ta sama w każdej jedności czasu. Owoż, na mocy tego co poprzedza, punkt materyalny, mający ruch zmienny, musi być ciągle pod działaniem jednej siły albo kilku sił różnych; bo inaczej jego ruch byłby jednostajny. Żeby wiedzieć co należy nazywać prędkością w ruchu zmiennym, wyobraźmy sobie że siła sprawiająca ten ruch przestaje działać w pewnej chwili, od której poczynając, ruch punktu staje się jednostajnym i prostolinijnym. Otoż, *nazywa się prędkością punktu ruchomego, na końcu czasu* t, *prędkość ruchu jednostajnego jakiby ten punkt miał gdyby siła poruszająca działać przestała.*

To określenie prędkości punktu w ruchu zmiennym jest ogólne, niezależne od przebieżonej drogi; albowiem, w chwili gdy siła poruszająca działać przestaje, jakąkolwiek ruchomy punkt przebiegł linię, prostą albo krzywą, oddala się od niej ruchem jednostajnym w kierunku linii prostej.

W ruchu zmiennym i krzywolinijnym, prędkość zmienia się sposobem ciągłym co do wielkości i kierunku. Bo wszystkie dostrzegania zjawisk naturalnych dowodzą że nie istnieje żadna siła któraby mogła, w niepodzielnej chwili, zmienić nagle wielkość albo kierunek prędkości ciała. Nic w naturze nie przechodzi raptem z jednego położenia w drugie. « *Natura non facit saltus* » powiedzieli Starożytni.

187. Wyrażenie analityczne prędkości. Niech będzie M punkt materyalny który się porusza na linii jakiejkolwiek OL, ruchem



zmiennym. Nazwijmy s jego odległość OM od początku O łuków, i t czas, liczony od pewnej epoki, na końcu którego ten punkt ma położenie M; oznaczmy przez v, v' jego prędkość w położeniach M, M', i przypuśćmy że przebiega przestrzeń $MM' = \Delta s$ w czasie Δt. Można zawsze wziąć czas Δt dość krótki, i temsamem przyrost Δs dość mały, żeby od M do M', prędkość punktu ruchomego była ciągle rosnąca albo malejąca. Dla utkwienia myśli, przypuśćmy prędkość rosnącą. W tem założeniu, przestrzeń Δs, którą punkt przebiega w czasie Δt ruchem zmiennym, jest większa od przestrzeni $v\Delta t$, którąby przebiegł w tym samym czasie ruchem jednostajnym i z prędkością v; ponieważ v jest najmniejsza ze wszystkich prędkości w czasie Δt. Ale przeciwnie, przestrzeń Δ jest mniejsza od przestrzeni $v'\Delta t$, którąby ten punkt przebiegł w czasie Δt ruchem jednostajnym i z prędkością v' największą jaką ma w tym czasie. Będzie zatem

$$v\Delta t < \Delta s < v'\Delta t$$

albo

$$v < \frac{\Delta}{\Delta t} < v.$$

Owoż, łuk s jest funkcyą ciągłą czasu t, a gdy Δt dąży do zera v' zbliża się coraz bardziej do v'; więc

$$(3) \qquad v = \text{gr.}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Gdyby prędkość zmienna była ciągle malejąca w czasie Δt, otrzymanoby ten sam wynik; dość tylko przewrócić znaki nierówności w powyższych wyrażeniach.

Formuła (3) jest ogólna, i daje prędkość wszelkiego ruchu tak jednostajnego jak zmiennego.

Jeśli

$$s = f(t)$$

jest równaniem ruchu, punktu materyalnego, prędkość tego ruchu wyraża się przez pochodnę

$$v = f'(t).$$

Ruch punktu na linii OL może się odbywać w stronę łuków s dodatnych, albo w stronę przeciwną; w pierwszym przypadku stosunek $\frac{ds}{dt}$ jest dodatny, w drugim odjemny. Jeśli więc będziemy uważali prędkość za dodatną gdy punkt porusza się w stronę łuków dodatnych, a za odjemną gdy idzie w stronę łuków odjemnych, formuła (3) wyznaczy prędkość tego punktu i stronę jego ruchu.

RUCH PROSTOLINIJNY.

188. Najmniej trudny do pojęcia w swoich własnościach jest ruch prostolinijny, do którego wszystkie inne ruchy przywieśdź się mogą. Będziemy się teraz zajmowali takim ruchem, i, przypuszczając że punkt M porusza się na linii prostej X'X, wedle ustawy jakiejkolwiek, nazwiemy x jego odległość OM względem początku O wziętego na tej linii.

Jeśli równanie ruchu jest dane przez funkcyę *wywikłaną* czasu

$$x = f(t),$$

prędkość punktu ruchomego będzie $v = f'(t)$;

a jeśli równanie jest funkcyą *uwikłaną* czasu $\varphi(x, t) = 0$,

wtedy $\quad \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dt}dt = 0, \quad$ zkąd $\quad \frac{dx}{dt} = v = -\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{d\varphi}{dx}}.$

Nawzajem, gdy równanie między prędkością i czasem jest dane, na przykład $v = F(t)$, zkąd $dx = F(t)dt$; wtedy całkując ostatnie równanie będzie

$$x = \int F(t)dt + C.$$

Wyznaczy się stateczną dowolną C, jeśli jest wiadome położenie punktu ruchomego na linii X'X w czasie określonym, na przykład w czasie $t = 0$.

189. Ruch jednostajnie zmienny. Tem nazwiskiem mianuje się ruch, najprostszy z ruchów zmiennych, w którym prędkość zmienia się jednostajnie, to jest tak że jej przyrosty są proporcyonalne do czasów.

Niech będzie v_0 prędkość początkowa, v prędkość na końcu czasu t; przyrost prędkości po czasie t, jest $v - v_0$; zatem, na mocy określenia, będzie

$$\frac{v - v_0}{t} = j$$

gdzie j jest ilością stałą. Ztąd wynika

$$v = jt + v_0, \tag{4}$$

To równanie pokazuje że w ruchu jednostajnie zmiennym prędkość rośnie ilościami proporcyonalnemi do czasu.

Równanie (4) jest to samo co

$$\frac{dx}{dt} = jt + v_0;$$

zkąd, całkując, otrzymujemy

$$x = \frac{1}{2}jt^2 + v_0t + x_0, \tag{5}$$

równanie ruchu jednostajnie zmiennego w linii prostej; x_0 oznacza odciętę położenia w którem się punkt ruchomy znajduje na początku czasu t.

Przyspieszenie. Ilość j, wyrażająca *przyrost prędkości w jedności czasu* nazywa się *przyspieszeniem*. W ruchu jednostajnie zmiennym przyspieszenie równa się stosunkowi przyrostu prędkości do czasu. Zatem przyspieszenie gra względem prędkości taką samą rolę jaką prędkość gra względem drogi przebieżonej. Przyspieszenie może być dodatnie albo odjemne; co dowodzi tylko że prędkość może rosnąć albo maleć algebrycznie; ale to bynajmniej nie znaczy żeby istotnie było przyspieszenie ruchu albo opóźnienie raczej w jednym przypadku niż w drugim. W obydwóch przypadkach ruch jednostajnie zmienny nazywa się ogolnie *ruchem jednostajnie przyspieszonym*, chociaż w rzeczywistości może być jednostajnie *opóźniony*.

Uwaga. Różniczkując równanie (4) albo (5), znajdujemy

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

W dalszym ciągu dzieła zobaczymy ważność tego wyniku.

190. Za pomocą równań (4) i (5) można dowieśdź niektórych własności ruchu jednostajnie przyspieszonego. Ograniczymy się na następującej.

Rugując j otrzymujemy

$$\frac{x - x_0}{t} = \frac{v + v_0}{2}.$$

To znaczy że, *w ruchu jednostajnie przyspieszonym, prędkość średnia punktu ruchomego w czasie* t *jest średnią arytmetyczną jego prędkości wziętej na początku i na końcu tego czasu.*

191. Zwykle uproszcza się równania (4) i (5), przypuszczając że prędkość początkowa v_0 jest zero, i licząc przestrzeń od punktu od którego się ruch zaczyna; wtedy

$$(6) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} jt^2, \\ v = jt. \end{cases}$$

Czyniąc w pierwszem równaniu $t = 1$, widzimy że, *w ruchu jednostajnie zmiennym, przyspieszenie równa się dwa razy wziętej drodze przebieżonej w pierwszej sekundzie.*

Ciała ciężkie przedstawiają przykład tego ruchu gdy, zostawione samym sobie, spadają w próżni bez prędkości początkowej. Oznaczając w tym razie przyspieszenie przez g i zastępując j przez g w formułach (6), mamy równania ruchu i prędkości

$$x = \frac{1}{2} gt^2$$

$$v = gt.$$

Doświadczenie, wykonane na przykład za pomocą machiny *Atwooda*, pokazuje że ten ruch odbywa się prawie dokładnie wedle teoryi. W Paryżu przyspieszenie g ma wartość

$$g = 9^{\text{m}},8088$$

biorąc metr za jedność długości i sekundę za jedność czasu.

Jeśli wyrugujemy t między dwoma powyższemi równaniami, znajdziemy

$$v = \sqrt{2gx}.$$

Ta formuła daje, jako się mówi, *prędkość należną wysokości* x.

Siły ciągłe, siły chwilowe, siły stałe albo zmienne.

192. Przypuszczano dawniej istnienie dwóch gatunków sił, jedne które, działając przez czas mniej więcej długi, dają prędkość skończoną ale tylko w czasie skończonym, mianowano *siłami ciągłemi*, jako ciężkość, przyciąganie; drugie które, działając jedną tylko chwilę, wydają niejako odrazu prędkość skończoną, nazywano *siłami chwilowemi,* takiemi są uderzania. Głębsze dostrzeganie zjawisk przekonało że siły chwilowe, działające raptem, nie istnieją w naturze. I w samej rzeczy, żadna siła, chybaby nieskończenie wielka, nie

może nadać ciału prędkości skończonej, w czasie nieskończenie małym czyli w jednej chwili. Zaiste, siły uderzeń mogą być bardzo potężne i nadawać wielkie prędkości, ale niezawodnie działają w czasie skończonym, który zwykle jest zanadto krótki aby go ocenić zdołano. Dzisiaj powszechnie uważają tylko siły ciągłe, chociaż jeszcze nazywają siły uderzeń siłami chwilowemi.

Nazywa się *siła stała* ta która wywiera zawsze to samo działanie na punkt materyalny do którego jest przyłożona, jakakolwiek jest ustawa ruchu tego punktu. A siła której działanie zmienia się z czasem, której natężenie jest różne co chwila, ma imie *siły zmiennej*. Ta zmiana czyto wielkości czy też kierunku siły odbywa się, jakośmy już powiedzieli, sposobem ciągłym. Znajomość siły zmiennej przypuszcza że jest wiadoma ustawa wedle której ta siła rośnie albo maleje z czasem; tak że, oznaczając przez P natężenie siły, przez $f(t)$ funkcyę czasu, mamy, do wyrażenia działania siły w każdej chwili, równanie $P = f(t)$.

193. *Siły wewnętrzne, siły zewnętrzne.* Każdemu działaniu towarzyszy oddziaływanie równe i przeciwne; ale siły które je wydają nie wchodzą zawsze obie razem do jednego zagadnienia mechaniki, i dlatego nie zawsze obie są do uważania. Ztąd potrzeba rozróżnienia dwóch gatunków sił. Przypuśćmy w tym celu że punkt materyalny A jest jednym z punktów stanowiących układ materyalny którym się zajmujemy; jeśli drugi punkt materyalny B należy także do tego samego układu, siła która działa na punkt A i wypływa z punktu B jest *siła wewnętrzna*. Jeśli zaś punkt B nie jest częścią układu materyalnego którym się zatrudniamy, wtedy siła pochodząca z punktu B i przyłożona do punktu A jest *siłą zewnętrzną*.

Jedna i ta sama siła może grać jużto rolę siły wewnętrznej już też rolę siły zewnętrznej, według przypadku. I tak, jeśli uważamy na przykład ruch ciała spadającego na ziemię, przyciąganie którego jedna z jego cząstek doznaje od jakiejkolwiek cząstki ziemi jest siłą zewnętrzną; a przeciwnie, jeśli uważamy ruch układu utworzonego z całej ziemi i z ciał znajdujących się na jej powierzchni albo w sąsiedztwie, to samo przyciąganie jest siłą wewnętrzną.

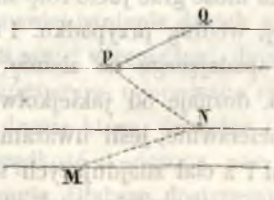
Siły wewnętrzne mogą czasem znikać w równaniach mechaniki.

Jakoż, jeśli zrzutujemy na jednej osi wszystkie siły działające na punkta danego układu, w summie algebrycznej rzutów nie figurują siły wewnętrzne; albowiem, będąc równe po dwie i wprost przeciwne, mają rzuty na tej osi równe i znaków przeciwnych które się niszczą. Wprawdzie każdej sile zewnętrznej odpowieda także siła równa i przeciwna; ale ta siła, nie będąc przyłożona do żadnego z punktów których uważamy równowagę albo ruch, nie wchodzi do równań których szukamy.

194. Trzecia zasada. Niezależność ruchu względnego od ruchu spólnego. Ruch punktu materyalnego odniesiony do punktów które są także w ruchu, nazywa się ruchem pozornym albo *względnym*; ruch rzeczywisty tego punktu w przestrzeni jest *ruchem samoistym.*

Między siłą która działa na punkt materyalny i przyspieszeniem wynikającem z jej działania istnieje oczywiście związek. Ale ten związek opiera się na zasadzie niezależności ruchu względnego od ruchu spólnego, której dowieśdź samem rozumowaniem, jakośmy już powiedzieli, nie zdaje się rzeczą możebną; przedstawia się ona jako czyn nabyty doświadczeniem i sprawdzający się ścisłą zgodą swoich następstw z postrzeganemi zjawiskami. Oto wysłowienie zasady:

Jeśli punkta materyalne M, N, P, Q *poruszają się w przestrzeni, wedle linij prostych równoległych, z prędkością stałą albo zmienną, ale spólną wszystkim w każdej chwili tak że się zdają tworzyć układ niezmienny, i jeśli jeden z tych punktów, jako* M, *zostaje poddany sile która nie działa na inne; wtedy ruch względny punktu* M, *w porównaniu z innemi punktami, będzie taki sam jak gdyby ruch spólny nie istniał a punkt wychodził ze spoczynku pod działaniem tej samej siły.*



Tym sposobem na statku, który płynie ruchem jednostajnym, wszystkie ruchy względne które wykonywamy, albo nadajemy ciałom mającym razem z nami ruch spólny, są zupełnie takie same jak gdyby statek był w spoczynku.

Z zasady niezależności ruchu względnego od ruchu spólnego wynika ważne następstwo :

Jeśli punkt materyalny, mający prędkość nabytą, zostaje poddany sile działającej w stronę jego ruchu, ta siła nada punktowi, po pewnym czasie, przyrost prędkości równy właśnie prędkości którąby mu udzieliła, w tym samym czasie, gdyby wychodził ze stanu spoczynku.

Jakoż, niech będzie punkt materyalny M, poruszający się jednostajnie na linii prostej z prędkością v. Przypuśćmy że, w czasie θ który następuje po czasie t, siła P wywiera na ten punkt działanie skierowane w stronę jego ruchu; oznaczmy przez ξ przestrzeń którąby punkt przebiegł pod działaniem siły gdyby wychodził ze stanu spoczynku, i przez $u = \frac{d\xi}{d\theta}$ prędkość którejby nabył w tym samym czasie. To uczyniwszy, uważajmy jednocześnie punkta M, N, P, Q które się poruszają jednostajnie z prędkością v na jednej prostej, albo na prostych równoległych. Każdy z tych punktów przebiega w czasie θ przestrzeń $v\theta$. Owoż, na mocy zasady niezależności ruchu względnego, punkt M, do którego samego tylko jest przyłożona siła P, wyprzedzi ilością ξ wszystkie inne punkta idąc w stronę ich ruchu; więc punkt M przebiegnie w czasie θ przestrzeń

$$v\theta + \xi.$$

Ztąd wynika że prędkość punktu M na końcu czasu θ będzie

$$\frac{d}{d\theta}.(v\theta + \xi) = v + \frac{d\xi}{d\theta} = v + u.$$

Co dowodzi że siła P, działająca na punkt M w ruchu, powiększa jego prędkość nabytą v ilością u równą właśnie prędkości jakąby mu nadała gdyby wychodził ze stanu spoczynku.

Pojmujemy łatwo że, jeśli punkt M, mający prędkość nabytą v, jest poddany sile P która działa w stronę przeciwną jego ruchu, ta prędkość zmniejszy się ilością u, to jest stanie się $v-u$ na końcu czasu θ.

To wszystko razem dowodzi że

Skutek działania siły na punkt materyalny w ruchu jest niezależny od prędkości poprzednio nabytej.

Ten wniosek jest przyjęty przez wielu autorów jako postulatum, i uważany za jedną z ustaw Dynamiki.

Przypuśćmy teraz że na punkt M, mający prędkość v, działają dwie siły P, P' na końcu czasu t, w kierunku ruchu i przez czas θ; przypuśćmy jeszcze że ten punkt wychodząc ze spoczynku, pod działaniem samej siły P, przebiegłby przestrzeń ξ i nabyłby prędkości $u=\frac{d\xi}{d\theta}$, a pod działaniem siły P' przebiegłby przestrzeń ξ i nabyłby prędkość $u'=\frac{d\xi'}{d\theta}$. To założywszy, wyobraźmy sobie że na końcu czasu t, wychodzą z położenia M dwa punkta materyalne, mające oba prędkość v, jeden poddany sile P, drugi dwom siłom P i P' jednocześnie działającym. Pierwszy przebiegnie w czasie θ przestrzeń $v\theta+\xi$; drugi, w tym samym czasie, na mocy zasady niezależności ruchu względnego, wyprzedzi pierwszy ilością ξ'. Ztąd wynika że punkt M, mający prędkość v i poddany działaniu jednoczesnemu dwóch sił P, P', albo działaniu jednej siły równej ich summie P + P', przebiegnie przestrzeń

$$v\theta+\xi+\xi'$$

w czasie θ. Więc, na końcu tego czasu, jego prędkość będzie

$$v+\frac{d\xi}{d\theta}+\frac{d\xi'}{d\theta}=v+u+u'.$$

Jeśli P = P' przyrost prędkości będzie $2u$.

Podobnem rozumowaniem dowiedzie się że siła P — P' nadaje punktowi M w czasie θ przyrost prędkości wyrażony przez $u-u'$.

Ztąd wnieść należy że działanie jednoczesne dwóch sił w tym samym kierunku, na jeden punkt materyalny udziela jego prędkości przyrost niezależny od prędkości nabytej, i równy summie dwóch prędkości któreby ten punkt pobrał gdyby, w stanie spoczynku, był kolejno poddany działaniu każdej z dwóch sił przez czas θ.

To twierdzenie przyjęte przez jednych jako postulatum, przez drugich jako wynik doświadczenia, stanowi ZASADĘ albo raczej USTAWĘ *niezależności skutków sił działających na jeden punkt materyalny*. Rzeczona ustawa jest to samo w gruncie co przyjęta zasada niezależności ruchu względnego od ruchu spólnego, i tak się ogólnie wysłowia:

Gdy kilka sił działa na ten sam punkt materyalny, każda z nich sprawia taki sam skutek jak gdyby działała sama jedna.

Z tego cośmy dotąd wyłożyli widać jasno że siła, stała z wielkości i kierunku, działająca na punkt materyalny w ruchu, powiększa albo zmniejsza jego prędkość ilościami proporcyonalnemi do czasu; daje więc przyspieszenie stałe, to jest nadaje temu punktowi ruch jednostajnie przyspieszony i prostolinijny.

WAŻNA UWAGA. Przyjęliśmy jako *pewniki* trzy fundamentalne zasady na których opiera się cała Mechanika rozumowa.

PIERWSZA ZASADA. *Bezwładność materyi.*

DRUGA ZASADA. *Równość działania i oddziaływania.*

TRZECIA ZASADA. *Niezależność skutków sił działających na jedno ciało.*

Te zasady nie są przez się oczywiste, ale ich pewność nie podlega wątpliwości, bo ustawy materyalnego świata niezaprzeczalnie je potwierdzają.

195. PROPORCYONALNOŚĆ SIŁ DO PRZYSPIESZEŃ. Przypuśćmy że punkt materyalny M, bez prędkości początkowej bierze ruch, pod działaniem siły P stałej z natężenia i kierunku; nazwijmy j przyspieszenie tego ruchu który będzie jednostajnie przyspieszony i prostolinijny. Nazwijmy tak samo j' przyspieszenie ruchu który ten sam punkt M weźmie w tych samych okolicznościach, pod działaniem

siły P' także stałej z natężenia i kierunku. Znając ustawę niezależności skutków sił, łatwo okazać że siły stałe P, P' są proporcyonalne do przyspieszeń j, j'.

Jakoż, jeśli siły P, P' są spółmierne, niech będzie siła f ich spólną miarą, tak że $P = nf$ i $P' = n'f$; n i n' są liczby całkowite. Nazwijmy k przyspieszenie które siła f, działająca sama nadałaby punktowi materyalnemu M; na mocy ustawy niezależności skutków sił, n sił f które składają siłę P dadzą przyspieszenie wyrażone przez nk, i będzie $j = nk$; tak samo, siły f w liczbie n', składające siłę P' dadzą przyspieszenie $j' = n'k$. Więc

$$\frac{P}{P'} = \frac{n}{n'} = \frac{j}{j'}.$$

Jeśli siły P, P' są niespółmierne, można zawsze wyobrazić siłę P'' spółmierną z siłą P i tak mało różną od siły P' jak się podoba. Nazywając j'' przyspieszenie siły P'', będzie

$$\frac{P}{P''} = \frac{j}{j''};$$

więc

$$\text{gr.}\frac{P}{P''} = \text{gr.}\frac{j}{j''} \quad \text{albo} \quad \frac{P}{P'} = \frac{j}{j'}. \tag{7}$$

Zostaje tym sposobem dowiedzione że siły stałe mają się jako przyspieszenia jakie nadają temu samemu punktowi materyalnemu, działając na niego każda osobno.

Ta proporcya, stanowiąca główne twierdzenie Dynamiki, sprawdza się łatwo przez doświadczenie. I tak, wiadomo że ciężkość nie ma tego samego natężenia w różnych miejscach powierzchni ziemi, i że ciężar ciała zmienia się z jednego miejsca na drugie, w stosunku natężeń tej siły. Otoż, doświadczenie pokazuje właśnie że, gdy ciało spada w tych różnych miejscach, stosunek jego ciężarów jest równy stosunkowi przyspieszeń.

196. Massy punktów materyalnych. Niech będzie ciało położone

na płaszczyźnie poziomej, mogące się na niej poruszać bez tarcia, albo, mówiąc ściślej, z tarciem bardzo małem. Jeśli chcemy dać ruch temu ciału, musimy wydobyć z siebie pewne wysilenie; a jeśli do jednego ciała dołączymy drugie, trzecie, i t. d., i zechcemy układowi dwóch, trzech,... ciał nadać ten sam ruch co pierwszemu ciału, musimy wydać coraz większe wysilenie. Jednakże materya nie przeciwstawi żadnego oporu do ruchu, i najmniejsza siła zdolna ją w ruch wprowadzić, byle nie było zewnętrznej przeszkody. I tak, jeśli ciało jest zawieszone na jednym końcu sznurka którego drugi koniec został utkwiony, bardzo mała siła może mu ruch nadać; chociaż w tym stanie ciało nie jest zupełnie wolne, albowiem siła ciężkości i sztywność sznurka zawadzają ruchowi. Gdy poruszamy jakie ciało, mamy uczucie wysilenia, i zdaje nam się że to ciało opiera się ruchowi. Ale wiemy że, na mocy zasady równości działania i oddziaływania, ciało któremu ruch nadajemy wywiera na nas oddziaływanie równe i przeciwne naszemu działaniu; otoż właśnie to oddziaływanie sprawia nam uczucie wysilenia którego doznajemy, biorąc je mylnie za opór materyi.

Ztąd, że trzeba większego albo mniejszego wysilenia aby nadać ten sam ruch różnym ciałom, wnieść należy że te ciała nie zawierają téj samej ilości materyi. Tak przychodzimy do wiedzy *massy* ciała.

Mówi się że dwa punkta materyalne mają massy równe, gdy poddane kolejno działaniu tej samej siły odbierają od niej to samo przyspieszenie. Ze zjednoczenia dwóch, trzech,... punktów materyalnych, mających równe massy, tworzy się punkt materyalny którego massa jest podwójną, potrójną,... massy każdego z nich. Pojmujemy tym sposobem punkta materyalne mające massy wielowne.

197. Proporcyonalność sił do mass. Niech będą dwie siły P, P' które, działając na dwa punkta materyalne mające massy m, m', udzielają im to samo przyspieszenie. Przypuśćmy że te dwa punkta materyalne wynikają ze zjednoczenia punktów materyalnych mających massę μ, i niech pierwszy zawiera n tych punktów, drugi n'; będzie

$$m = n\mu, \quad m' = n'\mu.$$

Rozłóżmy siłę P na n sił f, i siłę P' na n' sił f', tak żeby było

$$P = nf, \qquad P' = n'f'.$$

Jeśli teraz do n punktów materyalnych które składają punkt mający massę m, przyłożymy siły f równe i równoległe, jedną do każdego, te punkta wychodzące ze spoczynku przebiegną w tym samym czasie, i z prędkością spólną, linie proste równe i równoległe. Zatem, nic się nie zmieni w ruchu wszystkich razem punktów, jeśli je przypuścimy połączone między sobą tak żeby stanowiły układ bryłowy; ponieważ te punkta, nie rozdzielając się w ruchu kiedy są wolne, tworzą już same z siebie układ niezmienny. Tym sposobem będzie tylko jeden punkt materyalny mający massę m. Z drugiej strony, wszystkie siły f, równe i równoległe działające w jedną stronę, mogą być zastąpione przez wynikowę P, która jest równa ich summie, równoległa do ich kierunku, i przyłożona do środka massy m. Ta wynikowa nada całemu układowi taki sam ruch jaki on ma pod działaniem sił f, przyłożonych do wszystkich jego punktów. Więc siła f daje massie μ takie samo przyspieszenie jakie siła P daje massie m.

Dowiedzie się podobnie że siła f' nadaje massie μ takie samo przyspieszenie jakie siła P' udziela massie m'. Owoż, z założenia siły P, P' dają massom m, m' równe przyspieszenia; więc siły f, f' dają także massie μ równe przyspieszenia; zatem są równe. Ztąd wynika proporcya

$$(8) \qquad \frac{P}{P'} = \frac{n}{n'} = \frac{m}{m'},$$

która pokazuje że siły stałe P, P' mają się jako massy m, m' którym udzielają to samo przyspieszenie.

198. Związek między siłą, massą i przyspieszeniem. Niech będą dwie siły stałe P, P' które, przyłożone do dwóch punktów mających massy m, m', nadają im przyspieszenia j, j'. Aby znaleźć związek jaki istnieje między sześcioma ilościami P, P', m, m', j, j', weźmy siłę P'' taką, żeby przyłożona do punktu mającego massę m na-

dawała mu przyspieszenie j'. Na mocy równań (7) i (8) będzie

$$\frac{P}{P'}=\frac{j}{j'}$$

$$\frac{P''}{P'}=\frac{m}{m'}.$$

Z tych dwóch proporcyj, pomnożonych przez siebie, wynika trzecia

$$(9)\qquad \frac{P}{P'}=\frac{mj}{m'j'},$$

która pokazuje że siły stałe mają się jako wieloczyny z mass punktów na które działają, przez przyspieszenia jakie im nadają. Albo innemi słowy: *Dwie siły stałe mają się jako wieloczyny z mass do których są przyłożone, przez prędkości jakie im nadają w tym samym czasie.*

Ostatnia proporcya dowodzi że, gdy siła stała P działająca na ciało massy m nadaje mu przyspieszenie j, można wziąć za miarę jej natężenia wieloczyn mj z massy m przez przyspieszenie j; ale trzeba za jedność massy obrać massę ciała które, pod działaniem siły wziętej za jedność nabywa przyspieszenia wziętego za jedność. Tym sposobem równanie (9) daje miarę siły stałej P

$$(10)\qquad P=mj.$$

Ilość ruchu. Wieloczyn mv, z massy m ciała przez prędkość v spólną wszystkim jego punktom, nazywa się *ilością ruchu* tego ciała.

Formuła (10) pokazuje że *siła stała jakakolwiek ma za miarę ilość ruchu jaką wydaje w jedności czasu.*

Tak zwane siły chwilowe mierzą się zwykle ilościami ruchu z przyczyny niemożebności dokładnego ocenienia niezmiernie krótkiego czasu przez który działają.

199. Dawniej myślano że ciężkość działa z natężeniem zmiennem na ciała różnej natury. Galileusz okazał doświadczeniem że ciała

spadające, na jednem miejscu ziemi i z jednej wysokości, nabywają zawsze tej samej prędkości na końcu tego samego czasu, jakakolwiek jest ich istota, massa i kształt; co dowodem że ciężkość działa jednakowo na wszystkie ciała. Pokazał on nadto że, jeśli rzeczy nie tak się dzieją w naturze, przyczyną tego jest opór powietrza, albo ogólniej środka w jakim się spadek ciał odbywa.

Wynika zaraz z tego doświadczenia że ciężary dwóch ciał, będąc siłami stałemi które dają to samo przyspieszenie g, są proporcyonalne do mass tych ciał. Więc dwa ciała jakiekolwiek, jednorodne albo różnorodne, mające ciężary równe mają massy równe. Przed *Galileuszem* wyprowadzić tego wniosku nie było można.

Nazwijmy P ciężar ciała mającego massę m; ten ciężar, to jest siła sprawiająca spadek ciała, nadaje mu ruch w którym przyspieszenie jest g. Więc, na mocy tego co poprzedza, będzie

$$P = mg. \tag{11}$$

Możemy teraz wyznaczyć *jedność massy* która nie jest dowolna gdy *jedność* siły (gramm albo kilogram) i *jedność* przyspieszenia (metr) zostały obrane. Jakoż, z ostatniej formuły wynika

$$m = \frac{P}{g};$$

co pokazuje że massa m będzie równa 1 gdy ciężar P będzie miał tyle *grammów* ile przyspieszenie g zawiera *metrów*. Tym sposobem w Paryżu jednością massy jest massa ciała które waży $9^{gr},8088$, ponieważ $g = 9^{m},8088$. Jeśli ciało mające ciężar P w Paryżu ma ciężar P′ w innem miejscu, przyspieszenie jego ruchu będzie miało wartość g' różną od g. Owoż, wiemy (195) że $\frac{P}{g} = \frac{P'}{g'}$; więc massa ciała będzie zawsze wyrażona przez tę samą liczbę w jakiemkolwiek miejscu ją wyznaczono, ale ciężar jedności massy będzie miał g' grammów zamiast g.

Oznacymy przez V objętość, przez D gęstość ciała jednorodnego którego massa jest m i ciężar P; będzie

$$m = VD, \qquad P = mg = VDg.$$

200. Formuła (10), rozciąga się do sił zmiennych. Niech będzie punkt materyalny M, mający massę m, który się porusza na linii

X O M M' X'

prostej XX' pod działaniem pewnej siły zmiennej. Oznaczmy przez x odciętę OM położenia M jakie ten punkt zajmuje na końcu czasu t, przez v jego prędkość w tej chwili, i przez P natężenie siły poruszającej. Można zawsze wziąć przeciąg czasu Δt dość krótki aby, gdy punkt ruchomy przechodzi z położenia M do położenia sąsiedniego M', natężenie siły poruszającej było ciągle rosnące albo ciągle malejące. Dla utkwienia myśli, przypuśćmy je rosnące i nazwijmy P' jego wartość w M'. Przyspieszenia punktu ruchomego w M i M' będą $\frac{P}{m}$ i $\frac{P'}{m}$, a jego prędkość na końcu czasu Δt odbierze przyrost Δv. Owoż, gdyby siła poruszająca zachowała przez cały czas Δt natężenie P jakie ma w M, prędkość punktu ruchomego pod działaniem takiej siły stałej powiększyłaby się na końcu czasu Δt ilością $\frac{P}{m}\Delta t$; tak samo, przyrost prędkości byłby $\frac{P'}{m}\Delta t$, gdyby siła miała od M do M' natężenie które posiada gdy punkt ruchomy zajmuje położenie M'. Ztąd wynika że

$$\frac{P}{m}\Delta t < \Delta v < \frac{P'}{m}\Delta t$$

albo

$$\frac{P}{m} < \frac{\Delta v}{\Delta t} < \frac{P'}{m}.$$

A zatem, przechodząc do granic, ponieważ gr. $P' = P$, będzie

$$\frac{P}{m} = \frac{dv}{dt},$$

zkąd

(12) $$P = m\frac{dv}{dt}.$$

Więc ogólnie, *siła działająca na punkt materyalny ma za miarę wieloczyn massy tego punktu przez przyspieszenie jakie mu nadaje.*

Formuła (12) dająca miarę siły jakiejkolwiek, stałej albo zmiennej, może jeszcze wziąć inny kształt. Jakoż, uważając że

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \text{zkąd} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

otrzymujemy :

$$(13) \qquad P = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{i} \quad P = m\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = mv\frac{dv}{dx}.$$

Te trzy kształty wyrażające natężenie siły są użyteczne stosownie do funkcyi która daje tę siłę.

Z powyższych formuł wynika że natężeniu P siły trzeba dać znak $+$ albo $-$, według jak ta siła zwiększa albo zmniejsza odciętę punktu ruchomego.

Nazywa się *siłą poruszającą* punktu materyalnego ta która jest przyłożona do jego massy m; miarą tej siły jest $m\frac{dv}{dt}$ albo $m\frac{d^2x}{dt^2}$. *Siłą przyspieszającą* jest siła działająca na *jedność massy*; jej miarą jest $\frac{dv}{dt}$ albo $\frac{d^2x}{dt^2}$; ale zwykle przez skrócenie te ostatnie ilości nazywają się *przyspieszeniem*.

Uwaga. Z formuły (12) wynika

$$m = \frac{P}{\frac{dv}{dt}};$$

to pokazuje że miarą massy punktu materyalnego jest stosunek siły poruszającej ten punkt do przyspieszenia jakie mu nadaje.

201. Gdy punkt materyalny jest pod działaniem siły mającej kierunek prędkości początkowej, jego ruch jest prostolinijny, i równanie różniczkowe tego ruchu jest dane przez jedną z trzech formuł (12) i (13). Całkowanie równania różniczkowego przedstawia mniej

więcej trudności, według jak funkcya wyrażająca natężenie siły jest mniej albo więcej zawiła; siła albowiem może być ogólnie funkcyą trzech ilości t, x, v. Przestaniemy tu na treściwem wskazaniu całkowania, gdy siła będzie dana w funkcyi jednej tylko ze trzech zmiennych t, x, v; zagadnienia które w ciągu dzieła rozwiążemy dopełnią reszty. Mamy na teraz tylko trzy różne przypadki do uważania.

1° Jeśli wartość siły P jest wyrażona w funkcyi czasu t,

$$P = f(t);$$

wtedy równanie różniczkowe ruchu będzie

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t).$$

Mnożąc obie strony przez $\frac{dt}{m}$ i całkując, znajdziemy

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m}\int_0^t f(t)dt = v;$$

v_0 wyraża prędkość punktu ruchomego która odpowieda wartości $t = 0$. Oznaczmy przez $\varphi(t)$ wartość dla $\frac{dx}{dt}$ taką żeby było

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t).$$

Jeśli pomnożymy przez dt obie strony tego równania i potem zcałkujemy, otrzymamy ostatecznie

$$x = x_0 + \int_0^x \varphi(t)dt$$

równanie ruchu, w którem x_0 znaczy wartość dla x odpowiedającą na $t = 0$.

2° Dana siła jest funkcyą odciętej x

$$P = f(x).$$

Równanie różniczkowe ruchu które mamy całkować wyraża się przez

$$mv\frac{dv}{dx}=f(x).$$

Mnożąc przez $\frac{2dx}{m}$ obie strony i całkując, otrzymujemy

$$v^2=v_0^2+\frac{2}{m}\int_0^x f(x)dx.$$

Z tego równania wyprowadzamy wartość dla v, którą oznaczamy przez

$$v=\varphi(x),\quad \text{albo} \quad \frac{dx}{dt}=\varphi(x).$$

Ostatnie równanie daje

$$dt=\frac{dx}{\varphi(x)}.$$

Więc całkując jeszcze, znajdujemy

$$t=\int_9^x\frac{dx}{\varphi(x)}.$$

3° Jest dane

$$P=f(v).$$

W tym przypadku równanie różniczkowe ruchu będzie

$$m\frac{dv}{dt}=f(v).$$

Zkąd wyciągamy

$$dt=\frac{mdv}{f(v)}.$$

Całkując mamy

$$t = m \int_0^v \frac{dv}{f(v)}.$$

Jeśli można rozwiązać to równanie na v, będzie

$$v = \varphi(t) \quad \text{albo} \quad \frac{dx}{dt} = \varphi(t).$$

Ostatnie równanie zcałkowane daje równanie ruchu

$$x = x_0 + \int_0^t \varphi(t)dt.$$

Można postępować inaczej. Weźmy równanie różniczkowe ruchu

$$\frac{mvdv}{dx} = f(v),$$

które daje

$$dx = \frac{mvdv}{f(v)}.$$

Ztąd wywodzimy, całkując,

$$x = x + m \int_0^v \frac{vdv}{f(v)}.$$

Jeśli teraz, między ostatniem równaniem i pierwszem zcałkowanem, wyrugujemy ilość v, otrzymamy równanie na x i t.

Na zastosowanie wyłożonych formuł, weźniemy kilka przykładów ruchu prostolinijnego.

202. Pierwszy przykład. *Ruch ciał ciężkich w próżni.*

Z przyczyny podwójnego ruchu ziemi, i z innych okoliczności o których później będzie mowa, ciała ciężkie w próżni nie spadają w linii prostej, i ciężkość nie jest siłą stałą ani z natężenia ani z kierunku. Przypuszczając więc jedno i drugie, rozwiążemy zagadnienie ruchu idealnego który nie istnieje w naturze ; ale rachunek będzie zawsze użyteczny jako przybliżenie, bo ten ruch nie wiele się różni od prawdziwego ruchu ciała na powierzchni ziemi.

Uważajmy najpierwej *spadek ciała ciężkiego*. Przez ruch ciała rozumiemy tu ruch jego środka ciężkości w którym przypuszczamy zkoncentrowaną całą massę m tego ciała. Ponieważ, w tym przypadku, według uczymionych założeń, jedyną siłą poruszającą jest ciężar mg ciała, mamy zaraz równanie różniczkowe ruchu

$$m\frac{dv}{dt} = mg \quad \text{albo} \quad \frac{dv}{dt} = g,$$

zkąd, całkując, wyprowadzamy formułę

$$(1) \qquad v = v_0 + gt,$$

w której v_0 wyraża prędkość jaką ciało posiada na początku czasu t.

Owoż, $v = \frac{dx}{dt}$; podstawiając tę wartość i całkując, otrzymujemy

$$(2) \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2.$$

x_0 oznacza odciętę punktu od którego się liczy przebieżona przestrzeń w czasie t, to jest wartość dla x na $t = 0$.

Jeśli przestrzeń i czas są liczone od punktu w którym prędkość ciała jest zero, wtedy na $t = 0$ powinno być $v_0 = 0$ i $x_0 = 0$; zatem formuły (1) i (2) stają się

$$(3) \qquad v = gt, \qquad x = \frac{1}{2}gt^2.$$

Takie byłyby równania ruchu i prędkości ciał ciężkich spadających w próżni, gdyby ziemia była nieruchoma.

Rugując t, znajdujemy już wiadome formuły

$$= \sqrt{2gx} \quad \text{i} \quad x = \frac{v^2}{2g},$$

które dają *prędkość* należną wysokości x, i *wysokość* należną prędkości v.

203. *Ruch ciała ciężkiego rzuconego z dołu do góry.* W tym przypadku siła ciężkości działa w stronę przeciwną ruchu; więc rożniczkowe równanie tego ruchu jest

$$\frac{dv}{dt} = -g.$$

Ztąd wynika

$$(1) \qquad v = v_0 - gt,$$

i następnie

$$(2) \qquad x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Jeśli początek odciętych jest punktem od którego się czas liczy, wtedy $x_0 = 0$, i formuła (2) staje się

$$(3) \qquad x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Nazwijmy θ czas na końcu którego ciało przestaje się wznosić będzie

$$0 = v_0 - g\theta, \quad \text{zkąd} \quad \theta = \frac{v_0}{g};$$

ta wartość daje wysokość wzniesienia

$$(4) \qquad x = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Dosięgnąwszy tej wysokości, ciało zaczyna spadać, i, gdy powraca do punktu wyjścia, jego prędkość, w stronę przeciwną, jest ta sama v_0 z jaką było rzucone. Jakoż, z formuły (4) wyciągamy $2gx = v_0^2$; ta wartość, podstawiona w formule (4) spadku ciał, daje $v = v_0$.

204. Drugi przykład. *Ruch ciała ciężkiego w środku który stawi opór, na przykład w powietrzu.*

Teorya oporu płynów nie jest jeszcze zupełna; ale wyniki na których się oprzemy, sprawdzone mnogiemi doświadczeniami, mogą być przyjęte za dokładne. I tak, gdy ciało ciężkie, symetryczne względem linii prostej spada wzdłuż tej linii w powietrzu, albo w płynie jakimkolwiek, ten płyn stawi opór ruchowi. Z przyczyny tej symetryi ciała ciężar który jest siłą, ma oczywiście kierunek linii symetryi, i wynikowa R oporów cząstkowych, wywartych przez powietrze na różne punkta ciała, jest także siłą mającą ten sam kierunek, tylko w stronę przeciwną. Obserwacya dowodzi że, gdy ruch ciała ciężkiego nie jest ani bardzo powolny ani bardzo szybki, opór powietrza spokojnego może być uważany jako proporcyonalny do jego gęstości i do kwadratu prędkości tego ciała. Obserwacya dowodzi jeszcze że, gdy ciało poruszające się jest sferyczne, opór powietrza jest proporcyonalny do jego powierzchni czyli do kwadratu promienia. W tem założeniu, oznaczając przez r promień sfery i przez D jej gęstość, przez ρ gęstość powietrza, przez v prędkość ciała, i nakoniec przez m jego massę; będzie

$$\mathrm{R} = a\rho r^2 v^2, \quad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \mathrm{D};$$

co daje

$$\frac{\mathrm{R}}{m} = \frac{3a\rho v^2}{4\pi r \mathrm{D}}.$$

spółczynnik liczebny a jest względny do ciała spadającego i dany przez doświadczenie.

Dla uproszczenia rachunku, porównywa się opór R do ciężkości czyniąc, dla jednorodności. $\frac{3a\rho k^2}{4\pi r \mathrm{D}} = g$;

zatem

$$\frac{\mathrm{R}}{m} = \frac{g v^2}{k^2}.$$

Widzimy łatwo że ilość stała k wyraża prędkość jakąby powinno mieć ciało spadające, ażeby opór powietrza był równy jego ciężarowi.

Ruch zestępujący. Jeśli będziemy uważali ciało spadające jakoby przywiedzione do swego środka ciężkości w którymby cała jego massa była skoncentrowana, ruch tego środka uważanego za punkt materyalny, i temsamem ruch każdego punktu ciała, będzie wyznaczony przez równanie różniczkowe

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{gv^2}{k^2},$$

albo

$$gdt = \frac{k^2 dv}{k^2 - v^2} = \frac{k}{2}\left(\frac{dv}{k+v} + \frac{dv}{k-v}\right).$$

Zcałkujmy obie strony tego równania, otrzymamy

$$\frac{2gt}{k} = \log\left(\frac{k+v}{k-v}\right).$$

Nie przydaliśmy statecznej dowolnej, bo przypuszczamy że ciało spada bez prędkości początkowej

Z ostatniego równania wynika

$$\frac{k+v}{k-v} = e^{\frac{2gt}{k}};$$

zatem

(1) $$v = \frac{k\left(e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}\right)}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}.$$

Zastępując v przez $\frac{dx}{dt}$, będzie

$$dx = \frac{k\left(e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}\right)dt}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}.$$

Licznik ułamka jest różniczką mianownika, prócz czynnika stałego; więc całkując mamy

$$x = \frac{k^2}{g} \log \left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}} \right) + C.$$

Wyznaczy się stateczną C, według warunku żeby było zarazem $x = 0$ i $t = 0$; co daje

$$(2) \qquad x = \frac{k^2}{g} \log . \frac{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}{2}.$$

Znamy więc w każdej chwili położenie i prędkość środka ciężkości ciała spadającego; i to właśnie stanowi zupełne rozwiązanie zagadnienia.

Można mieć drogę przebieżoną x w funkcyi prędkości v. Jakoż, biorąc przyspieszenie wyrażone przez $\frac{vdv}{dx}$, będzie

$$\frac{vdv}{dx} = g - \frac{gv^2}{k^2},$$

albo

$$\frac{vdv}{k^2 - v^2} = \frac{g}{k^2} dx.$$

Ztąd, całkując i wyznaczając stateczną dowolną tak żeby było zarazem $v = 0$, i $x = 0$, otrzymujemy

$$(3) \qquad x = \frac{k^2}{2g} \log\left(\frac{k^2}{k^2 - v^2} \right).$$

Uwaga. Formuła (1) pokazuje że prędkość v, mniejsza od k, dąży do tej granicy w miarę jak czas się zwiększa, ponieważ wtedy ilość wykładnicza $e^{-\frac{gt}{k}}$ dąży do zera. Więc ruch ciała spadającego w powietrzu zbliża się do ruchu jednostajnego, i prędkość ma za granicę taką prędkość jaka czyni opór równy ciężarowi ciała. Tę okoliczność łatwo się pojmuje; albowiem ciężar ciała jest siłą stałą, a zaś opór powietrza, rosnąc proporcyonalnie do kwadratu prędkości, zbliża się szybko do równowagi z tym ciężarem. Wprawdzie, jakkolwiek jest wielki przeciąg czasu, ciało nie nabywa ruchu ściśle jednostajnego; ale do niego dąży tem więcej im bardziej ilość wykładnicza $e^{-\frac{gt}{k}}$ maleje, do czego trzeba tylko żeby k było dostatecznie małe. Ostatni przypadek zdarza się istotnie: jakoż, wartość

$$k = 2\sqrt{\frac{\pi g}{3a}}\sqrt{\frac{Dr}{\rho}}$$

pokazuje że ruch ciała spadającego staje się tem znaczniej jednostajnym, i jego prędkość jest tem mniejsza, im to ciało ma promień mniejszy i gęstość mniejszą, a płyn w którym spada ma gęstość większą. Co właśnie doświadczenie potwierdza.

Wyraziliśmy opór powietrza przez $R = m\frac{gv^2}{k^2}$ Owoż, jeśli założymy $k = \infty$, będzie $R = 0$; powinniśmy więc, czyniąc to przypuszczenie, wyprowadzić ustawy spadku ciał ciężkich w próżni z formuł które dają ich ruch w powietrzu. To się łatwo sprawdza sposobem używanym do znalezienia prawdziwej wartości funkcyj, które się tu przedstawiają w kształcie niewyznaczonym $0.\infty$.

205. Ruch wznoszący się. Gdy ciało ciężkie porusza się w powietrzu pionowo z dołu do góry, opór powietrza i ciężkość działają w jednym kierunku ale w stronę przeciwną ruchu; więc, uważając kierunek z dołu do góry za dodatny, i zachowując notacyę już użytą, mamy równanie różniczkowe ruchu

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{gv^2}{k^2}.$$

albo

$$\frac{g}{k}dt = -\frac{kdv}{k^2 + v^2}.$$

Całkując i wyznaczając stateczną dowolną tak, żeby na $t = 0$

prędkość v była równa prędkości v_0 z którą ciało zostało rzucone, otrzymujemy

$$\frac{gt}{k} = \text{łuk sty}\,\frac{v_0}{k} - \text{łuk sty}\,\frac{v}{k}.$$

Weźmy teraz styczną w obydwóch stronach, będziemy mieli

$$\text{sty}\,\frac{gt}{k} = \frac{k(v_0 - v)}{k^2 + vv_0}.$$

zkąd

$$(1) \qquad v = \frac{k\left(v_0 \,\text{dos}\,\frac{gt}{k} - k\,\text{wst}\,\frac{gt}{k}\right)}{v_0\,\text{wst}\,\frac{gt}{k} + k\,\text{dos}\,\frac{gt}{k}} = \frac{dx}{dt}.$$

Licznik ułamku jest różniczką mianownika, prócz czynnika stałego $\frac{g}{k}$; zatem łatwe całkowanie daje

$$x = \frac{k^2}{g}\log\frac{\left(v_0\,\text{wst}\,\frac{gt}{k} + k\,\text{dos}\,\frac{gt}{k}\right)}{C};$$

stateczna C powinna być taka żeby $t = 0$ czyniło $x = 0$; więc

$$(2) \qquad x = \frac{k^2}{g}\log\left(\frac{v_0}{k}\,\text{wst}\,\frac{gt}{k} + \text{dos}\,\frac{gt}{k}\right).$$

Zagadnienie jest rozwiązane zupełnie, ponieważ na każdą wartość czasu t mamy położenie środka ciężkości ciała i jego prędkość.

Można jeszcze wyrazić x w funkcyi v, biorąc równanie

$$\frac{vdv}{dx} = -\left(g + \frac{gv^2}{k^2}\right),$$

albo

$$gdx = -k^2\left(\frac{vdv}{k^2 + v^2}\right).$$

Całkując i wyznaczając stateczną dowolną tak, żeby było zarazem $x=0$ i $v=v_0$, znajdujemy

$$(3)\qquad x=\frac{k^2}{2g}\log\left(\frac{k^2+v_0^2}{k^2+v^2}\right).$$

W tym ruchu ciało wznosi się aż do punktu w którym $v=0$, i potem spada z przyczyny ciągłego działania ciężkości. Nazwijmy θ czas wzniesienia.

Formuła (1), czyniąc w niej $v=0$ i $t=\theta$, daje

$$v_0 \operatorname{dos}\frac{g\theta}{k}-k\operatorname{wst}\frac{g\theta}{k}=0,$$

zkąd

$$\theta=\frac{k}{g}\operatorname{luk\,sty}\frac{v_0}{k}.$$

A formuła (3), czyniąc w niej $v=0$, daje wysokość do której ciało dosięgło,

$$x=\frac{k^2}{2g}\log.\frac{k^2+v_0^2}{k^2}.$$

Doszedłszy do punktu najwyższego, ciało zaczyna spadać i jego ruch jest dany przez formuły spadku ciał ciężkich.

Szukajmy teraz jaką prędkość będzie miało ciało gdy powróci do punktu wyjścia, i w jakim czasie ten powrót uskuteczni. Aby otrzymać żądaną prędkość, porównajmy wysokość wzniesienia $\frac{k^2}{2g}\log.\frac{k+v_0}{k^2}$ z wartością x daną przez formułę (3) spadku ciał, będzie

$$\frac{k^2+v_0^2}{k^2}=\frac{k^2}{k^2-v^2},$$

zkąd

$$v=\frac{kv_0}{\sqrt{k^2+v_0^2}}.$$

Ten wynik pokazuje że ciało, powróciwszy do punktu wyjścia, ma prędkość mniejszą od tej z którą było rzucone, i ta prędkość jest tem mniejsza im k mniejsze.

Wyznaczmy czas θ' spadku ciała. Jeśli w równaniu całkowem spadku ciał $\frac{k+v}{k-v}=e^{\frac{2gt}{k}}$, zastąpimy v przez $\frac{kv_0}{\sqrt{k^2+v_0^2}}$, i t przez θ', znajdziemy

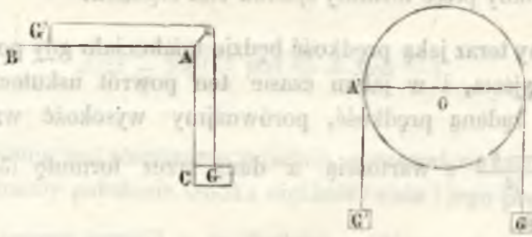
$$\theta'=\frac{k}{g}\log.\frac{v_0+\sqrt{k^2+v_0^2}}{k}.$$

Więc czas cały, upłyniony między wyjściem i powrotem, ma wartość

$$\theta+\theta'=\frac{k}{g}\left(\text{łuk stg}\,\frac{v_0}{k}+\log.\frac{v_0+\sqrt{k^2+v_0^2}}{k}\right).$$

To równanie mogłoby służyć do wyrachowania ilości k dla danego ciała.

206. Trzeci przykład. *Ciało* G *ciągnie ciało* G′ *leżące na płaszczyźnie poziomej, za pomocą nici która się nawija na krążek, i przechodzi poziomo przez środek ciężkości ciała* G′ *a pionowo przez środek ciężkości ciała* G. *Znaleźć równanie ruchu zaniedbując tarcie.*



Niech będą m, m' massy ciał G, G′. Ciężar mg ciała G jest siłą poruszającą która nadaje ruch całej massie $m+m'$ układu dwóch ciał; więc równanie różniczkowe ruchu jest

$$(m+m')\frac{dv}{dt}=mg$$

albo

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg}{m + m'}.$$

Ten ruch, jednostajnie przyspieszony, może być tak zwolniony jak się podoba i służyć do doświadczeń tarcia ciał różnej natury.

Powszechnie znana machina *Atwooda*, która głównie służy do zwolnienia ruchu pochodzącego z działania ciężkości, przywiedziona do najprostszego stanu, składa się z krążka pionowego O ruchomego około osi poziomej, na którym jest nawinięta nić mająca zawieszone na swych skrajnościach dwa ciała G i G'. Owoż, ciężary mg i $m'g$ tych ciał są dwiema siłami poruszającemi które działają w strony przeciwne; jeśli przypuścimy $m > m'$, różnica $mg - m'g = (m - m')g$ będzie siłą poruszającą która nadaje ruch układowi dwóch ciał mającemu massę $m + m'$; więc równanie różniczkowe ruchu jest

$$(m + m')\frac{dv}{dt} = (m - m')g$$

albo

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(m - m')g}{m + m'}.$$

207. Czwarty przykład. Uważajmy, bez względu na opór powietrza, ruch punktu materyalnego M, który spada z położenia A na powierzchnię ziemi, będąc *przyciągany ku jej środkowi* O *w stosunku odwrotnym kwadratu odległości.*

Oznaczmy przez a odległość AO, przez x przestrzeń AM którą punkt M przebiega w czasie t, przez r promień ziemi i przez g natężenie ciężkości na jej powierzchni.

Nazywając j przyspieszenie w punkcie M, wedle założenia mamy $j(a-x)^2 = gr^2$; zatem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gr^2}{(a-x)^2}.$$

Jeśli pomnożymy obie strony równania przez $2dx$, będzie

$$\frac{2dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt} = 2gr^2 \cdot \frac{dx}{(a-x)^2},$$

albo

$$d.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2gr^2 d. \frac{1}{a-x};$$

zkąd, całkując, otrzymujemy

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2gr^2}{a-x} + C.$$

Dla wyznaczenia statecznej C, przypuśćmy że prędkość punktu materyalnego M w położeniu A jest zero; co daje warunek

$$0 = \frac{2gr^2}{a} + C.$$

Więc

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 2gr^2\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2gr^2}{a} \cdot \frac{x}{a-x},$$

albo

$$(1) \qquad v = r\sqrt{\frac{2g}{a}}\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Gdy punkt spadający M dochodzi do powierzchni ziemi, nabywa prędkości mniejszej niż gdyby spadał z punktu A mając przyspieszenie g. Albowiem, jeśli uczynimy $x = a - r = h$, będzie

$$v = r\sqrt{\frac{2g}{a}}\sqrt{\frac{h}{r}} = \sqrt{\frac{r}{a}}\sqrt{2gh}.$$

Szukajmy teraz przestrzeni przebieżonej w czasie t. Równanie (1) daje

$$rdt\sqrt{\frac{2g}{a}} = dx\sqrt{\frac{a-x}{x}} = \frac{(a-x)dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

zkąd

$$rt\sqrt{\frac{2g}{a}} = \int \frac{\left(\frac{a}{2}-x\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}} - \frac{a}{2}\int \frac{d.\left(\frac{a}{2}-x\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}};$$

więc

(2) $$rt\sqrt{\frac{2g}{a}} = \sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2}\,\text{łuk dos}\,\frac{a-2x}{a}.$$

Nie przydaliśmy statecznej dowolnej, dlatego że powinno być $x = 0$ dla $t = 0$; byle wzięto zero za łuk którego dostawa jest jednością.

Znalezione formuły (1) i (2) stosują się dopóty dopóki punkt ruchomy M nie przenika wewnątrz ziemi, to jest aż do $x = a - r$; po za tą granicą siła poruszająca staje się proporcyonalna do odległości od środka, i równania ruchu różnią się od powyższych. Wyjaśnimy to lepiej rozwiązując następujące zagadnienie.

208. Zagadnienie I. *Wyznaczyć ruch punktu materyalnego* M *który wychodzi z punktu* A *bez prędkości, i jest przyciągany przez środek* O *proporcyonalnie do odległości.*

Taki właśnie byłby ruch punktu materyalnego przyciąganego przez ziemię (sferyczną), któraby przenikał zbliżając się do jej środka.

Weźmy środek O za początek odciętych, i uczyńmy $OM = x$, $OA = a$. Ponieważ siła przyciągająca zmniejsza odciętę punktu ruchomego M, i daje przyspieszenie g gdy $x = a$, będzie

$$\frac{vdv}{dx} = -\frac{g}{a}x = -n^2x.$$

zkąd, całkując, wynika

$$v^2 = -n^2x^2 + C.$$

A że powinno być $v = 0$ dla $x = a$, mamy $C = n^2a^2$; zatem

$$v^2 = n^2(a^2 - x^2). \tag{1}$$

Dla otrzymania związku między x i t, z ostatniego równania wyciągamy

$$\frac{dx}{dt} = -n\sqrt{a^2 - x^2},$$

albo

$$ndt = \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Wzięliśmy pierwiastnik ze znakiem $-$, dlatego że dx i dt są znaków przeciwnych, w ruchu od A do O który przypuszczamy.

Całkując będzie

$$nt = \text{łuk dos}\,\frac{x}{a}.$$

Stateczna dowolna jest zero, bo $t = 0$ powinno dawać $x = a$. Rozwiązując to równanie względem x, otrzymujemy

$$x = a\,\text{dos}\,nt = a\,\text{dos}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}. \tag{2}$$

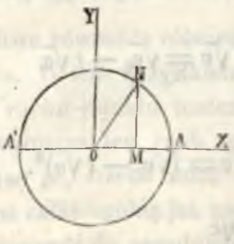
Równanie (1) pokazuje że prędkość v jest maximum kiedy punkt ruchomy M przechodzi przez środek O, a staje się zero dla $x = -a$ kiedy ten punkt dosięga skrajności A' średnicy; wtedy punkt M znajduje się w tych samych okolicznościach jak w A, i jego prędkość jest zero. Więc, z przyczyny działania siły która go przyciąga do środka O, punkt M wraca na swoje pierwsze położenie A ruchem zupełnie tosamym; poczem znowu idzie do A'. I tak następnie wykonywa ciągle jednakowy ruch tam i nazad (wahanie), którego okres jest $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Prędkość punktu ruchomego M, zależąca tylko od x^2, jest ta sama dla dwóch jego położeń A i A' równo oddalonych od środka O. Zresztą, weźmy pochodnę równania (2); będzie

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{ag}\,\text{wst}\,t\sqrt{\frac{g}{a}} = v.$$

Ta formuła jasno wykazuje cały ruch. I w samej rzeczy, gdy punkt ruchomy M przychodzi do środka O, równanie (2) daje $x = 0$ i $t\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{\pi}{2}$, zkąd $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$; wtedy $v = -\sqrt{ag}$. Punkt M mając prędkość nabytą maximum w środku O, przechodzi ten środek i posuwa się dalej. Aby wiedzieć gdzie się zatrzyma, trzeba uczynić $v = 0$; ztąd wynika $t\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi$ albo $t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, zatem $x = -a$; co daje $OA' = OA$. Od czasu $t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ aż do $t = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ prędkość jest dodatna; więc punkt M wraca do A z taką samą prędkością, tylko w stronę przeciwną, z jaką przyszedł do A'. I tak dalej.

209. Ruch okresowy, któryśmy dopiero co wyłożyli, wydatnie się



przedstawia geometrycznie. Jakoż, na linii AA' jako średnicy nakreślmy koło, weźmy $OM = x$, i wyprowadźmy prostopadłę MN; będzie

$$x = a \operatorname{dos} \frac{AN}{a}.$$

Owoż, równanie (2) daje

$$x = a \operatorname{dos} nt,$$

więc

$$AN = nat = t\sqrt{ag}.$$

Uwaga. Powyższe równania, jako pokazuje figura, rozwiązują zagadnienie:

Punkt N *porusza się jednostajnie na okręgu koła pionowego, jaki jest ruch jego rzutu* M *na średnicy poziomej* AA'?

210. Następujące zagadnienie przedstawia pewną osobliwość o której wiedzieć należy.

Zagadnienie II. *Wyznaczyć ruch punktu materyalnego na który działa siła proporcyonalna do pierwiastku kwadratowego prędkości, i w stronę przeciwną tej prędkości.*

Przypuszczając że punkt materyalny M wychodzi z punktu O w kierunku OA (*fig. stronicy* 289), mamy równanie różniczkowe jego ruchu

$$(1) \qquad \frac{dv}{dt} = -2\sqrt{av},$$

gdzie a znaczy ilość stałą. Ztąd wywodzimy

$$\frac{dv}{2\sqrt{v}} = -dt\sqrt{a}.$$

Całkując to równanie, i nazywając v_0 prędkość początkową, będzie

$$\sqrt{v} = \sqrt{v_0} - t\sqrt{a}$$

albo

$$(2) \qquad v = (\sqrt{v_0} - t\sqrt{a})^2.$$

Ostatnie równanie daje

$$dx = (\sqrt{v_0} - t\sqrt{a})^2\, dt;$$

zkąd, całkując i wyznaczając stateczną dowolną tak żeby zarazem było $t = 0$ i $x = 0$, otrzymujemy

$$(3)\qquad x = \frac{v_0\sqrt{v_0} - (\sqrt{v_0} - t\sqrt{a})^3}{3\sqrt{a}}.$$

Formuła (2) pokazuje że, gdy czas t rośnie ale zostając mniejszy od $\sqrt{\frac{v_0}{a}}$, prędkość maleje coraz bardziej; a gdy $t = \sqrt{\frac{v_0}{a}}$, wtedy $v = 0$ i $x = \frac{v_0}{3}\sqrt{\frac{v_0}{a}} = OA$. Więc punkt ruchomy zatrzymuje się w położeniu A. Ponieważ zaś przyspieszenie, z założenia proporcyonalne do pierwiastku kwadratowego prędkości, jest zero gdy $v = 0$, ztąd wnieść trzeba że punkt ruchomy, doszedłszy do położenia A w którem nie jest już pod działaniem żadnej siły i nie ma prędkości, musi zostać w spoczynku. Jednakże, gdy $t > \sqrt{\frac{v_0}{a}}$ formuły (2) i (3) nie wskazują tego stanu spoczynku. Aby wytłumaczyć sprzeczność, idźmy do równania różniczkowego $\frac{dv}{dt} = -3\sqrt{av}$. Widzimy zaraz że, jakikolwiek jest czas t, temu równaniu staje się zadość przez wartość $v = 0$, która jest jego *rozwiązaniem osobliwem*. Ale ta wartość $v = 0$ nie stosuje się do przypadku $t < \sqrt{\frac{v_0}{a}}$; albowiem, w chwili wyjścia z położenia początkowego O, punkt ruchomy M posiada prędkość v_0. Więc, gdy $t < \sqrt{\frac{v_0}{a}}$, formuły (2) i (3), wyrażające całkę pierwszą i całkę ogólną równania różniczkowego (1), rozwiązują zagadnienie; a gdy $t > \sqrt{\frac{v_0}{a}}$, wtedy rozwiązanie osobliwe równania różniczkowego jest jedynem rozwiązaniem zagadnienia. W tem wszystkiem nic nadzwyczajnego. Równanie różniczkowe ruchu punktu materyalnego, z okolicznościami początkowemi, wyznacza ten ruch ogólnie przez czas nieokreślony; więc, całkując je, trzeba mieć wzgląd na wszystkie rozwiązania, tak dobrze na całkę ogólną jak na tak zwane *rozwiązanie osobliwe* które się może stosować do zagadnienia. Co się właśnie tu zdarza.

ROZDZIAŁ II.

RUCH PUNKTU MATERYALNEGO W PRZESTRZENI.

---

211. Ruch prostolinijny jednostajny. Uważajmy ruch prostolinijny i jednostajny punktu materyalnego M w przestrzeni. Niech będzie A położenie tego punktu na początku czasu t, i M jego

położenie na końcu tego czasu; nazwijmy a, b, c i x, y, z spółrzędne tych dwóch położeń, odniesione do trzech osi spółrzędnych jakichkolwiek OX, OY, OZ.

Jeśli oznaczymy przez A′, M′, B′ rzuty punktów A, M, B na osi OX, zrobione przez płasczyzny równoległe do płasczyzny ZOY, będzie

$$\frac{A'M'}{AM} = \frac{A'B'}{AB} = k,$$

zkąd

$$A'M' = AM.k,$$

k jest liczbą stałą, przez którą trzeba mnożyć jakikolwiek odcinek AM prostej AB, żeby otrzymać jego rzut na osi OX względnie do płaszczyzny ZOY. W układzie spółrzędnych prostokątnych k znaczy dostawę kąta jaki prosta AB czyni z osią OX.

Nazwijmy teraz v prędkość ruchu jednostajnego, będziemy mieli $AM = vt$; a że $A'M' = x - a$, więc

$$x - a = vt.k = vkt.$$

Ta równość pokazuje że rzut M' punktu ruchomego M na osi jakiejkolwiek, takiej jak OX, porusza się w tym samym czasie co ten punkt, ruchem jednostajnym mającym prędkość vk.

Wieloczyn vk wyraża rzut prędkości v na osi OX względnie do płaszczyzny ZOY. Ztąd twierdzenie

Prędkość rzutu punktu materyalnego na osi jakiejkolwiek jest rzutem na tej osi jego prędkości w przestrzeni.

Oznaczmy przez p rzut vk prędkości v na osi OX względnie do płaszczyzny YOZ, i podobnie przez q, r rzuty prędkości na osiach OY, OZ względnie do płaszczyzn ZOX, XOY. Te trzy ilości p, q, r nazywają się *składowemi* prędkości v, wedle osi spółrzędnych; i nawzajem prędkość v jest ich wynikową. Ztąd wnosimy że prędkości składają się i rozkładają jako siły.

212. Rzuty odcinka AM na trzech osiach spółrzędnych dają związki

$$(1) \qquad x = a + pt, \quad y = b + qt, \quad z = c + rt$$

które wyznaczają położenie punktu ruchomego M w przestrzeni, i są równaniami jego ruchu prostolinijnego jednostajnego.

Równania (1) dowodzą że, jeśli punkt materyalny M ma ruch prostolinijny i jednostajny w przestrzeni, jego rzuty na trzech osiach spółrzędnych jakichkolwiek mają także ruchy jednostajne.

I nawzajem, jeśli rzuty punktu M na trzech osiach spółrzędnych mają ruchy jednostajne, ruch tego punktu w przestrzeni jest prostolinijny i jednostajny. Jakoż, z formuł (1) wyprowadzamy zaraz równania

$$\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r};$$

które pokazują że punkt $M(x, y, z)$ opisuje linię prostą AB w przestrzeni.

Aby się teraz przekonać że ruch punktu M jest jednostajny, szukajmy odległości AM, i dla skrócenia przypuśćmy osie spółrzędne prostokątne; będzie

$$AM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=t\sqrt{p^2+q^2+r^2}.$$

Widzimy więc że odległość AM jest proporcyonalna do czasu t; co dowodem że punkt ruchomy M przebiega linię prostą AM ruchem jednostajnym.

213. Jako przykład ruchu jednostajnego w przestrzeni, weźmy następujące zadanie.

Zagadnienie I. *Statek naładowany płynie ruchem jednostajnym z pewną prędkością. Wiadomo że, aby go przywieść do spoczynku, trzeba przyłożyć przez 30″ siłę 50 kilogrammów w stronę przeciwną ruchu; wiadomo nadto że, przez cały czas działania tej siły, statek przebiegł* $22^m,50$. *Pytanie jaki jest ciężar statku, i jaka prędkość jego ruchu jednostajnego?*

Nazywając m massę statku, mamy równanie różniczkowe jego ruchu pod działaniem siły 50^k,

$$m\frac{dv}{dt}=-50.$$

Ztąd, całkując, otrzymujemy

$$m(v-a)=-50t,$$

albo

$$(a) \qquad mv=ma-50t,$$

gdzie ilość a wyraża prędkość ruchu jednostajnego.

Wedle warunku zagadnienia, statek po 30 sekundach zatrzymuje się; więc powinno być

$$0 = ma - 50.30$$

zkąd

$$ma = 50.30.$$

Podstawiając tę wartość w równaniu całkowem (a) w którem zastąpimy v przez $\frac{dx}{dt}$, będzie

$$m\frac{dx}{dt} = 50.30 - 50t.$$

Jeśli zcałkujemy to równanie, i wyznaczymy stateczną dowolną tak żeby zarazem było $t = 0$ i $x = 0$, znajdziemy

$$(b) \qquad mx = 50\,.\,30t - \frac{1}{2}\,.\,50t^2.$$

Wyraźmy teraz że statek przebiegł $22^m,50$ przez czas $30''$ działania przyłożonej siły, będziemy mieli

$$m\,.\,22,50 = 50.30^2 - \frac{1}{2}\,.\,50\,.\,30^2 = \frac{1}{2}\,.\,50.30^2,$$

zkąd wynika

$$m = \frac{50\,.\,30^2}{45} = 1000.$$

Więc ciężar statku jest

$$1000g = 9808^k,8$$

i jego ruch jednostajny ma prędkość

$$a = \frac{50\,.\,30}{m} = 1^m,50.$$

214. Ruch krzywolinijny jakikolwiek. Jeśli kierunek siły działającej na punkt materyalny nie jest ciągle ten sam, albo jeśli prędkość początkowa, którą ten punkt odebrał, nie ma kierunku siły poruszającej, ruch jest krzywolinijny. Linia którą punkt materyalny opisuje w przestrzeni może być krzywą płaską, albo linią o podwójnej krzywiznie. Ta linia nazywa się *krążną* (*) punktu ruchomego. Niech będą x, y, z spółrzędne prostolinijne punktu ruchomego M; jego ruch w przestrzeni będzie zupełnie wiadomy, jeśli są znane ruchy rzutów na trzech osiach spółrzędnych, dane przez równania

$$(2) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Owoż, na końcu czasu t, prędkość rzutu punktu ruchomego M na trzech osiach wyraża się odpowiednio przez $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; więc te ilości są składowemi prędkości ruchu w przestrzeni na końcu tego czasu. Ale, na mocy już wiadomego twierdzenia, prędkość rzutu na osi OX, naprzykład, wyraża się przez

$$\frac{dx}{dt} = vk = \frac{ds}{dt}k\,; \qquad \text{co daje} \qquad k = \frac{dx}{ds}.$$

Ztąd wnosimy że

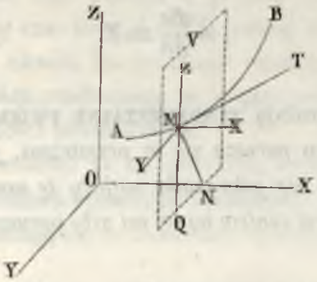
$$\frac{dx}{dt} = v\frac{dx}{ds}, \qquad \frac{dy}{dt} = v\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{dz}{dt} = v\frac{dz}{ds}.$$

Teraz uważajmy że $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ są liczbami (dostawami w układzie osi prostokątnych) przez które trzeba mnożyć jakikolwiek odcinek stycznej, w punkcie M linii krzywej, aby otrzymać jego rzuty na osiach spółrzędnych OX, OY, OZ. To dowodzi że prędkość punktu ruchomego w każdem położeniu ma kierunek stycznej do krążnej którą ten punkt opisuje. Gdyby więc siła poru-

(*) Wyraz użyty przez księdza Raf. Skolimowskiego, w *Mechanice* którą wykładał w Szkole aplikacyjnej wojskowej. Dzieło autografowane. Warszawa, 1824.

szająca działać przestała, punkt ruchomy opuściłby krążnę w kierunku stycznej w punkcie rozstania się.

215. Równania różniczkowe ruchu. Podczas gdy punkt ruchomy M opisuje krzywę AB, jego rzut N na osi OX porusza się



zarazem. Aby znaleźć równanie różniczkowe ruchu rzutu N, wyobraźmy sobie że przez punkt M przechodzi płasczyzna V która się razem z nim porusza, zostając ciągle równoległa do płasczyzny ZOY; płasczyzna V zawiera punkt N. Rozłóżmy siłę P przyłożoną do punktu M, na składowe X, Y, Z równoległe do osi spółrzędnych. Widzimy zaraz że składowe Y i Z, leżące na płasczyznie V, sprawiają tylko ruch punktu M na tej płasczyznie; ale nie przyczyniają się w niczem do jego ruchu w stronę osi OX. Sama jedna składowa X sprawia, równolegle do osi OX, ruch punktu M razem z płasczyzną V i z nią ruch punktu N wzdłuż tej osi. To pokazuje wydatnie że, jeśli punkt N posiada massę m punktu materyalnego M którego jest rzutem na osi OX, jego siła poruszająca X jest rzutem na tej osi siły poruszającej P punktu M. Zatem równanie różniczkowe ruchu punktu N na osi OX jest

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X.$$

Tak samo dla rzutów punktu M na osiach OY i OZ.

Więc równania wyznaczające ruch punktu materyalnego M, wolnego w przestrzeni, są

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$(3) \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Te równania wyrażają FUNDAMENTALNE TWIERDZENIE : *Gdy punkt materyalny massy* m *porusza się w przestrzeni, jego rzut na osi jakiejkolwiek porusza się jako punkt mający tę samą massę, i poddany jedynej sile która jest rzutem na tej osi siły poruszającej punkt w przestrzeni.*

Ruch rzutu punktu materyalnego na płasczyznie jakiejkolwiek daje podobne twierdzenie, które jest często użyteczne.

Na mocy powyższego twierdzenia, ruch krzywolinijny punktu w przestrzeni, przedstawiający wielorakie trudności, przywodzi się do trzech ruchów prostolinijnych niezależnych jeden od drugiego, które są daleko łatwiejsze do uważania. I w samej rzeczy, w ruchu krzywolinijnym siła wpływa zarazem na naturę krążnej którą punkt materyalny opisuje, i na ustawę jego ruchu ; gdy tymczasem w ruchu prostolinijnym siła wpływa tylko na samą prędkość tego punktu.

Jeśli są wiadome równania ruchu (2) punktu materyalnego, albo tylko krążna i ustawa ruchu, wtedy różniczkowania dadzą wartości $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, a równania (3) wyznaczą składowe X, Y, Z, i następnie siłę poruszającą P.

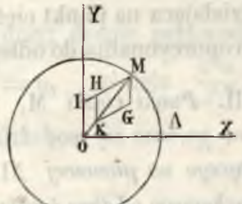
Zwykle jest do rozwiązywania zagadnienie odwrotne, to jest : dane są siły działające na punkt materyalny, a trzeba znaleźć równania jego ruchu i krążnę. Wtedy wiadome są X, Y, Z w funkcyi zmiennych x, y, z, t; ale, aby dojść do równań ruchu, trzebaby całkować trzy równania jednoczesne drugiego rzędu, mające kształt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, y, z, t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = f_1(x, y, z, t), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = f_2(x, y, z, t).$$

W tak ogólnej postaci całkowanie jest niemożebne. Istnieją wszakże liczne przypadki w których można je wykonać w części a niekiedy zupełnie; a gdy się to zdarza, otrzymuje się trzy równania które są funkcyami czterech zmiennych x, y, z, t i *sześciu* statecznych dowolnych. Te stateczne wyznaczają się według okoliczności początkowych ruchu. Jakoż, żeby ruch punktu był zupełnie określony, trzeba znać położenie tego punktu w pewnej chwili, na przykład w epoce od której się czas liczy, i nadto jeszcze wielkość i kierunek jego prędkości w tej chwili. To czyni *sześć* wartości danych, to jest: *trzy* spółrzędne punktu ruchomego w stanie początkowym, i *trzy* składowe jego prędkości początkowej.

Przykłady które bierzemy na zastosowanie wyłożonej teoryi, pokażą jasno jak, za pomocą położenia i prędkości punktu w stanie początkowym, wyznaczają się te stateczne wprowadzone przez całkowania.

216. Zagadnienie II. *Punkt ciężki* M *opisuje ruchem jednostajnym koło pionowe* O; *jaka siła na niego działa?*



Nazwijmy R promień koła, x, y spółrzędne punktu ciężkiego M, odniesione do dwóch osi prostokątnych OX, OY; oznaczmy przez s długość łuku AM i przez a prędkość ruchu jednostajnego; będzie $s = at$. Zatem równania ruchu punktu M są

$$x = \mathrm{R}\,\mathrm{dos}\,\frac{at}{\mathrm{R}}, \qquad y = \mathrm{R}\,\mathrm{wst}\,\frac{at}{\mathrm{R}}.$$

Ztąd wynika

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{a^2}{\mathrm{R}}\,\mathrm{dos}\,\frac{at}{\mathrm{R}},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{a^2}{\mathrm{R}}\,\mathrm{wst}\,\frac{at}{\mathrm{R}}.$$

Więc siłą poruszającą punktu M jest wynikowa $\frac{ma^2}{R}$ która działa w kierunku MO. Ale punkt M, jako ciężki, jest pod działaniem siły mg. Znając teraz wielkość i kierunek wynikowej dwóch sił i jedną z nich, łatwo znaleźć drugą. Dość tylko wystawić równoległobok MGKH, w którym przekątna MK przedstawia wielkość $\frac{ma^2}{R}$ i kierunek wynikowej przechodzącej przez środek koła O, a zaś bok MG przedstawia wielkość i kierunek ciężaru mg; bok MH przedstawi szukaną siłę co do wielkości i do kierunku. Niech będzie I punkt w którym prosta MH spotyka oś OY; mamy

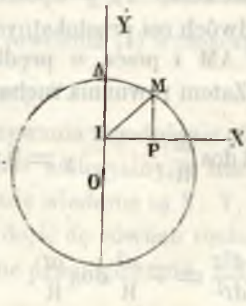
$$\frac{HM}{IM} = \frac{HK}{OI} = \frac{KM}{OM}.$$

Ztąd

$$OI = \frac{OM.HK}{KM} = \frac{R^2 g}{a^2}, \quad \text{i} \quad HM = \frac{KM.LM}{OM} = \frac{ma^2}{R^2}.IM.$$

To dowodzi że siła działająca na punkt ciężki M przechodzi przez punkt stały I, i jest proporcyonalna do odległości IM.

217. Zagadnienie III. *Punkt ciężki* M, *rzucony z położenia* A *z prędkością poziomą* a, *porusza się pod działaniem siły która wypływa ze środka* I *leżącego na pionowej* AI, *i jest proporcyonalna do odległości punktu ruchomego od tego środka. Znaleźć krążnę.*



Jeśli weźmiemy punkt I za początek spółrzędnych prostokątnych, i oznaczymy przez n.IM natężenie siły działającej na punkt M:

dostawy kątów które kierunek tej siły czyni z osiami spółrzędnemi, będą

$$\frac{x}{\mathrm{IM}}, \qquad \frac{y}{\mathrm{IM}}.$$

Mamy więc równania różniczkowe ruchu

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\,n.\mathrm{IM}.\,\frac{x}{\mathrm{IM}} = -\,nx,$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = -\,ny - mg$$

albo

$$(a)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{nx}{m} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ny}{m} + g = 0.$$

Oba równania są linijne; drugie przywodzi się do pierwszego jeśli położymy $y + \frac{mg}{n} = u$, co daje $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{nu}{m} = 0$.

Całki dwóch równań (a) są

$$x = \mathrm{A}\,\mathrm{dos}\,t\sqrt{\frac{n}{m}} + \mathrm{B}\,\mathrm{wst}\,t\sqrt{\frac{n}{m}}$$

$$y + \frac{mg}{n} = \mathrm{C}\,\mathrm{dos}\,t\sqrt{\frac{n}{m}} + \mathrm{D}\,\mathrm{wst}\,t\sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Aby wyznaczyć cztery stateczne dowolne A, B, C, D, weźmy pochodne względem czasu t, będzie

$$\frac{dx}{dt} = -\,\mathrm{A}\sqrt{\frac{n}{m}}\,\mathrm{wst}\,t\sqrt{\frac{n}{m}} + \mathrm{B}\sqrt{\frac{n}{m}}\,\mathrm{dos}\,t\sqrt{\frac{n}{m}},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\,\mathrm{C}\sqrt{\frac{n}{m}}\,\mathrm{wst}\,t\sqrt{\frac{n}{m}} + \mathrm{D}\sqrt{\frac{n}{m}}\,\mathrm{dos}\,t\sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Uważajmy teraz że, podług warunków zagadnienia, powinno być zarazem $t=0$, $y=h$, $\frac{dx}{dt}=a$, $\frac{dy}{dt}=0$; nazywając h rzędnę punktu wyjścia A. Mamy tedy, do wyznaczenia czterech statecznych, cztery równania,

$$0=\mathrm{A},\qquad h+\frac{mg}{n}=\mathrm{C},$$

$$a=\mathrm{B}\sqrt{\frac{n}{m}},\qquad 0=\mathrm{D}.$$

Więc równania ruchu punktu M są

$$(b)\qquad \begin{cases} x=a\sqrt{\dfrac{m}{n}}\ \mathrm{wst}\, t\sqrt{\dfrac{n}{m}}, \\ y=\left(h+\dfrac{mg}{n}\right)\mathrm{dos}\, t\sqrt{\dfrac{n}{m}}-\dfrac{mg}{n}. \end{cases}$$

Jeśli wyrugujemy t, znajdziemy równanie krążnej

$$(c)\qquad \frac{nx^2}{ma^2}+\left(\frac{ny+mg}{nh+mg}\right)^2=1.$$

Ta krążna jest ellipsą. Żeby była kołem, trzebaby $a=\frac{nh+mg}{\sqrt{nm}}$; wtedy promień tego koła byłby $a\sqrt{\frac{m}{n}}$.

218. Zagadnienie IV. *Punkt materyalny jest przyciągany przez środek mający moc przyciągającą proporcyonalną do odległości, i przebiega ruchem jednostajnym linię prostą; kierunek jego prędkości początkowej znajduje się na jednej płaszczyznie z tą prostą. Wyznaczyć równanie ruchu.*

Weźmy za początek O spółrzędnych prostokątnych położenie początkowe środka przyciągającego; i niech będą a i b spółrzędne początkowe punktu materyalnego, p i q rzuty jego prędkości początkowej na osiach spółrzędnych, α i β rzuty prędkości środka przyciągającego.

Na końcu czasu t spółrzędne środka przyciągającego są αt i βt; zatem, oznaczając przez x, y spółrzędne punktu materyalnego w tym samym czasie, i przez μ przyciąganie na jedność odległości, równania różniczkowe ruchu będą

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu(\alpha t - x),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mu(\beta t - y).$$

Oba równania są linijne. Pierwsze można tak pisać

$$\frac{d^2(x - \alpha t)}{dt^2} + \mu(x - \alpha t) = 0;$$

pod tą postacią widzimy zaraz że całka ogólna jest

$$x - \alpha t = \mathrm{A} \operatorname{dos} t\sqrt{\mu} + \mathrm{B} \operatorname{wst} t\sqrt{\mu}.$$

zkąd

$$\frac{dx}{dt} - \alpha = -\mathrm{A}\sqrt{\mu} \operatorname{wst} t\sqrt{\mu} + \mathrm{B}\sqrt{\mu} \operatorname{dos} t\sqrt{\mu}.$$

Stateczne A i B wyznaczają się przez warunek żeby było zarazem

$$t = 0, \quad x = a, \quad \frac{dx}{dt} = p;$$

co daje

$$\mathrm{A} = a, \quad \mathrm{B} = \frac{p - \alpha}{\sqrt{\mu}}.$$

Więc

$$x = \alpha t + a \operatorname{dos} t\sqrt{\mu} + \frac{p - \alpha}{\sqrt{\mu}} \operatorname{wst} t\sqrt{\mu}.$$

Znajduje się tak samo

$$y = \beta t + b \operatorname{dos} t\sqrt{\mu} + \frac{q-\beta}{\sqrt{\mu}} \operatorname{wst} t\sqrt{\mu}.$$

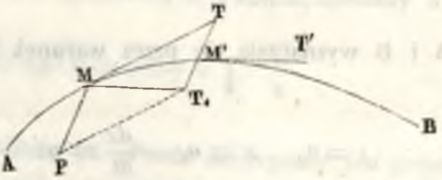
Gdyby środek był odpychający, równania ruchu punktu materyalnego byłyby

$$x = \alpha t + \frac{1}{2}\left(a + \frac{p-\alpha}{\sqrt{\mu}}\right)e^{t\sqrt{\mu}} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{p-\alpha}{\sqrt{\mu}}\right)e^{-t\sqrt{\mu}}$$

$$y = \beta t + \frac{1}{2}\left(b + \frac{q-\beta}{\sqrt{\mu}}\right)e^{t\sqrt{\mu}} + \frac{1}{2}\left(b - \frac{q-\beta}{\sqrt{\mu}}\right)e^{-t\sqrt{\mu}}.$$

Uwaga. Jako przypadek szczególny, można przypuścić że środek przyciągający albo odpychający jest nieruchomy. Czyniąc wtedy $\alpha = 0$, $\beta = 0$, otrzymuje się równania ruchu; poczem łatwe rugowanie czasu t daje na krążnę, ellipsę gdy jest przyciąganie, hiperbolę gdy jest odpychanie, albo linię prostą w obydwóch przypadkach.

219. Przyspieszenie w ruchu krzywolinijnym. Niech będzie M położenie które punkt materyalny zajmuje na krążnej AB na



końcu czasu t, M' położenie na końcu czasu $t + \Delta t$; i niech wtedy odcinki MT, M'T' stycznych do krążnej w M, M' przedstawiają odpowiedające prędkości tego punktu. Nazywa się *zmiennością prędkości* punktu materyalnego od położenia M do M', albo *prędkością nabytą* w czasie Δt, prędkość która, złożona z prędkością MT na końcu czasu t, daje prędkość wynikową M'T' na końcu czasu

$t + \Delta t$, tak że, jeśli poprowadzimy prostę MT_1, równą prędkości $M'T'$ i do niej wprost równoległą, i dopełnimy równoległoboku MTT_1P, bok MP albo TT_1 będzie przedstawiał zmienność prędkości co do wielkości i kierunku.

Gdyby krążna AB była linią prostą, wtenczas zmienność prędkości równałaby się różnicy $M'T' - MT = \Delta$, i miałaby kierunek tej krążnej.

Stosunek $\frac{TT_1}{\Delta t}$ nazywa się *przyspieszeniem średniem*, a jego granica $gr. \frac{TT_1}{\Delta t}$ została mianowana *przyspieszeniem całem*, albo poprostu *przyspieszeniem* punktu ruchomego w przestrzeni.

W ruchu prostolinijnym punktu materyalnego przyspieszenie ma za miarę $\frac{dv}{dt}$, jakośmy widzieli w numerze 200.

Otrzymuje się łatwo wyrażenie analityczne przyspieszenia punktu ruchomego w przestrzeni, znając rzuty tego przyspieszenia na trzech osiach spółrzędnych.

Owoż, nietrudno wyrazić analitycznie rzut prostej TT_1 na osi jakiejkolwiek, takiej jako OX; bo dosyć tylko zrzutować na tej osi linię wielokątną TMT_1.

Aby to uskutecznić, uważajmy że, jakiekolwiek są osie spółrzędne prostolinijne, pochyłe albo prostopadłe, rzut odcinka TM, wziętego na stycznej w punkcie M krążnej, równa się wieloczynowi

$$TM.\frac{dx}{ds} = -\frac{ds}{dt}.\frac{dx}{ds} = -\frac{dx}{dt};$$

a zaś rzut boku MT_1, czyli odcinka $M'T'$ wziętego na stycznej w punkcie M' krążnej, jest równy wieloczynowi

$$M'T'\left(\frac{dx}{ds} + \Delta\,\frac{dx}{ds}\right),$$

z którego wynika

$$\left(\frac{ds}{dt}+\Delta\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{dx}{ds}+\Delta\frac{dx}{ds}\right)=\frac{dx}{dt}+\frac{dx}{ds}\Delta\frac{ds}{dt}+\frac{ds}{dt}\Delta\frac{dx}{dt}+\Delta\frac{dx}{ds}\Delta\frac{ds}{dt}$$

$$=\frac{dx}{dt}+\Delta\frac{dx}{dt}.$$

Więc rzut prostej TT_1 na osi OX wyraża się przez $\Delta\dfrac{dx}{dt}$.

Tak samo rzuty prostej TT_1 na osiach OY, OZ wyrażają się przez $\Delta\dfrac{dy}{dt}$, $\Delta\dfrac{dz}{dt}$.

Zatem rzut na osi OX przyspieszenia punktu M w przestrzeni jest

$$\text{gr.}\frac{\Delta\frac{dx}{dt}}{\Delta t}=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Widzimy więc że rzuty przyspieszenia punktu materyalnego w przestrzeni, na trzech osiach spółrzędnych jakichkolwiek, przedstawiają się przez pochodne drugie spółrzędnych x, y, z tego punktu wzięte względem czasu t.

Ale równania różniczkowe ruchu punktu materyalnego dają także

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{X}{m},\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{Y}{m},\qquad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{Z}{m}.$$

Ztąd wynika ważne TWIERDZENIE : *Gdy punkt materyalny porusza się w przestrzeni z przyspieszeniem jakiemkolwiek, wtedy : 1° jego rzut na każdej ze trzech osi spółrzędnych porusza się z przyspieszeniem które jest rzutem na tej osi przyspieszenia w przestrzeni ; 2° przyspieszenie punktu w przestrzeni przedstawia wielkość i kierunek siły przyspieszającej.*

W przypodku osi spółrzędnych prostokątnych przyspieszenie całe wyraża się przez

$$\frac{P}{m}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

RUCH PUNKTU MATERYALNEGO NA DANEJ POWIERZCHNI ALBO LINII.

220. 1° Gdy punkt materyalny, pod działaniem siły P, musi poruszać się na danej powierzchni na której opisuje pewną linię, ta powierzchnia, albo jakiekolwiek wiązadło które go przymusza do zostawania na powierzchni, wywiera na niego działanie zwane oporem; a nawzajem punkt materyalny któremu powierzchnia, albo wiązadło, przeszkadza brać ruch wolny, wywiera na nią oddziaływanie czyli parcie równe i przeciwne jej oporowi. Można usunąć myślą powierzchnię, albo wiązadło, i uważać punkt ruchomy jako wolny, byle do siły poruszającej P dołączono pewną siłę N, wielkości niewiadomej, któraby przedstawiała opór powierzchni albo tężność wiązadła. Opór powierzchni materyalnej jako siła rozkłada się na dwie siły, z których jedna jest normalną do tej powierzchni, a druga jest styczną do krążnej punktu materyalnego i działa w stronę przeciwną jego ruchu; ta ostatnia nazywa się *tarciem*. Doświadczenie pokazało że tarcie jest proporcyonalne do parcia punktu materyalnego na krążnę materyalną, i nie zależy od prędkości.

Jeśli niema tarcia, opór N powierzchni jest siłą normalną. W tem założeniu, oznaczając przez λ, μ, ν kąty jakie siła N czyni z trzema osiami prostokątnemi w punkcie $M(x, y, z)$, wyrażamy ruch tego punktu na powierzchni przez równania

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+N\,\mathrm{dos}\,\lambda,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+N\,\mathrm{dos}\,\mu,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+N\,\mathrm{dos}\,\nu.$$

w których X, Y, Z znaczą summy rzutów sił wprost przyłożonych do punktu ruchomego.

Do tych równań trzeba przyłączyć równanie danej powierzchni

$$f(x, y, z) = 0, \quad \text{albo} \quad f(x, y, z, t) = 0,$$

według jak ta powierzchnia jest niezmienna, albo może się odkształcać z czasem.

Mamy więc cztery równania do wyznaczenia czterech niewiadomych x, y, z, N w funkcyi czasu t.

Równanie powierzchni daje wartości liczebne dostaw kątów λ, μ, ν; podstawiając te wartości, otrzymujemy

$$(4) \quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X} + \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{V}}\dfrac{df}{dx}, \\[2ex] m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y} + \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{V}}\dfrac{df}{dy}, \\[2ex] m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z} + \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{V}}\dfrac{df}{dz}. \end{cases}$$

Oznaczamy przez V pierwiastnik $\pm\sqrt{\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{df}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{df}{dz}\right)^2}$, dając mu podwójny znak $\pm$, dlatego że opór powierzchni może mieć jeden albo drugi z dwóch kierunków normalnych.

Rugując N między trzema równaniami (4), otrzymuje się dwa równania które, dołączone do równania danej powierzchni, wyznaczają x, y, z w funkcyi t.

Można potem, za pomocą jednego z równań (4), wyznaczyć oddziaływanie N powierzchni w funkcyi tej samej zmiennej t.

Ale zwykle, dla uniknienia trudności rugowania, używa się do rozwiązywania tego zagadnienia, innej metody którą na swojem miejscu wyłożymy.

2° Punkt materyalny może być jeszcze więcej utrudzony w swoim ruchu niż kiedy musi poruszać się na danej powierzchni, można albowiem przymusić go do poruszania się na danej linii materyalnej, albo do opisania pewnej linii. W tym przypadku krążna punktu ruchomego jest wyznaczona, i połowa zagadnienia rozwiązana.

Żeby mieć ustawę ruchu tego punktu trzeba, do siły poruszającej, dołączyć opór krążnej materyalnej, rozkładając ten opór na siłę normalną do krążnej i na siłę, w kierunku stycznej, która przedstawia tarcie.

W przypuszczeniu że niema tarcia, na przykład gdy punkt materyalny przywiązany do nici nierozciągalnej opisuje pewną linię, opór tej nici jest normalny do krążnej, i równania ruchu są, jako w poprzedzającym przypadku.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X} + \mathrm{N}\,\mathrm{dos}\,\lambda$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y} + \mathrm{N}\,\mathrm{dos}\,\mu$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z} + \mathrm{N}\,\mathrm{dos}\,\nu.$$

Wprawdzie kąty λ, μ, ν nie są wiadome, i natężenie siły N nieznane; ale wiadomo że siła N jest prostopadła do krążnej punktu; co daje

$$\frac{dx}{ds}\,\mathrm{dos}\,\lambda + \frac{dy}{ds}\,\mathrm{dos}\,\mu + \frac{dz}{ds}\,\mathrm{dos}\,\nu = 0,$$

albo

$$dx\,\mathrm{dos}\,\lambda + dy\,\mathrm{dos}\,\mu + dz\,\mathrm{dos}\,\nu = 0,$$

z równaniem

$$\mathrm{dos}^2\lambda + \mathrm{dos}^2\mu + \mathrm{dos}^2\nu = 1.$$

Są do tego jeszcze dwa równania danej krążnej. To wszystko razem czyni siedem równań dostatecznych do wyznaczenia siedmiu niewiadomych x, y, z, N, λ, μ, ν w funkcyi czasu t.

221. W przypadku istnienia tarcia, w równaniach ruchu punktu materyalnego na danej powierzchni albo linii, do składowych siły przyłożonej P i normalnej N trzeba dołączyć składowe tarcia. Te składowe, nazywając f *spółczynnik* tarcia o którym później mowa, wyrażają się przez

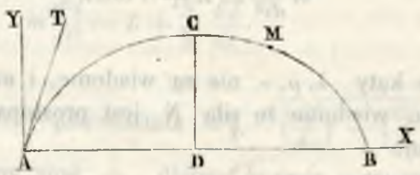
$$-fN\frac{dx}{ds}, \quad -fN\frac{dy}{ds}, \quad -fN\frac{dz}{ds},$$

z równaniem

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

RUCH POCISKÓW W PRÓŻNI.

222. Niech będzie A położenie z którego punkt ciężki M został rzucony z prędkością v_0 w kierunku AT. Weźmy za oś rzędnych



pionowę AY, i za oś odciętych poziomę AX leżącą na płaszczyznie pionowej YAT. Punkt M będący pod działaniem samej tylko ciężkości, w *przypuszczeniu ziemi nieruchomej*, porusza się na płaszczyznie pionowej YAT; bo niema przyczyny żeby się od niej oddalał z jednej strony raczej niż z drugiej. Oznaczając przez x, y spółrzędne punktu M, w epoce t, ponieważ jedyną siłą przyłożoną jest ciężar mg który działa w kierunku rzędnych odjemnych, mamy równania różniczkowe ruchu

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Całkowanie tych dwóch równań daje

$$\frac{dx}{dt} = C, \quad \frac{dy}{dt} = C' - gt.$$

Aby wyznaczyć stateczne dowolne C i C', uważajmy że, nazywając α kąt TAX jaki prędkość początkowa v_0 czyni z osią AX, składowe tej prędkości, to jest wartości dla $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ na $t=0$, są $v_0 \operatorname{dos}\alpha$, $v_0 \operatorname{wst}\alpha$; zatem

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \operatorname{dos}\alpha,$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \operatorname{wst}\alpha - gt.$$

Całkując drugi raz, i wyznaczając dwie stateczne tak żeby było zarazem $t=0$, $x=0$, $y=0$, znajdujemy

$$(2)\qquad \begin{cases} x = v_0 t \operatorname{dos}\alpha \\ y = v_0 t \operatorname{wst}\alpha - \frac{1}{2} gt^2. \end{cases}$$

Takie są równania skończone ruchu punktu ciężkiego M w próżni, i takie równania ruchu jaki bierze w próżni pocisk jednorodny sferyczny.

Dodając kwadraty składowych $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, będziemy mieli prędkość v

$$(3)\qquad v^2 = v_0^2 - 2v_0 gt \operatorname{wst}\alpha + g^2t^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Ta formuła pokazuje że pocisk upada w punkcie B z tą samą prędkością z jaką wyszedł z punktu A, albowiem dla $y=0$ jest $v=v_0$.

Czas w którym pocisk przebiega krzywę AMB otrzymuje się z równania (2)

$$0 = v_0 t \operatorname{wst} \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

które daje

$$t = \frac{2 v_0 \operatorname{wst} \alpha}{g}.$$

223. Jeśli wyrugujemy czas t między równaniami (2), otrzymamy równanie krążnej

$$y = x \operatorname{sty} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \operatorname{dos}^2 \alpha}.$$

Dla skrócenia uczyńmy $v_0^2 = 2gh$, oznaczając przez h wysokość należną prędkości początkowej; będzie

(4) $$y = x \operatorname{sty} \alpha - \frac{x^2}{4h \operatorname{dos}^2 \alpha}.$$

Równanie krążnej dowodzi że punkt ciężki M, rzucony z prędkością v_0, opisuje w próżni parabolę której oś jest pionowa.

Jeśli w ostatniem równaniu położymy $y = 0$, otrzymamy

$$x = 4h \operatorname{wst} \alpha \operatorname{dos} \alpha = 2h \operatorname{wst} 2\alpha.$$

Ta wartość odciętej x daje punkt B w którym pocisk upada na poziomej AX, i wyznacza długość AB która się nazywa *doniosłością strzału* albo *obszernością rzutu*. Widzimy łatwo że długość AB jest największa możebna gdy $\operatorname{wst} 2\alpha = 1$, to jest gdy $\alpha = 45°$. Więc pocisk, rzucony z daną prędkością początkową, nabywa największej doniosłości kiedy kierunek tej prędkości jest nachylony na 45° na poziom.

Żeby mieć wierzchołek C przebieżonej paraboli, to jest punkt najwyższy w którym styczna jest pozioma, zrównajmy do zera pochodnę równania (4); będzie

$$\frac{dy}{dx} = \text{sty}\,\alpha - \frac{x}{2h\,\text{dos}^2\alpha} = 0,$$

zkąd

$$x = 2h\,\text{wst}\,\alpha\,\text{dos}\,\alpha.$$

Podstawiając tę wartość w równaniu (4), znajdujemy

$$y = h\,\text{wst}^2\alpha$$

Więc, nazywając ξ i η spółrzędne wierzchołka C paraboli, mamy

$$\xi = 2h\,\text{wst}\,\alpha\,\text{dos}\,\alpha$$

$$\eta = h\,\text{wst}^2\alpha.$$

Rzędna CD wierzchołka C nazywa się *wysokością strzału*; jej wartość $h\,\text{wst}^2\alpha$ dowodzi że, dla tej samej prędkości v^o, wysokość strzału jest maximum gdy kąt $\alpha = 90^o$.

Jeśli wyrugujemy α między dwoma ostatniemi równaniami, otrzymamy

$$\xi^2 + 4\eta^2 - 4h\eta = 0.$$

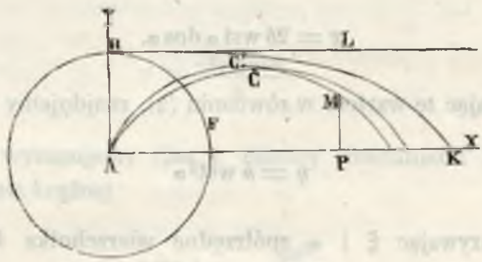
Równanie pokazuje że, gdy pocisk jest rzucony pod różnemi kątami strzału, ale z tą samą prędkością v_0, najwyższe wzniesienia jakich dosięga tworzą ellipsę, której rzędna maximum $\eta = h$ odpowieda kątowi $\alpha = 90^o$, jakośmy wyżej znaleźli.

Spółrzędne wierzchołka paraboli dają jeszcze

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{1}{2}\,\text{sty}\,\alpha.$$

Ten stosunek dowodzi że miejscem najwyższych położeń punktu M, rzuconego pod tym samym kątem α, ale z różnemi prędkościami początkowemi, jest linia prosta.

Parabole opisane przez pocisk M, rzucony z położenia A z tą samą prędkością początkową v_0 ale pod różnemi kątami strzału, posiadają wiele spólnych własności. A najpierwej, wszystkie mają za kierownicę linię poziomą HL, poprowadzoną przez punkt H



którego rzędna $AH = h$. Jakoż, parametr krążnej jest $2h \operatorname{dos}^2\alpha$, co daje $h \operatorname{dos}^2\alpha$ na odległość wierzchołka od kierownicy; ale znaleźliśmy już rzędnę η wierzchołka równą $h \operatorname{wst}^2\alpha$, więc $h \operatorname{dos}^2\alpha + h \operatorname{wst}^2\alpha = h$ jest odległością kierownicy od osi AX. Co właśnie dowodzi twierdzenia.

Nadto, ponieważ prosta HL jest kierownicą każdej z parabol opisanych, jeśli oznaczymy przez F ognisko jednej z nich, będzie $AF = AH$; więc ogniska tych parabol są na okręgu koła AH. Ich wierzchołki C, C'... są na ellipsie $\xi^2 + 4\eta^2 - 4h\eta = 0$; co już wiemy.

224. Rozwiążmy teraz następujące zagadnienie.

Jaki powinien być kąt strzału żeby pocisk, rzucony z punktu A z prędkością v_0, *dosięgnął celu* $M(x, y)$?

Niewiadomą jest kąt α. Dla skrócenia uczyńmy

$$\operatorname{sty}\alpha = u, \quad \text{zkąd} \quad \operatorname{dos}^2\alpha = \frac{1}{1+u^2};$$

podstawiając te wartości w równaniu krążnej, mamy

$$y = xu - \frac{x^2(1+u^2)}{4h}$$

albo

$$(5) \qquad x^2u^2 - 4hxu + 4hy + x^2 = 0.$$

Możebność zagadnienia wymaga żeby było

$$4h^2x^2 \geqq x^2(4hy + x^2) \quad \text{albo} \quad x^2 + 4hy - 4h^2 \leqq 0.$$

Zatem, jeśli wykreślimy parabolę

$$(6) \qquad x^2 = -4h(y - h),$$

zobaczymy łatwo że : 1° jeśli cel M znajduje się wewnątrz tej paraboli, niewiadoma u ma dwie wartości rzeczywiste nierówne i obie dodatne; więc wtedy można dosięgnąć celu M, rzucając pocisk pod dwoma różnemi kątami strzału.

2° Jeśli cel M jest na paraboli (6), dwa pierwiastki u są rzeczywiste równe; wtenczas pocisk może dosięgnąć celu M, ale tylko rzucony pod jednym kątem strzału. 3° Nakoniec, jeśli cel M znajduje się zewnątrz paraboli (6), wartości u są urojone; w tem położeniu nie można dosięgnąć celu M żadnym pociskiem, rzuconym z punktu A z daną prędkością początkową v_0. Dla tej przyczyny parabola (6) nazywa się *parabolą bezpieczeństwa.*

Parabola bezpieczeństwa jest owłoką parabol, jakie opisuje pocisk rzucony z punktu A z prędkością początkową v_0 pod wszystkiemi możebnemi kątami strzału. Aby otrzymać tę owłokę, trzeba, jako wiadomo z Analizy, wyrugować parametr α między równaniem krążnej (4) i pochodną względem α, albo co tosamo, wyrugować zmienną u między równaniem

$$y = xu - \frac{x^2(1 + u^2)}{4h},$$

i jego pochodną względem u

$$0 = x - \frac{x^2u}{2h}.$$

Wynikające ztąd równanie

$$y = h - \frac{x^2}{4h}$$

przedstawia właśnie parabolę bezpieczeństwa.

RUCH POCISKÓW W POWIETRZU.

225. Gdy pocisk *sferyczny* jednorodny, albo złożony z warstew jednorodnych, jest rzucony w powietrze, wtedy, w przypuszczeniu ziemi nieruchomej, jedyne siły działające są : 1° ciężar pocisku, mg, który jest siłą stałą; 2° opór powietrza, który jest siłą skierowaną wedle stycznej do krążnej i w stronę przeciwną ruchu.

Biorąc zagadnienie ogólne, załóżmy że opór powietrza wyraża się przez $m(a + kv^n)$, a i k spółczynniki stałe; składowe tego oporu będą

$$-m(a + kv^n)\frac{dx}{ds}, \quad -m(a + kv^n)\frac{dy}{ds}.$$

Mamy więc równania różniczkowe ruchu

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -(a + kv^n)\frac{dx}{ds}.$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -(a + kv^n)\frac{dy}{ds} - g.$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez d^2y a drugie przez d^2x, i odciągnijmy stronami, otrzymamy

$$(a + kv^n)(dxd^2y - dyd^2x) = gdsd^2x.$$

Dla uproszczenia, weźmy za zmienną posiłkową kąt α jaki styczna do krążnej w punkcie $M(x, y)$ czyni z osią $x^{ów}$, będzie

$$\frac{dy}{dx} = \text{sty}\,\alpha,$$

$$dx = v\,\text{dos}\,\alpha\, dt;$$

ztąd wynika

$$dxd^2y - dyd^2x = \frac{d\alpha dx^2}{\text{dos}^2\alpha}$$

$$\frac{d^2x}{dt} = \text{dos}\,\alpha\, dv - v\,\text{wst}\,\alpha\, d\alpha.$$

Podstawiając te wartości, otrzymujemy

$$(3)\qquad v(a + kv^n)d\alpha = \frac{gd^2x}{dt} = g(\text{dos}\,\alpha\, dv - v\,\text{wst}\,\alpha\, d\alpha).$$

albo

$$v^{-n-1}\,dv - \left(\text{sty}\,\alpha + \frac{a}{g\,\text{dos}\,\alpha}\right)v^{-n}\,d\alpha = \frac{kd\alpha}{g\,\text{dos}\,\alpha}.$$

Położmy teraz

$$v^{-n} = u, \qquad \text{zkąd} \qquad v^{-n-1}\,dv = \frac{du}{-n};$$

przez podstawienie tych wartości, ostatnie równanie staje się

$$(4)\qquad du + n\left(\text{sty}\,\alpha + \frac{a}{g\,\text{dos}\,\alpha}\right)ud\alpha = -\frac{nk}{g}\,\frac{d\alpha}{\text{dos}\,\alpha}.$$

To równanie jest linijne; całkując je znajdujemy

$$u = -\frac{nk}{g}\,\frac{\text{dos}^n\alpha}{\text{sty}^{\frac{na}{g}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\text{sty}^{\frac{na}{g}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)d\alpha}{\text{dos}^{n+1}\alpha}.$$

albo

$$(5)\qquad v^{-n} = -\frac{nk}{g}\,\frac{\text{dos}^n\alpha}{\text{sty}^{\frac{na}{g}}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\text{sty}^{\frac{na}{g}}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha}{\text{dos}^{n+1}\alpha}.$$

Tym sposobem prędkość v jest wyznaczona w funkcyi kołowej kąta α.

Możemy teraz wyrazić dx, dy, dz w funkcyi α. Jakoż, jeśli wyrugujemy d^2x między równaniem (1) i pierwszem równaniem (3), mnożąc stronami, otrzymamy

$$v d\alpha = -g\frac{dx}{ds}dt.$$

Z tego równania wywodzimy łatwo następujące

$$(6)\qquad dx = -\frac{v^2}{g}d\alpha,$$

$$(7)\qquad dy = \text{sty}\,\alpha\,dx = -\frac{v^2}{g}\text{sty}\,\alpha\,d\alpha,$$

$$(8)\qquad dt = -\frac{v}{g}\frac{d\alpha}{\text{dos}\,\alpha}.$$

Zagadnienie ogólne jest zupełnie rozwiązane jako zagadnienie Mechaniki, do Analizy należy całkowanie.

Aby ułatwić całkowanie wskazane w formule (5), uczyńmy

$$\text{sty}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = z;$$

co daje

$$\text{sty}\frac{\alpha}{2} = \frac{z-1}{z+1},\quad \text{dos}\,\alpha = \frac{2z}{1+z^2},\quad \text{wst}\,\alpha = \frac{z^2-1}{1+z^2},\quad d\alpha = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Więc

$$v^{-n} = -\frac{nk}{g}\cdot\frac{z^{n-\frac{na}{g}}}{(1+z^2)^n}\int_{z_0}^{z}(1+z^2)^n z^{\frac{na}{g}-n-1}\,dz.$$

Gdy n jest liczbą całkowitą dodatną, całka może się otrzymać pod kształtem skończonym.

W szczególnym przypadku gdy $\frac{na}{g} - n = 2$, różniczka jest dokładna, i daje

$$v^{-n} = -\frac{nk}{2g(n+1)}\,\frac{1+z^2}{z^2} + C = -\frac{nk}{2g(n+1)\operatorname{wst}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)} + C.$$

OPÓR POWIETRZA PROPORCYONALNY DO KWADRATU PRĘDKOŚCI.

226. Gdy prędkość punktu ruchomego nie jest ani bardzo powolna ani bardzo bystra, doświadczenie pokazuje że opór powietrza może być uważany jako proporcyonalny do kwadratu prędkości. Stosując do tego przypadku, który się zwykle zdarza, formułę (5), trzeba w niej uczynić $a = 0$, $n = 2$; będzie

$$(v \operatorname{dos}\alpha)^{-2} = -\frac{2k}{g}\int\frac{d\alpha}{\operatorname{dos}^3\alpha}.$$

Dla ułatwienia całkowania, połóżmy

$$\operatorname{sty}\alpha = p \quad \text{albo} \quad \alpha = \operatorname{łuk\,sty} p,$$

zkąd

$$d\alpha = \frac{dp}{1+p^2},\quad \operatorname{dos}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Zatem powyższe równanie staje się

$$\frac{1+p^2}{v^2} = -\frac{2k}{g}\int dp\sqrt{1+p^2}.$$

Wykonywając całkowanie, znajdujemy

$$(9)\qquad \frac{1+p^2}{v^2}=\frac{k}{g}\left\{C-p\sqrt{1+p^2}-\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\right\}.$$

Stateczna dowolna C wyznacza się przez wartości początkowe v_0 i p_0, to jest

$$C=\frac{g}{k}\cdot\frac{1+p_0^2}{v_0^2}+p_0\sqrt{1+p_0^2}+\log(p_0+\sqrt{1+p_0^2}).$$

Ta równość dowodzi że stateczna C jest dodatna i większa od summy $p_0\sqrt{1+p_0^2}+\log(p_0+\sqrt{1+p_0^2})$.

Zachowując literę C uczyńmy jeszcze, dla skrócenia,

$$C-p\sqrt{1+p^2}-\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=\varphi(p),$$

będziemy mieli, na mocy równania (9),

$$(10)\qquad v^2=\frac{g}{k}\cdot\frac{1+p^2}{\varphi(p)}.$$

Ztąd i z równań (6), (7), (8) wynika

$$(11)\qquad kdx=-\frac{dp}{\varphi(p)},$$

$$(12)\qquad kdy=-\frac{pdp}{\varphi(p)},$$

$$(13)\qquad \sqrt{kg}\,dt=-\frac{dp}{\sqrt{\varphi(p)}}.$$

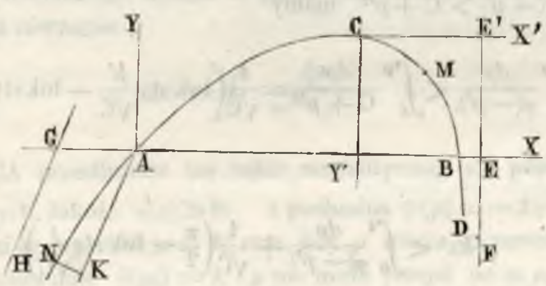
Te równania nie mogą się całkować, chyba tylko przez przybliżenie. Ostatnie pokazuje że dt i dp są znaków przeciwnych; co dowodzi że p maleje kiedy t rośnie. Owoż $\varphi(p)>0$; więc p maleje aż do $-\infty$, bo inaczej czas t nie mógłby powiększać się nieograniczenie.

227. Szukajmy teraz krążnej. Mamy

$$kx = -\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varphi(p)},$$

$$ky = -\int_{p_0}^{p} \frac{pdp}{\varphi(p)}.$$

Ponieważ funkcya $\varphi(p)$ jest dodatna, a zaś $\frac{dx}{dp} < 0$, ztąd wnosimy że x rośnie gdy p maleje od p_0 aż do $-\infty$. Co do rzędnej y, jej pochodna $\frac{kdy}{dp} = \frac{-p}{\varphi(p)}$ dowodzi że y najpierwej rośnie gdy p maleje od p_0 do $p = 0$, a potem y i p maleją nieograniczenie.



Nazywając x_1, y_1 spółrzędne wierzchołka C krążnej, mamy

$$kx_1 = \int_{p}^{p_0} \frac{dp}{\varphi(p)}, \qquad ky_1 = \int_{p}^{p_0} \frac{pdp}{\varphi(p)}.$$

Począwszy od wierzchołka krążnej, ruch punktu materyalnego zbliża się coraz bardziej do ruchu pionowego. Gałąź CB przedłużona ma niemaltyczną. Aby tego dowieśdź, przenieśmy początek spółrzędnych do wierzchołka C, biorąc oś rzędnych w kierunku ciężkości, to jest połóżmy

$$x = x_1 + x', \qquad y = y_1 - y';$$

zkąd

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dy'}{dx'} \quad \text{albo} \quad p = -p,$$

co daje

$$\varphi(-p') = C + p'\sqrt{1+p'^2} + \log(p' + \sqrt{1+p'^2}).$$

Owoż, odcięta x' dąży do granicy skończonej gdy p' rośnie aż do ∞; albowiem, biorąc ilość skończoną $i < p'$, będzie

$$kx' = \int_0^i \frac{dp'}{\varphi(-p')} + \int_i^{p'} \frac{dp'}{\varphi(-p')}.$$

Pierwsza całka jest oczywiście skończona. Co do drugiej, ponieważ $\varphi(-p') > C + p'^2$ mamy

$$\int_i^{p'} \frac{dp'}{\varphi(-p')} < \int_i^{p'} \frac{dp'}{C+p'^2} = \frac{1}{\sqrt{C}}\left(\text{łuk sty}\,\frac{p'}{\sqrt{C}} - \text{łuk sty}\,\frac{i}{\sqrt{C}}\right);$$

więc

$$kx' < \int_0^i \frac{dp}{\varphi(-p')} + \frac{1}{\sqrt{C}}\left(\frac{\pi}{2} - \text{łuk sty}\,\frac{i}{\sqrt{C}}\right).$$

Rzędna y' rośnie nieograniczenie, gdy p' zwiększa się coraz bardziej. Jakoż,

$$ky' = \int_0^i \frac{p'dp'}{\varphi(-p')} + \int_i^{p'} \frac{p'dp'}{\varphi(-p')}.$$

Ale widocznie

$$\varphi(-p') < C + 1 + p'^2 + \frac{1}{2}\log(1+p'^2) + \log 2 < mp'^2,$$

oznaczając przez m liczbę większą od jedności; ta liczba dąży do jedności w miarę jak p' rośnie nieskończenie, albowiem

$$m > 1 + \frac{C + 1 + \frac{1}{2}\log(1 + p'^2) + \log 2}{p'^2}.$$

Można więc wziąć m takie żeby zawsze było

$$ky' > \int_0^i \frac{p'dp'}{\varphi(-p')} + \int_i^{p'} \frac{dp'}{mp'}.$$

Owoż

$$\int_i^{p'} \frac{dp'}{mp'} = \frac{1}{m}\log\left(\frac{p'}{i}\right), \qquad \text{a zaś} \qquad \int_i^{\infty} \frac{dp'}{mp'} = \infty;$$

więc y' może przejść wszelką wielkość.

Z tego wszystkiego wynika że gałąź CBD ma niemaltyczną EF, daną przez równanie

$$kx' = \int_0^i \frac{dp'}{\varphi(-p')}.$$

Gałąź CA przedłużona ma także niemaltyczną, ale pochyłą do osi odciętych. Jakoż, $\varphi(p) > 0$, a pochodna $\varphi'(p) = -2\sqrt{1+p^2}$; to dowodzi że $\varphi(p)$ maleje aż do zera, gdy p rośnie do pewnej wartości p_1 która daje $\varphi(p_1) = 0$, p nie może przejść po za p_1 bo d' byłoby urojone. Przez początek A spółrzędnych poprowadźmy prostę AK

$$y = p_1 x,$$

i spuśćmy na nią prostopadłę NK z punktu N (x, y) gałęzi CAN przedłużonej ; będzie

$$NK = \frac{y - p_1 x}{\sqrt{1+p_1^2}} = \frac{1}{k\sqrt{1+p_1^2}}\int_{p_0}^{p} \frac{(p_1 - p)dp}{C - p\sqrt{1+p^2} - \log(p + \sqrt{1+p^2})}.$$

Owoż, gdy $p = p_1$, oba wyrazy ułamka pod znakiem $\int$ stają się zero, ale wartość ułamka, znaleziona metodą wiadomą, równa się $\frac{1}{2\sqrt{1+p^2}}$; więc granica prostopadłej NK jest ilością skończoną, i wyraża się przez całkę

$$gr.\mathrm{NK} = \frac{1}{k\sqrt{1+p_1^2}}\int_{p_0}^{p_1}\frac{(p_1-p)dp}{\varphi(p)}.$$

Zatem prosta GH równoległa do prostej AK, poprowadzona przez punkt G taki żeby $\mathrm{AG} = gr\mathrm{NK}.\sqrt{1+p_1^2}$, jest niemaltyczną gałęzi CAN.

228. Gdy kąt strzału α_0 jest bardzo mały, pocisk nie wznosi się wysoko; wtedy można, zaniedbując p^2 jako bardzo małe, zcałkować równania (11), (12), i znaleźć krążnę przybliżoną. Ten przypadek zdarza się w strzale rdzennym artylleryi, i wtenczas krążna składa się z krzywych prawie parabolicznych. W takim razie, zaniedbując p^2 i biorąc tylko $\varphi(p) = \frac{g}{k}.\frac{1+p_0^2}{v_0^2} + p_0 - p$, popełnia się błąd bardzo mały.

Połóżmy, dla skrócenia, $\frac{g}{k}.\frac{1+p_0^2}{v_0^2} = a$; będziemy mieli, z przybliżeniem,

$$kx = -\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{a+p_0-p},$$

$$ky = -\int_{p_0}^{p}\frac{pdp}{a+p_0+p}.$$

Pierwsze równanie zcałkowane daje

$$kx = \log\frac{a+p_0-p}{a}.$$

albo

$$ae^{kx} = a + p_0 - p.$$

Drugie daje

$$ky = p - p_0 + (a + p_0)\log\frac{a + p_0 - p}{a}.$$

Więc, jeśli wyrugujemy p, otrzymamy przybliżoną krążnę

$$y = xp_0 - \frac{a}{k}(e^{kx} - kx - 1),$$

albo

$$y = xp_0 - \frac{1 + p_0^2}{2hk^2}(e \quad - kx - 1).$$

Czyniąc $k = 0$, znajdziemy krążnę w próżni (223).

SIŁA STYCZENNA, SIŁA DOŚRODKOWA.

229. Jakakolwiek jest siła P, poruszająca punkt materyalny w przestrzeni, można ją zawsze rozłożyć na dwie siły, z których jedna ma kierunek stycznej a druga kierunek normalnej do krążnej tego punktu.

Jakoż,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\frac{dx}{dt}}{dt} = \frac{d.v\frac{dx}{ds}}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{ds} + v \cdot \frac{d\frac{dx}{ds}}{dt},$$

albo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{ds} + v^2 \cdot \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}.$$

A jeśli oznaczymy przez α, β, γ kąty jakie prędkość punktu ruchomego w położeniu M(x, y, z) czyni z trzema osiami prostokątnemi, przez ρ promień krzywizny, i przez λ, μ, ν jego kąty z temi osiami, będziemy mieli

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\operatorname{dos}\alpha + \frac{v^2}{\rho}\operatorname{dos}\lambda.$$

Tym sposobem równania ruchu punktu materyalnego w przestrzeni biorą kształt

$$(1)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = m\dfrac{dv}{dt}\operatorname{dos}\alpha + \dfrac{mv^2}{\rho}\operatorname{dos}\lambda \\[2ex] m\dfrac{d^2y}{dt^2} = m\dfrac{dv}{dt}\operatorname{dos}\beta + \dfrac{mv^2}{\rho}\operatorname{dos}\mu \\[2ex] m\dfrac{d^2z}{dt^2} = m\dfrac{dv}{dt}\operatorname{dos}\gamma + \dfrac{mv^2}{\rho}\operatorname{dos}\nu. \end{cases}$$

Te równania pokazują że, w ruchu krzywolinijnym punktu materyalnego, siła poruszająca P, (wynikowa wszystkich sił które na ten punkt działają), rozkłada się na dwie siły prostokątne; jedna z nich $m\frac{dv}{dt}$ ma kierunek stycznej MT w położeniu M punktu materyalnego na krążnej, i dlatego nazywamy ją SIŁĄ STYCZENNĄ; druga $\frac{mv^2}{\rho}$, skierowana wedle promienia MK kąta krzywizny i ku jego środkowi K, została mianowana SIŁĄ DOŚRODKOWĄ albo *siłą kuśrodkową* (*centripeta*). Oznaczając przez S i D te dwie siły składowe, mamy

$$(2)\quad \begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = m\dfrac{d^2s}{dt^2} = \mathrm{S}, \quad \text{albo} \quad \dfrac{mvdv}{ds} = \mathrm{S}. \\[2ex] \dfrac{mv^2}{\rho} = \mathrm{D}, \end{cases}$$

Wartości

$$\frac{dv}{dt} \quad \text{albo} \quad \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{i} \quad \frac{v^2}{\rho}$$

nazywają się pierwsza *przyspieszeniem styczennem*, druga *przyspieszeniem dośrodkowem*

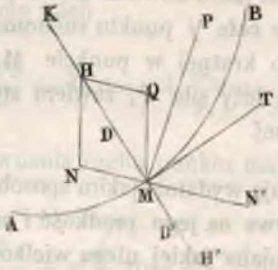
Powyższy rozkład sił jasno dowodzi że siła poruszająca P, a temsamem przyspieszenie całe j punktu ruchomego, jest na płasczyznie przylegającej do krążnej w punkcie M; albowiem płasczyzna PMT, na której leży siła P, zawiera styczną MT i promień krzywizny MK krążnej.

Formuły (2) pokazują wydatnie jakim sposobem siła działająca na punkt ruchomy wpływa na jego prędkość i na krzywiznę krążnej. I w samej rzeczy, zmiana jakiej ulega wielkość prędkości punktu materyalnego, pochodzi jedynie od siły styczennej; tak że, gdyby ta siła styczenna była ciągle zero, to jest gdyby siła poruszająca P była ciągle normalna do krążnej, prędkość nie zmieniałaby się i ruch byłby jednostajny.

Podobnie, krzywizna $\frac{1}{\rho}$ zależy wyłącznie od siły dośrodkowej; tak że, gdyby siła dośrodkowa była ciągle zero, to jest, gdyby siła poruszająca była ciągle styczna do krążnej, krzywizna tej linii byłaby zero, i ruch byłby prostolinijny; i nawzajem.

Jeśli punkt materyalny jest pod działaniem kilku sił, składać wszystkie siły w jedną wynikowę P, i potem rozkładać tę ostatnią na dwie składowe, styczenną i dośrodkową, wychodzi na jedno co rozkładać osobno każdą z sił przyłożonych na dwie inne, jedną wedle stycznej, a drugą na płasczyznie normalnej do krążnej. Siły styczenne składają się w jedną siłę S, równą ich summie algebrycznej; a siły normalne dają wynikowę D, skierowaną wedle promienia koła krzywizny ku jego środkowi. Zkąd wynika że, jeśli która z sił przyłożonych do punktu materyalnego M jest normalna do krążnej, to ona nie daje składowej styczennej, nie wchodzi do wartości $m\frac{dv}{dt}$, i temsamem nie wpływa na przyspieszenie $\frac{dv}{dt}$. Tak samo, siła skierowana wedle stycznej do krążnej nie wchodzi do wartości $\frac{mv^2}{\rho}$, a zatem nie wpływa na zmianę kierunku prędkości.

230. Gdy punkt materyalny M. poddany sile P, jest zmuszony poruszać się na krzywej stałej AB, można go uważać jako wolny,



przydając tylko do siły P oddziaływanie N danej linii. To oddziaływanie, czyli opór N krzywej AB, albo tężność wiązadła które zmusza punkt ruchomy M do jej opisywania, jest normalne do tej krzywej, a równe i przeciwne parciu punktu M. Aby znaleźć ustawę ruchu punktu materyalnego, rozłóżmy siłę poruszającą P na styczenną S i na normalną Q do krążnej AB. Ponieważ siła N, w przypuszczeniu że niema tarcia, jest normalna do danej krążnej i nie wchodzi do wartości $m\frac{dv}{dt}$, równanie różniczkowe ruchu punktu materyalnego na tej linii, jest

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = S.$$

To równanie ma zupełnie ten sam kształt co równanie różniczkowe ruchu prostolinijnego

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P,$$

i analitycznie jest to samo, jeśli siła styczenna S wyraża się w funkcyi zmiennych s i t tak jak siła P w funkcyi zmiennych x i t.

Nie trudno, uważając siły styczenną i dośrodkową, znaleźć parcie jakie dana krążna AB wytrzymuje. Niech będzie D wynikowa sił N i Q leżących na płaszczyźnie normalnej do krążnej w punkcie M.

Siła D jest siłą dośrodkową, która ma natężenie $\frac{mv^2}{\rho}$ i działa w kierunku MK promienia koła krzywizny.

Siłę D', równą i przeciwną sile dośrodkowej $D = \frac{mv^2}{\rho}$, nazwano SIŁĄ ODŚRODKOWĄ (*centrifuga*). Trzeba dobrze uważać że siła odśrodkowa nie działa na punkt ruchomy M, bo do niego nie jest przyłożona; jest to siła zmyślona.

Owoż, opór N jest równy i przeciwny parciu N' jakie punkt materyalny wywiera, w każdej chwili, na krążnę na której zostawać musi, a siła odśrodkowa D jest równa i wprost przeciwna wynikowej sił N i Q; więc parcie N' jakie dana krążna wytrzymuje jest wynikową siły odśrodkowej D' i siły normalnej Q.

Jeśli siła przyłożona P ma kierunek promienia krzywizny krążnej, wtenczas, jako łatwo widzieć, parcie N' jest summą albo różnicą siły odśrodkowej D' i siły P.

W szczególnym przypadku, gdy siła przyłożona P jest styczną do danej krążnej, składowa $Q = 0$, i opór N stanowi sam siłę dośrodkową D; wtedy siła odśrodkowa D' wyraża całe parcie jakiego krążna doznaje.

231. Uważajmy teraz punkt materyalny który, nie będąc podległy żadnej sile przyłożonej, jest zmuszony zostawać na danej krzywej i porusza się na niej na mocy odebranej prędkości początkowej. Możemy wyobrazić sobie ten punkt jako wolny, jeśli przyłożymy do niego siłę N która przedstawia oddziaływanie danej krążnej. Ponieważ siła N jako normalna nie wchodzi do składowej styczennej, będzie

$$m\frac{dv}{dt} = 0,$$

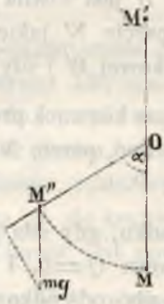
zkąd

$$v = v_0 \quad \text{i} \quad s = v_0 t + s_0.$$

To dowodzi że, w przypadku uważanym, punkt materyalny M przebiega daną krążnę ruchem jednostajnym. Nadto $Q = 0$, przeto

$N = \frac{mv^2}{\rho}$. Więc, gdy punkt materyalny przebiega daną krążnę ruchem jednostajnym, siła odśrodkowa przedstawia jego parcie na tę krążnę, albo wyraża tężność wiązadła które go zmusza do opisywania tej krążnej.

Jako przykład tego rodzaju ruchu weźmy procę. Kamień przyczepiony do jednego końca sznurka, którego drugi koniec trzymamy w ręku, stanowi procę; dając szybki obrót kamieniowi, można otrzymać żeby opisywał, ruchem jednostajnym, mniej więcej okrąg pionowy na około ręki (216). Niech będzie M najniższe położenie



kamienia. Tężność sznurka w kierunku OM byłaby równa ciężarowi mg kamienia, gdyby był nieruchomy; ale, jeśli jest w ruchu, trzeba przydać do tego ciężaru siłę odśrodkową $\frac{mv^2}{\rho}$ której kierunek schodzi się z jego kierunkiem. Więc tężność sznurka w położeniu OM, wyraża się przez

$$m\left(\frac{v^2}{\rho} + g\right).$$

W położeniu średnicowo przeciwnem OM', ta tężność będzie

$$m\left(\frac{v^2}{\rho} - g\right).$$

Jako widzimy, tężność może być dodatna albo odjemna, a nawet zero, w miarę większej albo mniejszej prędkości. Jeśli tężność jest dodatna, sznurek zostaje ciągle wytężony, i kamień opisuje przybliżony okrąg. Jeśli przeciwnie tężność jest odjemna, sznurek nie jest wytężony i kamień opada. Nakoniec, tężność zero jest punktem przejścia z jednego stanu do drugiego. To wszystko stosuje się do położeń pośrednich, jako OM″; tylko, aby mieć tężność, trzeba brać, nie cały ciężar mg kamienia, ale jego składowe $mg\cos\alpha$ wedle przedłużenia sznurka. Zresztą, tężność w położeniach pośrednich jest zawarta między $m\left(\frac{v^2}{\rho}+g\right)$ i $m\left(\frac{v^2}{\rho}-g\right)$; zaniedbując ciężar samego sznurka

232. Jeśli punkt materyalny M musi poruszać się na danej powierzchni, wtenczas opisuje na niej pewną linię AMB. Można uważać punkt M jako wolny w przestrzeni, dołączając tylko do siły poruszającej P siłę N która przedstawia oddziaływanie czyli opór tej powierzchni. Opór N, równy i przeciwny parciu punktu M, jest normalny do powierzchni, jeśli niema tarcia. W tem przypuszczeniu, rozłóżmy siłę P na dwie, jedną S styczną do krążnej AMB, drugą Q leżącą na płaszczyznie normalnej do tej linii. Siły N, Q, obie normalne do krążnej, składają się w jedną D skierowaną wedle promienia krzywizny w punkcie M(x, y, z) krążnej. Mamy więc, jako w poprzedzającym przypadku,

$$m\frac{dv}{dt}=\mathrm{S},\qquad \frac{mv^2}{\rho}=\mathrm{D},$$

Rozumując jako wyżej, znajdziemy łatwo że *parcie jakie powierzchnia wytrzymuje, w danym punkcie, jest wynikową siły odśrodkowej* D′ *i siły normalnej* Q, *a ta wynikowa jest prostopadła do powierzchni.*

Więc, aby można wyznaczyć parcie, trzeba mieć Q, v i ρ, to jest znać ruch punktu materyalnego i jego krążnę. Widzimy teraz dobrze że siła odśrodkowa czyni różnicę między oddziaływaniem statycznem i oddziaływaniem dynamicznem powierzchni albo linii. I tak, jeśli punkt materyalny M zostaje w równowadze na danej powierzchni, będzie $v=0$ i temsamem $\mathrm{D}=0$; wtedy siła Q jest normalną do powierzchni i wyraża całe parcie. Ale, jeśli punkt M porusza się na tej powierzchni, która zawsze przeciwstawi opór, w tym ruchu zmuszonym istnieje koniecznie siła dośrodkowa D; zatem parcie jest wynikową siły Q i siły odśrodkowej $\frac{mv^2}{\rho}$.

W szczególnym przypadku, gdy siła przyłożona P jest styczna do krążnej, albo gdy niema żadnej siły przyłożonej, $Q=0$; wtedy siła odśrodkowa stanowi sama parcie punktu materyalnego na powierzchnię i jest do niej normalna. Ale siła odśrodkowa jest zawsze na płaszczyznie przylegającej do krążnej; ztąd wynika że, w przypadku którym się zajmujemy, ta płaszczyzna przylegająca przechodzi przez normalnę do powierzchni w tym punkcie: co jest właśnie cechującą własnością *linii geodezyjnej*. Więc opisana krążna jest jedną z linij geodezyjnych danej powierzchni.

Z tej okoliczności dobrze jest uważać że linia geodezyjna posiada trzy główne własności:

1° geometryczną: jest *ogólnie* najkrótszą linią jaką można poprowadzić na danej powierzchni między dwoma jej punktami (*).

2° statyczną: wyraża figurę równowagi którą bierze sznurek wytężony na powierzchni.

3° dynamiczną: jest drogą którą idzie punkt materyalny na powierzchni gdy jest zostawiony swojej własnej prędkości.

233. Siła bezwładności. Nazywa się *siłą bezwładności* punktu materyalnego w ruchu siła równa i wprost przeciwna jego sile poruszającej.

Niech będą x, y, z spółrzędne punktu materyalnego, odniesione do trzech osi jakichkolwiek; m jego massa, t czas. Wiemy że składowe siły poruszającej P, szacowane wedle tych osi, wyrażają się przez $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$; zatem składowe siły bezwładności są

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\quad -m\frac{d^2y}{dt^2},\quad -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

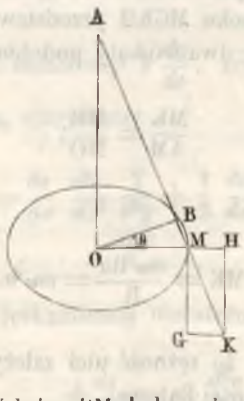
(*) Na sferze łuki kół wielkich są liniami geodezyjnemi. Najkrótszą drogą od jednego punktu do drugiego na sferze jest dobrze łuk koła wielkiego; ale nawzajem łuk koła wielkiego łączący dwa punkta nie jest najkrótszą drogą, jeśli nie jest mniejszym łukiem tego koła.

Widzieliśmy że siła poruszająca P rozkłada się na dwie siły prostokątne, to jest na styczenną $m\frac{dv}{dt}$, i na dośrodkową $\frac{mv^2}{\rho}$. Tak samo siła bezwładności może się rozłożyć na dwie które są im równe i wprost przeciwne; pierwsza jest siłą *styczenną bezwładności* $-m\frac{dv}{dt}$, druga siłą *odśrodkową* $\frac{mv^2}{\rho}$.

Siła bezwładności punktu materyalnego wypływa z niego samego, jest jego oddziaływaniem przeciw sile poruszającej; a nie będąc przyłożona do tego punktu, nie może w żaden sposób ani mu udzielać ruchu ani go w niczem modyfikować. Siła bezwładności jest siłą idealną. Nazwa *siły bezwładności* nie zdaje się logiczna, ale jest użyteczna w wysłowieniach twierdzeń mechaniki. Mieliśmy już tego przykład w wyrażeniu parcia za pomocą siły odśrodkowej; zobaczymy później jak wprowadzenie samej nazwy sił bezwładności ułatwia wysłowienie daleko ważniejszych twierdzeń.

Aby lepiej wyjaśnić to co nazywają *siłą* odśrodkową weźmiemy kilka przykładów.

234. Zagadnienie V. *Kulka* M *mająca massę* m, *zawieszona w punkcie* A *na nici długości* AM = a, *została oddalona od położenia pionowego* AO, *i pchnięta tak żeby opisywała koło promienia* OM = R *ruchem jednostajnym. Znaleźć tęzność nici* AM.



Nazwijmy s długość łuku BM koła, odpowiedającą kątowi środkowemu BOM $=\theta$; będziemy mieli

$$s = R\theta.$$

Co daje prędkość

$$\frac{ds}{dt} = R\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Stosunek $\frac{d\theta}{dt}$ nazywa się *prędkością kątową* punktu M; jeśli oznaczymy tę prędkość przez ω, będzie

$$\frac{ds}{dt} = R\omega.$$

Zatem, siła odśrodkowa wyraża się przez

$$\frac{mv^2}{\rho} = m\,\omega^2 R\,;$$

a mamy

$$Q = mg.$$

Tężność nici jest wynikową tych dwóch sił prostokątnych. Owoż, niech pionowa MG przedstawia ciężar kulki M, a długość MH, wzięta na przedłużeniu promienia OM, siłę odśrodkową $m\omega^2 R$; przekątna MK równoległoboku MGKH przedstawi wielkość i kierunek tężności nici AM. Więc dwa trójkąty podobne MHK, MAO dają

$$\frac{MK}{AM} = \frac{MH}{MO},$$

zkąd

$$MK = \frac{m\omega^2 Ra}{R} = m\omega^2 a.$$

Ten wynik dowodzi że tężność nici zależy od jej długości, od massy kulki i od prędkości kątowej.

235. ZAGADNIENIE VI. *Punkt materyalny, pod działaniem siły mającej kierunek stały, porusza się, w pewnym środku który stawi opór. Wyznaczyć ustawę oporu jeśli krążna jest wiadoma, i nawzajem krążnę jeśli opór wiadomy.*

Biorąc oś rzędnych wprost równoległą do siły Y działającej na punkt ruchomy, nazwijmy R opór środka i s łuk przebieżony; równania różniczkowe ruchu, wyrażone przez siły styczenną i dośrodkową, będą (w przypuszczeniu $m = 1$)

$$\frac{vdv}{ds} = \mathrm{Y}\frac{dy}{ds} - \mathrm{R}$$

$$\frac{v^2}{\rho} = \mathrm{Y}\frac{dx}{ds}.$$

Owoż,

$$\rho = \frac{ds^3}{dxd^2y};$$

przez podstawienie tej wartości, drugie równanie staje się

$$v^2 = \frac{ds^2}{dx^2}\frac{\mathrm{Y}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Dla wyrugowania składowej $\mathrm{Y}\frac{dy}{ds}$, zróżniczkujmy ostatnie równanie względem x, otrzymamy

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{ds}{dx}\frac{d^2s}{dx^2}.\frac{\mathrm{Y}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dx^2}\frac{d.}{dx}\frac{\mathrm{Y}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Ale, ponieważ x jest zmienną niezależną, mamy

$$ds\frac{ds}{dx^2} = dy\frac{d^2y}{dx^2};$$

podstawmy tę wartość i podzielmy przez $\frac{ds}{dx}$, będzie

$$v\frac{dv}{ds} = \mathrm{Y}\frac{dy}{ds} + \frac{1}{2}\frac{ds}{dx}\frac{d.}{dx}\frac{\mathrm{Y}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Odciągając teraz ostatnie równanie od pierwszego, znajdujemy formułę

$$\mathrm{R} = -\frac{1}{2}\frac{ds}{dx}\frac{d.}{dx}\frac{\mathrm{Y}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

która rozwiązuje podwójne zagadnienie.

W szczególnym przypadku, gdy opór jest proporcyonalny do kwadratu prędkości i do gęstości D środka, oznaczając przez k spółczynnik stały, mamy

$$\mathrm{R} = k\mathrm{D}v^2.$$

Jeśli wyrugujemy v^2 i potem ρ, będzie

$$\mathrm{R} = k\mathrm{D}\rho\mathrm{Y}\frac{dx}{ds} = k\mathrm{D}\frac{ds^2}{dx^2}\frac{\mathrm{Y}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Więc, podstawiając wartość R, znajdujemy

$$2k\mathrm{D} = -\frac{dx}{ds}\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\mathrm{Y}}\frac{d.}{dx}\frac{\mathrm{Y}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{dx}{ds}\frac{d.}{dx}\log\frac{\mathrm{Y}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Ta formuła daje gęstość środka w którym się punkt porusza, gdy krążna jest wiadoma; i nawzajem daje krążnę gdy gęstość jest wiadoma.

236. Zagadnienie VII. *Punkt materyalny, przyciągany przez środek stały, porusza się w płynie opornym (w powietrzu). Wyznaczyć ustawę oporu gdy jest znana krążna; i nawzajem krążnę gdy opór wiadomy.*

Weźmy punkt w którym się znajduje środek przyciągający za początek spółrzędnych biegunowych r, θ. Nazywając Q siłę przyciągającą, R opór, p prostopadłę spuszczoną z bieguna na styczną do krążnej w punkcie $M(r, \theta)$, i biorąc massę $m = 1$, mamy równanie różniczkowe ruchu

$$v\frac{dv}{ds} = -Q\frac{dr}{ds} - R$$

$$\frac{v^2}{\rho} = Q\frac{p}{r}.$$

Owoż, wiadomo z Analizy że

$$\rho = \frac{rdr}{dp};$$

przez podstawienie tej wartości, drugie równanie staje się

$$v^2 = Qp\frac{dr}{dp}.$$

Aby wyrugować składową $Q\dfrac{dr}{ds}$, zróżniczkujmy ostatnie równanie względem ds, będziemy mieli

$$v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d.}{ds}\frac{1}{p^2}\left(p^3Q\frac{dr}{dp}\right) = -Q\frac{dr}{ds} + \frac{1}{2p^2}.\frac{d.}{ds}\left(p^3Q\frac{dr}{dp}\right);$$

po czem, odciągając to równanie od pierwszego, znajdujemy formułę

$$R = -\frac{1}{2p^2}\frac{d.}{ds}\left(p^3Q\frac{dr}{dp}\right),$$

która rozwiązuje podwójne zagadnienie.

W szczególnym przypadku, przypuszczając opór proporcyonalny do kwadratu prędkości i do gęstości D, będzie

$$R = kDv^2,$$

gdzie k oznacza spółczynnik stały.

Jeśli wyrugujemy v^2 będziemy mieli

$$R = kDQp\frac{dr}{dp}.$$

Więc, porównywając tę wartość R z powyższą, otrzymujemy formułę

$$2kD = -\frac{\frac{d.}{ds}\left(p^3Q\frac{dr}{ds}\right)}{p^3Q\frac{dr}{ds}} = -\frac{d}{ds}.\log\left(p^3Q\frac{dr}{ds}\right),$$

która daje gęstość gdy krążna jest wiadoma; i nawzajem.

Jeśli zcałkujemy ostatnie równanie, oznaczając przez A stateczną dowolną, znajdziemy

$$Q = \frac{Ae^{-2k\int Dds}}{p^3\frac{dr}{ds}}.$$

Ta całka daje siłę przyciągania, gdy krążna punktu ruchomego i gęstość płynu są wiadome.

Uwaga. Zagadnienie VI i VII znajdują się w dziele Newtona: *Principia*, lib. II, rozwiązane szczególnemi sposobami które świadczą o geniuszu wielkich matematyków owego wieku.

ROZDZIAŁ III.

TWIERDZENIA ZASADNICZE.

Są, w małej liczbie, ogólne twierdzenia stanowiące główne zasady w Mechanice punktu, które dają, w pewnych przypadkach, całki pierwsze równań różniczkowych ruchu, albo przynajmniej wydatnie pokazują ważniejsze własności tego ruchu. Niemi się teraz zajmiemy.

237. Twierdzenie ilości ruchu. W ruchu prostolinijnym punktu materyalnego massy m, pod działaniem siły P, mamy

$$m\frac{dv}{dt}=\mathrm{P}$$

albo

(1) $$mdv=\mathrm{P}dt.$$

Zkąd, całkując w granicach czasu 0 i t, otrzymujemy

(2) $$mv-mv_0=\int_0^t \mathrm{P}dt.$$

Wieloczyn mv, jako już wiemy, nazywa się ilością ruchu punktu materyalnego. Wieloczyn $\mathrm{P}dt$ został mianowany *popędem różniczkowym siły*, a całka $\int_0^t \mathrm{P}dt$ popędem siły przez czas t. Równania (1) i (2) wyrażają tak zwane TWIERDZENIE ILOŚCI RUCHU.

Przyrost ilości ruchu punktu materyalnego, przez czas nieskończenie mały dt, *albo przez czas skończony* t, *jest równy popędowi siły przez ten sam czas.*

To twierdzenie stosuje się do rzutu ruchu na osi jakiejkolwiek. Jakoż, mamy

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X$$

albo

$$d.m\frac{dx}{dt}=Xdt,$$

ztąd, całkując, otrzymujemy

$$(3)\qquad m\frac{dx}{dt}-m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=\int_0^t Xdt.$$

Wieloczyn $m\frac{dx}{dt}$ massy punktu materyalnego przez rzut jego prędkości na osi OX jest rzutem ilości ruchu na tej osi, a wieloczyn Xdt jest rzutem popędu siły, albo popędem siły zrzutowanej.

Zatem, równania (3) i (4) tak się wysłowiają:

Przyrost ilości ruchu zrzutowanego na osi jakiejkolwiek, przez czas nieskończenie mały dt, *albo skończony* t, *jest równy popędowi siły zrzutowanej przez ten sam czas.*

Uważajmy jeszcze siłę styczenną. Mamy

$$mdv=Sdt,$$

zkąd, całkując,

$$(4)\qquad mv-mv_0=\int_0^t Sdt.$$

Te dwa równania dowodzą że *przyrost ilości ruchu punktu materyalnego, przez czas jakikolwiek, jest równy popędowi siły styczennej przez ten sam czas.*

Całki dające popęd siły P albo popęd jej rzutu mogą się wyrachować ściśle albo z przybliżeniem przez kwadratury, gdy siła jest funkcyą wiadomą czasu t. Jeśli zaś ta siła jest funkcyą ilości które są funkcyami niewiadomemi czasu, jako prędkość, nie można otrzymać rzeczonych całek aż po zupełnem rozwiązaniu zagadnienia; bo dopiero wtedy siła będzie się mogła wyrazić w funkcyi wywikłanej czasu t. Ale, czy całkowanie jest albo nie jest możebne, całka powinna być zawsze uważana jako mająca wartość zupełnie wyznaczoną, chociaż niewyłuszczoną.

Jeśli całka $\int_0^t \mathrm{S}dt$ wyraża się pod kształtem skończonym, wtedy mamy jedną z całek ruchu która daje prędkość punktu materyalnego.

Gdy siła P jest ilością stałą, jej popęd wyraża się przez Pt. Owoż, popęd siły ma za miarę przyrost ilości ruchu punktu materyalnego, przez czas jej działania. Zmierzywszy massę i prędkość pocisku przy wyjściu z działa, mamy wieloczyn mv który daje wartość popędu siły pochodzącej ze spalenia prochu; ale nie mamy samej siły, bo jej wprost mierzyć nie można, nie znając naprzód ustawy jej działania. Dzieląc wieloczyn mv przez czas t działania siły, znajdujemy wartość średnią tej siły.

238. Twierdzenie momentu ilości ruchu. Uważając moment ilości ruchu punktu materyalnego, otrzymuje się twierdzenie równie ważne, jak powyższe. Weźmy równania różniczkowe ruchu punktu materyalnego w przestrzeni.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z};$$

pomnóżmy pierwsze przez y drugie przez x i odciągnijmy stronami, będzie

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \mathrm{Y}x - \mathrm{X}y.$$

Pomnóżmy teraz przez dt, i zcałkujmy w granicach czasu od 0 do t, znajdziemy

$$(5) \qquad m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \int_0^t (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)dt.$$

Przypuszczając osie spółrzędne prostokątne, i uważając

$$m\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{dy}{dt}, \quad m\frac{dz}{dt}$$

jakoby składowe siły mającej natężenie mv, widzimy że pierwsza strona wyraża moment ilości ruchu względem osi OZ. Ztąd następujące *Twierdzenie momentu ilości ruchu.*

Moment ilości ruchu punktu materyalnego, względem jakiejkolwiek osi, jest równy momentowi popędu siły około tej osi, przez czas t.

Gdy druga strona może się całkować, równanie (5) daje jedną całkę ruchu; inaczej to równanie nie jest korzystniejsze od innych. Całkowanie jest możebne w szczególnym przypadku, gdy moment siły P względem osi jest zero. Co się zdarza, kiedy siła znajduje się na jednej płaszczyznie z pewną linią prostą niezmienną. Albowiem, biorąc tę prostę za oś OZ, będzie

$$\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y = \mathrm{P}q\,\mathrm{wst}\gamma;$$

wtedy, albo siła P spotyka oś OZ, co daje $q = 0$; albo jest do niej równoległa, co daje $\mathrm{wst}\gamma = 0$; w obydwóch razach moment $\mathrm{P}q\,\mathrm{wst}\gamma = 0$. Więc, w tym przypadku, moment ilości ruchu względem osi OZ jest ilością stateczną.

Ten ważny wynik prowadzi do głównego twierdzenia zwanego Zasadą powierzchni, które teraz wyłożymy.

239. Jeśli siła P, działająca na punkt materyalny, jest ciągle na tej samej płasczyznie z pewną prostą niezmienną, moment siły względem tej prostej jest zero, jakośmy powiedzieli; więc, biorąc tę linię za oś OZ będziemy mieli

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0$$

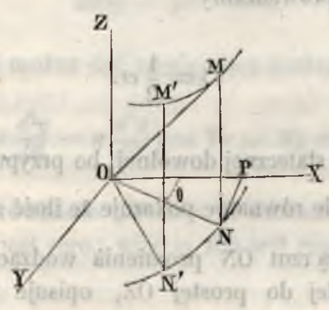
albo

$$d.\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0.$$

Ztąd, całkując i nazywając c stateczną dowolną, otrzymujemy

$$(6) \qquad xdy - ydx = cdt.$$

Niech będzie teraz, w założeniu trzech osi prostokątnych OX, OY, OZ, położenie M(x, y, z) punktu materyalnego na końcu



czasu t, MM' łuk opisany w czasie dt, NN' jego rzut na płasczyznie xy, $ON = r$ rzut promienia wodzącego OM na tej płasczyznie. Jeśli nazwiemy θ kąt promienia ON z osią OX, będzie

$$\theta = \text{łuk sty}\, \frac{y}{x}.$$

Ztąd, różniczkując, wyprowadzamy

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

albo

$$xdy - ydx = r^2 d\theta.$$

Porównywając ten wynik z równaniem (6), znajdujemy ważną formułę, użyteczną w Astronomii

$$(7) \qquad r^2 d\theta = c dt.$$

Owoż, wieloczyn $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ wyraża powierzchnię wycinka NON′; jeśli więc nazwiemy $d\lambda$ tę powierzchnię, będzie

$$d\lambda = \frac{1}{2} c dt,$$

zkąd, całkując wyprowadzamy

$$(8) \qquad \lambda = \frac{1}{2} ct.$$

Nie przydaliśmy statecznej dowolnej, bo przypuszczamy że $\lambda = 0$ gdy $t = 0$. Ostatnie równanie pokazuje że ilość stała $\frac{1}{2} c$ oznacza powierzchnię którą rzut ON promienia wodzącego OM, na płasczyznie prostopadłej do prostej OZ, opisuje w jedności czasu.

Zasada powierzchni. Formuły (7) i (8) stanowią właśnie *zasadę powierzchni* którą tak się wysłowia

Gdy siła poruszająca punkt materyalny jest ciągle na jednej płasczyznie z pewną prostą niezmienną, promień wodzący który łączy jeden z punktów tej prostej z punktem materyalnym, zrzutowany na płasczyznie prostopadłej do tej linii, opisuje powierzchnie proporcyonalne do czasów.

Nawzajem, *jeśli punkt materyalny porusza się w przestrzeni tak, że rzut promienia wodzącego na pewnej płasczyznie opisuje wycinki proporcyonalne do czasów, wtedy siła poruszająca znajduje się na jednej płasczyznie z prostą przechodzącą przez spólny wierzchołek tych wycinków i prostopadłą do ich płasczyzny.*

Na dowodzenie wzajemnicy weźmy płasczyznę opisanych wycinków za płasczyznę xy, i prostopadłę do niej we spólnym wierzchołku tych wycinków za oś OZ; ta oś przejdzie przez biegun promienia wodzącego. Terez, według założenia, mamy

$$\lambda = ct;$$

zkąd, różniczkując, wywodzimy

$$d\lambda = cdt,$$

albo

$$xdy - ydx = 2cdt.$$

Różniczkując drugi raz, będzie

$$xd^2y - yd^2x = 0.$$

Temu wynikowi można dać następującą postać

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \mathrm{Y}x - \mathrm{X}y = 0.$$

Owoż, ostatnie równanie dowodzi że moment siły poruszającej względem osi OZ jest zero; więc ta siła jest ciągle na jednej płaszczyznie z osią OZ.

240. Zasada powierzchni ma zawsze miejsce gdy siła poruszająca jest *siłą środkową*, to jest taką której kierunek przechodzi ciągle przez ten sam punkt stały czyli środek. I w samej rzeczy, jeśli punkt materyalny jest pod działaniem siły skierowanej ku środkowi stałemu O, zasada powierzchni stosuje się do wszelkiej płasczyzny poprowadzonej przez ten środek, bo wtedy siła poruszająca znajduje się na jednej płasczyznie z każdą prostą przez środek O przechodzącą. W tym przypadku zasada powierzchni daje zaraz trzy całki pierwsze ruchu. Aby je otrzymać, przez środek O poprowadźmy trzy płasczyzny prostokątne XOY, XOZ, YOZ, i na każdej uważajmy wycinki jakie rzut promienia wodzącego opisuje; na mocy tego co poprzedza, mamy trzy równania

$$
\begin{aligned}
xdy - ydx &= cdt,\\
(9) \qquad zdx - xdz &= c'dt,\\
ydz - zdy &= c''dt,
\end{aligned}
$$

w których c, c', c'' wyrażają trzy stateczne dowolne, mające już wiadome znaczenie. Te równania są właśnie trzema całkami pierwszemi rozbieranego zagadnienia ruchu.

Jeśli pomnożymy pierwsze równanie przez z, drugie przez y, trzecie przez x, i dodamy, będzie

$$0 = cz + c'y + c''x.$$

To równanie dowodzi TWIERDZENIA : *Krążna punktu materyalnego* M(x, y, z) *poruszającego się pod działaniem siły środkowej jest krzywą płaską, której płaszczyzna przechodzi przez punkt stały* O *kierunku tej siły.*

Ten ważny wynik można było przewidzieć a priori. Jakoż, krążna punktu M jest koniecznie krzywą płaską, która leży na płaszczyznie przechodzącej przez punkt O i przez kierunek prędkości początkowej; bo niema przyczyny żeby którykolwiek z jej punktów znajdował się raczej z jednej strony tej płaszczyzny niż z drugiej.

Jeśli teraz nazwiemy $d\lambda$, $d\lambda'$, $d\lambda''$ powierzchnie wycinków opisanych, w czasie dt, przez rzuty promienia wodzącego OM na trzech płaszczyznach spółrzędnych xy, xz, yz, będziemy mieli, jako wiadomo,

$$d\lambda = \frac{1}{2}\, cdt, \qquad d\lambda' = \frac{1}{2}\, c'dt, \qquad d\lambda'' = \frac{1}{2}\, c''dt;$$

zkąd całkując otrzymujemy

$$(10) \qquad \lambda = \frac{1}{2}\, ct, \qquad \lambda' \frac{1}{2}\, c't, \qquad \lambda'' \frac{1}{2}\, ct.$$

Niema potrzeby przydawać żadnej statecznej, bo z określenia λ, λ', λ'' znaczą powierzchnie opisane w czasie t, i muszą być zero gdy $t = 0$.

Ponieważ płaszczyzna krążnej punktu poruszającego się pod działaniem siły środkowej, może być wzięta za jedną z płasczyzn na których się rzutuje promień wodzący, wynika z tąd OGÓLNE TWIERDZENIE.

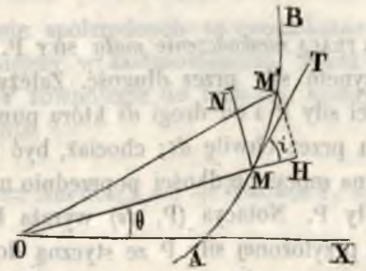
Punkt materyalny pod działaniem siły środkowej opisuje w przestrzeni krzywę płaską, i jego promień wodzący kreśli na płasczyznie tej linii wycinki proporcyonalne do czasów.

NAWZAJEM, *jeśli punkt materyalny opisuje krzywę płaską, a promień wodzący kreśli na jej płasczyznie wycinki proporcyonalne do czasów, siła poruszająca jest ciągle na płasczyznie tej linii i przechodzi przez spólny wierzchołek wycinków.*

Aby okazać wzajemnicę, weźmy płasczyznę opisanej krzywej za płasczyznę xy, i prostopadłę do niej, przechodzącą przez spólny wierzchołek O wycinków, za oś rzędnych OZ. Wiemy już że siła poruszająca jest ciągle na jednej płasczyznie z osią OZ; a widzimy teraz że jej składowa $Z = \frac{md^2z}{dt^2} = 0$, ponieważ punkt M porusza się na płasczyznie xy na której $z = 0$; to pokazuje że siła poruszająca jest także na płasczyznie xy. Więc ta siła musi przechodzić przez początek spółrzędnych O, który jest spólnym wierzchołkiem opisanych wycinków.

241. Zagadnienie ruchu punktu materyalnego pod działąniem siły środkowej uproszcza się ogólnie, gdy płasczyzna krążnej jest wzięta za płasczyznę xy; bo wtedy są tylko dwie niewiadome x i y, a trzeba znaleźć cztery całki ruchu, to jest: dwie całki pierwsze i dwie całki drugie. Zasada powierzchni daje zaraz jedną całkę pierwszą.

W tego rodzaju ruchu nietrudno, za pomocą spółrzędnych biegunowych, wyznaczyć prędkość i jej dwie składowe, jedną wedle



promienia wodzącego a drugą w kierunku prostopadłej do tego promienia. Jakoż, mamy najpierwej

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2d\theta}{dt^2}.$$

Poczem, jeśli nazwiemy i kąt jaki czyni styczna MT, idąca w stronę ruchu, z kierunkiem OM promienia wodzącego, będzie

$$\text{sty}\, i = \frac{rd\theta}{dr}, \quad \text{dos}\, i = \frac{dr}{ds}, \quad \text{wst}\, i = \frac{rd\theta}{ds}.$$

Zatem, składowa prędkości skierowana wedle promienia wodzącego OM, i składowa wedle prostopadłej MN do tego promienia idąca w stronę ruchu, wyrażają się przez

$$v\,\text{dos}\, i = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt},$$

$$v\,\text{wst}\, i = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{rd\theta}{ds} = \frac{rd\theta}{dt}.$$

O PRACY SIŁ.

242. Gdy punkt materyalny M do którego jest przyłożona siła P, przebiega nieskończenie małą przestrzeń ds w chwili dt, wieloczyn

$$\text{P}ds\, \text{dos}(\text{P}, ds)$$

jest to co nazywają PRACĄ *nieskończenie małą* SIŁY P. Tak określona praca jest wieloczynem siły przez długość. Zależy ona, jako widzimy, od wielkości siły P i od drogi ds którą punkt M przebiega pod jej działaniem przez chwilę dt; chociaż, być może, droga ds była przebieżona na mocy prędkości poprzednio nabytej, a nawet mimo działania siły P. Notacya (P, ds) wyraża kąt jaki tworzy kierunek działania przyłożonej siły P ze styczną do krążnej punktu M idącą w stronę jego ruchu. Tym sposobem P dos(P, ds) znaczy siłę styczenną S, a zaś dsdos(P, ds) jest rzutem na kierunku siły P drogi ds którą jej punkt przyłożenia przebiega. Zatem, praca nieskończenie mała siły P równa się wieloczynowi nieskończenie małej drogi ds przez rzut na jej kierunku siły P, co się wyraża przez wieloczyn Sds; albo jeszcze, nieskończenie mała praca siły P równa się wieloczynowi tej siły przez rzut na jej kierunku drogi ds, co się wyraża przez wieloczyn Pdp.

Praca siły jest dodatna albo odjemna, według jak rzut dp przebieżonej drogi ds pada na stronę działania siły P albo na stronę przeciwną, to jest według jak kąt (P, ds) jest ostry albo rozwarty. Gdy ten kąt jest prosty praca siły P jest zero.

Wiedza pracy siły, przeważnie potrzebna w zastosowaniach Mechaniki do machin, będzie nam zaraz użyteczna; i dlatego dajemy tu parę twierdzeń.

243. Twierdzenie. *Praca wynikowej* R *ilukolwiek sił* P *działających na punkt materyalny* M *jest równa summie prac tych sił.*

Jakoż,

$$\mathrm{R}\cos(\mathrm{R}, ds) = \Sigma \mathrm{P}\cos(\mathrm{P}, ds).$$

Jeśli pomnożymy obie strony przez przemieszczenie ds punktu M, będzie

$$\mathrm{R}ds\cos(\mathrm{R}, ds) = \Sigma \mathrm{P}ds\cos(\mathrm{P}, ds).$$

Co dowodzi wysłowionego twierdzenia.

244. Gdy osie spółrzędnych są prostokątne, praca siły bierze kształt dogodniejszy w zastosowaniach. Jakoż nazywając X, Y, Z składowe siły P równoległe do tych osi, mamy, na mocy powyższego twierdzenia,

$$\mathrm{P}ds\cos(\mathrm{P}, ds) = \mathrm{X}ds\cos(\mathrm{X}, ds) + \mathrm{Y}ds(\cos\mathrm{Y}, ds) + \mathrm{Z}ds\cos(\mathrm{Z}, ds),$$

albo

$$\mathrm{P}ds\cos(\mathrm{P}, ds) = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz;$$

więc

$$\mathrm{R}ds\,\mathrm{dos}(\mathrm{R},\, ds) = \Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

Ten ważny wynik można wprost otrzymać, dość tylko uważać że

$$\mathrm{P}ds\,\mathrm{dos}(\mathrm{P},\, ds) = \mathrm{P}ds\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}\frac{dx}{ds} + \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{P}}\frac{dy}{ds} + \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{P}}\frac{dy}{ds}\right);$$

zkąd

$$\mathrm{P}ds\,\mathrm{dos}(\mathrm{P},\, ds) = \mathrm{X}dz + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz.$$

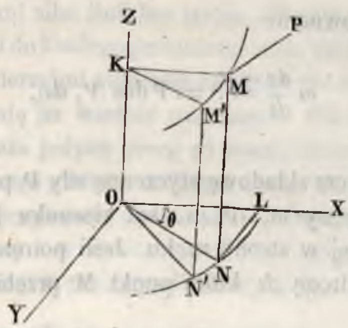
245. Całka $\int \mathrm{P}ds\,\mathrm{dos}(\mathrm{P},\, ds)$, wzięta w granicach przyzwoitych, wyraża *całą pracę* siły P w czasie t. W zastosowaniach znajduje się przybliżoną wartość tej całki metodą kwadratur, albo sposobem mechanicznym. Są dwa szczególne przypadki w których cała praca siły łatwo się otrzymuje. I tak:

Jeśli siła stała P, przyłożona do punktu materyalnego w ruchu, ma ciągle kierunek stycznej do jego krążnej, wtedy niekończenie mała praca tej siły na końcu chwili dt wyraża się przez $\mathrm{P}ds$; zatem jej cała praca, przez czas t jakikolwiek, jest równa wieloczynowi $\mathrm{P}s$, siły P przez długość s łuku opisanego przez punkt ruchomy w tym samym czasie t.

Jeśli siła stała P, przyłożona do punktu ruchomego, działa ciągle w kierunku równoległym do pewnej prostej niezmiennej, wtedy praca tej siły przez chwilę dt ma za wartość wieloczyn $\mathrm{P}dp$; zatem jej cała praca, podczas gdy punkt ruchomy przebiega jakikolwiek łuk swojej krążnej, jest równa wieloczynowi siły P przez rzut tego łuku na prostej niezmiennej. W tym przypadku, jako widzimy, cała praca siły P zostaje tasama jakąkolwiek punkt ruchomy przebiega drogę, idąc z położenia wyznaczonego w przestrzeni do innego także wyznaczonego; to jest, w tym razie praca siły nie zależy od kształtu opisanej krążnej.

246. **Praca siły w ruchu obrotowym.** Uważajmy punkt mate-

ryalny M który się obraca około osi stałej OZ pod działaniem siły P mającej kierunek jakikolwiek w przestrzeni.



Niech będzie MM′ łuk koła opisany przez punkt materyalny $M(x, y, z)$ w chwili dt, NN′ rzut tego łuku na płasczyznie XOY prostopadłej do osi OZ; oznaczmy przez θ kąt XON, przez r promień ON. Będzie

$$x = r \operatorname{dos} \theta,$$

$$y = r \operatorname{wst} \theta,$$

$$z = \mathrm{MN};$$

zkąd, różniczkując, wynika

$$\begin{aligned} dx &= - r \operatorname{wst} \theta d\theta = - y d\theta, \\ dy &= r \operatorname{dos} \theta d\theta = x d\theta, \\ dz &= 0. \end{aligned}$$

Owoż, nazywając X, Y, Z składowe siły poruszającej P, równoległe do trzech osi prostokątnych, mamy wartość jej pracy w chwili dt, wyrażoną przez

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)d\theta.$$

Więc, *praca siły której punkt przyłożenia obraca się około osi stałej, jest wieloczynem przemieszczenia kątowego* $d\theta$ *przez moment tej siły względem osi obrotu.*

ZASADA SIŁ ŻYWYCH.

247. Weźmy równanie

$$m\frac{dv}{dt} = \mathrm{S} = \mathrm{P}\operatorname{dos}(\mathrm{P}, ds),$$

w którem S oznacza składową styczenną siły P poruszającej punkt materyalny M massy m, (P, ds) kąt kierunku MP siły z częścią MT stycznej idącej w stronę ruchu. Jeśli pomnożymy obie strony równania przez drogę ds którą punkt M przebiega w czasie dt, będzie

$$(11) \qquad mvdv = \mathrm{P}ds \operatorname{dos}(\mathrm{P}, ds),$$

albo

$$d.\frac{1}{2}mv^2 = \mathrm{P}ds \operatorname{dos}(\mathrm{P}, ds).$$

Więc, całkując w granicach s_0 i s odpowiedających dwom położeniom punktu materyalnego na krążnej, i nazywając v_0 i v prędkości w tych położeniach, otrzymujemy formułę

$$(12) \qquad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{s_0}^{s} \mathrm{P}ds \operatorname{dos}(\mathrm{P}, ds).$$

Wieloczyn mv^2, massy punktu materyalnego przez kwadrat jego prędkości, nazywa się *siłą żywą* tego punktu (*). Wieloczyn $\mathrm{P}ds \operatorname{dos}(\mathrm{P}, ds)$, jako wiemy, oznacza pracę siły P przez czas dt; zatem całka $\int_{s_0}^{s} \mathrm{P}ds \operatorname{dos}(\mathrm{P}, ds)$ wyraża całą pracę tej siły, przez czas t w którym punkt ruchomy przechodzi z położenia s_0 do położenia s.

(*) Autorowie Mechaniki zastosowanej do Fizyki, do machin, nazywają nie mv^2 ale $\frac{1}{2}mv^2$ *siłą żywą*, albo *potęgą żywą*, która jest miarą pracy.

Równanie (12) jest ogólne, i stosuje się jeszcze gdy punkt materyalny porusza się na danej powierzchni albo na linii bez tarcia, albo gdy wiązadło zmusza go do opisywania tych figur. Albowiem, oddziaływanie powierzchni albo linii bez tarcia, albo tężność wiązadła, są siłami normalnemi do każdego przemieszczenia punktu materyalnego na oznaczonej powierzchni albo linii, i dlatego nie dają żadnej pracy; zatem nie wpływają na wartość wieloczynu $Pds \cos(P, ds)$ który, w tym razie, wyraża jedyną pracę sił zewnętrznych wprost przyłożonych do ruchomego punktu. Jeśli jest tarcie, trzeba je uważać jako siłę zewnętrzną, przyłożoną do punktu materyalnego w kierunku stycznej do krążnej i w stronę przeciwną ruchu. Na mocy tych określeń, równanie (12) tak się ogólnie wysłowia. :

Połowa przyrostu siły żywej punktu materyalnego, przez czas jakikolwiek, jest równa pracy sił wprost przyłożonych, i wykonanej przez ten sam czas.

Na tem zależy *twierdzenie zasadnicze sił żywych* w ruchu punktu materyalnego, wolnego w przestrzeni, albo przymuszonego zostawać na danej powierzchni albo linii.

248. Względnie do ruchu punktu materyalnego pod działaniem siły P której składową styczenną jest S, równania

$$mv - mv_0 = \int_0^t Sdt,$$

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} Sds$$

pierwsze wyrażające przyrost ilości ruchu, drugie przyrost sił żywych, są zarówno użyteczne. Oba mogą służyć do wyznaczenia ustawy wedle której zmienia się prędkość punktu na krążnej. W pierwszem jest do całkowania nieskończenie mały popęd siły, który się składa z wielkości tej siły i z czasu dt jej działania; w drugiem nieskończenie mała praca siły, złożona z wielkości tej siły i z przemieszczenia ds punktu jej przyłożenia. Wziąć jedno równanie raczej niż drugie jest rzeczą większej albo mniejszej łatwości wykonania rachunku możebnej całki. W zastosowaniu Mechaniki do machin, drugie równanie ma ważność daleko większą niż pierwsze; co pochodzi ztąd że w machinach praca gra przeważną rolę, jako później zobaczymy.

249. Biorąc osie spółrzędnych prostokątne mamy, w kształcie prostym, *równanie sił żywych*

$$(13) \qquad d.\frac{1}{2}mv^2 = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz.$$

Ztąd wywodzimy

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

Jeśli druga strona, która jest funkcyą czasu dobrze określoną, nie może się całkować przed rozwiązaniem zagadnienia, równanie jest prawie bez użytku; bo nie służy do wyznaczenia ruchu; chociaż całka, wyrażająca pracę siły P, wyrachowana przez kwadratury albo sposobami mechanicznemi, może dać prędkość v dostatecznie przybliżoną w praktyce.

Równanie sił żywych otrzymuje się łatwo z równań różniczkowych punktu materyalnego. Jakoż, gdy ten punkt jest wolny w przestrzeni, równania różniczkowe jego ruchu są:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z};$$

pomnóżmy te równania odpowiednio przez dx, dy, dz, i dodajmy, będzie

$$m\left(dx\frac{d^2x}{dt^2} + dy\frac{d^2y}{dt^2} + dz\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz.$$

Owoż, w założeniu osi spółrzędnych prostokątnych, nazywając v prędkość punktu ruchomego, mamy

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2};$$

zkąd, różniczkując, wynika

$$\frac{1}{2}\,d.v^2 = dx\,\frac{d^2x}{dt^2} + dy\,\frac{d^2y}{dt^2} + dz\,\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Więc

$$d.\frac{1}{2}mv^2 = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz.$$

Gdy punkt materyalny musi poruszać się na danej powierzchni albo na linii, bez tarcia, równania różniczkowe jego ruchu są

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X} + \mathrm{N}\,\mathrm{dos}\,\lambda,$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y} + \mathrm{N}\,\mathrm{dos}\,\mu,$$

$$m\,\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z} + \mathrm{N}\,\mathrm{dos}\,\gamma.$$

Pomnóżmy te równania odpowiednio przez dx, dy, dz, i dodajmy, będzie

$$d.\frac{1}{2}mv^2 = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz + \mathrm{N}\,(dx\,\mathrm{dos}\,\lambda + dy\,\mathrm{dos}\,\mu + dz\,\mathrm{dos}\,\nu).$$

Ale

$$dx\,\mathrm{dos}\,\lambda + dy\,\mathrm{dos}\,\mu + dz\,\mathrm{dos}\,\nu = 0;$$

bo kierunek oddziaływania N powierzchni, linii, albo wiązadła, określony przez kąty λ, μ, ν, jest normalny do stycznej w każdym punkcie opisanej krążnej. Więc powyższe równanie przywodzi się o poprzedzającego

$$d.\frac{1}{2}mv^2 = Xdx + Ydy + Zdz,$$

które jest ogólnem równaniem sił żywych punktu materyalnego, wolnego w przestrzeni albo przynaszonego.

250. Są przypadki w których summa $Xdx + Ydy + Zdz$ jest różniczką dokładną pewnej funkcyi trzech spółrzędnych x, y, z punktu ruchomego, uważanych jako zmienne niezależne; to jest, innemi słowy, zdarza się że istnieje funkcya sił $U = f(x, y, z)$ ktora daje

$$X = \frac{df}{dx}, \quad Y = \frac{df}{dy}, \quad Z = \frac{df}{dz},$$

i temsamem

$$d.\frac{1}{2}mv^2 = d.f(x, y, z).$$

Ztąd się otrzymuje równanie zwane *całką sił żywych*

$$(14) \qquad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

v_0 znaczy prędkość punktu materyalnego w położeniu (x_0, y_0, z_0).

Kiedy to równanie, dające całkę pierwszą ruchu, ma miejsce, mówi się że całka sił żywych istnieje; wtedy przyrost siły żywej, gdy punkt materyalny przechodzi z jednego położenia (x_0, y_0, z_0) do drugiego (x, y, z), nie zależy bynajmniej od kształtu krążnej między temi położeniami, ani od czasu jej przebieżenia, ale tylko od wartości jakie bierze funkcya sił $f(x, y, z)$ w dwóch położeniach skrajnych.

Niech będzie teraz

$$(15) \qquad f(x, y, z) = C,$$

oznaczając przez C stateczną dowolną która może brać wszystkie wartości możebne. Dla każdej wartości którą dajemy statecznej C, równanie (15) przedstawia powierzchnię; pojmujemy więc łatwo że przez każdy punkt krążnej punktu materyalnego przechodzi jedna z tych powierzchni, i tylko jedna. Równanie sił żywych pokazuje że, gdy punkt materyalny przebywa kilka razy jedną taką powierzchnię, za każdym razem posiada tę samą prędkość, w jakiemkolwiek miejscu ją przenika; ponieważ dla wszystkich punktów tej powierzchni funkcya sił $f(x, y, z)$ ma tę samą wartość.

Owoż, różniczkując równanie (15), znajdujemy

$$\frac{\frac{df}{dx}}{\mathrm{P}}\frac{dx}{ds}+\frac{\frac{df}{dy}}{\mathrm{P}}\frac{dy}{ds}+\frac{\frac{df}{dz}}{\mathrm{P}}\frac{dz}{ds}=0=\mathrm{dos}(\mathrm{P}, ds).$$

Ta równość dowodzi że siła P jest prostopadła do wszelkiej stycznej w punkcie $\mathrm{M}(x, y, z)$ do powierzchni danej przez $f(x, y, z)=\mathrm{C}$; więc jest normalną do tej powierzchni, i temsamem normalną do wszystkich powierzchni które się otrzymuje zmieniając ciągle stateczną C. Ztąd wynika że powierzchnia przedstawiona przez równanie (15), której rownanie różniczkowe jest

$$\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz=0,$$

wyznacza przez swoje normalne w każdym punkcie kierunek siły poruszającej; a więc gra względem uważanej siły taką samą rolę jak powierzchnia wody stojącej względem ciężkości. Z przyczyny tak cechującej własności, tę powierzchnię nazwano *powierzchnią poziomu.*

Gdyby punkt materyalny był przymuszony nie opuszczać powierzchni poziomu odpowiedającej jego sile poruszającej, ten punkt zostawałby w równowadze, albo poruszałby się jedynie na mocy prędkości nabytej. Co się właśnie zdarza gdy punkt ciężki jest położony na płaszczyznie poziomej. Siłą poruszającą jest ciężkość, prostopadła do tej płaszczyzny i przez nią zniszczona; więc punkt ciężki zostaje w spoczynku jeśli nie odebrał prędkości początkowej.

Uważajmy teraz dwie powierzchnie poziomu nieskończenie sąsiędnie AB, A'B', odpowiedające dwom wartościom po sobie dącym, A i $A + \alpha$, które dano statecznej C, i niech będzie

$MN = \varepsilon$ najkrótsza odległość tych powierzchni. Jakąkolwiek drogą punkt materyalny, pod działaniem siły P, przechodzi z punktu M powierzchni AB do punktu N powierzchni A'B', przyrost jego siły żywej, niezależny od krążnej ani od czasu jej przebieżenia, wyraża się zawsze przez

$$2(A + \alpha) - 2A = 2\alpha.$$

Owoż, jeśli punkt materyalny przechodzi, z powierzchni AB do sąsiędniej A'B', najkrótszą drogą MN, praca siły P, normalnej w punkcie M do powierzchni AB, jest równa wieloczynowi $P\varepsilon$; ta zaś praca ma za miarę pół przyrostu siły żywej; więc

$$P\varepsilon = \alpha \quad \text{albo} \quad P = \frac{\alpha}{\varepsilon}.$$

To równanie dowodzi że powierzchnie poziomu nie przecinają się; bo, gdyby było $\varepsilon = 0$, trzebaby $P = \infty$; co niemożebne.

251. Jeśli całka sił żywych stosuje się do pewnego ruchu, to się jeszcze będzie stosowała gdy ten ruch zostanie zmodyfikowany tak, żeby punkt materyalny, pod działaniem tych samych sił, był przymuszony zostawać na danej powierzchni albo linii. W istocie wprowadzi się, przez tę modyfikacyę ruchu, nową siłę, to jest oddziaływanie powierzchni albo linii; ale ta siła, jako normalna do powierzchni albo do linii, nie daje żadnej pracy i temsamem nie wpływa na różniczkę $Xdx + Ydy + Zdz$. I tak, na przykład, gdy punkt ciężki jest zmuszony poruszać się na danej powierzchni,

całka sił żywych zostaje niezmienna jakąkolwiek ten punkt opisuje krążnę.

252. Nie trudno okazać że, gdy punkt materyalny doznaje tarcia, albo się porusza w środku opornym (w powietrzu), summa $Xdx + Ydy + Zdz$ nie jest różniczką dokładną samych spółrzędnych x, y, z.

Jakoż, 1° tarcie jest proporcyonalne do parcia N punktu materyalnego na krążnę którą on jest zmuszony przebiegać, i wyraża się przez fN, nazywając f spółczynnik liczebny; a ponieważ tarcie jest siłą która działa wedle stycznej do krążnej i w stronę przeciwną ruchu, jego składowe są

$$-fN\frac{dx}{ds}, \quad -fN\frac{dy}{ds}, \quad -fN\frac{dz}{ds}.$$

Zatem część pochodząca z tarcia, która wchodzi do

$$Xdx + Ydy + Zdz,$$

wyraża się przez

$$-fN\left(\frac{dx}{ds}dx + \frac{dy}{ds}dy + \frac{dz}{ds}dz\right) = -fNds.$$

Owoż, parcie N nie jest naprzód wiadome, i nie zależy jedynie od długości przebieżonego łuku krążnej; więc $-fNds$, a temsamem $Xdx + Ydy + Zdz$ nie może być, w tym przypadku, różniczką dokładną funkcyi spółrzędnych x, y, z; i całka sił żywych nie istnieje.

2° Opór płynu w którym się punkt materyalny porusza jest pewną funkcyą $f(v)$ prędkości, i działa wedle stycznej do krążnej w stronę przeciwną ruchu. Zatem część pochodząca z tego oporu, która wchodzi do $Xdx + Ydy + Zdz$, wyraża się, podobnie jako wyżej, przez

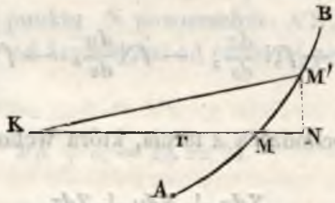
$$-f(v)ds.$$

Ale prędkość v i temsamem $f(v)$ zależy od dx, dy, dz; więc

$-f(v)ds$ i następnie $Xdx + Ydy + Zdz$ nie może być różniczką dokładną funkcyi spółrzędnych, x, y, z.

253. Wskażemy teraz dwa najważniejsze przypadki w których całka sił żywych istnieje, czyli w których summa $Xdx + Ydy + Zdz$ jest różniczką dokładną pewnej funkcyi spółrzędnych x, y, z punktu ruchomego M.

1° Gdy punkt materyalny M jest pod działaniem samych tylko sił skierowanych ku środkom stałym, i których natężenia są funkcyami jego odległości od tych środków, wtedy całka sił żywych zawsze istnieje. Jakoż, niech będzie $K(a, b, c)$ jeden ze środków



działających, $M(x, y, z)$ punkt materyalny który opisuje krążnę AB, $KM = r$ i $f(r)$ natężenie siły poruszającej która wypływa ze środka K. Jeśli przypuścimy tę siłę przyciągającą, jej praca wyrazi się przez

$$f(r)ds \operatorname{dos}(MK, ds) = -f(r)dr.$$

A jeśli przeciwnie owa siła jest odpychająca, jej praca będzie

$$f(r)ds \operatorname{dos}(KM, ds) = f(r)dr.$$

Zresztą trójkąt nieskończenie mały MM′N daje

$$MM' \operatorname{dos} NMM' = MN \quad \text{albo} \quad ds \operatorname{dos}(ds, MK) = dr.$$

Oba wyrażenia pracy nieskończenie małej są różniczkami dokładnemi; więc całka sił żywych istnieje, i mamy

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mp \int f(r)dr = \varphi(r) + \text{statecz.}$$

Równanie różniczkowe powierzchni poziomu jest

$$f(r)dr = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad r = C.$$

Więc powierzchnię poziomu są, w tym przypadku, sferami których środkiem jest punkt stały K.

Uważajmy teraz punkt materyalny pod działaniem wielu sił, skierowanych w każdej chwili odpowiednio ku środkom stałym $K, K_1, K_2, \ldots$, i nazwijmy $f(r)$, $f_1(r_1)$, $f_2(r_2)\ldots$ natężenia tych sił; będzie

$$d.\frac{1}{2}mv^2 = \mp f(r)dr \mp f_1(r_1)dr_1 \mp f_2(r_2)dr_2 \mp \ldots = \Sigma f(r)dr.$$

Każda różniczka, znajdująca się w drugiej stronie, powinna być wzięta ze znakiem — albo ze znakiem +, według jak siła która wchodzi do jej wyrażenia jest przyciągająca albo odpychająca. Każdy wyraz jest oczywiście różniczką dokładną; więc całka sił żywych istnieje, i będzie

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Sigma\int_{r_0}^{r} f(r)dr.$$

2° Całka sił żywych istnieje jeszcze, gdy siła P poruszająca punkt materyalny jest stała z wielkości i kierunku. Jeśli weźmiemy osie spółrzędne tak żeby oś OZ była równoległa do kierunku siły P w stronę jej działania, będzie $X=0$, $Y=0$, i $Z=P$; wtedy $Xdx + Ydy + Zdz$ przywodzi się do Pdz i daje równanie różniczkowe powierzchni poziomu

$$Pdz = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad z = C.$$

Te powierzchnie będą więc równoległe między sobą, i prostopadłe do kierunku siły P.

Zastosowanie tego przypadku znajdujemy w ruchu ciała będącego pod działaniem samej siły ciężkości; przypuszczając że ten ruch odbywa się w niewielkiej przestrzeni, aby można uważać ciężkość jako siłę mającą wszędzie to samo natężenie i ten sam kierunek. W tem założeniu,

$$Z = P = mg.$$

Zatem całka sił żywych wyraża się przez

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = mg(z - z_0)$$

albo

$$v^2 - v_0^2 = 2g(z - z_0) = 2gh;$$

nazywając h wysokość spadku; h wyraża różnicę poziomów dwóch punktów (x_0, y_0, z_0) i (x, y, z).

Powierzchnie poziomu są tu płaszczyznami poziomemi. Gdy punkt ciężki przechodzi od jednej z tych płaszczyzn do drugiej, jakąkolwiek idzie drogą i w jakimkolwiek czasie ją przebywa, kwadrat prędkości zmienia się tylko z odległością h tych płaszczyzn.

Jeśli $v_0 = 0$, wtedy

$$v^2 = 2gh.$$

Ten ważny wynik dowodzi że, jakąkolwiek linię punkt ciężki przebiega, ruchem wolnym albo utrudzanym, jego prędkość nabyta jest taka sama jak gdyby spadał pionowo z wysokości h.

Zastosujmy teraz wyłożone teorye do przykładów, które dadzą poznać ich ważność i wyjaśnią mogące zostawać trudności.

254. Twierdzenie. *Jeśli punkt materyalny opisuje pewną krążnę pod działaniem każdego z kilku układów sił, to pod działaniem wszystkich razem układów opisze jeszcze tę samą krążnę.*

Niech będą układy sił styczennych i dośrodkowych $S_1 = \frac{mdv_1}{dt}$ i $D_1 = \frac{mv_1^2}{\rho}$, $S_2 = \frac{mdv_2}{dt}$ i $D_2 = \frac{mv_2^2}{\rho}$, etc. pod których działaniem, każdego osobno, punkt materyalny m opisuje krążnę AB. Oczywiście ten punkt, poddany siłom S_1, S_2, S_3,..... i D_1, D_2, D_3..... opisze tę samą krążnę, jeśli do niego przyłożymy siłę N która przedstawia oddziaływanie tej linii, albo raczej tężność wiązadła. Więc, nazywając v prędkość ruchu, S i D składowe siły poruszającej, i uważając że siła N jako normalna nie daje składowej stycznej, będzie

$$d.\frac{1}{2}mv^2 = Sds = (S_1 + S_2 + S_3 + ...)ds = d.\frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + ...)$$

Ztąd, całkując, otrzymujemy

$$mv^2 = m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + ...),$$

jakakolwiek jest siła N.

Owoż, na mocy tego równania, siła dośrodkowa D wyraża się przez

$$D = \frac{mv^2}{\rho} = \frac{mv_1^2}{\rho} + \frac{mv_2^2}{\rho} + \frac{mv_3^3}{\rho} + ...$$

Więc siła N jest zero. To dowodzi że punkt materyalny, poddany działaniu wszystkich układów sił razem, opisuje tę samą krążnę co pod działaniem każdego z nich osobno.

RUCH PUNKTU CIĘŻKIEGO NA DANEJ LINII.

255. Uważajmy punkt ciężki poruszający się na krzywej AHNB jakiejkolwiek, bez tarcia.

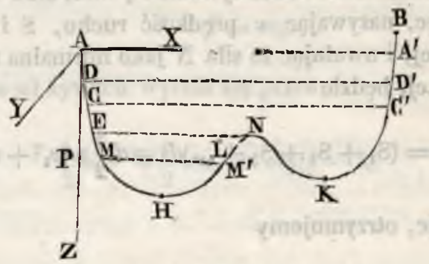
Jeśli weźmiemy skrajność niższą A tej linii za początek spółrzędnych, osie AX, AY poziome i oś AZ pionową w stronę ciężkości, równanie sił żywych będzie

$$d.\frac{1}{2}mv^2 = mgdz;$$

ztąd, całkując, otrzymujemy równanie

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0)$$

w którem z_0 znaczy rzędnę punktu wyjścia, v_0 prędkość w tym punkcie.



Przypuśćmy najpierwej że punkt ciężki wychodzi z położenia początkowego C bez żadnej prędkości. W tym przypadku punkt ciężki będzie się spuszczał po krzywej CH, biorąc prędkości coraz większe; i jego prędkość w położeniu M wyznaczy się przez formułę

$$v = \sqrt{2g(z - z_0)} = \sqrt{2gh};$$

która pokazuje że prędkość punktu ciężkiego rośnie w miarę jak on schodzi aż do położenia najniższego H. Z tego położenia punkt ciężki postępuje dalej na mocy prędkości nabytej, i wznosi się wzdłuż łuku HN; a jeśli poziom najwyższego położenia N, w części linii na której ruch ma miejsce, jest niższy od poziomu punktu wyjścia C, punkt ciężki dosięga położenia N z pewną prędkością i przebywa je, potem schodzi po łuku NK z prędkością rosnącą, i następnie wznosi się po łuku KC'; aż nakoniec zatrzymuje się na chwilę w punkcie C' który leży na jednej płaszczyznie poziomej z punktem wyjścia C. Ale zaraz, z przyczyny nieustannego działania ciężkości, punkt ciężki zwraca się, i przebiega tę samą krzywę w stronę przeciwną, biorąc w każdym jej punkcie zupełnie taką samą prędkość jaką miał w pierwszym razie. Nareszcie powraca do punktu wyjścia C, z którego na nowo ten sam ruch rozpoczyna. I tak dalej nieskończenie.

256. Czas w którym punkt ciężki przebiega łuk CM danej krzywej, idąc na dół albo do góry, jest ten sam. Jakoż, w pierwszym

przypadku, gdy punkt ruchomy schodzi po łuku CM, trzeba wziąć

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{+2g(z - z_0)}$$

dając pierwiastnikowi znak $+$; bo łuk s rośnie z czasem t, co wymaga $\frac{ds}{dt} > 0$. Zatem

$$(1) \qquad t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{+2g(z - z_0)}},$$

uważając z jako funkcyę łuku s wyznaczoną przez równanie krzywej.

W drugim przypadku, gdy punkt ciężki wznosi się po łuku MC, trzeba wziąć

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{+2g(z - z_0)}$$

dając pierwiastnikowi znak $-$; bo łuk s maleje gdy czas t rośnie, co wymaga $\frac{ds}{dt} < 0$. Zatem

$$t = -\int_{s}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{+2g(z - z_0)}}$$

albo, co to samo, zmieniając zarazem porządek granic całkowania i znak różniczki,

$$(2) \qquad t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{+2g(z - z_0)}}.$$

Te dwa wyniki (1) i (2) dowodzą założonego twierdzenia, i pokazują że ruchy punktu ciężkiego tam i nazad, czyli oscyllacye, są *równoczesne*, odbywające się w czasach równych.

257. Zobaczmy teraz jaki jest ruch punktu ciężkiego na danej krzywej, gdy jego prędkość początkowa v_0 nie jest zero. Trzeba rozróżnić trzy przypadki

1° Jeśli $v_0 < \sqrt{2gz_0}$; wtedy, biorąc rzędnę równą $z_0 - \frac{v_0^2}{2g}$, wyznaczymy między A i C punkt D, z którego punkt ciężki wychodzący bez prędkości początkowej, będzie miał ruch jaki posiada gdy wychodzi z punktu C z prędkością początkową v_0. Więc ten ruch jest oscyllacyjny, tam i nązad, na łuku DND'.

2° Jeśli $v_0 = \sqrt{2gz_0}$; widzimy łatwo że punkt ciężki, wychodzący z punktu A bez prędkości początkowej, ma taki sam ruch jaki posiada wychodząc z punktu C z prędkością v_0. Więc ten ruch jest oscyllacyjny na łuku ANA'.

3° Nakoniec, jeśli $v_0 > \sqrt{2gz_0}$, punkt ciężki ma taki sam ruch jak gdyby wychodził z punktu A z prędkością początkową $\sqrt{v_0^2 - 2gz_0}$. Więc, przeszedłszy A', albo dosięga tylko skrajności B i zawraca do A, biorąc w każdym punkcie powrotu takie same prędkości jakie miał idąc do B; albo przechodzi skrajność B i nie wraca do A, jeśli dana krzywa nie rozciąga się poza punkt B.

258. Jest godny uwagi przypadek osobliwy, gdy punkt ciężki wychodzi bez prędkości początkowej z punktu E, leżącego na jednej płaszczyznie poziomej z punktem N w którym styczna jest *pozioma*; albowiem wtedy, jeśli w punkcie N promień krzywizny jest różny od zera, punkt ciężki nie dosięga nigdy do punktu N. Jakoż, w tem założeniu, można zawsze wziąć łuk LN dość mały żeby od L do N promień krzywizny ρ nie był zero. Nazwijmy a najmniejszą wartość tego promienia; i, uważając punkt N za początek spółrzędnych, oznaczmy przez z_1 rzędnę punktu L, przez s długość łuku NL; będziemy mieli

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2gz}$$

zkąd

$$t = -\int_s^0 \frac{ds}{\sqrt{2gz}} = \int_0^{z_1} \frac{\frac{ds}{dz}dz}{\sqrt{2gz}}.$$

Owoż, $\rho \dfrac{d\dfrac{dz}{ds}}{ds} = \cos\nu$; wzdłuż łuku LN jest $\rho \geq a$ i $\cos\nu \leq 1$; więc

$$\frac{d^2z}{ds^2} < \frac{1}{a}.$$

Całkując tę nierówność, i uważając że w punkcie N jest $z = 0$ i $\dfrac{dz}{ds} = 0$, otrzymujemy

$$\frac{dz^2}{ds^2} < \frac{2z}{a};$$

ztąd wynika

$$\frac{ds}{dz} > \sqrt{\frac{2z}{a}}.$$

Podstawiając tę wartość, będzie

$$t > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\varepsilon}^{z_1}\frac{dz}{z}, \qquad \text{albo} \qquad t > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\log\frac{z_1}{\varepsilon};$$

więc ostatecznie

$$t > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\log\frac{z_1}{0}, \qquad \text{albo} \qquad t = \infty.$$

259. Znajduje się parcie jakie punkt ciężki wywiera na krzywę AB w położeniu jakiemkolwiek M, składając jego siłę odśrodkową w tem położeniu ze składową normalną ciężaru *mg*. W każdym punkcie krzywej, danej przez jej równania, wiadoma jest składowa normalna ciężaru *mg* punktu ruchomego i jego prędkość, a temsamem siła odśrodkowa; można więc wyznaczyć parcie jakie ta krzywa wytrzymuje.

W szczególnym przypadku, gdy krzywa AB jest cała na płaszczyznie pionowej, te dwie składowe mają ten sam kierunek, i parcie równa się ich summie albo różnicy, według położenia. Jeśli nazwiemy β kąt jaki styczna do krzywej w punkcie M czyni z pionową w stronę ciężkości, i ρ promień krzywizny, parcie w tym punkcie wyrazi się przez

$$mg \,\mathrm{wst}\beta \pm \frac{mv^2}{\rho} \quad \text{albo} \quad mg \,\mathrm{wst}\beta \pm \frac{2mgh}{\rho}.$$

To pokazuje że parcie, które punkt ciężki wywiera na krzywę w punktach najniższych H, K (nieosobliwych), jest równe summie jego ciężaru i siły odśrodkowej, $mg + \frac{2mgh}{\rho}$; a zaś w punkcie N mającym wysokość maximum, to parcie równa się różnicy $mg - \frac{2mgh}{\rho}$; jeśli więc $h = \frac{\rho}{2}$, punkt ciężki nie wywiera żadnego parcia na krzywę w punkcie N.

260. Żeby otrzymać równania ruchu punktu ciężkiego na danej krzywej, dość jest wyrazić ds w funkcyi rzędnej z, biorąc formułę

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{dz\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dz^2} + \frac{dy^2}{dz^2}}}{\sqrt{v_0^2 + 2g(z - z_0)}},$$

w której pochodne cząstkowe $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ wyznaczają się w funkcy z za pomocą równań tej krzywej.

Jeśli można wykonać całkowanie, i potem wyciągnąć wartość dla z w funkcyi czasu t, równania krzywej dadzą x i y w funkcyi z, i temsamem w funkcyi czasu t; zagadnienie będzie więc zupełnie rozwiązane.

Gdyby daną krzywą było koło pionowe promienia a które, odniesione do punktu najniższego, ma za równania

$$y = 0 \qquad x^2 + z^2 - 2az = 0,$$

otrzymanoby całkę elliptyczną

$$t = \pm \int_{z_0}^{z} \frac{a\,dz}{\sqrt{z(2a - z)(v_0^2 + 2gz_0 - 2gz)}}.$$

Całkowanie jest możebne w kształcie skończonym, jeśli między trzema pierwiastkami wielomianu pod pierwiastnikiem dwa są równe. Co się właśnie zdarza gdy $v_0{}^2 = 2g(2a - z_0)$, to jest, gdy punkt ciężki zaczyna ruch z prędkością którejby nabył spadając z punktu najwyższego na kole pionowem, albo co to samo, gdy wychodzi z tego punktu najwyższego bez prędkości początkowej. Gdyby punkt ciężki, po obiegu koła, mógł powrócić do punktu najwyższego z którego wyszedł bez żadnej prędkości, miałby w nim prędkość zero i zostałby w spoczynku; ale zaraz zobaczymy że to położenie jest granicą do której punkt ciężki dąży nieskończenie i nigdy jej nie dosięga. Jakoż, podstawmy założoną wartość dla $v_0{}^2$ w ostatnie równanie, będzie

$$dt = \pm \frac{a}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{(2a - z)\sqrt{z}}.$$

Widzimy łatwo że

$$\frac{dz}{(2a - z)\sqrt{z}} = \frac{2d.\sqrt{z}}{(\sqrt{2a} + \sqrt{z})(\sqrt{2a} - \sqrt{z})}$$

$$= \frac{d.\sqrt{z}}{\sqrt{2a}}\left(\frac{1}{\sqrt{2a} + \sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{2a} - \sqrt{z}}\right);$$

więc

$$dt = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{d.\sqrt{z}}{\sqrt{2a} + \sqrt{z}} + \frac{d.\sqrt{z}}{\sqrt{2a} - \sqrt{z}}\right).$$

Ztąd całkując, dla ruchu zestępującego, w którym $\frac{dz}{dt} < 0$, wywodzimy równanie

$$t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \log.\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{z}}{\sqrt{2a} - \sqrt{z}} + C.$$

Stateczna C wyznacza się przez warunek żeby było zarazem

$t = 0$ i $z = z_0$; zatem

$$t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\log.\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}} - \log.\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z_0}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z_0}}\right).$$

Gdy punkt ciężki dochodzi do punktu najniższego, wtedy $z = 0$ i

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\log.\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z_0}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z_0}}.$$

Począwszy od tej chwili $\frac{dz}{dt} > 0$, trzeba więc w ruchu wznoszącym się wziąć znak $+$; co daje

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\log.\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}} - \log.\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z_0}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z_0}}\right).$$

W tym ruchu w miarę jak t rośnie, z rośnie także dążąc do $2a$; a jeśli $z = 2a$ wtedy $t = \infty$. Więc punkt ciężki nie dosięga nigdy do punktu najwyższego na kole, ale się do niego zbliża nieograniczenie. Wynik zgodny z tym któregośmy wyżej (258) ogólnie dowiedli.

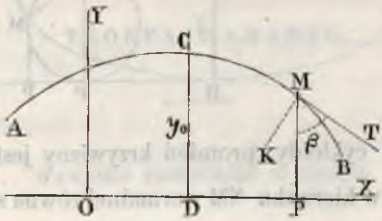
261. Uwaga. Jeśli ze wszystkich punktów danej krzywej spuścimy prostopadłe na płaszczyznę poziomą jakąkolwiek, utworzymy walec pionowy; a jeśli potem rozwiniemy ten walec na płaszczyznie pionowej, dana krzywa skośna rozwinie się na niej i przekształci na krzywę płaską. Tym sposobem wszystkie związki między s i z istniejące na krzywej skośnej, zachowają się na jej przekształconej.

Owoż, na tych dwóch krzywych ruch punktu ciężkiego jest wyznaczony przez równanie

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{v_0^2 + 2g(z - z_0)};$$

więc ten ruch iest jednakowy na obydwóch liniach.

262. Zagadnienie I. *Bila massy* m *toczy się po wypukłości linii krzywej pionowej, bez tarcia ; przypuszczając że zaczęła ruch bez prędkości początkowej, w którym punkcie opuści tę krzywę ?*



Bila opuści krzywę w punkcie w którym parcie będzie zero ; a wiemy że parcie jest wynikową składowej normalnej ciężaru bili i siły odśrodkowej. Owoż, jeśli weźmiemy oś rzędnych skierowaną w stronę przeciwną ciężkości, i nazwiemy y_0 rzędnę punktu wyjścia, β kąt jaki styczna czyni z pionową w stronę ciężkości, punkt krzywej w którym parcie będzie zero wyznaczy się przez równanie

$$mg\,\mathrm{wst}\beta - \frac{2mg(y_0 - y)}{\rho} = 0 \qquad \text{albo} \qquad \rho^2 \frac{d^2y}{ds^2} - 2(y_0 - y) = 0.$$

W zastosowaniu do koła, do stożkowej jakiejkolwiek, do cykloidy, jeśli nazwiemy y_1 rzędnę punktu w którym bila opuszcza krzywę, będzie :

w kole

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad \mathrm{wst}\beta = \frac{y}{R}, \quad \rho = R, \quad \text{więc} \quad y_1 = \frac{2y_0}{3}.$$

w stożkowych

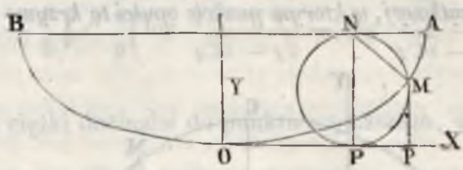
$$y^2 = 2px + qx^2, \quad (1+q)y_1^3 + 3p^2y_1 + 2p^2y_0 = 0;$$

w cykloidzie

$$\frac{dy}{ax} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}, \ \text{N normalna}, \quad \mathrm{wst}\beta = \frac{y}{N}, \ \rho = 2N; \quad y_1 = \frac{y_0}{2}.$$

263. Zagadnienie II. *Punkt ciężki porusza się po cykloidzie przewróconej ; w którym punkcie tej krzywej trzeba go opuścić, żeby*

stosunek parcia do siły odśrodkowej był stały, i jaki jest ten stosunek?



W punkcie M cykloidy, promień krzywizny jest 2MN, a składowa ciężaru mg w kierunku NM normalnej równa się $mg \cdot \frac{2a-y}{MN}$; więc parcie wyraża się przez

$$mg \cdot \frac{2a-y}{MN} + \frac{mv^2}{2MN}.$$

Ztąd, nazywając k stosunek parcia do siły odśrodkowej, otrzymujemy równanie

$$\frac{2g(2a-y)}{v^2} + 1 = k,$$

z którego wynika

$$v^2 = \frac{2g(2a-y)}{k-1}.$$

Owoż, wedle zagadnienia, bila zaczyna ruch bez prędkości początkowej; więc w punkcie wyjścia musi być

$$0 = \frac{2g(2a-y)}{k-1},$$

zkąd

$$y = 2a.$$

Co dowodzi że bila powinna wychodzić z punktu A.

W każdym innym punkcie prędkość jest należna wysokości spadku $2a - y$, i ma wartość $v^2 = 2g(2a-y)$; więc $k = 2$.

ROZDZIAŁ IV.

TEORYA WAHADEŁ.

WAHADŁO POJEDYNCZE W PRÓŻNI.

264. Wahadło kołowe. Nazywa się wahadłem wszelkie ciało mogące się kołysać około osi poziomej. Aby można było porównywać trwanie ruchu *tam i nazad* różnych wahadeł, wyobrażono wahadło idealne, które nazwano *wahadłem pojedynczem*. Jest to punkt materyalny ciężki M, zawieszony na jednej skrajności nici OM, (albo

pręcika) nie mającej massy i nierozciągalnej, której druga skrajność O jest utkwiona. W stanie spoczynku wahadło jest pionowe; w tem położeniu ciężar ciała jest zniszczony przez opór nici. Jeśli oddalimy ciało M od tego położenia równowagi, dając nici kierunek pochyły OM tak, żeby ta nić była całkiem wytężona i czyniła z pionową kąt ostry, i jeśli potem zostawimy ciało M działaniu ciężkości nie dając mu żadnej prędkości początkowej, wahadło będzie się ciągle poruszało, opisując płaszczyznę pionową poprowadzoną przez położenie początkowe, i oddalając się równo od tego położenia w jedną i w drugą stronę; a wiemy już że te wahania są równoczesne (256). Nadto, ponieważ odległość OM zostaje ta sama, punkt M opisuje łuk koła mający punkt O za środek. Można więc uważać punkt materyalny M jakoby zmuszony poruszać się na danym okręgu koła, na który nie wywiera parcia, ale tylko na nić która go utrzymuje na tym okręgu. Parcie punktu materyalnego M na nić stanowi jej tężność.

Weźmy punkt zawieszenia O za początek spółrzędnych, i pionowę OB w stronę ciężkości za oś rzędnych z. Przypuszczając że ruch wahadła odbywa się w próżni pod działaniem samej jednej siły ciężkości, mamy zaraz całkę sił żywych

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0),$$

zkąd

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{v_0^2 + 2g(z - z_0)};$$

biorąc znak $+$ albo $-$, według jak łuk s rośnie albo maleje gdy się czas t powiększa.

W założeniu że wahadło porusza się, zaczynając od położenia OA i idąc w stronę ABA', niech będzie kąt $\mathrm{MOB} = \theta$, kąt początkowy $\mathrm{AOB} = \alpha$, łuk $\mathrm{AM} = s$, i promień $\mathrm{OM} = a$; co daje

$$s = a(\alpha - \theta), \qquad ds = -\,ad\theta;$$

$$z = a\,\mathrm{dos}\,\theta, \qquad z_0 = a\,\mathrm{dos}\,\alpha.$$

Mamy więc

$$-\,a\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2ga(\mathrm{dos}\,\theta - \mathrm{dos}\,\alpha)};$$

zkąd

$$(1) \qquad dt = -\frac{ad\theta}{\sqrt{v_0^2 + 2ga(\mathrm{dos}\,\theta - \mathrm{dos}\,\alpha)}}.$$

Ta różniczka, którąśmy już widzieli w numerze 259 pod innym kształtem, nie może się ogólnie całkować bez użycia funkcyj elliptycznych; wyjąwszy przypadek szczególny w którym $v_0^2 = 2ga(1 + \text{dos}\,\alpha)$. Co się właśnie zdarza gdy punkt M stanowiący wahadło wychodzi, bez prędkości początkowej, z położenia E najwyższego na kole. Albowiem wtedy prędkość tego punktu w położeniu A, należna wysokości DE, ma wartość $\sqrt{2g\text{DE}}$; więc jego prędkość początkowa v_0, z którą wychodzi z położenia A, wyraża się przez $v_0^2 = 2g(\text{EO} + \text{OD}) = 2ga(1 + \text{dos}\,\alpha)$.

Uważajmy najpierwej ten szczególny przypadek ruchu wahadła kołowego. Podstawiając wartość v_0^2, mamy

$$dt = -\frac{ad\theta}{\sqrt{2ga(1 + \text{dos}\,\theta)}} = -\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{d\frac{\theta}{2}}{\text{dos}\frac{\theta}{2}}.$$

Dla ułatwienia całkowania, zmieńmy $\text{dos}\frac{\theta}{2}$ na $\text{wst}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$; będzie

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{d\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}{\text{wst}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{d\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)}{\text{wst}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)\,\text{dos}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)},$$

albo, dzieląc oba wyrazy ostatniego ułamka przez $\text{dos}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)$,

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{\text{d.sty}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)}{\text{sty}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)}.$$

Ztąd, całkując w granicach α i θ, otrzymujemy

$$(2) \qquad t = \sqrt{\frac{a}{g}}\ \log\frac{\text{sty}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)}{\text{sty}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

Ta formuła daje czas w którym punkt materyalny M wahadła przebiega łuk AM koła, gdy wychodzi z punktu A z prędkością którejby nabył spadając pionowo z punktu najwyższego E na tem kole.

Aby mieć czas w którym wahadło opisuje kąt AOB, trzeba uczynić $\theta = 0$; co daje

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \log \mathrm{sty}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right).$$

Po przebieżeniu łuku AB, punkt materyalny M wznosi się na łuku BA'E i zbliża do punktu najwyższego E z którego wyszedł bez prędkości początkowej. W jakim czasie do niego dojdzie? znajdziemy odpowiedź podstawiając w formule (2) $\theta = -\pi + \varepsilon$, i potem czyniąc $\varepsilon = 0$. Mamy najpierwej

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \log. \frac{\mathrm{sty}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)}{\mathrm{sty}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

To wyrażenie pokazuje że, im mniej ε różni się od zera tem więcej czas t rośnie i może przejść wszelką wielkość naznaczoną; więc gdy $\varepsilon = 0$ wtedy $t = \infty$. Wynik już wiadomy.

265. Szukajmy teraz ustawy ruchu wahadła gdy ono wychodzi z położenia jakiegokolwiek bez prędkości początkowej, i wykonywa oscyllacye bardzo małe. Czyniąc $v_0 = 0$ w formule (1), będziemy mieli

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{2\,\mathrm{dos}\,\theta - 2\,\mathrm{dos}\,\alpha}}.$$

Rozwińmy $\mathrm{dos}\,\theta$ i $\mathrm{dos}\,\alpha$ na szeregi. Ponieważ przypuszczamy α i θ bardzo małe, możemy poprzestać na potęgach drugich tych łuków, zaniedbując potęgi czwarte i wyższe : co daje

$$\mathrm{dos}\,\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}, \qquad \mathrm{dos}\,\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2};$$

zkąd

$$2 \operatorname{dos} \theta - 2 \operatorname{dos} \alpha = \alpha^2 - \theta^2,$$

i następnie

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \, \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}.$$

Więc całkując otrzymujemy

$$(3) \qquad t = \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ łukdos } \frac{\theta}{\alpha}.$$

Nie przydajemy statecznej dowolnej, bo powinno być zarazem $t = 0$ i $\theta = \alpha$, biorąc łukdos $1 = 0$.

Z powyższej formuły wywodzimy

$$\theta = \alpha \operatorname{dos} t \sqrt{\frac{g}{a}},$$

θ jest kątem opisanym przez wahadło w czasie t.

Jeśli nazwiemy T trwanie jednej oscyllacyi (od położenia OA do OA′), otrzymamy je czyniąc $\theta = -\alpha$ w formule (3), i uważając że łukdos$(-1) = \pi$ ponieważ już wzięto łukdos $1 = 0$. Tym sposobem znajdujemy

$$(4) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Ten wynik, niezależny od kąta 2α który się nazywa *obszernością* oscyllacyi, dowodzi że trwanie bardzo małych oscyllacyj nie zależy od ich obszerności; i, byle ta obszerność była dostatecznie mała, można ją wziąć jeszcze dwa, trzy,... razy mniejszą, a zawsze trwanie jednej całej oscyllacyi zostaje to samo. Te małe oscyllacye są więc wszystkie równoczesne.

266. Wyznaczmy teraz równanie ruchu wahadła za pomocą siły stycznej. Jeśli weźmiemy kąt θ za zmienną niezależną, składowa

styczenna ciężkości działającej na punkt M wyrazi się przez $mg \operatorname{wst} \theta$, i będzie

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \operatorname{wst} \theta.$$

Ale $s = a(\alpha - \theta)$, zkąd $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{ad^2\theta}{dt^2}$; mamy więc równanie różniczkowe ruchu wahadła

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{a}{g} \operatorname{wst} \theta = 0.$$

Dobrze jest uważać że, posługując się siłą styczenną, trzeba całkować równanie różniczkowe drugiego rzędu; gdy zaś całka sił żywych istnieje, ona sama jest już jedną z całek ruchu, i zostaje tylko do całkowania równanie różniczkowe pierwszego rzędu

Dla całkowania pomnożymy powyższe równanie przez $2d\theta$, i wykonajmy to całkowanie, wyznaczając stateczną dowolną przez warunek żeby było zarazem $t = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, $\theta = \alpha$ otrzymamy

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} - \frac{2g}{a}(\operatorname{dos} \theta - \operatorname{dos} \alpha) = 0.$$

Ztąd wynika równanie

$$dt = \pm \sqrt{\frac{a}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{dos} \theta - \operatorname{dos} \alpha}}$$

któreśmy przedtem odrazu otrzymali stosując całkę sił żywych.

Drugie całkowanie wymaga przemiany ilości θ na inną zmienną. W tym celu, nazwijmy z i b wysokości punktów M i A nad płaszczyzną poziomą przechodzącą przez punkt najniższy B; będzie

$$z = a(1 - \operatorname{dos} \theta) \qquad b = a(1 - \operatorname{dos} \alpha)$$

zkąd

$$\cos\theta - \cos\alpha = \frac{b - z}{a},$$

$$d\theta = \frac{dz}{\sqrt{2az - z^2}}.$$

Podstawiając te wartości w ostatniem równaniu, i całkując w granicach b i 0 odpowiedających położeniom OA i OB wahadła, znajdujemy formułę która daje czas połowy oscyllacyi zestępującej

$$\frac{1}{2}\mathrm{T} = -\sqrt{\frac{a}{2g}} \int_b^0 \frac{dz}{\sqrt{2az - z^2}\sqrt{\frac{b-z}{a}}}.$$

Więc czas T całej oscyllacyi wyraża się przez

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^b \frac{dz}{\sqrt{bz - z^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z}{2a}}}.$$

Ponieważ całka ogólna nie jest znana, trzeba wyznaczyć za pomocą szeregu wartość przybliżoną całki określonej. Owoż, ilość $\frac{z}{2a}$ jest mniejsza od jedności; możemy więc rozwinąć dwumian $\left(1 - \frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$ na szereg zbieżny, sposobem następującym

$$\left(1 - \frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2a}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{z}{2a}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{z}{2a}\right)^3 + \dots$$

$$+ \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\left(\frac{z}{2a}\right)^n + \dots$$

przez podstawienie tego rozwinięcia całka określona staje się

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^b \left\{ \frac{dx}{\sqrt{bz - z^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2a} \frac{zdz}{\sqrt{bz - z^2}} + \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{1}{2a}\right)^2 \frac{z^2 dz}{\sqrt{bz - z^2}} \right.$$

$$\left. + \dots + \frac{1.3\dots\dots(2n-1)}{2.4\dots\dots2n} \left(\frac{1}{2a}\right)^n \frac{z^n dz}{\sqrt{bz - z^2}} + \dots \right\}.$$

Różniczki w nawiasach mają wszystkie ten sam kształt; aby je zcałkować uważajmy różniczkę ogólną

$$d.x^{n-1}\sqrt{bz - z^2} = (n-1)z^{n-2}\sqrt{bz - z^2}\,dz + z^{n-1}\frac{\left(\frac{b}{2} - z\right)dz}{\sqrt{bz - z^2}}.$$

$$= \frac{(2n-1)b}{2} \frac{z^{n-1}dx}{\sqrt{bz^2 - z^2}} - \frac{nz^n dz}{\sqrt{bz - z^2}}.$$

Ztąd wywodzimy

$$\int_0^z \frac{z^n dz}{\sqrt{bz - z^2}} = \frac{(2n-1)b}{2n} \int_0^z \frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{bz - z^2}} - \frac{z^{n-1}\sqrt{bz - z^2}}{n};$$

więc

$$\int_0^b \frac{z^n dz}{\sqrt{bz - z^2}} = \frac{(2n-1)b}{2n} \int_0^b \frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{bz - z^2}}.$$

Jeśli teraz oznaczymy te dwie całki określone przez A_n i A_{n-1}, będziemy mieli formułę

$$A_n = \frac{(2n-1)b}{2n} A_{n-1},$$

która da jedną którąkolwiek z całek składających wartość T, za pomocą poprzedzającej; więc, aby mieć wszystkie, dość tylko wyznaczyć całkę wskazu 0,

$$A_0 = \int_0^b \frac{dz}{\sqrt{bz - z^2}}.$$

Owoż

$$\int_0^b \frac{dz}{\sqrt{bz-z^2}} = \int_{-1}^{+1} \frac{d\left(\frac{b-2z}{b}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{b-2z}{b}\right)^2}}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{d\left(\frac{b-2z}{b}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{b-2z}{b}\right)^2}} = \pi.$$

Zatem

$$A_0 = \pi, \qquad A_1 = \frac{1b}{2}\pi, \qquad A_2 = \frac{1.3b^2}{2.4}\pi, \qquad A_3 = \frac{1.3.5b^3}{2.4.6}\pi, \text{ etc.}$$

Podstawiając te wartości otrzymujemy ostatecznie

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \ldots\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\right)^n\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \ldots\right\}.$$

Ta formuła może jeszcze wziąć inną postać : jakoż, uważając że wstawa odwrotna $\frac{b}{a} = 1 - \text{dos}\,\alpha = 2\,\text{wst}^2\frac{\alpha}{2}$, i podstawiając tę wartość, będziemy mieli formułę

$$(5) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{wst}^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \text{wst}^4\frac{\alpha}{2}\right.$$

$$\left. + \ldots\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\right)^2 \text{wst}^{2n}\frac{\alpha}{2} + \ldots\right\},$$

która jasno pokazuje że szereg jest tem więcej zbieżny im obszerność wahań 2α jest mniejsza; można nawet łatwo wyrachować błąd jaki się popełnia zatrzymując szereg na wyrazie jakimkolwiek.

I tak, jeśli kąt 2α zawiera małą liczbę stopni, można poprzestać na pierwszym wyrazie szeregu; co daje formułę, już otrzymaną innym sposobem,

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}};$$

która wyraża czas bardzo małych wahań niezależnie od ich obszerności.

Jeśli weźmiemy dwa pierwsze wyrazy szeregu, i zastąpimy wst $\frac{\alpha}{2}$ przez łuk $\frac{\alpha}{2}$, będziemy mieli

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Ta formuła daje czas jednej oscyllacyi w funkcyi jej obszerności.

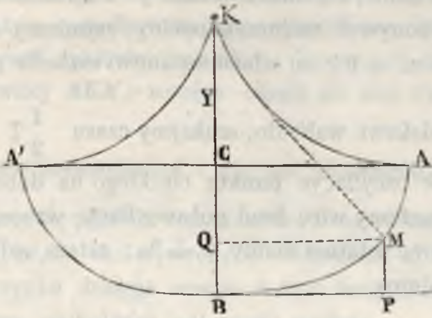
Pierwsza wartość dla T jest za mała, druga za wielka; w pierwszej błąd jest mniejszy od ilości drugiego rzędu względem kąta α, w drugiej mniejszy od ilości czwartego rzędu.

W zastosowaniu wahadła do mierzenia natężenia siły ciężkości w różnych miejscach ziemi, trzeba znać czas jednej oscyllacyi; co jest dość trudno. Aby wyznaczyć ten czas ile można najdokładniej, rachuje się n oscyllacyj przez pewny czas τ, na przykład przez kwadrans, i otrzymuje się

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} = \frac{\tau}{n}; \qquad \text{zkąd} \qquad g = \frac{n^2\pi^2 a}{\tau^2}.$$

267. Wahadło cykloidalne. *Ruch punktu ciężkiego na cykloidzie pionowej przewróconej, i mającej podstawę poziomą.*

Jeśli weźmiemy za oś odciętych styczną a za oś rzędnych normalnę w wierzchołku B cykloidy, i nazwiemy a promień koła



rodzącego, równanie tak położonej cykloidy będzie

$$\frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}.$$

Oznaczmy przez v_0 prędkość początkową i przez y_0 rzędnę punktu wyjścia. Zasada sił żywych daje zaraz jedną z całek ruchu. Jakoż, mamy

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{v_0{}^2 + 2g(y_0 - y)};$$

ale

$$ds^2 = dy^2\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right) = dy^2 . \frac{2a}{y};$$

podstawiając tę wartość, będzie

$$\frac{dy}{dt}\sqrt{\frac{2a}{y}} = \pm \sqrt{v_0{}^2 + 2g(y_0 - y)},$$

zkąd

$$(1) \qquad dt = \pm \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{v_0{}^2}{2g} + y_0\right) y - y^2}}.$$

Trzeba wziąć pierwiastnik ze znakiem $+$ albo ze znakiem $-$, według jak ruch jest wznoszący się albo zestępujący. Całkowanie nie przedstawia żadnej trudności, można je uskutecznić dokładnie. Ale, zamiast wykonywać rachunek ogólny, zajmiemy się przypadkiem w którym $v_0 = 0$; co właśnie stanowi *wahadło cykloidalne.*

Uważając to ciekawe wahadło, szukajmy czasu $\frac{1}{2}\mathrm{T}$ pół-oscyllacyi. Wiemy że oscyllacye punktu ciężkiego na danej krzywej są równoczesne; możemy więc brać pół-oscyllacyę wznoszącą się albo zestępującą. Biorąc ostatnią mamy $y_0 = 2a$; zatem, całkując równanie (1), otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{T}}{2} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{2a} \frac{dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{2a} \frac{2d.\sqrt{y}}{\sqrt{2a - y}} = \pi;$$

ztąd

$$\mathrm{T} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}},$$

albo

$$(2) \qquad \mathrm{T} = \pi \sqrt{\frac{4a}{g}} = \pi \sqrt{\frac{b}{g}};$$

nazywając b promień krzywizny w punkcie najniższym B cykloidy

Formuła pokazuje że, w ruchu punktu ciężkiego na cykloidzie, trwanie oscyllacyj jest niezależne od ich obszerności. Te oscyllacye są więc wszystkie równoczesne. Ztąd wynika że różne punkta ciężkie wychodzące w tej samej chwili bez prędkości początkowej, z rozmaitych punktów cykloidy, dochodzą wszystkie w tym samym czasie do punktu najniższego.

Huyghens zaproponował wahadło cykloidalne, jako ściśle równoczesne w próżni jakakolwiek jest obszerność wahań. W tym celu stawia się rozwitę AKA′ cykloidy ABA, a wiadomo że rozwita cykloidy jest cykloidą równą. Poczem, zawiesza się punkt ciężki M na jednym końcu nici (albo bardzo giętkiej sprężyny) mającej długość $4a$, której drugi koniec jest utkwiony w środku krzywizny K. Utworzy się tym sposobem wahadło cykloidalne; bo punktciężki M będzie opisywał cykloidę, jeśli nić na której jest zawieszony przystaje do rozwitej AKA', zostając ciągle do niej styczną.

KRZYWA TOSAMOCZESNA I KRZYWA NAJKRÓTSZEGO CZASU.

268. Nazywa się ogólnie TOSAMOCZESNĄ (*tautochrona*) wszelka krzywa na której punkt materyalny pod działaniem sił danych, wychodząc ze spoczynku dosięga zawsze w tym samym czasie do punktu wyznaczonego, jakikolwiek jest punkt wyjścia.

Względnie do samej tylko siły ciężkości, krzywą tosamoczesną jest ta na której punkt ciężki, zaczynając ruch bez prędkości początkowej, dochodzi do punktu najniższego zawsze w tym samym czasie, jakikolwiek jest punkt wyjścia; albo jeszcze, taka krzywa na której punkt ciężki, pchnięty z punktu najniższego z prędkością jakąkolwiek, zatrzymuje się zawsze na końcu tego samego czasu. Taka krzywa tosamoczesna jest cała na płaszczyznie pionowej przechodzącej przez punkt wyjścia i punkt najniższy; albowiem, niema żadnej przyczyny żeby jakikolwiek jej punkt znajdował się raczej z jednej strony tej płaszczyzny niż z drugiej.

Cykloida jest sama jedna linią tosamoczesną punktu ciężkiego w próżni. Jakoż, niech będą A i B punkt wyjścia i punkt najniższy krzywej tosamoczesnej; biorąc punkt B za początek spółrzędnych, poprowadźmy na płaszczyznie pionowej BA, oś BZ pionową w stronę przeciwną ciężkości, i oś BX poziomą; oznaczmy przez z_0 rzędnę punktu wyjścia A, przez x, z położenie punktu ciężkiego w epoce t. Zasada sił żywych daje

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(z_0 - z)},$$

zkąd

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{z_0} \frac{\frac{ds}{dz}\,dz}{\sqrt{z_0 - z}}.$$

W tem całkowaniu względem z możemy położyć $\frac{ds}{dz} = \varphi(z)$, co daje

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{z_0} \frac{\varphi(z)dz}{\sqrt{z_0 - z}}.$$

Teraz, ponieważ szukana krzywa, jako tosamoczesna, jest niezależna od rzędnej z_0, pochodna całki względem z_0 powinna być zero. Aby uniknąć granic zmiennych w różniczkowaniu niewiadomej całki, uczyńmy $z = uz_0$, granice 0 i z_0 będą odpowiedały dla u granicom 0 i 1. Tym sposobem powyższa całka staje się

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{\varphi(uz_0)\sqrt{z_0}}{\sqrt{1-u}} du;$$

więc pochodna względem z_0, zrównana do zera, będzie

$$\int_0^1 \frac{2\varphi'(uz_0)uz_0 + \varphi(uz_0)}{\sqrt{z_0}\sqrt{1-u}} du = 0.$$

Owoż, aby ta całka była zero, trzeba żeby spółczynnik różniczkowy $\frac{2\varphi'(uz_0)uz_0 + \varphi(uz_0)}{\sqrt{z_0}\sqrt{1-u}}$ było zero; bo inaczej możnaby wziąć rzędnę z_0 dostatecznie małą i taką żeby, począwszy od $u = 0$ aż do $u = 1$, spółczynnik różniczkowy zachował ten sam znak; więc całka składająca się z części nieskończenie małych, a wszystkie tego samego znaku, nie mogłaby być zero. Mamy zatem konieczne równanie

$$2\varphi'(uz_0)uz_0 + \varphi(uz_0) = 0,$$

albo, co to samo,

$$\frac{2\varphi'(z)dz}{\varphi(z)} = -\frac{dz}{z}.$$

Ztąd całkując wynika

$$\varphi(z)^2 = \frac{c}{z}.$$

oznaczając przez c stateczną dowolną.

Więc

$$\frac{ds^2}{dz^2} = \frac{c}{z}$$

albo

$$\frac{dx^2}{dz^2} = \frac{c}{z} - 1;$$

zkąd ostatecznie

$$\frac{dx}{dz} = \pm\sqrt{\frac{c}{z} - 1}.$$

Co jest właśnie równaniem różniczkowem cykloidy odniesionej do stycznej i normalnej w jej wierzchołku.

269. Nazywa się ogólnie KRZYWĄ NAJKRÓTSZEGO CZASU (*brachistochrona*) taka krzywa na której punkt materyalny wychodząc ze spoczynku pod działaniem sił danych, dosięga do wyznaczonego punktu w czasie krótszym niż gdyby przebiegał wszelką inną linię.

Cykloida jest krzywą najkrótszego czasu dla punktu ciężkiego w próżni. Aby tego dowieśdź, rozwiążmy ogólne zagadnienie

Mając dane dwa punkta A *i* B *w przestrzeni, znaleźć jaką linię punkt ciężki powinien opisać, aby przejść z* A *do* B *w czasie najkrótszym możebnym?*

Weźmy punkt A (wyższy od B) za początek spółrzędnych prostokątnych, oś AZ pionową w stronę ciężkości, oś AX na płaszczyznie pionowej AB, i oś AY poziomą. Przypuszczając że punkt ciężki wychodzi z A bez prędkości początkowej, czas w którym dochodzi do B(x, y, z) wyraża się przez

$$T = \int_0^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{2gz}}.$$

Aby ten czas był minimum, trzeba żeby jego zmienność przez δ była zero; to jest

$$\delta T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int (z^{-\frac{1}{2}} \delta ds - \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \delta z ds) = 0.$$

Ale

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

co daje

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z;$$

podstawiając tę wartość, mamy

$$\int z^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z\right) - \frac{1}{2} \int_0^{s_1} z^{-\frac{3}{2}} \delta z ds = 0.$$

Jeśli zcałkujemy częściami, uważając że w obydwóch punktach A i B zmienności δx, δy, δz są zero, otrzymamy

$$\int \left[\delta x d\left(z^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{ds}\right) + \delta y d\left(z^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{ds}\right) + \delta z \left\{ d\left(z^{-\frac{1}{2}} \frac{dz}{ds}\right) + \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} ds \right\}\right] = 0.$$

Zrównajmy teraz do zera spółczynniki zmienności δx, δy, δz; będzie

$$d\left(z^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$d\left(z^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{ds}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} ds + d\left(z^{-\frac{1}{2}} \frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Owoż, wiadomo że te trzy równania nie są oddzielne. Co zresztą łatwo się sprawdza; dość tylko pomnożyć pierwsze równanie przez $\frac{dx}{dz}$, drugie przez $\frac{dy}{dz}$, i dodać wszystkie trzy; otrzyma się tosamość

$$\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} ds + d\left(z^{-\frac{1}{2}} \frac{dz}{ds}\right) + \frac{dx}{dz} d\left(z^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{dz} d\left(z^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

Dwa pierwsze równania zcałkowane dają

$$z^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{ds} = c,$$

$$z^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{ds} = c';$$

zkąd wynika

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c'}{c} = b.$$

Całkując to równanie, będzie

$$y = bx + c''.$$

c, c', c'', b są stateczne dowolne. Ostatnie równanie dowodzi że szukana linia najkrótszego czasu leży na płasczyznie pionowej, przechodzącej przez punkt wyjścia A ; co widoczne a priori.

Biorąc płasczyznę linii najkrótszego czasu za płasczyznę xz, jeśli w równaniu $z^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{ds} = c$ zastąpimy ds^2 przez $dx^2 + dz^2$, i dla jednorodności położymy $c = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, otrzymamy

$$\frac{dx^2}{z} = \frac{dx^2 + dz^2}{2a};$$

ztąd ostatecznie wyprowadzamy

$$\frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2a}{z} - 1},$$

równanie różniczkowe cykloidy.

RÓWNANIE RUCHU WAHADŁA POJEDYNCZEGO W POWIETRZU.

270. Wahadło kołowe. Opór powietrza nie wiele wpływa na ruch wahadła kołowego. Gdy kąt początkowy α jest mały i tem samem mała prędkość wahadła, można uważać opór powietrza jako proporcyanalny do tej prędkości. i wyrazić go przez $-kmv$, oznaczając przez k opór powietrza na jedność prędkości. Owoż, składowa styczenna ciężkości jest $mg \operatorname{wst}\theta$; więc równanie różniczkowe ruchu wahadła kołowego w powietrzu będzie

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{wst}\theta - kv.$$

Ale $v = -a\dfrac{d\theta}{dt}$, $\dfrac{dv}{dt} = -a\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$; zatem równanie różniczkowe ruchu staje się

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{a}\operatorname{wst}\theta = 0.$$

Nie potrafiono jeszcze zcałkować ogólnie tego równania. Ale, jeśli kąt θ jest dość mały można, bez znacznego błędu, zastąpić $\operatorname{wst}\theta$ przez łuk θ; czyniąc to przypuszczenie będzie

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + k\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{a}\theta = 0.$$

To równanie linijne o spółczynnikach stałych łatwo się całkuje; dość tylko rozwiązać równanie cechujące

$$r^2 + kr + \frac{g}{a} = 0,$$

które daje

$$r = -\frac{k}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - \frac{4g}{a}}.$$

Jakiekolwiek są te dwa pierwiastki, może się zdarzyć tylko trzy przypadki.

1° Pierwiastki rzeczywiste i nierówne. Ponieważ one są oba odjemne, oznaczmy je przez $-r_1$, $-r_2$. Wtem założeniu całka zupełna θ ma kształt

$$\theta = Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t},$$

zkąd

$$\frac{d\theta}{dt} = -Ar_1 e^{-r_1 t} - Br_2 e^{-r_2 t}.$$

Owoż, w stanie początkowym wahadła, powinno być zarazem $t = 0$, $\theta = \theta_0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$; co daje

$$\theta_0 = A + B$$

$$0 = -Ar_1 - Br_2.$$

Ztąd wynika

$$A = \frac{r_2\theta_0}{r_2 - r_1}, \qquad B = -\frac{r_1\theta_0}{r_2 - r_1}.$$

Więc, podstawiając te wartości, będzie

$$\theta = \frac{\theta_0}{r_2 - r_1}\left(r_2 e^{-r_1 t} - r_1 e^{-r_2 t}\right),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{r_1 r_2 \theta_0}{r_2 - r_1}\left(e^{-r_1 t} - e^{-r_2 t}\right).$$

Ostatnie równanie pokazuje że $\frac{d\theta}{dt}$ nie zmienia nigdy znaku, i maleje aż do zera gdy czas rośnie nieskończenie; gdy $t = \infty$ wtedy $\theta = 0$. Więc wahadło nie wracałoby nigdy do położenia pionowego; co nie jest.

2° Pierwiastki rzeczywiste i równe, $r_2 = r_1$. W tym przypadku całka zupełna θ bierze kształt

$$\theta = e^{-r_1 t}(A + Bt);$$

zkąd

$$\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{B}e^{-r_1 t} - (\mathrm{A} + \mathrm{B}t)r_1 e^{-r_1 t}.$$

Owoż, wartości początkowe są

$$\theta_0 = \mathrm{A}$$

$$0 = \mathrm{B} - \mathrm{A}r_1;$$

więc

$$\theta = (1 + r_1 t)\theta_0 e^{-r_1 t}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = - r_1 t\theta_0 e^{-r_1 t}.$$

$\frac{d\theta}{dt}$ nie zmienia znaku, i θ nie jest nigdy zero; ten ruch nie stosuje się więc do wahadła.

3° Pierwiastki urojone. Jeśli, dla skrócenia, uczynimy

$$\frac{4g}{a} - k^2 = \lambda^2,$$

te pierwiastki wyrażą się przez

$$r = -\frac{k}{2} \pm \frac{\lambda}{2}\sqrt{-1},$$

całka zupełna będzie miała kształt

$$\theta = e^{-\frac{kt}{2}}\left(\mathrm{A} \operatorname{dos} \frac{\lambda t}{2} + \mathrm{B} \operatorname{wst} \frac{\lambda t}{2}\right).$$

Ztąd

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}(\mathrm{A}k - \mathrm{B}\lambda)e^{-\frac{kt}{2}} \operatorname{dos} \frac{\lambda t}{2} - \frac{-1}{2}(\mathrm{A}\lambda + \mathrm{B}k)e^{-\frac{kt}{2}} \operatorname{wst} \frac{\lambda t}{2}.$$

Owoż, wartości początkowe są

$$\theta_0 = A$$

$$0 = kA - \lambda B;$$

więc

$$(2)\quad \begin{cases} \theta = \theta_0 e^{-\frac{kt}{2}}\left(\operatorname{dos}\frac{\lambda t}{2} + \frac{k}{\lambda}\operatorname{wst}\frac{\lambda t}{2}\right), \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_0}{2\lambda} e^{-\frac{kt}{2}}(\lambda^2 + k^2)\operatorname{wst}\frac{\lambda t}{2}. \end{cases}$$

Te równania pokazują że ruch jest wahający, i że obszerność wahań dąży do zera gdy t rośnie nieograniczenie. Jeśli w ostatniej formule położymy $t = 0, \frac{2\pi}{\lambda}, \frac{4\pi}{\lambda}, \frac{6\pi}{\lambda}, \ldots$, będzie $\frac{d\theta}{dt} = 0$. Te wartości, począwszy od drugiej, wyrażają trwanie pierwszej oscyllacyi, dwóch pierwszych, trzech pierwszych,.... Więc w powietrzu małe oscyllacye wahadła są równoczesne jako w próżni; ich trwanie jest dane przez formułę

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}$$

albo

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{a} - k^2}} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2 a}{4g}}}.$$

k jest bardzo małe, i trwanie oscyllacyi w powietrzu prawie się nie różni od trwania w próżni danego przez formułę $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Znaleziono że parcie powietrza zwiększa trwanie oscyllacyi ilością mniejszą od $\frac{3}{10^9}$ tego trwania.

Podstawmy teraz w pierwszem równaniu (2) za t wartości

$$t = 0, \quad \frac{2\pi}{\lambda}, \frac{4\pi}{\lambda}, \frac{6\pi}{\lambda}, \ldots$$

znajdziemy

$$\pi\theta = \theta_0,\quad \theta = -\theta_0 e^{-\frac{k\pi}{\lambda}},\quad \theta = \theta_0 e^{-\frac{2k\pi}{\lambda}},\quad \theta = -\theta_0 e^{-\frac{3k\pi}{\lambda}},\ldots$$

Te wartości, wzięte liczebnie, wyrażają obszerność oscyllacyj po sobie idących, i tworzą postępnię geometryczną której stosunkiem jest $e^{-\frac{k\pi}{\lambda}}$.

271. Uwaga. Ciężar ciała M wahadła w powietrzu jest mniejszy niż w próżni.

Jeśli nazwiemy ρ stosunek ciężaru powietrza do ciężaru tego ciała, ciężar ostatniego w powietrzu wyrazi się przez $mg(1-\rho)$. Więc we wszystkich formułach, dotyczących ruchu wahadła w powietrzu, trzeba zamiast g położyć $g(1-\rho)$. Tym sposobem łatwo widzimy że, dla samej tylko straty ciężaru w stanie spoczynku, trwanie oscyllacyi w powietrzu zostaje powiększone w stosunku jedności do $\sqrt{1-\rho}$. Ale jest jeszcze inna przyczyna wpływająca na to powiększenie. Poisson rachunkiem a Bessel doświadczeniem dowiedli że w powietrzu wahadło traci ze swojego ciężaru więcej w ruchu niż w spoczynku, i uznali że do wahadła w ruchu przyczepia się warstwa powietrza która razem z niem waha, i przywodzi jego ciężar do $mg\left(1-\frac{3}{2}\rho\right)$. Borda, mając wzgląd na te poprawki, i uważając że wahadło platynowe, z którem robił doświadczenia, nie jest wahadłem pojedynczem, znalazł dla Paryża $g = 9^m{,}8088$.

272. Wahadło cykloidalne. *Zajmiemy się teraz ruchem punktu ciężkiego na cykloidzie przewróconej i mającej oś pionową; przypuszczając że opór środka, w którym ten ruch się odbywa, jest proporcyonalny do prędkości.*

Zachowując notacyę i figurę, użyte do wahadła cykloidalnego w próżni, i stosując zasadę sił żywych, mamy zaraz równanie różniczkowe ruchu

$$vdv = -gdy - kvds,$$

albo

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g\frac{dy}{ds} + k\frac{ds}{dt} = 0.$$

Owoż, równanie cykloidy $\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}$, daje

$$s^2 = 8ay, \qquad \text{zkąd} \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{s}{4a};$$

więc

$$\frac{d^2s}{dt^2} + k\frac{ds}{dt} + \frac{gs}{4a} = 0.$$

To równanie linijne o spółczynnikach stałych, ma taki sam kształt jak równanie (1) ruchu wahadła kołowego w powietrzu; więc zastępując tylko w tem ostatniem a przez $4a$, i nazywając s_0 odległość punktu wyjścia od punktu najniższego B, otrzymamy wszystkie przypadki ruchu punktu ciężkiego na cykloidzie, mające miejsce w powietrzu, albo w płynie którego opór jest proporcyonalny do prędkości. Ograniczając się na samem wahadle cykloidalnem, znajdujemy równania jego ruchu

$$(1) \qquad \begin{aligned} s &= s_0 e^{-\frac{kt}{2}}\left(\text{dos}\frac{\lambda t}{2} + \frac{k}{\lambda}\ \text{wst}\frac{\lambda t}{2}\right) \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{s_0}{2\lambda}\ e^{-\frac{kt}{2}}(\lambda^2 + k^2)\ \text{wst}\frac{\lambda t}{2} \end{aligned}$$

w których a jest promieniem koła tworzącego, i $\lambda = \sqrt{\frac{g}{a} - k^2}$.

Pierwsze równanie dowodzi że obszerność wahań zmniejsza się coraz bardziej gdy czas powiększa się nieograniczenie. Drugie równanie pokazuje że prędkość wahadła cykloidalnego jest zero w epokach

$$t = 0, \quad \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \frac{4\pi}{\lambda}, \quad \frac{6\pi}{\lambda} \ldots\ldots$$

Ztąd wynika że trwanie jednej całej oscyllacyi jest $\frac{2\pi}{\lambda}$. Więc czas

$$(2) \qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{a} - k^2}} = \pi\sqrt{\frac{4a}{g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{ak^2}{g}}}.$$

Ta wartość T jest niezależna od s_0; co dowodzi zarazem że oscyllacye wahadła cykloidalnego są równoczesne, i że *cykloida jest linią tosamoczesną punktu ciężkiego, w środku (w powietrzu) którego opór jest proporcyonalny do prędkości.*

Podstawiając wartości $t=0,\quad \frac{2\pi}{\lambda},\quad \frac{4\pi}{\lambda},\ldots$ za t w pierwszem równaniu, będzie

$$s=s_0,\qquad s=s_0 e^{-\frac{k\pi}{\lambda}},\qquad s=s_0 e^{-\frac{2k\pi}{\lambda}},\ldots$$

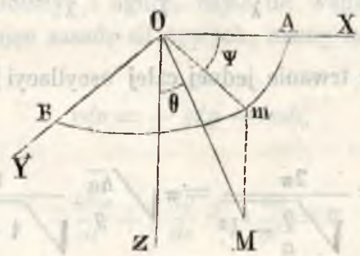
To pokazuje że obszerności wahadła cykloidalnego w powietrzu tworzą postępnie geometryczną nieskończenie malejącą.

RUCH PUNKTU CIĘŻKIEGO NA SFERZE.

273. Wahadło stożkowe. Gdy wahadło kołowe, oddalone z położenia równowagi, zostaje pchnięte, z prędkością jakąkolwiek, w kierunku nie będącym na płaszczyznie pionowej która przechodzi przez punkt zawieszenia, to wahadło bierze ruch około pionowej punktu zawieszenia, i naprzemian zbliża się do niej i oddala. Punkt materyalny wahadła opisuje linię skośną, a zaś nić (albo pręcik wahadła) opisuje powierzchnię stożkową. Ztąd nazwisko *wahadła stożkowego.*

Punkt materyalny wahadła stożkowego może być uważany jako zmuszony zostawać na powierzchni sferycznej; której promieniem jest długość tego wahadła a środkiem jego punkt zawieszenia. Parcie tego punktu materyalnego wywiera się, nie na powierzchnię sferyczną która jest idealną, ale na nić albo na pręcik, i stanowi tężność nici albo pręcika.

Obierzmy punkt zawieszenia O wahadła za początek trzech osi



prostokątnych, i weźmy za oś rzędnych pionowę OZ idącą w stronę ciężkości. Punkt ciężki M(x, y, z) zawieszony na nici bez massy, podlega działaniu dwóch sił; jedną jest jego ciężar mg, drugą tężność N nici skierowana ku środkowi O sfery. Jeśli nazwiemy a długość wahadła, równania różniczkowe ruchu punktu ciężkiego M będą

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mathrm{N}x}{ma}$$

(1)
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mathrm{N}y}{ma}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mathrm{N}z}{ma} + g.$$

Do tych trzech równań trzeba dołączyć równanie powierzchni sferycznej na której punkt ciężki M jest zmuszony zostawać,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Mamy więc cztery równania, dostateczne do wyznaczenia czterech niewiadomych x, y, z, N w funkcyi czasu t.

Aby otrzymać całki pierwsze ruchu, uważajmy że zasada powierzchni (239) daje zaraz jedną z nich. Albowiem wynikowa sił mg i N działających na punkt materyalny M jest na jednej płaszczyznie z pionową OZ; co pokazuje że zasada powierzchni stosuje się do płaszczyzny xy. Zresztą, mnożąc pierwsze równanie (1) przez y, drugie przez x i potem odciągając, mamy wprost

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0;$$

zkąd, całkując, wyprowadzamy

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \mathrm{C}.$$

Przekształćmy teraz spółrzędne prostolinijne na biegunowe, i niech będzie m rzut punktu M na płasczyznie xy. Jeśli nazwiemy ψ kąt jaki promień wodzący $Om = r$ czyni z osią OX, będzie

$$\operatorname{sty}\psi = \frac{y}{x} \quad \text{albo} \quad \psi = \operatorname{luk\,sty}\frac{y}{x};$$

zkąd

$$d\psi = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

albo

$$r^2 \frac{d\psi}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}.$$

Więc

$$(2) \qquad r^2 \frac{d\psi}{dt} = c.$$

Stateczna c wyraża, jako wiemy, powierzchnię dwa razy większą od tej którą rzut promienia wodzącego OM na płasczyznie xy opisuje w jedności czasu.

Do wyznaczenia statecznej c jest wiadome położenie początkowe punktu ciężkiego M i jego prędkość początkowa v_0. Ztąd łatwo się wywodzi składowa tej prędkości prostopadła do promienia wodzącego r na płasczyznie xy. I w samej rzeczy, jeśli nazwiemy i kąt jaki prędkość początkowa v_0 czyni z prostopadłą do płasczyzny pionowej początkowej ZOM_0, składowa prędkości początkowej wedle tej prostopadłej wyrazi się przez $v_0 \operatorname{dos} i$; co daje (241)

$$r\frac{d\psi}{dt} = v_0 \operatorname{dos} i.$$

Więc na mocy formuły (2) będzie

$$\frac{c}{r_0} = v_0 \operatorname{dos} i,$$

zkąd

$$c = v_0 r_0 \operatorname{dos} i = v_0 \sqrt{a^2 - z_0^2} \operatorname{dos} i.$$

Szukajmy teraz drugiej całki pierwszej ruchu. Tę całkę daje zasada sił żywych

$$d.\frac{1}{2}v^2 = gdz,$$

zkąd

$$(3) \qquad v^2 = 2gz + b;$$

stateczna dowolna $\qquad b = v_0^2 - 2gz_0.$

Owoż mamy :

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2},$$

$$r^2\frac{d\psi}{dt} = c,$$

a równanie sfery

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2 = a^2$$

daje

$$r\frac{dr}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0;$$

jeśli więc podstawimy wartość v^2 w równanie (3), i wyrugujemy $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, znajdziemy

$$\frac{dz^2}{dt^2}\left(\frac{z^2}{r^2} + 1\right) + \frac{c^2}{r^2} = 2gz + b;$$

albo, rugując r^2,

$$a^2\frac{dz^2}{dt^2} + c^2 = (2gz + b)(a^2 - z^2);$$

zkąd

$$(4) \qquad dt = \pm\frac{adz}{\sqrt{(a^2 - z^2)(2gz + b) - c^2}}.$$

Trzeba wziąć znak $+$ albo znak $-$, według jak rzędna z rośnie albo maleje z czasem t. Wartość t otrzymuje się przez kwadratury elliptyczne.

Wyrugujmy teraz dt za pomocą formuły (2), będziemy mieli

$$(5) \qquad d\psi = \pm \frac{acdz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(a^2 - z^2)(2gz + b) - c^2}}.$$

Wartość ψ otrzymuje się także przez kwadratury elliptyczne.

Formuła (5) dowodzi że płasczyzna wahadła która czyni kąt ψ z płasczyzną pionową zx, obraca się około pionowej OZ w jedną albo w drugą stronę, gdy z rośnie albo maleje; strona obrotu zależy od znaku statecznej c.

Pod pierwiastnikiem wielomian $(a^2 - z^2)(2gz + b) - c^2$ trzeciego stopnia ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste. Jakoż, zastępując stateczne dowolne przez ich wartości $b = v_0^2 - 2gz_0$, $c^2 = v_0^2(a^2 - z_0^2)\text{dos}^2 i$, będzie

$$(a^2 - z^2)(v_0^2 + 2gz - 2gz_0) - v_0^2(a^2 - z_0^2)\text{dos}^2 i,$$

i podstawienia $z = \quad -\infty, \quad -a, \quad z_0, \quad +a$

dadzą wyniki $\quad + \quad - \quad + \quad -$

Ten obraz zmienności znaków jasno pokazuje że wszystkie trzy pierwiastki wielomianu są rzeczywiste; pierwszy, zawarty między $-\infty$ i $-a$, jest odjemny; drugi, zawarty między $-a$ i z_0, może być dodatny albo odjemny; trzeci, zawarty między z_0 i a, jest dodatny jeśl $z_0 > 0$.

W przypadku szczególnym, gdy prędkość początkowa v_0 jest prostopadła do płasczyzny początkowej ZOM$_0$, z_0 jest pierwiastnikiem wielomianu pod pierwiastnikiem; albowiem, wtedy $\text{dos}^2 i = 0$, i

$$2g(a^2 - z^2)(z - z_0) - v_0^2(z^2 - z_0^2) = (z - z_0)\{2g(a^2 - z^2) - v_0^2(z + z_0)\}.$$

W ogóle, oznaczając trzy pierwiastki rzeczywiste wielomianu pod pierwiastnikiem przez $-\gamma$, β, α, mamy zawsze

$$dt = \pm \frac{adz}{\sqrt{2g(z-\alpha)(\beta-z)(z+\gamma)}},$$

$$d\psi = \pm \frac{acdz}{(a^2-z^2)\sqrt{2g(z-\alpha)(\beta-z)(z+\gamma)}}.$$

Te formuły dowodzą że, przez cały czas ruchu wahadła stożkowego, wartość rzędnej z zostaje zawarta między α i β.

274. Pozostaje jeszcze do wyrachowania tężność nici wahadła w każdej chwili.

Wiemy że tężność N tej nici, a ogólniej oddziaływanie powierzchni materyalnej, jest wynikową składowej normalnej ciężaru mg i siły odśrodkowej w położeniu w którem się punkt materyalny M znajduje, ta zaś wynikowa jest normalną do powierzchni. Owoż, składowa ciężaru mg wedle normalnej OM do sfery w punkcie $\mathrm{M}(x, y, z)$ jest $mg\frac{z}{a}$; wartość dodatna albo odjemna, według jak punkt ciężki M znajduje się na półsferzu niższem albo wyższem. Co do siły odśrodkowej $\frac{mv^2}{\rho}$, aby znaleźć jej składowę wedle normalnej do sfery, uważajmy że płasczyzna przylegająca do krążnej w punkcie $\mathrm{M}(x, y, z)$ przecina sferę wedle koła, które jest właśnie kołem krzywizny tej krążnej mającem promień ρ; zatem, mnożąc $\frac{mv^2}{\rho}$ przez $\frac{\rho}{a}$, otrzymamy składowę siły odśrodkowej wedle normalnej do sfery, i ta składowa $\frac{mv^2}{a}$ będzie skierowana na zewnątrz sfery. Więc, biorąc wynikowę dwóch składowych, znajdujemy że tężność nici ma za miarę

$$(6) \qquad \mathrm{N} = \frac{mv^2 + mgz}{a}.$$

Widzimy łatwo że w ruchu wahadła stożkowego pod płasczyzną poziomą przechodzącą przez punkt zawieszenia, nić jest zawsze wytężona. To wytężenie nici może być odjemne albo zero, gdy punkt ciężki M wahadła porusza się ponad płaszczyzną poziomą punktu zawieszenia.

Nietrudno wprost z równań ruchu otrzymać wyrażenie tężności N. Jakoż, pomnóżmy równania (1), pierwsze przez x, drugie przez y, trzecie przez z, i dodajmy, będzie

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{N}{ma}(x^2+y^2+z^2)+gz.$$

Ale mamy równanie sfery

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

które, dwa razy różniczkowane, daje

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{dx^2}{dt^2}-\frac{dy^2}{dt^2}-\frac{dz^2}{dt^2}=-v^2;$$

więc, podstawiając te wartości w równanie poprzedzające, otrzymujemy

$$-v^2=-\frac{Na}{m}+gz,$$

zkąd

$$N=\frac{mv^2+mgz}{a}$$

275. Jakie powinny być okoliczności początkowe ruchu, żeby punkt ciężki M wahadła przebiegał koło poziome sfery na której zostawać musi; albo innemi słowy, żeby wahadło opisywało stożek obrotowy?

Oczywiście warunkiem koniecznym i dostatecznym tego ruchu jest $z=z_0$. Ta wartość, podstawiona w równaniu sił żywych (3) i w trzeciem równaniu (1), daje

$$v=v_0, \quad \text{i} \quad N=\frac{mga}{z_0}.$$

Więc, jeśli $z=z_0$, ruch kołowy wahadła jest jednostajny i tężność nici stateczna.

Trzeba jeszcze znaleźć czas całego obrotu wahadła około pionowej. Ten czas wyraża się przez

$$\frac{2\pi r_0}{v_0}.$$

Owoż,

$$\frac{\mathrm{N}}{m} = \frac{v_0^2 + gz_0}{a} = \frac{ga}{z_0};$$

zkąd

$$v_0 = r_0\sqrt{\frac{g}{z_0}}.$$

Podstawiając tę wartość, widzimy że, w ruchu kołowym, wahadło stożkowe wykonywa obrót około pionowej w czasie

$$2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}}.$$

RUCH WAHADŁA STOŻKOWEGO KTÓRE SIĘ MAŁO ODDALA OD PIONOWEJ.

276. Wtym przypadku ruchu promień wodzący r rzutu m na płasczyznie xy jest bardzo mały w porównaniu z długością a wahadła, można więc rozwinąć wartość $z = \sqrt{a^2 - r^2}$ na szereg zbieżny podług potęg stosunku $\frac{r}{a}$.

Co daje

$$z = a\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{r^2}{2a} - \dots..$$

Poprzestając na dwóch pierwszych wyrazach szeregu, wywodzimy ztąd

$$dz = -\frac{rdr}{a}, \qquad z_0 = a - \frac{r_0^2}{2a}.$$

Podstawmy te wartości w równanie (3) przekształcone

$$\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = 2g(z - z_0) + v_0^2.$$

będzie

$$\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\frac{d\psi^2}{dt^2}=\frac{g}{a}(r_0^2-r^2)+v_0^2;$$

zaniedbując wyraz $\frac{r^2dr^2}{a^2dt^2}$ którego wartość jest bardzo mała względem zachowanych, zostaje

$$\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\frac{d\psi^2}{dt^2}=\frac{g}{a}(r_0^2-r^2)+v_0^2.$$

Jeśli teraz wyrugujemy dt za pomocą równania

$$r^2\frac{d\psi}{dt}=c=v_0r_0,$$

w którem dana wartość statecznej c przypuszcza że kąt ψ jest liczony od tej płaszczyzny pionowej do której prędkość początkowa v_0 jest prostopadła, otrzymamy

$$(7) \qquad d\psi=\pm\frac{v_0r_0dr}{r\sqrt{\left(v_0^2-\frac{gr^2}{a}\right)(r^2-r_0^2)}}.$$

Równanie pokazuje że w tym ruchu wahadła stożkowego promień wodzący r rzutu na płaszczyznie xy jest zawarty między ilościami r_0 i $v_0\sqrt{\frac{a}{g}}$, które są jego najmniejszą i największą wartością.

Aby ułatwić całkowanie, dajmy powyższej różniczce następującą postać:

$$d\psi=\mp\frac{v_0r_0\sqrt{a}\,dr}{r\sqrt{-av_0^2r_0^2+(av_0^2+gr_0^2)r^2-gr^4}}$$

albo

$$2d\psi=\mp\frac{v_0r_0\sqrt{a}\,d\frac{1}{r^2}}{\sqrt{-av_0^2r_0^2\frac{1}{r^4}+(av_0^2+gr_0^2)\frac{1}{r^2}-g}}.$$

Dla skrócenia połóżmy $\frac{1}{r^2} = u$, i uzupełnijmy kwadrat pod pierwiastnikiem; biorąc tylko znak — będziemy mieli

$$2d\psi = \frac{-d.(2av_0^2 r_0^2 u)}{\sqrt{(av_0^2 - gr_0^2)^2 - (2av_0^2 r_0^2 u - av_0^2 - gr_0^2)^2}}.$$

Zcałkujmy, wyznaczając stateczną dowolną przez warunek żeby było zarazem

$$t = 0 \qquad \psi = 0, \qquad u = \frac{1}{r_0^2},$$

otrzymamy

$$2\psi = \text{łuk dos}\, \frac{2av_0^2 r_0^2 u - av_0^2 - gr_0^2}{av_0^2 - gr_0^2};$$

zkąd

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{g}{av_0^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{g}{av_0^2}\right)\text{dos}\, 2\psi.$$

Więc ostatecznie

$$(8) \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2}\,\text{dos}^2\psi + \frac{g}{av_0^2}\,\text{wst}^2\psi.$$

Ten wynik dowodzi że rzut punktu materyalnego M na płaszczyznie xy opisuje ellipsę której pół-osiami są r_0 i $v_0\sqrt{\frac{a}{g}}$. Żeby wiedzieć w jakim czasie wahadło stożkowe, mało oddalone od pionowej, wykonywa cały obrót około tej linii, dość jest, stosownie do zasady powierzchni, podzielić powierzchnię opisanej ellipsy przez powierzchnię opisaną w jedności czasu na tej samej płaszczyznie, to jest podzielić $\pi r_0 v_0\sqrt{\frac{a}{g}}$ przez $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}v_0 r_0$; co daje czas obrotu

$$2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

To wyrażenie czasu jest niezależne od prędkości początkowej v_0, a więc stosuje się jeszcze gdy $v_0 = 0$; przedstawia ono czas dwóch całych oscyllacyj wahadła kołowego długości a; przypuszczając że te oscyllacye są dostatecznie małe. Co potwierdza znajome formuły.

277. Żeby zagadnienie wahadła stożkowego, o małych oscyllacyach, było zupełnie rozwiązane, trzeba jeszcze wyrazić ψ, θ i r w funkcyi czasu t.

Otoż co do kąta ψ. Równanie $r^2 \frac{d\psi}{dt} = v_0 r_0$ zkombinowane z ostatniem (8) daje

$$dt = \frac{\frac{r_0}{v_0} d\psi}{\text{dos}^2\psi + \frac{gr_0^2}{av_0^2}\text{wst}^2\psi};$$

zkąd, całkując i wyznaczając stateczną przez warunek żeby było zarazem $t = 0$ i $\psi = 0$, otrzymujemy

$$t\sqrt{\frac{g}{a}} = \text{łuk sty}\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{r_0}{v_0}\text{sty}\,\psi\right);$$

zatem

$$\text{sty}\,\psi = \frac{v_0}{r_0}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\text{sty}\,t\sqrt{\frac{g}{a}}. \tag{9}$$

Ta formuła pokazuje że płaszczyzna pionowa zawierająca wahadło obraca się niejednostajnie około osi pionowej OZ, i wykonywa cały obrót w czasie $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, a każdą ze czterech ćwierci obrotu w czasie $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$. Co już wiadome.

Żeby wyrazić r w funkcyi t, z formuły (7) wyrugujmy $d\psi$ za pomocą równania $r^2\frac{d\psi}{dt} = v_0 r_0$; będzie

$$dt = \frac{\sqrt{a}\,r\,dr}{\sqrt{(av_0^2 - gr^2)(r^2 - r_0^2)}},$$

albo

$$2dt\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{d.2gr^2}{\sqrt{(av_0^2 - gr_0^2)^2 - (av_0^2 + gr_0^2 - 2gr^2)^2}}.$$

Ztąd, całkując i wyznaczając stateczną przez warunek żeby było zarazem $t = 0$, $r^2 = r_0^2$, otrzymamy ostatecznie

$$(10) \qquad r^2 = r_0^2 \operatorname{dos}^2 t \sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{a}{g} v_0^2 \operatorname{wst}^2 t \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Nakoniec, znajdziemy θ w funkcyi t uważając że $r = a \operatorname{wst} \theta$, albo biorąc tylko $r = a\theta$ z przyczyny małości kąta θ. Podstawiając tę wartość za r w ostatniej formule, będziemy mieli

$$(11) \qquad \theta^2 = \frac{r_0^2}{a^2} \operatorname{dos}^2 t \sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{v_0^2}{ag} \operatorname{wst}^2 t \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Widzimy zaraz że kwadrat θ^2 jest okresowy, i ma okres $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$. Dla $t = 0$ jest

$$\theta_0^2 = \frac{r_0^2}{a^2} \quad \text{albo} \quad \theta_0 = \frac{r_0}{a};$$

a dla $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{g}}$, to jest we środku okresu, będzie

$$\theta_1^2 = \frac{v_0^2}{ag} \quad \text{albo} \quad \theta_1 = \frac{v_0}{\sqrt{ag}}.$$

Te dwie wartości kąta θ odpowiedają wierzchołkom ellipsy, którą rzut punktu materyalnego M opisuje na płaszczyznie xy.

Kończąc, dodajemy : gdyby dostrzegacz poruszał się z płaszczyzną zawierającą wahadło stożkowe, widziałby je oscyllujące między dwoma kierunkami, czyniącemi z osią pionową, i z jednej strony, kąty mające wstawy $\frac{r_0}{a}$ i $\frac{v_0}{\sqrt{ag}}$.

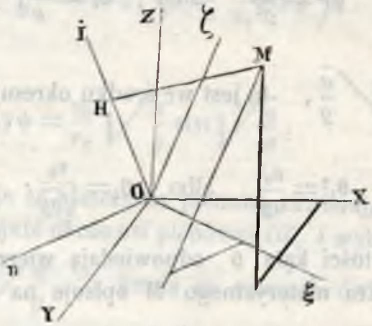
Czas jednej pozornej oscyllacyi jest $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{g}}$.

ROZDZIAŁ V.

TEORYA RUCHÓW WZGLĘDNYCH.

RUCH UKŁADU BRYŁOWEGO OKOŁO PUNKTU STAŁEGO.

278. Uważajmy układ bryłowy obracający się około punktu stałego z którym jest niezmiennie połączony. Niech będzie O punkt stały; poprowadźmy przez ten punkt trzy osie prostokątne stałe OX, OY, OZ, i trzy osie prostokątne $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ ruchome niezmiennie z układem bryłowym połączone; oznaczmy przez x, y, z



i ξ, η, ζ spółrzędne punktu materyalnego M odniesione do tych dwóch układów osi. Formuły przekształcenia spółrzędnych dają

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
x &= a\xi + b\eta + c\zeta \\
y &= a'\xi + b'\eta + c'\zeta \\
z &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta
\end{aligned}
$$

Spółczynniki a, a', a'' znaczą, jako wiadomo, dostawy kątów jakie oś ruchoma $O\xi$ czyni z trzema osiami stałemi OX, OY, OZ, to jest

$$a = \cos(O\xi, OX), \quad a' = \cos(O\xi, OY), \quad a'' = \cos(O\xi, OZ)$$

Tak samo b, b', b'' i c, c', c'' wyrażają dostawy jakie osie ruchome $O\eta$ i $O\zeta$ czynią każda z trzema osiami stałemi.

Te dziewięć spółczynników $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$ są związane sześcioma równaniami,

$$(2) \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0 \\ ac + a'c' + a''c'' = 0 \\ bc + b'c' + b''c'' = 0. \end{cases}$$

Równania (2) pokazują że osie OX, OY, OZ są prostokątne, a równania (3) wyrażają że osie $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ są także prostokątne; więc tylko trzy spółczynniki są dowolne.

Ponieważ oba układy osi spółrzędnych są prostokątne, można przejść z pierwszego do drugiego przez formuły jednakowej postaci, tak że równania (1), (2), (3) pociągają za sobą następujące

$$(4) \qquad \begin{aligned} \xi &= ax + a'y + a''z \\ \eta &= bx + b'y + b''z \\ \zeta &= cx + c'y + c''z. \end{aligned}$$

$$(5) \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned} \qquad (6) \begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' &= 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0. \end{aligned}$$

Nawzajem, te równania pociągają za sobą pierwsze. Więc układy (1), (2), (3) i (4), (5), (6) są tosame.

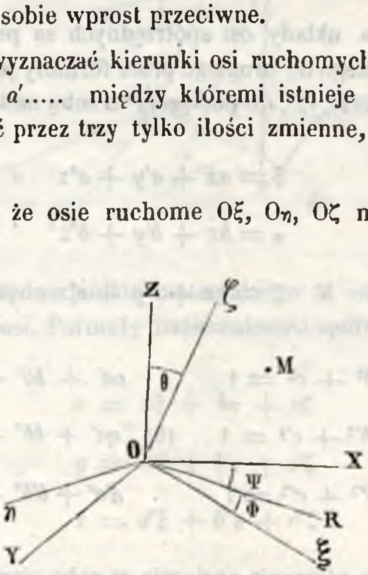
Do tych dwunastu formuł trzeba jeszcze dołączyć następujące

$$\pm a = b'c'' - c'b'', \quad \pm a' = b''c - c''b, \quad \pm a'' = bc' - cb',$$
$$(7) \quad \pm b = c'a'' - a'c'', \quad \pm b' = c''a - ac'', \quad \pm b'' = ca' - ac',$$
$$\pm c = ab' - ba', \quad \pm c' = a''b - b''a, \quad \pm c'' = ab' - ba'.$$
$$(8) \quad ab'c'' - ac'b'' + bc'a'' - ba'c'' + ca'b'' - cb'a'' = \pm 1.$$

Aby wiedzieć który z dwóch znaków $+$ albo $-$ brać należy, wyobraźmy sobie osobę stojącą na płaszczyznie $\xi\eta$ wzdłuż osi $O\zeta$, i patrzącą na ruch osi ruchomych $O\xi$, $O\eta$. Jeśli ta osoba widzi oś $O\xi$ na swojej lewej stronie a oś $O\eta$ na prawej, mówi się że ruch osi $O\xi$ i $O\eta$, jest *wsteczny* (od lewej ręki ku prawej); wtedy bierze się znak $+$, i pół-osie ruchome dodatne mogą przystać do pół-osi stałych dodatnych. Jeśli przeciwnie, osoba patrząca widzi oś $O\eta$ na swojej lewej stronie a oś $O\xi$ na prawej, mówi się że ruch tych osi jest *prosty* (od prawej ręki ku lewej), i wtedy bierze się znak $-$; w tym przypadku, gdy dwie pół-osie ruchome dodatne zostaną sprowadzone na dwie odpowiedające pół-osie stałe dodatne, trzecie osie będą sobie wprost przeciwne.

279. Zamiast wyznaczać kierunki osi ruchomych przez dziewięć dostaw $a, b, c, a' \ldots\ldots$ między któremi istnieje sześć związków, można je wyrazić przez trzy tylko ilości zmienne, za pomocą formuł Eulera.

Przypuszczając że osie ruchome $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ mogą przystawać



do osi stałych OX, OY, OZ, wyznaczamy je dając kąt ψ utworzony z osią OX przez ślad OR płaszczyzny $\xi\eta$ na XY, kąt φ osi $O\xi$ ze śladem OR, i nakoniec kąt θ osi $O\zeta$ i OZ który jest kątem płaszczyzn $\xi\eta$ i XY.

Znając trzy kąty θ, φ, ψ, znajduje się łatwo, przez geometryę analityczną, następujące formuły *Eulera*.

$$
\begin{aligned}
x &= \xi(\operatorname{dos}\varphi \operatorname{dos}\psi - \operatorname{wst}\varphi \operatorname{wst}\psi \operatorname{dos}\theta) \\
&\quad + \eta(-\operatorname{wst}\varphi \operatorname{dos}\psi - \operatorname{dos}\varphi \operatorname{wst}\psi \operatorname{dos}\theta) + \zeta \operatorname{wst}\psi \operatorname{wst}\theta, \\
y &= \xi(\operatorname{dos}\varphi \operatorname{wst}\psi + \operatorname{wst}\varphi \operatorname{dos}\psi \operatorname{dos}\theta) \\
&\quad + \eta(-\operatorname{wst}\varphi \operatorname{wst}\psi + \operatorname{dos}\varphi \operatorname{dos}\psi \operatorname{dos}\theta) - \zeta \operatorname{dos}\psi \operatorname{wst}\theta, \\
z &= \xi \operatorname{wst}\varphi \operatorname{wst}\theta + \eta \operatorname{dos}\varphi \operatorname{wst}\theta + \zeta \operatorname{dos}\theta.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Porównanie formuł (1) i (9) daje dziewięć spółczynników a, a' a'', b, b', ... w funkcyi trzech zmiennych θ, φ, ψ.

$$
\begin{aligned}
a &= \operatorname{dos}\varphi \operatorname{dos}\psi - \operatorname{wst}\varphi \operatorname{wst}\psi \operatorname{dos}\theta, \\
a' &= \operatorname{dos}\varphi \operatorname{wst}\psi + \operatorname{wst}\varphi \operatorname{dos}\psi \operatorname{dos}\theta, \\
a'' &= \operatorname{wst}\varphi \operatorname{wst}\theta, \\
b &= -\operatorname{wst}\varphi \operatorname{dos}\psi - \operatorname{dos}\varphi \operatorname{wst}\psi \operatorname{dos}\theta, \\
b' &= -\operatorname{wst}\varphi \operatorname{wst}\psi + \operatorname{dos}\varphi \operatorname{dos}\psi \operatorname{dos}\theta, \\
b'' &= \operatorname{dos}\varphi \operatorname{wst}\theta, \\
c &= \operatorname{wst}\psi \operatorname{wst}\theta, \\
c' &= -\operatorname{dos}\psi \operatorname{wst}\theta, \\
c'' &= \operatorname{dos}\theta.
\end{aligned}
$$

Ztąd wynika

$$
\operatorname{sty}\varphi = \frac{a''}{b''}, \qquad \operatorname{sty}\psi = -\frac{c}{c'}.
$$

Formuły ze spółczynnikami a, a', a'', b, ... są symetryczne i dlatego w zastosowaniu łatwe, chociaż wymagają wielu równań warunkowych. Formuły Eulera mają wielką zaletę że potrzebują tylko trzech zmiennych θ, φ, ψ, ale w rachunku niedogodne; jednakże w pewnych przypadkach są niezbędne.

280. Szukajmy teraz prędkości punktu materyalnego M. Różniczkując względem czasu t formuły (1), w których $a, a', a'', b, \ldots$ są funkcyami czasu, a zaś ξ, η, ζ ilościami stałemi, mamy

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = \xi \frac{da}{dt} + \eta \frac{db}{dt} + \zeta \frac{dc}{dt}, \\
(10)\qquad &\frac{dy}{dt} = \xi \frac{da'}{dt} + \eta \frac{db'}{dt} + \zeta \frac{dc'}{dt}, \\
&\frac{dz}{dt} = \xi \frac{da''}{dt} + \eta \frac{db''}{dt} + \zeta \frac{dc''}{dt}.
\end{aligned}
$$

Te formuły dają rzuty prędkości punktu M na osiach stałych OX, OY, OZ.

Znajdźmy jeszcze rzuty prędkości tego samego punktu M na osiach ruchomych $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. W tym celu, zrzutujmy najpierwej $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ na oś $O\xi$; co się otrzymuje mnożąc powyższe trzy równania odpowiednio przez a, a', a'', i dodając; będzie

$$
a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt} = \left(a\frac{da}{dt} + a'\frac{da'}{dt} + a''\frac{da''}{dt}\right)\xi
$$

$$
+ \left(a\frac{db}{dt} + a'\frac{db'}{dt} + a''\frac{db''}{dt}\right)\eta + \left(a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt}\right)\zeta.
$$

Ale formuły (2) zróżniczkowane dają

$$
\begin{aligned}
a\,da + a'da' + a''da'' &= 0, \\
b\,db + b'db' + b''db'' &= 0, \\
c\,dc + c'dc' + c''dc'' &= 0;
\end{aligned}
$$

więc, oznaczając przez v_ξ, v_η, v_ζ składowe prędkości punktu materyalnego M wedle trzech osi ruchomych $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, otrzymane przez rzuty jako wyżej, znajdujemy

$$v_\xi = \left(a\frac{db}{dt} + a'\frac{db'}{dt} + a''\frac{db''}{dt}\right)\eta + \left(a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt}\right)\zeta,$$

$$(11)\qquad v_\eta = \left(b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt}\right)\xi + \left(b\frac{dc}{dt} + b'\frac{dc'}{dt} + b''\frac{dc''}{dt}\right)\zeta,$$

$$v_\zeta = \left(c\frac{da}{dt} + c'\frac{da'}{dt} + c''\frac{da''}{dt}\right)\xi + \left(c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt}\right)\eta.$$

Równania (3) zróżniczkowane pokazują że mnożniki trzech spółrzędnych ξ, η, ζ, wyrażone temi samemi literami, są równe i znaków przeciwnych; możemy więc położyć

$$pdt = cdb + c'db' + c''db'' = -(bdc + b'dc' + b''dc''),$$

$$qdt = adc + a'dc' + a''dc'' = -(cda + c'da' + c''da''),$$

$$rdt = bda + b'da' + b''da'' = -(adb + a'db' + a''db'').$$

Tym sposobem formuły (11) biorą następujący kształt bardzo prosty:

$$v_\xi = q\zeta - r\eta,$$

$$(12)\qquad v_\eta = r\xi - p\zeta,$$

$$v_\zeta = p\eta - q\xi.$$

281. Oś CHWILOWA WIROWANIA. Szukajmy punktów układu bryłowego które, w epoce t jego ruchu około punktu stałego O, nie-

mają żadnej prędkości. Dla tych punktów będzie

$$v_\xi = 0, \quad v_\eta = 0, \quad v_\zeta = 0,$$

formuły (12) dadzą

$$(13) \qquad \begin{aligned} q\zeta - r\eta &= 0, \\ r\xi - p\zeta &= 0, \\ p\eta - q\xi &= 0 . \end{aligned}$$

Te trzy równania nie są oddzielne i przywodzą się do dwóch

$$(14) \qquad \frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}.$$

Ostatnie dwa równania przedstawiają linię prostą która jest miejscem punktów mających prędkość zero na końcu czasu t. Więc, gdy układ bryłowy obraca się około punktu stałego, istnieje w każdej epoce t ruchu pewna linia prosta około której ten układ *wiruje*, to jest obraca się przez jedną chwilę czasu dt. Dla tej przyczyny tę prostę nazwano *osią chwilową* wirowania. Jako widzimy, oś chwilowa OI (*fig.* str. 410) przechodzi przez początek O osi ruchomych, i czyni z niemi kąty których dostawy są proporcyonalne do ilości p, q, r. A jeśli położymy

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \omega$$

te dostawy wyrażą się przez

$$\frac{p}{\omega}, \quad \frac{q}{\omega}, \quad \frac{r}{\omega}.$$

zatem

$$p = \omega \operatorname{dos}(OI, O\xi), \qquad q = \omega \operatorname{dos}(OI, O\eta), \qquad r = \omega \operatorname{dos}(OI, O\zeta).$$

Aby otrzymać prędkość v punktu materyalnego M, dodajmy kwadraty prędkości składowych, v_ξ, v_η, v_ζ będzie

$$v^2 = (q\zeta - r\eta)^2 + (r\xi - p\zeta)^2 + (p\eta - q\xi)^2,$$

albo

$$v^2 = (p^2 + q^2 + r^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (p\xi + q\eta + r\zeta)^2.$$

Ale

$$p\xi + q\eta + r\zeta = \omega . \mathrm{OM}\left(\frac{p}{\omega} \cdot \frac{\xi}{\mathrm{OM}} + \frac{q}{\omega} \cdot \frac{\eta}{\mathrm{OM}} + \frac{r}{\omega} \cdot \frac{\zeta}{\mathrm{OM}}\right)$$

$$= \omega . \mathrm{OM} \operatorname{dos}(\mathrm{OI}, \mathrm{OM});$$

więc

$$v^2 = \omega^2 . \overline{\mathrm{OM}}^2 - \omega^2 . \overline{\mathrm{OM}}^2 \operatorname{dos}^2(\mathrm{OI}, \mathrm{OM}) = \omega^2 . \overline{\mathrm{OM}}^2 \operatorname{wst}^2(\mathrm{OI}, \mathrm{OM})$$

albo

(15) $$v^2 = \omega . \mathrm{OM} \operatorname{wst}(\mathrm{OI}, \mathrm{OM}).$$

Jeśli nazwiemy ρ odległość punktu M od osi chwilowej OI, ostatnia formuła weźmie postać

$$v^2 = \omega\rho.$$

Ten wynik dowodzi że prędkość punktu materyalnego M jest proporcyonalna do jego odległości od osi chwilowej która odpowieda chwili dt; więc ω jest jego prędkością kątową względem tej osi. Widzimy teraz dobrze że ilości któreśmy nazwali p, q, r są składowemi prędkości kątowej ω wedle osi ruchomych $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

Jeśli na osi chwilowej OI weźmiemy długość wyrażoną przez $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, zaczynając od punktu O i idąc w stronę taką żeby widz, oparty wzdłuż tej osi i mający nogi w punkcie O, spostrzegał ruch wirowy odbywający się od lewej ręki ku prawej jako ruch wskazówek zegaru, ta długość będzie przedstawiała wielkość prędkości kątowej punktu M, i stronę w którą on wiruje. Tym sposobem prędkość kątowa ω około osi chwilowej OI jest wynikową prędkości kątowych p, q, r około osi ruchomych $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Ztąd nawzajem wywodzimy już wiadome formuły

$$p = \omega \operatorname{dos}(\omega, \xi),$$

$$q = \omega \operatorname{dos}(\omega, \eta),$$

$$r = \omega \operatorname{dos}(\omega, \zeta).$$

Prędkość każdego punktu materyalnego M w chwili dt jest prostopadła do płaszczyzny przechodzącej przez oś chwilową OI i przez promień wodzący OM. Bo te dwie proste przechodzą przez punkt O, a prędkość punktu M jest prostopadła do każdej z nich; czego dowodzą dwie oczywiste tosamości

$$(q\zeta - r\eta)p + (r\xi - p\zeta)q + (p\eta - q\xi)r = 0,$$

$$(q\zeta - r\eta)\xi + (r\xi - p\zeta)\eta + (p\eta - q\xi)\zeta = 0.$$

TEORYA ANALITYCZNA RUCHÓW WZGLĘDNYCH.

282. Jeśli widz patrzący na ruch ciała jest także sam w ruchu, wtedy ruch jaki będzie przypisywał temu ciału nie jest jego ruchem rzeczywistym, ale tylko ruchem *pozornym* który nazwano *ruchem względnym*; rzeczywisty ruch ciała w przestrzeni mianowano *ruchem samoistym*, a ruch samego widza *ruchem uniesienia.*

Pojmuje się łatwo że widz może być w ruchu względnie do układu na którym się znajduje, a rzeczywiście zostawać w spoczynku w przestrzeni, jeśli się porusza w stronę przeciwną ruchu tego układu i z jego prędkością. I nawzajem, widz może być w spoczynku względnym a w ruchu samoistym. Ten widz, uniesiony ruchem układu do którego należy i patrzący na ciało zewnątrz układu będące, nietylko weźmie za prędkość rzeczywistą ciała prędkość ruchu względnego, ale jeszcze przypisze ten ruch pozorny siłom w ogóle różnym od tych które istotnie działają. I tak, jeśli układ któremu widz uczestniczy obraca się jednostajnie około osi stałej, a widz patrzy na punkt niezmienny w przestrzeni, ten punkt będzie mu się zdawał opisywać okrąg około osi stałej z prędkością jednostajną; zatem będzie się zdawał pod działaniem siły dośrodkowej statecznej; gdy tymczasem wynikowa sił które na ten punkt działać mogą jest zupełnie zero, ponieważ punkt zostaje niezmienny.

Wszystkie ruchy jakie spostrzegamy około siebie albo w przestrzeni są ruchami względnemi. I tak : punkt materyalny porusza się na statku, statek płynie po rzece, ziemia się obraca około linii biegunów, i w tym samym czasie bierze następne położenia na swojej orbicie około słońca, a słońce przenosi się w przestrzeni. Te wszystkie ruchy są względne między sobą. Znajomość ruchów względnych prowadzi do poznania ruchu samoistego, albo mówiąc ściślej, do ruchu który za samoisty uważamy.

Wyobraźmy sobie że punkt materyalny M, odniesiony do trzech osi prostokątnych ruchomych $O_1\xi$, $O_1\eta$, $O_1\zeta$, opisuje względem tych osi linię jakąkolwiek, która będzie jego *krążną względną;* ta krążna, z przyczyny ruchu osi, bierze różne położenia po sobie ciągiem idące w przestrzeni. Otoż, można łatwo wyznaczyć ruch samoisty punktu M, znając jego ruch na krążnej względnej i ruch trójścianu osi. W tym celu, weźmy trzy osie prostokątne stałe OX, OY, OZ; oznaczmy przez x, y, z spółrzędne punktu M względem osi stałych, przez ξ, η, ζ spółrzędne tego punktu względem osi ruchomych; i nakoniec przez x_1, y_1, z_1 spółrzędne początku ruchomego O_1. Będziemy mieli trzy formuły

$$
(16)\qquad \begin{aligned}
x &= x_1 + a\xi + b\eta + c\zeta,\\
y &= y_1 + a'\xi + b'\eta + c'\zeta,\\
z &= z_1 + a''\xi + b''\eta + c''\zeta,
\end{aligned}
$$

w których a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'' oznaczają dziewięć dostaw kątów służących do przejścia od osi stałych do osi ruchomych.

Różniczkując równania (16), będzie

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx_1}{dt}+\xi\frac{da}{dt}+\eta\frac{db}{dt}+\zeta\frac{dc}{dt}+a\frac{d\xi}{dt}+b\frac{d\eta}{dt}+c\frac{d\zeta}{dt},$$

$$(17)\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy_1}{dt}+\xi\frac{da'}{dt}+\eta\frac{db'}{dt}+\zeta\frac{dc'}{dt}+a'\frac{d\xi}{dt}+b'\frac{d\eta}{dt}+c'\frac{d\zeta}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz_1}{dt}+\xi\frac{da''}{dt}+\eta\frac{db''}{dt}+\zeta\frac{dc''}{dt}+a''\frac{d\xi}{dt}+b''\frac{d\eta}{dt}+c''\frac{d\zeta}{dt}.$$

W tych równaniach, pierwsze strony $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ są rzutami prędkości punktu materyalnego M na osiach stałych. Drugie strony składają się z dwóch części których znaczenia są różne. Summy

$$\frac{dx_1}{dt}+\xi\frac{da}{dt}+\eta\frac{db}{dt}+\zeta\frac{dc}{dt},\quad \frac{dy_1}{dt}+\xi\frac{da'}{dt}+\eta\frac{db'}{dt}+\zeta\frac{dc'}{dt},$$

$$\frac{dz_1}{dt}+\xi\frac{da''}{dt}+\eta\frac{db''}{dt}+\zeta\frac{dc''}{dt}$$

wyrażają pochodne spółrzędnych x, y, z, wzięte uważając ξ, η, ζ jakoby niezmienne w czasie t; te summy są więc rzutami prędkości punktu M, jak gdyby on był niezmiennie związany z osiami ruchomemi; albo innemi słowy, te summy są rzutami na osiach stałych prędkości uniesienia punktu M.

Nakoniec, summy

$$a\frac{d\xi}{dt}+b\frac{d\eta}{dt}+c\frac{d\zeta}{dt},\quad a'\frac{d\xi}{dt}+b'\frac{dy}{dt}+c'\frac{d\zeta}{dt},$$

$$a''\frac{d\xi}{dt}+b''\frac{d\eta}{dt}+c''\frac{d\zeta}{dt}$$

wyrażają pochodne spółrzędnych x, y, z, wzięte uważając x_1, y_1, z_1, a, a', a'', b, b',..... jako niezmienne w czasie t; zatem są rzutami prędkości punktu M, jak gdyby w epoce t osie ruchome $O_1\xi$, $O_1\eta$, $O_1\zeta$ były niezmiennie związane z osiami stałemi OX, OY, OZ; więc te summy są rzutami na osiach stałych prędkości względnej punktu M.

Widzimy tym sposobem że rzuty prędkości samoistej punktu materyalnego M, na osiach stałych, są summami rzutów prędkości uniesienia i prędkości względnej. Więc

Twierdzenie I. *Prędkość samoista jest wynikową prędkości uniesienia i prędkości względnej.*

Zatem

Prędkość względna jest wynikową prędkości samoistej i prędkości uniesienia wziętej w kierunku przeciwnym.

283. Szukając teraz wartości przyspieszeń, zróżniczkujmy równania (17); będziemy mieli

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \xi\frac{d^2a}{dt^2} + \eta\frac{d^2b}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c}{dt^2} + a\frac{d^2\xi}{dt^2} + b\frac{d^2\eta}{dt^2} + c\frac{d^2\zeta}{dt^2}$$
$$+ 2\left(\frac{da}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{db}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dc}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2} + \xi\frac{d^2a'}{dt^2} + \eta\frac{d^2b'}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c'}{dt^2} + a'\frac{d^2\xi}{dt^2} + b'\frac{d^2\eta}{dt^2} + c'\frac{d^2\zeta}{dt^2}$$
$$+ 2\left(\frac{da'}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{db'}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dc'}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z_1}{dt^2} + \xi\frac{d^2a''}{dt^2} + \eta\frac{d^2b''}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c''}{dt^2} + a''\frac{d^2\xi}{dt^2} + b''\frac{d^2\eta}{dt^2} + c''\frac{d^2\zeta}{dt^2}$$
$$+ 2\left(\frac{da''}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{db''}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dc''}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right).$$

Pierwsze strony $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ tych równań wyrażają rzuty na osiach stałych samoistego przyspieszenia punktu materyalnego M.

W drugiej stronie pierwsze summy

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\xi\frac{d^2a}{dt^2}+\eta\frac{d^2b}{dt^2}+\zeta\frac{d^2c}{dt^2},\qquad \frac{d^2y_1}{dt^2}+\xi\frac{d^2a'}{dt^2}+\eta\frac{d^2b'}{dt^2}+\zeta\frac{d^2c'}{dt^2},$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2}+\xi\frac{d^2a''}{dt^2}+\eta\frac{db''}{dt^2}+\zeta\frac{d^2c''}{dt^2},$$

które są pochodnemi spółrzędnych x, y, z, wziętemi uważając ξ, η, ζ jako stałe, wyrażają rzuty na osiach stałych przyspieszenia uchu uniesienia.

Drugie summy

$$a\frac{d^2\xi}{dt^2}+b\frac{d^2\eta}{dt^2}+c\frac{d^2\xi}{dt^2},\quad a'\frac{d^2\xi}{dt^2}+b'\frac{d^2\eta}{dt^2}+c'\frac{d^2\zeta}{dt^2},\quad a''\frac{d^2\xi}{dt^2}+\ldots$$

są pochodnemi spółrzędnych x, y, z, wziętemi uważając x_1, y_1 z_1, a, a', a'', b, ... jako stałe; zatem wyrażają rzuty na osiach stałych przyspieszenia ruchu względnego punktu materyalnego M.

Nakoniec, trzecie summy

$$2\left(\frac{da}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{db}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dc}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right),\quad 2\left(\frac{da'}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{db'}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dc'}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right),$$

$$2\left(\frac{da''}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{db''}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dc''}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

mogą być uważane jako przedstawiające rzuty na osiach stałych, pewnej prostej której dano imię *przyspieszenia dośrodkowego składanego*. Ztąd twierdzenie które podał Koriolis (*Coriolis*).

Twierdzenie II. *Przyspieszenie samoiste jest wynikową przyspieszenia w ruchu uniesienia, przyspieszenia względnego, i przyspieszenia dośrodkowego składanego.*

Aby mieć jasne wyobrażenie przyspieszenia dośrodkowego składanego, zrzutujmy je na osie ruchome. To działanie przyniesie i tę korzyść że da składowe przyspieszenia wedle osi które są istotnemi osiami naszych spółrzędnych, gdy przeciwnie osie stałe są tylko liniami posiłkowemi.

Owoż, summy

$$\frac{da}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{db}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dc}{dt}\frac{d\zeta}{dt}, \qquad \frac{da'}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{db'}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dc'}{dt}\frac{d\zeta}{dt},$$

$$\frac{da''}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{db''}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dc''}{dt}\frac{d\xi}{dt}$$

tem się tylko różnią od drugich stron równań (10) że w nich $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ zastępują ξ, η, ζ tamtych; jeśli więc w drugich stronach formuł (12), zamiast ξ, η, ζ położymy $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, i pomnożymy przez 2, otrzymamy dwumiany

$$2\left(q\frac{d\zeta}{dt}-r\frac{d\eta}{dt}\right), \qquad 2\left(r\frac{d\xi}{dt}-p\frac{d\zeta}{dt}\right), \qquad 2\left(p\frac{d\eta}{dt}-q\frac{d\xi}{dt}\right)$$

które są rzutami, na osiach ruchomych, przyspieszenia dośrodkowego składanego.

Nietrudno też wyznaczyć wielkość i kierunek przyspieszenia dośrodkowego składanego. Biorąc summę kwadratów jego trzech składowych, mamy

$$4\left(q\frac{d\zeta}{dt}-r\frac{d\eta}{dt}\right)^2+4\left(r\frac{d\xi}{dt}-p\frac{d\zeta}{dt}\right)^2+4\left(p\frac{d\eta}{dt}-q\frac{d\xi}{dt}\right)^2$$

$$=4\left\{(p^2+q^2+r^2)\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{dt^2}-\left(p\frac{d\xi}{dt}+q\frac{d\eta}{dt}+r\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\}$$

$$=4\omega^2 v''^2 \operatorname{wst}^2(\omega, v''),$$

gdzie v'' znaczy prędkość względną punktu materyalnego na końcu czasu t, a ω prędkość wirowania osi ruchomych około osi chwilowej odpowiedającej temu czasowi. Więc przyspieszenie dośrodkowe składane wyraża się przez

$$2\omega v'' \operatorname{wst}(\omega, v'').$$

Przyspieszenie dośrodkowe składane jest prostopadłe do prędkości względnej v'' i do osi chwilowej wirowania; czego dowodzą dwie widoczne tasamości

$$\left(q\frac{d\zeta}{dt}-r\frac{d\eta}{dt}\right)\frac{d\xi}{dt}+\left(r\frac{d\xi}{dt}-p\frac{d\zeta}{dt}\right)\frac{d\eta}{dt}+\left(p\frac{d\eta}{dt}-q\frac{d\xi}{dt}\right)\frac{d\zeta}{dt}=0$$

$$\left(q\frac{d\zeta}{dt}-r\frac{d\eta}{dt}\right)p+\left(r\frac{d\xi}{dt}-p\frac{d\zeta}{dt}\right)q+\left(p\frac{d\eta}{dt}-q\frac{d\xi}{dt}\right)r=0.$$

To przyspieszenie jest skierowane w stronę w którą się obraca, około osi chwilowej odpowiedającej, linia przedstawiająca prędkość względną punktu M.

284. Znając przyspieszenia, oznaczmy przez X, Y, Z rzuty, na osiach ruchomych, siły istotnie przyłożonej do punktu materyalnego M, przez X', Y', Z' rzuty siły która sprawia ruch uniesienia tego punktu; będziemy mieli między temi dwiema siłami, siłą względną i siłą dośrodkową składaną, następujące równania

$$X = X' + m\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2m\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right)$$

$$Y = Y' + m\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2m\left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

$$Z = Z' + m\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2m\left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right).$$

Zamieńmy teraz litery ξ, η, ζ na zwyczajne x, y, z które odtąd będą znaczyły spółrzędne punktu materyalnego M względem osi ruchomych. Czyniąc tę zmianę, z powyższych równań wywodzimy równania różniczkowe ruchu względnego

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X} - \mathrm{X}' - 2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right),$$

$$(18)\qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y} - \mathrm{Y}' - 2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right),$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z} - \mathrm{Z}' - 2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right).$$

Siła względna, której składowe wedle osi ruchomych są wyrażone przez $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$, stanowi siłę poruszającą w ruchu względnym. Siła mająca składowe X, Y, Z wedle tych osi jest siłą rzeczywiście przyłożoną do punktu materyalnego M. Dwie inne siły są siłami *pozornemi*, zmyślonemi. Pierwsza z tych sił pozornych, mająca składowe $-\mathrm{X}'$, $-\mathrm{Y}'$, $-\mathrm{Z}'$, jest równa i wprost przeciwna sile która sprawia ruch uniesienia punktu M; zatem jest siłą bezwładności tego punktu w jego ruchu uniesienia.

Druga siła pozorna, mająca składowe

$$-2m\left(q\frac{dy}{dt} - r\frac{dz}{dt}\right),\ -2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right),\ -2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right),$$

została nazwaną *siłą odśrodkową składaną*. Trzeba ją uważać jakoby działała w kierunku przeciwnym przyspieszenia dośrodkowego składanego. Więc siła odśrodkowa składana jest skierowana w stronę przeciwną wirowania prędkości względnej v'' około odpowiedającej osi chwilowej; jest prostopadła do płaszczyzny przechodzącej przez tę oś i przez prędkość względną, i ma za miarę wieloczyn

$$2m\omega v''\,\mathrm{wst}(\omega, v'').$$

Możemy teraz wysłowić równania (18). Te równania dowodzą że:

Siła względna jest wynikową siły istotnie przyłożonej do punktu materyalnego, siły bezwładności odpowiedającej jego ruchowi uniesienia, i siły odśrodkowej składanej.

Widzimy tedy że można wprost otrzymać równania różniczkowe ruchu względnego, tak jak gdyby on był ruchem somoistym, dołączając tylko do siły rzeczywistej, fizycznej, która działa na punkt materyalny, dwie siły zmyślone, to jest siłę bezwładności odpowiedającą jego ruchowi uniesienia, i siłę odśrodkową składaną.

285. Są przypadki ruchu względnego w których siły pozorne nie figurują obie razem, a nawet i takie do których żadna z nich nie wchodzi. Rozbierzmy je szczegółowo.

1° Gdy ruch osi ruchomych (osi porównania) jest samym tylko przeniesieniem, wtedy prędkość wirowania tych osi jest zero, to jest $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$; zatem siła odśrodkowa składana nie istnieje. W tym przypadku, trzeba tylko do siły rzeczywiście przyłożonej do punktu materyalnego M, przyłączyć siłę bezwładności odpowiedającą ruchowi uniesienia tego punktu.

Jako przykład, uważajmy ruch punktu materyalnego wolnego względem osi mających ruch przeniesienia w przestrzeni (ruch postępowy); i nazwijmy x_1, y_1, z_1 spółrzędne początku osi ruchomych, odniesione do trzech osi stałych do których osie ruchome zostają ciągle równoległe. Składowe siły bezwładności punktu materyalnego massy m, w jego ruchu uniesienia, wyrażają się przez

$$-m\frac{d^2x_1}{dt^2},\quad -m\frac{d^2y_1}{dt^2},\quad -m\frac{d^2z_1}{dt^2}.$$

Jeśli więc oznaczymy przez ξ, η, ζ spółrzędne tego punktu względem osi ruchomych, i przez X, Y, Z składowe, wedle tych samych osi, wynikowej sił rzeczywiście przyłożonych do tego punktu materyalnego, jego ruch względny będzie wyznaczony przez następujące równania różniczkowe

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \mathrm{X} - m\frac{d^2x_1}{dt^2},\\
m\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \mathrm{Y} - m\frac{d^2y_1}{dt^2},\\
m\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \mathrm{Z} - m\frac{d^2z_1}{dt^2}.
\end{aligned}
$$

Można wprost otrzymać te równania, nie opierając się na teoryi ruchu względnego, i stosując tylko równania różniczkowe ruchu samoistego krzywolinijnego. Jakoż, uważajmy że spółrzędne samoiste x, y, z punktu ruchomego M wyrażają się przez

$$x = x_1 + \xi,$$

$$y = y_1 + \eta,$$

$$z = z_1 + \zeta;$$

więc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2\xi}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{d^2\eta}{dt^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{d^2\zeta}{dt^2};$$

zkąd

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = X - m\frac{d^2x_1}{dt^2},$$

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y - m\frac{d^2y_1}{dt^2},$$

$$m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z - m\frac{d^2z_1}{dt^2}.$$

2° Jeśli osie zmienne mają ruch przeniesienia prostolinijny i jednostajny, wtedy nietylko siła odśrodkowa składana jest zero, ale także i siła bezwładności odpowiedająca ruchowi uniesienia jest zero. W tym przypadku niema żadnej siły pozornej do przydania do sił rzeczywistych; i równania różniczkowe ruchu względnego są takie same jak ruchu samoistego. Ale całki tych równań nie są te same; bo wielkość i kierunek prędkości w tych ruchach są różne; co zupełnie zmienia stateczne dowolne wprowadzone przez całkowania.

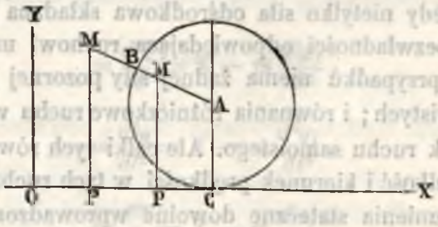
3° Gdy ruch osi zmiennych jest wirowy jednostajny, wtedy siła bezwładności, odpowiedająca ruchowi uniesienia punktu materyalnego, jest siłą odśrodkową i wyraża się przez $m\omega^2 r$.

286. Ponieważ wszelki ruch względny punktu materyalnego może być uważany jako ruch samoisty, byle tylko do sił które rzeczywiście działają na ten punkt dołączono dwie już określone siły pozorne; idzie zatem że twierdzenia, mające miejsce w ruchu samoistym punktu materyalnego wolnego, stosują się także do ruchu względnego, z warunkiem wprowadzenia do nich dwóch rzeczonych sił pozornych. Nie widzimy potrzeby powtarzania tych twierdzeń, które zresztą później, na właściwem miejscu, obszernie wyłożone zostaną; powiemy tylko że w zastosowaniu zasady sił żywych do ruchu względnego, siła odśrodkowa składana znika zawsze sama z siebie, i można na nią w rozumowaniu nie zważać; bo ta siła, będąc prostopadła do kierunku prędkości względnej punktu ruchomego, nie daje żadnej pracy. Ale trzeba pamiętać o sile bezwładności w ruchu uniesienia, i, gdy ona jest siłą odśrodkową, przydać do drugiej strony równania sił żywych całkę wyrażoną przez

$$\int_{r_0}^{r} m\omega^2 r dr = \frac{1}{2} m\omega^2 (r - r_0^2).$$

287. Dla zastosowania wyłożonej teoryi ruchu względnego, weźmy następujący przykład.

ZAGADNIENIE. *Koło pionowe* A *toczy się jednostajnie (bez tarcia) po linii prostej; znaleźć przyspieszenie samoiste punktu* M *związanego niezmiennie z tem kołem.*



Stosownie do danych warunków zagadnienia, można uważać punkt materyalny M odniesiony do osi ruchomych przechodzących przez środek koła A jako obracający się około tego środka z prędkością kątową ω, a zaś te osie jako posuwające się ruchem prostolinijnym i jednostajnym. W tem założeniu, ruch punktu M około środka A jest ruchem względnym, a ruch osi zmiennych ruchem uniesienia. Na mocy twierdzenia Koryolisa, przyspieszenie samoiste jest wynikową trzech przyspieszeń. to jest: przyspieszenia ruchu uniesienia, przyspieszenia względnego i przyspieszenia dośrodkowego składanego. Owoż, osie zmienne mają ruch prostolinijny i jednostajny; zatem ich prędkość wirowania jest zero, a temsamem przyspieszenie dośrodkowe składane jest zero, i przyspieszenie ruchu uniesienia jest także zero; więc przyspieszenie samoiste punktu M jest równe jego przyspieszeniu względnemu. Ale, ponieważ ruch względny jest kołowy i jednostajny, jego całe przyspieszenie przywodzi się do przyspieszenia dośrodkowego które się wyraża przez ω^2.AM. Więc przyspieszenie samoiste punktu M jest ω^2.AM.

Ten wynik łatwo się wprost otrzymuje, Jakoż, oznaczając przez x, y, spółrzędne punktu ruchomego M odniesione do dwóch osi stałych OX, OY, przez ω prędkość kątową ruchu jednostajnego, czyniąc $AB = R$, $AM = r$, i przypuszczając że łuk $CB = OC$, mamy

$$x = R\omega t - r \operatorname{wst} \omega t,$$

$$y = R - r \operatorname{dos} \omega t.$$

Ztąd, różniczkując dwa razy, wynika

$$\frac{dx}{dt} = \omega R - \omega r \operatorname{dos} \omega t = \omega y$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega r \operatorname{wst} \omega t = \omega \sqrt{r^2 - (R - y)^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 r \operatorname{wst} \omega t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 r \operatorname{dos} \omega t.$$

Dodajmy teraz kwadraty dwóch ostatnich równań, będzie

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2=\omega^4r^2;$$

co dowodzi że przyspieszenie samoiste punktu materyalnego M jest ω^2r.

Jeśli, między równaniami które dają składowe prędkości punktu M, wyrugujemy czas t, znajdziemy równanie różniczkowe krążnej

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{r^2-(R-y)^2}{y^2}}=\sqrt{\frac{2R}{y}-1+\frac{r^2-R^2}{y^2}}.$$

Według jak promień r jest równy promieniowi R, od niego mniejszy albo większy, krążna jest cykloidą zwyczajną, cykloidą *wydłużoną* albo *skórczoną*.

RÓWNOWAGA WZGLĘDNA PUNKTU MATERYALNEGO.

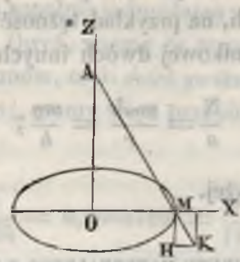
288. Gdy punkt materyalny porusza się tak że zachowuje ciągle to samo położenie względem osi ruchomych, mówi się wtedy że jest w równowadze względnej. W tym przypadku, prędkość względna v'' jest zero, i temsamem siła odśrodkowa składana $2m\omega v''\text{wst}(\omega, v'')$ jest zero. Siła poruszająca względna jest oczywiście zero, zatem równania (18) przywodzą się do

$$(20)\qquad X-X'=0,\quad Y-Y'=0,\quad Z-Z'=0.$$

Te równania pokazują że siła bezwładności, odpowiedająca ruchowi uniesienia punktu materyalnego, jest jedyną siłą którą dołączyć trzeba do siły rzeczywiście przyłożonej do tego punktu, żeby można wyrazić równowagę względną tak jak równowagę samoistą.

Aby dać przykład równowagi względnej, szukajmy *pod jakim warunkiem wahadło stożkowe opisuje stożek obrotowy ruchem jednostajnym.*

Dla rozwiązania zagadnienia, możemy sobie wyobrazić płaszczyznę AMO, obracającą się ruchem jednostajnym około pionowej OZ punktu zawieszenia A, i wyrazić że wahadło zostaje w spoczynku



na tej płasczyznie. Ruch płasczyzny AMO, związanej z osią pionową OZ, będzie ruchem uniesienia wahadła, a punkt materyalny M, stanowiący wahadło i przytwierdzony do tej płasczyzny, opisze ruchem jednostajnym koło poziome OM. Uważajmy teraz że siły rzeczywiście działające na punkt materyalny M są: jego ciężar mg i tężność N nici AM która go utrzymuje; a ponieważ ruch uniesienia jest jednostajny i kołowy, siła bezwładności która mu odpowieda jest siłą odśrodkową $m\omega^2.\mathrm{OM}$, nazywając ω prędkość kątową tego ruchu. Więc, czyniąc dla skrócenia $\mathrm{AM} = a$, $\mathrm{AO} = h$, $\mathrm{OM} = r$, równania równowagi względnej punktu M, odniesione do osi ruchomych OX i OZ, są

$$-\mathrm{N}\frac{r}{a} + m\omega^2 r = 0$$

$$\mathrm{N}\frac{h}{a} - mg = 0;$$

zkąd

$$\frac{\mathrm{N}}{a} = m\omega^2 = \frac{mg}{h}.$$

Zatem prędkość v ruchu wahadła jest

$$v = \omega r = r\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Warunek konieczny i dostateczny żeby wahadło opisywało stożek obrotowy ruchem jednostajnym. Co już wiadome (275).

Łatwo dojść do tego wyniku innym sposobem. Dość tylko uważać że, w punkcie M, siły N, mg, $m\omega^2r$ powinny sobie czynić równowagę; więc jedna z nich, na przykład tężność N, musi być równa i wprost przeciwna wynikowej dwóch innych mg i $m\omega^2r$. Co daje

$$\frac{N}{a} = \frac{m\omega^2 r}{r} = \frac{mg}{h};$$

równania otrzymane wyżej.

RÓWNOWAGA I RUCH PUNKTU MATERYALNEGO NA POWIERZCHNI ZIEMI.

289. Niech będzie N biegun północny ziemi, S biegun południowy. Widz stojący na półsferzu północnem spostrzega słońce poruszające się od wschodu na zachód. Z tego pozornego ruchu słońca, wiedząc że ziemia obraca się około linii biegunów NS,

widz wnosi że ruch wirowy ziemi wykonywa się rzeczywiście od zachodu na wschód. Aby to określić dokładniej, powiemy że dla widza stojącego w środku O ziemi i opartego na pół-osi północnej ON, ruch pozorny słońca odbywa się od lewej ręki do prawej, a ruch wirowy ziemi od prawej ręki do lewej. Astronomowie wyrażają te dwa wprost przeciwne kierunki ruchu mówiąc że ruch słońca jest *wsteczny*, przeciwny ruchowi znaków Zodyaku, a ruch ziemi jest *prosty*, wedle tych znaków.

Weźmy teraz punkt B, dany na powierzchni ziemi, za początek spółrzędnych, i, biorąc za oś rzędnych pionowę BZ skierowaną w stronę przeciwną ciężkości, stosownie do przyjętej ugody kierunków osi spółrzędnych, obierzmy za pół-oś dodatną $x^{ów}$ część północną BX stycznej do południka BN, a za pół-oś dodatną $y^{ów}$

część wschodnią BY stycznej do równoleżnika BB'; poczem, oznaczmy przez ω prędkość kątową ruchu wirowego ziemi który może być uważany za zupełnie jednostajny; przez λ szerokość geograficzną punktu B. Owoż, wiemy że trwanie całkowitego obrotu ziemi około linii biegunów, czyli *dzień gwiazdowy*, zawiera 86164 sekund czasu średniego; mamy więc przybliżoną wartość prędkości kątowej

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}0000729 = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9}{100}\right)^3.$$

290. Równowaga na powierzchni ziemi. Uważajmy punkt materyalny B w równowadze na powierzchni ziemi. Usuwając na chwilę ruch postępowy ziemi około słońca, i wprowadzając do rachunku sam tylko ruch dzienny, widzimy łatwo że siły istotnie działające na punkt materyalny są: przyciąganie ziemi i oddziaływanie ciała na którem ten punkt jest położony, albo gruntu na którym spoczywa. Te dwie siły rzeczywiste powinny, na mocy wiadomego twierdzenia, czynić równowagę dwom siłom pozornym w punkcie B. Owoż, w równowadze względnej siła odśrodkowa składana jest zero, ponieważ prędkość względna $v'' = 0$; zostaje więc tylko siła bezwładności odpowiedająca ruchowi uniesienia punktu B. Ale, z przyczyny że ruch dzienny ziemi jest kołowy i jednostajny, siłą bezwładności w tym ruchu jest siła odśrodkowa $m\omega^2\rho$; ρ znaczy promień równoleżnika opisanego przez punkt B około linii biegunów NS. Jeśli, przypuszczając ziemię sferyczną, nazwiemy R jej promień, będzie $\rho = \mathrm{R}\cos\lambda$, i siła odśrodkowa wyrazi się przez

$$m\omega^2\rho = m\omega^2\mathrm{R}\cos\lambda.$$

Więc, w granicach naszych założeń, oddziaływanie gruntu na punkt materyalny B jest siłą równą i wprost przeciwną wynikowej przyciągania ziemi i siły odśrodkowej. Rzeczona wynikowa stanowi właśnie to co się nazywa *ciężarem* ciała B. Widzimy teraz dobrze że ciężar ciała nie pochodzi jedynie z samego przyciągania ziemi, ale jest skutkiem dwóch sił, albo mówiąc dokładniej, jest równy wynikowej przyciągania ziemi i siły odśrodkowej powstającej z jej ruchu wirowego.

Ciężkość, jej kierunek. Wynikowa przyciągania ziemi i siły odśrodkowej, stanowiąca ciężar ciała, nazywa się *ciężkością*. Kierunkiem ciężkości w miejscu B ziemi jest pionowa tego miejsca. Siła odśrodkowa ma kierunek przedłużenia promienia równoleżnika, który punkt materyalny B opisuje około linii biegunów; ten kierunek czyni ogólnie pewny kąt z kierunkiem przyciągania ziemi, przechodzącym przez środek ciężkości massy ziemskiej. Środek ciężkości nie przypada ściśle w środku ziemi; bo ziemia nie jest sferyczną jednorodną, ani nawet złożoną z warstew jednokładnych jednorodnych; ale różnica jest małoznaczna.

Składowe X', Y', Z' siły odśrodkowej, wedle naszych osi spółrzędnych, są

$$X' = -m\omega^2\rho \operatorname{wst}\lambda$$

$$Y' = 0$$

$$Z' = m\omega^2\rho \operatorname{dos}\lambda.$$

Składowa Z' jest dodatna; to dowodzi że ciężar ciał na powierzchni ziemi jest mniejszy niżby był gdyby ziemia zostawała w spoczynku.

Wartość $Y' = 0$ pokazuje że pionowa każdego miejsca na powierzchni ziemi znajduje się na płaszczyznie południkowej tego miejsca.

Ze składowych siły odśrodkowej wynika że pionowa jakiegokolwiek miejsca na powierzchni ziemi nie ma kierunku siły przyciągania w tem miejscu, którýby istotnie miała gdyby ziemia była nieruchoma; a, z przyczyny ruchu wirowego ziemi, ta pionowa nie przechodzi przez jej środek, choćby nawet ziemia była doskonałą sferą jednorodną. Tylko przy biegunach gdzie $\omega = 0$, $\omega^2\rho = 0$, i wzdłuż równika gdzie $\lambda = 0$, ruch dzienny ziemi nie zmienia kierunku pionowej.

Przy równiku przyspieszenie pochodzące od siły odśrodkowej wyraża się przez $\omega^2 R$; podstawiając wartość promienia równikowego R w metrach, będzie z przybliżeniem

$$\omega^2 R = 0{,}033852\ldots..$$

Jeśli to przyspieszenie porównamy z przyspieszeniem danem przez ciężkość, które się oznacza zwykle literą g, znajdziemy że jest około 289 razy mniejsze od ostatniego. Owoż, na równiku siła odśrodkowa jest większa niż w innych miejscach ziemi, i działa w kierunku wprost przeciwnym siły przyciągania; więc siła odśrodkowa jest małym tylko ułamkiem ciężaru ciała. Ztąd wynika koniecznie że siła odśrodkowa jest bardzo mała w porównaniu z przyciąganiem ziemi, a temsamem że ruch wirowy ziemi ma dość słaby wpływ na natężenie ciężkości i na kierunek pionowej. Dodajmy jeszcze że, ponieważ 289 jest kwadratem z 17, gdyby ziemia obracała się prawie 17 razy prędzej siła odśrodkowa na równiku byłaby równa przyciąganiu ziemi; więc ciała leżące na równiku nie miałyby żadnego ciężaru.

Siła odśrodkowa $\omega^2\rho$ maleje w miarę zbliżania się do bieguna.

Zobaczmy teraz jaki wpływ ruch roczny ziemi około słońca może wywierać na ciężar ciał ziemskich i na kierunek pionowej. Wiadomo że ziemia ma w przestrzeni ruch postępowy swojego środka i ruch wirowy około linii biegunów. Oczywiście ruch wirowy ziemi nie zależy od ruchu jej środka, i jest ten sam czy środek się porusza czy też zostaje nieruchomy. Więc siła odśrodkowa składana punktu materyalnego, leżącego na powierzchni ziemi, ma tę samą wielkość, ten sam kierunek i tę samą stronę działania; jednem słowem, wyraża się zupełnie tak samo czy do jej ruchu wprowadzamy ruch roczny środka ziemi około słońca czy go całkiem zaniedbujemy.

Ale rzeczy mają się inaczej z siłą bezwładności odpowiedającą ruchowi uniesienia punktu materyalnego. Wielkość tej siły, gdy zważamy na ruch roczny środka ziemi około słońca, jest zupełnie różna od tej którąśmy otrzymali, w przypuszczeniu że ziemia ma tylko sam ruch wirowy a jej środek zostaje nieruchomy. Ponieważ tedy ziemia ma ruch postępowy około słońca i ruch wirowy około linii biegunów, rzeczona siła bezwładności jest wynikową siły odśrodkowej powstającej z ruchu wirowego, i siły równej a przeciwnej sile któraby dała punktowi ruchomemu, gdyby był wolny, taki sam ruch jaki środek ziemi posiada. Owoż, wprowadzając do rachunku siły bezwładności, w ruchu uniesienia, ruch roczny ziemi pochodzący z przyciągania słońca, trzeba zarazem obliczyć działanie słońca na punkt materyalny którego się szuka równowagi albo ruchu. Więc, z przyczyny ruchu rocznego ziemi około słońca, należy dołączyć do sił tak rzeczywistych jak pozornych, uważanych w przypuszczeniu środka ziemi nieruchomego, dwie nowe siły, to jest: siłę rzeczywistą z jaką słońce przyciąga dany punkt materyalny na powierzchni ziemi, i siłę pozorną bezwładności w ruchu jaki przyciąganie słońca udziela środkowi ziemi. Te dwie siły, które wchodzą tak dobrze do równowagi względnej punktu materyalnego, na powierzchni ziemi, jak do jego ruchu względnego, są sobie prawie równe i przeciwne, z przyczyny małości promienia ziemskiego względnie do odległości ziemi od słońca; ich wynikowa, niezmiernie mała, zmienia się co do wielkości i kierunku w każdej dnia godzinie, dlatego że punkt materyalny zmienia ciągle położenie względem słońca. Ta więc siła zmienna sprawia okresową zmianę w natężeniu ciężkości i w kierunku pionowej; a jest tak mała że dotąd nie potrafiono wprost doświadczeniem ocenić jej wpływu. Ale kołysanie się wód morskich, które jest naturalnem następstwem działania tej siły, dowodzi niezaprzeczalnie jej istnienia.

Na tem jeszcze nie koniec. Księżyc, choć słabo, swojem przyciąganiem wpływa niezawodnie na ruch postępowy ziemi; trzeba więc także zważać na działanie księżyca w ścisłem ocenieniu natężenia ciężkości i jej kierunku na powierzchni ziemi. Owoż, wprowadzając do rachunku sił przyciąganie księżyca, jakośmy to uczynili z przyciąganiem słońca, widzimy łatwo że, do sił rzeczywistych i pozornych któreśmy już wskazali, trzeba jeszcze dołączyć siłę rzeczywistą przyciągania które księżyc wywiera na punkt materyalny, leżący na powierzchni ziemi albo w pobliżu, i siłę pozorną równą a przeciwną tej któraby nadała środkowi ziemi przyspieszenie zupełnie takie samo, co do wielkości, kierunku i strony, jakie mu udziela przyciąganie księżyca. Wynikowa tych dwóch sił przeciwnych, zkombinowana z podobną wynikową pochodzącą z działania słońca, wpływa bardzo mało na okresową zmianę ciężaru ciał ziemskich i na kierunek pionowej. Ale pierwsza wynikowa jest większa od drugiej, dlatego że księżyć, chociaż mający małą massę, znajduje się daleko bliżej ziemi niż słońce; z tej przyczyny działanie księżyca na wezbranie wód oceanu (przypływ i odpływ morza) jest przeważnie większe od działania słońca.

Wogóle więc wpływ ruchu rocznego ziemi około słońca na ciała ziemskie w równowadze, a nawet i w ruchu jako zaraz zobaczymy, jest bardzo mały, i objawia się tylko przez okresową, prawie niedostrzegalną, zmianę natężenia ciężkości i kierunku pionowej miejsca. Ta tak mało znacząca zmienność ciężkości, w jej natężeniu albo kierunku, może być zaniedbana w obliczaniu wartości sił, tem bardziej że jej oszacowanie opiera się na sferyczności i jednorodności ziemi; dwie rzeczy które tylko z pewnem przybliżeniem są prawdziwe.

291. Ruch względny na powierzchni ziemi. Zajmiemy się teraz ruchem względnym na powierzchni ziemi albo w jej pobliżu, i najpierwej uważać będziemy spadek ciał ziemskich. Niech będzie więc ciało ciężkie mające całą massę zkoncentrowaną w swoim środku ciężkości, albo co to samo, niech będzie punkt materyalny M, (*ostatnia figura*), spadający na ziemię z położenia A które opuszcza bez prędkości początkowej. Aby można uważać ruch względny jako samoisty, trzeba dołączyć do sił rzeczywiście działających na punkt M dwie wiadome siły pozorne. Owoż, przypuszczając że punkt ciężki M spada w próżni, jedyną siłą rzeczywistą która na niego działa jest przyciąganie ziemi. Siłami zmyślonemi czyli pozornemi są: 1° siła bezwładności, odpowiedająca ruchowi kołowemu i jednostajnemu jakimby punkt M był uniesiony, gdyby zostawał niezmienny względem ziemi w położeniu które zajmuje na początku czasu t; ta siła, jakośmy już widzieli, jest siłą odśrodkową $m\omega^2\rho$; 2° siła odśrodkowa składana $2m\omega v''$ wst(ω, v''). Ostatnie wyrażenie, mające prędkość względną v'' za czynnik, pokazuje że siła odśrodkowa składana jest zero na początku ruchu, a potem rośnie w miarę zwiększania się tej prędkości. Więc na początku ruch punktu ciężkiego M zdaje się być skutkiem działania wynikowej przyciągania ziemskiego i siły odśrodkowej pochodzącej z wirowania ziemi. Ta wynikowa, jako wiemy, stanowi właśnie ciężar ciała M, a jej kierunkiem jest pionowa miejsca A z którego to ciało spada. Widzimy tedy jasno że punkt ciężki M zaczyna spadać wedle pio-

nowej punktu wyjścia A, i jego ruch pozorny ma takie samo przyspieszenie g jakieby mu nadała siła równa jego ciężarowi P. Więc, chociaż P nie jest siłą rzeczywiście przyłożoną do punktu materyalnego M massy m, ani g przyspieszeniem jego ruchu samoistego, między ilościami m, P, g jest związek

$$P = mg,$$

zupełnie taki sam jak gdyby ruch względny był rzeczywistym ruchem punktu ciężkiego M. To równanie zostało ustalone w założeniu ziemi nieruchomej; trzeba więc było koniecznie pokazać że jest prawdziwe w rzeczywistości; cośmy właśnie uczynili. Ale to wszystko ma miejsce tylko w pierwszej chwili ruchu. Zaraz potem rzeczy całkiem się zmieniają. Siła odśrodkowa składana nie jest już zero, działa więc na punkt ciężki M i spycha go z pionowej AM wedle której zaczął się poruszać. Aby wiedzieć w którą stronę następuje zboczenie, poprowadźmy przez M prostę N′S′ równoległą do linii biegunów (osi świata). Ponieważ płaszczyzna AMN jest południkiem miejsca M a ziemia obraca się około linii biegunów w stronę zachód-południe-wschód-północ, przyspieszenie $2\omega v''\text{wst}(\omega, v'')$ punktu ciężkiego M, w wirowaniu około osi chwilowej N′S′, będąc prostopadłe do płaszczyzny przechodzącej przez tę oś i przez prędkość względną v'', bierze kierunek ku zachodowi; z tąd wnosimy że siła odśrodkowa składana, jako prostopadła do południka miejsca M i w kierunku wprost przeciwnym temu przyspieszeniu, sprawia właśnie zboczenie punktu ruchomego M na wschód. To zboczenie, znane od dawna, łatwo się sprawdza doświadczeniem które wkrótce na swojem miejscu przytoczymy.

292. Mając ogólny obraz spadku ciał ciężkich, szukajmy teraz równań ich ruchu względnego. Według tego co poprzedza, siła poruszająca pozorna w ruchu względnym punktu ciężkiego M, który spada w próżni z położenia A bez prędkości początkowej, jest wynikową przyciągania ziemi, siły bezwładności w ruchu uniesienia, i siły odśrodkowej składanej. Dwie pierwsze siły, jakośmy już powiedzieli, stanowią ciężar punktu materyalnego M, wyrażony przez mg w położeniu A. Aby mieć składowe siły odśrodkowej

składanej, uważajmy że, według przyjętych notacyj, odniesionych do układu spółrzędnych który ostatnia figura przedstawia, nazywając λ szerokość geograficzną punktu materyalnego M leżącego na pionowej AO, mamy

$$p = \omega \operatorname{dos}(OS, BX) = -\omega \operatorname{dos}\lambda,$$

$$q = \omega \operatorname{dos}(OS, BY) = 0,$$

$$r = \omega \operatorname{dos}(OS, BZ) = -\omega \operatorname{wst}\lambda.$$

Więc, stosując formuły (18) numeru 284, otrzymujemy równania różniczkowe ruchu względnego punktu materyalnego M

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \operatorname{wst}\lambda . \frac{dy}{dt},$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\left(\operatorname{wst}\lambda . \frac{dx}{dt} - \operatorname{dos}\lambda . \frac{dz}{dt}\right)$$

$$(3) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 2\omega \operatorname{dos}\lambda . \frac{dy}{dt} - g.$$

Te trzy równania jednoczesne mogą się wprost całkować; ale prościej będzie zcałkować najpierwej pierwsze i ostatnie, które zaraz dają

$$(4) \qquad \frac{dx}{dt} = -2\omega y \operatorname{wst}\lambda.$$

$$(5) \qquad \frac{dz}{dt} = 2\omega y \operatorname{dos}\lambda - gt.$$

Nie przydaliśmy żadnej statecznej dowolnej; bo, podług warunków zadania, powinno być zarazem

$$t = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Wartości $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, poniesione do równania (2), przemieniają je na następujące

$$(6)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 4\omega^2 y = 2\omega g t \operatorname{dos}\lambda.$$

To równanie linijne drugiego rzędu, o spółczynnikach stałych, całkuje się łatwo; dość tylko uczynić

$$y = u + \frac{gt \operatorname{dos}\lambda}{2\omega},$$

co daje

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\omega^2 u = 0\,;$$

zkąd, całkując,

$$u = \mathrm{A} \operatorname{dos}(2\omega t) + \mathrm{B} \operatorname{wst}(2\omega t).$$

Więc całka zupełna równania (6) ma kształt

$$y = \mathrm{A} \operatorname{dos}(2\omega t) + \mathrm{B} \operatorname{wst}(2\omega t) + \frac{gt \operatorname{dos}\lambda}{2\omega}.$$

Dla wyznaczenia statecznych dowolnych A i B, zróżniczkujmy tę całkę nieokreśloną, będzie

$$\frac{dy}{dt} = -2\omega \mathrm{A} \operatorname{wst}(2\omega t) + 2\omega \mathrm{B} \operatorname{dos}(2\omega t) + \frac{g \operatorname{dos}\lambda}{2\omega}.$$

Owoż, powinno być zarazem

$$t = 0, \qquad y = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = 0\,;$$

a te wartości podstawione w dwa ostatnie równania dają

$$0 = A, \quad 0 = 2\omega B + \frac{g \operatorname{dos}\lambda}{2\omega},$$

zkąd

$$B = -\frac{g \operatorname{dos}\lambda}{4\omega^2}.$$

Więc całka równania (6), wzięta w granicach zadania, wyraża się przez

$$(7) \qquad y = \frac{g \operatorname{dos}\lambda}{4\omega^2} \left\{ 2\omega t - \operatorname{wst}(2\omega t) \right\}.$$

Ponieważ odcięta y jest dodatna, to dowodzi że punkt ciężki M spadając bierze zboczenie na wschód.

Jeśli podstawimy znalezioną wartość dla y w równanie (4), i potem zcałkujemy, będzie

$$(8) \qquad x = -\frac{g \operatorname{wst} 2\lambda}{4\omega^2} \left\{ \omega^2 t^2 - \operatorname{wst}^2(\omega t) \right\}.$$

Ta wartość odjemna odciętej x pokazuje że jest zboczenie na południe w spadku punktu ciężkiego M. Zboczenie na południe jest daleko mniejsze od zboczenia na wschód.

Nakoniec, podstawmy wartość y w równanie (5), i potem zcałkujmy. Uważając że $t = 0$ daje $z = AB = h$, otrzymujemy

$$(9) \qquad z = \frac{g \operatorname{dos}^2\lambda}{2\omega^2} \left\{ \omega^2 t^2 - \operatorname{wst}^2(\omega t) \right\} - \frac{1}{2} g t^2 + h.$$

Równanie dowodzi że

$$z > h - \frac{1}{2} g t^2; \quad \text{zatem} \quad t > \sqrt{\frac{2(h - z)}{g}}.$$

Więc czas przez który ciało ciężkie spada w próżni jest dłuższy niż gdyby ziemia nie miała ruchu wirowego.

Zboczenie na wschód zostało sprawdzone w ostatnich czasach przez P. Reich, w jednej studni kopalni w *Freybergu*. Wysokość spadku była $158^m,5$, szerokość geograficzna $\lambda = 51°$. Podstawiając te liczby jako też wartości dla g i ω w formule (7), i biorąc

$$\text{wst}(2\omega t) = 2\omega t - \frac{4}{3}\omega^3 t^3,\quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$ otrzymuje się $y = 0^m,0276$.

Doświadczenie, kilka razy powtarzane, dało zboczenie średnie $0^m,0283$ które nie różni się wiele od znalezionego przez teoryę.

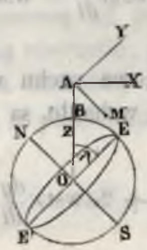
Zboczenie na południe nie było jeszcze sprawdzane.

293. Ruch roczny ziemi około słońca, jakośmy już okazali, wywiera zaledwie czuć się dający wpływ na zmianę natężenia ciężkości i jej kierunku w różnych miejscach ziemi. Można więc uważać że ciężar ciał, położonych w różnych wysokościach, bardzo mało się różni od przyciągania ziemi co do wielkości i do kierunku, to jest ma kierunek prawie przechodzący przez środek ziemi, i zmienia się prawie w stosunku odwrotnym kwadratu odległości od tego środka. Ale należy dodać że, gdyby nawet ciężar ciała miał dokładny kierunek ku środkowi ziemi, i zmieniał się doskonale w stosunku odwrotnym kwadratu odległości od tego punktu, ruch ciał ciężkich, spadających w próżni, nie byłby nigdy taki jakiśmy znaleźli w numerach 202 i 203. Bo siła odśrodkowa składana $2m\omega v''\,\text{wst}(\omega, v'')$, przyłącza się do ciężaru ciała, i modyfikuje jego ruch, a wielkość tej siły rośnie z prędkością ciała spadającego.

Gdy wysokość spadku ciał ciężkich jest mała, można zaniedbać nietylko wpływ siły odśrodkowej składanej, ale jeszcze zmianę wielkości i kierunku ciężaru ciała, w jego przejściu z jednego położenia do drugiego na powierzchni ziemi. W tym przypadku ruch pozorny ciała ciężkiego odbywa się niby jako ruch samoisty, pod działaniem siły stałej z wielkości i kierunku; zawsze z domyślnem przybliżeniem dostatecznem. Pojmuje się teraz dobrze dlaczego, dając pierwszy przykład ruchu ciał ciężkich w próżni, mogliśmy powiedzieć że ten ruch nie wiele się różni od prawdziwego.

WAHADŁO STOŻKOWE POD WPŁYWEM RUCHU WIROWEGO ZIEMI.

294. Zastosujemy jeszcze teoryę sił pozornych do ruchu wahadła stożkowego na powierzchni ziemi, w przypuszczeniu że ziemia ma tylko sam ruch wirowy. Obierając punkt zawieszenia A wahadła za początek spółrzędnych, weźmy za oś rzędnych z pionowę AO,



idącą w stronę ciężkości; za oś $x^{ów}$ styczną AX do południka miejsca A, skierowaną od północy na południe; za oś $y^{ów}$ styczną AY do równoleżnika miejsca A, skierowaną od zachodu na wschód. Tym sposobem dobrane osie spółrzędnych mają ruch wsteczny (od lewej ręki do prawej), i formuły względne do wirowań stosują się w całej ogólności.

Punkt materyalny M wahadła może być uważany jako poruszający się na sferze, mającej za środek punkt A, i za promień długość a wahadła. Siły które trzeba wprowadzić do rachunku, aby ruch pozorny mógł być uważany jako samoisty, są: 1° dwie siły rzeczywiste, to jest: przyciąganie ziemi i tężność nici wahadła; 2° dwie siły pozorne, to jest: siła odśrodkowa pochodząca z ruchu wirowego jednostajnego ziemi, i siła odśrodkowa składana. Owoż, przyciąganie jakie ziemia na punkt materyalny M wywiera, i siła odśrodkowa powstająca z jej ruchu wirowego, stanowią ciężar mg punktu M; a jeśli nazwiemy N tężność nici wahadła, składowe tej siły równoległe do osi spółrzędnych wyrażą się przez

$$-N\frac{x}{a}, \quad -N\frac{y}{a}, \quad -N\frac{z}{a}.$$

Nakoniec, składowe prędkości kątowej ω ruchu wirowym ziemi wyrażają się przez

$$p = \omega \operatorname{dos}\lambda, \qquad q = 0, \qquad r = \omega \operatorname{wst}\lambda,$$

i dają składowe siły odśrodkowej składanej

$$2m\omega \operatorname{wst}\lambda.\frac{dy}{dt}, \qquad 2m\omega\left(\operatorname{dos}\lambda.\frac{dz}{dt} - \operatorname{wst}\lambda.\frac{dx}{dt}\right), \qquad -2m\omega \operatorname{dos}\lambda.\frac{dy}{dt}.$$

Więc równania różniczkowe ruchu względnego punktu materyalnego M który stanowi wahadło, są

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mathrm{N}x}{ma} + 2\omega \operatorname{wst}\lambda.\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mathrm{N}y}{ma} + 2\omega\left(\operatorname{dos}\lambda.\frac{dz}{dt} - \operatorname{wst}\lambda.\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{\mathrm{N}z}{ma} - 2\omega \operatorname{dos}\lambda.\frac{dy}{dt}.$$

Te trzy równania jednoczesne zcałkowane, do których trzeba dołączyć równanie sfery

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

wyznaczą ruch pozorny wahadła stożkowego.

Aby można całkować, wyrugujmy N między dwoma pierwszemi równaniami, będzie

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \operatorname{wst}\lambda\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) + 2\omega \operatorname{dos}\lambda.x\frac{dz}{dt}.$$

Ostatni wyraz tego równania, zawierający czynnik $\operatorname{dos}\lambda$, jest zero przy biegunach ziemi; w innych punktach powierzchni ziemi można ten wyraz zaniedbać, jeśli oscyllacye wahadła mają małą obszerność, albowiem wtedy czynnik $\frac{dz}{dt}$ jest bardzo mały. Po zniesieniu rzeczonego wyrazu, równanie staje się całkowalne, i daje zaraz całkę

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=-\omega \operatorname{wst}\lambda(x^2+y^2)+C$$

w której C jest stateczną dowolną.

Jeśli wahadło stożkowe tak było w ruch puszczone że po każdej oscyllacyi przystaje do pionowej AZ punktu zawieszenia, wtedy $x=0$, $y=0$ zadość czynią równaniu; powinno zatem być $C=0$. Przyjmując tę wartość dla statecznej C, zamieńmy spółrzędne prostokątne na biegunowe, za pomocą związków

$$x=r\operatorname{dos}\theta,\qquad y=r\operatorname{wst}\theta,\qquad \theta=\operatorname{luk\,sty}\frac{y}{x},$$

w których r znaczy promień wodzący rzutu punktu M na płaszczyznie poziomej XAY, a zaś θ kąt promienia r z osią AX. Te wartości, podstawione w ostatnie równanie całkowane, przywodzą je do kształtu nie można prostszego

$$\frac{d\theta}{dt}=-\omega \operatorname{wst}\lambda;$$

zkąd, całkując drugi raz, otrzymujemy

$$\theta=\theta_0-\omega t \operatorname{wst}\lambda.$$

Ten ważny wynik pokazuje że płasczyzna oscyllacyi wahadła obraca się jednostajnie około pionowej punktu zawieszenia, z prędkością kątową $\omega \operatorname{wst}\lambda$, w stronę północ-wschód-południe-zachód jeśli miejsce obserwacyi znajduje się na półsferzu północnem, a w stronę przeciwną jeśli to miejsce jest na półsferzu południowem, z przyczyny czynnika $\operatorname{wst}\lambda$ który wtedy staje się odjemnym. Ale ten ruch jest pozorny, bo płasczyzna wahadła zostaje niezmienna, i tylko ziemia obraca się około linii biegunów w stronę przeciwną. Co się zaś tyczy prędkości kątowej, ona nie wyraża się dokładnie przez $-\omega \operatorname{wst}\lambda$, ani nie jest ściśle stała; bośmy znieśli wyraz

$2\omega \cos\lambda . \frac{dz}{dt}$ który tylko przy biegunach jest zero. Więc, przy biegunach ziemi ruch płasczyzny wahadła stożkowego jest zupełnie jednostajny, jakakolwiek jest obszerność oscyllacyj; wszędzie indziej ten ruch jest tylko z przybliżeniem jednostajny, jeśli oscyllacye mają dostatecznie małą obszerność.

Doświadczenia P. Foucault, wykonane w Panteonie w Paryżu, z wahadłem długości 64^m, w którem trwanie jednej oscyllacyi było około 8″, sprawdziły to znane zjawisko wahadła stożkowego, i niezaprzeczalnie potwierdziły ruch wirowy ziemi.

Kończąc, powiemy jeszcze że równania różniczkowe ruchu wahadła stożkowego dają prędkość $v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0)$, która się zgadza z prędkością otrzymaną jak gdyby ruch wahadła był samoisty. Co sprawdza zasadę sił żywych w ruchu względnym.

ROZDZIAŁ VI.

SIŁY ŚRODKOWE. RUCH PLANET.

295. Niech będzie punkt materyalny M poruszający się pod działaniem siły P której kierunek przechodzi ciągle przez środek stały O. Poprowadźmy przez ten środek trzy osie prostokątne, i nazwijmy x, y, z spółrzędne punktu M na końcu czasu t. Jakakolwiek jest ustawa wedle której siła P działa na punkt M mający massę m, jej składowe równoległe do osi spółrzędnych, jeśli uczynimy $\mathrm{OM}=r$, wyrażą się przez

$$\mathrm{P}\frac{x}{r}, \quad \mathrm{P}\frac{y}{r}, \quad \mathrm{P}\frac{z}{r}.$$

i będzie

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\mathrm{P}x}{r}, \quad m\,\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\mathrm{P}y}{r}, \quad m\,\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\mathrm{P}z}{r};$$

co daje

$$\frac{\frac{dx^2}{dt}}{x}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y}=\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z}.$$

Ztąd wywodzimy równania różniczkowe ruchu rzutów punktu M na płasczyznach xy, xz, yz,

$$x\,\frac{d^2y}{dt^2}-y\,\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

$$z\,\frac{d^2x}{dt^2}-x\,\frac{d^2z}{dt^2}=0,$$

$$y\,\frac{d^2z}{dt^2}-z\,\frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

Te trzy równania nie są oddzielne i każde z nich jest oczywiście następstwem dwóch innych. Zcałkowane, dają te same całki pierwsze których zasada powierzchni dostarcza, i prowadzą do twierdzeń któreśmy dostatecznie wyszczególnili mówiąc o tej zasadzie (239). Nie potrzebujemy więc ich powtarzać.

296. Wyznaczając punkt ruchomy M za pomocą spółrzędnych biegunowych na płaszczyznie jego krążnej, można wyrazić prędkość v tego punktu w funkcyi samych tylko spółrzędnych, niezależnie od czasu t i dt. Jakoż, mamy

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2},$$

nadto zasada powierzchni daje

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c;$$

między temi dwoma równaniami wyrugujmy dt, otrzymamy,

$$v^2 = \frac{c^2}{r^4}\left(\frac{dr^2}{d\theta^2} + r^2\right) = c^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\,\frac{dr^2}{d\theta^2}\right).$$

A jeśli jeszcze będziemy uważali że $d.\frac{1}{r} = -\frac{dr}{r^2}$, znajdziemy ostatecznie ważną i bardzo prostą formułę tego rodzaju ruchu

$$(1) \qquad v^2 = c^2\left\{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right\}.$$

Więc, gdy jest wiadoma krążna punktu ruchomego pod działaniem siły środkowej, można mieć jego prędkość w każdem położeniu w funkcyi samych spółrzędnych, niezależnie od czasu.

Łatwo także otrzymać obie składowe tej prędkości, mające kierunek promienia wodzącego i kierunek prostopadły do tego promienia, niezależnie od czasu t i jego różniczki dt. Jakoż, wiemy już (241) że

$$v \operatorname{dos} i = \frac{dr}{dt},$$

$$v \operatorname{wst} i = \frac{r d\theta}{dt};$$

ale mamy do tego

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c;$$

więc, rugując dt, znajdujemy

$$v \operatorname{dos} i = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\theta},$$

$$v \operatorname{wst} i = \frac{c}{r}.$$

Z ostatniego równania wynika

$$v.r \operatorname{wst} i = c,$$

albo

$$vp = c,$$

nazywając p prostopadłę spuszczoną z początku O spółrzędnych na styczną do krążnej w punkcie M. Formuła pokazuje że prędkość punktu materyalnego, w każdem jego położeniu, jest odwrotnie proporcyonalna do tej prostopadłej p.

297. Mając prędkość punktu materyalnego M pod działaniem siły środkowej P, wyrażoną w funkcyi samych tylko spółrzędnych, można także wyrazić jego przyspieszenie w funkcyi samych spółrzędnych, niezależnie od czasu t i dt. Jakoż, weźmy płaszczyznę krążnej punktu M za płaszczyznę xy, i nazwijmy φ przyspieszenie jakie mu siła poruszająca P nadaje. Trzeba uważać ilość φ jako

dodatną albo odjemną według jak siła P jest przyciągająca albo odpychająca, to jest według jak jej działanie ma kierunek MO albo OM.

Przypuszczając siłę P przyciągającą i stosując równanie sił żywych, mamy

$$d.\frac{1}{2}v^2 = -\left(\frac{\varphi x}{r}dx + \frac{\varphi y}{r}dy\right) = -\frac{\varphi}{r}(xdx + ydy)$$

ale równanie

$$x^2 + y^2 = r^2$$

daje

$$xdx + ydy = rdr;$$

ztąd wynika ważny związek między φ i v^2,

$$(3) \qquad -\varphi dr = d.v^2 = d.c^2\left\{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right\}.$$

Owoż, zróżniczkujmy równanie (1), uważając θ za zmienną niezależną, będzie

$$d.v^2 = -2c^2\left(\frac{dr}{r^3} + \frac{drd^2\frac{1}{r}}{r^2d\theta^2}\right);$$

jeśli podstawimy tę wartość w równanie (3), znajdziemy drugą ważną formułę

$$(4) \qquad \varphi = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

Więc, gdy jest wiadoma krążna którą punkt materyalny opisuje pod działaniem siły środkowej, można wyznaczyć przyspieszenie jakie mu ta siła nadaje w każdem jego położeniu. Nawzajem jeśli, w ruchu który uważamy, jest znana ustawa wyrażająca przyspieszenie punktu materyalnego, formuły (3) i (4) mogą służyć do wyznaczenia krążnej tego punktu.

298. Ruch względny dwóch punktów materyalnych które się nawzajem przyciągają albo odpychają. Niech będą dwa punkta materyalne A i B w ruchu, poddane samym tylko działaniom równym i przeciwnym które na siebie nawzajem wywierają. Wyobraźmy sobie że punkt B jest odniesiony do układu osi spółrzędnych które się poruszają równolegle do siebie samych, przechodząc ciągle przez punkt A, i szukajmy ruchu punktu B względem punktu A. Oznaczmy przez m i m' massy punktów A i B, przez r ich odległość, a przez P natężenie siły wzajemnego działania; nakoniec przez x, y, z spółrzędne punktu B względem osi ruchomych. Wiemy że w ruchu względnym przyspieszenie względne jest wynikową przyspieszenia rzeczywistego i dwóch przyspieszeń pozornych, pochodzących od siły bezwładności i od siły odśrodkowej składanej. Owoż, 1° siłą rzeczywiście działającą na punkt B jest siła P wypływająca z punktu A; przypuszczając że punkt A przyciąga punkt B, składowe rzeczywistego przyspieszenia punktu B wyrażają się przez

$$-\frac{\mathrm{P}}{m}\frac{x}{r}, \quad -\frac{\mathrm{P}}{m}\frac{y}{r}, \quad -\frac{\mathrm{P}}{m}\frac{z}{r}.$$

2° Punkt B oddziaływa na punkt A; a że to oddziaływanie jest równe i wprost przeciwne działaniu, składowe jego przyspieszenia są :

$$\frac{\mathrm{P}}{m'}\frac{x}{r}, \quad \frac{\mathrm{P}}{m'}\frac{y}{r}, \quad \frac{\mathrm{P}}{m'}\frac{z}{r};$$

zatem składowe przyspieszenia, odpowiedającego sile bezwładności w ruchu uniesienia punktu B, wyrażają się przez

$$-\frac{\mathrm{P}}{m'}\frac{x}{r}, \quad -\frac{\mathrm{P}}{m'}\frac{y}{r}, \quad -\frac{\mathrm{P}}{m'}\frac{z}{r}.$$

3° Ponieważ osie ruchome, w naszem zagadnieniu, mają tylko sam ruch przeniesienia, ich prędkość wirowania jest zero, to jest : $p=0$, $q=0$, $r=0$, i siła odśrodkowa składana nie istnieje; niema więc przyspieszenia odśrodkowego składanego.

To ustaliwszy, widzimy zaraz że równania różniczkowe ruchu względnego punktu B są:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{Px}{r},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{Py}{r},\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{Pz}{r}. \end{aligned}\right.$$

Na samo spojrzenie na te równania, łatwo pojmujemy że ruch względny punktu B jest takiej samej natury jak ruch samoisty któryby ten punkt posiadał gdyby był poddany tej samej sile poruszającej P, wypływającej z pewnego środka stałego. I w samej rzeczy, jeśli przez ten środek poprowadzimy trzy osie prostokątne, i oznaczymy przez x, y, z spółrzędne punktu B, przez r jego odległość od początku spółrzędnych, będziemy mieli, do wyznaczenia ruchu samoistego punktu B, następujące równania różniczkowe

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{P}{m'}\frac{x}{r},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{P}{m'}\frac{y}{r},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{P}{m'}\frac{z}{r}.$$

Równania różniczkowe (5) ruchu względnego punktu B tem się tylko różnią od podobnych równań jego ruchu samoistego, że w nich czynnik stały $\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}$ zastępuje czynnik $\frac{1}{m'}$. Więc całki tych dwóch układów równań różniczkowych otrzymują się jedną metodą i mają tę samą postać. Tym sposobem ruch względny dwóch punktów materyalnych, które się nawzajem przyciągają albo odpychają, przywodzi się do ruchu samoistego, w którym punkt materyalny jest przyciągany albo odpychany przez środek stały, z siłą różniącą się od wzajemnego działania samym tylko spółczynnikiem stałym.

RUCH PLANET OKOŁO SŁOŃCA.

299. Baczna obserwacya i głębokie rozważanie ruchów ciał niebieskich, przez wiele wieków ciągle prowadzone, dały poznać ogólne tych ruchów ustawy, które posłużyły za podstawę zastosowań teoryj matematycznych do rozwoju umiejętności. Ale, żeby formuły Mechaniki rozumowej mogły się stosować do ruchu ciał niebieskich, trzeba przypuścić że materya, stanowiąca te ciała podlega tym samym ustawom co ciała ziemskie. Owoż, jeśli a priori można wątpić czy ciała niebieskie posiadają własności ciał ziemskich, doskonała zgoda następstw tego przypuszczenia z naturalnemi zjawiskami jest dowodem a posteriori jego prawdziwości. Mamy więc, jeśli nie matematyczną pewność to przynajmniej dostateczną prawdopodobność, że ustawy materyalnego świata są powszechne.

Ustawy Keplera. Po wielu latach niezmordowanej a pracowitej obserwacyi, Kepler znalazł że ruch planet około słońca odbywa się podług trzech następujących ustaw :

1° Planety, w ruchu około słońca, przebiegają linie krzywe płaskie, a ich promienie wodzące, wyprowadzone ze środka słońca, opisują powierzchnie proporcyonalne do czasów.

2° Te linie krzywe, czyli orbity planet, są ellipsami których jedno z ognisk jest w środku słońca.

3° Kwadraty czasów całkowitych obrotów planet około słońca są proporcyonalne do sześcianów wielkich osi orbit.

Towarzysze planet (*satellites*) są względem swoich planet tem czem są planety względem słońca, i dlatego podlegają ustawom Keplera.

Komety podlegają także ustawom Keplera, a tem się tylko różnią od planet że ich orbity są bardzo wydłużone, tak że niektóre zdają się być parabolami.

Chociaż ustawy Keplera są tylko przybliżone, ponieważ planety i słońce są tu uważane jako punkta materyalne mające odpowiednie massy tych ciał, nietrudno jednak, za pomocą nich, znaleźć ustawę wedle której działa siła poruszająca planetę; i nawzajem, znając wyrażenie tej siły, łatwo otrzymać krążnę planety. Owoż, na mocy tego cośmy w poprzedzającym numerze wyłożyli, chcąc wyznaczyć ruch względny planety około słońca, można uważać środek ciężkości słońca jako punkt nieruchomy w przestrzeni, mający jego massę, i szukać ruchu samoistego planety około tego punktu stałego, stosując wszystko cośmy o siłach środkowych powiedzieli. Tym sposobem podwójne zagadnienie, którego rozwiązaniem teraz się zajmiemy, znacznie się uproszcza.

Wynika z pierwszej ustawy Keplera, stosownie do teoryi ruchu względnego, że siła względna poruszająca planetę jest ciągle skierowana ku środkowi słońca, jakakolwiek zresztą jest natura tej siły i ustawa jej działania. A ponieważ, wedle drugiej ustawy, krążna elliptyczna zwraca swoją wklęsłość ku słońcu, ztąd wnieść należy że siła poruszająca planetę jest przyciągająca, albo mówiąc ściślej, działa jak gdyby przyciągała. Za pomocą drugiej ustawy Keplera będziemy mogli wyznaczyć natężenie siły poruszającej względnej, w każdem położeniu planety na jej krążnej elliptycznej.

Niech będzie M planeta opisująca ellipsę ABA'A (*fig. na str.* 462), F położenie słońca którego środek ciężkości jest ogniskiem tej ellipsy, i $AA' = 2a$ oś wielka; jeśli weźmiemy prostę FI za oś biegunową, i oznaczymy przez r, θ spółrzędne biegunowe planety M, przez α kąt AFI, równanie biegunowe ellipsy będzie

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\alpha)}.$$

Ztąd wywodzimy

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(\theta-\alpha)}{a(1-e^2)} \quad \text{i} \quad \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{e\cos(\theta-\alpha)}{a(1-e^2)}.$$

Podstawiając te dwie wartości w formule (4), otrzymujemy przyspieszenie φ z jakiem planeta przebiega ellipsę,

$$\varphi = \frac{c^2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Ta wartość dodatna jasno pokazuje że ruch względny jakiejkolwiek planety około słońca jest skutkiem działania siły skierowanej ku jego środkowi, i której wielkość zmienia się w stosunku odwrotnym kwadratu odległości od tego środka.

300. Jeśli

$$r = 1, \quad \text{będzie} \quad \varphi = \frac{c^2}{a(1-e^2)}$$

Przyspieszenie φ na jedność odległości od słońca jest jedno i to samo dla wszystkich planet. Jakoż, stateczna c wyraża powierzchnię dwa razy większą od tej którą promień wodzący planety opisuje na płaszczyźnie jej krążnej, w jedności czasu; jeśli więc nazwiemy T czas całkowitego obrotu planety około słońca, będzie

$$\frac{1}{2} c\mathrm{T} = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}.$$

Zatem

$$\varphi = 4\pi^2 . \frac{a^3}{\mathrm{T}^2}.$$

Ale, podług trzeciej ustawy Keplera, stosunek $\frac{a^3}{\mathrm{T}^2}$ jest ten sam dla wszystkich planet; więc siła działająca na jedność massy każdej planety jest ta sama w tej samej odległości od słońca.

To wszystko razem dowodzi że ruch względny planet jest skutkiem siły skierowanej ku środkowi słońca, proporcyonalnej do ich mass i w stosunku odwrotnym kwadratu odległości od tego środka. Ta siła zdaje się naturalnie pochodzić z działania materyi słońca na materyę planety, albo, jako się mówi, jest przyciąganiem planety przez słońce; a przynajmniej rzeczy się dzieją jak gdyby istotnie było przyciąganie. Jeśli do ciał niebieskich rozciągniemy jeszcze zasadę równości działania i oddziaływania, musimy przypuścić że nawzajem słońce jest przyciągane przez wszystkie planety, a następnie że planety i ich towarzysze przyciągają się zobopólnie między sobą i ze słońcem; nakoniec że wszystkie cząsteczki składające te ciała przyciągają jedne drugie. Zogólniając to pojęcie, przychodzimy do powszechnej ustawy materyi: *dwie cząsteczki materyalne przyciągają się proporcyonalnie do swych mass, i w stosunku odwrotnym kwadratu odległości.*

301. W założeniu przyciągania powszechnego, gdyby ciała niebies-

kie były dokładnie sferyczne, i złożone z warstew spółśrodkowych jednorodnych, działałyby jedne na drugie jak gdyby cała ich massa była zjednoczona w ich środku. Tak się rzeczy nie mają w Naturze; ciała niebieskie, jako ciała ziemskie, nie są zapewne ani sferyczne ani jednorodne; ale, z przyczyny wielkiej odległości ciał niebieskich jednych od drugich w porównaniu z ich rozmiarami, można je uważać, z dostatecznem przybliżeniem, jako punkta materyalne, mające massy różne, które się przyciągają proporcyonalnie do tych mass i w stosunku odwrotnym kwadratów odległości.

Przypuszczając massę M słońca i massę m planety jako skoncentrowane w ich środkach ciężkości, jeśli nazwiemy f przyciąganie wzajemne dwóch jedności massy tych punktów, umieszczonych na jedność odległości, działanie zobopólne słońca i planety, położonych na odległość r, wyrazi się przez

$$\frac{f\mathrm{M}m}{r^2}.$$

Zatem przyspieszenie dla planety będzie $\frac{f\mathrm{M}}{r^2}$ a dla słońca $\frac{fm}{r^2}$, i dla każdego z tych dwóch punktów będzie skierowane ku drugiemu. Owoż, na mocy teoryi ruchu względnego dwóch punktów przyciągających się nawzajem (298), żeby wyznaczyć ruch względny planety około słońca, można wziąć słońce za punkt nieruchomy w przestrzeni, byle tylko przypuszczono że planeta porusza się pod działaniem siły która jej nadaje przyspieszenie równe summie

$$\frac{f\mathrm{M}}{r^2}+\frac{fm}{r^2} \quad \text{albo} \quad \frac{f(\mathrm{M}+m)}{r^2},$$

i skierowane ku słońcu.

Powyższe wyrażenie przyspieszenia planety nastręcza ważną uwagę. W ruchu względnym planety około słońca, znaleźliśmy dla przyspieszenia względnego φ wartość $4\pi^2\frac{a^3}{\mathrm{T}^2}$ na jedność odległości; więc, porównywając dwa wyrażenia tego przyspieszenia, otrzymujemy

$$4\pi^2\frac{a^3}{\mathrm{T}^2}=f(\mathrm{M}+m).$$

Otóż, równanie pokazuje że stosunek $\frac{a^3}{T^2}$, zależący od massy m planety, musi się zmieniać od jednej do drugiej; bo inaczej trzebaby żeby wszystkie planety miały massy równe, co nie zdaje się prawdopodobnem. Więc trzecia ustawa Keplera jest tylko przybliżona. Ale, ponieważ Kepler mógł wnieść z obserwacyi że stosunek $\frac{a^3}{T^2}$ jest ten sam dla wszystkich planet, należy mniemać że wyraz fm jest małą cząstką summy $fM + fm$, a temsamem massa jakiejkolwiek planety musi być bardzo mała w stosunku do massy słońca.

302. Rozwiążemy teraz zagadnienie odwrotne poprzedzającego: *Znaleźć ruch względny planety około słońca, które ją przyciąga proporcyonalnie do jej massy i w stosunku odwrotnym kwadratu odległości.*

Stawiając się w założeniu środka działania nieruchomego w przestrzeni, nazwijmy $\frac{\mu}{r^2}$ przyspieszenie jakie on nadaje planecie; tym sposobem mamy zaraz równania różniczkowe ruchu planety

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}.$$

Zasada sił żywych i zasada powierzchni dają dwie całki pierwsze

$$(1) \qquad v^2 = \frac{2\mu}{r} + b = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2},$$

$$(2) \qquad r^2 \frac{d\theta}{dt} = c,$$

b i c są dwie stateczne dowolne.

Wyznacza się te stateczne przypuszczając że jest wiadome położenie początkowe r_0, θ_0 planety, i jej prędkość początkowa v_0 która czyni kąt i z przedłużeniem promienia wodzącego r_0; co daje

$$b = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}, \qquad c = v_0 r_0 \operatorname{wst} i.$$

Ale, dla skrócenia, zachowamy jeszcze litery b i c.

Jeśli wyrugujemy dt między równaniami (1) i (2), znajdziemy

$$\frac{c^2 dr^2}{r^4 d\theta^2} + \frac{c^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} + b,$$

albo

$$(3) \qquad \frac{c^2\left(d\frac{1}{r}\right)^2}{d\theta^2} + \frac{c^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} + b.$$

To równanie szukanej krążnej można było otrzymać odrazu z formuły (3) numeru 297, kładąc w niej $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$.

Aby ułatwić całkowanie, uczyńmy $\frac{1}{r} = z$, będzie

$$d\theta = \pm \frac{cdz}{\sqrt{b + 2\mu z - c^2 z^2}}.$$

Uważając $d\theta$ za dodatne, widzimy że trzeba brać znak $-$ albo $+$ według jak r rośnie albo maleje. Jeśli więc przypuścimy że planeta oddala się od słońca, począwszy od położenia początkowego w którem $r = r_0$, będzie $dz < 0$; wtedy trzeba wziąć

$$d\theta = \frac{-cdz}{\sqrt{b + 2\mu z - c^2 z^2}} = \frac{-c^2 dz}{\sqrt{\mu^2 + bc^2 - (c^2 z - \mu)^2}}.$$

Druga strona pokazuje że dwumian $\mu^2 + bc^2$ jest dodatny, bo inaczej $d\theta$ byłoby zawsze urojone.

Zcałkujmy równanie, nazywając α stateczne dowolną, znajdziemy

$$\theta = \text{łuk dos} \frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + bc^2}} + \alpha.$$

zkąd

$$(4) \qquad z = \frac{1}{c^2}\left\{\mu + \sqrt{\mu^2 + bc^2} \operatorname{dos}(\theta - \alpha)\right\}.$$

Chociaż ta formuła została otrzymana w założeniu że θ i r rosną zarazem, można łatwo okazać że ona jest ogólna, i stosuje się wtedy nawet gdy r maleje a θ rośnie. I w samej rzeczy, w ostatnim przypadku jest $\frac{dz}{d\theta} > 0$; owoż, formuła (4) daje pochodnę

$$\frac{dz}{d\theta} = -\frac{1}{c^2}\sqrt{\mu^2 + bc^2}\,\mathrm{wst}(\theta - \alpha),$$

która pokazuje że $\frac{dz}{d\theta}$ zmienia znak, przechodząc przez zero za każdym razem gdy łuk $\theta - \alpha$ staje się wielownikiem z π; ta zmiana znaku odpowieda właśnie położeniom planety w których z przechodzi przez minimum albo maximum, to jest w których r przestaje rosnąć aby maleć albo przestaje maleć aby rosnąć. Więc formuła (4) jest ogólna.

Podstawiając za z jego wartość $\frac{1}{r}$ w formule (4); znajdujemy nakoniec

$$(5) \qquad r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{bc^2}{\mu^2}}\,\mathrm{dos}(\theta - \alpha)}.$$

równanie orbity którą planeta opisuje około słońca. Ta orbita jest zawsze linią stożkową; albowiem ogólne równanie stożkowych, odniesionych do jednego ogniska wziętego za biegun i do osi biegunowej czyniącej kąt α z osią ogniskową w stronę najbliższego wierzchołka, ma kształt

$$r = \frac{p}{1 + e\,\mathrm{dos}(\theta - \alpha)},$$

pod którym się właśnie przedstawia równanie orbity planetowej. Więc ta orbita jest ellipsą, parabolą albo hiperbolą według jak stateczna b jest odjemna, zero albo dodatna. Podstawiając za stateczną b jej wartość $v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$, widzimy łatwo że:

jeśli $v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$, orbita jest ellipsą

$v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$, parabolą,

$v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}$, hiperbolą.

Z tem wszystkiem, uważajmy że rodzaj stożkowej którą planeta opisuje zależy jedynie od wielkości prędkości początkowej, a bynajmniej od jej kierunku. Tym sposobem, punkta materyalne rzucone w przestrzeń z jednego położenia, i z prędkościami równemi ale w różnych kierunkach, wszystkie przebiegałyby linie stożkowe tego samego rodzaju.

Mając już krążnę punktu materyalnego, trzeba jeszcze, do zupełnego wyznaczenia ruchu, wyrazić spółrzędne r i θ w funkcyi czasu t, aby znać położenie tego punktu w przestrzeni w każdej epoce danej.

303. Zajmując się głównie planetami, będziemy najpierwej szukali spółrzędnych r i θ, w założeniu że krążna jest ellipsą mającą jedno ognisko w środku słońca. Owoż, jeśli weźmiemy to ognisko za biegun, i oznaczymy przez $2a$ oś wielką, przez e excentryczność, przez α kąt jaki oś biegunowa czyni z osią wielką w stronę najbliższego wierzchołka, równanie biegunowe ellipsy będzie

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\,\mathrm{dos}(\theta - \alpha)};$$

więc, wyrażając tosamość równania krążnej elliptycznej z obecnem, mamy

$$e^2 = 1 + \frac{bc^2}{\mu^2}, \qquad a(1 - e^2) = \frac{c^2}{\mu};$$

zatem

$$b = -\frac{\mu}{a} \quad \text{i} \quad v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Te formuły wyznaczają krążnę planety w funkcyi ilości wiadomych zagadnienia, i dają prędkość w każdem położeniu.

Gdyby krążna planety mogła być kołem, wtedy byłoby $e = 0$, $r = a$, i temsamem $v^2 = \frac{\mu}{a}$, $m\varphi = \frac{m\mu}{a^2} = \frac{mv^2}{a}$; więc planeta miałaby ruch kołowy jednostajny, i byłaby pod działaniem siły dośrodkowej stałej.

Rugując jedną z dwóch spółrzędnych r i θ między równaniami (1) i (2), otrzymuje się równanie które, zcałkowane, da zostającą spółrzędnę w funkcyi czasu t; poczem, za pomocą tej funkcyi i równania krążnej, wywodzi się drugą spółrzędnę, także w funkcyi czasu t. Wyrugujmy najpierwej $d\theta$, znajdziemy zaraz

$$\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{c^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} + b.$$

zkąd

$$dt = \pm \frac{rdr}{\sqrt{br^2 + 2\mu r^2 - c^2}}. \tag{6}$$

Możnaby łatwo zcałkować to równanie zwyczajnym sposobem rachunku całkowego; ale całka zawierałaby łuk koła i pierwiastnik algebryczny; taki kształt nie byłby dogodny do rachunku kąta θ w funkcyi t. Dla tej właśnie przyczyny wprowadzono nową zmiennę zamiast r. Żeby jasno określić użytek i znaczenie tej zmiennej posiłkowej, trzeba uważać że planeta opisująca ellipsę około słońca, które się znajduje w jednem z jej ognisk, jest najbliżej albo najdalej od niego gdy przechodzi przez jeden z wierzchołków tej ellipsy. Wierzchołek najbliższy słońca nazywa się *perihelium* a wierzchołek najdalszy *aphelium*. Widzimy więc dobrze że, we wszystkich położeniach planety, promień wodzący r zmienia się od $r = a(1 - e)$ do $r = a(1 + e)$. Ztąd wynika że można położyć

$$r = a(1 - e\cos u). \tag{7}$$

Podstawiając tę wartość w ostatnie równanie które daje dt, biorąc znak $+$ i zastępując stateczne dowolne przez ich wartości $b = -\frac{\mu}{a}$, $c^2 = \mu a(1 - e^2)$, otrzymujemy

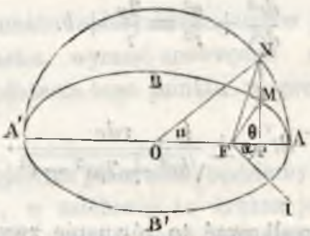
$$dt = a\sqrt{\frac{a}{\mu}}(1 - e \operatorname{dos} u)du.$$

Jeśli teraz, czyniąc dla skrócenia $a\sqrt{\frac{a}{\mu}} = \frac{1}{n}$, zcałkujemy równanie, będziemy mieli formułę

$$(8) \qquad nt = u - e \operatorname{wst} u.$$

Nie przydaliśmy statecznej dowolnej, bo liczymy czas od chwili przejścia planety przez perihelium, w którem $r = a(1 - e)$ i $u = 0$.

Kąt posiłkowy u łatwo się przedstawia geometrycznie.



Jakoż, niech będzie M położenie planety na jej ellipsie; wykreślmy półkole na osi wielkiej AA′, i nazwijmy N punkt w którym ono przecina przedłużoną rzędnę MP; poprowadźmy nakoniec promień półkola $ON = a$ i promień wodzący $FM = r$. Figura pokazuje że

$$r = a - e \,.\, OP = a - ea \operatorname{dos} AON.$$

więc kąt $AON = u$.

Kąt u nazywa się *anomalią excentryczną* planety, a kąt $\theta - \alpha$ jej *anomalią prawdziwą*. Obie anomalie przechodzą zarazem przez wartości 0, π, 2π.

Formuła (8) wyznacza u w funkcyi t; możnaby wyrugować u

między równaniami (7), (8), i otrzymać r w funkcyi t. Ale formuła byłaby zawiła a przeto mało użyteczna w zastosowaniu.

Takim samym sposobem jako wyżej znajduje się związek między anomalią prawdziwą $\theta - \alpha$ i anomalią excentryczną u. Jakoż, porównawszy wartości r dane przez równanie ellipsy i formułę (7), mamy

$$\frac{1-e^2}{1+e\,\mathrm{dos}(\theta-\alpha)} = \frac{1-e\,\mathrm{dos}\,u}{1} = \frac{\mathrm{dos}\,u - e}{\mathrm{dos}(\theta-\alpha)};$$

zląd, uważając dwa ostatnie stosunki, wywodzimy

$$\frac{(1-e)(1+\mathrm{dos}\,u)}{1+\mathrm{dos}(\theta-\alpha)} = \frac{(1+e)(1-\mathrm{dos}\,u)}{1-\mathrm{dos}(\theta-\alpha)},$$

i następnie

$$\mathrm{sty}^2\frac{1}{2}(\theta-\alpha) = \frac{1+e}{1-2}\mathrm{sty}^2\frac{u}{2}.$$

Więc, biorąc pierwiastek kwadratowy z tym samym znakiem, dlatego że obie anomalie są zarazem zero, otrzymujemy

(9) $$\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}(\theta-\alpha) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{sty}\,\frac{u}{2}.$$

Czas T całego obrotu planety wyprowadzi się z formuły $nt = u - e\,\mathrm{wst}\,u$, jeśli w niej uczynimy $u = 2\pi$; co daje

(10) $$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{n} = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{\mu}}.$$

Nietrudno dojść wprost do tego wyniku; trzeba tylko podzielić powierzchnię ellipsy która ma za miarę $\pi a.a\sqrt{1-e^2}$, przez powierzchnię opisaną w jednosci czasu przez promień wodzący, której miarą jest $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{\mu a(1-e^2)}$. Iloraz da wartość znalezioną wyżej. Możnaby z tej wartości wywieśdź także $\mu = \frac{4\pi a^3}{\mathrm{T}^2}$.

304. Excentryczność e orbit planetowych jest małym ułamkiem; największa, dla planety Mars, ma wartość $e = \frac{1}{60}$; dla ziemi $e = 0{,}01685318$. Gdy excentryczność e jest dość mała żeby można zaniedbać jej potęgi wyższe od pierwszej, wtedy znalezione formuły znacznie się uproszczają.

I tak, formuła $nt = u - e \operatorname{wst} u$ daje

$$u = nt + e \operatorname{wst}(nt + e \operatorname{wst} u) = nt + e \operatorname{wst} nt \operatorname{dos}(e \operatorname{wst} u) + e \operatorname{dos} nt \operatorname{wst}(e \operatorname{wst} u);$$

zkąd, zaniedbując potęgi e^2, e^3..., wywodzimy przybliżoną wartość dla u w funkcyi czasu t,

$$(11) \qquad u = nt + e \operatorname{wst}(nt).$$

Jeśli teraz w formule $r = a(1 - e \operatorname{dos} u)$ zastąpimy u przez jego wartość przybliżoną, będzie

$$r = a - ae \operatorname{dos}(nt + e \operatorname{wst} nt)$$

$$= a - ae \operatorname{dos} nt \operatorname{dos}(e \operatorname{wst} nt) + ae \operatorname{wst} nt \operatorname{wst}(e \operatorname{wst} nt).$$

Zkąd, zaniedbując potęgi e^2, e^3..., otrzymujemy przybliżoną wartość r

$$(12) \qquad r = a(1 - e \operatorname{dos} nt).$$

Zostaje nakoniec do wyznaczenia wartość $\theta - \alpha$ w funkcyi czasu t; aby ją znaleźć, bierzemy zasadę powierzchni

$$r^2 d\theta = c\,dt = dt\sqrt{\mu a(1 - e^2)}.$$

Owoż, równanie ellipsy

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \operatorname{dos}(\theta - \alpha)} = \frac{a(1 - e^2)\left\{1 - e \operatorname{dos}(\theta - \alpha)\right\}}{1 - e^2 \operatorname{dos}(\theta - \alpha)},$$

jeśli w niem zaniedbamy e^2, daje

$$r = a\left\{1 - e \operatorname{dos}(\theta - \alpha)\right\},$$

i następnie

$$r^2 = a^2 \left\{ 1 - 2e \operatorname{dos}(\theta - \alpha) \right\}.$$

Podstawiając tę wartość w pierwszem równaniu w którem zaniedbamy także e^2, będzie

$$d\theta \left\{ 1 - 2e \operatorname{dos}(\theta - \alpha) \right\} = \frac{dt}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} = ndt.$$

Ztąd, całkując i oznaczając przez C stateczną dowolną, otrzymujemy

$$\theta - 2e \operatorname{wst}(\theta - \alpha) = nt + C.$$

Dla wyznaczenia statecznej C, uważajmy że, jeśli będziemy liczyli czas od chwili w której punkt przechodzi przez perihelium, powinno być zarazem $t = 0$, $\theta = \alpha$; co daje $\alpha = C$. Zatem

$$\theta - \alpha = nt + 2e \operatorname{wst}(\theta - \alpha)$$

albo

$$\theta - \alpha = nt + 2e \operatorname{wst} \left\{ nt + 2e \operatorname{wst}(\theta - \alpha) \right\}.$$

Więc, zaniedbując e^2, e^3..., znajdujemy ostatecznie

$$\theta - \alpha = nt + 2e \operatorname{wst}(nt). \tag{13}$$

305. Ruch planet nie jest jednostajny, bo ich prędkość, zależna od promienia wodzącego, zmienia się z nim ciągle, to rosnąc to malejąc. Ale można sobie wyobrazić planetę któraby, wychodząc z perihelium w tym samym czasie co planeta uważana, opisywała okrąg około słońca ruchem jednostajnym, mającym równanie

$$\theta - \alpha = nt = \frac{2\pi t}{T}.$$

Ta zmyślona planeta przechodzi przez aphelium razem z planetą rzeczywistą, dlatego że $t=\frac{1}{2}T$ daje $\theta-\alpha=\pi$ i $r=a(1+e)$.

Formuła (13) pokazuje że w pierwszej połowie obrotu około słońca planeta rzeczywista wyprzedza zmyśloną, ilością kątową której wartość przybliżona $2e \operatorname{wst} nt$ jest dodatna. W drugiej połowie, przeciwnie, planeta zmyślona wyprzedza rzeczywistą; bo wtedy wartość $2e \operatorname{wst} nt$ jest odjemna. Poczem, obie planety przychodzą razem do perihelium, i znowu ten sam ruch rozpoczynają.

Ilość $2e \operatorname{wst}(nt)$ nazywa się *równaniem środka*.

W przypadku ziemi, ruch pozorny zmyślonego słońca służy do wyznaczenia *czasu średniego*. Jakoż, aby poprawić niejednostajność pozornego ruchu słońca, i jego nierówność pochodzącą z nachylenia ekliptyki na płaszczyznę równika, wyobrażono drugie słońce, mające ruch jednostajny na płaszczyznie równika. To właśnie zmyślone słońce wskazuje czas średni. Cztery razy do roku czas średni zgadza się z czasem prawdziwym danym przez słońce rzeczywiste.

306. Zagadnienie Keplera. Przedmiotem tego zagadnienia jest wyznaczenie spółrzędnych biegunowych r, θ planety w funkcyi czasu t. Ostatnie formuły rozwiązują wprawdzie zagadnienie; ale tylko z przybliżeniem, które przypuszcza excentryczność dostatecznie małą żeby można zaniedbać jej potęgi wyższe nad pierwszą. Są inne rozwiązania przybliżone; wskażemy treściwie jedno, aby dać tylko wyobrażenie o rzeczy której szczegóły należą do Astronomii.

Otrzymaliśmy między r, θ, t i zmienną posiłkową u trzy następujące formuły

$$r=a(1-e\operatorname{dos} u), \tag{7}$$

$$u=nt+e\operatorname{wst} u, \tag{8}$$

$$\operatorname{sty}\frac{1}{2}(\theta-\alpha)=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{sty}\frac{u}{2}, \tag{9}$$

które łatwo dają wartości dla r, θ i t na każdą wartość zmiennej u. Ale, znając wartość u, żeby otrzymać za pomocą tych formuł odpowiedające wartości spółrzędnych r i θ w funkcyi czasu t, a głównie o to chodzi w astronomicznych zastosowaniach, trzebaby wykonywać bardzo mozolne rachunki. Dla uniknienia tej niedogodności, starano się wyrazić wprost r i θ w funkcyi t, przez szeregi rozwinięte na potęgi rosnące excentryczności e. Oto jakim sposobem:

Wiadomo że funkcya z zmiennej x, wyznaczona przez równanie

$$z = x + \alpha f(z) \tag{14}$$

w którem $f(z)$ jest funkcyą daną i α parametrem mniejszym od jedności, rozwija się wedle potęg tego parametru na szereg następujący, podany przez LAGRANGE'A (*)

$$\left\{\begin{aligned} z = x + \frac{\alpha}{1} f(x) + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d.f(x)^2}{dx} + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\frac{d^2.f(x)^3}{dx^2} + \ldots. \\ + \frac{\alpha^n}{1.2.n}\frac{d^{n-1}.f(x)^n}{dx^{n-1}} + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Owoż, formuła (8) wchodzi do równania (14) jeśli uczynimy

$$z = u, \qquad x = nt, \qquad \alpha = e, \qquad f(x) = \mathrm{wst}\, nt;$$

więc, podstawiając te wartości w szeregu (15), znajdziemy rozwój zmiennej posiłkowej u wedle potęg rosnących excentryczności e. Dla skrócenia zachowamy jeszcze literę x, i będziemy mieli

$$u = x + \frac{e}{1}\mathrm{wst}\, x + \frac{e^2}{1.2}\frac{d.}{dx}\mathrm{wst}^2 x + \frac{e^3}{1.2.3}\frac{d^2.}{dx^2}\mathrm{wst}^3 x + \ldots.$$
$$+ \frac{e^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\mathrm{wst}^n(x) + \ldots$$

Trzeba najpierwej wyrazić potęgi $\mathrm{wst}\, x$ za pomocą wstaw i dostaw wielowników łuku x, i dopiero potem uskutecznić wskazane

(*) Szereg LAGRANGE'A jest szczególnym przypadkiem daleko ogólniejszego Zobacz notę na końcu tomu.

różniczkowania. Wykonawszy te rachunki i podstawienia, otrzyma się szukaną formułę

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
u &= nt + e \operatorname{wst} nt + \frac{e^2}{2} \operatorname{wst} 2nt + \frac{e^3}{2^3}(3 \operatorname{wst} 3nt - \operatorname{wst} nt) \\
&+ \frac{e^4}{2.3}(2 \operatorname{wst} 4nt - \operatorname{wst} 2nt) \\
&+ \frac{e^5}{2^7.3}(5^3 \operatorname{wst} 5nt - 3^4 \operatorname{wst} 3nt + 2 \operatorname{wst} nt) \\
&+ \frac{e^6}{2^4.3.5}(3^4 \operatorname{wst} 6nt - 2^6 \operatorname{wst} 4nt + 5 \operatorname{wst} 2nt) + \ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Mając zmiennę posiłkową u w funkcyi czasu t, nietrudno będzie, za pomocą formuł (7) i (9), znaleźć na każdą wartość t odpowiedające wartości dla r i $\theta - \alpha$. Jednakże jeszcze jest lepiej znać te ilości wyrażone bezpośrednio w funkcyi t. Ale to należy już do dzieł specyalnych.

307. Uważajmy teraz punkt materyalny opisujący parabolę, pod działaniem tej samej siły która porusza planety na ellipsach, i szukajmy w jakim on czasie przechodzi od perihelium, które jest wierzchołkiem paraboli, do położenia jakiegokolwiek na tej krzywej. Owoż, wiemy że, w przypadku krążnej parabolicznej $b = 0$ i parametr $p = \frac{c^2}{\mu}$; więc ta krążna i zasada powierzchni wyrażają się przez równania

$$r = \frac{p}{1 + \operatorname{dos}(\theta - \alpha)}$$

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\mu p}.$$

Ztąd, rugując r, otrzymujemy

$$dt = p\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{d\theta}{\{1 + \operatorname{dos}(\theta - \alpha)\}^2}.$$

Dla skrócenia połóżmy $\theta - \alpha = 2\psi$, będzie

$$dt = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,\frac{d\psi}{\operatorname{dos}^4\psi} = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,(1 + \operatorname{sty}^2\psi)\,\frac{d}{\operatorname{dos}^2\psi}.$$

Więc, całkując, mamy

$$t = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,(\operatorname{sty}\psi + \frac{1}{3}\operatorname{sty}^3\psi)$$

albo

$$(17)\qquad t = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left\{\operatorname{sty}\frac{1}{2}(\theta - \alpha) + \frac{1}{3}\operatorname{sty}^3\frac{1}{2}(\theta - \alpha)\right\}.$$

Niema potrzeby przydawać żadnej statecznej, jeśli czas jest liczony od chwili w której punkt materyalny przechodzi przez wierzchołek paraboli; bo wtedy powinno być zarazem $t = 0$ i $\theta = \alpha$.

Orbity komet, jakośmy już powiedzieli, są ellipsami bardzo wydłużonemi, w których excentryczność jest prawie równa jedności; można więc uważać te ellipsy za parabole i, w pierwszem przybliżeniu, wyznaczać ruch komet za pomocą dwóch powyższych formuł.

308. Wiemy nakoniec że punkt materyalny, pod działaniem tej samej siły środkowej która porusza planety i komety, może opisywać hiperbolę. W tym przypadku, wyrażając tosamość równania krążne

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{bc^2}{\mu^2}}\operatorname{dos}(\theta - \alpha)}$$

z równaniem biegunowem hiperboli

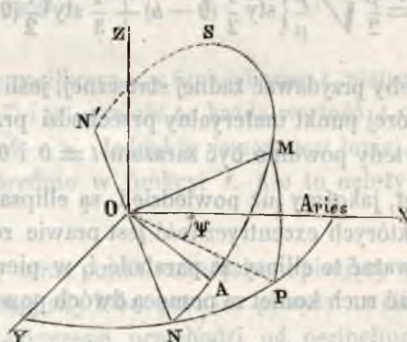
$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\operatorname{dos}(\theta - \alpha)},$$

znajdujemy

$$1 + \frac{bc^2}{\mu^2} = e^2,\quad \frac{c^2}{\mu} = a(e^2 - 1);\quad \text{zkąd}\quad b = \frac{\mu}{a}.$$

Nie będziemy szukali formuł ruchu hiperbolicznego, bo one nie mają dotąd zastosowania.

309. Gdy się uważa ruchy kilku planet, dla możebności porównywania, trzeba je koniecznie odnosić do trzech osi prostokątnych, poprowadzonych przez środek słońca O. Wtedy bierze się płaszczyznę ekliptyki za płaczyznę xy, i pół-oś dodatną OX przechodzącą przez znak barana (*Aries*). Niech będzie M planeta, której orbita NMS spotyka płasczyznę ekliptyki w dwóch punktach N i N′ nazwanych *węzłami* planety.



Kąt MOP $=\lambda$ jest szerokością niebieską planety M, kąt POX $=\psi$ jej długością, kąt NOX $=\varphi$ długością węzła N; kąt dwójścienny SONX $=\gamma$ nachyleniem płasczyzny orbity na płasczyznę ekliptyki; punkt A perihelium planety, kąt AON $=\alpha$. Kąty α, γ, φ, wyznaczające położenie orbity elliptycznej w przestrzeni, powinny być dane. Kąt MOA $=\theta-\alpha$ jest zawsze anomalią prawdziwą, i OM $=r$.

310. Ustawa ciążenia powszechnego. Oparliśmy Mechanikę rozumową na trzech fundamentalnych zasadach, które są : bezwładność materyi, równość działania i oddziaływania, niezależność skutków sił działających razem. Logiczne następstwa tych zasad, zastosowane do ciał niebieskich, doprowadziły nas do teorycznego dowodzenia ustaw które Kepler odkrył przez obserwacyę, i do wyznaczenia siły której skutkiem jest ruch planet około słońca. Z ustaw

Keplera wyprowadził Newton ustawę *powszechnego ciążenia* czyli powszechnego przyciągania materyi. Ale dotąd nic stanowczo nie usprawiedliwiało przyjętych założeń, chyba tylko ich ciągła zgoda z naturalnemi zjawiskami. Otóż teraz właśnie przedstawia się sposobność sprawdzenia tych założeń.

Jeśli ustawa powszechnego ciążenia jest prawdziwa, ciężkość ciał na powierzchni ziemi, szczególny przypadek tego ciążenia, powinna być uważana jako przyciąganie które cała massa ziemska wywiera na wszystkie punkta materyalne tych ciał. Za pomocą wahadła przekonano się że natężenie ciężkości, na różnych punktach powierzchni ziemi, zmienia się w stosunku odwrotnym kwadratu odległości od jej środka; wiadomo nadto że ciężkość jest proporcyonalna do massy ciała a bynajmniej nie zależy od jego natury. Na tych dwóch własnościach ciężkości zasadza się też przyciąganie powszechne.

Owoż, księżyc w swoim obrocie około ziemi podlega ustawom Keplera; więc przyspieszenie φ, jakie mu nadaje siła wypływająca ze środka ziemi jako punktu w którymby cała jej massa była zjednoczona, wyraża się przez

$$\varphi = \frac{c^2}{a(1 - e^2)} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Stateczna c, jako wiemy, znaczy powierzchnię dwa razy większą od tej którą promień wodzący księżyca opisuje w jedności czasu; zatem, nazywając T czas całkowitego obrotu księżyca około ziemi, będzie $c = \frac{2\pi r^2}{T}$. Średnia odległość księżyca od ziemi wynosi około sześćdziesiąt promieni ziemskich; oznaczając przez R promień ziemi mamy $r = 60R$. Nakoniec, ponieważ orbita księżycowa mało się różni od koła, można wziąć $e = 0$ i $a = r$. Jeśli więc podstawimy te wartości w powyższej formule, znajdziemy

$$\varphi = \frac{4\pi^2.60R}{T^2}.$$

Ale całkowity obrót księżyca około ziemi odbywa się w $27^d 7^g 43^m 11^s$;

biorąc liczbę okrągłą $T = 39343.60^s$, mamy ostatecznie

$$\varphi = \frac{120\pi.40\,000\,000^m}{(39343)^2}\cdot\frac{1}{(60)^2}.$$

Spółczynnik $\frac{120\pi.40\,000\,000}{(39343)^2}$ ma wartość przybliżoną 9,81 która jest prawie równa liczbie g; możemy więc wziąć

$$\varphi = \frac{g}{(60)^2},$$

zkąd

$$\frac{\varphi}{g} = \frac{R^2}{r^2}.$$

Ten ważny wynik, otrzymany przez Newtona, jeśli nie daje zupełnego dowodu, to przynajmniej wskazuje mocną prawdopodobność że ustawa powszechnego ciążenia jest rzeczywistością; i że ciężkość na powierzchni ziemi jest skutkiem tego samego przyciągania któremu księżyc ulega. To wszystko potwierdza prawdziwość przyjętych zasad Mechaniki rozumowej, tem więcej że błąd powyższego wyniku jest bardzo małoznaczny względnie do zaniedbanych różnych okoliczności.

Widzieliśmy już że trzecia ustawa Keplera nie jest ściśle dokładna, z przyczyny nierówności mass planet. Druga ustawa nie może być zupełnie prawdziwa, dlatego że planety działając nawzajem na siebie, na mocy ustawy powszechnego przyciągania, modyfikują koniecznie swoje ruchy. Owoż, znaleziono orbity elliptyczne planet, mając wzgląd na samą tylko siłę przyciągającą słońca która głównie porusza planety, a nie zważając w rachunku ich orbit na uboczne działania innych planet i ciał niebieskich. Te więc orbity nie mogą być dokładnemi ellipsami. Ale massy planet są tak małe a ciała niebieskie tak daleko jedne od drugich, że w istocie niewiele wpływają na zmianę orbit elliptycznych które obserwacya odkryła. Jednakże ten wzajemny wpływ planet na ich ruchy daje się oceniać, i jego wyrachowanie jest bardzo ważnym przedmiotem Mechaniki niebieskiej.

311. Massy planet. Można łatwo wyznaczyć stosunek massy pla-

nety do massy słońca gdy planeta ma towarzysza. Jakoż, niech będzie m massa planety, m' massa jej towarzysza, M massa słońca; oznaczmy przez $2a$, $2a'$ wielkie osie orbit planety i towarzysza, przez T, T′ czasy całkowitych obrotów. Na mocy wiadomej formuły, mamy

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m),$$

i

$$\frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = f(m + m');$$

zkąd

$$\frac{m + m'}{M + m} = \frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2}.$$

Wyjąwszy księżyc, towarzysze mają massy bardzo małe względnie do odpowiedających planet; można więc zaniedbać m' przy m, i tak samo m przy M; co daje formułę

$$\frac{m}{M} = \frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2}.$$

T i T′ są wiadome przez obserwacyę; dość więc tylko znać wartość przybliżoną stosunku $\frac{a'}{a}$, aby otrzymać, z podobnem przybliżeniem, massę planety w porównaniu do massy słońca. Newton znalazł tym sposobem że massa Jowisza do massy słońca jest w stosunku $\frac{1}{1067}$ Otrzymano później metodą dokładniejszą $\frac{1}{1070}$ dla tego stosunku.

312. Powyższa formuła nie może służyć do wyrachowania massy ziemi z dostatecznem przybliżeniem, dlatego że massa księżyca nie jest dość mała względem massy ziemi, aby ją zaniedbać bez znacznego błędu wolno było. Ale znaleziono dokładniejszy sposób wyznaczenia massy ziemi, sposób jej tylko właściwy, który wynika ztąd że jest wiadome przyciąganie jakie ziemia wywiera na ciała leżące na jej powierzchni. To przyciąganie jest równe ciężkości powiększonej składową pionową siły odśrodkowej. Gdyby ziemia była dos-

konałą sferą massy m i promienia r, jej przyciąganie, działające na jedność massy ciała leżącego na powierzchni, wyraziłoby się przez $\frac{fm}{r^2}$. Owoż, istnieje równoleżnik, mający szerokość geograficzną λ daną przez $\text{wst}\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}$, na którym przyciąganie ziemskie jest takie jak gdyby zieima była sferą promienia $r = 6364551^{\text{m}}$; (w wyrachowaniu wartości r wzięto $\frac{1}{290}$ na spłasczenie ziemi). Obserwacya dowodzi że na tym równoleżniku ciężkość jest $g = 9^{\text{m}},79386$, a składowa pionowa siły odśrodkowej wyraża się przez $\frac{g \,\text{dos}^2\lambda}{289} = \frac{2}{3}\cdot\frac{g}{289}$. Jeśli więc nazwiemy G przyciąganie ziemskie, będzie

$$G = g + \frac{2g}{3\times 289} = 9^{\text{m}},79386\left(1 + \frac{2}{3\times 289}\right) = 9^{\text{m}},81645.$$

Ale mamy

$$G = \frac{fm}{r^2} \quad \text{i} \quad \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M+m);$$

zkąd, rugując f, wynika

$$\frac{M}{m} + 1 = \frac{4\pi^2 a^3}{G r^2 T^2}.$$

T, liczba sekund zawartych w jednym roku, jest wiadome, $T = 86400'' \times 365,256374$; parallaxa słońca, odpowiedająca równoleżnikowi wyznaczonemu przez $\text{wst}\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}$ dla średniej odległości a, ma wartość $8'',60$; zatem $r = a\,\text{sty}(8'',60)$, zkąd $a = 23984.r$.

Podstawiając te wszystkie wartości, otrzymujemy

$$\frac{M}{m} = 354592 \quad \text{albo} \quad \frac{m}{M} = \frac{1}{354592}.$$

Ztąd nietrudno wywieśdź stosunek gęstości słońca do gęstości ziemi. Jakoż, massa ciała równa się wieloczynowi jego objętości przez gęstość; a wiemy że średnica słońca jest 110 razy większa od średnicy ziemi; zatem stosunek objętości słońca i ziemi, równy stosunkowi sześcianów ich promieni, wyraża się przez $110^3 = 1331000$; jeśli więc podzielimy przez 1331000 stosunek mass tych dwóch ciał dany liczbą 354592, znajdziemy iloraz blizko $\frac{1}{4}$ który będzie stosunkiem gęstości słońca do gęstości ziemi.

Można także, za pomocą już wiadomych formuł, wyprowadzić z tego co poprzedza ciężkość na powierzchni słońca. Wiemy albowiem że, nazywając R i r średnie promienie słońca i ziemi, przyciągania jakie te dwa ciała wywierają na jedność massy ciał leżących na ich powierzchniach, wyrażają się przez

$$\frac{f\mathrm{M}}{\mathrm{R}^2} \quad \text{i} \quad \frac{fm}{r^2} = \mathrm{G}.$$

Zatem, pierwsze przyciąganie wyrażone przez drugie ma wartość przybliżoną

$$\mathrm{G}\,\frac{r^2}{\mathrm{R}^2}\cdot\frac{\mathrm{M}}{m}.$$

Jeśli podstawimy wartości $\frac{r}{\mathrm{R}} = \frac{1}{110}$, $\frac{\mathrm{M}}{m} = 354592$, i wykonamy rachunek, znajdziemy że szukana ciężkość jest prawie równa 29G. Więc, zaniedbując siłę odśrodkową która jest mała na powierzchni słońca, bo ruch wirowy słońca odbywa się w $25^d,34$, widzimy że ciężkość na słońcu jest prawie 29 razy większa od ciężkości na ziemi. To pokazuje że ciało upuszczone na powierzchnię słońca przebiega około 144 metrów w pierwszej sekundzie, gdy tymczasem na powierzchni ziemi ciało upuszczone przebiega $4^m,90$ w pierwszej sekundzie upadku.

313. Znając massę ziemi, łatwo wyznaczyć massę planety jakiejkolwiek. Jakoż, niech będzie m' massa planety, m i M massy

ziemi i słońca. Mamy

$$\frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = f(M + m'), \qquad G = \frac{fm}{r^2}.$$

Jeśli wyrugujemy f będziemy mieli formułę

$$\frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = Gr^2\left(\frac{M}{m} + \frac{m'}{m}\right) = Gr^2\left(354592 + \frac{m'}{m}\right).$$

która daje $\frac{m'}{m}$.

Kawendisz (*Cavendish*) z doświadczenia, w którem przyciąganie sfery ołowianej sprawiało pewne oscyllacye wiadomego trwania, wniósł że gęstość ziemi równa się $5\frac{1}{2}$ razy gęstości wody. Mając gęstość ziemi z dostatecznem przybliżeniem, wyznacza się zaraz massę ziemi, a następnie massę innych planet i massę słońca.

Można jeszcze wyznaczać massy planet oceniając dokładnie ich wpływ na ruch innych planet. Zjawisko przypływu i odpływu morza, na które księżyc przeważnie działa, dało massę księżyca równą $\frac{1}{88}$ massy ziemi.

314. Wpływ ciał niebieskich na ciężar ciał ziemskich. Słońce i księżyc, jakośmy już widzieli, wpływają bardzo mało na ciężar ciał ziemskich; a wpływ planet i innych ciał niebieskich jest daleko mniejszy. Aby się o tem jeszcze lepiej przekonać, niech będzie A ciało niebieskie jakiekolwiek, mające massę m' i odległość a od środka ziemi Z; uważajmy przyciąganie jakie ono wywiera na punkt M ziemi, mający massę μ i odległość r od jej środka. To przyciąganie jest oczywiście największe możebne gdy punkt M znajduje się między A i Z. Przypuszczając massę m' zjednoczoną około punktu A, działanie ciała A na punkt materyalny M ma za miarę $\frac{f\mu m'}{(a-r)^2}$; zatem nadaje mu przyspieszenie wyrażaone przez $\frac{fm'}{(a-r)^2}$. Ale ciało A nadaje także środkowi ziemi Z

przyspieszenie $\frac{fm'}{a^2}$; więc różnica tych dwóch przyspieszeń, stanowiąca zmianę ciężkości odpowiedającej punktowi materyalnemu M, równa się

$$fm'\left\{\frac{1}{(a-r^2)}-\frac{1}{a^2}\right\}=fm'.\frac{2ar-r^2}{a^2(a-r)^2}=\varphi.$$

Owoż, wiemy że przyciąganie G jakie massa m ziemi wywiera na punkta leżące na powierzchni, wyraża się przez

$$G=\frac{fm}{r^2};$$

więc zmiana ciężkości ciał ziemskich, w stosunku do całego przyciągania G, jest

$$\varphi=G\frac{m'}{m}.\frac{r^2}{a^2}.\frac{2ar-r^2}{(a-r)^2}.$$

Jeśli ciałem A jest księżyc, będzie $\frac{m'}{m}=\frac{1}{88}$ i $\frac{r}{a}=\frac{1}{60}$; a zatem

$$\varphi=G.\frac{1}{88}.\frac{1}{60}.\frac{119}{60^2.59^2}<\frac{G}{9.10^6}.$$

Przypuszczając że ciałem A jest słońce, mamy $\frac{m'}{m}=354592$ i $\frac{a}{r}=23984$; zatem

$$\varphi=G.\frac{354592}{23984^2}.\frac{2.23984-1}{23983^2}<G.\frac{354592}{23984}.\frac{2}{23983^2}<\frac{G}{9.10^6}.$$

Te dwa przyspieszenia, wtedy nawet gdy się dodają, czynią wypadkowę mniejszą od $\frac{G}{6.10^6}$. To dowodzi że działania księżyca i słońca razem sprawiają bardzo małą zmianę w ciężkości ciał ziemskich. Ale te działania, nieocenialne prostą obserwacyą, przeważnie czuć się dają w przypływie i odpływie wód morskich którego są istotną przyczyną. I w samej rzeczy, jeśli punkt materyalny M jest cząstką płynną oceanu, ta cząstka ruchoma, doznając przyciągania od ciała A, słońca albo księżyca albo obydwóch razem, ulega temu działaniu i idzie ku ciału A.

Punkt materyalny M′, średnicowo przeciwległy punktowi M, ma za przyspieszenie względne

$$G.\frac{m'}{m}\left(\frac{1}{(a+r)^2}-\frac{1}{a^2}\right)r^2.$$

To przyspieszenie jest odjemne, i oddala względnie cząstkę M′ od ciała A. Gdy działania księżyca i słońca dodają się, przyciąganie jakiego doznają cząstki płynne jest największe możebne; wtedy wody oceanu wznoszą się najwyżej, i ich przypływ do brzegów sprawia wezbranie największe jakie w danem miejscu zdarzać się może.

Z tego cośmy powiedzieli, o wpływie księżyca i słońca na ciężkość ciał ziemskich, pojmuje się łatwo że wpływ planet, dla małości ich mass i wielkiej odległości, a wpływ innych ciał niebieskich, z przyczyny ich niezmiernej odległości od ziemi, może być uważany za żaden.

Zakończymy rożdział o siłach środkowych następującemi przykładami.

315. Zagadnienie I. *Znaleźć krzywę jaką opisuje punkt materyalny pod działaniem siły skierowanej ku środkowi stałemu, i proporcyonalnej do odległości od tego środka.*

Oznaczając przez φ przyspieszenie, i przez r odległość punktu ruchomego od środka przez który ciągle przechodzi siła poruszająca, mamy $\varphi=\mu r$; zatem, jeśli przypuścimy że ta siła jest przyciągająca, równania różniczkowe ruchu będą

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-\mu x,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-\mu y.$$

Zmienne x i y są oddzielone, i każde z dwóch równań linijnych łatwo się całkuje. Wykonywając rachunek, mamy równania ruchu punktu uważanego

$$(2)\quad \begin{cases} x = \mathrm{A}\,\mathrm{dos}\,t\sqrt{\mu} + \mathrm{A}'\,\mathrm{wst}\,t\sqrt{\mu} \\ y = \mathrm{B}\,\mathrm{dos}\,t\sqrt{\mu} + \mathrm{B}'\,\mathrm{wst}\,t\sqrt{\mu} \end{cases}$$

Cztery stateczne dowolne A, A′ i B, B′ wyznaczają się, jako zwykle, za pomocą danego stanu początkowego w którym się punkt ruchomy znajduje, to jest za pomocą wiadomego położenia i wiadomej prędkości tego punktu na początku czasu t. Aby otrzymać wartości tych statecznych, bierzemy pochodne spółrzędnych x i y względem czasu t; co dostarcza dwóch potrzebnych równań

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\mathrm{A}\sqrt{\mu}\,\mathrm{wst}\,t\sqrt{\mu} + \mathrm{A}'\sqrt{\mu}\,\mathrm{dos}\,t\sqrt{\mu}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\mathrm{B}\sqrt{\mu}\,\mathrm{wst}\,t\sqrt{\mu} + \mathrm{B}'\sqrt{\mu}\,\mathrm{dos}\,t\sqrt{\mu}, \end{cases}$$

które wyrażają składowe prędkości punktu ruchomego w funkcyi czasu t.

Uczyńmy teraz $t = 0$, będzie

$$x_0 = \mathrm{A}, \qquad y_0 = \mathrm{B},$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \mathrm{A}'\sqrt{\mu}, \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \mathrm{B}'\sqrt{\mu}.$$

Więc A i B są spółrzędnemi punktu wyjścia, zaś $\mathrm{A}'\sqrt{\mu}$ i $\mathrm{B}'\sqrt{\mu}$ składowemi prędkości początkowej

Równania (2) pokazują że ruch uważanego punktu jest obrotowy okresowy; albowiem, gdy czas powiększa się ilością $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$, spółrzędne x i y biorą na powrót te same wartości.

Wyrugujmy teraz zmiennę t będziemy mieli równanie krążnej. Owoż, z równań (2) wyciągamy

$$Ay - Bx = (AB' - BA')\,\mathrm{wst}\,t\sqrt{\mu},$$

$$B'x - A'y = (AB' - BA')\,\mathrm{dos}\,t\sqrt{\mu};$$

więc, podnosząc do kwadratu i dodając, znajdujemy równanie krążnej

$$(4) \qquad (Ay - Bx)^2 + (A'y - B'x)^2 = (AB' - BA')^2$$

Ta linia jest stożkową mającą środek w początku spółrzędnych, a przeto nie jest parabolą; nie jest też hiperbolą, bo, czyniąc

$$y = mx,$$

otrzymujemy równanie

$$(Am - B)^2x^2 + (A'm - B')^2x^2 = (AB' - BA')_2,$$

które, łącznie z ostatniem, pokazuje że spółrzędne x i y nie mogą rość nieograniczenie. Więc krążna jest OGÓLNIE ELLIPSĄ; co się zresztą łatwo rozpoznaje rozwijając dwa zmienne kwadraty.

Jeśli $AB' - BA' = 0$, krążna jest linią prostą.

Jakoż, w tym przypadku musi być zarazem

$$Ay - Bx = 0 \quad \text{i} \quad A'y - B'x = 0.$$

Ale te dwa równania wyrażają tę samą linię prostą; bo, na mocy założenia, spółczynniki A' i B', proporcyonalne do składowych prędkości początkowej, są proporcyonalne do spółrzędnych A i B punktu wyjścia.

W ogólności więc punkt materyalny, rzucony w przestrzeń pod działaniem siły która go przyciąga do środka stałego *proporcyonalnie do odległości*, opisuje ellipsę mającą *środek* w tym środku przyciągania; gdy tymczasem w naturze *ognisko* ellipsy, którą punkt materyalny opisuje pod działaniem przyciągania *w stosunku odwrotnym kwadratu odległości*, jest w środku przyciągającym.

Jeśli $\varphi = -\mu r$, to jest, jeśli siła poruszająca punkt materyalny jest odpychająca, wtedy równania różniczkowe ruchu są

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mu y.$$

Całkując te dwa równania linijne, wiadomym sposobem, znajdujemy równania ruchu punktu uważanego,

$$(5) \quad \begin{cases} x = \mathrm{A}e^{t\sqrt{\mu}} + \mathrm{A}'e^{-t\sqrt{\mu}} \\ y = \mathrm{B}e^{t\sqrt{\mu}} + \mathrm{B}'e^{-t\sqrt{\mu}}. \end{cases}$$

Do wyznaczenia czterech statecznych dowolnych, mamy pochodne

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{A}\sqrt{\mu}\, e^{t\sqrt{\mu}} - \mathrm{A}'\sqrt{\mu}\, e^{-t\sqrt{\mu}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{B}\sqrt{\mu}\, e^{t\sqrt{\mu}} - \mathrm{B}'\sqrt{\mu}\, e^{-t\sqrt{\mu}}.$$

Uczyńmy teraz $t = 0$, będziemy mieli cztery równania które wyznaczają stan początkowy,

$$x_0 = \mathrm{A} + \mathrm{A}', \quad y_0 = \mathrm{B} + \mathrm{B}',$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = (\mathrm{A} - \mathrm{A}')\sqrt{\mu}, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = (\mathrm{B} - \mathrm{B}')\sqrt{\mu}.$$

Aby mieć krążnę, z równań (5) wyciągamy najpierwej

$$\mathrm{A}y - \mathrm{B}x = (\mathrm{AB}' - \mathrm{BA}')\, e^{-t\sqrt{\mu}},$$

$$\mathrm{B}'x - \mathrm{A}'y = (\mathrm{AB}' - \mathrm{BA}')\, e^{t\sqrt{\mu}}.$$

poczem, mnożąc stronami, otrzymujemy

$$(6) \qquad (\mathrm{A}y - \mathrm{B}x)(\mathrm{B}'x - \mathrm{A}'y) = (\mathrm{AB}' - \mathrm{BA}')^2.$$

To równanie przedstawia hiperbolę której środkiem jest początek spółrzędnych, i niemaltycznemi dwie proste dane przez równania

$$\mathrm{A}y - \mathrm{B}x = 0, \qquad \mathrm{B}'x - \mathrm{A}'y = 0.$$

Jeśli $\mathrm{AB}' - \mathrm{BA}' = 0$, hiperbola przywodzi się do dwóch niemaltycznych. Więc w ogólności, gdy siła poruszająca punkt materyalny odpycha go proporcyonalnie do odległości, ten punkt przebiega gałąź hiperboli ruchem niepowrotnym.

316. Rozwiążmy teraz ZAGADNIENIE ODWROTNE. *Punkt materyalny opisuje ellipsę pod działaniem siły skierowanej ku jej środkowi; znaleźć wyrażenie tej siły.*

Niech będą $2a$ i $2b$ wielka i mała oś opisanej ellipsy; jeśli weźmiemy środek tej krzywej za biegun spółrzędnych, i oś wielką za oś biegunową, równanie biegunowe ellipsy będzie

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{dos}^2\theta}{a^2} + \frac{\mathrm{wst}^2\theta}{b^2} = \frac{1}{r^2},$$

zkąd, różniczkując, otrzymujemy

$$\frac{d.\frac{1}{r}}{rd\theta} = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{wst}\theta\,\mathrm{dos}\,\theta.$$

Owoż, równanie ellipsy daje

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{wst}^2\theta = \frac{a^2 - r^2}{a^2r^2},$$

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{dos}^2\theta = \frac{r^2 - b^2}{b^2r^2};$$

jeśli więc, między temi dwoma równaniami i poprzedzającem, wyrugujemy θ, będzie

$$\left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}{a^2b^2r^2}.$$

Podstawmy tę wartość w formule (3) numeru 297, znajdziemy

$$-\varphi dr = d.\frac{c^2}{2}\frac{a^2 + b^2 - r^2}{a^2b^2};$$

zkąd, wykonywając różniczkowanie, otrzymujemy nakoniec

$$\varphi = \frac{c^2r}{a^2b^2}.$$

Więc w ruchu, którym się zajmujemy, siła wypływająca ze środka ellipsy jest proporcyonalna do odległości od tego środka, i jest przyciągająca ponieważ φ ma wartość dodatną.

Gdyby punkt materyalny opisywał hiperbolę pod działaniem siły przechodzącej przez jej środek, postępując jako wyżej, znalezionoby że ta siła jest odpychająca.

317. *Znaleźć krążnę jaką opisuje punkt materyalny, przyciągany przez środek stały w stosunku odwrotnym sześcianu odległości.*

Mamy $\varphi = \frac{\mu}{r^3}$. Podstawiając tę wartość w formule (3) numeru 297, otrzymujemy zaraz równanie różniczkowe krążnej

$$\int -\frac{\mu dr}{r^3} = \frac{c^2}{2}\left\{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right\}.$$

Zkąd

$$\frac{\mu}{r^2} + b = \frac{c^2}{r^2} + c^2\left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2.$$

Ilości c i b wyrażają dwie stateczne dowolne które się wyznacza mając dany stan początkowy punktu materyalnego; ich wartości są $\quad v_0 r_0 \,\mathrm{wst}\, i, \quad b = v_0^2 - \frac{\mu}{r_0^2}$.

Uczyńmy teraz $\frac{1}{r} = z$, równanie różniczkowe krążnej weźmie kształt prosty

$$(1) \qquad \frac{dz^2}{d\theta^2} + \frac{c^2 - \mu}{c^2} . z^2 = \frac{b}{c^2}.$$

Spółczynnik ilości z^2 może być dodatny, odjemny, albo zero. Te trzy przypadki powinny być koniecznie odróżnione w całkowaniu, dlatego że dają wyniki zupełnie różne.

Zaczynając od pierwszego przypadku, mamy

$1^\circ \quad \frac{c^2 - \mu}{c^2} > 0$; możemy położyć $\frac{c^2 - \mu}{c^2} = n^2$;

zatem $\quad \frac{b}{c^2} = \frac{v_0^2}{c^2} - \frac{\mu}{c^2 r_0^2} = \frac{\mathrm{dot}^2 i + n^2}{r_0^2}.$

Te wartości przekształcają równanie (1) na następujące

$$\frac{dz^2}{d\theta^2} = \frac{\mathrm{dot}^2 i + n^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{n^2 r_0^2 z^2}{\mathrm{dot}^2 i + n^2}\right);$$

jeśli więc uczynimy $\quad \frac{n^2 r_0^2}{\mathrm{dot}^2 i + n^2} = k^2$, będziemy mieli ostatecznie

$$n d\theta = \pm \frac{k dz}{\sqrt{1 - k^2 z^2}}.$$

Trzeba wziąć znak — albo +, według jak promień wodzący r rośnie albo maleje gdy się θ powiększa. Biorąc znak — i całkując, znajdujemy

$$n\theta = \text{łuk}\,\mathrm{dos}\, kz + \alpha.$$

α wyraża stateczną dowolną którą się wyznacza przez warunek $\theta = 0$ i $r = r_0$.

Ztąd wynika w kształcie skończonym równanie krążnej

$$(2) \qquad r = \frac{k}{\mathrm{dos}(n\theta - \alpha)}.$$

Ta formuła jest ogólna, chociaż otrzymaliśmy ją biorąc $\frac{dz}{d\theta} < 0$, o jest zakładając że θ i r rosną zarazem. Jakoż, różniczkując równanie (2), widzimy że pochodna

$$\frac{d.\frac{1}{r}}{d\theta} = -n\,\mathrm{wst}(n\theta - \alpha)$$

zmienia znak przechodząc przez zero; co odpowieda wartości minimum albo maximum dla $\frac{1}{r}$, to jest wartości od której poczynając, r przestaje rosnąć aby maleć albo przestaje maleć aby rosnąć. Więc formuła (2) daje położenie punktu ruchomego nietylko kiedy θ i r rosną zarazem, ale i wtedy kiedy θ rośnie, a r maleje albo na odwrot; co dowodzi ogólności tej formuły.

Równanie krążnej pokazuje że wartość $r = k$, odpowiedająca wartości $\theta = \frac{\alpha}{n}$, jest minimum.

Owoż,

$$\theta = \frac{\alpha}{n} \pm \varepsilon \qquad \text{daje} \qquad \mathrm{dos}(n\theta - \alpha) = \mathrm{dos}\, n\varepsilon;$$

więc krążna jest symetryczna względem kierunku promienia wodzącego minimum.

Promień r staje się nieskończenie wielkim, gdy

$$\mathrm{dos}(n\theta - \alpha) = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad n\theta - \alpha = \frac{\pi}{2};$$

$\frac{\pi}{2}$ jest najmniejszą wartością łuku $n\theta - \alpha$ jaka zadość czyni równości. To dowodzi że, gdy θ rośnie od $\frac{\alpha}{n}$ do $\frac{\alpha+\frac{1}{2}\pi}{n}$, r rośnie od k do ∞; więc krążna ma gałąź nieskończenie wielką, leżącą w kącie $\frac{\alpha+\frac{1}{2}\pi}{n}-\frac{\alpha}{n}$; niemaltyczna tej gałęzi jest równoległa do drugiego ramienia kąta, i na odległość $\frac{k}{n}$ od niego.

Jest druga gałąź nieskończenie wielka i druga niemaltyczna, obie symetryczne do pierwszych względem kierunku promienia wodzącego minimum.

Wyraźmy teraz spółrzędne punktu ruchomego w funkcyi czasu t. Zasada powierzchni, jeśli zastąpimy r przez jego wartość w funkcyi θ, daje

$$\frac{k^2 d\theta}{\operatorname{dos}^2(n\theta-\alpha)}=c\,dt.$$

Jeśli zcałkujemy to równanie, wyznaczając stateczną dowolną przez warunek $t=0$ i $\theta=0$, otrzymamy

$$\operatorname{sty}(n\theta-\alpha)+\operatorname{sty}\alpha=\frac{cnt}{k^2};$$

A jeśli jeszcze obierzemy za oś biegunową kierunek promienia wodzącego minimum, będzie $\alpha=0$, i formuła weźmie kształt prosty

$$\operatorname{sty} n\theta=\frac{cnt}{k^2}. \tag{3}$$

Ta wartość podstawiona w równaniu (2) daje

$$r=\sqrt{k^2+\frac{n^2c^2t^2}{k^2}}. \tag{4}$$

Równania (3) i (4) wskazują w każdej chwili położenie punktu ruchomego na jego krążnej.

2° $\frac{c^2-\mu}{c^2} < 0$; połóżmy $\frac{c^2-\mu}{c^2} = -n^2$, i uważajmy że $\frac{b}{c^2}$ może być dodatne, albo odjemne, a nawet zero. Przypuszczając że $\frac{b}{c^2}$ nie jest zero, mamy równanie różniczkowe krążnej

$$(5) \qquad d\theta = \pm \frac{dz}{\sqrt{\frac{b}{c^2} + n^2 z^2}}.$$

Trzeba wziąć znak $+$ albo $-$, według jak $\frac{1}{r}$ zmienia się w tym samym sensie co θ albo w sensie przeciwnym. Zcałkujmy równanie biorąc znak $+$, będzie

$$n\theta = \mathrm{L}.\frac{nz + \sqrt{\frac{b}{c^2} + n^2 z^2}}{a};$$

stateczna a wyznaczy się przez warunek $\theta = 0$ i $z = \frac{1}{r_0}$.

Ztąd, przechodząc do liczb, otrzymujemy

$$a e^{n\theta} = nz + \sqrt{\frac{b}{c^2} + n^2 z^2};$$

ale powinno być także

$$\frac{b e^{-n\theta}}{a c^2} = \sqrt{\frac{b}{c^2} + n^2 z^2} - nz;$$

z tych dwóch równań wyprowadzamy równanie krążnej

$$(6) \qquad r = \frac{2n}{a e^{n\theta} - \frac{b}{ac^2} e^{-n\theta}}.$$

Gdyby całkowano równanie (5) biorąc znak $-$, znalezionoby drugie równanie

$$r = \frac{2n}{ae^{-n\theta} - \frac{b}{ac^2} e^{n\theta}},$$

które się wywodzi z pierwszego przez zamianę θ na $-\theta$; więc pierwsze jest ogólne.

Wartości statecznych a i b wyrażają się po prostu w funkcyi liczby n i $\operatorname{dot} i$. Jakoż, wiemy że $c = v_0 r_0 \operatorname{wst} i$, $\frac{\mu}{c^2} - 1 = n^2$; zatem

$$\frac{b}{c^2} = \frac{v_0^2}{c^2} - \frac{\mu}{c^2 r_0^2} = \frac{\operatorname{dot}^2 i - n^2}{r_0^2}, \quad a = \frac{n + \operatorname{dot} i}{r_0}.$$

Podstawiając te wartości w równaniu (6), mamy

$$(7) \qquad r = \frac{2nr_0}{(n + \operatorname{dot} i)e^{n\theta} + (n - \operatorname{dot} i)e^{-n\theta}}.$$

Widzimy łatwo że krążna jest ogólnie spiralną która ma początek spółrzędnych za punkt niemaltyczny. Możnaby, dyskutując równanie, znaleźć różne spiralne; ograniczymy się na przypadku szczególnym w którym $\operatorname{dot} i = 0$. W tem założeniu równanie krążnej bierze kształt prosty

$$(8) \qquad r = \frac{2r_0}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}},$$

i przedstawia spiralnę symetryczną względem osi biegunowej, której dwie gałęzie mają biegun spółrzędnych za punkt niemaltyczny. Dobrze jest uważać że punkt ruchomy dochodzi do tego bieguna w czasie skończonym. Aby się o tem przekonać, wyraźmy promień wodzący r w funkcyi czasu t. W tym celu, dość jest wyrugować $d\theta$ między równaniem $r^2 d\theta = c\,dt$ i równaniem (5), podstawiając w nich $c = v_0 r_0$ i $\frac{b}{c^2} = -\frac{n}{r_0^2}$; co zaraz daje

$$\frac{\mp\, r\,dr}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} = n v_0\, dt,$$

zkąd, biorąc znak —, wynika

$$\sqrt{r_0^2 - r^2} = nv_0 t \qquad \text{albo} \qquad r = \sqrt{r_0^2 - n^2 v_0^2 t^2}.$$

Nie przydaliśmy statecznej dowolnej, bo powinno być zarazem $t = 0$ i $r = r_0$.

Owoż, r maleje od r_0 aż do 0, w miarę jak t zbliża się do $\frac{r_0}{nv_0}$; więc punkt ruchomy dochodzi do bieguna na końcu tego czasu.

Zastrzegliśmy całkując równanie (5) że $\frac{b}{c^2}$ nie jest zero; zajmijmy się teraz tym szczególnym przypadkiem, który zasługuje na uwagę dlatego że równanie krążnej ma tylko jedną ilość wykładniczą i przedstawia spiralnę logarytmiczną. W samej rzeczy, przypuszczając $\frac{b}{c^2} = 0 = \frac{\mathrm{dot}^2 i - n^2}{r_0^2}$, mamy $\mathrm{dot}\, i = \pm n$, i równanie (7) staje się

$$r = r_0 e^{-n\theta} \qquad \text{albo} \qquad r = r_0 e^{n\theta}.$$

Te dwa wyniki otrzymują się wprost i ogólnie z równania różniczkowego (5) które daje odrazu

$$\frac{dz}{z} = \pm\, n d\theta,$$

zkąd

$$\mathrm{L}.\frac{1}{r} = \pm\, n\theta + \mathrm{L}\,\frac{1}{r_0}$$

albo

$$r = r_0 e^{\mp n\theta}. \tag{9}$$

Owoż, biorąc pochodnę

$$\frac{dr}{d\theta} = \mp\, n r_0 e^{\pm n\theta} = \mp\, nr,$$

znajdujemy

$$\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \mp \frac{1}{n}.$$

Ten stosunek, mający wartość stałą, dowodzi że styczna do krążnej, w każdym punkcie, czyni z promieniem wodzącym kąt stały; co jest właśnie cechującą własnością spiralnej logarytmicznej.

3° Przypuśćmy nakoniec $\frac{c^2-\mu}{c^2}=0$; równanie różniczkowe (1) staje się

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{\sqrt{b}}{c} = \frac{\operatorname{dot} i}{r_0}.$$

Ztąd wynika równanie krążnej

$$r = \frac{r_0}{1+\theta \operatorname{dot} i}. \tag{10}$$

Ta linia jest spiralną hiperboliczną.

Znając krążnę punktu ruchomego, szukajmy jeszcze ustawy ruchu na tej linii. Podstawiając wartość r w równaniu $r^2 d\theta = cdt$, mamy

$$\frac{r_0^2 d\theta}{(1+\theta \operatorname{dot} i)^2} = cdt.$$

Ztąd, całkując i wyznaczając stateczną dowolną przez warunek $t=0$, $\theta=0$, otrzymujemy

$$\frac{-r_0^2}{1+\theta \operatorname{dot} i} = ct \operatorname{dot} i - r_0^2;$$

więc ostatecznie

$$\theta = \frac{v_0 t \operatorname{wst} i}{r_0 - v_0 t \operatorname{dos} i}. \tag{11}$$

Jeśli podstawimy ostatnią wartość w formule (10), będzie

$$(12) \qquad r = r_0 - v_0 t \operatorname{dos} i.$$

Jakikolwiek jest kąt i, ostry albo rozwarty, gdy łuk θ rośnie albo maleje do $\pm\infty$, promień wodzący r maleje aż do zera; wtedy punkt ruchomy dąży do bieguna i dochodzi do niego w czasie skończonym $t = \frac{r_0}{v_0 \operatorname{dos} i}$; ten czas jest dodatny albo odjemny, według jak kąt i jest ostry albo rozwarty.

Jeśli kąt i jest prosty, wtedy $r = r_0$ i $\theta = \frac{v_0 t}{r_0}$; krążna jest kołem i ruch jednostajny. Co być powinno, ponieważ w tem przypuszczeniu siła poruszająca staje się siłą dośrodkową $m\varphi = \frac{m\mu}{r_0^3} = \frac{m v_0^2}{r_0}$.

ROZDZIAŁ VII.

ZASADA PRĘDKOŚCI PRZYSPOSOBIONYCH, ALBO TWIERDZENIE PRACY PRZYSPOSOBIONEJ.

318. Niech będzie jakikolwiek układ punktów materyalnych, poddanych działaniu sił jakichkolwiek. Przypuśćmy że każdy z tych punktów został przeniesiony, zgodnie z ustawą istnienia układu, z położenia które zajmuje na położenie nieskończenie sąsiednie jakiekolwiek; nazywa się *prędkością przysposobioną* (WIRTUALNĄ) punktu linia prosta łącząca jego pierwsze położenie z drugiem; albo lepiej, nazywa się *przemieszczeniem przysposobionem* nieskończenie małe przemieszczenie dane temu punktowi, zgodne z ustawą układu.

To przemieszczenie dlatego się nazywa przysposobionem że ma miejsce w ruchu idealnym, który się daje układowi niezależnie od sił działających i od czasu. Dla odróżnienia, oznacza się przez δ przemieszczenia przysposobione, które są niezależne od czasu, zachowując notacyę różniczkową d dla przemieszczeń rzeczywistych, wziętych w czasie dt.

Nazywa się *pracą przysposobioną* siły, praca nieskończenie mała, odpowiedająca przemieszczeniu przysposobionemu δs jej punktu przyłożenia. Ta idealna praca wyraża się przez wieloczyn $P\delta s \cos(P, \delta s)$(*), który ją odróżnia od pracy rzeczywistej $P ds \cos(P, ds)$, odpowiedającej istotnemu, nieskończenie małemu przemieszczeniu ds punktu przyłożenia siły.

Twierdzenia któreśmy dali w teoryi pracy siły stosują się oczywiście do pracy przysposobionej; dość więc będzie je wysłowić.

(*) Ten wieloczyn nazywano dawniej *momentem wirtualnym*

319. Twierdzenie. *Praca przysposobiona wynikowej sił ilukolwiek jest równa summie ich prac przysposobionych*

$$R\delta s \cos(R, \delta s) = \Sigma P\delta s \cos(P, \delta s).$$

Ztąd wynika ważny wniosek którego wprost dowiedziemy. Niech będą X, Y, Z składowe siły P, równoległe do trzech osi prostokątnych; oznaczmy przez δx, δy, δz rzuty, na tych osiach, przemieszczenia przysposobionego δs, wziętego przez punkt przyłożenia siły P; będziemy mieli oczywiście

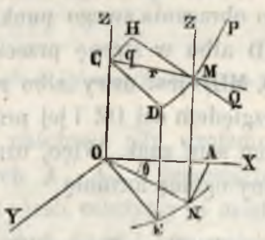
$$P\delta s \cos(P, \delta s) = P\delta s\left(\frac{X}{P}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{Y}{P}\frac{\delta y}{\delta s} + \frac{Z}{P}\frac{\delta z}{\delta s}\right);$$

więc

$$P\delta s \cos(P, \delta s) = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Formuła równie ważna jak użyteczna w Mechanice.

320. Twierdzenie. *W ruchu wirowym około osi jakiejkolwiek, praca przysposobiona siły jest równa wieloczynowi przemieszczenia kątowego przez moment siły względem tej osi.*



Niech będzie OZ oś, MP siła przyłożona do punktu materyalnego M. Wyobraźmy sobie że układowi materyalnemu, którego punkt M jest częścią, dano ruch wirowy nieskończenie mały około osi OZ; w tym ruchu przysposobionym punkt M bierze przemieszczenie $MD = \delta s$, które jest łukiem koła mającego promień $CM = r$ prostopadły do OZ, a ten promień opisuje przemieszczenie kątowe

MCD $= \delta\theta$. Aby znaleźć pracę przysposobioną siły P, rozłóżmy tę siłę na składowe prostokątne $P \operatorname{dos}\gamma = Z$ i $P \operatorname{wst}\gamma = Q$; siła Q jest rzutem siły P na płaszczyznie prostopadłej do osi OZ. Praca siły P jest równa summie prac sił składowych Z i Q; ale praca składowej Z jest zero, ponieważ ta siła jest prostopadła do przemieszczenia przysposobionego które wziął jej punkt przyłożenia; zatem, oznaczając przez $Pr.(P)$ pracę siły P, otrzymujemy

$$Pr.(P) = Q\delta s \operatorname{dos}(Q\ \delta s).$$

Jeśli teraz, ze środka C łuku koła MD spuścimy na kierunek siły Q prostopadłę $CH = q$, będzie

$$\operatorname{dos}(Q, \delta s) = \pm \operatorname{dos}(CH, CM),$$

a dotego

$$\delta s = r\delta\theta, \qquad q = r \operatorname{dos}(CH, CM);$$

więc

$$Pr.(P) = \pm Qq\delta\theta = \pm Pq \operatorname{wst}\gamma . \delta\theta.$$

Owoż, wieloczyn $Pq \operatorname{wst}\gamma$ wyraża moment siły P względem osi OZ; ten zaś moment jest dodatny albo odjemny, według jak siła P ma dążność do obracania swego punktu przyłożenia, około osi OZ, w stronę MD albo w stronę przeciwną DM (56), to jest według jak kąt (MQ, MD) jest ostry albo rozwarty. Co pokazuje że moment siły P względem osi OZ i jej praca w ruchu wirowym około tej osi, mają ten sam znak. Więc, oznaczając przez $mom.(P)$ moment siły P, mamy ogólną formułę

$$Pr.(P) = \delta\theta\, mom.(P).$$

Uwaga. Rozumując jako w numerze 246 można otrzymać odrazu formułę

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = (Yx - X\delta\theta$$

która dowodzi wysłowionego twierdzenia.

Za pomocą dwóch poprzedzających twierdzeń łatwo się dowodzi następującego, ogólnego twierdzenia momentów sił:

321. Twierdzenie. *Moment wynikowej względem osi jest równy summie momentów sił składowych.*

Niech będzie R wynikowa sił P, P′, P″... przyłożonych do układu bryłowego niezmiennego; jeśli damy temu układowi ruch wirowy przysposobiony około osi uważanej, nazywając $d\theta$ przemieszczenie kątowe, będziemy mieli

$$Pr.(\mathrm{R}) = \Sigma Pr.(\mathrm{P}),$$

albo

$$\delta\theta mom.(\mathrm{R}) = \delta\theta\Sigma mom.(\mathrm{P}).$$

zkąd wynika

$$mom.(\mathrm{R}) = \Sigma mom.(\mathrm{P}).$$

322. Szukajmy teraz czemu się równa summa prac przysposobionych dwóch sił pochodzących z działania wzajemnego dwóch punktów materyalnych A i A′. Niech będą x, y, z i x', y', z' spółrzędne prostokątne tych dwóch punktów, δs i $\delta s'$ ich przemieszczenia przysposobione; odległość $\mathrm{AA'} = r$ wyraża się przez równanie

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = r^2.$$

Jeśli nazwiemy I natężenie siły wzajemnego działania dwóch punktów materyalnych A, A′, i przypuścimy najpierwej tę siłę przyciągającą, to jest: jeśli założymy że działanie punktu A′ na A ma kierunek AA′, (od A do A′) i nawzajem działanie punktu A na A′ kierunek A′A (od A′ do A) praca rozwinięta w A będzie

$$\mathrm{I}\delta s \cos(\mathrm{AA'}, \delta s);$$

a zaś praca rozwinięta w A′ wyrazi się przez

$$\mathrm{I}\delta s' \cos(\mathrm{A'A}, \delta s') = -\mathrm{I}\delta s' \cos(\mathrm{AA'}, \delta s').$$

Zatem summa tych dwóch prac będzie

$$\mathrm{I}\left\{\delta s \operatorname{dos}(\mathrm{AA}', \delta s) - \delta s' \operatorname{dos}(\mathrm{AA}', \delta s')\right\}.$$

Owoż,

$$\operatorname{dos}(\mathrm{AA}', \delta s) = \frac{x'-x}{r}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{y'-y}{r}\frac{\delta y}{\delta s} + \frac{z'-z}{r}\frac{\delta z}{\delta s},$$

$$\operatorname{dos}(\mathrm{AA}', \delta s') = \frac{x'-x}{r}\frac{\delta x'}{\delta s'} + \frac{y'-y}{r}\frac{\delta y'}{\delta s'} + \frac{z'-z}{r}\frac{\delta z'}{\delta s'};$$

więc summa dwóch prac równa się

$$-\frac{\mathrm{I}}{r}\left\{(x'-x)(\delta x'-\delta x) + (y'-y)(\delta y'-\delta y) + (z'-z)(\delta z'-\delta z)\right\}.$$

Ale równanie odległości r zróżniczkowane daje

$$(x'-x)(\delta x'-\delta x) + (y'-y)(\delta y'-\delta y) + (z'-z)(\delta z'-\delta z) = r\delta r;$$

więc szukana summa dwóch prac przysposobionych wzajemnego przyciągania wyraża się ostatecznie przez wieloczyn

$$-\mathrm{I}\delta r.$$

Jeśli siła I jest odpychająca, summa dwóch prac przysposobionych wyrazi się przez

$$\mathrm{I}\delta r.$$

W przypadku szczególnym, gdy odległość dwóch punktów materyalnych A i A′ zostaje niezmienna w ruchu przysposobionym który się im daje, będzie $\delta r = 0$; wtedy summa dwóch prac przysposobionych, odpowiedających wzajemnemu działaniu tych punktów jest zero, albo innemi słowy, te dwie prace są równe i znaków przeciwnych.

Ustaliwszy te wstępne określenia i zasady, nietrudno dowieśdź ogólnego twierdzenia pracy przysposobionej, z którego wywodzą się warunki równowagi układów materyalnych.

TWIERDZENIE OGÓLNE PRACY PRZYSPOSOBIONEJ.

Zaczniemy od równowagi punktu materyalnego, przypominając określenie dane we wstępie niniejszego dzieła : Mówi się że punkt materyalny, albo ciało, jest w równowadze pod działaniem sił jakichkolwiek, gdy te siły nie zmieniają w niczem jego stanu *spoczynku* albo *ruchu;* wtedy mówi się także że te siły czynią sobie równowagę.

323. Twierdzenie. *Aby punkt materyalny był w równowadze, trzeba i dość jest żeby summa prac przysposobionych, wszystkich sił które są do niego przyłożone, była zero dla wszystkich przemieszczeń nieskończenie małych tego punktu.*

Jakoż, niech będzie punkt materyalny M pod działaniem sił jakichkolwiek których wynikową jest R. Jeśli ten punkt jest wolny w przestrzeni, dla jego równowagi trzeba i dość jest żeby wynikowa R była zero; a jeśli punkt M jest przymuszony zostawać na linii albo na powierzchni, dla jego równowagi dość jest żeby tylko wynikowa R była normalną do tej linii albo powierzchni, co wymaga $\mathrm{dos}(R, \delta s) = 0$. Więc w obydwóch razach istnieje równanie

$$(1) \qquad R\delta s\,\mathrm{dos}(R, \delta s) = 0,$$

które wyraża że w równowadze punktu materyalnego pod działaniem sił jakichkolwiek, summa prac przysposobionych tych wszystkich sił jest zero dla wszelkiego przemieszczenia możebnego tego punktu.

Nawzajem, gdy summa prac przysposobionych, wszystkich sił przyłożonych do punktu materyalnego M, jest zero dla wszystkich jego przemieszczeń możebnych, ten punkt jest w równowadze. Albowiem, ponieważ $R\delta s\,\mathrm{dos}(R, \delta s) = 0$, jeśli punkt M jest wolny w przestrzeni musi być $R = 0$, bo $\mathrm{dos}(R, \delta s)$ nie może być zawsze zero; a jeśli punkt M powinien zostawać na linii albo na powierzchni bez tarcia, musi być $R = 0$ albo $\mathrm{dos}(R, \delta s) = 0$; w obydwóch razach punkt M jest w równowadze. Więc równanie (1) wyraża warunek konieczny i dostateczny równowagi punktu materyalnego jakiegokolwiek, pod działaniem sił jakichkolwiek.

Trzeba dobrze uważać że z równania równowagi (1) nie wynika bynajmniej żeby punkt materyalny był w spoczynku. Gdyby siły uważane, zadość czyniące równaniu (1), działały na punkt w spoczynku, toby on pozostał w tym spoczynku. Ale nic mu nie przeszkadza, w chwili działania tych sił, mieć pewny ruch pochodzący z innych przyczyn. Wtedy możemy tylko powiedzieć że ten ruch będzie się dalej ciągnął zupełnie tak jak gdyby siły, które sobie czynią równowagę, nie istniały.

324. Twierdzenie ogólne pracy przysposobionej. *Aby układ materyalny punktów jakichkolwiek był w równowadze pod działaniem sił jakichkolwiek, trzeba i dość jest żeby summa prac przysposobionych wszystkich sił, tak zewnętrznych jak wewnętrznych, była zero dla wszelkich przemieszczeń przysposobionych, zgodnych z ustawą istnienia układu.*

Niech będą P, P′, P″... siły zewnętrzne wprost przyłożone do punktów materyalnych, tworzących układ wedle pewnej ustawy; I, I′, I″... siły wewnętrzne działające na te punkta. Mówić że układ materyalny jest w równowadze, pod działaniem sił jakichkolwiek, jest to powiedzieć że wszystkie jego punkta składowe są osobno w równowadze; i nawzajem, jeśli każdy z punktów składających układ materyalny jest w równowadze pod wpływem wszystkich sił które na niego działają, wtedy cały układ jest w równowadze. Więc, gdy układ materyalny jakiegokolwiek utworu jest w równowadze, summa prac przysposobionych wszystkich sił, tak zewnętrznych jak wewnętrznych, będzie równa zeru jakiekolwiek dano punktom przemieszczenia przysposobione, zawsze nieskończenie małe, niezależne jedne od drugich ale zgodne z ustawą istnienia układu. To wszystko wyraża się równaniem koniecznem

$$(2) \qquad \Sigma P\delta s \cos(P, \delta s) + \Sigma I\delta r = 0.$$

Summowania rozciągają się zarazem do wszystkich sił działających na punkt materyalny, i do wszystkich punktów tworzących układ materyalny.

Nawzajem, jeśli summa prac przysposobionych wszystkich sił, działających na punkta układu materyalnego, jest zero dla wszystkich przemieszczeń przysposobionych które dać można tym punktom, zgodnie z ustawą ich układu, cały układ będzie w równowadze; to jest, nie wyjdzie ze stanu spoczynku jeśli pierwotnie był w tym stanie spoczynku. Jakoż, gdyby punkta materyalne układu nie były w równowadze, każdy z nich wziąłby ruch stosowny do swego położenia w układzie; możnaby oczywiście sprzeciwić się tym ruchom, przykładając do każdego z punktów materyalnych pewną siłę przyzwoitej wielkości i w stronę przeciwną kierunku jego przemieszczenia. Wtedy cały układ materyalny byłby w równowadze, pod działaniem sił Q, Q', Q''... któreby przyłożyć trzeba było do wszystkich punktów dla wstrzymania ich ruchu, i pod działaniem sił już przyłożonych P, P', P''... i sił wewnętrznych I, I', I'',... Owoż, na mocy pierwszej części twierdzenia, summa prac przysposobionych tych wszystkich sił powinnaby być zero dla wszelkich przemieszczeń punktów układu, zgodnych z jego ustawą, a w szczególności dla przemieszczeń jakieby te punkta wzięły pod działaniem samych sił P, P', P''... i I, I', I'',... gdyby nie wstrzymano ich ruchów przykładając siły Q, Q', Q'',... Coby dało

$$\Sigma P\delta s \cos(P, \delta s) + \Sigma I\delta r + \Sigma Q\delta s \cos(Q, \delta s) = 0.$$

Ale, z założenia summa prac przysposobionych sił P, P', P''..... i I, I', I''..... jest zero dla wszystkich przemieszczeń przysposobionych punktów układu, zgodnych z jego ustawą, a w szczególności dla przemieszczeń o których mowa; więc trzebaby żeby summa $\Sigma Q\delta s \cos(Q, \delta s)$ była zero dla tych ruchów szczególnych; co niemożebne, ponieważ w ostatnich ruchach punkt przyłożenia każdej siły Q przemieszcza się w stronę przeciwną kierunku jej działania i tym sposobem prace przysposobione sił Q, Q', Q'',... są wszystkie odjemne.

Zaledwie dodać należy że twierdzenie pracy przysposobionej stosuje się nietylko do całości układu materyalnego w równowadze, ale także do jakiejkolwiek jego części uważanej osobno. Z tą jednakże główną różnicą że działania, jakich różne punkta jednej części układu doznają od wszystkich innych części tego układu, grają względem niej rolę sił zewnętrznych; gdy tymczasem w układzie materyalnym wziętym w całości te siły są wszystkie siłami wewnętrznemi.

Tak ogólne twierdzenie byłoby użyteczne w całej doniosłości, gdyby znano siły wewnętrzne; bo wtenczas można by uważać każdy z punktów materyalnych, składających ciało, jako zupełnie wolny, pod działaniem sił tak zewnętrznych jak wewnętrznych, i wyznaczyć ustawy jego równowagi i ruchu, a temsamem równowagi i ruchu ciała. Ale nie wiemy prawie nic z tego co się nazywa siłami wewnętrznemi, i wszystkie nasze wysilenia muszą dążyć jedynie do wyrugowania ich z rachunku. W takim stanie umiejętności fizycznych, zastosowanie twierdzenia pracy przysposobionej ogranicza się na przypadkach w których siły wewnętrzne nie mają udziału: to jest innemi słowy, nie znając sił wewnętrznych, musimy dawać układowi materyalnemu, którego szukamy warunków równowagi, takie tylko przemieszczenia przysposobione w jakich one nie grają roli. Owoż gdybyśmy, między przemieszczeniami przysposobionemi, które można nadawać rozmaitym punktom układu materyalnego, wybrali takie żeby wzajemne odległości wszystkich jego punktów zostawały te same, przypuszczając naprzykład że przemieszczamy układ całą sztuką, jak gdyby on był niezmienną bryłą; równanie dane przez twierdzenie pracy przysposobionej nie zawierałoby żadnego wyrazu zależnego od sił wewnętrznych, siły zewnętrzne wchodziłyby same jedne. I w samej rzeczy, wiadomo że siły wewnętrzne układu materyalnego, jakakolwiek jest ustawa ich działania, są po dwie równe i wprost przeciwne, a w przemieszczeniu szczególnem które uważamy odległość dwóch jakichkolwiek punktów materyalnych układu nie zmienia się; zatem summa prac przysposobionych każdej pary sił wewnętrznych jest zero (322); więc one znikają w ogólnem równaniu danem przez twierdzenie pracy przysposobionej; to równanie w naszem przypuszczeniu staje się

$$\Sigma P\delta s \operatorname{dos}(P, \delta s) = 0. \tag{3}$$

Więc, gdy się daje układowi materyalnemu przemieszczenia przysposobione, zgodne z jego *bryłowością,* to jest zachowujące mu kształt niezmienny, summa prac przysposobionych samych tylko sił zewnętrznych, wprost przyłożonych, jest zero.

Z tąd wynika że, jakikolwiek jest układ materyalny, ogólne równanie równowagi istnieje między siłami *zewnętrznemi* tylko, bo można zawsze dać temu układowi przemieszczenie przysposobione, zgodne z niezmiennością jego kształtu w równowądze. Ta własność sił zewnętrznych, konieczna dla istnienia równowagi, nie jest w ogóle dostateczna; byłaby nią, gdyby układ materyalny był doskonałą bryłą niezmiennego kształtu. Ale takich brył niema w naturze; wszystkie ciała ziemskie mają kształt mniej więcej zmienny; dlatego równanie (3), zawierające tylko same siły zewnętrzne, nie może wyrażać warunków dostatecznych dla ich równowagi. Trzeba raz na zawsze pamiętać że w układzie materyalnym jakimkolwiek, albo w ciałach naturalnych, siły zewnętrzne czynią sobie równowagę nie wprost, jako siły działające na jeden punkt i których wynikowa jest zero, ale za pośrednictwem sił wewnętrznych, pochodzących z fizycznego składu tych ciał. Jeśli ten skład fizyczny ciała zmienia się, równowaga może być zupełnie zerwana, chociaż siły zewnętrzne zostają te same.

RÓWNOWAGA CIAŁ BRYŁOWYCH NIEZMIENNYCH.

325. Nim przyjdziemy do ogólnych warunków równowagi układów materyalnych jakichkolwiek, będziemy uważali najpierwej ciała idealne, to jest układy materyalne których punkta ani się zbliżać do siebie ani oddalać nie mogą. Takie układy nazywamy *ciałami bryłowemi niezmiennemi*, wszystkie inne *ciałami naturalnemi.*

Zasada prędkości przysposobionych, albo, jako teraz mówią, twierdzenie pracy przysposobionej, jest jedną z najważniejszych zasad Mechaniki. Za pomocą niej można znaleźć wprost i ogólnie warunki równowagi ciał bryłowych niezmiennych, któreśmy za pomocą dwojanów otrzymali.

Niech będzie więc układ materyalny złożony z n punktów stale między sobą powiązanych; szukajmy przede wszystkiem ile bryłowość tego układu, to jest niezmienność jego kształtu, wymaga warunków. Biorąc trzy jakiekolwiek punkta układu, widzimy zaraz że niezmienność ich wzajemnych odległości wyraża się przez *trzy* równania; trzeba potem $3(n-3)$ innych równań, aby wyrazić że $n-3$ zostające punkta są w odległościach niezmiennych od trzech pierwszych punktów. Zatem związki układu materyalnego niezmiennego zależą od $3+3(n-3)=3n-6$ równań między spółrzędnemi wszystkich jego punktów. A ponieważ powinno być $3n$ równań do wyznaczenia n punktów w przestrzeni, trzeba i dość jest, dla równowagi układu tych punktów, żeby siły czyniły zadość *sześciu* oddzielnym równaniom. Te więc sześć równań, między siłami przyłożonemi, wyrażają warunki *konieczne* i *dostateczne* równowagi układu bryłowego niezmiennego, wolnego w przestrzeni. Aby je otrzymać, uważajmy że ogólne równanie dane przez twierdzenie pracy przysposobionej nie będzie zawierało sił wewnętrznych, bo układ bryłowy jest kształtu niezmiennego, co czyni $\delta r = 0$; mamy więc

$$\Sigma P \delta s \operatorname{dos}(P, \delta s) = 0.$$

Zatem, jeśli damy układowi bryłowemu niezmiennemu sześć ruchów przysposobionych, dowolnych ale niezależnych między sobą, powyższa formuła dostarczy sześciu równań oddzielnych. Tym sposobem związki, które ztąd wynikną między siłami, nie mogąc się wywodzić jedne z drugich, będą właśnie dostatecznemi równaniami równowagi. Temi zaś ruchami niezależnemi, które powinny być zgodne ze związkami układu bryłowego, są *trzy ruchy przeniesienia*, równoległe każdy do jednej z trzech osi prostokątnych, i trzy *ruchy wirowe* każdy około jednej z tych osi.

1° *Ruch przysposobiony przeniesienia.* Dając układowi bryłowemu ruch przysposobiony, równoległy do osi odciętych x, na przykład, mamy

$$\Sigma P \delta x \operatorname{dos}(P, \delta x) = 0$$

albo, znosząc czynnik δx, spólny wszystkim wyrazom summy, otrzymujemy

$$\Sigma P \operatorname{dos}(P, x) = 0.$$

Dając tak samo przemieszczenia przysposobione równoległe do osi $y^{ów}$ i potem do osi z będzie

$$\Sigma P \operatorname{dos}(P, y) = 0, \qquad \Sigma P \operatorname{dos}(P, z) = 0.$$

2° *Ruch przysposobiony wirowy.* Możemy dać układowi bryłowemu przemieszczenie kątowe $\delta\theta$ około osi $x^{ów}$ na przykład; praca przysposobiona w tym ruchu wirowym wyraża się przez

$$\Sigma\delta\theta\,\mathrm{mom}_x(\mathrm{P}) = 0$$

zkąd, znosząc czynnik $\delta\theta$, spólny wszystkim wyrazom summy, wynika

$$\Sigma\,\mathrm{mom}_x(\mathrm{P}) = 0.$$

Dając tak samo przemieszczenie przysposobione kątowe około osi $y^{ów}$ a potem około osi $z^{ów}$, będzie

$$\Sigma\,\mathrm{mom}_y.(\mathrm{P}) = 0, \qquad \Sigma\,\mathrm{mom}_z.(\mathrm{P}) = 0.$$

Te wszystkie warunki równowagi wyrażają się analitycznie przez sześć równań oddzielnych.

$$(4)\quad \begin{cases} \Sigma\mathrm{X} = 0, \qquad \Sigma\mathrm{Y} = 0, \qquad \Sigma\mathrm{Z} = 0, \\ \Sigma(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z) = 0, \quad \Sigma(\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x) = 0, \quad \Sigma(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y) = 0. \end{cases}$$

Więc, aby układ bryłowy niezmienny był w równowadze pod działaniem sił wprost przyłożonych, trzeba i dość jest :

1° *żeby summa rzutów sił na trzech osiach prostokątnych była zero na każdej osobno,*

2° *żeby summa momentów sił na każdej z tych trzech osi była także zero.*

Jeśli damy układowi bryłowemu przemieszczenia pzzysposobione różne od wyżej użytych, twierdzenie pracy przysposobionej dostarczy innych równań którym siły zewnętrzne P, P′, P″... zadość czynić powinny. Liczba tych równań jest nieograniczona; ale wszystkie muszą się wywodzić z sześciu powyższych, ponieważ, jakośmy dowiedli, te ostatnie są konieczne i dostateczne dla równowagi układu bryłowego niezmiennego. Można to łatwo sprawdzić. I tak :

Jeśli summa rzutów sił P, P', P'',... jest zero na każdej z trzech osi prostokątnych, ta summa będzie także zero na osi jakiejkolwiek K, mającej kierunek określony przez kąty α, β, γ z trzema pierwszemi osiami. Jakoż

$$P \cos(P, K) = X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma;$$

zatem, rzutując wszystkie siły P, P', P''... przyłożone do układu, mamy

$$\Sigma P \cos(P, K) = \Sigma X \cos\alpha + \Sigma Y \cos\beta + \Sigma Z \cos\gamma$$

albo

$$\Sigma P \cos(P, K) = \cos\alpha \Sigma X + \cos\beta \Sigma Y + \cos\gamma \Sigma Z.$$

Ale z założenia $\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0;$

więc

$$\Sigma P \cos(P, K) = 0.$$

Tak samo, jeśli summa momentów sił jest zero względem każdej z trzech osi spółrzędnych prostokątnych, to będzie także zero względem osi jakiejkolwiek K czyniącej kąty α, β, γ z temi trzema osiami. Jakoż, oznaczając przez G moment linijny dwojanu przeniesienia (P, — P), przez L, M, N momenta linijne składowe które wyrażają momenta siły P względem trzech osi spółrzędnych, mamy

$$\cos(G, K) = \frac{L}{G} \cos\alpha + \frac{M}{G} \cos\beta + \frac{N}{G} \cos\gamma.$$

zkąd

$$\Sigma G \cos(G, K) = \Sigma L \cos\alpha + \Sigma M \cos\beta + \Sigma N \cos\gamma.$$

A ponieważ zakładamy $\Sigma L = 0, \quad \Sigma M = 0, \quad \Sigma N = 0,$ będzie

$$\Sigma G \cos(G, K) = 0$$

Gdy więc piszemy że summa rzutów sił zewnętrznych na trzech osiach prostokątnych jest zero na każdej osobno, i summa momentów tych sił względem trzech tych samych osi jest także zero, wyrażamy temsamem że podobne summy są zero względem każdego innego trójścianu osi prostokątnych.

RÓWNOWAGA UKŁADÓW BRYŁOWYCH NIEZUPEŁNIE WOLNYCH.

326. Będziemy teraz szukali warunków równowagi układu bryłowego niezmiennego, któremu przeszkody nie pozwalają brać ruchu zupełnie wolnego w przestrzeni, i rozpatrzymy trzy główne przypadki do których się łatwo wszystkie inne przywodzą. Twierdzenie pracy przysposobionej daje jeszcze i w tych przypadkach utrudzonego ruchu wszystkie warunki równowagi.

1° *Punkt stały.* Uważajmy najpierwej układ bryłowy który może się tylko obracać około punktu stałego O, i weźmy ten punkt za początek spółrzędnych prostokątnych. Trzeba przede wszystkiem wyrazić bryłowość układu; co się uskutecznia wyrażając przez trzy równania że odległości dwóch punktów materyalnych A, A′ układu i punktu O są niezmienne, a potem przez $3(n-3)$ równań że odległości $n-2$ innych punktów od tych trzech są także niezmienne; to czyni razem $3n-3$ równań warunkowych między $3n$ spółrzędnemi punktów układu. Zostaje więc tylko do znalezienia *trzy* równania równowagi między siłami wprost przyłożonemi do tych puuktów. Twierdzenie pracy przysposobionej łatwo ich dostarcza. Ponieważ układ bryłowy którym się zajmujemy może się tylko obracać około punktu stałego O, jedyne ruchy możebne są ruchy wirowe około osi przechodzących przez ten punkt. Jeśli więc damy układowi trzy przemieszczenia przysposobione, jedno około każdej z trzech osi spółrzędnych przez punkt stały O przechodzących, otrzymamy trzy konieczne i dostateczne równania równowagi, którym siły zadość czynić powinny,

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0, \qquad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \qquad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Te równania momentów sił są nam już znane, i parcia jakie punkt stały O wytrzymuje już wiadome (63).

2° *Oś stała.* Jeśli są dane dwa punkta stałe O i H, albo, co to samo, oś stała OH około której układ bryłowy może się tylko obracać; biorąc punkt O za początek spółrzędnych prostokątnych i oś OH za oś rzędnych, wyrazi się przez dwa równania że odległość punktu materyalnego A układu od dwóch punktów O i H są niezmienne, a następnie przez $3(n-1)$ równań że odległości $n-1$ innych punktów od tych dwóch są także niezmienne. Co uczyni ze wszystkiem $3n-1$ równań warunkowych między $3n$ spółrzędnemi punktów układu. Zostaje więc do znalezienia tylko *jedno* równanie równowagi między siłami. Owoż, układ bryłowy ma tylko ruch wirowy możebny około osi OZ; dając mu przemieszczenie przysposobione tego ruchu, otrzymujemy jedyne równowanie równowagi.

$$\Sigma(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y) = 0,$$

któremu siły wprost przyłożone zadość czynić powinny.

Parcia jakie punkta stałe O i H wytrzymują, i parcie wzdłuż osi OH były już okazane na właściwem miejscu. Ale dobrze będzie jeszcze powtórzyć że parcia, doznane przez dwa punkta stałe około których układ bryłowy może się tylko obracać, przypuszczają wyraźnie i wyłącznie stan równowagi tego układu. Stan ruchu zmienia zupełne wartości statyczne parć któreśmy wskazali w numerze 64. To zjawisko nieco zadziwiające jest niezmiernie ważne w Mechanice praktycznej.

3° *Płaszczyzna stała.* Szukajmy nakoniec warunków równowagi układu bryłowego niezmiennego który się opiera na płaszczyznie stałej, i weźmy tę płaszczyznę za płaszczyznę xy a normalnę do niej za oś rzędnych OZ. Ponieważ układ opiera się na płaszczyznie xy, niema potrzeby zajmować się siłami Z, bo one powinny być zniszczone przez jej opór. Owoż, jedyne ruchy możebne danego układu są ruchy przeniesienia na płaszczyznie xy, i ruch wirowy około osi normalnej OZ; więc, otrzyma się równania konieczne i dostateczne równowagi, wyrażając że summa prac przysposobionych, względnie do sił wprost przyłożonych, jest zero dla każdego z trzech różnych przemieszczeń, to jest dla dwóch przeniesień wedle dwóch osi spółrzędnych OX, OY, i dla ruchu wirowego około osi OZ. Co daje trzy oddzielne równania równowagi,

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Parcia jakie wytrzymują punkta płaszczyzny stałej, na których się układ bryłowy opiera, są już wiadome z ich przypadkiem osobliwym (66).

UKŁAD PUNKTÓW MATERYALNYCH ZE ZWIĄZKAMI.

327. Zwykle rozmaite punkta układu materyalnego zależą jedne od drugich, są poddane pewnym warunkom które nazwano *związkami*. Te związki mogą się przywieśdź do trzech następujących :

1° Niektóre punkta układu materyalnego zostają w odległościach niezmiennych między sobą.

2° Pewne punkta są przymuszone zostawać na liniach albo na powierzchniach, bez tarcia, stosownie do tego cośmy powiedzieli w ruchu punktu materyalnego.

3° Nakoniec, pewne części układu materyalnego, uważane jako ciała bryłowe niezmienne, są przymuszone zostawać w zetknięciu jedne z drugiemi, bez żadnego tarcia między ich powierzchniami.

Pojmuje się łatwo że te różne związki, które wyobrażamy między punktami materyalnemi układu, mogą być zastąpione przez siły zdolne dopełnić tych samych warunków. I tak, gdy dwa punkta mają zostawać w tej samej odległości od siebie, siły równe i przeciwne, rozwinięte między temi dwoma punktami, z natężeniem przyzwoitem, mogą utrzymać tę niezmienność odległości. W przypadku gdy jeden punkt musi zostawać na linii stałej albo na powierzchni stałej, bez tarcia, albo opisywać linię albo powierzchnię za pomocą wiązadła, siła równa oddziaływaniu normalnemu linii albo powierzchni na punkt, albo równa tężności wiązadła może wydać ten sam skutek. W przypadku gdy dwie części układu materyalnego, uważane jako bryłowe niezmienne, muszą być z sobą w zetknięciu bez tarcia między ich powierzchniami, można otrzymać ten sam wynik przez dwie siły równe i przeciwne, działające na te dwie części w punktach ich zetknięcia i wedle spólnej normalnej do ich powierzchni; te dwie siły powinny działać jako siły przyciągające albo odpychające, według jak części bryłowe w zetknięciu mają dążność do oddalenia się jedna od drugiej albo do przeniknienia się na wzajem.

Wprowadzając siły zamiast związków, przywodzimy układ materyalny do ogólnego przypadku dla którego twierdzenie pracy przysposobionej było dowiedzione. Owoż, na mocy tego twierdzenia, aby układ materyalny był w równowadze, trzeba i dość jest żeby summa prac wszystkich sił przyłożonych, włącznie z siłami które zastępują związki, była zero jakiekolwiek dano przemieszczenie przysposobione układowi. Ale, jeśli między przemieszczeniami przysposobionemi możebnemi, wybrano wyłącznie te które są *zgodne ze związkami* układu materyalnego, siły zastępujące te związki znikną same z siebie w równaniach których twierdzenie pracy przysposobionej dostarcza. I w samej rzeczy, uważając najpierwej dwie siły mogące utrzymać niezmienność odległości dwóch punktów materyalnych układu, widzimy zaraz że summa ich prac przysposobionych, $I\delta r$, jest zero dla wszelkiego przemieszczenia w którem odległość tych dwóch punktów zostaje ta sama. Powtóre, uważając siłę która nie pozwala punktowi materyalnemu opuszczać linii stałej albo powierzchni stałej, widzimy nie mniej łatwo że praca tej siły, odpowiedająca przemieszczeniu przysposobionemu punktu materyalnego na tej linii albo powierzchni, jest zero, ponieważ to przemieszczenie jest normalne do kierunku siły. Nakoniec, uważajmy dwie siły mogące trzymać w zetknięciu i bez tarcia powierzchnie B i B′ dwóch części układu materyalnego wziętych za bryły nie-

zmienne. Summa prac tych dwóch sił jest zero dla wszelkiego przemieszczenia przysposobionego w którem te dwie powierzchnie nie przestają się stykać. Albowiem, punkta dwóch powierzchni B i B′, pierwotnie schodzące się w A, biorą w przemieszczeniu przysposobionem układu położenia A_1 i A'_1, będące na płasczyźnie stycznej, spólnej tym powierzchniom po ich przemieszczeniu; ta zaś płasczyzna styczna czyni kąt nieskończenie mały z płasczyzną styczną spólną w A; ztąd wynika że przemieszczenia AA_1, AA'_1 punktów przyłożenia dwóch sił, utrzymujących w zetknięciu powierzchnie B, B', mają ten sam rzut na spólnym kierunku NN' sił, ponieważ NN' jest normalną spólną tym powierzchniom w A; zatem summa prac przysposobionych tych dwóch sił równych i przeciwnych jest zero dla podobnego przemieszczenia. Możemy więc, odsuwając na bok siły zastępujące związki, i uważając same tylko siły wprost przyłożone P, P', P''..... powiedzieć że, *aby układ materyalny, punktów powiązanych między sobą sposobem jakimkolwiek, był w równowadze, trzeba i dość jest żeby summa prac przysposobionych, sił wprost przyłożonych do tych punktów, była zero dla każdego przemieszczenia przysposobionego*, ZGODNEGO ZE ZWIĄZKAMI.

Układ bryłowy niezmienny jest szczególnym przypadkiem układów materyalnych ze związkami; co sprawdza wyżej otrzymane warunki jego równowagi.

328. Twierdzenie pracy przysposobionej daje metodę znalezienia warunków równowagi układu materyalnego punktów ze związkami, gdy wszystkie związki są wyrażone przez równania między spółrzędnemi tych punktów. Oznaczmy przez k liczbę równań związkowych, przez n liczbę punktów materyalnych układu. Jest zawsze $k < 3n$; gdyby było $k = 3n$, każdy z tych punktów miałby położenie wyznaczone, i cały układ materyalny byłby w spoczynku, jakiebykolwiek do niego przyłożono siły. Gdy $k = 3n - 1$, mówi się że układ materyalny jest ze *związkami zupełnemi;* wtedy jedna tylko spółrzędna jest zmienną niezależną a wszystkie inne jej funkcyami. W tym przypadku, każdy punkt układu musi opisywać linię krzywą wyznaczoną, i jedyne przemieszczenia, zgodne ze związkami, są przemieszczenia wzdłuż tych linij, możebne na dwie strony przeciwne. Układ bryłowy niezmienny, mogący się tylko obracać około osi stałej, jest układem materyalnym ze związkami niezmiennemi.

Niech będą $x, y, z, x', y', z', \ldots$ spółrzędne punktów materyalnych A, A'... układu; związki będą warunkami wyrażonemi przez równania kształtu

$$L(x, y, z, x', y', z', x''...) = 0.$$

Oznaczmy przez $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y', \delta z',$... zmienności odpowiedające pewnemu przemieszczeniu przysposobionemu punktów układu; to przemieszczenie będzie zgodne ze związkiem $L(x, y, z, x'...) = 0$, jeśli sprawdza równanie

$$L(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, x'+\delta x', y'+\delta y', z'+\delta z', x''+\delta x'',...) = 0,$$

albo, na mocy poprzedzającego, równanie różniczkowe

$$\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta + \frac{dL}{dx'}\delta x' + ... = 0.$$

Jest tu ważna uwaga do zrobienia. Przemieszczenia przysposobione mogą się niezgadzać z przemieszczeniami rzeczywistemi; to się zdarza gdy równanie związkowe zawiera czas t wydatnie. Jakoż, w przemieszczeniu rzeczywistem, nazywając dx, dy, dz, dx'... zmienności spółrzędnych x, y, z, x'... i przypuszczając że równanie związkowe $L = 0$ zawiera czas t wydatnie, będzie na końcu czasu dt

$$\frac{dL}{dt}dt + \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \frac{dL}{dx'}dx' + ... = 0;$$

gdy przeciwnie, w przemieszczeniu przysposobionem, które jest niezależne od czasu, będzie tylko

$$\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx}dx' + ... = 0;$$

więc nie można brać $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$,... tylko wtedy kiedy $\frac{dL}{dt} = 0$, to jest kiedy związki nie zawierają wydatnie czasu t.

To ustaliwszy, szukajmy warunków równowagi układu materyalnego w którym związki między punktami są wyrażone przez k równań

$$(5)\qquad L_1(x, y, z, x', \ldots) = 0, \quad L_2(x, y, z, x' \ldots) = 0, \quad \ldots \quad L_k(x, y, z, x' \ldots) = 0.$$

Mamy równanie pracy przysposobionej

$$(6)\qquad \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0;$$

a ponieważ w przemieszczeniu przysposobionem, nieskończenie małem i zgodnem ze związkami układu, spółrzędne $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, $x' + \delta x'$,... punktów powinny zadość czynić równaniom związkowym, mamy także k równań różniczkowych

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{dL_1}{dx}\delta x + \frac{dL_1}{dy}\delta y + \frac{dL_1}{dz}\delta z + \frac{dL_1}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ &\frac{dL_2}{dx}\delta x + \frac{dL_2}{dy}\delta y + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dL_k}{dx}\delta x + \frac{dL_k}{dy}\delta y + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

Te k równań zawierają $3n$ zmienności $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x'$... z których $3n - k$ są zmiennościami dowolnemi, a wszystkie inne ich funkcyami; jeśli więc poniesiemy wartości tych ostatnich do równania (6), to ono będzie zawierało $3n - k$ wyrazów pomnożonych każdy przez jedną z tych zmienności dowolnych. Ale równanie (6) powinno się sprawdzać jakiekolwiek wzięto przemieszczenia przysposobione, byle zgodne ze związkami (5); muszą więc wszystkie $3n - k$ spółczynniki zmienności dowolnych być zero. Co daje $3n - k$ równań równowagi układu materyalnego. Te $3n - k$ równań, dołączone do k równań (5), uczynią $3n$ równań dostatecznych do wyznaczenia $3n$ spółrzędnych punktów układu, gdy X, Y, Z, X'... będą wiadome.

Można wykonać rugowanie zmienności $\delta x, \delta y, \delta z$,... tak zwaną *metodą mnożników*. W tym celu, pomnóżmy pierwsze równanie (7) przez λ_1, drugie przez λ_2,... i dodajmy te równania do (6), będzie

$$(8)\qquad \sum \left\{ \left(X + \lambda_1 \frac{dL_1}{dx} + \lambda_2 \frac{dL_2}{dx} + \dots \frac{dL_k}{dx} \right) \delta x + \dots \right\} = 0.$$

Mnożniki λ w liczbie k są niewyznaczone, można więc zrównać do zera k spółczynników zmienności δx, δy, δz,... zostanie tym sposobem $3n - k$ zmienności w formule (6); ponieważ one są zupełnie dowolne, ich spółczynniki muszą być zero. Otrzymuje się więc $3n$ równań następujących

$$(9)\qquad \left\{ \begin{array}{l} X + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{dx} + \lambda_3 \dfrac{dL_3}{dx} + \dots = 0, \\ Y + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dy} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{dy} + \dots\dots\dots\dots = 0, \\ Z + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dz} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{dz} + \dots\dots\dots\dots = 0, \\ X' + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx'} + \lambda_2 \dfrac{dL_2}{dx'} + \dots\dots\dots\dots = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

jeśli wyrugujemy między niemi mnożniki λ_1, λ_2, λ_3,... znajdziemy $3n - k$ równań równowagi wyżej otrzymanych.

Równania (9) prowadzą do ważnych następstw. Patrząc na kształt tych równań, łatwo spostrzegamy że one zostaną te same, i równowaga obecnie istniejąca w niczem się nie zmieni, jeśli odejmiemy warunek wyrażony przez $L_1 = 0$, któremu układ materyalny zadość czynić powinien we wszystkich przemieszczeniach przysposobionych; byleśmy tylko do sił P, P', P'',... przyłożonych do punktów materyalnych A, A', A'',... układu, dołączyli nowe siły których składowe równoległe do trzech osi spółrzędnych są:

$$\lambda_1 \frac{dL_1}{dx},\quad \lambda_1 \frac{dL_1}{dy},\quad \lambda_1 \frac{dL_1}{dz}\qquad \text{dla punktu A},$$

$$\lambda_1 \frac{dL_1}{dx'},\quad \lambda_1 \frac{dL_1}{dy'},\quad \lambda_1 \frac{dL_1}{dz'}\qquad \text{dla punktu A'},$$

. . . .

Natężenie siły przyłożonej do punktu A ma za miarę

$$\lambda_1 \sqrt{\left(\frac{dL_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL_1}{dz}\right)^2}.$$

Dostawy kątów jakie ta siła czyni z trzema osiami spółrzędnemi są proporcyonalne do $\frac{dL_1}{dx}$, $\frac{dL_1}{dy}$, $\frac{dL_1}{dz}$; to pokazuje że ona jest normalna do powierzchni którą przedstawia równanie związkowe $L_1 = 0$, gdy w niem spółrzędne x, y, z są uważane jako zmienne same jedne.

Można tak samo, zamiast związków $L_2 = 0$, $L_3 = 0, \ldots$ podstawić siły, przyzwoitej wielkości i kierunków, przyłożone do wszystkich punktów układu materyalnego. Te siły mogące zastępować związki między punktami układu, i dlatego nazwane *siłami związkowemi*, wyrażają parcia i tężności wiązadeł.

RÓWNOWARTOŚĆ DWÓCH UKŁADÓW SIŁ.

329. Mówi się że dwa układy sił S i S_1 są *równowarte*, gdy każdy z nich, uważany jako przyłożony do tego samego ciała bryłowego niezmiennego, może być trzymany w równowadze przez trzeci układ S_2. Wynika z tego określenia że prace przysposobione dwóch równowartych układów sił są równe dla wszelkiego przemieszczenia.

Oznaczmy przez X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 rzuty sił S, S_1, S_2, na trzech osiach prostokątnych, przez L, M, N, L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2 summy momentów sił względem tych samych osi.

Na mocy ogólnych warunków równowagi, aby dwa układy sił S i S_2, przyłożone do jednego ciała bryłowego niezmiennego, czyniły sobie równowagę, trzeba i dość jest żeby sprawdzały następujące sześć równań równowagi :

$$\Sigma X + \Sigma X_2 = 0, \quad \Sigma Y + \Sigma Y_2 = 0, \quad \Sigma Z + \Sigma Z_2 = 0,$$

$$L + L_2 = 0, \quad M + M_2 = 0, \quad N + N_2 = 0.$$

Aby potem dwa układy sił S_1 i S_2, przyłożone do tego samego ciała bryłowego, czyniły sobie równowagę, trzeba i dość jest żeby także sprawdzały sześć równań równowagi

$$\Sigma X_1 + \Sigma X_2 = 0, \quad \Sigma Y_1 + \Sigma Y_2 = 0, \quad \Sigma Z_1 + \Sigma Z_2 = 0,$$

$$L_1 + L_2 = 0, \quad M_1 + M_2 = 0, \quad N_1 + N_2 = 0.$$

Ztąd wynika

$$\Sigma X = \Sigma X_1, \quad \Sigma Y = \Sigma Y_1, \quad \Sigma Z = \Sigma Z_1,$$

$$L = L_1, \quad M = M_1, \quad N = N_1.$$

Więc, dla równowartości dwóch układów sił S i S_1, trzeba dość jest: 1° żeby summy rzutów tych sił na trzech osiach prostokątnych były sobie równe na każdej; 2° żeby summy momentów sił względem każdej z trzech osi prostokątnych były także sobie równe.

Ostatnie równania znaczą że dwa układy sił równowartych, przeniesione (równolegle) do jednego jakiegokolwiek punktu przestrzeni, powinny mieć tę samą wynikowę przeniesienia i ten sam dwojan wynikowy.

W ogólności ruch ciała zmienia się przez podstawienie układu równowartego sił na miejsce pierwszego. Gdy ciało jest bryłowe niezmienne, równowaga, jeśli istnieje, pozostanie; ale, gdy ciało bryłowe jest odkształcalne, ta równowaga będzie zerwana, z przyczyny sił wewnętrznych za pomocą których siły zewnętrzne czyniły sobie równowagę; ze zmianą ostatnich zmienia się stan pierwszych. Jednakże we wszystkich przypadkach ogólne sześć równań równowagi będą zawsze sprawdzone, gdy na miejsce jednego układu sił zostanie podstawiony drugi układ równowarty.

Najprostszy z układów sił równowartych jest układ sił przyłożonych do jednego punktu materyalnego i ich wynikowa. Równowartość wynika z dwóch dobrze znanych twierdzeń: 1° Rzut wynikowej na osi jakiejkolwiek jest równy summie rzutów sił składowych.

2° Moment wynikowej względem osi jakiejkolwiek jest równy summie momentów sił składowych.

Mamy także siłę równowartą danej sile P, przyłożonej do punktu A ciała bryłowego, przenosząc tę siłę do punktu jakiegokolwiek jej kierunku; ponieważ to przeniesienie siły nie zmienia ani jej rzutu na osi jakiejkolwiek ani jej momentu względem tej osi. Jeśli siła jest przyłożona do jednego z punktów ciała bryłowego w równowadze, można, nie zmieniając równowagi, przyłożyć tę siłę do innego jakiegokolwiek punktu jej kierunku, byle ten drugi punkt był niezmiennie połączony z pierwszym. Ale, tem przeniesieniem siły skład wewnętrzny ciała będzie przynajmnjej w części zmieniony, bo w nowym stanie rzeczy nastąpi ciąganie punktów materyalnych leżących w kierunku siły.

Widzimy więc że, mając jakąkolwiek liczbę sił przyłożonych do ciała bryłowego w równowadze, można oczywiście w sześciu równaniach równowagi zastąpić te siły przez układ sił równowartych; to podstawienie, nie psując równań, zmieni w ogóle równowagę ciała a przynajmniej jego skład wewnętrzny; chyba że ciało jest doskonale bryłowe, rozumie się idealnie, wtedy podstawienie sił równowartych nie naruszy w niczem istniejącej równowagi.

Następujące przykłady lepiej to wyjaśnią. Gdy siły przyłożone do ciała bryłowego mają wynikowę, mówi się wtedy że istnieje jedyna siła zdolna wydać ten sam skutek jaki sprawiają wszystkie razem siły przyłożone. Ale, aby ta prawda Mechaniki rozumowej dała się zastosować w rzeczywistości, trzeba żeby na kierunku wynikowej znajdował się punkt ciała, albo punkt niezmiennie z ciałem połączony, do któregoby można było przyłożyć tę wynikowę. Siły działające na dane ciało mają punkta przyłożenia rzeczywiste, a ich wynikowa jest siłą idealną, prostem zmyśleniem; dlatego właśnie nic nie przeszkadza powiedzieć że jakikolwiek punkt kierunku wynikowej może być wzięty za punkt jej przyłożenia. Cokolwiek bądź, ta wynikowa idealna jest zawsze siłą równowartą która może, w pewnych przypadkach, zastępować siły rzeczywiście przyłożone.

330. To pojąwszy, nietrudno znaleźć równania równowagi w szczególnych przypadkach sił.

1° SIŁY ZBIEGAJĄCE SIĘ. W tym przypadku mamy twierdzenie oczywiste :

Jeśli wszystkie siły przyłożone do ciała bryłowego zbiegają się w jednym punkcie, trzeba i dość jest dla równowagi żeby ich wynikowa była zero ;

z którego wynikają zaraz *trzy* konieczne i dostateczne równania równowagi. Jakoż, odnosząc cały układ do punktu zbiegu sił wziętego za początek spółrzędnych, widzimy że równania momentów sprawdzają się same z siebie; zostają więc tylko równania rzutów

$$\Sigma X = 0 \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0.$$

2° SIŁY LEŻĄCE NA JEDNEJ PŁASCZYZNIE. Jeśli weźmiemy płaszczyznę sił za płaszczyznę xy, i na niej dwie osie prostokątne jakiekolwiek, równania

$$\Sigma Z = 0, \qquad \Sigma(Zy - Yz) = 0, \qquad \Sigma(Xz - Zy) = 0,$$

sprawdzą się same z siebie. Więc jedyne równania równowagi w tym przypadku są :

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad N = \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

3° SIŁY RÓWNOLEGŁE. Weźmy oś rzędnych z równoległą do spólnego kierunku sił. Równania

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma(Yx - Xy) = 0$$

sprawdzają się same z siebie; zatem równania równowagi są

$$\Sigma Z = 0, \qquad L = 0, \qquad M = 0,$$

albo

$$\Sigma P = 0, \qquad \Sigma Py = 0, \qquad \Sigma Px = 0.$$

Więc, aby siły równoległe, przyłożone do ciała bryłowego niezmiennego, czyniły sobie równowagę, trzeba i dość jest żeby snmma algebryczna tych sił była zero, i żeby summy ich momentów względem każdej z dwóch płaszczyzn, przecinających się równolegle do kierunku sił, była także zero. Tym sposobem sprawdzają się już wiadome warunki.

331. Powyższe sześć równań równowagi, wywiedzione wprost z twierdzenia pracy przysposobionej, są ogólne; możemy więc za pomocą nich dowieśdź z całą ścisłością twierdzeń których udowodnienie przedstawia pewne trudności, i temsamem zostawia zawsze do życzenia. Weźmy naprzykład twierdzenie.

Dwie siły nie mogą być w równowadze jeśli nie są równe i wprost przeciwne.

Dla równowagi sił, trzeba najpierwej żeby summa ich rzutów na osi jakiejkolwiek była zero; zatem dwie siły w równowadze powinny być równe i działać w kierunkach przeciwnych. Trzeba powtóre żeby summa momentów tych sił względem osi jakiejkolwiek była zero; zatem dwie rzeczone siły równe muszą być wprost przeciwne. Co dowodzi wysłowionego twierdzenia.

Wzajemnica nie zawsze prawdziwa. Albowiem, jeśli dwie siły równe i wprost przeciwne są przyłożone do jednego punktu, to oczywiście niszczą się między sobą; a jeśli są przyłożone do ciała bryłowego niezmiennego, to sobie czynią równowagę za pośrednictwem tego ciała; ale, jeśli są przyłożone do ciała bryłowego odkształcalnego, to się ani niszczą ani są w równowadze, i wpływają na kształt tego ciała.

Drugie twierdzenie, którego ściśle dowieśdź należy, jest następujące

Dwojan nie ma wynikowej.

Mówić że dwie siły P i — P stanowiące dwojan mają wynikowę R, jest to samo co mówić że są w równowadze z siłą R′ równą i wprost przeciwną tej wynikowej. Owóż, jeśli siły P, — P, R′ są w równowadze, summa ich rzutów na osi jakiejkolwiek jest zero; ale summa rzutów sił P i — P jest już zero, więc rzut siły R′ musi być zero. Co wymaga żeby siła R′ i temsamem R była zero.

Więc dwojan (P, — P) nie ma wynikowej; a na mocy poprzedzającego twierdzenia nie może być w równowadze.

Nic dziwnego że dwie siły, nieprzyłożone do tego samego punktu, nie mogą być zastąpione przez siłę jedyną, działającą na pewny punkt. Co powinno zadziwiać to właśnie to że siły w liczbie jakiejkolwiek, przyłożone do punktów niezmiennie między sobą powiązanych, mogą się zawsze sprowadzić do jednej siły albo do dwóch najwięcej.

Wyłożyliśmy już na właściwem miejscu ogólną teoryę dwojanów, nie potrzebujemy jej powtarzać; dodamy tylko kilka słów objaśniających ten ważny przedmiot.

Zobaczmy jak dwojany figurują w sześciu ogólnych równaniach równowagi.

Widzimy najpierwej że dwojany znikają zupełnie w trzech równaniach rzutów; bo oczywiście rzut sił dwojanu na osi jakiejkolwiek jest zero.

Co do momentów sił względem trzech osi prostokątnych, te momenta, jakośmy okazali w numerze 56, są właśnie momentami linijnemi dwojanów składowych względnie do tych osi. Teorya dwojanów jest poprostu teoryą momentów sił, która niejako ożywia tę część Mechaniki. Owoż, wiedząc że wieloczyn Pp znaczy moment linijny dwojanu, a rzut tego memenlu na osi OZ, naprzykład, wyrażony przez P$p$dosν jest to samo co moment siły P względem tej osi wyrażony przez P$q$wstγ, pojmujemy łatwo że summa momentów sił względem osi wyraża summę rzutów dwojanów na tej osi; więc dwojany wchodzą do ogólnych równań równowagi takim samym sposobem jakim wchodzą siły, to jest przez rzuty na trzech osiach prostokątnych. Ztąd wynika już wiadome ale jeszcze więcej zogólnione twierdzenie:

Można zawsze przenieść dwojan na jego płaszczyznie, albo na płaszczyznie równoległej, i obrócić go na tych płaszczyznach, a nawet zmienić siłę i ramie dźwigni; byle tylko nie zmieniono momentu ani strony obrotu, skutek działania dwojanu zostanie ten sam.

Przez działania dwojanu trzeba zawsze rozumieć niezależne działanie jego sił na ciało do którego są przyłożone. Owoż, jakikolwiek est skutek tych dwóch działań, których żadną pojedyńczą siłą zastąpić nie można, jeśli ogólne sześć równań równowagi sprawdzają się z pierwszym dwojanem, to się jeszcze sprawdzą z drugim; albowiem dwojan wchodzi tylko do tych równań przez wieloczyn Pp który przypuszczamy stały, i przez kierunek swojej płaszczyzny który przpuszczamy także niezmienny.

RÓWNOWAGA CIAŁ BRYŁOWYCH CIĘŻKICH.

332. PRACA POCHODZĄCA Z CIĘŻKOŚCI. Jakikolwiek jest układ materyalny ciężki, czy jego cząsteczki składowe są w spoczynku czy też w ruchu jedne względem drugich, jeśli, biorąc go taki jaki istnieje w danej chwili, przypuścimy że stał się niezmiennym co do kształtu, ten układ, przekształcony idealnie na bryłowy niezmienny, będzie miał środek ciężkości w chwili uważanej. Oczywiście tak określony środek ciężkości nie jest punktem przyłożenia wynikowej działań ciężkości na wszystkie cząstki układu; bo nie można składać sił które działają na te cząstki osobne i mogące się poruszać niezależnie jedne od drugich; ale, uważając tego rodzaju środek ciężkości, uprości się wyrażenie pracy wydanej przez ciężkość.

Niech będzie p ciężar cząsteczki jakiejkolwiek układu materyalnego, z jej odległość od płasczyzny poziomej, wziętej za płasczyznę xy na początku czasu w którym chcemy obrachować pracę; niech będzie tak samo P ciężar całego układu materyalnego, i z_1 rzędna jego środka ciężkości. Praca odpowiedająca ciężkości wyraża się przez

$$\Sigma pdz.$$

Owoż, własność środka ciężkości układu materyalnego, uważanego jako bryłowy niezmienny, daje

$$\Sigma pz = \mathrm{P}z_1\,;$$

zkąd, różniczkując, wynika

$$\Sigma pdz = \mathrm{P}dz_1.$$

Więc praca pochodząca z działania ciężkości na układ materyalny, przez czas dt, jest równa pracy którąby rozwinęła, w tym samym czasie, siła równa ciężarowi P układu i przyłożona do jego środka ciężkości.

333. Równowaga względna ciał na ziemi. Wszystko co powiedziano o równowadze względnej punktu materyalnego, stosuje się oczywiście do równowagi jakiegokolwiek układu punktów materyalnych. Ta równowaga przywodzi się do równowagi samoistej, jeśli do sił, rzeczywiście przyłożonych do różnych punktów, zostaną przydane siły pozorne odpowiedające tym punktom. Zatem, stosując do wszystkich sił razem, tak rzeczywistych jak pozornych, twierdzenie pracy przysposobionej, otrzyma się równania którym te siły zadość czynić powinny żeby układ materyalny był w równowadze względnej, to jest nie wychodził ze stanu spoczynku względnego, jeśli się w nim pierwotnie znajduje.

Owoż, w równowadze względnej punktu materyalnego, z dwóch sił pozornych zostaje tylko siła bezwładności odpowiedająca jego rzeczywistemu ruchowi uniesienia; siła odśrodkowa składana jest zero, bo $v'' = 0$. Jeśli zatem, między siłami istotnie działającemi na punkt materyalny, będziemy uważali same tylko przyciągania których on doznaje od mass ziemi, słońca i księżyca, i złożymy je z rzeczoną siłą bezwładności, otrzymamy wynikowę która będzie właśnie ciężarem punktu materyalnego, a jej kierunek będzie kierunkiem pionowej odpowiedającej położeniu tego punktu. Więc, aby przyrównać stan spoczynku ciała na ziemi do równowagi samoistej, dość jest uważać ciężar każdego z jego punktów materyalnych jak gdyby to była siła rzeczywiście do niego przyłożona wedle pionowej miejsca, i wyrazić że ten ciężar zarazem z innemi siłami rzeczywistemi, prócz przyciągań już wchodzących do ciężaru, tworzy układ sił które zadość czynią równaniom równowagi, danym przez twierdzenie pracy przysposobionej. Chcąc zaś wyznaczyć wielkość i kierunek ciężaru każdej cząstki ciała, a temsamem ciężar całego ciała uważanego jako bryła niezmienna, niema potrzeby wykonywać składania sił które go tworzą; doświadczenie daje wprost wielkość i kierunek ciężaru ciał na powierzchni ziemi. Ten ciężar ciał ziemskich i kierunek pionowej miejsca, jako już wiemy (291), zmieniają się okresowo w każdej dnia godzinie. Ztąd wynika że równowaga ciał na ziemi ciągle się zmieniać musi. Ale te zmiany są tak małe że dostrzedz ich skutków prawie nie można, a tylko w bardzo rzadkich przypadkach oceniać je wypada; dlatego uważa się zwykle ciężary cząstek ciał leżących na ziemi jako siły stałe z wielkości i z kierunku.

334. Równowaga ciał ciężkich mających związki. Uważajmy układ materyalny, mający związki takie jakieśmy określili w numerze 327, i poddany działaniu samej ciężkości. Aby podobny układ materyalny był w równowadze, trzeba i dość jest żeby summa prac przysposobionych, wykonanych przez ciężary cząstek układu, była zero dla wszelkiego przemieszczenia przysposobionego zgodnego ze związkami. Co daje

$$\Sigma p\delta z = P\delta z_1 = 0;$$

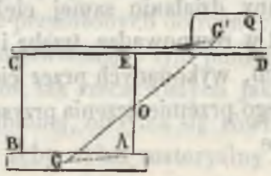
więc powinno być

$$\delta z_1 = 0.$$

Ztąd ogólne twierdzenie : *Aby układ materyalny ciężki, ze związkami, był w równowadze, trzeba i dość jest żeby, dla wszelkiego ruchu zgodnego ze związkami, środek ciężkości zostawał na płaszczyznie pionowej.*

Wynika z istniejących związków układu materyalnego ciężkiego, że środek ciężkości może się tylko poruszać na pewnej linii albo na powierzchni; więc ten układ będzie w równowadze, gdy środek ciężkości weźmie położenie najniższe albo najwyższe możebne, to jest gdy zajmie punkt w którym styczna do przebieganej linii, albo płaszczyzna styczna do przebieganej powierzchni, jest pozioma, a temsamem gdy ta powierzchnia jest płaszczyzną poziomą. W pierwszym przypadku (położenie najniższe), mówi się że *równowaga* jest *stała*, bo układ nieco oddalony od położenia równowagi wraca do niego, oscyllując jako wahadło; w drugim przypadku (położenie najwyższe) *równowaga* jest *niestała*, bo układ jakkolwiek mało oddalony od położenia równowagi nie wraca już do niego, oddalając się coraz więcej. Nakoniec, gdy środek ciężkości porusza się na płaszczyznie poziomej, układ jest w równowadze we wszystkich położeniach, i dla tej przyczyny mówi się że równowaga jest *obojętna*. Równowaga jest jeszcze obojętna gdy środek ciężkości zostaje zawsze w tym samym punkcie przestrzeni, jakiekolwiek dano przemieszczenia różnym częściom układu.

335. Mosty zwodzone jako przykład równowagi obojętnej. Pomost AB mostu zwodzonego jest ruchomy około osi pionowej A;



dwa łańcuchy BC, łączące dwa boki mostu z krańcami dwóch belek równoległych, tworzą ramy ruchome około osi poziomej E; ciężar Q, utrzymany przez te belki służy do równoważenia pomostu. Wzięto długość EC = AB, i dano łańcuchom długość BC = AE. Tak utworzona figura ABCE jest równoległobokiem, we wszystkich położeniach które można dać układowi, obracając związane belki około osi E i pomost około osi A, a łańcuchy nie przestają być wytężone. W tym ruchu, kąt pod którym pomost obraca się około osi A jest równy kątowi pod którym belki obracają się, w tym samym czasie, około osi E. Niech będzie G środek ciężkości pomostu, G′ środek ciężkości wiązania dwóch belek i ciężaru Q który na niem jest położony. Wyznaczono ten ciężar Q i jego położenie na wiązaniu tak żeby linia EG′ była równoległa do GA. Łatwo się pojmuje że można wszystko urządzić w sposób żeby środek ciężkości całego układu znajdował się zawsze w punkcie O leżącym na prostej AE.

Wynika ztąd że most zwodzony, zbudowany jakośmy powiedzieli, zostaje w równowadze obojętnej we wszystkich położeniach które mu dać można, obracając związane belki około osi E.

Zamiast przyczepiać łańcuchy, które utrzymują pomost, do belek zaopatrzonych przyzwoitym ciężarem, zwykle przeprowadza się te łańcuchy przez krążki umieszczone ponad pomostem, przywieszając do ich skrajności ciężarki trzymające w równowadze ciężar pomostu. Można jeszcze zmusić te ciężarki do ślizgania się po liniach krzy-

wych stałych, aby tężność każdego łańcucha zmieniała się w miarę jak pomost jest mniej albo więcej wzniesiony. Jeśli wyznaczono te krzywe stałe tak, żeby środek ciężkości całego składu pomostu, łańcuchów i ciężarków zostawał zawsze na jednej płasczyznie poziomej, most zwodzony będzie w równowadze obojętnej we wszystkich położeniach możebnych.

Most zwodzony jednego i drugiego rodzaju nie wchodzi zupełnie do przypadku układów materyalnych mających związki któreśmy uważali. Oś pomostu i oś związanych belek doznają tarcia, a ciężarki ślizgają się także z pewnem tarciem wzdłuż linij stałych na których zostawać muszą. Ale można, w budowie mostów zwodzonych, nie zważać na te wszystkie tarcia, i rozumować jak gdyby ich nie było. Albowiem, jeśli urządzono most zwodzony sposobem żeby zostawał w równowadze obojętnej we wszystkich położeniach które brać powinien, w przypadku w którymby nie było tarcia w żadnej jego części, to oczywiście zostanie tem bardziej w równowadze w każdem z tych położeń, gdy się do nich różne tarcia przyłączą.

336. Zakończymy roździał kilkoma słowami o równowadze ciał ciężkich stojących na płasczyznie poziomej, i poddanych siłom które je wywrócić mogą.

Trzy są warunki równowagi tych ciał :

Pierwszy : żeby ciało nie mogło się ślizgać. Zwykle temu warunkowi staje się zadość. Mur nie ma w ogóle dążności do ślizgania się na gruncie na którym go postawiono; chyba że grunt jest śliski, jakoby mydlany; co się rzadko zdarza.

Drugi warunek : żeby ciało nie mogło być wywrócone około jednej ze swoich krawędzi. Dla dopełnienia tego warunku, trzeba żeby pionowa GO środka ciężkości padała wewnątrz wielokąta wypukłego ABCDE, który zawiera wszystkie punkta zetknięć podstawy ciała z płaszczyzną poziomą. Albowiem gdyby ta pionowa

padała zewnątrz, na przykład w punkcie G′, ciężar ciała usiłowałby je wywrócić około krawędzi AB; oddziaływania punktów oparcia nietylkoby się nie sprzeciwiały temu wywrotowi, ale owszem działałyby w jego stronę. Niech będzie P ciężar ciała, l najkrótsza odległość pionowej środka ciężkości od najbliższego boku wielokąta ABCDE; wieloczyn Pl nazywano dawniej *momentem stateczności* ciała. Oznaczmy przez Sh moment siły S względem pewnej krawędzi około której ma dążność do wywrócenia ciała; ponieważ moment Pl ciężaru tego ciała usiłuje utrzymać je na miejscu, więc ścisła równowaga wymaga żeby było

$$Sh = Pl.$$

Wieloczyn Pl wyraża moment maximum jaki siła S miećby mogła nie wywracając ciała.

Nakoniec trzeci warunek równowagi ciała stojącego na płaszczyznie poziomej : nie trzeba żeby na przykład mur zgniotł się pod ciężarem który wytrzymuje. Niech P oznacza całe parcie, Ω powierzchnię partą; stosunek $\frac{P}{\Omega}$ będzie parciem średniem na jedność powierzchni. Trzeba więc żeby stosunek $\frac{P}{\Omega}$ nie przechodził wytrzymałości muru przeciw zgnieceniu. To wszystko nie wystarcza jeszcze; trzeba nadto wiedzieć jak się całe parcie rozdziela na wszystkie części muru, aby być pewnym że w każdym punkcie parcie na jedność powierzchni nie jest dość mocne żeby sprawić mogło zgniecenie. Ale tu niema nic pewnego; są tylko przypuszczenia, więcej niż zaprzeczalne, których żadnem doświadczeniem sprawdzić nie zdołano. Nie będziemy ich rozbierali, bo ta rzecz, dotycząca wytrzymałości materyałów, do Mechaniki zastosowanej należy.

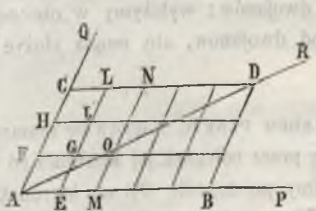
KONIEC TOMU PIERWSZEGO.

NOTY I DODATKI

NOTA PIERWSZA

DRUGIE DOWODZENIE RÓWNOLEGŁOBOKU SIŁ.

Twierdzenie. *Wynikowa dwóch sił przyłożonych do jednego punktu materyalnego, w dwóch kierunkach jakichkolwiek, jest przedstawiona co do kierunku i do wielkości przez przekątnę równoległoboku, wystawionego na dwóch prostych które przedstawiają te siły co do kierunku i do wielkości.*



Niech będą dwie siły spółmierne P i Q; dla utkwienia myśli, przypuśćmy $= 5f$, $Q = 3f$. Jeśli na kierunkach sił P i Q weźmiemy dwie proste AB i AC proporcyonalne do liczb 5 i 3, i wystawimy na nich równoległobok ABDC, przekątna AD, wyznaczy kierunek wynikowej tych sił. Na dowodzenie tego, podzielmy bok AB na 5 części równych a bok AC na 3 części równe; te części równe będą wyrażały wielkość i kierunek sił f na któreśmy rozłożyli siły P i Q. Nareszcie, przez punkta podziałów poprowadźmy, do boków AB i AC, równoległe które podzielą równoległobok na ukośniki równe. To uczyniwszy, uważajmy że, w ukośniku AEGF wynikowa dwóch sił f, wyrażonych przez AE i AF, ma kierunek dwójsiecznej AG kątów A i EGF; ta wynikowa przeniesiona do punktu G, rozkłada się na swoje składowe w kierunkach GO i GI. Co pokazuje że w ukośniku AEGF można przenieść siły AE i AF do wierzchołka G na boki FG i EG. Następnie w ukośniku FGIH, można przenieść siły FG i FH do wierzchołka I na boki HI i GI; i tak dalej. Ztąd wynika że można uważać siły AE i AC jako przyłożone do punktu L i wyrażone przez boki CL i EL. Zatem, można podobnie uważać siły EM i EL jako przyłożone do punktu N i wyrażone przez boki LN i MN; i tak dalej aż się dojdzie do boku BD.

Tym sposobem siła AC zostaje przeniesiona na kierunek BD, a siły składające siłę AB na kierunek CD. Więc, nie naruszając skutku sił AB i AC, można je uważać jako przyłożone do punktu D w kierunku CD i BD; co dowodzi że punkt D należy do wynikowej tych sił. Ztąd wnosimy że wynikowa sił spółmiernych P i Q, przechodząca przez punkta A i D, ma kierunek przekątnej równoległoboku wystawionego na liniach prostych AB i AC które przedstawiają te siły, co do wielkości i do kierunku.

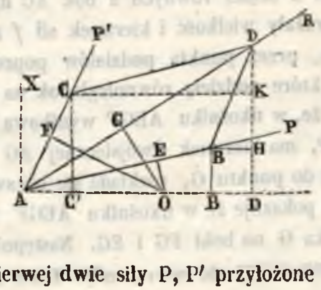
NOTA DRUGA.

TEORYA MOMENTÓW SIŁ.

Daliśmy już w tekscie wszystkie twierdzenia dotyczące momentów sił, uważając je jako własności dwojanów; wyłożymy w obecnej nocie teoryę tych momentów niezależnie od dwojanów, aby mogła służyć tym którzy się bez dwojanów obywają.

1. Moment siły względem punktu. Nazywa się *momentem siły względem punktu* wieloczyn tej siły przez odległość jej kierunku od tego punktu. I tak, jeśli z punktu O spuścimy prostopadłę OE na kierunek AB siły P, wieloczyn P.OE albo Pp będzie momentem siły względem punktu O. Punkt O nazywa się *środkiem momentów*.

Twierdzenie. *Gdy siły leżą na jednej płaszczyznie, moment wynikowej tych sił względem jakiegokolwiek punktu ich płaszczyzny jest równy summie algebrycznej momentów sił składowych.*



1° Niech będą najpierwej dwie siły P, P' przyłożone do jednego punktu A.

Jeśli na dwóch prostych AB, AC które przedstawiają wielkość i kierunek tych dwóch sił, wystawimy równoległobok, przekątna AD będzie przedstawiała wielkość i kierunek ich wynikowej R. Weźmy teraz zewnątrz kąta BAC, na jego płaszczyznie, jakikolwiek punkt O, i spuśćmy na kierunki trzech sił P, P′, R prostopadłe OE, OF, OG. Trzeba dowieśdź że

$$(1) \qquad R.OG = P.OE + P'.OF.$$

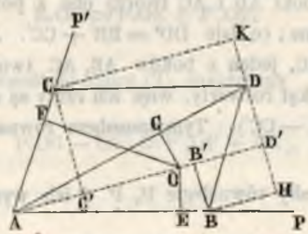
Te trzy wieloczyny są podwójną miarą odpowiednych trójkątów OAD, OAB, OAC, mających spólny wierzchołek O i podstawy AD, AB, AC; dość więc okazać że trójkąt OAD jest równy summie trójkątów OAB i OAC. Owoż, trzy wymienione trójkąty mogą być uważane jako mające spólną podstawę OA, i wysokości DD′, BB′, CC′; zatem twierdzenie będzie dowiedzione jeśli okażemy że wysokość DD′ jest równa summie wysokości BB′ i CC′.

W tym celu, z wierzchołków B i C spuśćmy na DD′ prostopadłe BH i CK. Widzimy zaraz że wysokość BB′ = HD′; a wysokość CC′, równa rzutowi KD′ boku AC na DD′, jest równa rzutowi DH boku BD, bo dwa boki AC i BD są równe i równoległe. Więc

$$DD' = DH + HD' = BB' + CC'.$$

Co było do okazania.

Weźmy teraz punkt O wewnątrz kąta BAC, i powtórzmy poprzedzające



wykreślenia. Trójkąty OAD, OAB, OAC mają spólną podstawę OA i wysokości DD′, BB′, CC′.

Owoż, wysokość CC, równa rzutowi KD′ boku CA na DD′, jest równa rzutowi DH boku DB, bo dwa boki CA i DB są równe i równoległe. Więc

$$DD' = DH - D'H = CC' - BB'.$$

Co pokazuje że trójkąt OAD jest różnicą trójkątów OAC i OAB; zatem mamy, między momentami dwóch sił P, P′ i momentem wynikowej R względem punktu wewnętrznego O następujące równanie

(2) $R.OG = P'.OF - P.OE.$

Równanie (2) wywiedzie się z równania (1) jeśli przyjmiemy pewną ugodę znaków dla momentów sił. Jakoż, przypuszczając że punkta przyłożenia sił P, P', R są przeniesione do punktów E, F, G, stale połączonych z punktami A i O, widzimy że na pierwszej figurze wszystkie trzy siły P, P', R mają dążność do obracania tej figury około punktu O w jedną stronę; przeciwnie na drugiej figurze, siły P' i R mają dążność do obracania jej w jedną stronę a siła P w stronę przeciwną: więc, jeśli damy znak + momentom których siły obracałyby figurę w jedną stronę, a znak — momentom których siły obracałyby tę figurę w stronę przeciwną, równanie (2) wejdzie do równania (1).

Ogólne równanie (1) wyraża twierdzenie które podał Varignon:

Gdy dwie siły są przyłożone do jednego punktu, moment wynikowej względem punktu leżącego na ich płaszczyźnie, jest równy summie momentów tych dwóch sił.

Za pomocą teoryi rzutów można łatwo i ogólnie dowieśdź twierdzenia Varignon'a.

Dość tylko uważać że wysokości BB', CC', DD' są rzutami boków AB, AC albo BD, AD na osi AX prostopadłej do AO; a wiadomo (*) że rzuty dwóch dróg AD i AB + BD na osi jakiejkolwiek są równe. Owóż, jeśli prosta AO leży zewnątrz kąta BAC, boki AB i AC tworzą oba z pół-osią AX kąty ostre, więc ich rzuty są dodatne; co daje $DD' = BB' + CC'$. Jeśli przeciwnie prosta AO wchodzi w kąt BAC, jeden z boków AB, AC tworzy z pół-osią AX kąt ostry, drugi zaś tworzy kąt rozwarty, więc ich rzuty są znaków przeciwnych; co daje $DD' = \pm(BB' - CC')$. Tym sposobem równania (1) i (2) są dowiedzione odrazu.

2° Niech będą dwie siły równoległe P, P' i ich wynikowa R przyłożone

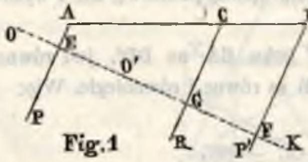


Fig.1

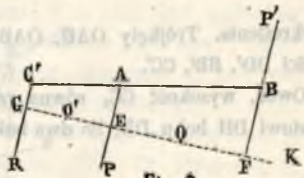


Fig.2

do punktów A, B, C. Twierdzenie Varignon'a stosuje się do tych sił. Jakoż,

(*) Zobacz w naszej Trygonometryi *Teoryę rzutów prostolinijnych.*

przez punkt O, wzięty na płaszczyźnie trzech sił równoległych, poprowadźmy prostę OK prostopadłą do ich kierunków. Mamy najpierwej

$$\frac{P}{BC} = \frac{P'}{AC},$$

a w trapezie AEFB równoległa CG do podstaw daje

$$\frac{EG}{AC} = \frac{FG}{BC};$$

z tych dwóch proporcyj wynika

$$P.EG = P'.FG.$$

Odnosząc tę równość do pierwszej figury, otrzymujemy

$$P(OG - OE) = P'(OF - OG),$$

zkąd

$$(P + P').OG = P.OE + P'.OF$$

albo

$$R.OG = P.OE + P'.OF. \tag{3}$$

Odnosząc powyższą równość do figury (2), znajdziemy

$$P(OG - OE) = P'(OF + OG),$$

zkąd

$$(P - P')OG = P.OE + P'.OF;$$

więc

$$R.OG = P.OE + P'.OF.$$

Gdyby wzięto punkt O′ między kierunkami sił P, P′ wprost równoległych na pierwszej figurze, a poza kierunkami sił przeciwnie równoległych na drugiej figurze, otrzymanoby równanie momentów

$$R.O'G = P'.O'F - P.O'E. \tag{4}$$

To równanie wejdzie do (1), jeśli momentom sił będą dane znaki stosowne do już przyjętej ugody.

3° Uważajmy szczególny przypadek w którym punkt O jest wzięty na kierunku wynikowej; wtedy $OG = 0$, i równanie momentów staje się

$$P.OE - P'.OF = 0 \quad \text{albo} \quad \frac{P.}{OF} = \frac{P'.}{OE};$$

co widoczne a priori.

Niech będą teraz jakiekolwiek siły $P, P', P'', \ldots$ w liczbie n, leżące na jednej płaszczyznie. Przypuszczając że te siły mają wynikowę R, nazwijmy $R', R'', R''' \ldots$ wynikowe które się otrzymuje składając po kolei siły P i P', R' i P'', R'' i P''',..., i oznaczmy przez $p, p', p'', \ldots\ r, r', r'', \ldots$ odpowiedające odległości tych sił od punktu O wziętego na ich płaszczyznie; będzie

$$R'r' = Pp + P'p',$$

$$R''r'' = R'r' + P''p'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Rr = R^{(n-1)}r^{(n-1)} + P^{(n-1)}p^{(n-1)},$$

zkąd, dodając, wyniika ogólne równanie

$$Rr = Pp + P'p' + P''P'' + \ldots = \Sigma Pp,$$

które dowodzi wysłowionego twierdzenia momentów sił względem punktu.

Uwaga. Jeśli środek O momentów znajduje się na wynikowej, będzie $r = 0$; zatem

$$\Sigma Pp = 0.$$

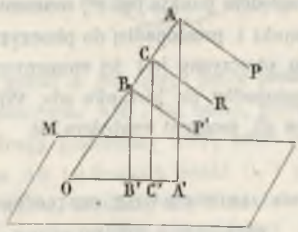
To znaczy że wtedy summa momentów, których siły mają dążność do obracania figury w jedną stronę, jest równa summie momentów sił któreby ją mogły obracać w stronę przeciwną. Nawzajem, jeśli summa algebryczna momentów sił względem pewnego punktu ich płaszczyzny jest zero, będzie $Rr = 0$; wtedy, przypuszczając że R nie jest zero musi być $r = 0$, to jest punkt O musi leżeć na kierunku wynikowej R.

II. Momenta sił względem płaszczyzny. Gdy siły działające na układ materyalny są równoległe w przestrzeni, wtedy, do wyrażenia równowagi albo do wyznaczenia kierunku wynikowej, wchodzą innego rodzaju momenta które teraz wyłożymy.

Nazywa się *momentem siły względem płaszczyzny*, równoległej do jej kierunku, wieloczyn tej siły przez jej odległość od płaszczyzny. Ta odległość może być brana niekoniecznie na prostopadłej do płaszczyzny, ale tylko na równoległej do danej prostej.

Twierdzenie. *Moment wynikowej, ilukolwiek sił równoległych, względem płaszczyzny jest równy summie algebrycznej momentów tych sił.*

Niech będą najpierwej dwie siły równoległe P, P′ i ich wynikowa R,



przyłożone do punktów A, B, C; i płaszczyzna M równoległa do ich kierunków. Przez punkta A, B, C poprowadźmy do tej płaszczyzny prostopadłe AA′, BB′, CC′, i przypuśćmy że prosta AB spotyka płaszczyznę M w punkcie O. Jeśli weźmiemy momenta sił względem punktu O, będzie

$$Rr = Pp + P'p'.$$

Owoż, odległości r, p, p' punktu O od kierunków sił równoległych CR, AP, BP są proporcyonalne do OC, OA, OB, te zaś są proporcyonalne do CC′, AA′, BB′; więc podstawiając w równaniu ostatnie odległości za pierwsze, otrzymujemy

$$R.CC' = P.AA' + P'.BB'. \tag{5}$$

Gdy prosta AB jest równoległa do płaszczyzny M, twierdzenie jest przez się oczywiste.

Uwaga. Dowodzenie nie wymaga żeby proste AA′, BB′, CC′ były prostopadłe do płaszczyzny M : dość tylko żeby one były równoległe do jednego kierunku. Więc twierdzenie zgadza się z wyłożonem w tekscie; byle tylko dano znak + siłom które działają w jedną stronę a znak — tym które działają w stronę przeciwną, i uważano za dodatne albo odjemne rzędne AA′, BB′, CC′, według jak punkta A, B, C są z jednej albo z drugiej strony płaszczyzny M.

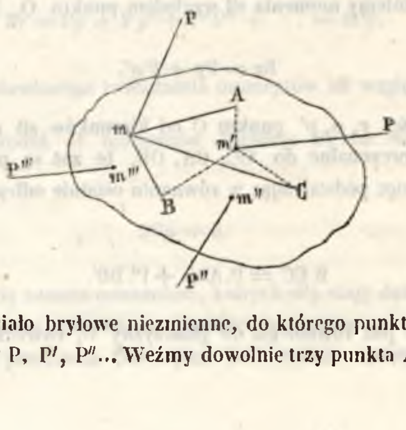
Gdy liczba sił równoległych jest większa od dwóch, zogólnia się równanie (5) już wiadomym sposobem.

III. Momenta sił względem osi. Nazywa się *momentem siły względem osi* wieloczyn rzutu tej siły na płaszczyznie prostopadłej do osi przez najkrótszą odległość siły i osi. Teorya tych momentów jest dostatecznie wyłożona w tekscie n[ro] 56 i 58. Nadto, dowiedliśmy wprost, za pomocą pracy przysposobionej, że *moment wynikowej względem osi jest równy summie algebrycznej momentów sił składowych.*

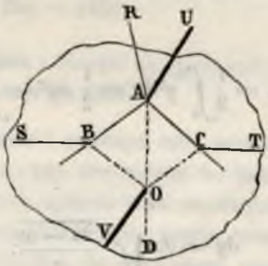
Nakoniec, trzeba uważać że momenta siły względem punktu i względem płaszczyzny są szczególnym przypadkiem jej momentu względem osi. I w samej rzeczy, moment siły względem punktu jest jej momentem względem osi przechodzącej przez ten punkt i prostopadłej do płaszczyzny siły i punktu; a zaś moment siły względem płaszczyzny jest jej momentem względem osi leżącej na tej płaszczyznie i prostopadłej do kieranku siły. Więc właściwie jest tylko jeden rodzaj momentów sił, moment względem osi.

SKŁADANIE SIŁ JAKICHKOLWIEK PRZYŁOŻONYCH DO CIAŁA BRYŁOWEGO NIEZMIENNEGO.

Twierdzenie. *Wszelki układ sił przyłożonych do ciała bryłowego niezmiennego może się zawsze przywieść do dwóch sił najwięcej, z których, jedna przechodzi przez punkt dany.*



Niech będzie ciało bryłowe niezmienne, do którego punktów $m, m', m'',$... są przyłożone siły P, P′, P″... Weźmy dowolnie trzy punkta A, B, C tego ciała, albo punkta z niem stale połączone. Jeśli punkt przyłożenia m siły P leży zewnątrz płasczyzny ABC, możemy rozłożyć siłę P na trzy inne wedle kierunków mA, mB, mC, i przenieść punkta przyłożenia trzech składowych do A, B, C; a jeśli punkt przyłożenia jakiej siły jest na płasczyznie ABC, to możemy rozłożyć tę siłę na składowe równoległe przyłożone w A, B, C. Rozkładając podobnie wszystkie siły przyłożone, przekształcimy cały układ na trzy grupy sił mających punkta przyłożenia w A, B, C. Owoż, każda z tych grup może być zastąpiona przez jedną siłę; więc tym sposobem układ sił przyłożonych do ciała bryłowego przywodzi się do trzech sił R, S, T przyłożonych do punktów A, B, C.



Przypuśćmy teraz że punkt A jest dany; przez prostę AB i przez kierunek siły S poprowadźmy płasczyznę ABS; tak samo, przez prostę AC i kierunek siły T poprowadźmy drugą płasczyznę ACT, która przetnie pierwszą wedle prostej AD. Weźmy na AD jakikolwiek punkt O, i połączmy go niezmiennie z uważanem ciałem; poczem, rozłóżmy siłę S na dwie inne wedle kierunków BA, BO, i przenieśmy punkta przyłożeń tych dwóch sił do A i O; rozłóżmy podobnie siłę T na dwie inne wedle kierunków CA, CO, i przenieśmy punkta przyłożeń do A i O. Tak postępując, widzimy że wszystkie siły przyłożone do punktu A składają się w jedną siłę U, a dwie siły przyłożone do O w jedną siłę V. Więc wszystkie siły P, P′, P″... przyłożone do ciała bryłowego niezmiennego, przywodzą się do dwóch sił U i V, z których pierwsza przechodzi przez dany punkt A; druga przechodzi przez punkt dowolny O, wzięty na przecięciu się płasczyzn ABS, ACT, albo tylko spólny tym plasczyznom jeśli one schodzą się w jedną.

Ta dawna metoda, sprowadzania wszystkich sił działających na ciało bryłowe niezmienne do dwóch sił równowartych U i V, jest jeszcze dotąd często używana przez wiele autorów. Ale niezawodnie nowa metoda, przywodząca wszystkie siły układu do jednej siły i do dwojanu, ma niezaprzeczalną wyższość w tem że jasno i wydatnie pokazuje *wynikowę przeniesienia*, która, jakośmy widzieli, gra tak wielką rolę w Dynamice.

Niema zapewne potrzeby dodawać że dwie siły U i V mogą być w równowadze, mieć wynikowę, albo nakoniec nie być na jednej płasczyznie.

NOTA TRZECIA.

W wyznaczaniu środka ciężkości cykloidy (n^{ro} 98), rachunek rzędnej y_1 przedstawia trudność całkowania wprost, która najznakomitszych nawet matematyków zatrzymała. STURM, na jednej z prelekcyj Mechaniki rozumowej, którą wykładał w Sorbonie w Paryżu 1840 r., przezwyciężył tę trudność, bardzo dowcipnem i pięknem zastosowaniem całkowania przez części. Oto jakim sposobem :

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_0^x y^2dx = \frac{1}{2}xy^2 - \int_0^y xydy.$$

Owoż,

$$dy = dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}};$$

podstawiając tę wartość będzie

$$\int xydy = \int y\sqrt{x}\,\sqrt{2a-x}\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}y\sqrt{x}\,(2a-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\int\sqrt{x}\,(2a-x)^{\frac{3}{2}}dy + \frac{1}{3}\int y(2a-x)^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{2}{3}y\sqrt{x}\,(2a-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\int(2a-x)^2dx + \frac{1}{3}\int(2a-x)ydy$$

$$= -\frac{2}{3}y\sqrt{x}\,(2a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}(2a-x)^3 + \frac{1}{3}ay^2 - \frac{1}{3}\int xydy;$$

zkąd

$$\int xydy = -\frac{1}{2}y(2a-x)\sqrt{2ax-x^2} - \frac{1}{6}(2a-x)^3 + \frac{1}{4}ay^2 + C.$$

Więc

$$Sy_1 = \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}y(2a-x)\sqrt{2ax-x^2} + \frac{1}{6}(2a-x)^3 - \frac{1}{4}ay^2 - \frac{4}{3}a^3.$$

NOTA CZWARTA.

NOWA METODA DO WYZNACZENIA CAŁEK WIELOWNYCH, PRZEZ LEJEUNE-DIRICHLET.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences de Paris, tome VIII, page 156. — 1839.

Przedrukowane w piśmie : *Journal de mathématiques pures et appliquées par* M. J. LIOUVILLE. Tome IV, 1839 r.

« Wiadomo że obliczanie i redukcya całek wielownych przedstawia ogólnie bardzo wielkie trudności, gdy nierówności warunków, które określają rozciągłość całkowań, zawierają zarazem wiele zmiennych. Zajmując się niektóremi kwestyami Fizyki matematycznej które zależą, ostatecznie, od obliczania pewnej klassy całek wielownych rzędu określonego, przyszedłem do metody która zdaje się zmniejszać, w wielu przypadkach, trudności o jakich dopiero co mówiłem. Ta metoda polega poprostu na mnożeniu wyrażenia do całkowania, przez czynnik którego wartość jest równa jedności w zakresie jaki całkowania mają obejmować, i który znika poza tym zakresem. A ponieważ wyrażenie różniczkowe, tak zmodyfikowane, może się całkować w granicach statecznych i bardzo prostych jako 0 i ∞ albo $-\infty$ i ∞, kwestya będzie najczęściej daleko łatwiejsza do traktowania. Ten sposób postępowania zastosuję do niektórych szczególnych zagadnień. Na pierwszy przykład wybiorę tak sławną kwestyę przyciągań ellipsoid jednorodnych. Metoda zastosowana do tego zagadnienia ma to znakomitego że rozwiązanie dla obydwóch przypadków punktu zewnętrznego i punktu wewnętrznego, które zawsze sprowadzano pierwszy do drugiego, albo traktowano sposobami zupełnie różnemi, wynika z analizy jednostajnej która się rozciąga ogólnie do wszelkiej ustawy przyciągania proporcyonalnego do potęgi jakiejkolwiek, całkowitej albo ułamkowej, odległości. Ta sama analiza przyprowadza zagadnienie do kwadratur, gdy gęstość, zamiast być stateczna, jest funkcyą stosunkową i całkowitą trzech spółrzędnych prostokątnych; ale, dla większej prostoty, przypuszczę gęstość stateczną i równą jedności.

» Niech będą x, y, z spółrzędne punktu jakiegokolwiek massy przyciągającej, a, b, c spółrzędne punktu przyciąganego. Połóżmy

$$\rho^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

i niech będzie $\frac{1}{\rho^p}$ ustawa przyciągania; stateczną p przypuszcza się zawartą między 2 i 3, przypadek do którego łatwo sprowadzić wszystkie inne. To mając, kwestya przywodzi się do wyznaczenia potrójnej całki następującej, której spółczynnik różniczkowy, wzięty względem a, daje składowę przyciągania równoległą do osi $x^{ów}$, którą oznaczę przez A.

$$(1)\qquad -\frac{1}{p-1}\int\int\int\frac{dxdydz(^*)}{\rho^{p-1}},\qquad \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{6}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2<1.$$

Owoż, ponieważ całka

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\text{wst}\,\varphi}{\varphi}\text{dos}g\varphi\, d\varphi$$

jest równa jedności albo zeru, według jak stateczna dodatna g jest mniejsza albo większa od jedności, ztąd wnosimy że całka (1) jest częścią rzeczywistą następującej

$$-\frac{2}{\pi(p-1)}\int_0^\infty d\varphi\frac{\text{wst}\,\varphi}{\varphi}\int\int\int e^{\left\{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{6}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2\right\}\varphi\sqrt{-1}}\frac{dxdydz}{\rho^{p-1}};$$

całkowania względem x, y, z mogą się teraz rozciągać od $-\infty$ aż do ∞. Dla otrzymania potrójnej całki, względnej do tych niezmiennych, wyrazi się ułamek $\frac{1}{\rho^{p-1}}=\frac{1}{(\rho^2)^{\frac{p-1}{2}}}$ przez całkę określoną, za pomocą wiadomej formuły Eulera której dowiódł Poisson, i która przypuszcza stateczne q i r dodatne i nadto $r<1$,

$$(2)\qquad \int_0^\infty e^{q\psi\sqrt{-1}}\psi^{r-1}d\psi=\frac{\Gamma(q)e^{\frac{r\pi}{2}\sqrt{-1}}}{q^r}.$$

Tym sposobem, zastępując ρ^2 przez jego wartość, będzie

$$-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{e^{-(p-1)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{(p-1)\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\int_0^\infty d\varphi.\frac{\text{wst}\,\varphi}{\varphi}\int_0^\infty d\psi.\psi^{\frac{p-1}{2}-1}e^{(a^2+b^2+c^2)\psi}\text{U},$$

(*) Potęgownik (155 i 157).

U znaczy, dla skrócenia, wieloczyn trzech całek pojedynczych, z których całka względna do x, na mocy wiadomej formuły pochodzącej z równania (2), jest

$$\int_{-\infty} {}^{\left\{\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)x^2-2a\psi x\right\}\sqrt{-1}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}}}\; e^{-\frac{a^2\psi^2}{\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}}\sqrt{-1}} \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Podstawiając tę wartość, i wartości dwóch innych całek podobnego kształtu, zastępując potem zmienną ψ przez inną s taką żeby $\psi=\frac{\varphi}{s}$, różniczkując względem a, następnie uważając że

$$\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^3 = \sqrt{-1}\,e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},$$

i czyniąc dla skrócenia $\sigma=\frac{a^2}{\alpha^2+s}+\frac{b^2}{6^2+s}+\frac{c^2}{\gamma^2+s}$,

znajdziemy

$$\frac{4a}{\alpha^2}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\frac{e^{-(p-2)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{p-1}\int_0^\infty \frac{ds\; s^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{6^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\int_0^\infty e^{\sigma\varphi\sqrt{-1}}\frac{\mathrm{wst}\varphi}{\varphi^{2-\frac{p}{2}}}d\varphi.$$

Ponieważ to wyrażenie powinno się zredukować do swojej części rzeczywistej, wszystko schodzi do tego żeby mieć

$$e^{-(p-2)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{\sigma\varphi\sqrt{-1}}\frac{\mathrm{wst}\varphi}{\varphi^{2-\frac{p}{2}}}d\varphi.$$

Otóż, ta całka, zastępując w niej $\mathrm{wst}\,\varphi$ przez wykładnikowe urojone, będzie bezpośrednio dana przez równanie (2), pamiętając że druga strona tego równania powinna być zastąpiona przez $\Gamma(r)\frac{e^{-\frac{r\pi}{2}\sqrt{-1}}}{(-q)^r}$, gdy q ma wartość odjemną. Znajduje się tym sposobem że część rzeczywista o którą chodzi jest zero, albo

$$\frac{-\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)\operatorname{wst}\frac{p\pi}{2}}{2(1-\sigma)^{\frac{p}{2}-1}}=\frac{\pi}{2\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)(1-\sigma)^{\frac{p}{2}-1}},$$

według jak $\sigma > 1$ albo $\sigma < 1$.

I. Jeśli punkt przyciągany jest wewnętrzny, będzie $\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}<1$, zatem także $\sigma < 1$, ponieważ zmienna s jest dodatna. Otrzymuje się więc poprostu

$$A=\frac{2a\pi^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2(p-1)}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{ds\, s^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\left(1-\frac{a^2}{\alpha^2+s}-\frac{b^2}{\beta^2+s}-\frac{c^2}{\gamma^2+s}\right)^{-\frac{p}{2}}.$$

II. Jeśli punkt jest zewnętrzny, wyznaczy się pierwiastek dodatny jedyny λ równania $\sigma = 1$, i będzie oczywiście $\sigma > 1$ albo $\sigma < 1$, według jak $s < \lambda$ albo $s > \lambda$. Więc wyrażenie dla A będzie w tym przypadku

$$A=\frac{2a\pi^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2(p-1)}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}\int_\lambda^\infty\frac{ds\, s^{1-\frac{p}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\left(1-\frac{a^2}{\alpha^2+s}-\frac{b^2}{\beta^2+s}-\frac{c^2}{\gamma^2+s}\right)^{1-\frac{p}{2}}.$$

Jeśli w tem ostatniem wyrażeniu napiszemy $\lambda + s$ zamiast s, i jeśli uczynimy

$$\alpha^2+\lambda=\alpha'^2,\quad a'=\frac{a\alpha}{\alpha'},\quad \beta^2+\lambda=\beta'^2,\quad b'=\frac{b\beta}{\beta'},\quad \gamma^2+\lambda=\gamma'^2,\quad c'=\frac{c\gamma}{\gamma'},$$

to ono weźmie taki sam kształt jaki się odnosi do punktu wewnętrznego; co być powinno na mocy twierdzenia Pana Ivory, które, jak to już Poisson uważał, rozciąga się do wszystkich ustaw przyciągania w funkcyi odległości. Niema zapewne potrzeby dodawać że analiza, którąśmy dopiero co rozwinęli, stosuje się do wszelkiej całki mającej kształt podobny do kształtu całki (1), jakakolwiek jest liczba zmiennych którą może zawierać. »

NOTA PIĄTA.

SZEREG LAGRANGE'A JEST SZCZEGÓLNYM PRZYPADKIEM NASTĘPUJĄCEGO.

Niech będzie funkcya F(z) w której

(1) $$z = \varphi\{x + \alpha f(z)\};$$

φ i f są funkcye dane, x zmienna jakakolwiek, α parametr mniejszy od jedności. Chodzi o to żeby rozwinąć F(z) na szereg wedle potęg rosnących parametru α.

Do tego rozwoju może służyć szereg Maklaurina, który daje

$$F(z) = F(z)_0 + \frac{\alpha}{1}\left(\frac{d.F}{d\alpha}\right)_0 + \cdots \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^n.F}{d\alpha}\right)_0 + \cdots$$

Wskazy *zero* znaczą że trzeba najpierwej wziąć pochodnę funkcyi F(z) względem α, i w niej uczynić $\alpha = 0$.

Trzeba więc przede wszystkiem szukać ustawy wedle której tworzą się te pochodne. Owoż, mamy

$$\frac{d.}{d\alpha}F(z) = \frac{dF}{dz}\,\frac{dz}{d\alpha}, \qquad \frac{d.}{dx}F(z) = \frac{dF}{dz}\,\frac{dz}{dx}.$$

Ztąd, rugując pochodnę cząstkową $\frac{dF}{dz}$, wywodzimy

(2) $$\frac{d}{d\alpha}.F(z) = \frac{d.}{dx}F(z)\,\frac{\frac{dz}{d\alpha}}{\frac{dz}{dx}}.$$

Ale równanie (1) różniczkowane względem α i względem x, które są niezależne, daje

$$\frac{dz}{d\alpha} = \varphi'.\left\{f(z) + \alpha f'(z)\,\frac{dz}{d\alpha}\right\}$$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'.\left\{1 + \alpha f'(z)\,\frac{dz}{dx}\right\};$$

ztąd wynika równość stosunków

$$\frac{\frac{dz}{d\alpha}}{f(z)+\alpha f'(z)\frac{dz}{d\alpha}}=\frac{\frac{dz}{dx}}{1+\alpha f'(z)\frac{dz}{dx}}=\frac{0}{f(z)\frac{dz}{dx}-\frac{dz}{d\alpha}}.$$

Więc

$$(3)\qquad f(z)\frac{dz}{dx}-\frac{dz}{d\alpha}=0,\quad \text{zkąd}\quad \frac{dz}{d\alpha}=f(z)\frac{dz}{dx}.$$

Podstawiając tę wartość w równaniu (2), otrzymujemy szukaną pochodnę pierwszą

$$(4)\qquad \frac{d.\mathrm{F}(z)}{d\alpha}=f(z)\frac{d.\mathrm{F}(z)}{dx}.$$

Aby mieć pochodnę drugą, różniczkujmy ostatnią formułę względem α, będzie

$$\frac{d^2.\mathrm{F}(z)}{d\alpha^2}=f'(z)\frac{dz}{d\alpha}\;\frac{d.\mathrm{F}(z)}{dx}+f(z)\frac{d.}{dx}\;\frac{d.\mathrm{F}(z)}{d\alpha}$$

albo, na mocy równań (3) i (4),

$$\frac{d^2.\mathrm{F}(z)}{d\alpha^2}=f(z)\,f'(z)\frac{dz}{dx}\;\frac{d.\mathrm{F}}{dx}+f(z)\frac{d.}{dx}\left(f(z)\frac{d.\mathrm{F}}{dx}\right);$$

$$=2f(z)f'(z)\frac{dz}{dx}\;\frac{d.\mathrm{F}(z)}{dx}+f(z)^2\frac{d^2.\mathrm{F}(z)}{dx^2}.$$

Więc

$$(5)\qquad \frac{d^2.\mathrm{F}(z)}{d\alpha^2}=\frac{d.}{dx}\left\{f(z)^2\frac{d.\mathrm{F}}{dx}\right\}.$$

Kontynując rachunek takim samym sposobem, znajduje się łatwo pochodnę trzecią

$$(6)\qquad \frac{d^3.\mathrm{F}(z)}{d\alpha^3}=\frac{d^2.}{dx^2}\left\{f(z)^3\frac{d.\mathrm{F}}{dx}\right\}.$$

Ustawa się uwydatnia ale tylko przez analogię. Trzeba więc jej dowieśdź.

Owoż, jeśli ta ustawa jest prawdziwa dla pochodnej n^{tej} względem α to będzie prawdziwa dla pochodnej rzędu $n+1$. Przypuśćmy tedy że jest

$$(7)\qquad \frac{d^n.F(z)}{d\alpha^n}=\frac{d^{n-1}.}{dx^{n-1}}\left\{f(z)^n\frac{d.F}{dx}\right\},$$

i weźmy pochodnę następującą; różniczkując względem α znajdujemy

$$\frac{d^{n+1}.F(z)}{d\alpha^{n+1}}=\frac{d^{n-1}.}{dx^{n-1}}\left\{nf(z)^{n-1}f'(z)\frac{dz}{d\alpha}\,\frac{d.F}{dx}+f(z)^n\frac{d.}{dx}\left(f(z)\,\frac{d.F}{dx}\right)\right\}$$

albo

$$\frac{d^{n+1}.F(z)}{d\alpha^{n+1}}=\frac{d^{n-1}.}{dx^{n-1}}\left\{nf(z)^nf'(z)\frac{dz}{dx}\,\frac{d.F}{dx}+f(z)^nf'(z)\frac{dz}{dx}\,\frac{d.F}{dx}+f(z)^{n+1}\frac{d^2.F}{dx^2}\right\}$$

$$=\frac{d^{n-1}.}{dx^{n-1}}\left\{\frac{d.}{dx}\left(f(z)^{n+1}\,\frac{d.F}{dx}\right)\right\};$$

mamy nakoniec równanie

$$\frac{d^{n+1}.F(z)}{d\alpha^{n+1}}=\frac{d^n.}{dx^n}\left\{f(z)^{n+1}\,\frac{d.F}{dx}\right\},$$

które sprawdza założoną ustawę. A ponieważ ta ustawa jest wprost dowiedziona dla pochodnej drugiej, więc jest prawdziwa.

To ustaliwszy, podstawmy w szeregu Maklaurina wartości wszystkich pochodnych czyniąc w nich $\alpha=0$, otrzymamy szereg ogólny

$$(8)\qquad F(z)=F(z)_0+\frac{\alpha}{1}\left\{f(z)\,\frac{d.F}{dx}\right\}_0+\frac{\alpha^2}{1.2}\,\frac{d.}{dx}\left\{f(z)^2\frac{d.F}{dx}\right\}_0+\dots$$

$$+\dots+\frac{\alpha^n}{1.2\dots n}\,\frac{d^{n-1}.}{dx^{n-1}}\left\{f(z)^n\frac{d.F}{dx}\right\}_0+\dots$$

Jeśli teraz weźmiemy $z=x+\alpha f(z)$, będzie

$$F(z)_0=F(x),\qquad \left(\frac{d.F(z)}{dx}\right)_0=F'(x),$$

i szereg zamieni się w następujący

$$(9) \qquad F(z) = F(x) + \frac{\alpha}{1} f(x)F'(x) + \frac{\alpha^2}{1.2}\,\frac{d.}{dz}\left\{f(x)^2F'(x)\right\} + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha^n}{1.2\dots n}\cdot\frac{d^{n-1}.}{dx^{n-1}}\left\{f(x)^nF'(x)\right\} + \dots$$

Z ostatniego szeregu wywodzi się, jako przypadek szczególny, szereg podany przez LAGRANGE'A. Dość tylko położyć

$$F(z) = z = x + \alpha f(z).$$

będzie $F'(x) = 1$, i szereg stanie się

$$(10) \qquad z = x + \alpha f(x) + \frac{\alpha^2}{1.2}\,\frac{d.}{dx} f(x)^2 + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\,\frac{d^2.}{dx^2} f(x)^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha^n}{1.2\dots n}\,\frac{d^{n-1}.}{dx^{n-1}} f(x)^n + \dots$$

KONIEC NOT I DODATKÓW.

WAŻNIEJSZE OMYŁKI DRUKU.

Stronica	*Wiersz*	*Zamiast*	*Czytaj*
48	6	składawnych	składanych
51	14	$=$	$= 0$
58	4	tóre	które
72	14 od dołu	było	była
117	8 od dołu	$\sqrt{y2ay - y^2}$	$\sqrt{2ay - y^2}$
178	11	daj-my	dajemy
181	6	zcałkójmy	zcałkujmy
213	13 od dołu	pochodne α, β, γ,	pochodne względem α, β, γ.
253	2 od dołu	wiec	więc
255	7 od dołu	zatrzymają	zatrzymują
266	13	ξ	ξ'
272	2	kańcu	końcu
295	13	$-3\sqrt{av}$	$-2\sqrt{av}$

304 Tak wysłowić ZAGADNIENIE IV : *Punkt materyalny, przyciągany przez środek posiadający moc przyciągającą proporcyonalną do odległości, przebiega ruchem jednostajnym linię prostą, i kierunek jego prędkości początkowej jest na jednej płaszczyznie z tą prostą. Wyznaczyć równanie ruchu.*

307	6	$M'T' - MT = \Delta$,	$M'T' - MT = \Delta v$,
324	2	$-p$	$-p'$
326	2	$\sqrt{1 + p^2}$	$\sqrt{1 + p_1^2}$.
326	6	$\sqrt{1 + p_1^2}$	$\sqrt{1 + \frac{1}{p_1^2}}$
329	7 od dołu	Zkąd	Ztąd
344	1 od dołu	$-y\,\frac{d^2y}{dt^2}$	$-y\,\frac{d^2x}{dt^2}$.
360	14 od dołu	AB;	AB,
363	3	powierzchnię	powierzchnie
389	9	było	był
415	5	$\left(a\frac{db}{dt} + a'\frac{db}{dt} + a''\frac{db}{dt}\right)\gamma$.	$\left(a\frac{db}{dt} + a'\frac{db'}{dt} + a''\frac{db''}{dt}\right)\gamma$.
425	11 od dołu	nazwaną	nazwana
430	10	*skórczoną*	*skurczoną*
477	4	$\frac{G}{9 - 10^6}$	$\frac{G}{9.10^6}$
519	1	pojedyńczą	pojedynczą

TYMŻE SAMYM NAKŁADEM WYSZŁY

W DZIEDZINIE MATEMATYKI :

1. Norzewski Roch. *Nouvelle théorie des proportions et progressions harmoniques avec ses applications à la géométrie.* Paris, 1852, in-8°, avec planches (wyczerpane).

2. G. H. Niewęgłowski, professor analizy w Szkole wyższéj Polskiéj Montparnasse, egzaminator matematyki w liceum Świętego Ludwika. *Arytmetyka z teoryą przybliżeń liczebnych* i t. d. (Kurs zupełny, zawierający działania skrócone, błędy samoistne i względne ; noty dotyczące własności liczb, wiele rozwiązanych zagadnień i ćwiczenia), in-8°, stron 352. Paryż, 1866. Cena 1 tal. 10 srg.

3. — *Geometryi część I. Geometrya płaska,* (wydanie drugie) w Paryżu, 1868r., stron 436, in-8°, figury w tekscie. Cena 1 talar 10 srg.

4. — *Geometryi część I i II,* kurs zupełny, drugie wydanie całkiem przerobione, zawierające całą geometryę starożytnych i metody geometryi nowoczesnéj (pierwsze wydanie z 1852 roku). Paryż, 1868, in-8°, stron VIII i 778. Cena 2 tal. 20 srg.

5. — *Trygonometrya prostolinijna i sferyczna z teoryą ilości urojonych i z notami.* Paryż, 1870 roku, in-8°, stron XV i 407. Cena 1 tal. 15 srg.

6. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami,* wyłożył W. Folkierski, inżynier cyw, b. uczeń Szkoły Politechnicznéj w Karlsruhe, licencyat n. m. P. F. Sorbony, Professor mechaniki w Szkole Wyższéj Przygotowawczéj w Paryżu, tom I, zawierający rachunek różniczkowy, oraz dodatek Władysława Trzaski o wyznacznikach. Paryż, 1870, in-8°, str. XLIII i 1087, figur w tekscie 136. Cena 3 tal. 10 srg.

7. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu,* tom I (Główne artykuły przez pp. Frankego, Gosiewskiego, Sągajłę, Trzaskę, Żmurkę). Paryż, 1871, in-4°, stron 186, figur 5. Cena 2 tal.

8. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu,* tom II (Artykuły pp. Gosiewskiego, Kucharzewskiego, Sągajły, Trzaski i Żalińskiego). Paryż, 1872, in-4°, stron 240, figur 8. Cena 2 tal. (Obydwa tomy razem oprawne 3 tal. 22 srg. 6 fen.).

NA CZTERECHSETNĄ ROCZNICĘ URODZIN KOPERNIKA 19 LUTEGO 1873 ROKU WYSZŁY NASTĘPUJĄCE DZIEŁA :

9. *Wykład Hydrauliki* wraz z teoryą machin wodnych, poprzedzony wiadomościami wstępnemi z hydrostatyki i hydrodynamiki, przez pp. Feliksa Kucharzewskiego i Wł. Klugera (Inżynierów dyplomowanych szkoły Dróg i Mostów w Paryżu). Paryż, 1873, str. LVI i 1019. Figur w tekscie 110, oprawa angielska. Cena 20 fr.

10. *Zasady Rachunku różniczkowego i całkowego*, przez Władysława Folkierskiego, stałego Sekretarza i Wice-prezesa Towarzystwa Nauk Ścisłych, tom II. *Rachunek Całkowy*. Część pierwsza : Całkowanie różniczek i t. d. Paryż, 1873, stron XVI i 740, figur 76, oprawa angielska. Cena 12 franków.

11. *Wykład mechaniki cząsteczkowéj* (molekularnéj) przez Władysława Gosiewskiego, prof. Fizyki matematycznéj. Tomu Igo, Części różniczkowéj zeszyt pierwszy, Paryż, 1873, stron 176. Cena fr. 4.

12. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom III, zawierający prace pp. W. Folkierskiego, Klugera, Kucharzewskiego, Dolińskiego, Gosiewskiego i Martynowskeigo. Paryż, 1853, str. VIII i 358, figur 96. Cena fr. 12.

13. *Kurs Mechaniki Rozumowej* przez G. H. Niewęgłowskiego, dwa tomy. Tom I, *Statyka. — Dynamika punktu*. Paryż, 1873. In-8°, stron 544, z figurami, cena fr. 10.

14. *Wykład zupełny Algebry*, przez Adolfa Sągajłę w czterech tomach. Tom I : *Początki Algebry*. Paryż, 1873, in-8°, stron 632 z figurami. Cena 6 fr.

15. *Bibliografia Piśmiennictwa Polskiego z działu Matematyki i Fizyki oraz ich zastosowań*, przez Dr. Teofila Żebrawskiego, Człon. Akad. Krakowskiéj. Kraków, 1873, in-8°, stron 617 z 4 tablicami. Cena 3 tal.

W ROKU 1873 i 74 DRUKOWAĆ SIĘ BĘDĄ :

16. *Wykład mechaniki cząsteczkowéj* Władysława Gosiewskiego, professora Fizyki matematycznéj, tomu Igo części różniczkowéj zeszyt drugi.

17. Adolf Sągajło, professor Matematyki : *Algebry* tom II o *Wyznacznikach*, in-8°.

18. — *Geometrya Analityczna*, w trzech tomach, in-4°, Tom I.

19. *Zasady Rachunku Różniczkowego i Całkowego*, tom III. *Całkowanie równań różniczkowych*, przez Władysława Folkierskiego. Wice-Prezesa i stałego sekretarza Tow. Nauk Ścisłych, in-8°.

20. *Kurs Mechaniki Rozumowéj* G. H. Niewęgłowskiego tom II : *Dynamika układów materyalnych, Hidrostatyka i Hidrodynamika*, in-8°.

21. *Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, Tom IV.

Zarząd Biblioteki Kórnickiéj czuje potrzebę wyrazić żal swój, że był zmuszonym znacznie podnieść cenę ostatnich nakładów. Ma to miejsce szczególniéj w dziełach matematycznych, drukowanych w Paryżu, gdzie papier nowym obłożony podatkiem, podwyższone taryfy drukarskie i niesłychane trudności korekty wpłynęły tak niekorzystnie na koszta druku, iż nawet podniesione ceny o wiele jeszcze pokryć ich nie mogą.

Dotychczas niżej wymienione księgarnie zgłosiły się z obietnicą sprzedawania po stałych cenach wszystkich nakładów Biblioteki Kórnickiej i odbierają je wprost od Zarządu zaraz po wykończeniu każdego tomu.

w WARSZAWIE, pp. Gebethner i Wolff.
» » Michał Glücksberg.
» » J. J. Okoński.
» » Maurycy Orgelbrand.
» » Sennewald.

w KRAKOWIE, » Józef Czech.
» » D. E. Friedlein (Rynek, 11).
» » Fr. Trzecieski (księgarnia wydawnictwa dzieł tanich i pożytecznych).
» » Nowolecki.
» » Krzyżanowski.

we LWOWIE, » A. D. Bartoszewicz (księgarnia Polska, ulica Kopernika l. 12).
» » Gubrynowicz i Schmidt.
» » Milikowski.
» » F. H. Richter.
» » Karol Wild.

w POZNANIU, » W. E. Czapiński (księgarnia P. H. Richtera).
» » Mieczysław Leitgeber i Spółka.
» » J. K. Żupański.

w ŚREMIE, » K. Gąsiorowski.

w TORUNIU, » F. T. Rakowicz.

w DREZNIE, » J. I. Kraszewski.

w BERLINIE, » E. Bock (księgarnia Behra, ulica pod Lipami, 27).

w PARYZU, Księgarnia Luksemburska, 16, *rue de Tournon*.

Z zamówieniami zgłaszać się należy do Zarządu Biblioteki Kórnickiej, pod adressem : Dr. Z. Celichowski w Kórniku (W. Ks. Poznańskie).

Paryż — Drukarnia E. MARTINET, rue Mignon, 2.