TRYGONOMETRYA
KULISTA
ANALITYCZNIE WYŁOŻONA.

Z PRZYSTOSOWANIEM DO ROZMIARU ZIEMI I DO ZADAŃ ASTRONOMICZNYCH.

KU UŻYCIU UCZĄCYCH SIĘ W IMPERATORSKIM WILEŃSKIM UNIWERSYTECIE.

PRZEZ
JANA SNIADECKIEGO

WYDANIE 2gie ZNACZNIE POWIĘKSZONE.

z dwiema tablicami na blasze rznię̨temi

Sapińskiego Józefa.

Cena . . . . zł. 6.

w WILNIE i WARSZAWIE

NAKŁADEM I DRUKIEM JÓZEFA ZAWADZKIEGO
IMPERATOR. WILEN. UNIWER. TYPOGRAFA.

1820.

PRZEMOWA
DO PIERWSZEGO WYDANIA.

Trygonometrya kulista dawniey prawie samey tylko astronomii służąca, stała się dziś nauką do innych części, osobliwie matematyki stósowaney barzo ważną i potrzebną. Stała się nawet częścią istotną rachunku analitycznego, i ułatwieniem drogi do głębszych odnóg umieiętności matematycznych. W wielu zadaniach wpadamy na zrównania, które za pomocą tróykąta kulistego łatwo daią się rozwiązać. Spotykamy w głębszym rachunku analitycznym trudności, z których nas szczęśliwie ta nauka częstokroć wyprowadza. W rozmiarze rozległego kraiu, i w robieniu dokładnych iego kart, obeyśdź się dziś bez niey nie można. Ktokolwiek choć lekko iest obeznany z dzisieyszym stanem matematycznych umieiętności, przyznać musi; że rachunek liniy trygonometrycznych iest i powszechną, i naydzielnieyszą w nich pomocą. Brak wprawy i ćwiczenia w tym rachunku robi wiele trudności, i na samym wstępie zatrzymuie postępek uczących się. Ze zaś w rozmaitych przemianach tego rachunku nic nas bardziey nie ćwiczy, iak trygonometrya kulista; dowodem tego całe teraźnieysze pismo: gdzie starałem *się unikać* formuł *i zrównań niepotrzebnych. Bo zrównania analityczne, które albo nie ułatwiaią rachunku, albo nowey nie ob-iawiaią prawdy, albo prawdy znaney nie wystawiaią w widoku prostszym i oczywistszym, są to niepotrzebne w xiążkach dla uczących się straszydła: któremi zraża się i przerywa ich uwaga, tak wielkiey potrzebuiąca ochrony do porządnego obięcia rzeczy, pod rachunek podciągnioney.*

Leonard Euler *trygonometryą kulistą przedtem dosyć zawiłą, w użyciu zmudną, i w prawidłach swoich nie powiązaną, naypierwszy przerobił na porządną analityczną rozprawę: wyciągaiąc z trzech zrównań całą osnowę twierdzeń, do rozwiązania tróykąta służących* (Acta Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae pro Anno 1779. pars prior. *p.* 72). *Po daremnych usiłowaniach ku nadaniu tey nauce większey ieszcze prostosci, wystąpił szczęśliwie* De la Grange *w roku 1798, i z iednego tylko zrównania całe pasmo prawd o tróykącie kulistym wydobył.* (Journal de l'Ecole Polytechnique Sixième Cahier p. 270.) *Przywieśdź umieiętność do naymnieyszey liczby prawd początkowych, iestto wielki krok do iey doskonałości. Powinna ta sztuka bydź znana uczącym się, do ocenienia pożytków* analizy. *Dla tego wziąłem się do iey* *napisania pierwszy raz w naszym ięzyku; z wyłożeniem moich własnych dowodów na niektóre ważne zrównania, iedne dawno znane, drugie mało ieszcze wiadome. Naukę o powierzchni tróykąta kulistego z przystósowaniem do praktycznego wymiaru kraiu, starałem się z dowodami do iasnego poięcia uczącym się wystawić.*

W wydaney przezemnie roku 1783 Algebrze zamierzyłem sobie wyłożyć czystą logikę *tego rachunku: na mieysce złych i słabych niektórych dowodów, położyć moie własne, i zrobić zbiór dowiedzionych* formuł *i twierdzeń, nieuchronnie potrzebnych do wyższych rachunków. W rozdziale IV. drugiey części nie godzi się uczącemu żadnego zrównania opuścić, bez szkody uczniów sposobiących się do głębszych matematyki części. Jakoż od ogłoszenia tey xiążki, przed lat 34 ieszczem nie spotkał żadnego w dziełach pierwszych Geometrów o liniiach trygonometrycznych zrównania zależącego od działań w Algebrze wyłożonych, któregoby mi się nie udało wyciągnąć z twierdzeń w tym rozdziale podanych. Że zaś niektóre potrzebuią rachunku zawilszego, dla tego starałem się przytoczyć ie w teraźnieyszém piśmie z dowodami. Zaspokaiaiąc więc potrzebę Astronomii sferyczney, chciałem ieszcze to pismo mieć przydatkiem do moiey Algebry,* *obeznać uczących się z tą częścią Analizy, i z nowemi prawdami geometrycznemi, do których odkrycia posłużył rozmiar Francyi dokonany z taką chlubą i pożytkiem, iakiego nie masz przykładu w historyi nauk. Z tey próbki widzieć się daie, iak mało można zrobić w przystosowaniu matematyki z początkowemi tylko iey wiadomościami. Nikt zapewne nie wątpi o wielkich matematyki pożytkach i przysługach: ale z początkową tylko tey nauki znaiomością, żaden kray ani do tych pożytków nie trafi, ani do rzędu narodów gruntownie uczonych nigdy należeć nie będzie. Zeby zaś do głębszych wiadomości matematycznych przebrać się pomyślnie, i uczuć tę roskosz umysłu, iaką napełniaią myślącego człowieka, trzeba ie koniecznie w początkowych zasadach obiąć gruntownie. Dla tego było zamiarem moiego życia, ułatwić młodzi kraiowey wstęp i drogę do tych głębokich umieiętności: ale przygody kraiowe miotaiąc mną po rozmaitych trudach, ani z moiem powołaniem ani z moiemi chęciami niezgodnych, nie dały mi doprowadzić do końca tak potrzebnego przedsięwzięcia. Przy schyłku życia chciałbym ieszcze coś zrobić dla tey młodzi, którey dobro i pożytki nigdy mnie nie przestaną żywo obchodzić. Pisałem w Wilnie $\frac{12}{24}$ Lutego 1817. r.*

PRZEMOWA

DO DRUGIEGO WYDANIA.

Sprawiłoto szczęśliwe przykładanie się młodzi polskiey do nauk matematycznych; że powtórne wydanie tego pisma prędzey na świat wychodzi, niżelim się spodziewał. Tak piękna skłonność do nauk, nadaiących umysłowi ludzkiemu prosty kierunek, i hart *że tak powiem* pewności *w poszukiwaniu prawdy, a prowadząca do gruntowney, i prawdziwie umieiętney kraiu oświaty, godna iest zachęcenia. Dla tego starałem się to dzielko przydaniem wielu ważnych prawd, uwag, i obiaśnień, oraz ich, i całey nauki rozlegleyszém przystósowaniem rozszerzyć, nie naruszaiąc planu i porządku, iaki sobie raz ułożyłem w iego napisaniu. Powiedziałem pod § 6 pierwszego, a pod 8 teraźnieyszego wydania; że cztery zrównania, toiest iedno fundamentalne, i z niego wyprowadzone trzy główne, są składem całey nauki: że wszystkie znane dotąd, i ieszcze potém odkryć się mogące o tróykącie kulistym twierdzenia, są i będą tylko mniey lub więcey dowcipnem, mniey lub więcey głęboko pomyślanem tych zrównań przerobieniem: dla tego postrzeżone w dziełach anality-*

cznych nowe o tróykącie kulistym prawdy, długim tam częstokroć i zawiłym rachunkiem dowodzone, starałem się z pomienionych zrównań w sposób prosty i łatwy wyciągnąć; i ich użycie okazać. Przydałem zadania skracaiące drogę w rozwięzywaniu niektórych przypadków tróykąta.

W trókącie kulistym wszystko iest kątem prostokreślnym leżącym na różnych płaszczyznach: w nim iedne kąty zawarte są promieniami kuli w iey środku; drugie są kątami płaszczyzn przecinaiących kulę. Mamy więc w tym tróykącie do czynienia z samemi ilościami iednorodnemi. Ta uwaga przyprowadziła mię do tey myśli: że własność tróykąta prostokreślnego skazana przez Euklidesa, *która otworzyła drogę w trygonometryi kulistey rachunkowi analitycznemu, ułatwiła tę przedtém tak trudną i zawiłą naukę, i stała się źródłem ważnych w niey wynalazków, że mówię ta sama własność tróykąta prostokreślnego, zamykać w sobie powinna całą trygonometryą płaską. Jakoż dosyć prostym, krótkim, i łatwym sposobem wyciągnąłem z niey wszystkie twierdzenia trygonometryi płaskiey; przez co obie nauki na oko tak różne, przywiedzione są do iednego początku. Jestto dobrodzieystwo* analizy geometryczney; *żeby* *prawdy nieźmierną przestrzenią na pozór oddalone zbliżyć do siebie: czegoby inną drogą prawie niepodobna było osięgnąć.*

Już temu lat blisko czterdzieści, iak sobie wystawiałem wszystkie nauki rachunkowe przez litery, iako iednę algebrę, uważaną w dwoiakim widoku: który nam skazali geometrowie greccy. Pierwszy widok zamknąłem w dwóch tomach wydanych roku 1783; gdzie są przygotowania uczących się do głębszych nad ilością zastanowień: drugiego widoku, który miał zawierać rachunek różnicowania *i* całkowania, *przygody kraiowe nie dały mi wypracować. Trzymaiąc się atoli tey samey myśli, uważam trygonometryą kulistą iako część istotną algebry, i dopełnienie iey rachunku w pierwszym widoku; bo ona nam obiawia nowe prawdy i związki liniy trygonometrycznych, główne mieysce, i rozległe użycie w tym rachunku trzymaiących. Z tego, co się dziś dokazuie za pomocą tey nauki, rokować sobie można iey rozległe nadal w innych umieiętnościach pożytki. Bo ieżeli w geometryi tak Euklidesa iak liniy krzywych, iakiekolwiek ilości i ich* fenomena, *wyrazić możemy przez liniie; czemuż ich nie moglibyśmy wyrazić przez kąty? i pytanie podane zamienić na trygonometryczne: iak tego mamy iuż przykłady w użyciu trygonome-*

tryi do rozwiązania zrównań wyższych stopni. Dla tego, dopełniaiąc moiey algebry, niektóre twierdzenia o związku kątów i boków tróykąta, przytoczone bez żadnego dowodu w dziełach geometrów, starałem się dowieśdź, i w tem piśmie umieścić, z ich użyciem i obiaśnieniem. Przydałem ieszcze z dowodami pod § 13. ważne wzory trygonometryczne, służące do przerabiania zrównań; których mi w moiey algebrze nie przyszło umieścić: chociaż te daią się wyciągnąć z początków tam wyłożonych.

Zrównania trygonometryczne maią do siebie przywiązaną tę nieprzyzwoitość, co w Algebrze pierwiastki zrównania; że nas wprawiaią w wątpliwość, który kąt do naszego pytania należy? Nayczęściey rodzą tę wątpliwość kąty posiłkowe. Dla tego potrzebną iest rzeczą mieć kilka zrównań na ten sam kąt; żeby iedne, służyły do poparcia drugich, i do zniesienia wątpliwości. I tey potrzebie starałem się także zaradzić osobliwie w przystósowaniu trygonometryi kulistey. Pokazuiąc użycie tey nauki w rozmierzaniu ziemi, i w robieniu kart kraiowych; przydałem rozwiązanie nayważnieyszego, i często przypadaiącego w tych robotach zadania.

Ale przystósowanie trygonometryi kulistey do zadań astronomicznych, z gruntownem dowie-

dzeniem używanych do tego wzorów i zrównań, z wystawieniem ich w pewnym porządku, i w postaci do rachunku naywygodnieyszey, osądziłem z mego długiego doświadczenia za rzecz dla astronomów kraiowych barzo ważną i potrzebną; bo te sposoby są po wszystkich znanych mi astronomicznych dziełach zmieszane i rozrzucone, od różnych autorów rozmaicie, częstokroć ciemno i zawile, a nawet źle i dobrze dowodzone: kiedy tu razem zebrane, w pewnym, i iak mi się zdaie, bardzo właściwym uszykowane porządku, uywodzą się ze zrównań i początków ściśle dowiedzionych, z przydaniem tu i ówdzie uwag i obiaśnień; iakich czytelnik w xiążkach astronomicznych nie znaydzie.

Rachunek Parallax, *czyli odmian w położeniu gwiazdy z różnych mieysc widzianey; od którego zawisły odległości planet od ziemi i od słońca, a zatem ledwo nie cała znaiomość świata słonecznego; od którego ieszcze zależą oznaczenie zaćmień słońca przez xiężyc ziemski i przez planety niższe, zasłanianie gwiazd tarczą xiężyca, toiest:* fenomena *do doskonalenia tablic biegu, i Geografii nayważnieysze: rachunek mówię* parallax *w miarę rozległego swego na wzrost Astronomii wpływu, długo zatrudniał znakomitych astronomów i geometrów; którzy nam na to podali sposoby rozma-*

ite, w licznych dosyć zrównaniach, pod różną postacią wystawionych, wydobytych z różnych widoków, a nayczęściey otrzymanych przez długie i pracowite rachunki. Naukę tę tak ważną i zawiłą, udało mi się pod ieden widok ogólny zagarnąć; i z niego prostym i łatwym sposobem na parallaxę różnego położenia wyciągnąć wszystkie znane dotąd w Astronomii zrównania, wystawiane pod rozmaitemi postaciami. W tém mieyscu znaydzie czytelnik i historyą wynalazków, i ich obiaśnienie przystósowaniem do wielkiego zaćmienia słońca, które 7. Września n. s. roku bieżącego przypadnie. Przyłączyłem arytmetyczne przykłady do każdego prawie zrównania; bo te wiele obiaśniaią czyste poięcie rzeczy, służą do rozpoznania kątów właściwych podanemu zadaniu, i do wprawienia uczących się w praktyczne przystósowanie analizy; które nie iest zawsze rzeczą tak łatwą, iak się na oko, i z lekkiego zastanowienia wydaie.

Ządaćby pozostało, i dla ułatwienia Astronomii uczącym się, i dla wygody astronomów chcących użyć swych praktycznych w obserwatoriach robót do doskonalenia nauki, aby, co się zrobiło z przystósowaniem trygonometryi, zrobić podobne przystósowanie wzorów i zrównań nauki o liniach krzywych i mechaniki; i z praw *biegu ściśle dowiedzionych, z własności liniy, po których się te biegi odbywaią; wyciągnąć resztę sposobów, iakoto na wyrachowanie skutków łamiącego się w atmosferze światła* (refractio), *na obłąkanie wzroku przez światło* (aberratio), *na kołysanie się osi ziemskiey* (nutatio), *na oznaczenie drogi od ciała niebieskiego opisaney: zgoła na to wszystko, czego w umieiętnem użyciu obserwacyy potrzebuiemy; zostawuiąc szczęśliwszym i wytrzymalszym głowom te głębokie badania, które nam* Astronomiia fizyczna *na rachunek tablic podaie.*

Taki zbiór zrównań ściśle wywiedziony, ściągniony do naymnieyszey liczby widoków i początków niewątpliwych, uszykowany porządnie, obiaśniony przykładami dobrze wybranemi, ułatwiłby obięcie tey rozległey umieiętności w swym związku, pokazałby dzielność ięzyka analitycznego, wprawiłby uczących się do widzenia iednych prawd w drugich, do poznania zawisłości, i że tak powiem powinowactwa, iakie zachodzi między temi prawdami, i między dziełami przyrodzenia na niebie. Mielibyśmy przeto zwięzłą treść nauki; początków, na których się opiera; i podręczny skład potocznych i nayważnieyszych rachunków. Prawdziwie gruntowna ciał niebieskich nauka, pokazałaby się tem, czém dziś *iest rzetelnie; toiest, przystósowaniem trygonometryi, nauki o liniach krzywych i mechaniki, do fenomenów niebieskich. Podzielićby ią można na historyą fenomenów, czyli opowiadanie dzieiów nieba: i na ich obrachowanie, czyli wywodzenie siłą rozumu: bo iużem to gdzie indziey powiedział; że* rachować, iestto rozumować z pewnością.

Szerzenie Astronomii, prócz znanych wszystkim iey przysług, nie byłoby ieszcze bez drogiego dla społeczności pożytku: bo ta wysoka umieiętność będąc prawdziwą chlubą i zaszczytem ludzkiego poięcia, w rozwadze tylu wielkich prawd podnosi umysł do górnieyszych myśli, i czucie do szlachetnieyszych poruszeń; a razem wraża wstręt do tego wszystkiego, coby człowieka mogło upodlić i znieważyć. To czucie godności ludzkiey głęboko wrażone i rozszerzone, byłoby zdaie mi się wielkiem lekarstwem na drobne namiętności, i na przywary wzrastaiącey cywilizacyi; a zatem silną podporą życia moralnego. Pisałem w Wilnie dnia $\frac{10}{22}$ *stycznia roku 1820.*

JAN SNIADECKI.

TREŚĆ i PORZĄDEK NAUKI.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

WŁASNOSCI TROYKĄTA KULISTEGO: ZROWNANIA i WZORY NA IEGO ROZWIĄZANIE.

ROZDZIAŁ DRUGI

WYMIAR TROYKĄTA KULISTEGO: IEGO UŻYCIE W ROZMIERZANIU ZIEMI. POROWNANIE TEGO TROYKĄTA Z PROSTOKRESLNYM.

ROZDZIAŁ TRZECI.

PRZYSTOSOWANIE TRYGONOMETRYI DO ZADAŃ ASTRONOMICZNYCH.

I. Położenie gwiazd względem poziomu, południka, i równika.

karta

III. Odnoszenie ciał niebieskich do środka ziemi, lub do środka słońca.

IV. Odnoszenie ciał niebieskich bliskich ziemi, do iey środka, lub powierzchni.

V. Położenie ciał niebieskich na własney ich drodze.

KONIEC

SKRÓCONE WYRAZY.

wst. znaczy wstawa. (*sinus*)
dost. . . . . dostawa (*cosinus*)
sty. . . . . styczna (*tangens*)
dosty. . . . dostyczna (*cotangens*)
sie. . . . . . sieczna (*secans*)
dosie. . . . dosieczna (*cosecans*)

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

WŁASNOSCI TROYKĄTA KULISTEGO: ZROWNANIA I WZORY NA IEGO ROZWIĄZANIE.

Wiadomość tróykąta prostokreślnego i kuli, prowadząca do poięcia boków i kątów w tróykącie kulistym.

§ 1. W tróykącie prostokreślnym, którego kąty są A, B, C, boki na przeciw tym kątom leżące a, b, c, podług Prop. XIII. księgi 2. *Euklidesa* mamy:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\mathrm{dost}A$: skąd $\mathrm{dost}A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

a zatém, $\mathrm{wst}A = \sqrt{(1 - \mathrm{dost}^2 A)}$

$$= \frac{\sqrt{(4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2)}}{2bc} = \frac{d}{2bc}$$

nazwawszy d funkcyą pod znakiem pierwiastkowym; która będąc różnicą dwóch kwadratów, może się rozebrać na mnożniki: na ieden $2bc - (b^2+c^2-a^2) = a^2 - (b-c)^2$, i na drugi $2bc + (b^2+c^2-a^2) = (b+c)^2 - a^2$; każdy znowu z tych mnożników będąc także różnicą kwadratów, ma dwa mnożniki: pierwszy $a-b+c$, $a+b-c$; drugi $b+c-a$, $b+c+a$; a zatem

$$d = \sqrt{[(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)]}.$$

Drugi znak pierwiastkowy — nie należy do tróykąta; bo w nim żaden kąt nie może bydź większy od 180°, a zatém nie ma wstawy odiemnéy. Geometrya nas uczy, że $\frac{1}{2}bc.\text{wst}A$ iest powierzchnią tróykąta; więc $d=2bc.\text{wst}A$ iest powierzchnią tróykąta cztéry razy wziętą: co nam daie sposób wyrażenia powierzchni tróykąta przez wszystkie iego boki.

Kula przecięta płaszczyzną przez iéy środek przechodzącą wydaie koło wielkie, którego promień równy promieniowi kuli. Srednica tego koła pionowa na iego płaszczyznę, nazywa się iego *osią* (axis), a iéy punkta ostateczne na powierzchnią kuli wychodzące zowią się *biegunami* koła (poli). Skąd się wnosi, że biegun iest zawsze o 90° od swego koła odległy. Iestto *środek* (centrum), z którego się cerklem zakrzywionym rysuie koło wielkie na powierzchni kuli. Ieżeli kulę przetniemy drugą płaszczyzną przez środek przechodzącą; powstanie drugie koło wielkie, które się przetnie z pierwszém kołem w odległości 180°, i obadwa zamkną plac na powierzchni kuli. Punkta przecięcia się płaszczyzn zrobią na powierzchni kuli dwa kąty równe, o 180° od siebie odległe, które są razem kątami pochyłości płaszczyzn do siebie. Nie może więc na powierzchni kuli bydź plac zamknięty od dwóch kół wielkich, chyba że każdy łuk koła iest 180°. Ieżeli chcemy mnieyszemi łukami zamknąć plac na powierzchni kuli, trzeba ią przeciąć trzecią płaszczyzną przez środek przechodzącą poprzecznie do pierwszych płaszczyzn: to iest, żeby ta trzecia płaszczyzna przecinała liniią, w któréy się przecinaią dwie pierwsze. Natenczas przetną się na powierzchni kuli trzy łuki kół wielkich, od trzech płaszczyzn zrodzone.

Wystawmy sobie, że tróykąta prostokreślnego trzy boki a, b, c, są cięciwami tych łuków, a zatém tróykąt *ABC* wpisany w powierzchnią kuli; kąty *A*, *B*, *C*, uważane na płaszczyznie tróykąta prostokreślnego, będą kątami cięciw; uważane zaś na powierzchni kuli, będą kątami łuków. Od wierzchołków tych kątów poprowadzone liniie proste do środka kuli będą iéy promieniami, i wystawią piramidę tróykątną, maiącą swóy wierzchołek w środku kuli, tróykąt prostokreślny *a b c* za podstawę, a część powierzchni kuli między płaszczyznami przecinaiącemi albo między łukami od płaszczyzn zrysowanemi zawartą, za miarę kąta bryłowego. Ta część powierzchni kuli zamyka *tróykąt kulisty*, *maiący za boki*, *łuki kół wielkich mierzące kąty między promieniami kuli w iéy środku zawarte:* kąty zaś tróykąta kulistego są kątami stycznych, któreby się z wierzchołka poprowadziły do boków tróykąta. Ponieważ te styczne są pionowe na promień kuli, a każdy promień iest przecięciem się dwóch płaszczyzn; *więc kąty tróykąta kulistego*, będąc każdy z nich kątem dwóch liniy pionowych na spólne przecięcie, *wyrażaią pochyłości płaszczyzn przecinaiących kulę.*

A ieżeli od wierzchołka kąta łukowego *A* (*fig. a Tab. I.*) przeciągniemy każde iego ramie *AB*, *AC*, aż do 90°, i zarysuiemy z tegoż wierzchołka łuk MN między temi ramionami; punkt wierzchołka *A* będzie biegunem tego ostatniego łuku. Promienie *SM*, *SN* w środku kuli *S* przecinaiące się, i obeymuiące ten łuk są równoległe stycznym, kąt łukowy *A* zawieraiącym; bo są także pionowe na liniią *AS* spólnego płaszczyzn przecięcia: więc kąt między temi promieniami iest równy kątowi między stycznemi, czyli kątowi łukowemu *A*. Przeto w tróykącie kulistym każdy kąt, iest rowny łukowi koła wielkiego między ramionami zawartemu, i zarysowanemu z wierzchołka iako z bieguna, w odległości 90°.

Ma więc każdy kąt w tróykącie kulistym równy sobie łuk na powierzchni kuli. Dla poznania lepszego tych łuków i kątów wystawmy sobie na *fig.* 2. *Tab. I.* tróykąt kulisty ABC, poprzeciągaymy iego boki, każdy do 90^c; z wierzchołka każdego kąta w odległości 90° zarysuymy łuki, póki się nawzaiem nie przetną; powstanie stąd inny tróykąt kulisty $A'B'C'$, który się nazywa biegunowy tróykąta ABC. W tym nowym tróykącie łuk DE=kątowi A; $ML=B$; $NO=C$.

Ponieważ punkt A' leży na łuku $C'A'$ odrysowanym z B, i razem na łuku $B'A'$ odrysowanym z punktu C, więc A' iest biegunem boku BC. Podobnie się dowodzi że B' iest biegunem boku AC; C' biegunem boku AB: więc tróykąt ABC iest znowu biegunowym tróykąta $A'B'C'$.

Z odległości łuku od swego bieguna wypada: że $C'L=90^\circ$; $MA'=90^\circ$; więc ML czyli kąt B iest dopełnieniem boku $A'C'$ do 180°. Podobnie się dowodzi, że łuk DE czyli kąt A iest dopełnieniem łuku $B'C'$ do 180°: i łuk NO czyli kąt C iest dopełnieniem łuku $A'B'$ do 180°. Znacząc więc kąty tróykąta kulistego wielkiemi literami alfabetu, a temiż samemi literami małemi boki im przeciwległe; mamy następuiące zrównania:

$$A+a'=180^\circ;\ B+b'=180^\circ;\ C+c'=180^\circ.$$

Z tego samego początku wypada: że $BM=90^\circ$; $CN=90^\circ$, więc BC iest dopełnieniem łuku NM czyli kąta A' do 180°: podobnie się dowodzi, że AC iest dopełnieniem kąta B' do 180°, i AB dopełnieniem do 180° kąta C': co się tak wyraża:

$$A'+a=180^\circ;\ B'+b=180^\circ;\ C'+c=180^\circ.$$

Więc w dwóch tróykątach, z których ieden iest biegunowym drugiego, każdy kąt w iednym którymkolwiek iest dopełnieniem do 180° boku sobie odpowiadaiącego w drugim tróykącie.

Troykąt biegunowy wypadaiący z własności kuli, był nasamprzód upatrzony i opisany przez *Caswell* w dziełach *Wallis* Tom II, k. 896. Jest on prawdą zasadową, iak go sprawiedliwie uważa *Euler*, nie zaś prawdą wypadkową rachunku.

Zrównanie fundamentalne całey Trygonometryi.

§ 2. Weźmy iuż pod uwagę tróykąt kulisty *ABC* na fig. 1. złożony z trzech kątów, i z trzech łuków kół wielkich. Każdy kąt między łukami przecinaiącemi się zawarty wyrażać będziemy wielką literą alfabetu, iak się dopiero powiedziało: tąż zaś samą literą małą znaczyć będziemy łuk czyli bok naprzeciwko tego kąta leżący: n. p. *A* znaczy kąt, *a* bok mu przeciwległy. Przez takie znaczenie łatwo będzie czytać zrównania bez pomocy figury. Można się w całey tey nauce obeyśdź bez figur. Z wierzchołka kąta *A* poprowadźmy styczną *AK* do łuku *c*; styczną *AL* do łuku *b*. Przez punkta ostateczne tych łuków *B*,*C*, poprowadźmy ze środka kuli *O* liniie proste aż do przecięcia stycznych, to iest *OK* która iest sieczną łuku *c*, i *OL* sieczną łuku *b*: kąt *KOL* w środku kuli mierzy się łukiem *a*. Złączmy punkta *K*, *L*, liniią prostą *KL*, która iak widzimy iest spolna dwom troykątom prostokreślnym *KAL*, *KOL*; więc Fig. 1.

$$KL^2 = KA^2 + AL^2 - 2KA.AL.\text{dost}A$$
$$= KO^2 + LO^2 - 2KO.LO.\text{dost}a:$$

przetłumaczmy te liniie na ich znaczenia trygonometryczne, i wypadnie

$$\text{sty}^2c + \text{sty}^2b - 2\,\text{sty}\,c.\text{sty}\,b.\text{dost}A =$$
$$= \text{sie}^2c + \text{sie}^2b - 2\text{sie}\,c.\text{sie}\,b.\text{dost}\,a.$$

aże wziąwszy promień kuli za iedność $\text{sie}^2 c - \text{sty}^2 c = 1$, $\text{sie}^2 b - \text{sty}^2 b = 1$. Wiemy z Rozdziału IV Algebry że $\text{sie}\, c = \frac{1}{\text{dost}\, c}$; $\text{sie}\, b = \frac{1}{\text{dost}\, b}$ $\text{sty}\, c = \frac{\text{wst}\, c}{\text{dost}\, c}$, $\text{sty}\, b = \frac{\text{wst}\, b}{\text{dost}\, b}$. Te wartości wprowadziwszy w ostatnie zrównanie, rozdzieliwszy ie przez 2, i zniosłszy ułamki; otrzymamy

$$\text{dost}A = \frac{\text{dost}a - \text{dost}b.\text{dost}c}{\text{wst}b.\text{wst}c}$$

$$\text{dost}B = \frac{\text{dost}b - \text{dost}a.\text{dost}c}{\text{wst}a.\text{wst}c} \qquad (1)$$

$$\text{dost}C = \frac{\text{dost}c - \text{dost}a.\text{dost}b}{\text{wst}a.\text{wst}b}$$

zrównania na $\text{dost}B$, $\text{dost}C$ wypadną nam, kiedy to samo zrobimy z kątami B, C, cośmy zrobili z kątem A. Każde z nich ten sam związek wyraża, ale przeniesiony do inszego kąta. Każde z tych zrównań nazywa się zrównaniem *fundamentalném*; bo z niego *De la Grange* całą trygonometryą wyciągnął. Zrobimy i my toż samo w sposób ieszcze iak nam się zdaie prościeyszy, przydaiąc inne wielkiey wagi zrównania, o których ten wielki Geometra nawet nie wspomniał. Nim daley postąpimy, nadaymy wprzód zrównaniom (1) inną wygodnieyszą do rachunku postać. Ponieważ § 51. Algebry uczy nas, że $1 - \text{dost}A = 2\text{wst}^2 \tfrac{1}{2}A$, więc

$$2\,\text{wst}^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\text{wst}b.\text{wst}c + \text{dost}b.\text{dost}c - \text{dost}a}{\text{wst}b.\text{wst}c}$$

$$= \frac{\text{dost}\,(b-c) - \text{dost}a}{\text{wst}b.\text{wst}c}$$

$$= \frac{2\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b-c).\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{wst}b.\text{wst}c} \quad \text{§ 54. Algeb.}$$

pierwsza strona tego ostatniego zrównania iest koniecznie dodatna; więc i druga taką bydź musi: skąd wypada $a+b>c$, $a+c>b$: bo gdyby mogło bydź $a+b<c$, $a+c<b$; byłoby razem $a<c-b$, $a<b-c$, a zatém $2a<0$, co iest niedorzecznością. Więc w każdym tróykącie kulistym *summa dwóch boków iest większa od trzeciego.* A ieżeli $a+b>c$, musi bydź $a>c-b$, to iest: *każdy bok tróykąta iest większy od różnicy dwóch innych.*

Tenże § 51. Alg. dowodzi, że $1+\mathrm{dost}A=2\mathrm{dost}^2\frac{1}{2}A$, dodaymy do iedności pierwsze (1), będzie

$$2\,\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\mathrm{wst}b.\mathrm{wst}c-\mathrm{dost}b.\mathrm{dost}c+\mathrm{dost}a}{\mathrm{wst}b\ \mathrm{wst}c}$$

$$=\frac{\mathrm{dost}a-\mathrm{dost}(b+c)}{\mathrm{wst}b.\mathrm{wst}c}$$

$$=\frac{2\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+b+c).\mathrm{wst}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\mathrm{wst}b.\mathrm{wst}c}$$

a rozdzieliwszy wstawę przez dostawę

$$\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+b-c).\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+b+c).\mathrm{wst}\frac{1}{2}(b+c-a)} \qquad (1')$$

podobnie robiąc z dwoma drugiemi zrównaniami na $\mathrm{dost}B$, $\mathrm{dost}C$, przyydziemy do

$$\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}B=\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(b+c-a).\mathrm{wst}\frac{1}{2}(b+a-c)}{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+b+c).\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+c-b)} \qquad (1'')$$

$$\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}C=\frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+c-b).\mathrm{wst}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+b+c).\mathrm{wst}\frac{1}{2}(a+b-c)} \qquad (1''').$$

Jeżeli te trzy zrównania (1'), (1''), (1''') rozdzielimy przez siebie, wypadną nam trzy inne, następuiące:

$$\frac{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}A}{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}B}=\frac{\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}(b+c-a)} \qquad (1_{,})$$

$$\frac{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}A}{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}C}=\frac{\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}(b+c-a)} \qquad (1_{,,})$$

$$\frac{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}B}{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}C}=\frac{\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}(a+c-b)} \qquad (1_{,,,})$$

te trzy ostatnie zrównania częstokroć przydatne, i używane w rachunku analitycznym; pokażą się nawet w trygonometryi potrzebne.

Pierwsze zrównanie główne.

§ 3. Ze zrównań (1) wyciągnęliśmy wstawę, dostawę, i wreszcie styczną połowy każdego kąta: szukaymy teraz wstawy kąta całkiego. Ponieważ $\mathrm{wst}A=\sqrt{(1-\mathrm{dost}^2 A)}$, więc (1) dadzą

$$\mathrm{wst}A=\frac{\sqrt{[\mathrm{wst}^2 b.\mathrm{wst}^2 c-(\mathrm{dost}a-\mathrm{dost}b.\mathrm{dost}c)^2]}}{\mathrm{wst}\,b.\mathrm{wst}\,c}$$

$$\mathrm{wst}B=\frac{\sqrt{[\mathrm{wst}^2 a.\mathrm{wst}^2 c-(\mathrm{dost}b-\mathrm{dost}a.\mathrm{dost}c)^2]}}{\mathrm{wst}a.\,\mathrm{wst}c}$$

$$\mathrm{wst}C=\frac{\sqrt{[\mathrm{wst}^2 a.\mathrm{wst}^2 b-(\mathrm{dost}c-\mathrm{dost}a.\mathrm{dost}b)^2]}}{\mathrm{wst}a.\,\mathrm{wst}b}$$

znak drugi — przed znakiem pierwiastkowym opuszczamy, iako nie należący do tróykąta, dla tey samey przyczyny, którąśmy dali na tróykąt prostokreślny w § 1. Niech będzie

$$f=\sqrt{[\mathrm{wst}^2 b.\mathrm{wst}^2 c-(\mathrm{dost}\,a-\mathrm{dost}b.\mathrm{dost}\,c)^2]}$$

chociaż f stanowiąc licznika ułamku, zdaie się mieć na każdy kąt A, B, C inną wartość; ieżeli iednak wyrazimy wstawy przez dostawy; to iest $\mathrm{wst}^2 a=1-\mathrm{dost}^2 a$;

$\text{wst}^2 b = 1 - \text{dost}^2 b$, $\text{wst}^2 c = 1 - \text{dost}^2 c$, po wykonaném mnożeniu, i po rozwinieniu w drugim terminie potęgi drugiey; wartość na f we wszystkich trzech zrównaniach, to iest na wszystkie trzy kąty A, B, C, pokaże się ta sama, i to następuiąca:

$$f = \sqrt{(1 - \text{dost}^2 a - \text{dost}^2 b - \text{dost}^2 c + 2\text{dost}a.\text{dost}b.\text{dost}c)}$$

dowodzi się w Geometryi; że wartość na f wyraża stosunek równoległościanu ukośnokątnego, do prostokątnego: to iest: kiedy kąty między krawędziami kąt bryłowy zamykaiącemi, są: a, b, c ukośne, albo proste. *Legendre Géométrie Note V. p. 297.* Przeto:

$$\text{wst}A = \frac{f}{\text{wst}b.\text{wst}c},$$

$$\text{wst}B = \frac{f}{\text{wst}c.\text{wst}a},$$

$$\text{wst}C = \frac{f}{\text{wst}a.\text{wst}b}:$$

więc

$$\frac{\text{wst}A}{\text{wst}a} = \frac{\text{wst}B}{\text{wst}b} = \frac{\text{wst}C}{\text{wst}c} \qquad (2)$$

to iest: w każdym tróykącie kulistym *wstawy kątów tak się maią do siebie, iak wstawy boków tym kątom przeciwległych.* Zrównanie (2) iest pierwszém *zrównaniem głównem* rozróżniaiącém tróykąt kulisty od prostokreślnego.

Jeżeli $\text{wst}a = \text{wst}b$; wypada z (2) $\text{wst}A = \text{wst}B$, i na odwrót: więc w tróykącie równoramiennym, *kąty przeciwległe bokom równym są równe:* i znowu *gdy dwa kąty w tróykącie są równe, tróykąt iest równoramienny.*

Ze zrównań (2) wypada, $\text{wst}A.\text{wst}b = \text{wst}a.\text{wst}B$, $\text{wst}A.\text{wst}c = \text{wst}a.\text{wst}C$,

ieżeli te dwa zrównania raz dodamy, drugi raz odciągniemy od siebie; otrzymamy

$$\left.\begin{array}{l}\text{wst}A(\text{wst}b+\text{wst}c) = \text{wst}a(\text{wst}B+\text{wst}C) \\ \text{wst}A(\text{wst}b-\text{wst}c) = \text{wst}a(\text{wst}B-\text{wst}C)\end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

a położywszy z § 51. Alg. za $\text{wst}A = 2\text{wst}\tfrac{1}{2}A.\text{dost}\tfrac{1}{2}A$, za $\text{wst}a = 2\text{wst}\tfrac{1}{2}a.\text{dost}\tfrac{1}{2}a$; i potém za summę i różnicę wstaw, ich wartość w mnogościach z § 54. k. 284 Algebry, łatwo przyydziemy do następuiących zrównań.

$$(\alpha_1) \quad \begin{array}{l} \dfrac{\text{wst}\frac{1}{2}a}{\text{wst}\frac{1}{2}(b+c)}\cdot\dfrac{\text{dost}\frac{1}{2}a}{\text{dost}\frac{1}{2}(b-c)} = \dfrac{\text{wst}\frac{1}{2}A}{\text{dost}\frac{1}{2}(B-C)}\cdot\dfrac{\text{dost}\frac{1}{2}A}{\text{wst}\frac{1}{2}(B+C)} \\[2ex] \dfrac{\text{wst}\frac{1}{2}a}{\text{wst}\frac{1}{2}(b-c)}\cdot\dfrac{\text{dost}\frac{1}{2}a}{\text{dost}\frac{1}{2}(b+c)} = \dfrac{\text{dost}\frac{1}{2}A}{\text{wst}\frac{1}{2}(B-C)}\cdot\dfrac{\text{wst}\frac{1}{2}A}{\text{dost}\frac{1}{2}(B+C)} \end{array}$$

każde z tych zrównań nie iest-li złożone z dwóch zrównań prostych? dowiemy się niżey.

Drugie zrównanie główne.

§ 4. Maiąc tróykąt kulisty, którego kąty A, B, C: boki tym kątom przeciwległe a, b, c; wystawmy sobie drugi tróykąt z kątami A', B', C' i z bokami im przeciwległemi a', b', c' tak, żeby ieden był biegunowy drugiego. Podług tego, cośmy powiedzieli na końcu § 1. mieć będziemy następuiące zrównania:

$$A = 180^\circ - a',\quad B = 180^\circ - b',\quad C = 180^\circ - c',$$
$$A' = 180^\circ - a,\quad B' = 180^\circ - b,\quad C' = 180^\circ - c,$$

a zatém

$$A + B + C + a' + b' + c' = 3.180^\circ,$$
$$A' + B' + C' + a + b + c = 3.180^\circ.$$

A ieżeli $A = 180° - a'$, $\text{wst}A = \text{wst}a'$, $\text{dost}A = -\text{dost}a'$: podobnie $\text{wst}B = \text{wst}b'$, $\text{dost}B = -\text{dost}b'$; $\text{wst}C = \text{wst}c'$ $\text{dost}C = -\text{dost}\,c'$; $\text{wst}A' = \text{wst}a$, $\text{dost}A' = -\text{dost}a$; $\text{wst}\,B' = \text{wst}\,b$, $\text{dost}B' = -\text{dost}\,b$; $\text{wst}C' = \text{wst}\,c$, $\text{dost}C' = -\text{dost}\,c$. Wprowadźmy te wartości w zrównania (1) § 1; otrzymamy

$$\text{dost}\,a' = \frac{\text{dost}\,A' + \text{dost}\,B'.\text{dost}\,C'}{\text{wst}\,B'.\text{wst}\,C'}$$

więc i

$$\text{dost}\,a = \frac{\text{dost}\,A + \text{dost}\,B.\text{dost}\,C}{\text{wst}B.\text{wst}C}$$

$$\text{dost}\,b = \frac{\text{dost}\,B + \text{dost}A.\text{dost}C}{\text{wst}A.\text{wst}C} \qquad (3)$$

$$\text{dost}\,c = \frac{\text{dost}C + \text{dost}\,B.\text{dost}A}{\text{wst}B.\text{wst}A}$$

Jak zrównania (1) wyrażaią każdy kąt przez trzy boki; tak zrównania (3) wyrażaią każdy bok przez trzy kąty. Każde ze zrównań (3) wyraża ten sam związek, do innego boku przeniesiony. Nazywać ie będziemy drugiém *zrównaniem głównêm*. Przeróbmy ie na postać do rachunku wygodnieyszą. Ponieważ $1 - \text{dost}a = 2\text{wst}^2\frac{1}{2}a$: zrównanie pierwsze (3) odciągnione od iedności, wyda

$$2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\text{wst}\,B.\text{wst}\,C - \text{dost}\,B.\text{dost}\,C - \text{dost}\,A}{\text{wst}\,B.\text{wst}\,C}$$

$$= -\frac{\text{dost}(B+C) + \text{dost}\,A}{\text{wst}\,B.\text{wst}\,C}, \text{ § 54. Algeb.}$$

$$= -\frac{2\text{dost}\tfrac{1}{2}(A+B+C).\text{dost}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{wst}B.\text{wst}\,C}$$

Pierwsza strona zrównania iest koniecznie dodatna;

więc w drugiey stronie iedna z dostaw bydź musi odiemna, a zatém kąt iey rozwarty. Skąd wypada, że $(A+B+C)>180^\circ$: a zatém *w tróykącie kulistym summa wszystkich trzech kątów iest większa od dwóch kątów prostych.*

Ażeśmy wyżey dowiedli że $A+B+C+a'+b'+c' = 3.180^\circ = 6.90^\circ$; więc ieżeli $(A+B+C)>2.90^\circ$, musi bydź $(a'+b'+c')<4.90^\circ$, to iest: *w każdym tróykącie kulistym summa wszystkich trzech boków iest mnieysza od czterech kątów prostych.*

Z przedostatniego twierdzenia wnosi się ieszcze to: że przeciągnąwszy którykolwiek bok tróykąta kulistego, ponieważ kąty przyległe są równe dwom prostym, *kąt zewnętrzny w tróykącie kulistym, iest mnieyszy od summy dwóch kątów wewnętrznych.*

Jeżeli każde ze zrównań (3), przydamy do iedności, $1+\text{dost}\,a = 2\text{dost}^2\tfrac{1}{2}a$, wypadnie

$$2\text{dost}^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\text{wst}\,B.\text{wst}\,C+\text{dost}\,B.\text{dost}\,C+\text{dost}\,A}{\text{wst}\,B.\text{wst}\,C}$$

$$= \frac{\text{dost}(B-C)+\text{dost}\,A}{\text{wst}\,B.\text{wst}\,C}$$

$$= \frac{2\text{dost}\tfrac{1}{2}(A+B-C).\text{dost}\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\text{wst}\,B.\text{wst}\,C}$$

rozdzielmy wstawę przez dostawę; a otrzymamy

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}a = -\frac{\text{dost}\tfrac{1}{2}(A+B+C).\text{dost}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{dost}\tfrac{1}{2}(A+B-C).\text{dost}\tfrac{1}{2}(A+C-B)} \qquad (3')$$

Podobnie postąpiwszy z dwoma pozostałemi zrównaniami (3) na dost$b$, dost$c$, mieć będziemy

$$\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}b = -\frac{\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(A+B+C).\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(A+B-C).\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(B+C-A)} \qquad (3'')$$

$$\mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}c = -\frac{\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(A+B+C).\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(A+C-B).\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(B+C-A)} \qquad (3''')$$

kiedy iedno z tych zrównań rozdzielimy przez drugie, wypadną trzy następuiące

$$\frac{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}a}{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}b} = \frac{\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(A+C-B)} \qquad (3_{,})$$

$$\frac{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}a}{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}c} = \frac{\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(A+B-C)} \qquad (3_{,,})$$

$$\frac{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}b}{\mathrm{sty}\tfrac{1}{2}c} = \frac{\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}(A+B-C)} \qquad (3_{,,,})$$

które wyrażaią stosunek boków przez kąty, tak iak $(1_{,})$ $(1_{,,})$ $(1_{,,,})$ w § 2, okazuią stosunek kątów przez boki: i iak pierwsze tak drugie wielkie mieć mogą użycie w rachunku analitycznym.

Trzecie zrównanie główne.

§ 5. Weźmy ieszcze do uwagi zrównanie fundamentalne (1) § 2; wyciągniemy z niego

$$\mathrm{dost}a = \mathrm{dost}b.\mathrm{dost}c + \mathrm{wst}b.\mathrm{wst}c.\mathrm{dost}A,$$
$$\mathrm{dost}b = \mathrm{dost}a.\mathrm{dost}c + \mathrm{wst}a.\mathrm{wst}c.\mathrm{dost}B,$$
$$\mathrm{dost}c = \mathrm{dost}a.\mathrm{dost}b + \mathrm{wst}a.\mathrm{wst}b.\mathrm{wst}C,$$

ieżeli za dost$b$ w pierwszém zrównaniu, weźmiemy wartość z drugiego: otrzymamy

$$\mathrm{dost}a = \mathrm{dost}a.\mathrm{dost}^2c + \mathrm{wst}a.\mathrm{wst}c.\mathrm{dost}c.\mathrm{dost}B$$
$$+ \mathrm{wst}b.\mathrm{wst}c.\mathrm{dost}A:$$

przeniósłszy pierwszy wyraz z drugiey strony zrównania na pierwszą: i za $1-\text{dost}^2 c = \text{wst}^2 c$, w ostatnim zaś terminie za $\text{wst}\, b = \frac{\text{wst}\, a . \text{wst}\, B}{\text{wst}\, A}$ włożywszy te wartości, i całe potém zrównanie rozdzieliwszy przez $\text{wst}\, c . \text{wst}\, a$, otrzymamy

$$\text{dosty}\, a . \text{wst}\, c = \text{dost}\, c . \text{dost}\, B + \text{wst}\, B . \text{dosty}\, A \qquad (4).$$

W toż samo zrównanie pierwsze, wprowadziwszy wartość na $\text{dost}\, c$ z trzeciego, zamieniwszy $1-\text{dost}^2 b$ na $\text{wst}^2 b$, i $\text{wst}\, c = \frac{\text{wst}\, a . \text{wst}\, C}{\text{wst}\, A}$, potém całe zrównanie rozdzieliwszy przez $\text{wst}\, a . \text{wst}\, b$, mieć będziemy

$$\text{dosty}\, a . \text{wst}\, b = \text{dost}\, b . \text{dost}\, C + \text{wst}\, C . \text{dosty}\, A \qquad (4').$$

Podobnie postępuiąc z dwoma zrównaniami na $\text{dost}\, b$, $\text{dost}\, c$, każde z nich wyda nam dwa zrównania, następuiące:

$$\left.\begin{aligned} \text{dosty}\, b . \text{wst}\, c &= \text{dost}\, c . \text{dost}\, A + \text{wst}\, A . \text{dosty}\, B, \\ \text{dosty}\, b . \text{wst}\, a &= \text{dost}\, a . \text{dost}\, C + \text{wst}\, C . \text{dosty}\, B, \\ \text{dosty}\, c . \text{wst}\, a &= \text{dost}\, a . \text{dost}\, B + \text{wst}\, B . \text{dosty}\, C, \\ \text{dosty}\, c . \text{wst}\, b &= \text{dost}\, b . \text{dost}\, A + \text{wst}\, A . \text{dosty}\, C. \end{aligned}\right\} \quad (4'')$$

Te zrównania zachodzą między dwoma kątami i dwoma bokami, z których ieden iest przyległy, drugi przeciwległy iednemu z kątów: że zaś każdy kąt ma dwa boki przyległe, dla tego z każdego zrównania (1), wypadły dwa. Wszystkie te zrównania (4) są łatwe do pamiętania: wszystkie wyrażaią ten sam związek do różnych boków i kątów przeniesiony, który stanowi trzecie *zrównanie główne.* Wszystkie kombinacye zachodzić mogące między dwoma kątami i dwoma bokami, iednym przyległym, a drugim przeciwległym; zawieraią się w sześciu zrównaniach (4). Zrównanie fundamentalne (1), i z niego wyciągnione trzy główne (2), (3), (4), rozwięzują wszystkie przypadki i pytania zachodzące w tróykącie kulistym, iako to niżey zobaczymy. Możnaby na ich przystosowaniu skończyć trygonometryą kulistą iak zrobił *de la Grange*, z tym, potrzebnym przydatkiem, żeby każdemu zrównaniu (4) nadadź wygodnieyszą do rachunku przez logarytmy postać, iakeśmy to zrobili na (1), (3). Ale tu zachodzi iedna ważna uwaga: zrównanie fundamentalne (1) wydało trzy główne: kombinacya czterech tych zrównań między sobą, czy nas nie przyprowadzi albo do nowych iakich prawd o tróykącie kulistym, albo do sposobów ułatwiaiących rachunek w rozwiązaniu tróykąta? Rozbierzmy to zapytanie.

Zrównania między trzema bokami i trzema kątami razem.

§ 6. Poznawszy fundamentalne i główne trygonometryi zrównania, kombinuymy ie teraz z sobą, to iest: związki iedne łączmy z drugiemi, przez rozmaite wartości tychże samych boków i kątów. Pierwsze zrównanie (3) daie

$$\mathrm{dost}A = \mathrm{dost}a.\mathrm{wst}B.\mathrm{wst}C - \mathrm{dost}B.\mathrm{dost}C$$
$$\mathrm{dost}a.\mathrm{dost}A = \mathrm{dost}^2a.\mathrm{wst}B.\mathrm{wst}C - \mathrm{dost}a.\mathrm{dost}B.\mathrm{dost}C.$$

Aże ze zrównań (1) $\mathrm{dost}a = \mathrm{dost}A.\mathrm{wst}b.\mathrm{wst}c + \mathrm{dost}b.\mathrm{dost}c$,

włożmy tę wartość za dost$a$ w pierwszą stronę zrównania poprzedzaiącego, a otrzymamy

$$\mathrm{dost}^2A.\mathrm{wst}b.\mathrm{wst}c + \mathrm{dost}A.\mathrm{dost}b.\mathrm{dost}c$$
$$= \mathrm{dost}^2a.\mathrm{wst}B.\mathrm{wst}C - \mathrm{dost}a.\mathrm{dost}B.\mathrm{dost}C;$$

zamieńmy dostawy na wstawy: $\mathrm{dost}^2A = 1 - \mathrm{wst}^2A$, $\mathrm{dost}^2a = 1 - \mathrm{wst}^2a$, będzie

$$\text{wst}b.\text{wst}c - \text{wst}^2 A.\text{wst}b.\text{wst}c + \text{dost}A.\text{dost}b.\text{dost}c$$
$$= \text{wst}B.\text{wst}C - \text{wst}^2 a.\text{wst}B.\text{wst}C - \text{dost}a.\text{dost}B.\text{dost}C$$

w drugim wyrazie drugiey strony zrównania, z (2) położmy za $\text{wst}B = \frac{\text{wst}A.\text{wst}b}{\text{wst}a.}$ za $\text{wst}C = \frac{\text{wst}A.\text{wst}c}{\text{wst}a}$

a terminy znoszące się wymazawszy; otrzymamy

$$\text{wst}b.\text{wst}c. + \text{dost}b.\text{dost}c.\text{dost}A = \text{wst}B.\text{wst}C - \text{dost}B.\text{dost}C.\text{dost}a \qquad (\beta_1)$$

podobnie postąpiwszy ze zrównaniami na dost$B$, dost$C$, w (3) wynaydziemy dwa inne

$$\text{wst}a.\text{wst}b + \text{dost}a.\text{dost}b.\text{dost}C = \text{wst}A.\text{wst}B - \text{dost}A.\text{dost}B.\text{dost}c \qquad (\beta_2)$$
$$\text{wst}a.\text{wst}c + \text{dost}a.\text{dost}c.\text{dost}B = \text{wst}A.\text{wst}C - \text{dost}A.\text{dost}C.\text{dost}b \qquad (\beta_3)$$

każde ze zrównań (β_1), (β_2), (β_3) zawiera wszystkie trzy boki i wszystkie trzy kąty tróykąta: podał ie naypierwszy *Cagnoli* w swoiey Trygonometryi. Ale i zrównanie (α) w § 2 toż samo wyraża, do któregośmy przyszli tak prostym i łatwym sposobem. Każde nawet ze zrównań (4) może nas przyprowadzić do takiego, które ogarnia wszystkie rzeczy w tróykącie zachodzące; kiedy n. p. w drugiem (4) albo za wst$b$, albo za wst$C$, wprowadzimy z (2) wartość wyrażoną przez c, B. Podobne związki między wszystkiemi rzeczami w tróykącie miano za zabawkę analistów, póki się nie pokazało ich użycie w zawilszych astronomii pytaniach.

Zrównania (α_1) w § 3 które tak prostym sposobem wyciągnęliśmy z (α), zdaią się każde z dwóch zrównań złożone, na które iednak nie mogliśmy ich rozebrać. Każde zrównanie *Cagnoli* powinnoby nas do tych, albo do podobnych wypadków przyprowadzić. Zróbmy tego probę na (β_1). Wiemy z § 51. Algebry, że

$$\text{dost}A = 1 - 2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A = 2\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A - 1\,,$$
$$\text{dost}a = 1 - 2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a = 2\text{dost}^2\tfrac{1}{2}a - 1\,;$$

$$\text{wst}B.\text{wst}C + \text{dost}B.\text{dost}C = \text{dost}(B - C):$$

a zatém

$$\text{dost}B.\text{dost}C = \text{dost}(B - C) - \text{wst}B.\text{wst}C$$
$$\text{dost}B.\text{dost}C - \text{wst}B.\text{wst}C = \text{dost}(B + C).$$

Ze zrównań (3) wziąwszy pod uwagę pierwsze, mamy z niego

$$1 - \text{dost}a = 2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a = 2(1 - \text{dost}^2\tfrac{1}{2}a) =$$

$$= \frac{\text{wst}B.\text{wst}C - \text{dost}A - \text{dost}B.\text{dost}C}{\text{wst}B.\text{wst}C};$$

skąd wypada:

$$2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a.\text{wst}B.\text{wst}C = -\text{dost}(B + C) - \text{dost}A\,,$$
$$2\text{dost}^2\tfrac{1}{2}a.\text{wst}B.\text{wst}C = \text{dost}(B - C) + \text{dost}A.$$

Weźmy znowu pierwsze ze zrównań (1) § 2, i podobnie postępuiąc, wyciągniemy

$$1 - \text{dost}A = 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A = 2(1 - \text{dost}^2\tfrac{1}{2}A)$$

$$= \frac{\text{wst}b.\text{wst}c - \text{dost}a + \text{dost}b.\text{dost}c}{\text{wst}b.\text{wst}c};$$

skąd znowu wypada, że

$$2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A\,\text{wst}b.\text{wst}c = \text{dost}\,(b - c) - \text{dost}a\,,$$
$$2\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A\,\text{wst}b.\text{wst}c = -\text{dost}(b + c) + \text{dost}a.$$

Za pomocą przytoczonych tu wartości, staraymy się iakiekolwiek zrównanie *Cagnoli*, n. p. (β_1) przywiesdź do nayprostszych wyrazów, zachowuiąc w niém wszystkie boki i wszystkie kąty:

$$\text{wst}b.\text{wst}c + \text{dost}b.\text{dost}c.\text{dost}A = \text{wst}B.\text{wst}C - \text{dost}B.\text{dost}C.\text{dost}a \quad (\beta_1)$$

wprowadźmy w (β_1) za dost$A$ iego wartość $2\text{dost}^2\frac{1}{2}A-1$; za dost$a$ wartość $=1-2\text{wst}^2\frac{1}{2}a$, otrzymamy

$$-\text{dost}(b+c)+2\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{dost}b.\text{dost}c=$$
$$=-\text{dost}(B+C)+2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a.\text{dost}B.\text{dost}C \quad (\beta'_1):$$

aże dowiedliśmy wyżey, że

$$2\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{dost}b.\text{dost}c=$$
$$=2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{dost}(b-c)-2\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}b.\text{wst}c$$
$$=2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{dost}(b-c)+\text{dost}(b+c)-\text{dost}a\,;$$

$$2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a.\text{dost}B.\text{dost}C=$$
$$=2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a.\text{dost}(B-C)-2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a.\text{wst}B.\text{wst}C$$
$$=2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a.\text{dost}(B-C)+\text{dost}(B+C)+\text{dost}A:$$

te ostatnie wartości wprowadzone w (β'_1), po wymazaniu znoszących się terminów, dadzą

$$2\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{dost}(b-c)-\text{dost}A=$$
$$=2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a.\text{dost}(B-C)+\text{dost}a.$$

W tém zrównaniu za $-$dost$A$ położywszy $1-2\text{dost}^2\frac{1}{2}A$; a za dost$a=1-2\,\text{wst}^2\frac{1}{2}a$; znaydziemy

$$2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A[\text{dost}(b-c)-1]=2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a[\text{dost}(B-C)-1]:$$

aże $\text{dost}(b-c)=1-2\text{wst}^2\frac{1}{2}(b-c)$, $\text{dost}(B-C)=1-2\text{wst}^2\frac{1}{2}(B-C)$ po wprowadzeniu tych wartości w zrównanie ostatnie, odmienieniu znaków, i po wyciągnieniu pierwiastków, przyydziemy do

$$\frac{\text{wst}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{wst}\frac{1}{2}a}=\frac{\text{wst}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{dost}\frac{1}{2}A} \qquad \text{I.}$$

Powtóre: W to samo zrównanie (β_1) położmy za dost $A=1-2\,\text{wst}^2\frac{1}{2}A$, za dost $a=1-2\text{wst}^2\frac{1}{2}a$, przez co zamieni się na

$$\text{dost}(b-c)-2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A.\text{dost}\,b.\text{dost}\,c=$$
$$=-\text{dost}(B+C)+2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a.\text{dost}B.\text{dost}C:$$

aże dowiedliśmy wyżey, że

$$\text{dost}(b-c)=2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c+\text{dost}\,a,$$
$$-\text{dost}(B+C)=2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a.\text{wst}B.\text{wst}C+\text{dost}A;$$

te wartości wprowadzone w poprzedzaiące zrównanie, zamienią ie na $-2\,\text{wst}^2\frac{1}{2}A.\text{dost}(b+c)-\text{dost}A=$ $=2\,\text{wst}^2\frac{1}{2}a.\text{dost}(B-C)-\text{dost}a$; za $-\text{dost}A$ włożywszy iego wartość $-1+2\text{wst}^2\frac{1}{2}A$, za $-\text{dost}a$, $-1+2\text{wst}^2\frac{1}{2}a$, zamieni się na

$$\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A[1-\text{dost}(b+c)]=\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a[\text{dost}(B-C)+1]:$$

aże

$$1-\text{dost}(b+c)=2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}(b+c),$$
$$1+\text{dost}(B-C)=2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}(B-C);$$

więc

$$\frac{\text{wst}\frac{1}{2}(b+c)}{\text{wst}\frac{1}{2}a}=\frac{\text{dost}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{wst}\frac{1}{2}A}\qquad\text{II.}$$

Potrzecie: Wprowadźmy w zrównanie (β_1) za $\text{dost}A$, $\text{dost}a$, następuiące wartości

$$\text{dost}A=2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A-1;\quad \text{dost}\,a=2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}a-1;$$

zamieniemy ie na

$$-\text{dost}(b+c)+2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{dost}\,b.\text{dost}\,c=$$
$$=\text{dost}(B-C)-2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}a.\text{dost}B.\text{dost}C:$$

a ponieważ

$$-\text{dost}(b+c)=2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c-\text{dost}\,a,$$
$$\text{dost}(B-C)=2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}a.\text{wst}B.\text{wst}C-\text{dost}A;$$

więc

$$2\,\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\mathrm{dost}(b-c)+\mathrm{dost}A =$$
$$= -2\,\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}a.\mathrm{dost}(B+C)+\mathrm{dost}a:$$

$$2\,\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}A[1+\mathrm{dost}(b-c)] = 2\,\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}a[1-\mathrm{dost}(B+C)];$$

skąd wypadnie

$$\frac{\mathrm{dost}\frac{1}{2}(b-c)}{\mathrm{dost}\frac{1}{2}a} = \frac{\mathrm{wst}\frac{1}{2}(B+C)}{\mathrm{dost}\frac{1}{2}A} \qquad \text{III.}$$

Poczwarte: W zrównaniu (β_1) nadaymy nakoniec dost$A$, dost$a$, następuiące wartości

dost$A = 1 - 2\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}A$, dost$a = 2\,\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}a - 1$: za wst$b$.wst$c$+dost$b$.dost$c$, położmy $2\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}A$.wst$b$.wst$c$ +dost$a$; potém za wst$b$.wst$c$ — dost$b$.dost$c$ = — dost($b+c$): zróbmy to samo w drugiey stronie zrównania z funkcyą kątów B, C; wypadnie

$$-2\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}A.\mathrm{dost}(b+c)+\mathrm{dost}A =$$
$$= -2\,\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}a.\mathrm{dost}(B+C)-\mathrm{dost}a:$$

tu znowu za dost$A$, dost$a$, gdy będą wprowadzone te same wyżey położone wartości, zrównanie to zamieni się na

$$\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}A[1+\mathrm{dost}(b+c)] = \mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}a[1+\mathrm{dost}(B+C)],$$

przeto

$$\frac{\mathrm{dost}\frac{1}{2}(b+c)}{\mathrm{dost}\frac{1}{2}a} = \frac{\mathrm{dost}\frac{1}{2}(B+C)}{\mathrm{wst}\frac{1}{2}A} \qquad \text{IV.}$$

Nic nie może bydź prostszego, iak zrównania I, II, III, IV, z których każde wyraża związek między wszystkiemi bokami i wszystkiemi kątami tróykąta kulistego. Podał ie naprzód *Delambre* w książce *Connoissance des tems 1809.* k. 45. która wyszła roku 1807. ale bez żadnego dowodu. Potém *Gauss* w dziele swoiém *Theoria Motus Corporum coelestium* wydaném r. 1809. na k. 51. ogłosił te zrównania, iako dotąd w Geometryi nieznane; ale także bez żadnego dowodu; i użył ich do ważnych zagadnień astronomicznych. Doszło mnie dzieło Gaussa na początku roku 1811: w niém wspomnione zrównania uderzyły mnie i swoią prostotą, i swoiém użyciem. Szukałem zaraz ich dowodu, i ten znalazłszy tak, iak tu iest wyłożony, posłałem go Akademii nauk Petersburskiey 24. Marca 1811 roku. W *Connoissance des tems 1812.* upomniał się *Delambre* przeciwko zdaniu *Gaussa*, o te zrównania, iako przez siebie naprzód podane; ale ich dowodu nie wydał. Dopiero w wielkiém i wyborném swém dziele astronomii, wydaney w Paryżu roku 1814. w tomie I. k. 161..163. dowodzi tych zrównań *Delambre* cale innym sposobem, wyciągaiąc ie z analogii *Nepera;* co robi i rachunek zawilszym, i dowód ubocznym. Rachunek móy pokazuie, że zrównania te wypadaią ze zrównania *Cagnoli*, dwie wartości na dost *A*, kombinuiąc z dwiema wartościami na dost *a:* czyli ogólniey, dwie wartości na dostawę kąta, kombinuiąc z dwiema wartościami na dostawę boku temuż kątowi przeciwległego; co stanowi dowód i wprost idący (*demonstratio directa*), i ogólny: bo każde zrównanie *Cagnoli* biorąc kąt w pierwszey stronie przez dostawę wyrażony, i dostawę boku temu kątowi przeciwległego w drugiey stronie zrównania będącą, i postępuiąc sposobem tu skazanym: każde mówię zrównanie *Cagnoli* wyda cztery podobne zrównania. I tak zrównanie (β_2) wyda:

$$\frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\tfrac{1}{2}c}=\frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{dost}\tfrac{1}{2}C}\,;\quad \frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{wst}\tfrac{1}{2}c}=\frac{\text{dost}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{wst}\tfrac{1}{2}C}$$

$$\frac{\text{dost}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{dost}\tfrac{1}{2}c}=\frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{dost}\tfrac{1}{2}C}\,,\quad \frac{\text{dost}\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{dost}\tfrac{1}{2}c}=\frac{\text{dost}\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{wst}\tfrac{1}{2}C}$$

zrównanie trzecie (β_3) przyprowadzi nas do czterech następuiących:

$$\frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a-c)}{\text{wst}\tfrac{1}{2}b}=\frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(A-C)}{\text{dost}\tfrac{1}{2}B}\,;\quad \frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(a+c)}{\text{wst}\tfrac{1}{2}b}=\frac{\text{dost}\tfrac{1}{2}(A-C)}{\text{wst}\tfrac{1}{2}B},$$

$$\frac{\text{dost}\tfrac{1}{2}(a-c)}{\text{dost}\tfrac{1}{2}b}=\frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(A+C)}{\text{dost}\tfrac{1}{2}B}\,;\quad \frac{\text{dost}\tfrac{1}{2}(a+c)}{\text{dost}\tfrac{1}{2}b}=\frac{\text{dost}\tfrac{1}{2}(A+C)}{\text{wst}\tfrac{1}{2}B},$$

gdzie zawarte są wszystkie kombinacye boków i kątów: co iest skutkiem dowodzenia ogólnego i wprost wyciągnionego ze swego właściwego początku. Chcąc ieszcze to dowodzenie zrobić krótszém i prostszém, wpadłem na zrównanie (α_1) w § 2: alem poiedyńczo zrównań *Delambra* otrzymać nie mógł. Widzimy bowiem, że iedno zrównanie (α_1) iest mnogością II przez III, drugie (α_1) iest I$\times$IV.

Chociaż w tróykącie kulistym ani żaden bok, ani żaden kąt nie może bydź większy od 180°, ani nawet im równy; iednakże trafić się czasem mogą kąty odiemne; kąta odiemnego zawsze wstawa iest odiemna; zrównanie I. $\frac{\text{dost}\frac{1}{2}A}{\text{wst}\frac{1}{2}a}=\frac{\text{wst}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{wst}\frac{1}{2}(b-c)}$ pokazuie, że ponieważ pierwsza strona tego zrównania iest istotnie dodatna, druga strona takąż bydź musi; więc $B-C$ iest tego samego gatunku, co $b-c$, to iest, albo obadwa dodatne, albo obadwa odiemne: więc kiedy $B>C$ musi bydź $b>c$, i kiedy $B<C$, także $b<c$: to iest, w każdym tróykącie kulistym *bok większy leży naprzeciw kąta większego, a bok mnieyszy naprzeciw kąta mnieyszego*, i odwrotnie, *kąt większy ma naprzeciw siebie bok większy* etc. Zrównanie II uczy nas, że różnica dwóch kątów; a zrównanie III że różnica dwóch boków iest zawsze mnieysza od 180°; co iest rzeczą oczywistą. Zrównanie nako-

niec IV. dowodzi, że summa dwóch kątów, i summa dwóch boków przeciwległych tymże kątom, są zawsze iednego gatunku, to iest albo obiedwie większe, albo obiedwie mnieysze od 180^c.

Analogiie Nepera.

§ 7. Jeżeli rozdzielimy *naprzód* zrównanie I przez II: *powtóre*: III przez IV: *potrzecie* I przez III: *poczwarte* II przez IV; otrzymamy zrównania następuiące:

$$\left.\begin{aligned} \text{sty}\,\frac{B-C}{2} &= \text{dosty}\,\tfrac{1}{2}A\,\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}(b-c)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(b+c)}, \\ \text{sty}\,\frac{B+C}{2} &= \text{dosty}\,\tfrac{1}{2}A\,\frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}(b-c)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}(b+c)}; \end{aligned}\right\} \quad (5')$$

$$\left.\begin{aligned} \text{sty}\,\frac{b-c}{2} &= \text{sty}\,\tfrac{1}{2}a\,\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}(B-C)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(B+C)}, \\ \text{sty}\,\frac{b+c}{2} &= \text{sty}\,\tfrac{1}{2}a\,\frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}(B-C)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}(B+C)}; \end{aligned}\right\} \quad (5'')$$

zrównania te nazywaią się *Analogiiami Nepera*: za pomocą dwóch pierwszych, ze znanych dwóch boków, i kąta między niemi zawartego, wynayduiemy dwa kąty: za pomocą dwóch ostatnich z dwóch kątów znanych i boku im przyległego, wynayduiemy dwa boki. Ponieważ cztery zrównania I, II, III, IV. dzieląc iedno przez drugie, wydadź mogą sześć wielorazów: gdyż $\frac{4.3}{2}=6$ § 23 Algebry: cztery dzielenia odkryły nam analogiie *Nepera*, pozostałe dwa, to iest II przez III, i I przez IV, daią (α_1) § 2. Te zrównania (5′) (5″) wypadły ze zrównań wyciągnionych z (β_1). Odbyte podobne dzielenie ze zrównaniami pochodzącemi z (β_2), (β_3) wyda dwie pary z każdego, a zatém wszystkich, sześć par

$$\left.\begin{aligned} \text{sty}\,\frac{A-B}{2} &= \text{dosty}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\text{wst}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\frac{1}{2}(a+b)}, \\ \text{sty}\,\frac{A+B}{2} &= \text{dosty}\tfrac{1}{2}C\,\frac{\text{dost}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{dost}\frac{1}{2}(a+b)}; \end{aligned}\right\} \quad (5''')$$

$$\left.\begin{aligned} \text{sty}\,\frac{a-b}{2} &= \text{sty}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\text{wst}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{wst}\frac{1}{2}(A+B)}, \\ \text{sty}\,\frac{a+b}{2} &= \text{sty}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\text{dost}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{dost}\frac{1}{2}(A+B)}; \end{aligned}\right\} \quad (5\text{IV})$$

$$\left.\begin{aligned} \text{sty}\,\frac{A-C}{2} &= \text{dosty}\tfrac{1}{2}B\,\frac{\text{wst}\frac{1}{2}(a-c)}{\text{wst}\frac{1}{2}(a+c)}, \\ \text{sty}\,\frac{A+C}{2} &= \text{dosty}\tfrac{1}{2}B\,\frac{\text{dost}\frac{1}{2}(a-c)}{\text{dost}\frac{1}{2}(a+c)}; \end{aligned}\right\} \quad (5\text{V})$$

$$\left.\begin{aligned} \text{sty}\,\frac{a-c}{2} &= \text{sty}\tfrac{1}{2}b\,\frac{\text{wst}\frac{1}{2}(A-C)}{\text{wst}\frac{1}{2}(A+C)}, \\ \text{sty}\,\frac{a+c}{2} &= \text{sty}\tfrac{1}{2}b\,\frac{\text{dost}\frac{1}{2}(A-C)}{\text{dost}\frac{1}{2}(A+C)}; \end{aligned}\right\} \quad (5\text{VI})$$

te sześć par zrównań zawieraią wszystkie kombinacye boków, i kątów między niemi zawartych, iako to b, c, A; b, a, C; a, c, B; i znowu wszystkich kątów, i boków im przyległych. iako to B, C, a; A, B, c; A, C, b. Z któreykolwiek pary wyciąga się zrównanie

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}(A+B)\text{dost}\tfrac{1}{2}(a+b) = \text{dosty}\tfrac{1}{2}C.\text{dost}\tfrac{1}{2}(a-b)$$

albo

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}(a+b)\text{dost}\tfrac{1}{2}(A+B) = \text{sty}\tfrac{1}{2}c.\text{dost}\tfrac{1}{2}(A-B):$$

każdego tego zrównania druga strona iest koniecznie dodatna; bo każdy kąt, i każdy bok mnieyszy od $180°$, więc i pierwsza strona dodatną bydź musi: a zatém: *połowa summy dwóch kątów, i połowa summy dwóch boków tym kątom przeciwległych, są zawsze tego samego gatunku:* to iest albo obiedwie ostre, albo obiedwie rozwarte.

Przypadki nie obięte Analogiiami Nepera.

§ 8. Zachodzi tu ieszcze taki przypadek: w tróykącie kulistym maiąc dwa boki b c, i kąt między niemi zawarty A, iakże wynaleśdź bok trzeci a, za pomocą logarytmów? Przez analogiie *Nepera* wynayduią się kąty, a dopiero z tych kątów, bok. Jakże wynaleśdź zaraz bok trzeci, nie przechodząc przez kąty?

$$\mathrm{dost}A.\mathrm{wst}b.\mathrm{wst}c = \mathrm{dost}a - \mathrm{dost}b.\mathrm{dost}c,$$

ażе
$$\mathrm{dost}A = \mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}.A - \mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}A;$$

$$(\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}A - \mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}A)\mathrm{wst}b.\mathrm{wst}c = \mathrm{dost}a - \mathrm{dost}b.\mathrm{dost}c$$

$$(-1 + 2\,\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}A)\mathrm{wst}b.\mathrm{wst}c + \mathrm{dost}b.\mathrm{dost}c = \mathrm{dost}a$$

$$\mathrm{dost}(b+c) + 2\,\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\mathrm{wst}b.\mathrm{wst}c = \mathrm{dost}a:$$

połóżmy

$\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\mathrm{wst}b.\mathrm{wst}c = \mathrm{wst}^2u, \quad 2\,\mathrm{wst}^2u = 1 - \mathrm{dost}\,2u;$

$$\mathrm{dost}(b+c) + 1 - \mathrm{dost}\,2u = \mathrm{dost}a = 1 - 2\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}a,$$

więc

$$2\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}a = \mathrm{dost}\,2u - \mathrm{dost}(b+c)$$

$$= 2\,\mathrm{wst}\left(\frac{b+c}{2} + u\right)\mathrm{wst}\left(\frac{b+c}{2} - u\right)$$

$$\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left\{\mathrm{wst}\left(\frac{b+c}{2} + u\right)\mathrm{wst}\left(\frac{b+c}{2} - u\right)\right\}} \qquad (m)$$

i zadanie rozwiązane. Albo

$$(1-2\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}A)\,\mathrm{wst}\,b.\mathrm{wst}\,c+\mathrm{dost}\,b.\mathrm{dost}\,c=\mathrm{dost}\,a=1-2\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}a\,;$$

położmy

$$\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}A.\mathrm{wst}\,b.\mathrm{wst}\,c=\mathrm{wst}^2 w,\quad 2\,\mathrm{wst}^2 w=1-\mathrm{dost}\,2w,$$

$$\mathrm{dost}(b-c)+\mathrm{dost}\,2w=2(1-\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}a)=2\,\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}a\,;$$

więc

$$\mathrm{dost}\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\left|\mathrm{dost}\left(\frac{b-c}{2}+w\right)\mathrm{dost}\left(\frac{b-c}{2}-w\right)\right|}\qquad(\mathrm{n}).$$

Te dwa zrównania (m), (n), podał *Mollweide Zeitschrift für Astronomie May, Junius 1816* p. 459 bez żadnego dowodu, który po przeczytaniu tego pisma, wyciągnąłem zaraz ze zrównania fundamentalnego. Tą samą drogą przyszedłem do rozwiązania następującego zadania: Maiąc dwa kąty A, B, i bok c między niemi leżący; wynaleśdź kąt trzeci C, nie przechodząc przez boki insze? W § (4) zrównanie główne (3) daie

$$\mathrm{dost}\,C=\mathrm{dost}\,c.\mathrm{wst}\,A.\mathrm{wst}\,B-\mathrm{dost}\,A.\mathrm{dost}\,B$$

$$=(\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}c-\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}c)\mathrm{wst}\,A.\mathrm{wst}\,B-\mathrm{dost}\,A.\mathrm{dost}\,B$$

$$=(-1+2\,\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}c)\mathrm{wst}\,A.\mathrm{wst}\,B-\mathrm{dost}\,A.\mathrm{dost}\,B$$

$$=2\,\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}c.\mathrm{wst}\,A.\mathrm{wst}\,B-\mathrm{dost}(A-B):$$

położmy

$$\mathrm{dost}^2\tfrac{1}{2}c.\mathrm{wst}\,A.\mathrm{wst}\,B=\mathrm{wst}^2 x,\quad 2\,\mathrm{wst}^2 x=1-\mathrm{dost}\,2x,$$

$$\mathrm{dost}\,C=1-2\,\mathrm{wst}^2\tfrac{1}{2}C=1-\mathrm{dost}\,2x-\mathrm{dost}(A-B)\,;$$

więc

$$\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\left|\mathrm{dost}\left(\frac{A-B}{2}+x\right)\mathrm{dost}\left(\frac{A-B}{2}-x\right)\right|}\qquad(\mathrm{p})$$

i znowu

$$\text{dost}\,C = (1 - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}c)\text{wst}\,A.\text{wst}\,B - \text{dost}\,A.\text{dost}\,B$$

$$= -\text{dost}(A+B) - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}c.\text{wst}A.\text{wst}B:$$

połóżmy

$$\text{wst}^2\tfrac{1}{2}c.\text{wst}A.\text{wst}B = \text{wst}^2 y, \quad 2\,\text{wst}^2 y = 1 - \text{dost}\,2y,$$

$$2(1 - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}C) = \text{dost}\,2y - \text{dost}(A+B);$$

a zatém

$$\text{dost}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\left\{\text{wst}\left(\frac{A+B}{2}+y\right)\text{wst}\left(\frac{A+B}{2}-y\right)\right\}} \qquad (q)$$

Delambre w Conn. des tems l'an 1820 p. 343. podał także dowód na zrównanie (m), (n); i rozwiązanie przytoczonego tu pytania. Nadto iak w pierwszym przypadku bok, tak w drugim kąt wyraził przez styczną, za pomocą dosyć sztucznego i ciekawego przerobienia, które także bez żadnego dowodu przytoczył *Mollweide.* I lubo zrównanie $\frac{(m)}{(n)}$ daie styczną połowy boku trzeciego, gdzie wchodzą dwa kąty u, w, posiłkowe, szukaymy atoli bez tych kątów wyrażenia styczney na bok trzeci a.

$$\text{dost}\,a = \text{dost}\,b.\text{dost}\,c + \text{wst}\,b.\text{wst}\,c.\text{dost}\,A; \quad \text{dost}A = 1 - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A,$$

$$= \text{dost}\,(b-c) - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}b.\text{wst}c,$$

$$1 - \text{dost}\,a = 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a = 1 - \text{dost}(b-c) + 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c,$$

$$1 + \text{dost}a = 2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}a = 1 + \text{dost}(b-c) - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c;$$

więc

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}a = \frac{1 - \text{dost}(b-c) + 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c}{1 + \text{dost}(b-c) - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c}$$

$$= \frac{2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}(b-c) + 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c}{2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}(b-c) - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c}:$$

a dla skrócenia położywszy

$$k = \frac{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c}{\text{dost}^2\tfrac{1}{2}(b-c)};$$

będzie

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\text{sty}^2\tfrac{1}{2}(b-c) + k}{1-k}$$

$$= \text{sty}\tfrac{1}{2}(b-c)\left\{\frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}(b-c) + k\,\text{dosty}\tfrac{1}{2}(b-c)}{1-k}\right\}$$

a położywszy, $k\,\text{dosty}\tfrac{1}{2}(b-c) = \text{sty}\,z$, otrzymamy

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}a = \text{sty}\tfrac{1}{2}(b-c)\text{sty}[\tfrac{1}{2}(b-c)+z], \qquad (\text{r})$$

gdzie $$\text{sty}\,z = \frac{\text{wst}\,b.\text{wst}\,c.\text{wst}\,A.\text{sty}\tfrac{1}{2}A}{\text{wst}(b-c)};$$

ieżeli zaś w zrównanie fundamentalne włożymy za

$$\text{dost}\,A = -1 + 2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A,$$

otrzymamy:

$$1 - \text{dost}\,a = 1 - \text{dost}(b+c) - 2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c,$$

$$1 + \text{dost}\,a = 1 + \text{dost}(b+c) + 2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c:$$

a zatém

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}a = \frac{1 - \text{dost}(b+c) - 2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c}{1 + \text{dost}(b+c) + 2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c}$$

$$= \frac{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}(b+c) - \text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c}{\text{dost}^2\tfrac{1}{2}(b+c) + \text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}\,c},$$

a nazwawszy

$$k'=\frac{\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A.\text{wst}\,b.\text{wst}c}{\text{dost}^2\tfrac{1}{2}(b+c)},$$

będzie

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}a=\frac{\text{sty}^2\tfrac{1}{2}(b+c)-k'}{1+k'}$$

$$=\text{sty}\tfrac{1}{2}(b+c)\left\{\frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}(b+c)-k'\text{dosty}\tfrac{1}{2}(b+c)}{1+k'}\right\}$$

niech będzie

$$k'\text{dosty}\tfrac{1}{2}(b+c)=\text{sty}\,y,$$

a zatém

$$k'=\text{sty}\,y.\text{sty}\tfrac{1}{2}(b+c);$$

więc

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}a=\text{sty}\tfrac{1}{2}(b+c).\text{sty}[\tfrac{1}{2}(b+c)-y] \qquad \text{(s)}$$

gdzie

$$\text{sty}\,y=\frac{\text{wst}\,b.\text{wst}\,c.\text{wst}\,A.\text{dosty}\tfrac{1}{2}A}{\text{wst}(b+c)};$$

pomnąc, że

$$2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}A=\text{wst}A.\text{dosty}\tfrac{1}{2}A.$$

Widzimy więc z rachunku, który nas przywiódł do zrównań (r), (s): że funkcya wzoru $\frac{\text{sty}^2 A\mp k}{1\pm k}$ zamienia się na wyraz $\text{sty}A.\,\text{sty}(A\mp z)$; gdy się położy $\text{sty}\,z=k\,\text{dosty}\,A$.

Przeróbmy podobnie zrównania (p), (q): z wartości na dost$C$ tam przytoczonych: mamy

$$1-\text{dost}C=2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}C=1+\text{dost}(A-B)-2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}c.\text{wst}A.\text{wst}B$$

$$1+\text{dost}C=2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}C=1-\text{dost}(A-B)+2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}c.\text{wst}A.\text{wst}B:$$

więc

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}C = \frac{1 + \text{dost}(A - B) - 2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}c.\text{wst}\,A.\text{wst}\,B}{1 - \text{dost}(A - B) + 2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}c.\text{wst}\,A.\text{wst}\,B},$$

a położywszy

$$k = \frac{\text{dost}^2\tfrac{1}{2}c.\text{wst}\,A.\text{wst}\,B}{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}(A - B)},$$

będzie

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}C = \frac{\text{dosty}^2\tfrac{1}{2}(A - B) - k}{1 + k}$$

$$= \text{dosty}\,\tfrac{1}{2}(A - B)\left\{\frac{\text{dosty}\,\tfrac{1}{2}(A - B) - k\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A - B)}{1 + k}\right\}$$

położywszy znowu

$$k\,\text{sty}\tfrac{1}{2}(A - B) = \text{sty}\,z;$$

a zatém

$$k = \text{sty}\,z\,\text{dosty}\,\tfrac{1}{2}(A - B);$$

otrzymamy

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}C = \text{dosty}\tfrac{1}{2}(A - B)\,\text{dosty}[\tfrac{1}{2}(A - B) + z] \quad (\text{t}):$$

gdzie

$$\text{sty}\,z = \frac{2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}c\,\text{wst}\,A.\text{wst}\,B}{\text{wst}(A - B)},$$

a można ieszcze położyć

$$2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}c = \text{wst}\,c.\text{dosty}\,\tfrac{1}{2}c.$$

Wreszcie z wartości na dost$C$ prowadzących do zrównania (q) mamy:

$$1 - \text{dost}\,C = 1 + \text{dost}(A + B) + 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}c\,\text{wst}\,A.\text{wst}\,B,$$

$$1 + \text{dost}\,C = 1 - \text{dost}(A + B) - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}c\,\text{wst}\,A.\text{wst}\,B,$$

skąd

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}C = \frac{\text{dost}^2\tfrac{1}{2}(A + B) + \text{wst}^2\tfrac{1}{2}c\,\text{wst}\,A.\text{wst}\,B}{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}(A + B) - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}c\,\text{wst}\,A.\text{wst}\,B};$$

a nazwawszy

$$k = \frac{\text{wst}^2 \tfrac{1}{2} c \text{ wst } A.\text{wst } B}{\text{wst}^2 \tfrac{1}{2}(A+B)},$$

będzie

$$\text{sty}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{dosty}^2 \tfrac{1}{2}(A+B) + k}{1-k}$$

$$= \text{dosty}\tfrac{1}{2}(A+B) \left\{ \frac{\text{dosty}\tfrac{1}{2}(A+B) + k \text{ sty}\tfrac{1}{2}(A+B)}{1-k} \right\}$$

a położywszy

$$k \text{ sty} \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{sty } z,$$

czyli

$$k = \text{sty } z \text{ dosty } \tfrac{1}{2}(A+B);$$

przyydziemy do zrównania

$$\text{sty}^2 \tfrac{1}{2} C = \text{dosty}\tfrac{1}{2}(A+B).\text{dosty}[\tfrac{1}{2}(A+B) - z] \qquad \text{(u)}$$

gdzie

$$\text{sty } z = \frac{2 \text{ wst}^2 \tfrac{1}{2} c \text{ wst } A.\text{wst } B}{\text{wst}(A+B)}:$$

a możnaby ieszcze położyć

$$2 \text{ wst}^2 \tfrac{1}{2} c = \text{wst } c.\text{sty } \tfrac{1}{2} c.$$

Z tego rachunku znowu się pokazuie, że funkcya wzoru $\frac{\text{dosty}^2 A \pm k}{1 \mp k}$ może się zamienić na dosty$A$.dosty$(A \mp z)$, kiedy się położy sty $z = k$ sty A.

Mamy więc ośm nowych zrównań trygonometrycznych, wyciągnionych ze zrównania fundamentalnego: z których cztery, to iest (m), (n), (r), (s), służą na wynalezienie boku trzeciego, z danych dwóch boków tróykąta, i z kąta między temi bokami zawartego: drugie cztéry, to iest (p), (q), (t), (u) daią kąt trzeci w tróykącie kulistym z danego boku, i dwóch kątów iemu przyległych. Licznieysze na ten sam kąt zrównania, są w rachunku trygonometrycznym bardzo potrzebne, i do zniesienia wątpliwości o kącie, i do ściśleyszych wypadków na kąty lub łuki albo barzo małe, albo bliskie kąta prostego: iak się o tém poźniey przekonamy.

Te są główne zrównania do których nas uwaga tróykąta kulistego prowadzi, wyciągnione z iednego zrównania (1). Wszystkie inne dotąd znane, i pod różnemi postaciami w trygonometryi podawane, zawsze prawie są tylko przerobieniem cztérech walnych zrównań (1), (2), (3), (4): iakośmy to widzieli na zrównaniach *Cagnoli*, *Delambra*, *Nepera*, i innych.

Tróykąt kulisty prostokątny.

§ 9. Przystósuymy iuż tę naukę do wszystkich przypadków zadania trygonometrycznego: z sześciu rzeczy tróykąta kulistego maiąc trzy znane, wynaleśdź resztę: to iest analitycznie mówiąc, z sześciu ilości A, B, C, a, b, c, wyciągnąć wszystkie kombinacye, biorąc ich po cztery na raz. Tych bydź powinno $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$ § 23 Algebry: ale prawdziwie od siebie różnych nie zachodzi tylko cztéry: iak się przekonać możemy z następuiącego układu:

$$\begin{array}{llll} A,B,C,a; & a,b,c,A; & A,B,a,b; & \left\{\begin{array}{ll} a,b,C,A; & b,a,C,B; \\ a,c,B,A; & c,a,B,C; \\ b,c,A,B; & c,b,A,C. \end{array}\right\} \\ A,B,C,b; & a,b,c,B; & A,C,a,c; & \\ AB,C,c; & a,b,c,C; & B,C,b,c; & \end{array}$$

Pierwszy przypadek iest, trzy kąty i ieden bok: *drugi* przypadek, trzy boki i ieden kąt: *trzeci* przypadek dwa kąty i dwa boki im przeciwległe: *czwarty* przypadek dwa boki i dwa kąty, z których ieden iest przeciwległy, a drugi przyległy: tu wypada sześć kombinacyy, trzy do iednego, trzy do drugiego boku i kąta przyległego, iak nas uczą zrównania (4). Mamy więc cztery że tak powiem klassy i kombinacye zupełnie różne; a pod każdą klassą tyle zrównań podobnych, ile iest kombinacyy tey klassie służących. Zaczniymy od tróykąta prostokątnego, który iest przypadkiem szczególnym zadania, ale ma swoie właściwe cechy.

Przypuśćmy że kąt $A = 90^\circ$; będzie a przeciwprostokątną: wst$A = 1$, dost$A = 0$, sty$A = \frac{1}{0}$, dosty$A = 0$: wprowadźmy te warunki w zrównania tak fundamentalne, iak główne; będzie

Przypadek I. Zrównanie (1) daie

$$(a) \qquad \text{dost}\, a = \text{dost}\, b . \text{dost}\, c:$$

to zrównanie rozwięzuie nam zadanie: w tróykącie prostokątnym maiąc dwa boki, wynaleśdź trzeci; i razem nas uczy, że w tym tróykącie kiedy dwa boki kąt prosty zawieraiące są albo obadwa mnieysze, albo obadwa większe od 90°; przeciwprostokątna iest zawsze mnieysza od 90°: albo krócey; kiedy b, c, są iednego gatunku, zawsze $a < 90^\circ$: kiedy zaś b, c, są różnego gatunku, $a > 90^\circ$: a zatem kiedy przeciwprostokątna z którymkolwiek bokiem iest iednego gatunku; bok drugi iest koniecznie mnieyszy od 90: kiedy zaś przeciwprostokątna z którymkolwiek bokiem iest różnego gatunku; bok drugi iest koniecznie większy od 90°. To wszystko wspiera się na tym początku: że dostawa kąta ostrego iest dodatna, rozwartego odiemna. To zrównanie iest bardzo łatwe do pamiętania. Moglibyśmy tę wartość na dost a wprowadzić we dwa następuiące zrównania (1) i otrzymalibyśmy, że dost B = dost b.wst C, dost C = dost c.wst B: ale nam te zrównania wypadną zkądinąd.

Przypadek II. Wprowadziwszy wst $A = 1$ w zrównanie (2); otrzymamy

$$(b) \quad \frac{1}{\text{wst}\,a} = \frac{\text{wst}\,B}{\text{wst}\,b} = \frac{\text{wst}\,C}{\text{wst}\,c}, \text{ a zatém } \frac{\text{wst}\,c}{\text{wst}\,a} = \text{wst}\,C,$$

albo

$$\frac{\text{wst}\,c}{\text{wst}\,C} = \text{wst}\,a, \quad \text{wst}\,c = \text{wst}\,a.\text{wst}\,C:$$

to zrównanie rozwięzuie te zadania: maiąc przeciwprostokątną i bok; wynaleśdź kąt temu bokowi przeciwległy: albo maiąc bok i kąt mu przeciwległy, wynaleśdź przeciwprostokątną: albo maiąc przeciwprostokątną i kąt którykolwiek, wynaleśdź bok temu kątowi przeciwległy.

Przypadek III. Wprowadźmy warunki kąta prostego w zrównania (3); wypadnie

$$(c) \quad \text{dost}\,a = \text{dosty}\,B.\text{dosty}\,C = \frac{1}{\text{sty}\,B.\text{sty}\,C};$$

$$(d) \quad \text{dost}\,b = \frac{\text{dost}\,B}{\text{wst}\,C}; \quad \text{dost}\,c = \frac{\text{dost}\,C}{\text{wst}\,B}; \text{ te same,}$$

co w przypadku I.

(c) rozwięzuie nam dwa zadania: maiąc dwa kąty, wynaleśdź przeciwprostokątną, albo maiąc przeciwprostokątną i kąt, wynaleśdź kąt drugi.

(d) rozwięzuie zadania następuiące: maiąc dwa kąty, wynaleśdź bok iednemu z tych kątów przeciwległy: maiąc bok i kąt mu przeciwległy, wynaleśdź kąt drugi: maiąc bok i kąt mu przyległy, wynaleśdź kąt drugi.

Przypadek IV. Z sześciu zrównań pod znakiem (4) § 4, cztery tylko zamykaią kąt A; każda zaś para wyraża ten sam związek, iak to zaraz zobaczymy. Uczyńmy w zrównaniach (4), dosty$A = 0$, wst$A = 1$; wypadnie:

$$(e)\quad \begin{cases} \text{dosty}\,a.\text{wst}\,b = \text{dost}\,b.\text{dost}\,C, \text{ czyli } \dfrac{\text{sty}\,b}{\text{sty}\,a} = \text{dost}\,C \\ \text{dosty}\,a.\text{wst}\,c = \text{dost}\,c.\text{dost}\,B, \quad \dfrac{\text{sty}\,c}{\text{sty}\,a} = \text{dost}\,B \end{cases}$$

$$(f)\quad \begin{cases} \text{dosty}\,b.\text{wst}\,c = \text{dosty}\,B, \quad \text{czyli } \text{sty}\,B = \dfrac{\text{sty}\,b}{\text{wst}\,c}; \\ \text{dosty}\,c.\text{wst}\,b = \text{dosty}\,C, \quad \text{sty}\,C = \dfrac{\text{sty}\,c}{\text{wst}\,b}: \end{cases}$$

zrównania (e) rozwięznią następniące zdania: maiąc przeciwprostokątną i bok, wynaleśdź kąt temu bokowi przyległy: maiąc bok i kąt mu przyległy, wynaleśdź przeciwprostokątną: maiąc przeciwprostokątną i kąt, wynaleśdź bok temu kątowi przyległy.

Zrównania (f) odpowiadaią na te zadania: maiąc dwa boki, wynaleśdź kąt iednemu przeciwległy: maiąc kąt, i bok mu przeciwległy; wynaleśdź bok drugi: maiąc kąt i bok mu przyległy; wynaleśdź bok przeciwległy.

Te ieszcze zrównania (f) uczą nas; że w tróykącie prostokątnym, kąt ukośny i bok mu przeciwległy są zawsze tego samego gatunku, to iest albo obadwa ostre, albo obadwa rozwarte. W zrównaniach (a), (b), (c), (*d*), (*e*), (*f*), zawiera się cała nauka, i rozwiązanie wszystkich zadań o tróykącie prostokątnym kulistym.

Tróykąty o dwóch i trzech kątach prostych.

§ 10. Mówiąc w § poprzedzaiącym o tróykącie prostokątnym, rozumieliśmy taki tróykąt, w którym ieden tylko kąt iest prosty. Aże dowiedliśmy w § 4, że summa wszystkich kątów w tróykącie kulistym iest koniecznie większa od dwóch kątów prostych; więc tróykąt kulisty może zamykać dwa a nawet i trzy kąty proste. Jeżeli ich zamykać będzie dwa, n. p. $A=90°$, $B=90°$; więc $\text{wst} A=1$, $\text{dost} A=0$; $\text{wst} B=1$, $\text{dost} B=0$: wprowadziwszy te warunki w zrównania (3) § 4, otrzymamy $\text{dost} a=0$, $\text{dost} b=0$; a zatém $a=b=90°$: przytém $\text{dost} c=\text{dost} C$, a zatém $c=C$: więc tróykąt ten będzie równoramienny, boki naprzeciw kątów prostych leżące będą ćwiartkami koła, a bok c będąc równy kątowi C, będzie iego miarą: czyli kąt C będzie biegunem łuku c. Tu widzimy, że kąty na powierzchni kuli wyrążaiące pochyłość płaszczyzn, równe są łukom o 90° z ich wierzchołka zarysowanym, i dla tego niemi się wymierzaią; iak się to iuż okazało z własności kuli. Jeżeli te łuki na c pionowe z drugiey strony przeciągniemy; przetną się w drugim biegunie, i zamkną plac na powierzchni kuli; plac ten między dwoma kołami wielkiemi w dwóch punktach się przecinaiącemi zawarty, nazywać będziemy *taśmą spiczastą* powierzchni kulistey. Francuzi nazywaią to *wrzecionem* (fuseau): bryłowatość kulista taką taśmą zakończona nazywa się u francuzow *Onglet sphérique*, u nas nazywać się będzie *klinem kulistym*: są to dwie piramidy spoione z sobą ścianą kąty proste maiącą. W praktyczném wyrabianiu globów ziemskich i niebieskich, cała powierzchnia kuli dzieli się na taśmy spiczaste, które się osobno wyciskaią, i niemi oblepia się kula wytoczona, lub w formie wylana.

Jeżeli tróykąt kulisty zawierać będzie wszystkie trzy kąty proste, czyli $A = B = C = 90°$; będzie wst$A$=wst$B$=wst$C$=1, dost$A$=dost$B$=dost$C$=0; co wprowadziwszy w zrównania (3) § 4, otrzymamy dost$a$=0, dost$b$=0, dost$c$=0; a zatém $a = b = c = 90°$: więc taki tróykąt będzie równokątnym i równobocznym, i każdy bok równy ćwiartce koła; a przeto wierzchołek każdego kąta będzie biegunem łuku sobie przeciwległego. Cała powierzchnia kuli składa się z ośmiu takowych tróykątów.

Tróykąt kulisty ukośno-kątny.

§ 11. W tróykącie kulistym ukośno kątnym zachodzi 15 przypadków czyli zadań; na co mamy tyleż zrównań (1), (2), (3), (4). Z tych atoli cztéry tylko są prawdziwie od siebie różne. Dosyćby więc było wymienić te zadania, i skazać w dopiero wspomnionych zrownaniach te, które na każde zadanie odpowiedź w sobie zawieraią. Ale tu zachodzą dwie ważne uwagi: *naprzód* wystawiwszy sobie taki tylko do rozwiązania tróykąt, gdzie każdy kąt, i każdy bok iest mnieyszy od 180°: ile razy wartość boku lub kąta szukanego iest wyrażona przez wstawę, odpowiedź iest wątpliwa; bo ta sama wstawa, i z tym samym znakiem zawsze dodatnym, należy równie do boku lub kąta tak ostrego, iak rozwartego. Rozróżnia tylko te kąty dostawa, albo styczna; bo iedna i druga iest dodatna na bok lub kąt ostry; odiemna zaś na kąt lub bok rozwarty. *Powtóre* zrównania (1), (3), (4), są bardzo niewygodne do rachunku przez tablice logarytmów, których w praktycznem rozwiązaniu tróykątów zwyczaynie używamy. Terminy bowiem w tych zrównaniach przez dodanie lub odciąganie z sobą połączone, okazuią nam potrzebę przechodu od logarytmów do liczb im odpowiadaiących, i od tych znowu powrotu do logarytmów: co nie tylko robotę przedłuża i powiększa, ale nawet oddala wypadki rachunku od wartości ścisłych i prawdziwych. Widzieliśmy w Algebrze § 49, że rachunek tablic logarytmicznych iest tylko przybliżeniem się do prawdy: podobnie rachunek liniy trygonometrycznych; więc idąc od logarytmów do liczb, i od liczb wracaiąc do logarytmów, oddalamy się za każdém działaniem od wypadków prawdziwych rachunku. Z tych uwag każdy łatwo zrozumie, że nam potrzeba w rozwiązaniu zagadnień na tróykąt kulisty ukośno-kątny *naprzód* zrównania (1), (3), (4), przerobić na takie, gdzieby zachodziło samo mnożenie i dzielenie: i tegośmy iuż dokazali w zrównaniach (1′), (1″), (1‴); (3′), (3″), (3‴), zostaie nam tylko to samo do zrobienia w (4): *powtóre* trzeba unikać ile można wstaw, w wyrazie kąta, lub łuku nieznanego.

Zadanie I. W tróykącie ukośno-kątnym maiąc wszystkie trzy boki znane, wynaleśdź kąty.

To zadanie rozwięzuią w § 2 trzy zrównania (1′), (1″), (1‴), gdzie połowa każdego kąta iest wyrażona przez styczną koniecznie dodatną; bo każdy kąt mnieyszy od 180°; a zatém znak odiemny po wyciągnieniu pierwiastku do pytania trygonometrycznego nie należy. Gdyby kąt był barzo mały, byłoby niebezpieczno wynaydować go przez dostawę; która zbliżaiąc się w swey wartości do promienia, mało się odmienia. Ta sama nieprzyzwoitość zachodzi w wartości wstawy, kiedy kąt bliski 90°. Od tego wszystkiego wolne styczne, i w rozwiązaniu tego zadania nie masz żadney wątpliwości.

Zadanie II. Znaiąc trzy kąty, wynaleśdź boki.

W § 4 zrównania (3'), (3''), (3''') zupełnie to zadanie rozwięzuią: Tu zachodzą te same uwagi, co w zadaniu (1); i nie masz żadney o kącie wątpliwości. W praktycznych rachunkach prawie nigdy na to zadanie nie wpadamy.

Zadanie III. Znaiąc dwa boki i kąt między niemi zawarty, wynaleśdź dwa kąty, i bok trzeci.

To zadanie nayczęściey zachodzi w Astronomii; i co do wynaleźienia kątów rozwięzuie się przez (5'), (5'''), (5v), analogiie *Nepera* w § 6. Maiąc połowę summy i połowę różnicy dwóch kątów, te dodane do siebie daią kąt większy, odciągnione zaś od siebie daią kąt mnieyszy.

Bok trzeci wynaleśdź się może przez wstawy za pomocą (2) w § 3, albo też za pomocą zrównań (1) przez sposób następuiący. Zrównanie pierwsze (1) daie

$$\begin{aligned}\mathrm{dost}\,a &= \mathrm{dost}\,A.\mathrm{wst}\,b.\mathrm{wst}\,c + \mathrm{dost}\,b.\mathrm{dost}\,c\\ &= \mathrm{dost}\,c(\mathrm{dost}\,b + \mathrm{dost}\,A.\mathrm{sty}\,c.\mathrm{wst}\,b)\\ &= \mathrm{dost}\,c(\mathrm{dost}\,b + \mathrm{sty}\,\varphi.\mathrm{wst}\,b)\\ &= \frac{\mathrm{dost}\,c}{\mathrm{dost}\,\varphi}(\mathrm{dost}\,b.\mathrm{dost}\,\varphi + \mathrm{wst}\,b.\mathrm{wst}\,\varphi)\\ &= \frac{\mathrm{dost}\,c}{\mathrm{dost}\,\varphi}\,\mathrm{dost}(b-\varphi):\end{aligned}$$

położyliśmy $\mathrm{dost}\,A.\mathrm{sty}\,c = \mathrm{sty}\,\varphi$, skąd wypadło $\mathrm{dost}\,a = \frac{\mathrm{dost}\,c}{\mathrm{dost}\,\varphi}\,\mathrm{dost}(b-\varphi)$: kąt φ zowie się u analistów *kątem posiłkowym* (angulus auxiliaris). Zobaczmy co on znaczy. Zrównanie dost$A$.sty$c$ = styφ iest zrównaniem (e) na tróykąt prostokątny § 9, gdzie c iest przeciwprostokątną. Więc w tróykącie ukośnokątnym ABC, z kąta B na bok mu przeciwległy b spuściwszy łuk pionowy, ten rozdzieli bok b na dwa odcinki, to iest na φ przyległy kątowi A, albo bokowi c; i na $b-\varphi$ przyległy kątowi C, albo bokowi a. Zrównanie $\frac{\text{dost}\, c}{\text{dost}\, a} = \frac{\text{dost}\, \varphi}{\text{dost}\, (b-\varphi)}$ uczy nas, że się maią dostawy boków, iak dostawy odcinków tym bokom przyległych: co się nazywa *prawidłem dostaw*. Widzimy więc, że przybieranie od analistów kąta posiłkowego, iest to częstokroć rozdzieleniem tróykąta ukośnokątnego na dwa tróykąty prostokątne przez spuszczenie łuku pionowego.

Ale ieszcze z dwóch boków i kąta między niemi zawartego, można zaraz wynaleśdź bok trzeci przez zrównania (m), (n), (r), (s) § 8: każde z tych zrównań da nam te same wypadki, byleby bok nie był barzo mały; boby w tym razie nie można użyć zrównania (n): na kąt znowu wątpliwy nie przyda się (m): ale zrównania (r), (s) mogą ułatwić i wątpliwość łuku, i dadź wypadki dokładne. Wynalazłszy za pomocą tych zrównań bok trzeci tróykąta, i maiąc iuż ieden kąt, możemy bez użycia analogii *Nepera* wynaleśdź drugie dwa kąty za pomocą dość prostych zrównań ($1_{,}$) ($1_{,,}$) ($1_{,,,}$) w § 2: i tu się pokazuie, iak te zrównania są w trygonometryi pożyteczne.

Zadanie IV. Znaiąc dwa kąty, i bok im przyległy; wynaleśdź dwa boki, i kąt trzeci.

W rozwiązaniu tego zadania na wynalezienie boków służą *Analogiie Nepera* w § 6 (5''), (5IV), (5VI): kąt trzeci wynayduie się przez zrównania (2) w § 3.

albo też za pomocą zrównań (3) § 4 sposobem następuiącym:

$$\mathrm{dost}A = \mathrm{dost}\,a.\mathrm{wst}\,B.\mathrm{wst}\,C - \mathrm{dost}B.\mathrm{dost}\,C,$$

$$\frac{\mathrm{dost}A}{\mathrm{dost}C} = \mathrm{dost}\,a.\mathrm{sty}\,C.\mathrm{wst}\,B - \mathrm{dost}B:$$

niech będzie

$$\mathrm{dost}\,a.\mathrm{sty}\,C = \mathrm{dosty}\,x = \frac{\mathrm{dost}\,x}{\mathrm{wst}\,x};$$

$$\frac{\mathrm{dost}A}{\mathrm{dost}C} = \frac{\mathrm{wst}\,B.\mathrm{dost}x - \mathrm{dost}\,B.\mathrm{wst}x}{\mathrm{wst}\,x} = \frac{\mathrm{wst}\,(B-x)}{\mathrm{wst}\,x}$$

a zatém kąt trzeci

$$\mathrm{dost}A = \frac{\mathrm{dost}\,C.\mathrm{wst}(B-x)}{\mathrm{wst}\,x}.$$

Tu znowu widzimy, że zrównanie na kąt posiłkowy $\mathrm{dost}\,a.\mathrm{sty}\,C = \mathrm{dosty}\,x$, iest zrównaniem (c) na tróykąt prostokątny kulisty; gdzie a iest przeciwprostokątną: i z kąta B spuściwszy łuk pionowy, ten podzieli kąt B na dwa odcinki, z których odcinek przyległy bokowi a, iest x. W rozwiązaniu tego zadania nic niemasz wątpliwego.

Z dwóch kątów i boku między niemi położonego, możemy natychmiast wynaleśdź kąt trzeci przez zrównania (p), (q), (t), (u), § 8. Maiąc zaś wszystkie trzy kąty w tróykącie i ieden bok, możemy wynaleśdź dwa inne boki przez zrównania $(3_{,})$, $(3_{,,})$, $(3_{,,,})$ § 4. Tu znowu widzimy iak te nowe zrównania są w trygonometryi przydatne.

Zadanie V. Maiąc dwa boki i kąt iednemu przeciwległy, wynaleśdź dwa kąty, i bok trzeci.

To zadanie rozwięzuią nam zrównania (4) § 5, z których każde zamyka dwa boki i dwa kąty, a ieden z tych kątów iest przeciwlegly iednemu z boków. Pierwsze n. p. (4) zamyka a, c, A: i można z niego wyciągnąć B; drugie ma a, b, A; i można z niego wynaleśdź C: więc pierwsza część zadania co do wynalezienia kątów zdaie się ulatwiona. Ale iak w pierwszém zrównaniu B, tak w drugiém zrównaniu C, iest wyrażone przez wstawę i dostawę razem; więc nie można ich rozwiązać, tylko trzeba każdy kąt szukany, przez tę samę liniią trygonometryczną wyrazić; a zatém albo wstawę zamienić na dostawę; albo dostawę zamienić na wstawę. Aże wst$C = \sqrt{(1 - \text{dost}^2 C)}$, dost$C = \sqrt{(1 - \text{wst}^2 C)}$. Będziemy więc mieli zrównanie 2go stopnia. Dwa pierwiastki tego zrównania zrobią wątpliwość, który z nich do naszego zadania należy? Rozwiązanie więc tego zadania iest przypadkiem w trygonometryi *wątpliwym*. I chociaż przez sztukę rachunkową możemy uniknąć zrównania 2go stopnia, wszelako wypadki nie przestaną bydź wątpliwe: iak się o tém zaraz przekonamy. Weźmy pod uwagę drugie (4'):

$$\text{dosty}\, a = \text{dosty}\, b . \text{dost}\, C + \frac{\text{dosty}\, A}{\text{wst}\, b} \text{wst}\, C;$$

położmy

$$\frac{\text{dosty}\, A}{\text{dost}\, b} = \text{sty}\, x,$$

$$\text{dosty}\, a = \text{dosty}\, b\, (\text{dost}\, C + \text{sty}\, x . \text{wst}\, C)$$

$$= \frac{\text{dosty}\, b}{\text{dost}\, x} \text{dost}\, (C - x);$$

więc

$$\text{dost}(C - x) = \frac{\text{dosty}\, a . \text{dost}\, x}{\text{dosty}\, b} = \text{dost}\, (x - C).$$

$C-x+x=x-(x-C)=C$: może więc kąt ten mieć dwie wartości; bo dostawa kąta tak dodatnego iak odiemnego, iest dodatną: kąt posiłkowy x wypada ze zrównania (c) § 9, gdzie b iest przeciwprostokątną. Łuk pionowy rozdzielił kąt C na dwa odcinki, z których x iest odcinkiem przyległym bokowi b. Podobnie znaydziemy, położywszy

$$\frac{\text{dosty}\,A}{\text{dost}\,c}=\text{sty}\,x,$$

$$\text{dost}(B-x)=\frac{\text{dosty}\,a.\text{dost}\,x}{\text{dosty}\,c}.$$

Bok trzeci wynayduie się przez wstawy za pomocą zrównań (2) § 3, albo przez prawidło dostaw wyłożone w zadaniu III teraźnieyszego §. W pierwszym przypadku gdyby były znane a,b,A wypada znaleśdź c z (1):

$$\begin{aligned}\text{dost}\,c &= \text{dost}\,C.\text{wst}\,a.\text{wst}\,b+\text{dost}\,a.\text{dost}\,b\\ &= \text{dost}\,b.[\text{dost}\,C.\text{sty}\,b.\text{wst}\,a+\text{dost}\,a]:\end{aligned}$$

a położywszy

$$\text{dost}\,C.\text{sty}\,b=\text{sty}\,x,$$

będzie

$$\text{dost}\,c=\frac{\text{dost}\,b}{\text{dost}\,x}\,\text{dost}\,(a-x).$$

W drugim przypadku znane są $A.a,c$, potrzeba wynaleśdź b. Położywszy $\text{dost}\,B.\text{sty}\,c=\text{sty}\,x$, otrzymamy

$$\text{dost}\,b=\frac{\text{dost}\,c}{\text{dost}\,x}\,\text{dost}\,(a-x).$$

Zadanie VI. Maiąc dwa kąty i bok iednemu kątowi przeciwległy, wynaleśdź dwa boki, i kąt trzeci.

Zadanie to rozwięzuie się iak poprzedzaiące za pomocą zrównań (4) § 5, gdzie bok kątowi danemu przyległy, iest wyrażony przez wstawę i dostawę razem; a zatém może mieć dwie wartości, i zrobić wypadek wątpliwy, dla przyczyn tych samych, które się wyłożyły w poprzedzaiącém zadaniu. Maiąc n. p. A,C,a wynaleśdź b,c,B. Zrównanie (4') daie

$$\frac{\text{dosty}\, a}{\text{dost}\, C}\, \text{wst}\, b - \text{dost}\, b = \text{sty}\, C.\text{dosty}\, A:$$

połóżmy

$$\frac{\text{dosty}\, a}{\text{dost}\, C} = \text{dosty}\, x,$$

$$\frac{\text{wst}\, b.\text{dost}\, x - \text{wst}\, x.\text{dost}\, b}{\text{wst}\, x} = \text{sty}\, C.\text{dosty}\, A,$$

$$\text{wst}\,(b-x) = \text{wst}\, x.\text{sty}\, C.\text{dosty}\, A.$$

gdzie $b-x$ może bydź łukiem ostrym lub rozwartym. Podobną wartość wyciągniemy na c z pierwszego zrównania (4) znaiąc kąt B, i położywszy

$$\frac{\text{dosty}\, a}{\text{dost}\, B} = \text{dosty}\, x = \frac{\text{dost}\, x}{\text{wst}\, x},$$

$$\text{wst}\,(c-x) = \text{wst}\, x\, \text{sty}\, B.\text{dosty}\, A.$$

Wszystkie kombinacye iakie zachodzić mogą między kątami i bokiem przeciwległym, dadzą się wyciągnąć z reszty zrównań (4). Co do kąta trzeciego n. p. B, ten wyciągnąć można albo ze zrównań (2) § 3, za pomocą wstaw; albo ze zrównań (3) w § 4, sposobem następuiącym:

$$\text{dost}\, B = \text{dost}\, b.\text{wst}\, A.\text{wst}\, C - \text{dost}\, A.\text{dost}\, C,$$

$$\frac{\text{dost}\, B}{\text{dost}\, A} = \text{dost}\, b.\text{sty}\, A.\text{wst}\, C - \text{dost}\, C;\ \text{dost}\, b.\text{sty}\, A = \text{dosty}\, x,$$

$$\text{dost}\,B = \frac{\text{dost}\,A.\text{wst}\,(C - x)}{\text{wst}\,x}.$$

Przypadki wątpliwe, które zachodzą w dwóch ostatnich zadaniach, ułatwiaią się albo przez warunki pytania, albo przez własności ogólne tróykątów kulistych, a naybarziey przez tę: że bok większy leży naprzeciwko kąta większego; i kąt większy ma sobie przeciwległy bok większy. Kąty nawet inne towarzyszące sobie, albo od siebie zawisłe wiele pomagaią do zniesienia wątpliwości. Ułatwia ią nakoniec rachunek analityczny wykonany na różnych zrównaniach, przez inne liniie trygonometryczne tenże sam łuk lub kąt daiących. Dla tego barzo iest rzeczą w podobnych zadaniach pożyteczną, mieć nie iedno zrównanie na ten sam łuk lub kąt, wyrażony przez różne liniie trygonometryczne.

Rozciągnienie nauki o tróykątach kulistych, i prawidło na znaki.

§ 12. Przebiegliśmy wszystkie zadania w rozwiązaniu tróykąta kulistego zachodzić mogące, i podaliśmy prawidła iak przez dowiedzione zrównania ze trzech rzeczy znanych, wynayduie się reszta. W tróykącie prostokątnym dosyć nam iest znać dwie rzeczy; bo kąt prosty iest trzecią znaną. A lubo w trygonometryi każdy bok, i każdy kąt uważa się iako mnieyszy od 180°; w pytaniach atoli astronomicznych zachodzą łuki i kąty, które się ciągną od 0° do 360°. Szukaiąc odpowiedzi na takowe pytania przez trygonometryą kulistą, otrzymuiemy łuki i kąty, które albo są przepełnieniem 180°, i należą do trzeciey; albo dopełnieniem do 360°, i należą do czwartey ćwiartki koła. Otrzymany z rachunku kąt dodaiemy do 180°

w pierwszym; a odciągamy od 360° w drugim przypadku. I nie masz w tém nic dziwnego, kiedy się zastanowimy: że rachunek ten odbywa się przez linile trygonometryczne, z których każda może do niezmierney liczby łuków i kątów należéć § 52 Alg. bo łuk lub kąt iest funkcyą przestępną liniy trygonometrycznych. Który zaś łuk lub kąt do naszego zadania należy? częstokroć sam tylko rachunek analityczny może nas tego nauczyć przez znaki dodatny i odiemny. I tych znaków w ciągu rachunku nie godzi się spuszczać z uwagi. Jeżeli łuk lub kąt dany iest przez styczną, łatwo go zaraz z pewnością wytknąć i naznaczyć. Wyraźmy styczną przez ułamek, gdzie licznik znaczy wstawę, mianownik dostawę: n. p.

$\text{sty}\,\varphi = \frac{p}{q}$; a okaże się, że kąt lub łuk φ należy:

do pierwszey ćwiartki koła, kiedy $\text{sty}\,\varphi = \frac{+p}{+q}$;

do drugiey, kiedy $\text{sty}\,\varphi = \frac{+p}{-q}$;

do trzeciey, $\text{sty}\,\varphi = \frac{-p}{-q}$;

do czwartey, $\text{sty}\,\varphi = \frac{-p}{+q}$,

czego łatwo widziéć przyczynę w § 52 Algebry.

Wzory i zrównania trygonometryczne częstego w analizie używania.

§ 13. I. Przekonywamy się z poprzedzaiącego §, iak iest czasem potrzebną i ważną rzeczą, łuk lub kąt dany przez dostawę, wyrazić przez styczną: czego łatwo dokazać za pomocą zrównań dowiedzionych w § 54 Algebry, gdzie mamy

$$2\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}x = \text{sty}\,x(1-\text{sty}^2\tfrac{1}{2}x),\quad \text{sty}\tfrac{1}{2}x.\text{dost}\tfrac{1}{2}x = \text{wst}\tfrac{1}{2}x,$$

$$\text{wst}\,x = 2\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}x\,\text{dost}\,\tfrac{1}{2}x = 2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}x.\text{sty}\,\tfrac{1}{2}x;$$

aże

$$\text{sie}\tfrac{1}{2}x = \frac{1}{\text{dost}\,\tfrac{1}{2}x} = \sqrt{(1+\text{sty}^2\tfrac{1}{2})};$$

więc

$$\text{wst}\,x = \text{dost}\,x.\text{sty}\,x = \frac{\text{sty}\,x(1-\text{sty}^2\tfrac{1}{2}x)}{1+\text{sty}^2\tfrac{1}{2}x},$$

czyli

$$\text{dost}\,x = \frac{1-\text{sty}^2\tfrac{1}{2}x}{1+\text{sty}^2\tfrac{1}{2}x}.$$

Niech będzie

$$\text{dost}\,x = a = \frac{1-\text{sty}^2\tfrac{1}{2}x}{1+\text{sty}^2\tfrac{1}{2}x};$$

rozwiązawszy to zrównanie, otrzymamy

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}x = \frac{1-a}{1+a}.$$

Każdą więc dostawę wyrazić potrafimy przez styczną: n. p. w § 9 na tróykąt prostokątny znaleźliśmy

$$\text{dost}\,a = \text{dost}\,b.\text{dost}\,c,$$

więc

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}a = \frac{1-\text{dost}\,b.\text{dost}\,c}{1+\text{dost}\,b.\text{dost}\,c}.$$

W tymże § pod przypadkiem III.

$$\text{dost}\,a = \text{dosty}\,B.\text{dosty}\,C;$$

więc

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}a = \frac{1-\text{dosty}\,B.\text{dosty}\,C}{1+\text{dosty}\,B.\text{dosty}\,C} = \frac{-\text{dost}\,(B+C)}{\text{dost}\,(C-B)}.$$

Ponieważ kąta odiemnego dostawa iest dodatna; zrównanie ostatnie uczy nas, że w tróykącie prostokątnym kulistym, summa dwóch kątów ukośnych iest zawsze większa od kąta prostego, co iuż wiemy skądinąd. To ieszcze ostatnie zrównanie uczy nas, że bylebyśmy wiedzieli summę i różnicę dwóch kątów ukośnych w tróykącie prostokątnym, wynaydziemy przeciwprostokątną. Ponieważ

$$\text{wst}\,x = 2\,\text{dost}^2\tfrac{1}{2}x\,\text{sty}\tfrac{1}{2}x,$$

$$\text{dost}^2\tfrac{1}{2}x = \frac{1}{\text{sie}^2\frac{1}{2}x} = \frac{1}{1+\text{sty}^2\frac{1}{2}x}$$

więc

$$\text{wst}\,x = \frac{2\,\text{sty}\frac{1}{2}x}{1+\text{sty}^2\frac{1}{2}x}$$

II. $$\text{sie}\,x - 1 = \frac{1}{\text{dost}\,x} - 1 = \frac{1-\text{dost}\,x}{\text{dost}\,x} = \frac{2\,\text{wst}^2\frac{1}{2}x}{\text{dost}\,x}$$

$$= \frac{\text{wst}\,x}{\text{dost}\,x}\cdot\frac{\text{wst}\frac{1}{2}x}{\text{dost}\frac{1}{2}x} = \text{sty}\,x.\text{sty}\tfrac{1}{2}x:$$

mamy bowiem

$$2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}\text{dost}\tfrac{1}{2}x = \text{wst}\,x, \quad 2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}x = \frac{\text{wst}\,x}{\text{dost}\frac{1}{2}x},$$

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}x = \frac{\text{sie}\,x - 1}{\text{sty}\,x};$$

$$\frac{\text{wst}\,a + \text{wst}\,b}{\text{wst}\,a - \text{wst}\,b} = \frac{\text{sty}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{sty}\frac{1}{2}(a-b)}$$ § 54 Algebry.

Kiedy więc $a = 90°$, $\text{wst}\,a = 1$, i zrównanie to zamieni się na

$$\frac{1+\text{wst}\,b}{1-\text{wst}\,b} = \frac{\text{sty}(45°+\frac{1}{2}b)}{\text{sty}(45°-\frac{1}{2}b)} = \text{sty}^2(45°+\tfrac{1}{2}b);$$

$$\frac{1-\text{wst}\,b}{1+\text{wst}\,b} = \frac{\text{sty}(45°-\frac{1}{2}b)}{\text{sty}(45°+\frac{1}{2}b)} = \text{sty}^2(45°-\tfrac{1}{2}b);$$

gdyż

$$\text{sty}\,(45°+\tfrac{1}{2}b).\text{sty}\,(45°-\tfrac{1}{2}b) = 1,$$

a zatém

$$\frac{1}{\text{sty}(45^\circ - \frac{1}{2}b)} = \text{sty}(45^\circ + \frac{1}{2}b):$$

$\text{wst}\,45^\circ = \text{dost}\,45^\circ$; $\text{wst}^2 45^\circ + \text{dost}^2 45^\circ = 2\text{wst}^2 45^\circ = 2\text{dost}^2 45^\circ = 1$:

więc

$$\text{wst}\,45^\circ = \text{dost}\,45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\text{wst}\,b = 2\,\text{wst}\,\tfrac{1}{2}b.\text{dost}\,\tfrac{1}{2}b; \quad \text{wst}^2\tfrac{1}{2}b + \text{dost}^2\tfrac{1}{2}b = 1:$$

więc

$$(1 + \text{wst}\,b)^{\frac{1}{2}} = \text{dost}\,\tfrac{1}{2}b + \text{wst}\,\tfrac{1}{2}b:$$

i podobnie

$$(1 - \text{wst}\,\tfrac{1}{2}b)^{\frac{1}{2}} = \text{dost}\,\tfrac{1}{2}b - \text{wst}\,\tfrac{1}{2}b,$$

$$\text{sty}\,(45^\circ + y) = \frac{1 + \text{sty}\,y}{1 - \text{sty}\,y}.$$

Niech będzie

$$\text{sty}\,y = \frac{a}{b}, \quad 1 + \text{sty}\,y = \frac{a+b}{b}, \quad 1 - \text{sty}\,y = \frac{b-a}{b};$$

a zatém

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{1 + \text{sty}\,y}{1 - \text{sty}\,y} = \text{sty}\,(45^\circ + y).$$

III. W § 51 Algebry zrównania (β) dowodzą; że

$$2\,\text{wst}\,x.\text{wst}\,y = \text{dost}\,(x - y) - \text{dost}\,(x + y);$$

a zatém

$$2\,\text{wst}\,A.\text{wst}(C - B) = \text{dost}(A + B - C) - \text{dost}(A + C - B)$$
$$2\,\text{wst}\,B.\text{wst}(A - C) = \text{dost}(B + C - A) - \text{dost}(A + B - C)$$
$$2\,\text{wst}\,C.\text{wst}(B - A) = \text{dost}(A + C - B) - \text{dost}(B + C - A)$$

więc

$$\text{wst}A.\text{wst}(C-B)+\text{wst}B.\text{wst}(A-C)+\text{wst}C.\text{wst}(B-A)=0 \quad (a).$$

I znowu tenże § 51 Algebry uczy, że:

$$2\,\text{dost}\,x.\text{wst}\,y=\text{wst}(x+y)-\text{wst}(x-y),$$

a zatém

$$2\,\text{dost}A.\text{wst}(C-B)=\text{wst}(A+C-B)-\text{wst}(A+B-C)$$
$$2\,\text{dost}B.\text{wst}(A-C)=\text{wst}(A+B-C)-\text{wst}(B+C-A)$$
$$2\,\text{dost}C.\text{wst}(B-A)=\text{wst}(B+C-A)-\text{wst}(A+C-B):$$

więc

$$\text{dost}A.\text{wst}(C-B)+\text{dost}B.\text{wst}(A-C)+\text{dost}C.\text{wst}(B-A)=0 \quad (b).$$

Zrównania (a) i (b) podał *Gauss* bez żadnego dowodu *Theoria motus* p. 82; które zachodzą między trzema iakiemikolwiek kątami. Z nich wypada

$$\text{sty}\,A=\frac{\text{wst}B.\text{wst}(C-A)+\text{wst}C.\text{wst}(A-B)}{\text{dost}B.\text{wst}(C-A)+\text{dost}C.\text{wst}(A-B)} \quad (c).$$

Wystawiwszy sobie trzy boki tróykąta kulistego, a,b,c, będą także zachodziły podobne trzy zrównania między temi bokami, to iest:

$$\text{wst}\,a.\text{wst}(c-b)+\text{wst}\,b.\text{wst}(a-c)+\text{wst}\,c\,\text{wst}(b-a)=0 \quad (a'),$$

$$\text{dost}\,a.\text{wst}(c-b+\text{dost}\,b.\text{wst}(a-c)+\text{dost}\,c.\text{wst}(b-a)=0 \quad (b'),$$

$$\text{sty}\,a=\frac{\text{wst}\,b.\text{wst}(c-a)+\text{wst}\,c.\text{wst}(a-b)}{\text{dost}\,b.\text{wst}(c-a)+\text{dost}\,c.\text{wst}(a-b)} \quad (c').$$

Rozwiązanie zrównań trygonometrycznych za pomocą kąta nieoznaczonego.

§ 14. Maiąc dwie nieznane ilości p, Q, dane przez dwa zrównania

$$p \text{ wst} Q = A; \qquad p \text{ dost} Q = B;$$

wynaydziemy

$$\text{sty} Q = \frac{A}{B}, \qquad p = \frac{A}{\text{wst} Q} = \frac{B}{\text{dost} Q}.$$

Ale maiąc dwa zrównania

$$p \text{ wst}(A - P) = a, \qquad p \text{ wst}(B - P) = b;$$

gdzie p i P są ilości nieznane, które trzeba wynaleśdź; możemy prawda przez rozwinienie tych dwóch zrównań, i rozdzielenie ich przez siebie przyyśdź do następuiącey wartości na P

$$\text{sty} P = \frac{a \text{ wst} B - b \text{ wst} A}{a \text{ dost} B - b \text{ dost} A} = \frac{b \text{ wst} A - a \text{ wst} B}{b \text{ dost} A - a \text{ dost} B}.$$

Lecz ogólnieyszy sposób na rozwiązanie podobnych zrównań podaią nam (a) i (b) § poprzedzaiącego. Możemy bowiem w dwóch podanych zrównaniach

$$p \text{ wst}(A - P) = a, \qquad p \text{ wst}(B - P) = b,$$

uważać trzy kąty A, B, P, między któremi zachodzą takie związki iakie wyrażaią zrównania (a), (b): włóżmy w te zrównania za $\text{wst}(A - P) = \frac{a}{p}$, $\text{wst}(B - P) = \frac{b}{p}$; i żeby otrzymać wszystkie rozmaite wartości iakie mieć mogą p, P, wprowadźmy kąt nieoznaczony H, kładąc $H - A$ za A; $H - B$ za B; $H - P$ za P. Przez ten sposób zrównania (a), (b), wezmą następuiące wyrażeuie:

$$p\,\mathrm{wst}(B-A)\mathrm{wst}(H-P)=b\,\mathrm{wst}(H-A)-a\,\mathrm{wst}(H-B),$$

$$p\,\mathrm{wst}(B-A)\mathrm{dost}(H-P)=b\,\mathrm{dost}(H-A)-a\,\mathrm{dost}(H-B).$$

Teraz z różnych przypuszczeń na H, powstaią różne wartości na P, p.

Niech będzie $H=A$:

$$p\,\mathrm{wst}(B-A)\mathrm{wst}(A-P)=-a\,\mathrm{wst}(A-B)=a\,\mathrm{wst}(B-A),$$

$$p\,\mathrm{wst}(B-A)\mathrm{dost}(A-P)=b-a\,\mathrm{dost}(B-A),$$

czyli

$$p\,\mathrm{wst}(A-P)=a, \qquad p\,\mathrm{dost}(A-P)=\frac{b-a\,\mathrm{dost}(B-A)}{\mathrm{wst}(B-A)};$$

$$\mathrm{sty}(A-P)=\frac{a\,\mathrm{wst}(B-A)}{b-\mathrm{dost}(B-A)}.$$

Powtóre: Niech będzie $H=B$

$$p\,\mathrm{wst}(B-A)\mathrm{wst}(B-P)=b\,\mathrm{wst}(B-A),$$

$$p\,\mathrm{wst}(B-A)\mathrm{dost}(B-P)=b\,\mathrm{dost}(B-A)-a:$$

czyli

$$p\,\mathrm{wst}(B-P)=b,$$

$$p\,\mathrm{dost}(B-P)=\frac{b\,\mathrm{dost}(B-A)-a}{\mathrm{wst}(B-A)};$$

$$\mathrm{sty}(B-P)=\frac{b\,\mathrm{wst}(B-A)}{b\,\mathrm{dost}(B-A)-a}.$$

Potrzecie: Niech będzie $H = \frac{1}{2}(A+B)$:

$$p \,\mathrm{wst}(B-A)\,\mathrm{wst}(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B-P) = (b+a)\,\mathrm{wst}\tfrac{1}{2}(B-A),$$

$$p \,\mathrm{wst}\left(\frac{A+B}{2}-P\right) = \frac{b+a}{2\,\mathrm{dost}\,\frac{1}{2}(B-A)};$$

$$p \,\mathrm{dost}\left(\frac{A+B}{2}-P\right) = \frac{b-a}{2\,\mathrm{wst}\,\frac{1}{2}(B-A)};$$

$$\mathrm{sty}\left(\frac{A+B}{2}-P\right) = \frac{b+a}{b-a}\,\mathrm{sty}\,\tfrac{1}{2}(B-A)$$

$$= \mathrm{sty}(45^\circ+y)\,\mathrm{sty}\,\tfrac{1}{2}(B-A):$$

kiedy położymy $\frac{a}{b} = \mathrm{sty}\,y$, § 13. II.

Gdybyśmy chcieli znaleśdź wartość na p przez a, b, nie czekaiąc na rachunek kąta P; ponieważ

$$p^2\,\mathrm{wst}^2(A-P)+p^2\,\mathrm{dost}^2(A-P) = p^2,$$

z dwóch pierwszych przypuszczeń na H, otrzymamy

$$p \,\mathrm{wst}(B-A) = \sqrt{[a^2-2ab\,\mathrm{dost}(B-A)+b^2]}.$$

Gdyby przyszło wynaydować p, P z dwóch zrównań

$$p \,\mathrm{dost}(A-P) = a, \qquad p \,\mathrm{dost}(B-P) = b;$$

można na to użyć wyżey położonych wzorów, ale za A, trzeba brać $90^\circ+A$; za B, $90^\circ+B$; będzie

$$A-P = 90^\circ-(P-A); \; B-P = 90^\circ-(P-B).$$

Nowy ten sposób rozwiązania zrównań trygonometrycznych barzo mieć może rozległe w rachunku analitycznym użycie.

ROZDZIAŁ DRUGI.

WYMIAR TROYKATA KULISTEGO: IEGO UŻYCIE W ROZMIERZANIU ZIEMI: POROWNANIE TEGO TROYKATA Z PROSTOKRESLNYM.

Powierzchnia Tróykąta kulistego.

§ 15. Jeżeli promień koła $= 1$, a przez π wyrazić chcemy stosunek połowy obwodu koła do tego promienia, $\pi = 3,14159265358\,9\ldots$,

l. $\pi = 0,4971498726\,94$: więc połowa obwodu koła, którego r promień, iest $r\pi$: a cały obwód $= 2r\pi$.

Powierzchnia koła wielkiego promienia r, iest $2r\pi.\frac{1}{2}r = r^2\pi$.

Powierzchnia kuli iest cztery razy wziętą powierzchnią koła $= 4r^2\pi$.

Ponieważ znamy wymiar powierzchni kuli: tróykąt kulisty iest częścią tey powierzchni; więc gdybyśmy znali iego stosunek do powierzchni kuli; za pomocą proporcyi znaleźlibyśmy powierzchnią tego tróykąta. Idzie więc iedynie o to, aby poznać, iak się ma powierzchnia iakiegokolwiek tróykąta kulistego złożonego z łuków kół wielkich, do powierzchni kuli.

Powiedzieliśmy w § 10 że tróykąt kulisty maiący trzy kąty proste, iest rownokątnym i równobocznym: że z ośmiu takich tróykątów składa się cała powierzchnia kuli; więc powierzchnia takiego tróykąta iest osmą częścią powierzchni kuli, czyli $\frac{r^2\pi}{2}$. Przedłużmy ramiona tego tróykąta póki się nie przetną: zrobi się taśma spiczasta z dwóch takich tróykątów przy zasadzie spoionych, i powierzchnia tey taśmy $=r^2\pi$: to iest, równa powierzchni koła wielkiego, a zatém czwartey części powierzchni kuli. Taśma ta w każdéy swoiey kończystości zamyka kąt prosty, który iak widzimy iest przepełnieniem dwóch kątów prostych w tróykącie. Nazywać ią odtąd będziemy *taśmą kąta prostego* albo 90°. Podzielmy tę taśmę na mnieysze taśmy spiczaste: ramiona tych mnieyszych taśm będą zawsze pionowe na zasadę; bo spiczastość taśmy iest tey zasady biegunem § 10: więc każda ta mnieysza taśma z dwóch tróykątów równych przy zasadzie spoionych złożona, w każdey swoiey spiczastości zawierać będzie kąt, równy przepełnieniu dwóch kątów prostych swoiego tróykąta. Będzie się więc miała iey powierzchnia do powierzchni taśmy kąta prostego, iako kąt iey w spiczastości, do 90°: albo inaczey, iako kąt iey przepełnienia do 90. Nazwawszy kąt spiczastości tey małey taśmy P, iey powierzchnią x, powierzchnią taśmy kąta-prostego S, mamy

$$90^\circ : P = S : x, \qquad x = \frac{P.S}{90^\circ} = \frac{r^2\pi P}{90^\circ}:$$

połowa tey taśmy czyli troykąt kulisty porstokątny i równoramienny $\frac{r^2\pi.P}{2.90^\circ}$.

Weźmy połowę taśmy kąta prostego za iedność, to iest tróykąt równoboczny i równokątny, i z nim porównywąymy co do powierzchni insze tróykąty: będzie

$$\frac{r^2\pi}{2} : \frac{r^2\pi . P}{2.90} = 90^\circ : P.$$

Aże w każdym tróykącie kulistym, summa wszystkich kątów, iest większa od dwóch kątów prostych § 4; więc możemy każdy tróykąt kulisty ABC wystawić sobie, iako złożony z dwóch kątów prostych, i z przepełnienia: to przepełnienie równe $A+B+C-180^\circ$: a co to samo znaczy: możemy go sobie wystawić iako przerobiony na połowę taśmy spiczastey, maiącey w wierzchołku kąt $A+B+C-180^\circ$.

Trzeba teraz dowieśdź: że każdy tróykąt kulisty iest równy co do powierzchni tróykątowi równoramiennemu złożonemu z boków będących ćwiartkami koła, i maiącemu kąt w spiczastości, równy przepełnieniu dwóch kątów prostych.

Dwie płaszczyzny przecinaiące kulę przez środek
fig. 3 przetną się nawzaiem, i wydadzą na fig. 3 dwie taśmy spiczaste $ABCA'$, $ADEA'$, zupełnie sobie równe. Powierzchnia każdey taśmy podług tego cośmy wyżey powiedzieli $= 2A$, ieżeli A iest kątem $BAC = BA'C$. Przetnijmy kulę w poprzek trzecią płaszczyzną $BCDE$ przez środek przechodzącą; przetną się i taśmy: każdey część iedna leżeć będzie nad płaszczyzną czyli na półkulu wierzchniém; druga pod płaszczyzną, czyli na półkulu spodniém. Jedney taśmy dwie części wyraźmy przez k', k; drugiey przez h', h: więc $2A = k + k' = h + h'$. Aże dwa koła wielkie przecinaią się w odległości 180°, więc

$$AB + BA' = 180^\circ, \quad AB + AD = 180^\circ;$$
$$AC + CA' = 180^\circ, \quad AC + AE = 180^\circ:$$

a zatém

$$AD = BA', \quad AE = CA';$$

więc

$$ADE = BA'C, \text{ czyli } h = k'.$$

$$AD + DA' = 180^\circ, \quad AD + AB = 180^\circ,$$
$$AE + EA' = 180^\circ, \quad AE + AC = 180^\circ;$$

zatém

$$AB = DA', \quad AC = EA':$$

więc

$$ABC = A'DE, \text{ czyli } k = h'; \text{ a zatém } k + h = 2A:$$

to iest: części dwóch taśm z kąta A wychodzące i rozciągnione na półkulu; są równe taśmie całey, albo dwa razy wziętemu kątowi.

Na połkulu $FGHIE$, fig. 4, niech będzie iakikolwiek tróykąt ABC; przedłużmy z obu stron iego boki aż do 180°: w wierzchołku każdego kąta powstaną dwie części taśm, których summa równa dwa razy wziętemu kątowi, to iest $2A = FAG + KAJ$; $2C = HCJ + FCE$; $2B = EBK + GBH$. Te taśmy ogarną połowę powierzchni kuli, i dwa razy powierzchnią tróykąta ABC; gdyż ten wchodzi w każdą summę taśm cząstkowych: więc będzie fig. 4

$$2A + 2B + 2C = \tfrac{1}{2} \text{ Powierz. kuli } + 2 \text{ tróykąt } ABC.$$

Aże powierzchnia połowy kuli $= 4.90^\circ = 2.180^\circ$; więc powierzchnia

$$\text{tróykąta } ABC = A + B + C - 180^\circ.$$

Będzie się więc miał każdy tróykąt kulisty co do powierzchni, do tróykąta wziętego za iedność; iak kąt iego przepełnienia, do 90°: to iest będzie

$$\frac{r^2 \pi P}{2.90} = \frac{r^2 \pi}{2.90}(A + B + C - 180^\circ).$$

Maiąc drugi iakikolwiek tróykąt kulisty $A'B'C'$, iego przepełnienie P'; będzie iego powierzchnia $\frac{r^2\pi P'}{2.90}$; więc będą się miały powierzchnie tych dwóch tróykątów do siebie iak P do P': i ogólnie: *Powierzchnie tróykątów kulistych maią się do siebie, iak ich przepełnienia.* I stąd to powstało to krótkie ale dla poczynaiących trudne do gruntownego zrozumienia twierdzenie: *że powierzchnia tróykąta kulistego iest równa iego przepełnieniu dwóch kątów prostych:* gdzie powierzchnia tróykąta równokątnego i równobocznego wzięta za iedność.

To zwięzłe ale ciemne tłumaczenie się w Geometryi ma wielką nieprzyzwoitość: bo albo poczynaiących wprowadza w fałszywe poięcie rzeczy, albo ich wprawia w trudności ciężkie do pokonania: któż to bowiem zrozumie, *że kąt iest równy powierzchni, albo że powierzchnia równa kątowi?* A przecież w wymiarach brył, płaszczyzn, i powierzchni przyięto ten sposób mówienia, zwięzły prawda, ale ciemny i niebezpieczny. Pamiętać więc należy, że w tych skróconych twierdzeniach, zawsze mowa iest o stosunku dwóch liczb ogólnych, z których iedna wypada z porównania powierzchni z powierzchnią, druga z porównania kąta z kątem. Dopiero tu wyłożone twierdzenie naypierwszy obiawił *Albert Girard* w dziele *Invention nouvelle en Algébre*, ogłoszoném w Amsterdamie roku 1629, które ścisle dowiódł *Cavalleri* w książce *Directorium generale uranometricum* drukowaney w Bononii roku 1632. Przypomniał ie wszystkim *naprzód Jan Broski* Professor matematyki w akademii krakowskiey w § 24. k. 79. dzieła swego: *Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum. Dantisci 1652.* Po nim *Jan Wallis* Geometra oxfordzki w dzieł swoich tomie II. k. 875. wydanych w Oxfordzie roku 1693. Dowodzenie tego twierdzenia wyięte z *Wallis* gruntownie i iaśnie wyłożył sposobem syntetycznym *Le Gendre* w swoiey Geometryi. Jeszcze ie lepiey wyiaśnił *Delambre Abregé d'astronomie* p. 118. Tu wyłożone iest sposobem zdaie mi się prostym i iasnym.

Jest więc powierzchnia iakiegokolwiek tróykąta kulistego ABC

$$\frac{r^2\pi}{180°}(A+B+C-180°)=\frac{r^2.3{,}14159265}{180°}(A+B+C-180°)$$

W użyciu tey formuły to trzeba uważać; iż ieżeli przepełnienie zamyka stopnie kołowe, minuty i sekundy; trzeba minuty i sekundy wyrazić przez stopień, to iest zamienić na ułamki dziesiętne stopnia: n.p. przepełnienie $1°23'30''=1°{,}3833=A+B+C-180°$, i przez tę liczbę rozmnożyć $\frac{r^2\pi}{180}$. Jeżeli zaś przepełnienie zamyka tylko minuty i sekundy, trzeba sekundy zamienić na ułamki dziesiętne minut, tak otrzymaną liczbę minut rozmnożyć przez $0{,}01666=\frac{1}{60}$ i dopiero przez otrzymaną mnogość rozmnożyć $\frac{r^2\pi}{180}$: n. p. iest przepełnienie $=6'25''=6'{,}4016$: więc $6'{,}4016\times0{,}01666\,\frac{r^2\pi}{180}$, iest powierzchnią tróykąta. Albo inaczey: zamienić 180° na minuty $60.180°=10800'$; więc $\frac{r^2\pi}{10800}6{,}4016$ iest powierzchnią tróykąta.

Jeżeli nakoniec przepełnienie zamyka same sekundy, trzeba tę liczbę sekund rozmnożyć przez $0{,}0002777 = \frac{1}{3600} = \frac{1}{60.60}$, i dopiero przez otrzymaną stąd mnogość, rozmnożyć $\frac{r^2\pi}{180}$. Albo krócey, trzeba 180° zamienić na sekundy $10800.60 = 648000$, i przez liczbę sekund rozmnożyć $\frac{r^2\pi}{648000}$, a otrzymamy powierzchnią troykąta. Ponieważ użycie tey formuły zachodzi w rozmiarach ziemi i różnych kraiów; gdzie przepełnienie otrzymuiemy w samych sekundach; dla tego: że powierzchnia naywiększych wymierzanych tróykątów iest nieznaczna w porównaniu powierzchni ziemskiey; więc formułę naszę wystawimy w następuiącym wyrazie

$$\frac{r^2.3{,}14159265}{648000}(A+B+C-180^\circ).$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{l}.\pi = & 0{,}49714987. \\
\text{l}.\ 648000 = & 5{,}81157500. \\
\hline
& 4{,}68557487 = \text{l.wst}\ 1''.
\end{array}
$$

Więc gdy przepełnienie zachodzi w sekundach, albo zamieniwszy ie na sekundy, powierzchnia tróykąta kulistego wyraża się

$$r^2 \text{wst}\ 1''(A+B+C-180^\circ).$$

Jeżelibyśmy użyli tego wyrazu do wymiarów ziemskich, r wyrażać będzie promień ziemi: a ponieważ z wymiarów francuzkich ćwierć koła ziemskiego $= 10.000000$ metrów; więc $\frac{\pi r}{2} = 10.000000$

$r = \frac{20.000000}{\pi}$, $\text{l}.r = 6{,}8038802$ w metrach: dodawszy logarytm stosunku metru do pręta francuzkiego (*toise*) 9,7101800 *Geogr. k. 192.* będzie w prętach francuzkich l.r=6,5140602. Pręt francuzki równa się zupełnie trzem łokciom litewskim l.r^2wsl1″= 7,7136952. Do tego logarytmu dodawszy logarytm przdpełnienia, otrzymamy logarytm powierzchni tróykąta kulistego na kuli promienia r, w prętach kwadratowych francuzkich. Przypuśćmy n. p. że przepełnienie w tróykącie ziemskim pokaże się 3″: więc logarytm powierzchni tróykąta=8,1908164. to iest: ten tróykąt kulisty byłby równy co do powierzchni tróykątowi prostokreślnemu, którego zasada iest 26000, a wysokość 11936,4 prętów francuzkich.

W tym przykładzie widzimy, iak wielkie bydź muszą na ziemi tróykąty, żeby się pokazało w nich przepełnienie w sekundach łuku. Przy wprawie i dokładnie zrobionych instrumentach, można w mierzenu kątów popełnić omyłkę kilku sekund, która znaczny ma wpływ na powierzchnią tróykąta. Z drugiey strony bardzo ważną iest rzeczą znać to przepełnienie; to placu wielkiego na ziemi nie godzi się brać za płaszczyznę. A chcąc z tróykątami kulistemi tak się obchodzić iak z prostokreślnemi za pomocą twierdzenia P. *Le Gendre*, o którém będzie niżey; trzeba nam z dokładnością znać tróykąta kulistego przepełnienie: więc znaiomość przepełnienia w każdym przypadku iest potrzebna i ważna dla dokładnego wymiaru ziemi, i iakiegokolwiek na niey kraiu. Tu wypada barzo ważne zapytanie: *ze znanych dwóch boków i kąta między niemi zawartego w tróykącie kulistym, wynaleśdź iego przepełnienie.*

Wyrażenie liniy trygonometrycznych przez łuki: i dwoiakie tych łuków wartości.

§ 16. Nim przystąpimy do rozwiązania tego zadania, należy nam sobie przypomnieć, że § 54 Alg

$$\text{wst}\,v = v - \frac{v^3}{2.3} + \frac{v^5}{2.3.4.5} - \frac{v^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{v^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} \text{ i t. d.}$$

$$\text{dost}\,v = 1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2.3.4} - \frac{v^6}{2.3.4.5.6} + \frac{v^8}{2.3.4.5.6.7.8} \text{ i t. d.}$$

Jeżeli pierwsze zrównanie rozdzielimy przez drugie, i wykonamy w tych szeregach zwyczayne dzielenie algebraiczne, pilnie bacząc na znaki, i na ułamki różnych mianowników, otrzymamy

$$\text{sty}\,v = v + \frac{v^3}{3} + \frac{2v^5}{3.5} + \frac{17.v^7}{3.3.5.7} + \frac{62\,v^9}{3.3.5.7.9} + \frac{1382\,v^{11}}{3.3.5.5.7.9.11} + \text{ i t. d.}$$

a rozdzieliwszy tym samym sposobem drugie przez pierwsze; otrzymamy

$$\text{dosty}\,v = \frac{1}{v} - \frac{v}{3} - \frac{v^3}{3.3.5} - \frac{2v^5}{3.3.3.5.7} - \frac{v^7}{3.3.3.5.5.7} - \text{ i t. d.}$$

W wymiarze ziemi przez tróykąty, widzieć możemy wielką tych zrównań potrzebę; mamy bowiem do czynienia z łukami mierzącemi bardzo małe kąty w środku ziemi. Wymiary praktyczne daią nam wyprostowanie (*rectificatio*) tych łuków, czyli ich miarę w linii prostey; to iest w częściach promienia ziemskiego. Tu zachodzą dwoiakie wartości tych łuków: albo w częściach obwodu koła przez stopnie, minuty, i sekundy; albo w częściach promienia kuli n. p. prętach francuskich. Wypada nam co moment od iednych wartości przechodzić do drugich przez sposób, którego nam się trzeba dobrze nauczyć. Sposób ten zależy na dwoiakiey wartości, którą nadadź możemy promieniowi kuli: można go uważać albo iako liniią prostą, albo iako wygięty na łuk swego koła. W tym drugim przypadku, wiemy że promień $=57°17'44''.8=206264'',8$; $l.206264'',8=5,3144251=l.(r)$ Przez r wyrażać zawsze będziemy promień iako liniią prostą; przez (r) zaś promień wygięty na łuk, czyli wyrażony przez sekundy koła. Wszystkie liniie trygonometryczne są liniie proste wyrażone w częściach promienia wziętego za linią prostą: więc ieżeli ie chcemy wykrzywić, czyli wyrazić przez części obwodu koła, to iest sekundy; trzeba ie rozmnożyć przez (r): i tak $wst\, b.(r)=$ łukowi koła w sekundach.

Jeżeli zaś liniie trygonometryczne są wyrażone przez łuki, iak w poprzedzaiących zrównaniach $wst\, v$; $sty\, v$, etc. trzeba te łuki wyprostować, żeby ie mieć takiey samey miary, iak liniia trygonometryczna, to iest w częściach promienia wziętego za liniią prostą: więc potrzeba te łuki rozdzielić przez (r); bo ieżeli $wst\, b.(r)=v$, $wst\, b=\frac{v}{(r)}$.

Aże tablice liniy trygonometrycznych uczą nas; że $l.206264,8=l.(r)=l.\frac{1}{wst\, 1''}$, i że $l.\frac{1}{(r)}=l.wst\, 1''$; więc ieżeli chcemy liniie proste wykrzywić na łuk, to iest wyrazić ie w częściach obwodu koła n. p. w sekundach; trzeba ie mnożyć przez $\frac{1}{wst\, 1''}$, będzie więc $\frac{wst\, b}{wst\, 1''}=v$. Jeżeli zaś chcemy łuki wyprostować, czyli wyrazić ie w miarach linii prostey, trzeba ie mnożyć przez $wst\, 1''$: i tak $v.wst\, 1''=wst\, b$. Że zaś

$l.2 + l.\text{wst}\,1'' = l.2\,\text{wst}\,1'' = l.\text{wst}\,2''$; $l.3 + l.\text{wst}\,1'' = l.3\,\text{wst}\,1'' = l.\text{wst}\,3''$; i t. d. Ztąd każdy zrozumie, że za 2 wst 1″, 3 wst 1″, 4 wst 1″ i t. d. można pisać wst 2″, wst 3″, wst 4″, i t. d.

Boki tróykątów na powierzchni ziemi wymierzanych są to łuki barzo małych kątów w środku ziemi: chcąc przez nie wyrazić te kąty, należy boki rozdzielić przez promień czyli rozmnożyć przez wst 1″. Aże ziemia nie iest kulą tego samego wszędzie promienia; więc żeby te łuki przywieść do promienia służącego pewnemu kraiowi czyli pewney szerokości geograficzney mieysca, trzeba z figury ziemi wyciągnąć miarę iednego stopnia południka, rozdzielić przez tę miarę ieden stopień czyli 3600″, i przez ten stosunek rozmnożyć kąt w środku ziemi przez bok tróykąta zawarty. Rozmierzaiąc n. p. Litwę, trzebaby wziąć szerokość geograficzną średnią między *Rygą* i *Grodnem* 55°18′45″: figurę ziemi $\frac{1}{310}$; długość stopnia południkowego 57104,5 prętów francuzkich. Więc kąt zawarty w środku ziemi przez bok tróykąta a, będzie $\frac{3600''}{57104{,}5}a.\text{wst}\,1''$.

Wyrażenie przepełnienia przez boki i kąty.

§ 17. Przystąpmy tèraz do zadania podanego na końcu § 15.

$$A+B+C-180° = P,\quad \tfrac{1}{2}P = -[90° - \tfrac{1}{2}(A+B+C)]:$$

a zatém

$$\text{dosty}\,\tfrac{1}{2}P = -\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

$$= -\frac{\text{sty}\,\frac{1}{2}A + \text{sty}\,\frac{1}{2}(B+C)}{1 - \text{sty}\,\frac{1}{2}A.\text{sty}\,\frac{1}{2}(B+C)} \quad \text{§ 54 Alg.}$$

włóżmy w to zrównanie za $sty\frac{1}{2}(B+C)$ iey wartość z analogii *Nepera* § 7; otrzymamy

$$dosty\tfrac{1}{2}P = -\frac{dost\frac{1}{2}(b+c)sty\frac{1}{2}A + dosty\frac{1}{2}A.dost\frac{1}{2}(b-c)}{dost\frac{1}{2}(b+c) - dost\frac{1}{2}(b-c)};$$

a odmieniwszy znaki w mianowniku, żeby drugą stronę zrobić dodatną; położywszy za $sty\frac{1}{2}A = \frac{wst\frac{1}{2}A}{dost\frac{1}{2}A}$; za $dosty\frac{1}{2}A = \frac{dost\frac{1}{2}A}{wst\frac{1}{2}A}$; przywiodłszy ułamki do iednego mianownika; mieć będziemy

$$dosty\tfrac{1}{2}P = \frac{dost\frac{1}{2}(b+c)wst^2\frac{1}{2}A + dost\frac{1}{2}(b-c)dost^2\frac{1}{2}A}{wst\frac{1}{2}A.dost\frac{1}{2}A[dost\frac{1}{2}(b-c) - dost\frac{1}{2}(b+c)]}.$$

Ażе $wst\frac{1}{2}A.dost\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}wst A$; $dost\frac{1}{2}(b-c) - dost\frac{1}{2}(b+c) = 2\,wst\frac{1}{2}b.wst\frac{1}{2}c$; więc mianownik tego ułamku $= wst\frac{1}{2}b.wst\frac{1}{2}c.wst A$. Licznik zaś tego samego ułamku, ieżeli wyrazimy summy i różnice łuków, przez łuki poiedyncze; zamieni się na $dost\frac{1}{2}b.dost\frac{1}{2}c + wst\frac{1}{2}b.wst\frac{1}{2}c(dost^2\frac{1}{2}A - wst^2\frac{1}{2}A)$: że zaś $dost^2\frac{1}{2}A - wst^2\frac{1}{2}A = dost A$; § 51 Algebry; więc całe zrównanie rozdzielone przez $dost\frac{1}{2}b.dost\frac{1}{2}c$ stanie się

$$dosty\tfrac{1}{2}P = \frac{1 + sty\frac{1}{2}b.sty\frac{1}{2}c.dost A}{sty\frac{1}{2}b.sty\frac{1}{2}c.wst A};$$

albo

$$sty\tfrac{1}{2}P = \frac{sty\frac{1}{2}b.sty\frac{1}{2}c.wst A}{1 + sty\frac{1}{2}b.sty\frac{1}{2}c.dost A} \qquad (L).$$

b,c. są dwa boki tróykąta; i kąt między niemi zawarty *A*, przez które wyraziliśmy przepełnienie *P*, i rozwiązaliśmy zadanie. *Delambre* w pięknem dziele swoiem *Base du systeme métrique Tome 1. p. 146.*

rozwięzuie to samo zadanie innym sposobem, wyrażaiąc przepełnienie przez dwa boki i dwa kąty im przyległe. Ze zrównań przez siebie otrzymanych wyrachował tablicę, gdzie ze znanych dwóch boków i dwóch kątów, zaraz znaleśdź można przepełnienie tróykąta. Ponieważ ta tablica barzo iest do wymiaru kraiu przydatna; nie będzie bez pożytku poznać te zrównania. Rozdzielmy tróykąt ABC na dwa tróykąty prostokątne przez spuszczenie łuku pionowego z wierzchołka kąta A, na bok mu przeciwległy a. Kąt A rozdzieli się na dwa kąty A', A''; tak, że $A = A' + A''$: boki b, c będą przeciwprostokątnemi. Będą więc dwa tróykąty $A'CD$, $A''BD$, D iest punkt na a, gdzie pada łuk pionowy. Każdy tróykąt da nam iedno zrównanie. Idzie o to, aby znaleśdź linią trygonometryczną na kąty A', C, i na kąty A'', B, których summa da nam przepełnienie tróykąta ABC. Z własności tróykąta prostokątnego § 9 zrównanie (c), mamy.

$$\text{dosty}\,A' = \text{dost}\,b.\text{sty}\,C = \text{sty}\,(90° - A'),$$

$$\text{sty}\,C - \text{sty}\,(90° - A') = \text{sty}\,C(1 - \text{dost}\,b) = 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}b.\text{sty}\,C:$$

i w drugim tróykącie

$$\text{dosty}\,A'' = \text{dost}\,c.\text{sty}\,B = \text{sty}(90° - A''),$$

$$\text{sty}\,B - \text{sty}(90° - A'') = \text{sty}\,B(1 - \text{dost}\,c) = 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}c.\text{sty}\,B.$$

$$\frac{\text{wst}\,C}{\text{dost}\,C} - \frac{\text{dost}\,A'}{\text{wst}\,A'} = \frac{\text{wst}\,A'\,\text{wst}\,C - \text{dost}\,A'\text{dost}\,C}{\text{wst}\,A'\,\text{dost}\,C}$$

$$= \frac{-\text{dost}(A' + C)}{\text{wst}\,A'\,\text{dost}\,C} = \frac{\text{wst} - (90° - [A' + C])}{\text{wst}\,A'\,\text{dost}\,C}$$

$$= \frac{\text{wst}\,(A' + C - 90°)}{\text{wst}\,A'\,\text{dost}\,C}$$

skąd wypada

$$\text{wst}(A'+C-90^\circ)=2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}b\ \text{wst}\,C\ \text{wst}\,A',$$

podobnie

$$\text{wst}(A''+B-90^\circ)=2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}c.\text{wst}\,B.\text{wst}\,A''.$$

Druga strona zrównania iest koniecznie dodatna, więc i pierwsza taką bydź musi: a zatém w każdym tróykącie prostokątnym summa dwóch kątów ukośnych iest większa od 90°, i większa o łuk, którego wstawa $=2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}b.\text{wst}\,C.\text{wst}\,A'$. Nazwiymy ten łuk x, więc

$$x=A'+C-90^\circ;\quad A'=x+90^\circ-C=90^\circ-(C-x):.$$

$$\text{wst}\,A'=\text{dost}(C-x)$$

$$\text{wst}\,x=2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}b.\text{wst}\,C.\text{dost}(C-x)$$

$$=\text{wst}^2\tfrac{1}{2}b.\text{wst}\,2C.\text{dost}\,x+2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}b.\text{wst}^2C.\text{wst}\,x.$$

Rozdzieliwszy całe zrównanie przez $\text{dost}\,x$, i za $2\,\text{wst}^2C=1-\text{dost}\,2C$, § 51 Algebry, włożywszy tę wartość; mieć będziemy

$$\text{sty}\,x=\frac{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}b.\text{wst}\,2C}{\text{dost}^2\tfrac{1}{2}b+\text{wst}^2\tfrac{1}{2}b.\text{dost}\,2C}$$

$$=\frac{\text{sty}^2\tfrac{1}{2}b.\text{wst}\,2C}{1+\text{sty}^2\tfrac{1}{2}b.\text{dost}\,2C}\qquad(\text{L}').$$

Podobnie z drugiém zrównaniem postępuiąc, nazwawszy $y=A''+B-90^\circ$, wynaydziemy

$$\text{sty}\,y=\frac{\text{sty}^2\tfrac{1}{2}c.\text{wst}\,2B}{1+\text{sty}^2\tfrac{1}{2}c.\text{dost}\,2B}.$$

Że zaś

$$x = A' + C - 90; \quad y = A'' + B - 90°:$$

$$x + y = A' + A'' + B + C - 180° = A + B + C - 180°.$$

Przyszliśmy do zrównań *Delambra*, i do drugiego sposobu na wynalezienie przepełnienia. Ale zastanowmy się nad tém; że kąty przepełnienia są barżo małe w wymiarach praktycznych; że tablice liniy trygonometrycznych są tylko przybliżenia do wartości prawdziwych, i że w siedmiu dziesiętnych notach, iak są zwyczaynie znane i używane, nie mogą nam dać małych różnic kątów ze znacznie przybliżoną dokładnością. Z czego się pokazuie, że zrównania (L), (L′) nie na wiele nam się w wymiarach praktycznych przydadzą, ieżeli liniy trygonometrycznych nie wyrazimy przez łuki w szeregach barzo maleiących, którychby początkowe terminy dały wartość znacznie do prawdziwey zbliżoną. Skąd wypada takie zadanie: maiąc daną liniią trygonometryczną przez funkcyą drugiey lub drugich liniy trygonometrycznych; wyrazić iey łuk przez szereg maleiący: n. p. maiąc sty $x = m.\text{wst}y$, wyrazić x przez funkcyą m i kąta y,

Wyrażenie łuku przez funkcyą liniy trygonometrycznych,

§ 18. *De la Grange* rozwiązał dopiero wymienione zadanie w aktach akademii Berlińskiey na rok 1776. k. 214. *Solutions de quelques problémes d'astronomie sphérique par le moyen des series.* Rozwiązał ie za pomocą funkcyi z wykładnikami uroionemi: bo wiemy z § 55 .Algebry, że liniie trygonometryczne wyrazić się mogą przez funkcye, których wykładnikiem iest łuk pod postacią uroioną. Z czego się uczymy, że funkcye uroione są charakterystycznym języka analitycznego wyrazem, ile razy od ilości algebraicznych przechodzić chcemy do przestępnych. A zatém iako w tym języku $\pm$ nie zawsze znaczy dodawanie i odciąganie; tak $a\sqrt{-1}$ nie zawsze znaczy niedorzeczność.

Dowiedliśmy naprzykład w Algebrze k. 256 kiedy $k=1$, że

$$\text{l.}(1+z)=z-\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3-\tfrac{1}{4}z^4+\tfrac{1}{5}z^5-\text{ i t. d.}$$

Połóżmy $z=\frac{1}{z}$,

$$\text{l.}(1+\frac{1}{z})=\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{3z^3}-\frac{1}{4z^4}+\frac{1}{5z^5}-\text{ i t. d.}$$

$$\text{l.}(1+z)-\text{l.}(1+\frac{1}{z})=\text{l.}\frac{z+z^2}{1+z}=\text{l.}z;$$

więc

$$\text{l.}z=z-z^{-1}-\tfrac{1}{2}(z^2-z^{-2})+\tfrac{1}{3}(z^3-z^{-3})-\text{ i t. d.}$$

Niech będzie

$$z=e^{v\sqrt{-1}} \quad \text{więc} \quad \text{l.}z=v\sqrt{-1};$$

a zatém

$$v\sqrt{-1}=e^{v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}-\tfrac{1}{2}\left\{e^{2v\sqrt{-1}}-e^{-2v\sqrt{-1}}\right\}$$
$$+\tfrac{1}{3}\left\{e^{3v\sqrt{-1}}-e^{-3v\sqrt{-1}}\right\}$$

Rozdzielmy całe to zrównanie przez $2\sqrt{-1}$ i za funkcye wykładników uroionych, pokładźmy ich wartości z § 55 Algebry; będzie

$$\tfrac{1}{2}v = \mathrm{wst}\,v - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{wst}\,2v + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{wst}\,3v - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{wst}\,4v \text{ i t. d.}$$

ten wzór iest wielkiego w wyższych rachunkach użycia.

Tak dopiero przytoczony przykład, iak zadanie tu rozważane daią się ieszcze rozwiązać przez rachunek różnicowania i całkowania; bo różnicowanie każdey linii trygonometryczney składa się z różnicowania łuku, i z funkyi drugiey linii trygonometryczney. I tą naprzód drogą wpadł *de la Grange* na iedno twierdzenie, które go przywiodło do rozwiązania roztrząsanego tu zadania. Nie iest tu mieysce do tłumaczenia dwóch tych sposobów; bo zachodzące tu przypadki potrafimy rozwiązać przez zrównania i sposoby podane w Algebrze § 51, 53, 55.

Jak zrównanie (L), tak zrównanie (L′) wyrażaią się pod tą postacią:

$$\mathrm{sty}\,x = \frac{m.\mathrm{wst}\,y}{1 + m.\mathrm{dost}\,y}$$

położywszy w (L) za $m = \mathrm{sty}\,\tfrac{1}{2}b.\mathrm{sty}\,\tfrac{1}{2}c$, za $y = A$; w (L′) zaś $m = \mathrm{sty}^2\tfrac{1}{2}b$, $y = 2C$. Idzie więc o to, żeby x wyrazić przez funkcyą m, y. Dowiedliśmy w § 55 Algebry; że

$$x = \mathrm{sty}\,x - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{sty}^3x + \tfrac{1}{5}\,\mathrm{sty}^5x - \tfrac{1}{7}\,\mathrm{sty}^7x + \text{ i t. d.}$$

z ułamkiem $\dfrac{m.\mathrm{wst}\,y}{1 + m.\mathrm{dost}\,y}$ wykonaymy dzielenie

$$\begin{aligned}
\mathrm{sty}\,x &= m\mathrm{wst}\,y - m^2\mathrm{wst}\,y.\mathrm{dost}\,y \\
&\quad + m^3\mathrm{wst}\,y.\mathrm{dost}^2y - m^4\mathrm{wst}\,y.\mathrm{dost}^3y + m^5\mathrm{wst}\,y.\mathrm{dost}^4y - \\
-\tfrac{1}{3}\mathrm{sty}^3x &= -\tfrac{1}{3}m^3\mathrm{wst}^3y \quad . \quad + m^4\mathrm{wst}^3y.\mathrm{dost}\,y - m^5\mathrm{wst}^3y.\mathrm{dost}^2y + \\
\tfrac{1}{5}\mathrm{sty}^5x &= \qquad\qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{5}m^5\mathrm{wst}^5y - \text{ i t. d.}
\end{aligned}$$

Ponieważ m iest ułamkiem albo liczbą barzo małą, wst y koniecznie ułamkiem; więc ten szereg w czterech początkowych terminach da wartość barzo bliską prawdy, i nad m^4 tego szeregu posuwać nie należy. Aże podług § 51, 53 Algebry $\text{wst}\,y.\text{dost}\,y = \frac{1}{2}\,\text{wst}\,2y$; $3\,\text{wst}\,y.\,\text{dost}^2 y - \text{wst}^3 y = 3\,\text{wst}\,y - 4\,\text{wst}^3 y = \text{wst}\,3y$, $\text{wst}^3 y.\text{dost}\,y - \text{wst}\,y.\,\text{dost}^3 y = \text{wst}\,y.\text{dost}\,y(\text{wst}^2 y - \text{dost}^2 y)$ $= -\,\text{wst}\,y.\,\text{dost}\,y\,(\text{dost}^2 y - \text{wst}^2 y) = -\frac{1}{2}\text{wst}\,2y.\,\text{dost}\,2y$ $= -\frac{1}{4}\,\text{wst}\,4y$ i t. d. więc

$$x = m\,\text{wst}\,y - \tfrac{1}{2}m^2\,\text{wst}\,2y + \tfrac{1}{3}m^3\,\text{wst}\,3y - \tfrac{1}{4}m^4\,\text{wst}\,4y + \text{etc.}$$

wszystkie te terminy szeregu należy rozdzielić przez wst 1″, żebyśmy x otrzymali w sekundach łuku: to iest

$$x = \frac{m.\text{wst}\,y}{\text{wst}\,1''} - \frac{m^2\text{wst}\,2y}{\text{wst}\,2''} + \frac{m^3\,\text{wst}\,3y}{\text{wst}\,3''} - \frac{m^4\,\text{wst}\,4y}{\text{wst}\,4''} + \text{i t.d.}$$

Z tego zrównania, wyrazić ieszcze potrafimy x, kiedy będzie sty $x = \dfrac{m\,\text{dost}\,u}{1 + m\,\text{wst}\,u}$; bo położywszy $y = 90^\circ - u$, $\text{wst}\,y = \text{dost}\,u$; $2y = 180^\circ - 2u$; a zatém $\text{wst}\,2y = \text{wst}\,2u$; $3y = 270^\circ - 3u$; $\text{wst}\,3y = -\,\text{dost}\,3u$; $4y = 360^\circ - 4u$, $\text{wst}\,4y = -\,\text{wst}\,4u$; § 52 Algebry: przeto na sty $x = \dfrac{m\,\text{dost}\,u}{1 + \text{wst}\,u}$, będzie

$$x = \frac{m\,\text{dost}\,u}{\text{wst}\,1''} - \frac{m^2\text{wst}\,2u}{\text{wst}\,2''} - \frac{m^3\text{dost}\,3u}{\text{wst}\,3''} + \frac{m^4\,\text{wst}\,4u}{\text{wst}\,4''}\ \text{i t.d.}$$

gdzie odmiana znaków zacząwszy się w drugim terminie, co dwa terminy szeregu następować będzie.

Gdyby zaś dane było zrównanie sty $x = \dfrac{m\,\text{wst}\,y}{1 - m\,\text{dost}\,y}$, wykonawszy dzielenie sposobem wyżey skazanym, i stąd pozbierawszy wartości na $\frac{1}{3}\,\mathrm{sty}^3 x$; $\frac{1}{5}\,\mathrm{sty}^5 x$; i t. d. otrzymamy

$$x = \frac{m\,\mathrm{wst}\,y}{\mathrm{wst}\,1''} + \frac{m^2\,\mathrm{wst}\,2y}{\mathrm{wst}\,2''} + \frac{m^3\,\mathrm{wst}\,3y}{\mathrm{wst}\,3''} + \frac{m^4\,\mathrm{wst}\,4y}{\mathrm{wst}\,4''} + \text{i t. d,}$$

z czego dałaby się ieszcze wyciągnąć wartość na łuk x, gdyby podane było zrównanie $\mathrm{sty}\,x = \frac{m\,\mathrm{dost}\,u}{1 - m\,\mathrm{wst}\,u}$; kładąc $y = 90^\circ - u$; $\mathrm{wst}\,y = \mathrm{dost}\,u$; $2y = 180^\circ - 2u$; $\mathrm{wst}\,2y = \mathrm{wst}\,2u$; $3y = 270^\circ - 3u$; $\mathrm{wst}\,3y = -\mathrm{dost}\,3u$; $4y = 360^\circ - 4u$; $\mathrm{wst}\,4y = -\mathrm{wst}\,4u$ i t. d.

$$x = \frac{m\,\mathrm{dost}\,u}{\mathrm{wst}\,1''} + \frac{m^2\,\mathrm{wst}\,2u}{\mathrm{wst}\,2''} - \frac{m^3\,\mathrm{dost}\,3u}{\mathrm{wst}\,3''} - \frac{m^4\,\mathrm{wst}\,4u}{\mathrm{wst}\,4''} + \text{etc.}$$

Przystósuymy to teraz do naszych zrównań (L), (L′): to iest połóżmy w (L) $m = \mathrm{sty}\,\frac{1}{2}b.\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}c$; $y = A$, będzie:

$$\frac{1}{2}P = \frac{\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}b.\mathrm{sty}\,\frac{1}{2}c}{\mathrm{wst}\,1''}\,\mathrm{wst}\,A - \frac{\mathrm{sty}^2\frac{1}{2}b.\mathrm{sty}^2\frac{1}{2}c}{\mathrm{wst}\,2''}\,\mathrm{wst}\,2A +$$

$$\frac{\mathrm{sty}^3\frac{1}{2}b.\mathrm{sty}^3\frac{1}{2}c}{\mathrm{wst}\,3''}\,\mathrm{wst}\,3A - \text{ i t. d.}$$

a podwoiwszy potém wartość tego szeregu, otrzymamy przepełnienie P w sekundach. Co do zrównań (L′), $m = \mathrm{sty}^2\frac{1}{2}b$ $y = 2C$: w drugiém zrównaniu y, $m = \mathrm{sty}^2\frac{1}{2}c$, $y = 2B$.

$$x = \frac{\mathrm{sty}^2\frac{1}{2}b}{\mathrm{wst}\,1''}\,\mathrm{wst}\,2C - \frac{\mathrm{sty}^4\frac{1}{2}b}{\mathrm{wst}\,2''}\,\mathrm{wst}\,4C + \frac{\mathrm{sty}^6\frac{1}{2}b}{\mathrm{wst}\,3''}\,\mathrm{wst}\,6C - \text{etc.}$$

$$y = \frac{\mathrm{sty}^2\frac{1}{2}c}{\mathrm{wst}\,1''}\,\mathrm{wst}\,2B - \frac{\mathrm{sty}^4\frac{1}{2}c}{\mathrm{wst}\,2''}\,\mathrm{wst}\,4B + \frac{\mathrm{sty}^6\frac{1}{2}c}{\mathrm{wst}\,3''}\,\mathrm{wst}\,6B - \text{etc.}$$

Obadwa te ostatnie szeregi do siebie dodane, daią przepełnienie tróykąta, gdyż

$$x = A' + C - 90^\circ;\quad y = A'' + B - 90^\circ;$$

$$x + y = A + B + C - 180^\circ.$$

Delambre z tych dwóch szeregów wyrachował tablicę, za pomocą którey maiąc dwa boki i dwa kąty im przyległe w tróykącie, wynaydziemy zaraz przepełnienie bez żadnego rachunku. Ta tablica służy na Francyą, gdzie stopień południkowy $=57020$ prętów francuzkich. To zaś iest do uważania w rachunku *Delambra: Base du Systême métrique tome I. p. 147*. że on wyrażaiąc współczynników wst $2B$, wst $2C$ przez liczby, a chcąc zmnieyszyć szereg liczb w tak małym ułamku, mnoży go przez 10.000: wypadki potém rachunku dzieli przez 10.000: czyli od cechy logarytmu odciąga 4, i wypadaią mu sekundy na tablicę. Nie używa do swey tablicy tylko pierwszego terminu szeregu $\frac{\text{sty}^2 \frac{1}{2} b}{\text{wst } 1''}$ wst $2C$, i $\frac{\text{sty}^2 \frac{1}{2} c}{\text{wst } 1''}$ wst $2B$ iako barzo dostatecznego. Weźmy tu przykład *Delambra* i rachuymy go naszym sposobem. Ponieważ wst $1'' =$ sty $1''$ można wziąć iedno za drugie.

$$\frac{\text{sty}^2 \frac{1}{2} b}{\text{wst } 1''} = \left(\frac{3600 \frac{1}{2} b}{57020}\right)^2 \text{wst } 1'' = \left(\frac{9.b}{285,1}\right)^2 \text{wst } 1''$$

$$\frac{\text{sty}^2 \frac{1}{2} c}{\text{wst } 1''} = \left(\frac{9.c}{285,1}\right)^2 \text{wst } 1'';$$

więc

$$A + B + C - 180^\circ = \left(\frac{9.b}{285,1}\right)^2 \text{wst } 1''.\text{wst } 2C$$

$$+ \left(\frac{9.c}{285,1}\right)^2 \text{wst } 1''.\text{wst } 2B:$$

u *Delambra* te zrównania są:

$$A+B+C-180^\circ = 0'',0000483\,1 . b^2 \text{wst}\, 2C$$
$$+\,0'',0000483\,1 . c^2 \text{wst}\, 2B.$$

Niech będzie $b = 18.000$ prętów francuzkich, kąt $C = 30^\circ$. Niech $c = 20.000$ p. f. $B = 40^\circ$.

l. 9 = 0,9542425	. . . .	0,9542425	
c. l. 285,1 = 7,5450028	. . . . . .	7,5450028	
l. b = 4,2552725	. . . .	l. c = 4,3010300	
2,7545178		2,8002753	
2		2	
5,5090356		5,6005506	
l. wst 1″ = 4,6855749		l. wst 1″ = 4,6855749	
l. wst 2C = 9,9375306		l. wst 2B = 9,9933515	
0,1321411	1″,355	0,2794770	1″,903

dodane do siebie daią przepełnienie 3″,25: co się zupełnie zgadza z tablicą. Rachuymy teraz podług *Delambra*.

l. 0″,0000483 1 = 5,6840370	. . . . .	5,6840370	
l. b^2 = 8,5105450	. . .	l. c^2 = 8,6020600	
l. wst 2C = 9,9375306		l. wst 2B = 9,9933515	
4,1321126 − 4	1″,35.	4,2794485 − 4	1″,90.

Stosuiąc ten sam przykład do Litwy, trzeba wziąć stopień południka 57104,5 p. f., więc

$$A+B+C-180^\circ = \left\{\frac{3600 \frac{1}{2} b}{57104,5}\right\}^2 \text{wst}\, 1''.\text{wst}\, 2C$$
$$+\left\{\frac{3600 \frac{1}{2} c}{57104,5}\right\}^2 \text{wst}\, 1''.\text{wst}\, 2B:$$

wykonawszy działanie w liczbach, znaydziemy na ieden termin 1″,352; na drugi 1″,897: a zatem przepełnienie 3″.249. Skąd widzimy, że tablica rachowana na Francyą, mogłaby nam bez znaczney omyłki służyć do wymiarów w Litwie. Trzymaiąc się zaś ścisłości, będzie na Litwę logarytm stateczny $\frac{1800}{57104,5} = 8,4986022$; ale przy iego użyciu trzeba brać boki całe tróykąta.

W tym rachunku to ieszcze iest do uważania, że § 16. $\text{sty}\, v = v + \frac{1}{3}v^3$ i t. d. z tego szeregu bierze się tylko pierwszy wyraz, iako dostateczny; bo wyższe iego potęgi staią się ułamkami tak małemi; że przez żadne praktyczne wymiary nie iesteśmy zdolni ich wartości ocenić.

Wynalezienie położenia geograficznego mieysc ziemskich przez wymiary trygonometryczne.

§ 19. W rozmiarze trygonometrycznym ziemi zachodzi to nayważnieysze zadanie: *znaiąc położenie geograficzne, to iest długość i szerokość pewnego punktu ziemi, tudzież iego odległość od punktu drugiego; wynaleśdź tego ostatniego długość i szerokość.*

Na fig. *a* Tab. I. niech *A* wyraża biegun świata, *ABM* południk mieysca *B*; *ACN* południk mieysca *C*: iest więc *AB* dopełnieniem szerokości geograficzney punktu *B*; *AC* takiémże dopełnieniem w punkcie *C*: Znaiąc długość i szerokość punktu *B*, iego odległość *BC* od punktu *C*, i kąt *ABC* który czyni taż odległość z południkiem *B*, czyli *poziomołuk* (azimuth) *C*, mierzony na poziomie *B*; trzeba wynaleśdź *AC*, kąt *BAC*, i ieszcze kąt *ACB* czyli poziomołuk *B* widziany na poziomie *C*.

Ponieważ bok *BC* z wymiarów trygonometrycznych iest dany w prętach n. p. francuzkich albo w łokciach litewskich, potrzeba go zamienić na łuk: do czego potrzeba znać figurę ziemi i promień koła przystaiącego w mieyscu B. Powiedzieliśmy wyżey § 15. że wziąwszy $\frac{1}{310}$ za figurę ziemi, długość stopnia południkowego iest na Litwę 57104,5 prętów francuzkich; a zatém na Litwę łuk $1' = 951,742$ pr. fr. $1'' = 15.8623$ p. f. rozdzieliwszy BC przez tę ostatnią liczbę, otrzymamy na Litwę BC w sekunkach. Niewiele zaś oddalamy się od prawdy, kiedy część powierzchni ziemskiey w okolicy B, nie tylko w kierunku południka; ale i w iakimkolwiek, bierzemy za kulę tego samego promienia. Od C spuściwszy łuk koła wielkiego CD pionowy na południk ABM; w tróykącie prostokątnym BCD mamy

$$\text{wst}\, BC.\text{wst}\, CBD = \text{wst}\, CD;\quad \text{sty}\, BC.\text{dost}\, CBD = \text{sty}\, BD.$$

$AB + BD$ iest dopełnieniem szerokości punktu C; kąt CAB iest różnicą długosci między punktami B, C i $\text{wst}\, CAB = \dfrac{\text{wst}\, BC.\text{wst}\, ABC}{\text{wst}(AB + BD)}$. A ieżeli szerokość mieysca B nazwiemy H, $BD = dH$; będzie $AB = 90° - H$; $AB + BD = 90° - (H + dH)$.

Przykład. Niech będzie $BC = 3640$ prętów fran. $H = 54°41'$; $ABC = 120°\ 30'$: a zatém

$$CBD = 59°30';\quad \frac{3640}{15,8623} = 229'',47 = 3'\ 49'',5 = \delta:$$

$$\begin{array}{ll}
\text{l. wst}\, \delta = 7,0463564 + & \text{l. sty}\, \delta = 7,0463567 + \\
\text{l. wst}\, CBD = 9,9353204 + & \text{l. dost}\, CBD = 9,7054689 + \\
\hline
\text{l. wst}\, CD = 6,9816768;\ 3'17'': & \text{l. sty}\, BD = 6,7818256;\ 1'56'' = \delta H:
\end{array}$$

więc

$AC = 35°\ 20'\ 56''$; a zatém szerokość C, $54°\ 39'\ 4''$

$$
\begin{aligned}
\text{l. wst}\,\delta &= 7{,}0463564 + \\
\text{l. wst}\,ABC &= 9{.}9353204 + \\
\text{c. l. wst}\,AC &= 0{,}2376563 + \\
\hline
\text{l. wst}\,A &= 7{,}2193331;
\end{aligned}
$$

kąt A 5′ 42″ na różnicę długości.

Że zaś w tym rachunku zachodzą łuki barzo małe; bezpieczniey byłoby zamiast ich liniy trygonometrycznych, wynaydować same łuki, kładąc n. p. za $\text{wst}\,\delta = \delta - \frac{1}{6}\delta^3$ § 16.

W tróykącie ABC mamy

$\text{dost}\,AC = \text{dost}\,AB.\text{dost}\,BC + \text{wst}\,AB.\text{wst}\,BC.\text{dost}\,B$,

czyli

$$\text{wst}(H + dH) = \text{wst}\,H.\text{dost}\,\delta + \text{dost}\,H.\text{wst}\,\delta.\text{dost}\,B.$$

Jeżeli rozwiniemy ostatnie zrównanie $\text{wst}(H + dH) = \text{wst}\,H.\text{dost}\,dH + \text{dost}\,H.\text{wst}\,dH$: i za $\text{dost}\,dH = 1 - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}dH$; za $\text{wst}\,dH = 2\,\text{wst}\tfrac{1}{2}dH.\text{dost}\tfrac{1}{2}dH$; za $\text{dost}\,\delta = 1 - 2\,\text{wst}^2\tfrac{1}{2}\delta$, włożymy ich wartości; przyydziemy do zrównania

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}dH.\text{dost}\tfrac{1}{2}dH - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}dH.\text{sty}\,H = \tfrac{1}{2}\text{wst}\,\delta.\text{dost}\,B - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}\delta.\text{sty}\,H$$

nazwiymy $-\text{sty}\,H = a$; $\tfrac{1}{2}\text{wst}\,\delta.\text{dost}\,B - \text{wst}^2\tfrac{1}{2}\delta.\text{sty}\,H = b$; i rozdzielmy całe zrównanie przez $\text{dost}^2\tfrac{1}{2}dH$; pamiętaiąc, że $\dfrac{1}{\text{dost}^2\tfrac{1}{2}dH} = \text{sie}^2\tfrac{1}{2}dH = 1 + \text{sty}^2\tfrac{1}{2}dH$; a wypadnie nam dosyć często zechodzące w Astronomii zrównanie

$$(a - b)\text{sty}^2\tfrac{1}{2}dH + \text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,dH = b:$$

które rozwiązawszy, otrzymamy

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,dH = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4b(a - b)}}{2(a - b)}.$$

Trzeba rozwinąć na szereg nieskończony funkcyą pod znakiem pierwiastkowym, żeby przyyśdź do zrównania

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}dH = b - b^2(a-b) + 2b^3(a-b)^2 - 5b^4(a-b)^3 + 2.7.b^5(a-b)^4 - \text{ i t. d.}$$

albo też, żeby się pozbydź znaku pierwiastkowego, połóżmy $2\sqrt{(a-b)b} = \text{sty}\,y$; $4(a-b)b = \text{sty}^2 y$; $1 + \text{sty}^2 y = \text{sie}^2 y = \frac{1}{\text{dost}^2 y}$; a wypadnie nam

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}dH = -\frac{1}{2(a-b)} \pm \frac{1}{2(a-b)\text{dost}\,y} = \frac{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}y}{(a-b)\text{dost}\,y}:$$

maiąc styczną; otrzymamy łuk za pomocą znanego § 55 Algebry, wzoru

$$\tfrac{1}{2}dH = \frac{\text{sty}\,\tfrac{1}{2}dH}{\text{wst}\,1''} - \frac{\text{sty}^3\tfrac{1}{2}dH}{\text{wst}\,3''} + \frac{\text{sty}^5\tfrac{1}{2}dH}{\text{wst}\,5''} - \text{ i t. d.}$$

Weźmy za przykład wyżey położone liczby $B = 120^\circ 30'$, $\delta = 3' 49'',5$, $\tfrac{1}{2}\delta = 1' 55''$, $a = -1,4114$; szukaymy b, y, i wartości na $\text{sty}\tfrac{1}{2}dH$.

l. wst δ	$= 7,0463564 +$	l. wst $\tfrac{1}{2}\delta$	$= 6,7462727 +$
l. dost B	$= 9,7054689 -$	l. wst$^2\tfrac{1}{2}\delta$	$= 3,4925454 +$
c. l. 2	$= 9,6989700 +$	l. sty H	$= 0,1496747 +$
l. (1)	$6,4507953 -$	l. (2)	$3,6422201 +$

(1) $0,000282455-$; (2) $0,000000438+$; (1)—(2) $= 0,000282893-$

więc blisko

$$b = -0,0003; \qquad a - b = -1,4111$$

l. $(a-b)$	$= 10,1495578 -$	połowa l. $(a-b)b$	$= 8,3005953 +$
l. b	$= 6,4516329 -$	l. 2	$= 0,3010300 +$
l. $(a-b)b$	$= 16,6011907 +$	l. sty y	$= 8,6016253 +$

$y = 2^\circ\ 17'\ 18''$ $\qquad$ $\frac{1}{2}y = 1^\circ\ 8'\ 39''$

l. $(a-b) = 0,1195578 -$ $\qquad$ l. wst$^2 \frac{1}{2}y = 6,6006656 +$
l. dost $y = 9,9996518 +$ $\qquad$ c. l. $(3) = 9,8507904 -$
l. (3) $\quad 0,1492096 -$ $\qquad$ l. sty $\frac{1}{2}\,dH = 6,4514560 -$

$-\frac{1}{2}dH = 58''$; $-dH = 1'56''$ iak wyżey. Wypadło dH odiemne; bo punkt C ma szerokość mnieyszą iak B: szerokość więc $C = 54^\circ\ 39'\ 4''$.

Wynaleźliśmy wyżey kąt A, czyli różnicę długości, przez pierwsze zrównanie główne: kąt BCA czyli poziomoluk B mierzony na poziomie C wynaleśdź się może wraz z kątem A przez analogie *Nepera*. *Delambre* w swoiey Astronomii Tom III k. 550. 551. przez ten sposób wyciągnione podaie na to wzory. Ale ponieważ w tróykącie ABC (fig. *a* T. I) mamy iuż znane wszystkie boki, i kąt ABC; więc przez nowe podane tu w § 2 zrównania $(1_{,})(1_{,,})(1_{,,,})$, gdzie nie zachodzą tylko styczne i wstawy, możemy wygodnie to zadanie rozwiązać.

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}A = \text{sty}\,\tfrac{1}{2}B\,\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(b+c-a)},$$

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}C = \text{sty}\,\tfrac{1}{2}B\,\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a+b-c)}.$$

W naszym przykładzie

$a = 3'\ 49'',5 \qquad b = 35^\circ\ 20'\ 56'' \qquad c = 35^\circ\ 19'\ 0''$

a zatém

$\frac{1}{2}(a+c-b) = 56'',75$; $\quad \frac{1}{2}(b+c-a) = 35^\circ\,18'3'',25$

$\frac{1}{2}B = 60^\circ\ 15' \qquad \frac{1}{2}(a+b-c = 2'\ 52'', 75.$

l. wst $56'',75 = 6,4395280$
l. sty $\frac{1}{2}B = 0,2429480$
c. l. wst$(35^\circ 18'3'',25) = 0,2381695$
l. sty $\frac{1}{2}A = 6,9206455$

l. wst $56'',75 = 6,4395280$
l. sty $\frac{1}{2}B = 0,2429480$
l. wst$(2'52'',75) = 3,0770085$
l. sty $\frac{1}{2}C = 9,7594845$

skąd wypada

$\frac{1}{2}A = 2' \ 51''$, $A = 5' \ 42''$. $\frac{1}{2}C = 29^\circ \ 53' \ 18''$.
$C = 59^\circ \ 46' \ 36''$.

Wytknięty tu nowy sposób ma ieszcze to za sobą, że gdybyśmy dla większey ścisłości chcieli szukać łuków samych maiąc ich styczne; łatwo tego dokażemy za pomocą wyżey skazanego wzoru $\frac{1}{2}dH = \frac{\text{sty} \frac{1}{2}dH}{\text{wst } 1''} -$ i t. d. Mamy więc barzo ważne w *Geodezyi wyższey* zadanie, prostym dosyć sposobem przez trygonometryą kulistą rozwiązane. Gdybyśmy mieli do czynienia z podobnym rachunkiem pod iakąkolwiek inną szerokością, i przyszło nam zamieniać łuk BC dany w prętach francuzkich, na sekundy koła; na to znayduią się wygodne tablice w Tomie III *Base du Systême métrique* wyrachowane przez *Delambra.*

Porównanie tróykąta kulistego z prostokreślnym.

§ 20. Nie będzie tu od rzeczy rozważyć ieszcze twierdzenie *Euklidesa* przywiedzione w § 1, gdzie się dowiodło; że

$\text{wst} A = \frac{d}{2bc}$; znaydziemy podobnie, że $\text{wst } B = \frac{d}{2ac}$; $\text{wst} C = \frac{d}{2bc}$, gdzie wartość na d pokaże się ta sama we wszystkich kątach A, B, C, skąd wypada

$$a : b = \text{wst} A : \text{wst } B \qquad \text{(I) twierdzenie.}$$

$$a + b : a - b = \text{wst } A + \text{wst } B : \text{wst } A - \text{wst } B :$$

przeto

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(A+B)\text{dost}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{dost}\frac{1}{2}(A+B)\text{wst}\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\text{sty}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{sty}\frac{1}{2}(A-B)} \qquad \text{(II)}$$

ieszcze to samo twierdzenie *Euklidesa* § 1 daie

$$2\,bc \text{ dost } A = b^2 + c^2 - a^2,$$
$$2\,ac \text{ dost } B = a^2 + c^2 - b^2;$$

więc odciągnąwszy pierwsze od drugiego, otrzymamy

$$c(a.\text{dost } B - b.\text{dost } A) = a^2 - b^2.$$

a.dost B; b.dost A; są dwa odcinki boku c, zrobione przez pionową spuszczoną z kąta C, temuż bokowi przeciwległego: a zatém

$$c : a + b = a - b : a \text{ dost } B - b.\text{dost } A \qquad \text{(III)}.$$

Wszystkie więc trzy twierdzenia trygonometryi płaskiey (I), (II), (III) daią się z tego samego początku wyciągnąć, z którego wypadło zrównanie fundamentalne trygonometryi kulistey.

Jeszcze to samó twierdzenie § 1 nas uczy: że

$$\text{dost } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc};$$

$$1 - \text{dost} A = 2 \text{wst}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2\,bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2\,bc}$$

$$1 + \text{dost} A = 2 \text{dost}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2\,bc}$$

rozebrawszy różnicę kwadratów na swoie mnożniki, i iedno zrównanie przez drugie rozdzieliwszy; otrzymamy

$$\text{sty}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{(a + b + c)(b + c - a)};$$

podobnie

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}B = \frac{(a+b-c)(b+c-a)}{(a+b+c)(a+c-b)}$$

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}C = \frac{(a+c-b)(b+c-a)}{(a+b+c)(a+b-c)} \qquad \text{(IV)}.$$

To piękne twierdzenie (IV) trygonometryi płaskiey mało tam znane, dowiódł *syntetycznie Robert Simson* w swoiey trygonometryi do początków *Euklidesa* przydaney (*Patrz początki Euklidesa przełożone od Czecha wydanie 2gie k. 469*). Wyciągnąłem tu iego dowód analityczny ze zrównania przytoczonego w § 1, a przez to okazałem; iż obiedwie trygonometrye daią się przez *analizę* wyprowadzić z tey samey własności tróykąta prostokreślnego, którey dowiódł *Euklides* w podaniu XII, i XIII, Xięgi II.

Zrównanie (IV) wprost rozwiązuie zadanie trygonometryi płaskiey: maiąc trzy boki tróykąta, wynaleśdź iego kąty. Jeżeli iedno z tych zrównań rozdzielimy przez drugie, i za kwadraty wezmiemy ich pierwiastki; mieć będziemy

$$\frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}A}{\text{sty}\tfrac{1}{2}B} = \frac{a+c-b}{b+c-a}, \quad \frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}A}{\text{sty}\tfrac{1}{2}C} = \frac{a+b-c}{b+c-a}, \quad \frac{\text{sty}\tfrac{1}{2}B}{\text{sty}\tfrac{1}{2}C} = \frac{a+b-c}{a+c-b},$$

zrównania podobne do tych, któreśmy w § 2 podali $(1_{,})$, $(1_{,,})$, $(1_{,,,})$; z tą różnicą, że w tróykącie prostokreślnym boki, zamieniaią się w kulistym na wstawy boków: co iuż wiemy skądinąd.

fig. 5 W tróykącie prostokreślnym ABC fig. 5; ieżeli z któregokolwiek kąta spuścimy pionową na bok mu przeciwległy, będzie powierzchnia tego tróykąta $\tfrac{1}{2}ac \text{ wst } B = \tfrac{1}{2}bc \text{ wst } A = \tfrac{1}{2}ab \text{ wst } C$. Uważaymy n. p. pionową z kąta C, spuszczoną na bok c; będą odcinki boku c, $b$dost$A$, $a$dost$B$: ich różnica $a$dost$B-b$dost$A$. Wiemy iuż, że:

$$a^2-b^2=c(a\,\mathrm{dost}\,B-b.\mathrm{dost}\,A);$$

iest zaś

$$b=\frac{a.\mathrm{wst}\,B}{\mathrm{wst}\,A}\text{; więc } a^2-b^2=ca\frac{\mathrm{wst}(A-B)}{\mathrm{wst}\,A};$$

$$\frac{(a^2-b^2)\mathrm{wst}\,A}{\mathrm{wst}(A-B)}=ca,\qquad c=\frac{b.\mathrm{wst}\,C}{\mathrm{wst}\,B}:$$

a zatém

$$\tfrac{1}{2}ba\,\mathrm{wst}\,C=\tfrac{1}{2}\frac{(a^2-b^2)\mathrm{wst}\,A.\mathrm{wst}\,B}{\mathrm{wst}(A-B)}=\text{powierz. tróykąta.}$$

W tróykącie prostokreślnym

$$a:b=\mathrm{wst}\,A:\mathrm{wst}\,B;$$

w kulistym zaś

$$\mathrm{wst}\,a:\mathrm{wst}\,b=\mathrm{wst}\,A:\mathrm{wst}\,B:$$

aże biorąc tylko dwa wyrazy szeregu § 16

$$\mathrm{wst}\,a=a-\tfrac{1}{6}a^3,\qquad \mathrm{wst}\,b=b-\tfrac{1}{6}b^3;$$

więc blisko w kulistym

$$\mathrm{wst}\,A:\mathrm{wst}\,B=a(1-\tfrac{1}{6}a^2):b(1-\tfrac{1}{6}b^2):$$

skąd wypada

$$\frac{a}{b}=\frac{\mathrm{wst}\,A(1-\frac{1}{6}b^2)}{\mathrm{wst}\,B(1-\frac{1}{6}a^2)}\qquad(M).$$

Kąt między łukami, większy iest od kąta między cięciwami; więc żeby tróykąt kulisty zamienić na prostokreślny z bokami tey samey długości; kąty pierwszego bydź powinny zmnieyszone pewną ilością nieznaną, którą nazwiemy x: będzie z (M),

$$\text{wst}A(1-\tfrac{1}{6}b^2):\text{wst}B(1-\tfrac{1}{6}a^2)=\text{wst}(A-x):\text{wst}(B-x)=a:b$$
$$=\text{wst}A.\text{dost}\,x-\text{dost}A.\text{wst}\,x:\text{wst}B.\text{dost}x-\text{dost}B.\text{wst}\,x.$$

Rozmnożywszy skrayne i średnie, i rozdzieliwszy całe zrównanie przez dost x, otrzymamy

$$\tfrac{1}{6}(a^2-b^2)\text{wst}\,A.\text{wst}\,B=\text{sty}\,x.\text{wst}(A-B)$$
$$-(\tfrac{1}{6}b^2\text{wst}A.\text{dost}B-\tfrac{1}{6}a^2\text{dost}A.\text{wst}\,B)\text{sty}\,x:$$

drugi termin na drugiey stronie zrównania, iako barzo mały, możemy opuścić, zostanie się

$$\text{sty}\,x=\tfrac{1}{6}(a^2-b^2)\frac{\text{wst}A.\text{wst}\,B}{\text{wst}(A-B)}=\tfrac{1}{3}\ \text{Powierz. tróykąta.}$$

Aże zamieniwszy tróykąt kulisty na prostokreślny tey samey długości boków, powierzchnia 1go będzie blisko równa powierzchni drugiego; bośmy dowiedli w § 18, że blisko $P=2\text{sty}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}c\,\text{wst}\,A=2\,\tfrac{1}{2}b\,\tfrac{1}{2}c\,\text{wst}\,A=\tfrac{1}{2}bc\,\text{wst}\,A=\tfrac{1}{2}ba\,\text{wst}\,C$. Powierzchnia zaś tróykąta kulistego iest $P=A+B+C-180°$, to iest przepełnieniu; więc $x=\tfrac{1}{3}P$. Skąd wypada to ważne i piękne twierdzenie: *Jeżeli w tróykącie kulistym złożonym z małych boków względem powierzchni kuli, każdy kąt zmnieyszymy trzecią częścią przepełnienia; zamienimy go na tróykąt prostokreślny tey samey powierzchni: i obchodzić się z nim możemy, iak z tróykątem prostokreślnym.* Choćby nawet boki tróykąta zamykały ieden lub dwa stopnie, to iest 15 albo 30 mil; ieszcze to twierdzenie z wielkiem do prawdy przybliżeniem użyte bydź może w wymiarach ziemi: i rozwiązanie tróykątów kulistych przywodzi do trygonometryi płaskiey. Winniśmy to piękne twierdzenie znakomitemu Geometrze francuzkiemu *Le Gendre*, ktory ie naprzód podał bez dowodu w aktach akademii nauk Paryzkiey roku 1787. Dowiódł go potém w r. 1798 sposobem tu wyłożonym i obiaśnionym. W tym samym roku *De la Grange* dał inny dowód tego twierdzenia, który przyiął *Le Gendre* w swoiey geometryi wydania 5. k. 416. *Delambre Base du système métrique Tome II p. 709* podał także inny dowód tego twierdzenia zależący na tém: że zmnieyszywszy każdy kąt tróykąta kulistego trzecią częścią przepełnienia, przychodzi do zrównania: $\text{wst}\, a : \text{wst}\, b = \text{wst}\, A : \text{wst}\, B$; skąd wnosi, że tróykąt prostokreślny którego summa kątów $= 180°$, iest blisko równy tróykątowi kulistemu, maiącemu boki tey samey długości z prostokreślnym.

Ta własność tróykąta prostokreślnego, że w nim summa wszystkich kątów iest zawsze stała i oznaczona; prowadzi do następuiących zrównań. Ponieważ

$$A + B + C = 180°, \qquad C = 180° - (A + B);$$

$$\text{sty}\, C = -\text{sty}(A + B) = -\frac{\text{sty}\, A + \text{sty}\, B}{1 - \text{sty}\, A . \text{sty}\, B}$$

z czego wypada:

$$\text{sty}\, A + \text{sty}\, B + \text{sty}\, C = \text{sty}\, A . \text{sty}\, B . \text{sty}\, C \qquad (\lambda)$$

$$1 = \text{dosty}\, B . \text{dosty}\, C + \text{dosty}\, A . \text{dosty}\, C + \text{dosty}\, A . \text{dosty}\, B:$$

i znowu gdy w zrównaniu (λ) wyrazimy styczne przez wstawy i dostawy, wypadnie

$$\text{wst}\, A . \text{wst}\, B . \text{wst}\, C = \text{wst}\, A . \text{dost}\, B . \text{dost}\, C$$
$$+ \text{wst}\, B . \text{dost}\, A . \text{dost}\, C + \text{wst}\, C . \text{dost}\, A . \text{dost}\, B:$$

$$\text{dost}\, C . \text{wst}(A + B) + \text{wst}\, C\, \text{dost}(A - B) = 2 \text{wst}\, A\, \text{wst}\, B\, \text{wst}\, C.$$

Z tych ieszcze wyprowadzićby można inne częstokroć w rachunku analitycznym przydatne tam, gdzie zachodzą tróykąty prostokreślne: ale to iuż do zamiaru teraźnieyszego pisma nie należy.

ROZDZIAŁ TRZECI.

PRZYSTOSOWANIE TRYGONOMETRYI DO ZADAŃ ASTRONOMICZNYCH.

Ogólny widok rachunków astronomicznych.

§ 21. *Poziom*, *Południk*, *Równik* i *Ekliptyka*: są cztery płaszczyzny kół wielkich na kuli niebieskiey, których szukamy położenia na każde mieysce ziemi: i dochodzimy w Astronomii, iak leżą ciała niebieskie względem tych płaszczyzn; bo bez tego nie moglibyśmy poznać ich biegu. Przez obserwacye za pomocą narzędzi astronomicznych, wynayduiemy położenie gwiazd względem poziomu, południka, i równika; a wiedząc iak leży ekliptyka względem równika; od położenia gwiazdy równikowego, przychodzimy przez rachunek trygonometryczny do położenia teyże gwiazdy względem ekliptyki. A iako ekliptyka iest drogą ziemi, czyli drogą pozorną słońca; tak insze ciała niebieskie ruchome, maią własne drogi, po których bieg swóy odbywaią: dochodzimy więc iak te drogi leżą względem ekliptyki i równika; a z położeń względem ostatnich, przychodzimy do poznania mieysc tychże ciał niebieskich na własnych ich drogach. Cała ta sztuka odbywa się za pomocą łuków kół wielkich przez ich bieguny lub inne punkta znane, i przez gwiazdy prowadzonych, przecinaiących się z sobą, i robiących tróykąty kuliste. Astronomiia sferyczna zaymuie się prawie całkiem *naprzód*: ustawieniem i urządzeniem narzędzi przypadaiącem do niektórych z tych kół: *powtóre*: wynaydowaniem wartości łuków i kątów prowadzących od iednych kół do drugich, i do położenia gwiazd względem tych kół: a stąd do porządku, w iakim są uszykowane na niebie: i do *fenomenów* rozmaitych, z tego porządku i położenia wynikaiących. Uważamy więc naprzód w Astronomii wszystkie biegi iakby kołowe: wystawiamy sobie kulę umysłową na niebie, na którey się te wszystkie koła znayduią: i szukamy, iak ciało niebieskie względem nich leży. Odmiana mieysca względem tych kół w każdym czasie danym, pokazuie nam bieg ciała niebieskiego pozorny, to iest taki, iaki się widzieć daie: z którego *Mechanika* dochodzi biegów rzetelnych; przyczyn, które ie sprawuią, odmian, którym podlegaią; praw, które zachowuią; dróg prawdziwych, które są od tych ciał opisywane; czasu, w którym się te biegi kończą i rozpoczynaią. Zbiór tych wszystkich wiadomości odsłania nam na niebie dzieie Przyrodzenia przeszłe i przyszłe; bo z nich dochodzimy w pewności, iakie były obroty, położenia, i z nich wypadaiące fenomena ciał niebieskich w wiekach które upłynęły, i w wiekach które maią nastąpić. Ten iest krótki i wierny obraz główniejszych zatrudnień astronomicznych.

We wszystkich zadaniach, które rozwięzywać będziemy, ciągle mieć będziemy na uwadze tróykąt kulisty, którego kąty A, B, C; boki im przeciwległe a, b, c; i w którym iak boki tak kąty przechodzić będą przez różne nazwiska w Astronomii używane.

Wprowadzaiąc te nazwiska boków i kątów w zrównania trygonometryczne, wyciągać z nich będziemy i dowód używanych w Astronomii sposobów, i rozwiązanie pytań. Nazywać zaś statecznie będziemy

Wznoszenie się proste gwiazdy przez	α
Zboczenie gwiazdy	β
Szerokość geograficzną mieysca	H
Wysokość gwiazdy	$\varkappa$
Długość gwiazdy	λ
Szerokość gwiazdy	γ

Inne nazwiska pokażą się niżey.

I. POŁOŻENIE GWIAZD WZGLĘDEM POZIOMU, POŁUDNIKA, I RÓWNIKA.

Kąt godzinny, poziomołuk, i kąt parallaktyczny.

§ 22. Jeżeli w tróykącie ABC na fig. 2, A iest biegunem świata czyli równika; B *zenith* mieysca ziemskiego; C gwiazdą; łuk BA czyli c iest łukiem południka. Maiąc tey gwiazdy znane zboczenie β, będzie bok b iego dopełnieniem, to iest $b=90°-\beta$; znaiąc przytém szerokość mieysca H, i wysokość gwiazdy $\varkappa$; dopełnieniem pierwszey będzie $c=90°-H$, drugiey bok $a=90°-\varkappa$. Więc w tróykącie ABC znane są wszystkie boki a, b, c; z nich za pomocą zrównania ($1'$) § 2 wynaydziemy kąt A, który iest kątem godzinnym pokazuiącym na równiku, iak daleko gwiazda iest odległa od południka. Zrównanie ($1''$) da nam kąt B czyli *poziomołuk* (azimuth) pokazuiący na poziomie odległość gwiazdy od południka. Nakoniec zrównanie ($1'''$) okaże kąt *parallaktyczny* C daiący położenie gwiazdy względem równika i poziomu razem, wielkiego użycia w rachunku zaćmień.

Przykład. W Wilnie, gdzie szerokość mieysca $H = 54° 41' 2''$ a zatém $c = 35° 18' 58''$; 1 Maia r. 1819, kiedy słońce miało zboczenie północne $14° 57' 52''$, a zatém było $b = 75° 2' 8''$, wzięta była wysokość słońca po południu $35° 30'$; a zatém $a = 54° 30'$: iakiż był w tenczas kąt godzinny słońca? iaki iego poziomołuk? i iaki kąt *parallaktyczny?* $\frac{a+b-c}{2} = 47° 6' 35''$

$\frac{a+c-b}{2} = 7° 23' 25''$; $\frac{a+b+c}{2} = 82° 25' 33''$;

$\frac{b+c-a}{2} = 27° 55' 33''$. Zrównanie (1') § 2

l. wst$(47° 6' 35'') = 9{,}8649015$	l. wst$(82° 25' 33'') = 9{,}9961947$
l. wst$(7° 23' 25'') = 9{,}1093332$	l. wst$(27° 55' 33'') = 9{,}6705503$
$8{,}9742347$	$9{,}6667450$;
$9{,}6667450$	

$9{,}3074897$; tego połowa $9{,}6537448 =$ l. sty$\frac{1}{2}A$

$\frac{1}{2}A = 24° 15' 14'',5$ $A = 48° 30' 29''$: ten łuk zamieniony na czas; daie $3^{g.} 14' 2''$, po południu.

Wynayduie się *poziomołuk* (azimuth):

l. wst$(27° 55' 33'') = 9{,}6705503$	l. wst$(82° 25' 33'') = 9{,}9961947$
l. wst$(47° 6' 35'') = 9{,}8649015$	l. wst$(7° 23' 27'') = 9{,}1093332$
$9{,}5354518$	$9{,}1055279$
$9{,}1055279$	

$0{,}4299239$; połowa $0{,}2149619 =$ l. sty$\frac{1}{2}B$;

$\frac{1}{2}B = 58° 38' 2''$, $B = 117° 16' 4''$.

Wynayduie się kąt *parallaktyczny* słońca:

l. wst$(7° 23' 25'') = 9{,}1093332$	l. wst$(82° 25' 33'') = 9{,}9961947$
l. wst$(27° 55' 33'') = 9{,}6705503$	l. wst$(47° 6' 33'') = 9{,}8649015$
$8{,}7798835$	$9{,}8610962$
$9{,}8610962$	

$8{,}9187873$; połowa $9{,}4593936 =$ l. sty$\frac{1}{2}C$;

$\frac{1}{2}C = 16° 3' 59''$, $C = 32° 7' 58''$.

Wysokość gwiazdy przez kąt godzinny i zboczenie.

§ 23. Znaiąc zboczenie gwiazdy, i kąt iey godzinny A, w mieyscu znaney szerokości; mamy w tróykącie ABC dwa boki b, c, i kąt między niemi zawarty A; wynaydziemy wysokość gwiazdy $90° - a$, przez zrównanie fundamentalne

$$\text{dost}\, a = \text{wst}\, b . \text{wst}\, c . \text{dost}\, A + \text{dost}\, b . \text{dost}\, c \qquad (1)$$

ale że to zrównanie iest niewygodne do rachunku przez logarytmy, moglibyśmy użyć na to zrównania (m) lub (n) § 8: atoli zrównanie (1) da się na wygodnieysze przerobić. Wprowadźmy za $a. b, c$, ich właściwe znaczenia, to iest $b = 90° - \beta$; $c = 90° - H$; $a = 90° - x$; zrównanie (1) wyraża się

$$\text{wst}\, x = \text{dost}\, \beta . \text{dost}\, H . \text{dost}\, A + \text{wst}\, \beta . \text{wst}\, H$$
$$= \text{wst}\, H (\text{wst}\, \beta + \text{dosty}\, H . \text{dost}\, A . \text{dost}\, \beta);$$

połóżmy

$$\text{dosty}\, H . \text{dost}\, A = \text{sty}\, \varphi,$$

$$\text{wst}\, x = \frac{\text{wst}\, H}{\text{dost}\, \varphi} \text{wst}\, (\varphi + \beta) \quad \textit{na wysokość gwiazdy.}$$

Przykład. Niech będzie $\beta = 14°57'52''$, $H = 54°41'2''$, $A = 48°30'29''$. Szukaymy naprzód φ

l. dosty $H = 9,8503164$	l. wst $H = 9,9116769$
l. dost $A = 9,8211956$	l. wst$(\varphi + \beta) = 9,8090417$
l. sty $\varphi = 9,6715120$	c. l. dost $\varphi = 0,0432335$
$\varphi = 25°\, 8'\, 37''$,	l. wst $x = 9,7639521$
$\varphi + \beta = 40°\, 6'\, 29''$:	$x = 35°\, 30'\, 0''$.

Łuk półdniowy (arcus semidiurnus): *wschód i zachód gwiazd: ich bawienie się nad poziomem.*

§ 24. Jeżeli w zrównaniu fundamentalném (1) odległość gwiazdy od zenith to iest $a = 90°$; gwiazda będzie na samym poziomie czyli wschodząca: wtenczas dost $a = 0$; i zrównanie (1) zamieni się na $0 =$ wst b.wst c.dost $A +$ dost b.dost c; a że $b = 90° - \beta$; $c = 90° - H$; więc

$$\text{dost} A = -\text{sty} \beta . \text{sty} H; \textit{ łuk półdniowy.}$$

Kąt godzinny A w tym przypadku obeymuie cały łuk, który gwiazda w biegu dziennym opisuie od wschodu aż do swego południa: i nazywa się *łukiem półdniowym* (arcus semidiurnus). Jeżeli gwiazda ma zboczenie północne; β iest dodatne: a zatém i iego styczna; bo zboczenie nie może bydź $> 90°$: a zatém kąt A iest koniecznie rozwarty. Jeżeli zboczenie gwiazdy iest południowe; β iest odiemne i iego styczna: kąt zaś A iest ukośny $< 90°$: więc dla mieszkańców północnych wszystkie gwiazdy północne dłużey bawią nad poziomem iak 12 godzin; wszystkie zaś gwiazdy południowe krócey.

Zrównanie dost $A = -$ sty β.sty H służy na rachowanie wschodu i zachodu gwiazd, i iak długo każda bawi, nad poziomem iakiego mieysca ziemskiego: co iedynie, iak widzimy, zależy od szerokości mieysca, i od zboczenia gwiazdy.

Przykład. 18go. Maia 1819 roku n. s. słońce weszło w Wilnie ze zboczeniem północném 14° 49′ 46″; zaszło maiąc zboczenie 14° 58′ 54″. Jakaż była godzina wschodu i zachodu? i iaka długość dnia?

$$\begin{aligned}
\text{l. sty}\,(14^\circ\,49'\,46'') &= 9{,}4228544\\
\text{l. sty}\,(54^\circ\,41'\,2'') &= 0{,}1496836\\
\text{na wschód l. dost}\,A &= 9{,}5725380-\\
A = 180^\circ-(68^\circ\,3'\,19'') &= 111^\circ\,58'\,41''.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{l. sty}\,(14^\circ\,58'\,54'') &= 9{,}4274963\\
\text{l. sty}\,(54^\circ\,41'\,2'') &= 0{,}1496836\\
\text{na zachód l. dost}\,A &= -9{,}5771799.\\
A = 180^\circ-(67^\circ\,48'\,25'') &= 112^\circ\,11'\,35''.
\end{aligned}$$

Te łuki zamienione na czas, czyli rozdzielone przez 15, daią czas prawdziwy

$111^\circ 58' 41'' = 7^{g.}\ 27'\ 54'',7$ *$4^{g.}\ 32'\ 5'',3$ god. prawd. wsch. słońca
$112\ \ 11\ \ 35 = 7\ \ \ 28\ \ 46\ ,3$ godzina prawdziwa zachodu słońca.

$14^{g.}\ 56'\ 41'',0$ długość dnia w Wilnie.

*$4^{g.}\ 32'\ 5'',3 = 12^{g.} - (7^{g.}\ 27'\ 54'',7)$.

Naywiększe zboczenie słońca tak północne iak południowe iest $23^\circ\ 27'\ 56'' = \pm\beta$; iakiż naydłuższy i naykrótszy dzień w Wilnie w czasie przesilenia dnia z nocą?

$$\begin{aligned}
\text{l. sty}\,(23^\circ\,27'\,56'') &= 9{,}6375875\\
\text{l. sty}\,(54^\circ\,41'\,2'') &= 0{,}1496836\\
\text{l. dost}\,A &= 9{,}7872711 =\mp
\end{aligned}$$

Na przesilenie letnie $A = 127^\circ\ 47'\ 14'' = 8^{g.}\ 31'\ 9''$:
zimowe $52^\circ\ 12'\ 46'' = 3^{g.}\ 28'\ 51''$.

Ponieważ A iest łuk półdniowy, trzeba go podwoić, żeby otrzymać dzień cały; więc w Wilnie długość dnia naywiększa w przesileniu letniém $17^{g.}\ 2'\ 18''$, dzień naykrótszy w przesileniu zimowém $6^{g.}\ 57'\ 42''$. Tu dzień uważa się od wschodu do zachodu Słońca.

Rozważmy ieszcze zrównanie na łuk półdniowy $\text{dost} A = -\text{sty}\beta \text{sty} H$. Zeby gwiazda w mieyscu iakiém nigdy nie zachodziła; trzeba żeby iey łuk półdniowy był $= 180°$: kiedy $A = 180°$; $\text{dost} A = -1$; więc naprzód β musi bydź koniecznie dodatne i $\text{sty}\beta = \text{dosty} H$: przeto na półkuli północney, gwiazdy północne maiące zboczenie albo równe albo większe od dopełnienia szerokości mieysca, nigdy w tém mieyscu nie zachodzą. W Wilnie te gwiazdy nie zachodzą, których zboczenie północne albo równe albo większe iak $35° \, 19'$.

Zeby znowu gwiazda nigdy nie wschodziła i nie była widzialną w iakiém mieyscu ziemi; kąt godzinny A bydź powinien zero: kiedy $A = 0$, $\text{dost} A = 1$, i zrównanie nasze $-\text{sty}\beta.\text{sty} H = 1$; więc β musi bydź odiemne; to iest zboczenie południowe, i $-\text{sty}\beta = \text{dosty} H$ wszystkie więc gwiazdy południowe, których zboczenie równe albo większe od dopełnienia szerokości mieysca, widziane w tém mieyscu na półkuli północney bydź nie mogą.

Ale ieszcze A bydz może zero albo $180°$; a zatém $\text{dost} A = \pm 1$; kiedy β biorąc za stateczne, odmieniać będziemy H. czyli szerokość mieysca: i $\text{sty} H = \pm \text{dosty}\beta$ to iest kiedy β, H, będą tego samego lub różnego nazwiska. Na półkuli więc północney każda gwiazda maiąca zboczenie północne zachodzić nie będzie na tém mieyscu ziemi, którego szerokość równa się dopełnieniu zboczenia gwiazdy: gwiazda znowu południowa tego samego lub większego zboczenia, widziana bydź nie może na témże mieyscu ziemi.

Kiedy $H = 0$, mamy położenie proste sfery: tam $\text{sty} H = 0$, $\text{dost} A = 0$, a zatém $A = 90°$: więc dla mieszkańców pod równikiem wszystkie gwiazdy iakiegokolwiek zboczenia, tyle bawią nad poziomem, ile pod poziomem, to iest każdey dzień, iest równy nocy.

Kiedy $\beta=0$, gwiazda iest na równiku: sty$\beta=0$, dost$A=0$, $A=90°$: więc gwiazdy leżące na samym równiku, dla wszystkich mieszkańców ziemi są widzialne, i tyle bawią nad ich poziomem, ile pod poziomem.

Na sferę równoległą z tróykąta ABC nic nie można wyciągnąć; bo tam A schodzi się z B, to iest zenith z biegunem świata; i cały tróykąt zamienia się na łuk a, który iest razem kołem zboczeń i wysokości.

Obszerność wschodnia i zachodnia.

§ 25. Zrównanie fundamentalne § 2 na kąt B $\text{dost}\,B=\frac{\text{dost}\,b-\text{dost}\,a.\text{dost}\,c}{\text{wst}\,a.\text{wst}\,c}$ daie kąt w zenith, albo łuk na poziomie; kiedy gwiazda wschodzi lub zachodzi $a=90°$, $\text{dost}\,a=0$, $\text{wst}\,a=1$; wtenczas zrównanie na B staie się $\text{dost}\,B=\frac{\text{dost}\,b}{\text{wst}\,c}$; ale $b=90°-\beta$, $c=90°-H$; więc $\text{dost}\,B=\frac{\text{wst}\,\beta}{\text{dost}\,H}$.

Kiedy $B=90°$, $\text{dost}\,B=0$, a zatem wst$\beta=0$, to iest, gwiazda nie ma żadnego zboczenia i iest punktem równika. Punkt ten, w którym od równika przecięty iest poziom, nazywa się *prawdziwym wschodem i zachodem:* iest on biegunem południka, i równo, to iest na 90°, oddalony iest od iego strony północney i południowey. Same tylko gwiazdy na równiku leżące w tych punktach wschodzą i zachodzą. Gwiazdy które maią różne zboczenia, każda w innym punkcie poziomu wschodzi: i zachodzi łuk poziomu zawarty między prawdziwym wschodem, i wschodem gwiazdy, nazywa się tey gwiazdy *obszernością wschodnią* (amplitudo ortiva), a na stronie zachodu *obszernością zachodnią* (amplitudo occidua). Kąt B w zenith, równy będąc łukowi poziomu zawartemu między południkiem i punktem wschodzącey gwiazdy, iest dopełnieniem obszerności wschodniey lub zachodniey: a zatém:

$$\text{wstawa } \textit{obszerności wschodniey} = \frac{\text{wst}\,\beta}{\text{dost}\,H}.$$

Przykład. Słońce w czasie przesilenia dnia z nocą ma zboczenie 23° 27′ 56″. Jakaż iego natenczas obszerność wschodnia w Wilnie?

$$
\begin{aligned}
\text{l. wst}\,(23^\circ\ 27'\ 56'') &= 9{,}6000987 \\
\text{l. dost}\,(54^\circ\ 41'\ 2'') &= \underline{9{,}7610933} \\
\text{l. wst (obs. wsch.)} &= 9{,}8390054;
\end{aligned}
$$

obszerność wschodnia słońca 43° 32′ 12″ ku stronie północney południka w lecie, a ku południowey w zimie.

Odmiana kąta godzinnego i poprawa południa.

§ 26. Kąt godzinny służy nam do oznaczenia południa, i do poznania biegu zegaru; bo słońce z rana i wieczor w równey od południka odległości, ma tę samę wysokość. Ale że słońce odmienia w każdey godzinie zboczenie, za którém idzie odmiana kąta godzinnego; więc albo na tę samę wysokość wziętą rano i wieczór może bydź inny kąt godzinny, albo na ten sam godzinny inna wysokość. Dla tego biorąc tę samę wysokość słońca rano i wieczór, żeby znaleśdź moment południa, trzeba poprawić kąt godzinny dla odmienionego zboczenia. Ponieważ w tróykącie ABC, A iest biegunem świata, B zenith, a C mieyscem gwiazdy; pamiętaiąc o tém, że $a = 90^\circ - z$, $b = 90^\circ - \beta$, $c = 90^\circ - H$; zrównanie fundamentalne (1) na kąt godzinny A będzie

$$\mathrm{dost}\, A = \frac{\mathrm{dost}\, a - \mathrm{dost}\, b . \mathrm{dost}\, c}{\mathrm{wst}\, b . \mathrm{wst}\, c} = \frac{\mathrm{wst}\, z - \mathrm{wst}\, \beta . \mathrm{wst}\, H}{\mathrm{dost}\, \beta . \mathrm{dost}\, H}:$$

to iest:

$$\mathrm{wst}\, z - \mathrm{wst}\, \beta . \mathrm{wst}\, H - \mathrm{dost}\, \beta . \mathrm{dost}\, H . \mathrm{dost}\, A = 0.$$

Rożnicuymy to zrównanie odmieniaiąc A, β; a biorąc z, H, za stateczne

$$-\mathrm{d}\beta . \mathrm{dost}\, \beta . \mathrm{wst} H + \mathrm{d}\beta . \mathrm{wst}\, \beta . \mathrm{dost} H . \mathrm{dost} A + \mathrm{d} A . \mathrm{wst} A . \mathrm{dost}\, \beta . \mathrm{dost} H = 0,$$

a zatém

$$\mathrm{d} A = \mathrm{d}\beta \left\{ \frac{\mathrm{sty}\, H}{\mathrm{wst}\, A} - \frac{\mathrm{sty}\, \beta}{\mathrm{sty}\, A} \right\}.$$

Tu $\mathrm{d}\beta$ wyraża odmianę zboczenia między czasem dwóch obserwacyy, ranney i wieczorney. Z tego zrównania wyrachowane są tablice na poprawę południa wyciągnionego z równych wysokości słońca. Ponieważ południe pada w środku między obserwacyą ranną i wieczorną; nazwiymy czas zegaru na obserwacyą ranną T, przeciąg czasu między obserwacyami J, łuk $\mathrm{d} A$ rozdzielmy przez 15, żeby go zamienić na czas; kąt A odpowiada czasowi $\frac{1}{2}$J, czyli iest $\frac{1}{2}$J zamienione na łuk; więc będzie

$$\text{czas prawd. południa} = T + \tfrac{1}{2}\mathrm{J} - \frac{1}{2.15}\mathrm{d}\beta \left\{ \frac{\mathrm{sty}\, H}{\mathrm{wst}\, A} - \frac{\mathrm{sty}\, \beta}{\mathrm{sty}\, A} \right\}.$$

Przykład. 30 kwietnia 1819 n. s.; wzięta wysokość słońca zrana, i zegar skazował 10^g 33′ 27″.

na tę samą wysokość po południu 2^g 6′ 44″, czyli 14 6 44

J = 3^g 33′ 17″.

$\frac{1}{2}J = 1^{g.}\ 46'\ 38'',5$; $A = 26^\circ\ 39'\ 37''$.

Zboczenie słońca w czasie wysokości

wieczorney	$14^{g.}$	$36'$	$9''$
ranney	14	$33'$	$25,5 = \beta$
różnica		$2'$	$43'',5 = 163'',5 = d\beta$.

l. sty H = 0,1496836	l. sty β = 9,4144398
l. wst A = 9,6519556	l. sty A = 9,7007722
0,4977280; 3,146	9,7136676; 0,517
— 0,517	
2,629.	

l. 2,63 = 0,4199557
l. 163.5 = 2,2135178
c. l. 30 = 8,5228788
1,1563523; 14'',33.

Czas zegaru na obser. ranną	$T =$	$10^{g.}$	$33'$	$27''$
	$\frac{1}{2}J$	1	$46'$	38,5.
Południe niepoprawne		12	20	5,5.
Poprawa			—	14,3.
w czasie zegaru południe prawdziwe		$12^{g.}$	$19'$	$51'',2$

Można użyć tego samego zrównania na oznaczenie północy, z obserwacyi wieczorney iednego dnia, i ranney dnia następuiącego: ale trzeba kąt A powiększyć 180°, i będzie

$$\text{Czas pr. półn.} = T + \tfrac{1}{2}J - \frac{1}{2,15}\, d\beta \left\{ \frac{\text{sty } H}{\text{wst}(180^\circ + A)} - \frac{\text{sty } \beta}{\text{sty}(180^\circ + A)} \right\}.$$

II. POŁOŻENIE GWIAZD WZGLĘDEM RÓWNIKA I EKLIPTYKI.

Wynalezienie długości i szerokości gwiazd, ze zboczenia i wznoszenia się prostego.

§ 27. Niech w tróykącie ABC (fig. 6 Tab. II) A wyraża biegun równika ♈DQ; B biegun ekliptyki ♈LP: C mieysce gwiazdy. Koło wielkie, którego bok BA iest iest łukiem, wiemy że iest kołem *wrębném przesileń* (colurus solstitiorum) maiącem za bieguny punkta równonocne, iakim tu iest ♈, od którego rachuią się długości gwiazd na ekliptyce, a ich wznoszenia się proste na równiku. ♈D iest wznoszeniem się prostém α gwiazdy C; CD iey zboczeniem β: ♈L iest teyże gwiazdy długością λ; CL iey szerokością γ. ♈$P =$ ♈$Q = 90°$. Kąt $B = LP = 90° - \lambda$; kąt $BAC = 180° - CAP$; $CAP = 90° - \alpha$: więc kąt A tróykąta $BAC = 90° + \alpha$. Kąt C nazywa się w astronomii *kątem położenia* (angulus positionis), BA czyli c iest pochyłością ekliptyki, którą zawsze nazywać będziemy ω, W tróykącie więc teraźnieyszym BAC, $c = \omega$, $a = 90° - \gamma$, $b = 90° - \beta$, kąt $A = 90° + \alpha$, kąt $B = 90° - \lambda$.

Znaiąc pochyłość ekliptyki, wznoszenie się proste, i zboczenie gwiazdy; iakże wynaleśdź iey długość i szerokość? To zadanie w naszym tróykącie znaczy, że maiąc kąt A i boki go zawieraiące b, c; trzeba wynaleśdź bok a i kąt B. Zrównanie (1) fundamentalne trygonometryi § 2 daie

$$\text{dost}\,a = \text{wst}\,b.\text{wst}\,c.\text{dost}\,A + \text{dost}\,b.\text{dost}\,c:$$

wprowadźmy teraźnieysze wartości boków i kątów; pamiętaiąc, że gdy $A = 90° + \alpha$: $\text{dost}\,A = -\text{wst}\,\alpha$,

$\text{wst}\,A = \text{dost}\,\alpha$ § 22 Algebry, a zrównanie ostatnie zamieni się na

$$\text{wst}\,\gamma = -\text{dost}\,\beta.\text{wst}\,\omega.\text{wst}\,\alpha + \text{wst}\,\beta.\text{dost}\,\omega$$
$$= \text{wst}\,\beta\,(\text{dost}\,\omega - \text{wst}\,\omega.\text{dosty}\,\beta.\text{wst}\,\alpha).$$

Połóżmy $\quad \text{dosty}\,\beta.\text{wst}\,\alpha = \text{sty}\,\varphi$

$$\text{wst}\,\gamma = \frac{\text{wst}\,\beta}{\text{dost}\,\varphi}(\text{dost}\,\omega.\text{dost}\,\varphi - \text{wst}\,\omega.\text{wst}\,\varphi)\,;$$

a przeto

$$\text{wst}\,\gamma = \frac{\text{wst}\,\beta}{\text{dost}\,\varphi}\,\text{dost}\,(\varphi + \omega) \text{ na } \textit{szerokość gwiazdy}.$$

Z tychże samych boków b, c, i kąta A, chcąc wynaleśdź kąt B, użyymy zrównania trzeciego głównego § 5: które iest

$$\text{dosty}\,b.\text{wst}\,c = \text{dost}\,c.\text{dost}\,A + \text{wst}\,A.\text{dosty}\,B.$$

Włóżmy w nie znaczenia teraźnieysze boków i kątów, a otrzymamy

$$\text{sty}\,\beta.\text{wst}\,\omega = -\,\text{dost}\,\omega.\text{wst}\,\alpha + \text{dost}\,\alpha.\text{sty}\,\lambda\,;$$

a zatém

$$\text{sty}\,\lambda = \frac{\text{sty}\,\beta.\text{wst}\,\omega + \text{dost}\,\omega.\text{wst}\,\alpha}{\text{dost}\,\alpha} = \text{sty}\,\alpha\left(\text{dost}\,\omega + \frac{\text{sty}\,\beta}{\text{wst}\,\alpha}\,\text{wst}\,\omega\right)$$

Połóżmy

$$\frac{\text{sty}\,\beta}{\text{wst}\,\alpha} = \frac{1}{\text{dosty}\,\beta.\text{wst}\,\alpha} = \text{dosty}\,\varphi,$$

a zrównanie zamieni się na

$$\text{sty}\,\lambda = \frac{\text{sty}\,\alpha}{\text{wst}\,\varphi}\,\text{wst}\,(\varphi + \omega) \text{ na } \textit{długość gwiazdy}.$$

Przykład. Arcturus gwiazda północna ma w roku 1820 wznoszenie się proste $\alpha = 211°\,51'\,45''$: zboczenie północne $\beta = 20°\,7'\,28''$. *Sirius* gwiazda południowa ma wznoszenie się proste $\alpha = 99°\,18'\,18''$: zboczenie południowe $-\beta = 16°\,28'\,33''$: iakaż ich długość i szerokość? Pamiętaymy że zboczenie północne iest dodatne, południowe odiemne: a zatém tego ostatniego wstawa i styczna odiemne, dostawa dodatna. Żeby odciąganie logarytmu zamienić na dodawanie, częstokroć biorę iego dopełnienie arytmetyczne, które wyrażam literą c przed logarytmem położoną. W rachunkach astronomicznych osobliwie używaiąc kątów posiłkowych można popełnić wielkie omyłki, biorąc kąt niewłaściwy pytaniu, i dla tego radzę ściśle się pilnować znaków $\pm$ służących liniiom trygonometrycznym; które wedle prawidła w § 12 podanego, ułatwiaią wątpliwość, kiedy iey nie ułatwiaią albo warunki zadania, albo inne z pewnością znane kąty i łuki do pytania wchodzące.

Rachunek na *Arktura*; $\alpha = 211°\ 51'\ 45''$, $\beta = 20°\ 7'\ 28''$, $\omega = 23°\ 27'\ 54''$. Szukaymy naprzód kąta φ:

$$\begin{aligned}
\text{l. dost } \gamma\,(20°\ 7'\ 28'') &= 0{,}4360068 + \\
\text{l. wst}(211°\ 51'\ 45'') &= 9{,}7225373 - \\
\text{l. sty } \varphi &= 0{,}1585441 - \quad \text{w 4 kw.} \\
\varphi = 360° - (55°\ 14'\ 0'') &= 304°\ 46'\ 0'' \\
\omega &= 23\ \ 27\ \ 54'' \\
\varphi + \omega &= 328°\ 13'\ 54''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{l. sty}\,(211°\ 51'\ 45'') &= 9{,}7935096 + \\
\text{l. wst}\,(\varphi + \omega) &= 9{,}7213868 - \\
\text{c. l. wst } \varphi &= 0{,}0854024 - \\
\text{l. sty } \lambda &= 9{,}6002988 + \quad \text{w 3 kw.}
\end{aligned}$$

$\lambda = 180° + 21°\ 43'\ 17'' = 6^{s.}\ 21°\ 43'\ 17''$ długość *Arktura*.

$$\begin{aligned}
\text{l. wst}\,(20°\ 7'\ 28'') &= 9{,}5366346 + \\
\text{l. dost}\,(\varphi + \omega) &= 9{,}9295128 + \\
\text{c. l. dost } \varphi &= 0{,}2439456 + \\
\text{l. wst } \gamma &= 9{,}7100930 +
\end{aligned}$$

Szerokość północna $\gamma = 30°\ 51'\ 43''$

Rachunek na *Siryusa*; $\alpha = 99^\circ\ 18'\ 18''$: $-\beta = 16^\circ\ 28'\ 33''$.

$$
\begin{aligned}
\text{l. dosty}\,(16^\circ\ 28'\ 23'') &= 0{,}5290683 - \\
\text{l. wst}\,(99^\circ\ 18'\ 18'') &= 9{,}9942475 + \\
\text{l. sty}\ \varphi &= 0{,}5233158 - \quad \text{w 2 kw.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi = 180^\circ - (73^\circ\ 18'\ 59'') &= 106^\circ\ 41'\ 1'' \\
\omega &= 23^\circ\ 27'\ 54'' \\
\varphi + \omega &= 130^\circ\ 8'\ 55''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{l. sty}\ \alpha &= 0{,}7855645 - \\
\text{l. wst}(\varphi + \omega) &= 9{,}8833061 + \\
\text{c. l. wst}\ \varphi &= 0{,}0186777 + \\
\text{l. sty}\ \lambda &= 0{,}6875483 - \quad \text{w 2 kwadr.}
\end{aligned}
$$

Długość *Siryusa* $\lambda = 180^\circ - (78^\circ\ 23'\ 48'')$
$= 101^\circ\ 36'\ 12'' = 3^{s.}\ 11^\circ\ 36'\ 12''$.

$$
\begin{aligned}
\text{l. wst}\,(16^\circ\ 28'\ 33'') &= 9{,}4527229 - \\
\text{l. dost}\,(\varphi + \omega) &= 9{,}8094064 - \\
\text{c. l. dost}\ \varphi &= 0{,}5419872 - \\
\text{l. wst}\ \gamma &= 9{,}8041165 -
\end{aligned}
$$

Szerokość południ. *Siryusa* $\gamma = 39^\circ\ 33'\ 57''$.

Wynalezienie wznoszenia się prostego i zboczenia, z długości i szerokości.

§ 28. Jak do zadania dopiero rozwiązanego prowadzą nas obserwacye; tak używanie tablic na biegi ciał niebieskich wiedzie do zadania na odwrót, to iest: znaiąc długość i szerokość gwiazd, wynaleśdź ich wznoszenie się proste i zboczenie? czyli położenie znane względem ekliptyki, zamienić na położenie względem równika. W tym samym tróykącie *ABC* (fig. 6) zachowuiąc te same nazwiska boków i kątów, potrzeba nam z wiadomego kąta *B* i dwóch boków a, c, wynaleśdz kąt A i bok b. Zrównanie fundamentalne daie nam

$$\text{dost}\, b = \text{dost}\, B.\text{wst}\, a.\text{wst}\, c + \text{dost}\, a.\text{dost}\, c:$$

ażc

$$b = 90° - \beta; \quad a = 90° - \gamma; \quad c = \omega; \quad B = 90° - \lambda:$$

te wartości zamienią zrównanie ostatnie na

$$\text{wst}\, \beta = \text{wst}\, \lambda.\text{dost}\, \gamma.\text{wst}\, \omega + \text{wst}\, \gamma.\text{dost}\, \omega \qquad \text{(Z)}$$
$$= \text{wst}\, \gamma(\text{dost}\, \omega + \text{wst}\, \lambda.\text{dosty}\, \gamma.\text{wst}\, \omega).$$

Połóżmy

$$\text{wst}\, \lambda.\text{dosty}\, \gamma = \frac{\text{wst}\, \lambda}{\text{sty}\, \gamma} = \text{sty}\, \varphi',$$

a otrzymamy

$$\text{wst}\, \beta = \frac{\text{wst}\, \gamma}{\text{dost}\, \varphi'} \text{dost}(\varphi' - \omega) \text{ na } \textit{zboczenie gwiazdy}.$$

Na znalezienie kąta A mamy zrównanie 3 główne § 5,

$$\text{dosty}\, a.\text{wst}\, c = \text{dost}\, c.\text{dost}\, B + \text{wst}\, B.\text{dosty}\, A;$$

skąd

$$\text{dosty}\, A = \frac{\text{dosty}\, a.\text{wst}\, c - \text{dost}\, c.\text{dost}\, B}{\text{wst}\, B}$$

aże

$A = 90° + \alpha$, $\text{dosty}\, A = -\text{sty}\, \alpha$, $a = 90° - \gamma$, $c = \omega$; $B = 90° - \lambda$; więc

$$\text{sty}\, \alpha = \frac{-\text{sty}\, \gamma.\text{wst}\, \omega + \text{wst}\, \lambda.\text{dost}\, \omega}{\text{dost}\, \lambda}$$
$$= \text{sty}\, \lambda(\text{dost}\, \omega - \frac{\text{sty}\, \gamma}{\text{wst}\, \lambda} \text{wst}\, \omega) \qquad \text{(D)}.$$

Połóżmy za $\frac{\text{sty}\, \gamma}{\text{wst}\, \lambda} = \text{dosty}\, \varphi'$,

a co na iedno wychodzi $\text{sty}\, \varphi' = \frac{\text{wst}\, \lambda}{\text{sty}\, \gamma}$:

będzie

$$\text{sty}\,\alpha = \frac{\text{sty}\,\lambda}{\text{wst}\,\varphi'}\,\text{wst}(\varphi'-\omega)$$ na *wznosz. się proste gw.*

Na słońce, kiedy $\gamma = 0$, mamy

$$\text{wst}\,\beta = \text{wst}\,\lambda.\text{wst}\,\omega$$
$$\text{sty}\,\alpha = \text{sty}\,\lambda.\text{dost}\,\omega.$$

Przykład. Maiąc na r. 1820 gwiazdy *Arktura* długość $6^{s.}\,21°\,43'\,17'' = \lambda$: szerokość północną $30°\,51'\,43'' = \gamma$, pochyłość ekliptyki $23°\,27'\,54'' = \omega$: gwiazdy znowu *Siryusa* długość $3^{s.}\,11°\,36'\,12'' = \lambda$: szerokość południową $39°\,33'\,57'' = \gamma$: iakież ich zboczenie i wznoszenie się proste?

Rachunek na *Arktura*, naprzód kąta φ': potém β, α,

$$\begin{aligned}
\text{l. wst}\,\lambda &= 9{,}5683116 - \\
\text{l. sty}\,\gamma &= 9{,}7764003 + \\
\hline
\text{l. sty}\,\varphi' &= 9{,}7919113 - \text{ w 4 kw.} \\
\varphi' &= 360° - (31°\,46'\,13'') \\
\varphi' - \omega &= 304°\,45'\,53''.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{l. wst}\,\gamma &= 9{,}7100930 + \\
\text{l. dost}(\varphi'-\omega) &= 9{,}7560332 + \\
\text{c.l. dost}\,\varphi' &= 0{,}0704963 + \\
\hline
\text{l. wst}\,\beta &= 9{,}5366225 +
\end{aligned}$$

Zbocz. północ. $\beta = 20°\;7'\;26''$.

$$\begin{aligned}
\text{l. sty}\,\lambda &= 9{,}6002984 + \\
\text{l. wst}\,(\varphi'-\omega) &= 9{,}9146078 - \\
\text{c. l. wst}\,\varphi' &= 0{,}2785894 - \\
\hline
\text{l. sty}\,\alpha &= 9{,}7934956 + \text{ w 3 kw.} \\
\alpha &= 6^{s.}\;31°\;51'\;50''
\end{aligned}$$

Rachunek na *Siryusa* $\lambda = 101°\,36'\,12''$ $\gamma = -(39°\,33'\,57'')$:

$$\begin{aligned}
\text{l. wst}\,\lambda &= 9{,}9910327 + \\
\text{l. sty}\,\gamma &= 9{,}9171209 - \\
\hline
\text{l. sty}\,\varphi' &= 0{,}0739118 - \text{ w 2 kw.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{l. wst}\,\gamma &= 9{,}8041151 - \\
\text{l. dost}\,(\varphi'-\omega) &= 9{,}4579988 - \\
\text{c. l. dost}\,\varphi' &= 0{,}1905986 - \\
\hline
\text{l. wst}\,\beta &= 9{,}4527125 -
\end{aligned}$$

$$\varphi' = 180° - (49°\,51'\,7'') = 130°\,8'\,53'';$$
$$\varphi' - \omega = 106°\,40'\,59''.$$

Zb. połud. $\beta = -(16°\,28'\,32'')$.

$$
\begin{aligned}
\text{l. sty}\,\lambda &= 0{,}6875451 - \\
\text{l. wst}\,(\varphi' - \omega) &= 9{,}9813233 + \\
\text{c. l. wst}\,\varphi' &= 0{,}1166902 + \\
\text{l. sty}\,\alpha &= 0{,}7855586 - \quad \text{w 2 kw.} \\
\alpha &= 180° - (80°\,41'\,41'',5) \\
&= 99°\,18'\,18'',5.\ \text{Wzn. pr. gw.}
\end{aligned}
$$

Odmiana roczna w położeniu gwiazd.

§ 29. Cofanie się wsteczne punktów równonocnych wynoszące na rok 50″,1 powiększa o tyleż corocznie długość gwiazd, nie naruszaiąc ich szerokości. Za odmianą długości, idzie odmiana wznoszenia się prostego, i zboczenia gwiazdy, którą potrzeba wynaleśdź, żeby z położenia gwiazdy na pewny iaki rok, znaleśdź iey położenie na rok inny, i nawet na iakikolwiek dzień roku. Na ten koniec weźmy § 25, zrównanie (Z).

$$\text{wst}\,\beta = \text{wst}\,\lambda.\text{dost}\,\gamma.\text{wst}\,\omega + \text{wst}\,\gamma.\text{dost}\,\omega.$$

Rożnicuymy ie uważaiąc γ, ω, za stateczne; β, λ, za ilości odmienne:

$$\text{d}\,\beta.\text{dost}\,\beta = \text{d}\,\lambda.\text{dost}\,\lambda.\,\text{dost}\,\gamma.\text{wst}\,\omega,$$

$$\text{d}\,\beta = \text{d}\,\lambda\,\frac{\text{dost}\,\lambda.\text{dost}\,\gamma.\text{wst}\,\omega}{\text{dost}\,\beta}:$$

aże w tróykącie *ABC* pierwsze zrównanie główne § 3 daie

$$\frac{\text{wst}\,A}{\text{wst}\,a} = \frac{\text{wst}\,B}{\text{wst}\,b},\quad \text{to iest}\quad \frac{\text{dost}\,\alpha}{\text{dost}\,\gamma} = \frac{\text{dost}\,\lambda}{\text{dost}\,\beta};$$

więc

$$\text{d}\,\beta = \text{d}\,\lambda.\text{dost}\,\alpha.\text{wst}\,\omega \quad \text{(k)}\ \textit{na odmianę zboczenia.}$$

ze zrównania przedostatniego wypada dostα.dostβ— dostλ.dostγ=o zrównanie ważne, dosyć częstego w analizie astronomiczney użycia.

Weźmy teraz z § poprzedzaiącego zrównanie (D)

$$\mathrm{sty}\,\alpha.\mathrm{dost}\,\lambda = -\mathrm{sty}\,\gamma.\mathrm{wst}\,\omega + \mathrm{wst}\,\lambda.\mathrm{dost}\,\omega:$$

rożnicuymy ie co do α, λ,

$$\frac{\mathrm{d}\,\alpha.\mathrm{dost}\,\lambda}{\mathrm{dost}^2\alpha} - \mathrm{d}\,\lambda.\mathrm{sty}\,\alpha.\mathrm{wst}\,\lambda = \mathrm{d}\,\lambda.\mathrm{dost}\,\lambda.\mathrm{dost}\,\omega,$$

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\lambda(\mathrm{dost}\,\omega - \mathrm{dost}\,\omega.\mathrm{wst}^2\alpha + \mathrm{sty}\,\lambda.\mathrm{wst}\,\alpha.\mathrm{dost}\,\alpha).$$

Aże w tróykącie ABC zrównanie 3 główne § 5 daie

$$\mathrm{dosty}\,b.\mathrm{wst}\,c = \mathrm{dost}\,c.\mathrm{dost}\,A + \mathrm{wst}\,A.\mathrm{dosty}\,B;$$

to iest włożywszy za boki i kąty tu im właściwe znaczenia

$$\mathrm{sty}\,\beta.\mathrm{wst}\,\omega = -\mathrm{dost}\,\omega.\mathrm{wst}\,\alpha + \mathrm{dost}\,\alpha.\mathrm{sty}\,\lambda,$$

co wprowadziwszy w zrównanie na dα; otrzymamy

$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\lambda(\mathrm{dost}\,\omega + \mathrm{wst}\,\omega.\mathrm{wst}\,\alpha.\mathrm{wst}\,\alpha.\mathrm{sty}\,\beta)$ (k′) *na odmianę wznoszenia się prostego.*

Wszystko teraz zależy na oznaczeniu dλ, czyli na wartości odmiany, którą ponoszą gwiazdy w długości przez cofanie się punktów równonocnych: a którato wartość wyciąga się z porównania obserwacyy naydawnieyszych z teraźnieyszemi w astronomii sferyczney; w fizyczney zaś z wypadków rachunkowych nayzawilszego zadania, które naypierwszy rozwiązał *Dalembert.* Kładąc tę wartość za dλ w zrównania (k), (k′) otrzymamy odmianę roczną wznoszenia się prostego i zboczenia. Ważna korzyść tych zrównań zawiera się w tém; że w nie nie wchodzi ani długość ani szerokość potrzebuiące rachunku; ale tylko α, β, które się przez obserwacye wynayduią. Ponieważ zrównanie (k) zależy od dost α; odmiany roczne zboczenia są dodatne dla wszystkich gwiazd północnych leżących co do wznoszenia się prostego w pierwszey i czwartey ćwiartce koła: są zaś te odmiany odiemne dla gwiazd północnych leżących w drugiey i trzeciey ćwiartce koła. Przeciwnie gwiazdy południowe, gdzie β iest odiemne, maią odmianę zboczenia w pierwszey i czwartey ćwiartce koła odiemną; w drugiey i trzeciey dodatną: co nam tłumaczy przemianę znaków, iaką widzimy przy odmianie roczney zboczenia w katalogach gwiazd.

Pierwszy termin odmiany na wznoszenie się proste $d\lambda$.dost ω, iest wszystkim gwiazdom spólny: drugi więc tylko termin należy rachować na każdą gwiazdę. Uważaliśmy w tym rachunku pochyłość ekliptyki ω iako stateczną, kiedy ta podlega także małey odmianie wynoszącey 50″ na sto czterdzieści lat: a zatém na rok $-0'',357$ czyli 36″ na lat sto: co iest skutkiem działania planet na sferoidę ziemską. Żeby i tę odmianę w rachunek wprowadzić $-0'',357$ wst $\omega = -0'',142$: ta ilość odciąga się od pierwszego terminu $d\lambda$ dost ω: z resztą wykonywa się rachunek w zrównaniach skazany. Drugi termin odmiany na wznoszenie się proste, ponieważ zawisł od wst α, i sty β; więc dla gwiazd północnych tych, które leżą w pierwszey i drugiey ćwiartce koła na α, będzie dodatny; dla leżących zaś w trzeciey i czwartey ćwiartce α, będzie odiemny. Przeciwnie dla gwiazd południowych będzie ten termin odiemny w pierwszey i drugiey; dodatny w trzeciey i czwartey ćwiartce koła na α. Te zrównania (k), (k′) są wielkiego użycia tak w układaniu katalogu gwiazd, iako i w innych przypadkach: gdy z odmiany iednego położenia, dochodzić chcemy odmiany drugiego. Objaśni się to przykładem na gwiazdach *arcturus* i *sirius*.

Rachunek na *Arktura* $\alpha = 211°51'45''$; $+\beta = 20°7'28''$; $d\lambda = 50'',1$;

$$\begin{array}{ll} l.\,d\lambda = 1{,}6998377+ & l.\,d\lambda = 1{,}6998377+ \\ l.\,dost\,\alpha = 9{,}9290700- & l.\,wst\,\alpha = 9{,}7225373- \\ l.\,wst\,\omega = 9{,}6000890+ & l.\,wst\,\omega = 9{,}6000890+ \\ l.\,d\beta = 1{,}2289967- \quad 17'' & l.\,sty\,\beta = 9{,}5639932+ \\ & \overline{0{,}5864572-} \quad 3'',858 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} l.\,d\lambda = & 1{,}6998377+ \\ l.\,dost\,\omega = & 9{,}9625130+ \\ l.\,d\lambda.\,dost\,\omega = & \overline{1{,}6623507;} \quad 45'',957 \\ & \quad - \quad 0'',142 \\ \text{na wszystkie gwiazdy} & + \overline{45'',815} \\ & - \quad 3'',858 \\ d\alpha = & \overline{41'',957} \end{array}$$

Odmiana roczna *Arktura* $d\beta = -17''$, na zboczenie; $d\alpha = 42''$, na wznoszenie się proste.

Rachunek na *Syriusa* $\alpha = 99°18'18''$; $\beta = -(16°28'33'')$; $d\lambda = 50'',1$; $d\lambda\,dost\,\omega = 45'',815$.

$$\begin{array}{ll} l.\,d\lambda = 1{,}6998377+ & l.\,d\lambda = 1{,}6998377+ \\ l.\,dost\,\alpha = 9{,}2086830- & l.\,wst\,\alpha = 9{,}9942475+ \\ l.\,wst\,\omega = 9{,}6000890+ & l.\,wst\,\omega = 9{,}6000890+ \\ l.\,d\beta = 0{,}5085097- & l.\,sty\,\beta = 9{,}4709315- \\ -d\beta = +3'',225 \text{ na odm. zb.} & \overline{0{,}7651057-} \quad 5'',822 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45'',815 \\ -\,5'',822 \\ \hline 39'',993 \end{array}$$

$d\alpha = 40''$, na odmianę wznoszenia się prostego.

Kąt położenia i iego odmiana.

§ 30. Kąt położenia C w tróykącie ABC (fig. 6) pokazuie mieysce gwiazdy względem równika i ekliptyki razem: możemy go wyciągnąć ze zrównania fundamentalnego

$$\text{dost}\,C = \frac{\text{dost}\,c - \text{dost}\,a.\text{dost}\,b}{\text{wst}\,a.\text{wst}\,b} = \frac{\text{dost}\,\omega - \text{wst}\,\gamma.\text{wst}\,\beta}{\text{dost}\,\gamma.\text{dost}\,\beta};$$

albo możemy go ieszcze wyciągnąć z pierwszego zrownania głównego (2) § 3; gdzie mamy

$$\frac{\text{wst}\,C}{\text{wst}\,c} = \frac{\text{wst}\,A}{\text{wst}\,a} = \frac{\text{wst}\,B}{\text{wst}\,b}$$

to iest,

$$\text{wst}\,C = \frac{\text{wst}\,\omega.\text{dost}\,\alpha}{\text{dost}\,\gamma} = \frac{\text{wst}\,\omega.\text{dost}\,\lambda}{\text{dost}\,\beta} \quad \text{na } \textit{kąt położenia.}$$

Wynalezienie odmiany tego kąta, w którąby nie wchodziła ani długość, ani szerokość; dosyć iest zawiła. Wyciągnąłem ią atoli z tego, co się iuż dowiodło, dosyć sposobem prostym. Różnicuymy zrównanie $\text{wst}\,C = \frac{\text{wst}\,\omega.\text{dost}\,\alpha}{\text{dost}\,\gamma}$, uważaiąc γ iako stałeczne:

$$\text{d}\,C.\text{dost}\,C = -\frac{\text{wst}\,\omega.\text{wst}\,\alpha}{\text{dost}\,\gamma}\,\text{d}\,\alpha; \quad \text{d}\,C = -\frac{\text{wst}\,\omega.\text{wst}\,\alpha.\text{d}\alpha}{\text{dost}\,C.\text{dost}\,\gamma},$$

$$\text{dost}\,C.\text{dost}\,\gamma = \frac{\text{dost}\,\omega - \text{wst}\,\gamma.\text{wst}\,\beta}{\text{dost}\,\beta}.$$

Wprowadźmy z § 24 za $\text{wst}\,\gamma = \text{dost}\,\omega.\text{wst}\,\beta - \text{wst}\,\omega.\text{wst}\,\alpha.\text{dost}\,\beta$; z § zaś 26 ze zrównania (k') za $\text{d}\,\alpha = \text{d}\,\lambda(\text{dost}\,\omega + \text{wst}\,\omega.\text{wst}\,\alpha.\text{sty}\,\beta)$: a otrzymamy

$$\text{d}\,C = -\frac{\text{wst}\,\omega.\text{wst}\,\alpha}{\text{dost}\,\beta}\,\text{d}\,\lambda \quad \text{na } \textit{odmianę kąta położenia.}$$

$$\begin{aligned} \text{l. d}\lambda &= 1{,}6998377 + \\ \text{l. wst }\omega &= 9{,}6000890 + \\ \hline \text{l. możn. spólnego} &= 1{,}2999267 + \end{aligned}$$

Na Arktura
$$\begin{aligned} \text{l. d}\lambda\text{ wst }\omega &= 1{,}2999267 + \\ \text{l. wst }\alpha &= 9{,}7225373 - \\ \text{c. l. dost }\beta &= 0{,}0273587 + \\ \hline \text{l. dc} &= 1{,}0498227 - \quad 11'',215 \\ \text{dc} &= + 11'',215. \end{aligned}$$

Na Syriusa
$$\begin{aligned} \text{l. d}\lambda\text{ wst }\omega &= 1{,}2999267 + \\ \text{l. wst }\alpha &= 9{,}9942475 + \\ \text{c. l. dost }\beta &= 0{,}0182088 + \\ \hline \text{l. d}C &= 1{,}3123830 + \quad 20'',53 \\ \text{d}c &= - 20'',53, \end{aligned}$$

Położenie zenith *względem równika i ekliptyki.*

§ 31. Zenith i biegun świata nigdy nie schodzą z południka iakiegokolwiek mieysca ziemi: ale biegun ekliptyki będąc punktem równoleżnika biegunowego, tak schodzi z południka i przezeń się przesuwa, iak punkta innych równoleżników biegiem dziennym opisywanych. Kiedy biegun ekliptyki znidzie z południka, znayduiąc się na stronie iego wschodniey, ekliptyka leżąc ukośnie do równika i poziomu, iedną stroną spada pod równik na stronę południową; drugą zaś stroną wznosi się nad niego łukiem północnym: południk więc w tym przypadku przecinaiąc leżącą nad poziomem ekliptykę, nie dzieli iey na dwie części równe; i punkt ekliptyki przechodzący przez południk, nie iest środkiem między iey punktem wschodzącym i zachodzącym. Inaczey się rzecz ma z równikiem: ponieważ iego biegun zawsze leży na południku; więc ten przecina pionowo równika, i wszystkie koła dzienne gwiazd, dzieląc ie na dwie części równe: to iest, łuk wschodni, zupełnie iest równy łukowi zachodniemu, i gwiazda przechodząc przez południk, iest w środku nieba między swoim wschodem i zachodem. I dla tegoto punkt góruiący równika nazwali dawni *wznoszeniem się prostém środka nieba* (ascensio recta medii coeli): iestto punkt równika będący razem na południku z punktem wierzchołkowym czyli z zenith mieysca: i tto ieszcze kąt godzinny punktu równonocnego, od którego się rachuią długości i wznoszenia się proste: iest iak wznoszenie się proste zenith: ale że zenith ani się podnosi ani spada, dla tego tego ostatniego nazwiska nie przyięto: iestto ieszcze położenie punktu równonocnego względem zenith: zgoła iestto *czas gwiazdowy* (tempus sidereum) zamieniony na łuk równika. Potrzeba wiedzieć wszystkie te nazwiska, które nadane bydź mogą wznoszeniu się prostemu środka nieba. Nazywać ie zawsze będziemy M: i astronomiia uczy; że

$$M = \text{wzn. pr. słońca} + \text{czas prawd. zamieniony na łuk.}$$

Że zaś astronomowie dzień zaczynaią od południa; więc czas prawdziwy po południu iestto kąt godzinny słońca: zrana zaś czyli przed południem, kąt godzinny słońca iestto dopełnienie czasu prawdziwego do 24 godzin: przeto nazwawszy P kąt godzinny słońca, i przezeń wyrażaiąc M, mamy

$$M = \text{wzn. pr. słońca} + P \text{ na czas popołudniowy}$$
$$M = \text{wzn. pr. słońca} - P \text{ na czas ranny:}$$

Znaki zodyakalne idą od zachodu ku wschodowi; i w tym kierunku rachuią się wznoszenia się proste słońca i gwiazd. Kiedy M wyrażamy przez wzn. pros. słońca, rozumieć się powinno wznoszenie się proste na czas rachunku; to iest odpowiadaiące czasowi prawdziwemu.

Zboczenie *zenith* czyli iego odległość od równika, iestto to samo, co szerokość mieysca; a zatém szerokość mieysca *H*, i wznoszenie się proste środka nieba *M* na każdy moment czasu, wyrażaią położenie zenith względem równika.

Ze zaś powiedzieliśmy wyżey, że kiedy biegun ekliptyki znidzie z południka; punkt iey góruiący nie iest środkiem między punktem wschodzącym i zachodzącym ekliptyki; przeto trzeba było ten punkt środkowy na każdy moment czasu wytknąć i oznaczyć. Co się dokazuie przez łuk koła wielkiego prowadzony przez biegun ekliptyki i przez zenit, a zatém pionowy na ekliptykę i na poziom. Jestto koło szerokości i wysokości razem; i punkt ekliptyki w którym ią to koło przecina, nazwano *Nonagesimus* to iest punkt *dziewiędziesiąty*, bo iest o 90° odległy od punktu wschodzącego i zachodzącego ekliptyki; a zatém punktem iey środkowym nad poziomem. Jestto iak widzimy położenie *zenith* względem ekliptyki wyrazić się mogące przez długość i szerokość. Wyznaczenie tego punktu na każdy moment dany, iest wielkiego w astronomii użycia, osobliwie w rachunku *parallax*, i *zaćmień*. Nazywać odtąd zawsze będziemy długość *Nonagesimi* czyli zenith przez N;
szerokość *Nonagesimi* czyli zenith przez *s*;
wysokość iego *k*.

Na fig. 7. Tab. II. *PMBC* niech wyraża południkał; *B* zenith; *C* biegun świata: *A* biegun ekliptyki. *PORQ* iest poziomem; *V* punktem równonocnym; *VMTR* równikiem; *VNSQ* ekliptyką. *VM* iest wznoszeniem się prostém środka nieba $= M$; *r* iest punkt ekliptyki góruiący czyli przechodzący przez południk: N iest *Nonagesimus*; bo $NQ = 90°$. Wiemy z wiadomości sfery, że $ABN = 90°$, $BNO = 90°$ więc $AB = NO$; $BAL = 90°$, $ABN = 90°$, więc $BN = AL$ podniesieniem bieguna ekliptyki nad poziom: $POR = 90°$, $ORQ = 90°$, więc $PO = RQ$. Punkt Q iest biegunem koła $ABNO$, i szerokości i wysokości razem: kąt NQO albo łuk NO nazywaią *angulus orientis*, to iest kątem wschodzącey ekliptyki. VN iest *długością zenith* czyli *nonagesimi* $= N$, BN szerokością zenith $= S$.

W tróykącie ABC bok b iest pochyłością ekliptyki $= \omega$; bok $a = 90° - H$; bok $c = 90° - S$; kąt $A = NS = 90° - VN = 90° - N$; kąt $B = PO = RQ$, kąt $ACB = 180° - BCS = 180° - MT = 90° + M$. Zrównanie 3cie. główne daie:

$$\text{dosty}\, a . \text{wst}\, b = \text{dost}\, b . \text{dost}\, C + \text{wst}\, C . \text{dosty}\, A:$$

to iest w znaczeniu teraźnieyszém boków i kątów

$$\text{sty}\, H . \text{wst}\, \omega = -\text{dost}\, \omega . \text{wst}\, M + \text{dost}\, M . \text{sty}\, N;$$

a przeto

$$\text{sty}\, N = \frac{\text{sty}\, H . \text{wst}\, \omega}{\text{dost}\, M} + \text{dost}\, \omega . \text{sty}\, M. \quad \text{(m)}$$ *na długość Nonagesimi.*

A położywszy

$$\frac{\text{sty}\, H}{\text{wst}\, M} = \text{dosty}\, \varphi, \quad \text{albo} \quad \text{sty}\, \varphi = \frac{\text{wst}\, M}{\text{sty}\, H};$$

zrównanie to zamieni się na

$$\text{sty}\, N = \frac{\text{sty}\, M}{\text{wst}\, \varphi} \text{wst}(\varphi + \omega).$$

Są przypadki, w których bezpieczniey iest użyć zrównania (m), osobliwie gdzie iest wątpliwość, do którey ćwiartki koła należy kąt posiłkowy φ? gdyż wzięty niewłaściwie, może poprowadzić do mylnych wypadków.

Znaiąc M, N, można przez pierwsze zrównanie główne wynaleśdź s, to iest szerokość zenith czyli *Nonagesimi*.

$$\mathrm{wst}\,A : \mathrm{wst}\,a = \mathrm{wst}\,C : \mathrm{wst}\,c; \quad \mathrm{wst}\,c = \mathrm{dost}\,s,$$

$$\mathrm{dost}\,s = \frac{\mathrm{dost}\,M.\mathrm{dost}\,H}{\mathrm{dost}\,N} \quad \text{(n)}$$ na *szerokość zenith* albo *Nonagesimi*.

Można ieszcze tę szerokość zenith wyciągnąć ze zrównania fundamentalnego

$$\mathrm{dost}\,c = \mathrm{dost}\,C.\mathrm{wst}\,a.\mathrm{wst}\,b + \mathrm{dost}\,a.\mathrm{dost}\,b:$$

to iest

$$\mathrm{wst}\,s = -\mathrm{wst}\,M.\mathrm{dost}\,H.\mathrm{wst}\,\omega + \mathrm{wst}\,H.\mathrm{dost}\,\omega \quad (\mathrm{n}').$$

Ponieważ szerokość zenith iest dopełnieniem NO, to iest wysokości zenith; a zatém i kąta Q wschodzącey ekliptyki, nazwawszy tę wysokość k, będzie $k = 90° - s$, $\mathrm{wst}\,s = \mathrm{dost}\,k$; a $\mathrm{dost}\,s = \mathrm{wst}\,k$. Szerokość ieszcze s iest równa AL wysokości bieguna ekliptyki.

$$\mathrm{wst}\,c : \mathrm{wst}\,C = \mathrm{wst}\,b : \mathrm{wst}\,B,$$

$$\mathrm{wst}\,B = \mathrm{wst}\,RQ = \frac{\mathrm{wst}\,\omega.\mathrm{dost}\,M}{\mathrm{dost}\,s} \quad \text{(o)}$$ na *obszerność punktu wschodzącego ekliptyki*.

Możemy ieszcze to samo wynaleśdź przez trzecie zrównanie główne

$$\mathrm{dosty}\,b.\mathrm{wst}\,a = \mathrm{dost}\,a.\mathrm{dost}\,C + \mathrm{wst}\,C.\mathrm{dosty}\,B:$$

a zatém

$$\text{dosty}\, B = \frac{\text{dosty}\,\omega . \text{dost}\, H}{\text{dost}\, M} + \text{wst}\, H . \text{sty}\, M$$

$$= \text{sty}\, M (\text{wst}\, H + \frac{\text{dosty}\,\omega}{\text{wst}\, M} \text{dost}\, H):$$

a położywszy

$$\frac{\text{dosty}\,\omega}{\text{wst}\, M} = \text{sty}\,\varphi',$$

otrzymamy

$$\text{dosty}. B = \frac{\text{sty}\, M}{\text{dost}\,\varphi'} \text{wst}(\varphi' + H) \quad (o').$$

Jedno zrównanie służyć może do sprawdzenia wypadków drugiego.

Punkt r iest punktem góruiącym ekliptyki czyli przechodzącym przez południk: Vr iego długość; Mr iego zboczenie, kąt VrM iest kąt ekliptyki z południkiem używany w rachunku zaćmień; kąt $V = \omega$ pochyłość ekliptyki. W tróykącie VrM prostokątnym przy M, mamy ze zrównań na tróykąt prostokątny § 9

(e) $\text{sty}\, Vr = \dfrac{\text{sty}\, M}{\text{dost}\,\omega}$ na *dług. punktu góruiąc. ekliptyki*

(d) $\text{dost}\, VrM = \text{dost}\, M . \text{wst}\,\omega$: na *kąt ekliptyki z połud.*

(f) $\text{sty}\, Mr = \text{sty}\,\omega . \text{wst}\, M$: na *zbo. punktu gór. ekliptyki.*

Pr iest wysokość punktu góruiącego ekliptyki $= 90° - H + Mr$.

Przykład. Dnia 7 września roku 1820 n. s. o godzinie 2 29′ 23″ czasu prawdziwego w Wilnie, na początek zaćmienia słońca, wynaleśdź M, N, s, i wszystkie łuki i kąty dopiero wyłożone, maiąc wzgląd na prawdziwą figurę ziemi $= \frac{1}{310}$ albo $\frac{1}{330}$;

biorąc tę ostatnią, będzie szerokość Wilna poprawna $=54^\circ\,31'\,10''$, $\omega=23^\circ\,27'\,55'',7$.

W Wilnie wznoszenie się proste słońca czyli

$$\alpha = 165^\circ\ 57'\ 39'',69$$
$$2^{s}\ 29'\ 23''\ \text{w łuku} = \ \ 37\ \ 20\ \ 45$$
$$M = 203^\circ\ 18'\ 24'',69$$
$$= 180^\circ + 23^\circ\ 18'\ 24'',69.$$

Bez kąta posiłkowego N.

$$\text{l. sty } H = 0{,}1470438 +$$
$$\text{l. wst } \omega = 9{,}6000972 +$$
$$\text{c. l. dost } M = 0{,}0369686 -$$
$$\text{l. (1)} \quad 9{,}7841096 -$$
$$-0{,}608288 \ (1)$$

$$\text{l. dost } \omega = 9{,}9625115 +$$
$$\text{l. sty } M = 9{,}6342857 +$$
$$\text{l. (2)} \quad 9{,}5967972 +$$
$$0{,}395184 \ (2)$$

$(1)+(2) = -0{,}213104 = \text{sty } N$

$N = 167^\circ\,58'\,12''$ *długość zenith*

$$\text{l. dost } M = 9{,}9630314 -$$
$$\text{l. dost } H = 9{,}7637473 +$$
$$\text{c. l. dost } N = 0{,}0096440 -$$
$$\text{l. dost } s = 9{,}7364227 +$$

$s = 56^\circ\,58'\,23''$ *szerokość zenith.*

N. z kątem posiłkowym.

$$\text{l. wst } M = 9{,}5973171 -$$
$$\text{l. sty } H = 0{,}1470438 +$$
$$\text{l. sty } \varphi = 9{,}4502733 - \quad \text{w 4.k.}$$
$$\varphi = 360^\circ - (15^\circ\,44'\,57'',4)$$
$$= 344^\circ\ 15'\ \ 2'',6$$
$$\omega = \ \ 23^\circ\ 27'\ 55'',7$$
$$\varphi + \omega = \ \ 7^\circ\ 42'\ 58'',3$$

$$\text{l. sty } M = 9{,}6342857 +$$
$$\text{l. wst } (\varphi + \omega) = 9{,}1279670 +$$
$$\text{c. l. wst } \varphi = 0{,}5663448 -$$
$$\text{l. sty } N = 9{,}3285975 -$$
$$N = 180^\circ - (12^\circ\ 1'\ 48).$$

$$\text{l. dost } M = 9{,}9630314 -$$
$$\text{l. wst } \omega = 9{,}6000972 +$$
$$\text{c. l. dost } s = 0{,}2635773 +$$
$$\text{l. wst } B = 9{,}8267059 -$$
$$B = -(42^\circ\ 8'\ 32'')$$

= obszer. zachod. ekl.

$90^\circ - s = 33^\circ\ 1'\ 37''$ *wysokość zenith* i kąt wschodzącey ekliptyki

B ze zrównania (o')

l. dosty $\omega = 0{,}3624143 +$
l. wst $M = 9{,}5973171 -$
l. sty $\varphi' = 0{,}7650972 -$ w 2 k,
$\varphi' = 180° - (80° 15' 15'',8)$
$= 99° 44' 44'',2$
$H = 54 \;\; 31 \;\; 10$
$\varphi' + H = 154° \; 15' \; 54'',2.$

l. sty $M = 9{,}6342857 +$
l. wst$(\varphi' + H) = 9{,}6376984 +$
c. l. dost $\varphi' = 0{,}7714097 -$
l. dosty $B = 0{,}0433937 -$
$B = -(42° 8' 32'')$

l. sty $M = 9{,}6342857 +$
l. dost $\omega = 9{,}9625115 +$
l. sty $Vr = 9{,}6717742 +$
$Vr = 180° + 25° \; 9' \; 25'',5$ bo M w 3 kw.
długość punktu ekliptyki będącego na południku.

l. sty $\omega = 9{,}6375857 +$
l. wst $M = 9{,}5973171 -$
l. sty $Mr = 9{,}2349028 -$
$Mr = -(9° \; 44' \; 44'')$ tegoż punktu *zboczenie południowe.*

l. dost $M = 9{,}9630314 -$
l. wst $\omega = 9{,}6000972 +$
l. dost $Vr\,M = 9{,}5631286 -$
$Vr\,M = 180° - (68° \; 32' \; 57'')$ *kąt ekliptyki z południkiem* ku stronie południowey od zachodu; a zatém ku stronie północney 68° 32' 57''

Pr wysokość punktu ekliptyki przechodzącego przez południk $= 90° - H + Mr$.

III. Odnoszenie ciał niebieskich do środka ziemi, lub do środka słońca.

Zamiana mieysc środo-ziemskich na środo-słoneczne.

§ 32. Ciała niebieskie ruchome do świata słonecznego należące, iakiemi są planety i komety, uważaią się z różnych punktów powierzchni ziemskiey; ale się przywodzą do iednego pukłu spólnego, to iest do środka ziemi. Takie biegi i położenia, iakieby się wydawały patrzącym na nie ze środka ziemi, nazywaią się *geocentryczne* czyli *środo-ziemskie* (loci geocentrici). Ale że planety i komety nie około ziemi, ale około słońca biegi swoie odbywaią; więc widok ich ze środka ziemi, może nam tylko skazać biegi ich pozorne, to iest takie, iakie widzimy: chcąc od tych, przyyśdź do biegów rzetelnych, trzeba ie przywieśdź do prawdziwego tych biegów środka, to iest do środka słońca. Takie biegi i położenia ciał niebieskich, iakieby się okazały patrzącym na nie ze środka słońca, nazywaią się *heliocentryczne* czyli *środo-słoneczne* (loci heliocentrici). Do pierwszych prowadzą nas obserwacye, do drugich czasem obserwacye, ale nayczęściey rozumowanie i *analiza*. Dla tego ważném iest zadaniem w Astronomii: z położenia środo-ziemskiego wynaleśdź położenie środo-słoneczne: i na odwrót, od położenia środo-słonecznego, przyyśdź do położenia środo-ziemskiego. Pierwsze zadanie przypada nam rozwiązać, kiedy z mieysc znalezionych przez obserwacyą, chcemy wyciągnąć mieysca dane przez tablice biegów rzetelnych, do których prowadzi mechanika: i obserwacye z tablicami porownać. Drugie zaś zadanie w tenczas przypada, kiedy tablice chcemy sprawdzać przez obserwacye, i z mieysc tablicowych, wyznaczyć mieysca, które obserwacye skazać powinny, a przez to dochodzić iak daleko tablice biegów niebieskich zgadzaią się, lub różnią od obserwacyy? Rozwiązanie tych zadań, ponieważ w wielkiey części zależy od odległości trzech ciał niebieskich od siebie, a zatém od trzech liniy prostych, zdaie się bydź rzeczą raczey trygonometryi prostokreślney iak kulistey. Ale że kąty między temi liniiami zawarte są wypadkami trygonometryi kulistey; obie te nauki łączą się tu, i wzaiemnie posiłkuią w rozwiązaniu tych zadań.

Słońce i ziemia nigdy nie schodzą z płaszczyzny ekliptyki, i uważamy ie iako niemaiące żadney szerokości. A chociaż *de la Place* z działania planet wyciągnął małą odmianę ekliptyki, i szerokość słońca blisko na iednę sekundę łuku; odmiana atoli tak drobna i nieznaczna nie uważa się w rachunkach trygonometrycznych.

Planety i komety idą po własnych drogach mniey lub więcey do ekliptyki pochylonych: liniie pionowe ze środka planety na płaszczyznę ekliptyki spuszczone, pokazuią nam mieysca, które ten planeta na ekliptyce przebiega. Nazywamy w astronomii *biegiem kierunkowym* planety (motus directus), kiedy ten przebiega znaki ekliptyki takim porządkiem, iakim one idą po sobie od zachodu ku wschodowi, poczynaiąc od 0♈, to iest od pierwszego punktu Barana. Nazywamy zaś *biegiem wstecznym* (motus retrogradus), kiedy planeta lub kometa posuwa się na wspak przeciwko porządkowi znaków ekliptycznych, idąc od wschodu ku zachodowi. Gdy pochyłość drogi planetowey do ekliptyki czyni kąt ostry, to iest mnieyszy od 90°; wszystkie punkta liniy pionowych od planety na ekliptykę spuszczone, idą za porządkiem znaków, i pokazuią bieg kierunkowy. Ale gdy pochyłość tey drogi do ekliptyki czyni kąt rozwarty, wszystkie punkta liniy pionowych od planety na ekliptykę spuszczonych padaią w stronę przeciwną, posuwaiąc się od wschodu ku zachodowi i pokazuią bieg wsteczny. Dla tegoto w niektórych dziś astronomicznych dziełach, chcąc wytknąć bieg kierunkowy lub wsteczny, wyrażaią go autorowie przez pochyłość drogi ostrą lub rozwartą.

Jeżeli uważamy planetę lub kometę na własney iego drodze; liniia prosta od słońca lub ziemi do niego prowadzona iest iego odległością prawdziwą: ale ieżeli tego planetę lub kometę przez liniią pionową przeniesiemy na ekliptykę, liniie proste od słońca lub ziemi do tak przeniesionego punktu na ekiiptykę prowadzone, nazywaią się *odległościami skróconemi* (distantiae curtatae).

Wystawmy sobie na fig. 8 Tabl. II planetę przeniesionego na ekliptykę w mieyscu *P*, słońce w mieyscu *S*, ziemię w mieyscu *Z*: w tróykącie prostokreślnym *PSZ*, *SZ* wyraża odległość prawdziwą słońca od ziemi; *SP* odległość skróconą planety od słońca; *ZP* odległość skróconą ziemi od planety. Kąt *P* w astronomii nazywa się *parallaxą roczną* (parallaxis annua): iestto kąt, pod którymbyśmy widzieli z planety liniią *SZ*, czyli promień drogi roczney przez ziemię około słońca opisaney: nazwać go prościey możemy *kąt w planecie* lub *komecie*. Kąt *S* nazywa się w astronomii *commutatio*, my go nazywać będziemy *kąt w słońcu*: pod tym kątem widzielibyśmy ze środka słońca ziemię i planetę, czyli ich odległość *PZ*. Kąt nakoniec *Z* nazywa się *elongatio*, to iest odsunienie planety od słońca widziane z ziemi; iestto kąt pod którym ze środka ziemi widzielibyśmy planetę i słońce, czyli ich odległość *SP*; nazywać go będziemy *kąt w ziemi*. Dla tego *Delam-*

bre sprawiedliwie uważa te trzy kąty, iako trzy *parallaxy*. *Parallaxa* słowo greckie, znaczy to samo, co *odmiana*: iakoż w astronomii znaczy odmianę mieysca z dwóch różnych punktów widzianego.

Nazwiymy iak dotąd, długość srodo-ziemską ciała

niebieskiego		λ
szerokość środoziemską		γ
długość środo-słoneczną (heliocentrique)		l
szerokość środo-słoneczną		p
długość środo-słoneczną ziemi		L
odległość słońca od ziemi		R
odległość planety od słońca	prawdziwą	r
	skróconą	r'
odległość planety od ziemi	prawdziwą	Δ
	skróconą	Δ'

Astronomiia uczy, że kąt w planecie $P = \lambda - l$; kąt w słońcu $S = l - L$; kąt w ziemi Z, albo iego dopełnienie do 180°, $= \lambda - L$.

$$\text{wst}(\lambda - l) : \text{wst}(\lambda - L) = R : r';$$

więc

$$\text{wst}(\lambda - l) = \frac{R}{r'}\text{wst}(\lambda - L) \qquad (1).$$

$\lambda - (\lambda - l) = l$ *długość środo-słoneczna* czyli *heliocentryczna planety*.

$$\text{wst}(l - L) : \text{wst}(\lambda - l) = \Delta' : R;$$

więc

$$\Delta' = R\,\frac{\text{wst}(l - L)}{\text{wst}(\lambda - l)} \qquad (2)$$ *odległość skrócona planety od ziemi.*

Na fig. 9 Tablicy II niech P' wyraża mieysce planety lub komety na swoiey własney drodze, P iego mieysce przeniesione na ekliptykę przez pionową $P'P$; S mieysce słońca, Z mieysce ziemi; będzie $SP'=r$, $SP=r'$; $ZP'=\Delta$; $ZP=\Delta'$; $P'SP=p$, $P'ZP=\gamma$; skąd mamy następuiące zrównania:

$$r'=r\,\text{dost}\,p;\quad \Delta'=\Delta\,\text{dost}\,\gamma \qquad (3)$$

$$\text{sty}\,p=\frac{P'P}{r};\quad \text{sty}\,\gamma=\frac{P'P}{\Delta}:$$

a zatém

$$\frac{\text{sty}\,p}{\text{sty}\,\gamma}=\frac{\Delta'}{r'},\quad \text{sty}\,p=\frac{\Delta'}{r'}\text{sty}\,\gamma,\quad \text{sty}\,\gamma=\frac{r'}{\Delta'}\text{sty}\,p \qquad (4).$$

Zrównania (1), (2), (3), (4), rozwięzuią zadanie: iak maiąc mieysce planety lub komety do środka ziemi odniesione, czyli środo-ziemskie, zamienić ie na mieysce heliocentryczne czyli środo-słoneczne; zrównanie bowiem (1) daie długość środo-słoneczną; zrównanie (2) daie odległość skróconą planety od ziemi: zrównanie (3) uczy, iak z odległości skróconey wynaleśdź odległość prawdziwą, albo z prawdziwey skróconą: zrównanie (4) iak szerokość środo-ziemską zamienić na środo-słoneczną. Zgoła przez te zrównania, gdzie długość ziemi = długości słońca $+180°$, uważa się iak znana; od położenia planety względem środka ziemi, przychodzimy do iego położenia względem środka słońca.

Przykład. Dnia 3 września roku 1818 n. s. *Saturn* miał długość środo-ziemską $\lambda=11^{s}\ 15°\ 9'\ 8'',8$ szerokość środo-ziemską $\gamma=2°\ 12'\ 33'',6$ południową. Długość ziemi była $L=11^{s}\ 10°\ 46'\ 13''$. Odległość ziemi od słońca $R=1{,}00796$, l. $R=0{,}0034459$. Odległość skrócona Saturna od słońca $r'=9{,}6636$, l. $r'=0{,}9851402$. Jakież było iego położenie względem środka słońca? $\lambda-L=4°\ 22'\ 55'',8$

$$\begin{aligned} \text{l. } R &= 0{,}0034459 + \\ \text{l. wst}(\lambda - L) &= 8{,}8831482 + \\ \text{c. l. } r' &= 9{,}0148598 + \\ \hline \text{l. wst}(\lambda - l) &= 7{,}9014539 + \quad \lambda - l = 27'\ 24''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda - (\lambda - l) &= 11^{s.}\ 14^\circ\ 41'\ 44'',8 = l, \text{ dług. helioc. } \textit{Saturna}. \\ & \ 11\ \ 10\ \ 46\ \ 13 \quad = L;\ l - L = 3^\circ\ 55'\ 31'',8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l. } R &= 0{,}0034459 + \\ \text{l. wst}(l - L) &= 8{,}8354387 + \\ \text{c. l. wst}(\lambda - l) &= 2{,}0985461 + \\ \hline \text{l. } \Delta' &= 0{,}9374307 + \end{aligned}$$

$\Delta' = 8{,}66582$ odległość skrócona saturna od ziemi.

$$\begin{aligned} \text{l. } \Delta' &= 0{,}9374307 + \\ \text{l. sty}\,\gamma &= 8{,}5863537 - \\ \text{c. l. } r' &= 9{,}0148598 + \\ \text{l. sty}\,p &= 8{,}5386442 - \end{aligned}$$

$p = 1^\circ\ 58'\ 47''$ szerokość heliocentryczna południowa saturna.

$$\begin{aligned} \text{l. } r' &= 0{,}9851402 + \\ \text{l. dost}\,p &= 9{,}9997407 + \\ \hline \text{l. } r &= 0{,}9853995 + \end{aligned}$$

$r = 9{,}6694$ odległość prawdziwa saturna od słońca.

Zamiana mieysc środo-słonecznych na środo-ziemskie.

fig. 10. § 33. Wystawmy sobie na fig 10. (Tablica II) w punkcie Z planetę lub kometę na własney iego drodze. Niech płaszczyzna tablicy wyraża płaszczyznę ekliptyki, na którą przenieśmy planetę przez liniią ZC pionową na ekliptykę. Niech S wyraża mieysce słońca: T mieysce ziemi. Pomyślmy sobie dwie ieszcze płaszczyzny przez słońce przechodzące, i tam

się przecinaiące pionowo, i obie pionowe na ekliptykę: z których iedna przecina ekliptykę w linii *SN*, druga w linii *SR*. Równolegle do tych dwóch płaszczyzn poprowadźmy podobne im przez środek ziemi *T*. Położenie więc planety lub komety *Z* względem słońca, wyrazi się przez trzy współuszykowane pionowe *ZC*, *CP*, *PS*: względem zaś ziemi toż położenie opisze się przez trzy współuszykowane *ZC*, *Cp*, *Tp*: pierwsze, dadzą nam mieysce planety *środo-słoneczne*, czyli *heliocentryczne*; drugie środoziemskie czyli *geocentryczne*. Żeby zaś te współuszykowane wyrazić przez nazwiska zwyczayne astronomiczne; pomyślmy sobie ieszcze iednę płaszczyznę także na ekliptykę pionową przechodzącą przez słońce *S*, i przez punkta równo-nocne ♈♎: bo od iednego z tych punktów to iest ♈ rachuią się ciał niebieskich długości: będzie więc liniia *S*♈ początkiem długości środo-słonecznych. Aże odległość gwiazd stałych, do których rozciąga się ekliptyka, iest względem całego świata słonecznego niezmierna, i prawie nieskończona; więc podobna płaszczyzna przez środek ziemi równolegle do tamtey poprowadzona przeydzie także przez punkta równo-nocne ♎*T*♈: i liniia *T*♈ będzie początkiem długości środo-ziemskich. Długość więc środo-słoneczna płaszczyzny *SN*, iest kąt ♈$SN = E$: takaż długość płaszczyzny $SR = 90° + E$, długość środosłoneczna planety *C* iest CS♈$= l$; szerokość środo-słoneczna *C*, iest $ZSC = p$; długość środo-słoneczna ziemi TS♈$= L$: długość środo-ziemska tegoż planety *C*, iest kąt CT♈$= \lambda$; szerokość środo-ziemska *C* iest $ZTC = \gamma$; $ST = R$, $SZ = r$; $CS = r'$ $TZ = \Delta$; $CT = \Delta'$ podług nazwisk w § 32 wprowadzonych. Oznaczmy teraz wartość współ-uszykowanych tak środosłonecznych *ZC*, *CP*, *PS*; iako środo-ziemskich *ZC*, *Cp*, *pT*: tudzież *SQ*, *QT*.

$$SP = SC.\text{dost}\ CSN = r'\text{dost}\,(l - E);$$
$$PC = SC.\text{wst}\ CSN = r'\ \text{wst}\,(l - E)$$
$$SQ = ST.\text{dost}\ TSQ = R.\text{dost}\,(L - E);$$
$$TQ = R.\text{wst}\,(L - E); \quad Tp = \Delta'\ \text{dost}(\lambda - E);$$
$$pC = \Delta'\text{wst}\,(\lambda - E).$$

Między położeniem środo-słonecznem i środo-ziemskiem mamy zrównania

$$Tp = SP - SQ, \quad pC = PC - QT;$$

to iest

$$\left.\begin{aligned} \Delta'\text{dost}(\lambda - E) &= r'\text{dost}(l - E) - R\text{dost}(L - E) \\ \Delta'\ \text{wst}(\lambda - E) &= r'\ \text{wst}(l - E) - R\ \text{wst}(L - E) \end{aligned}\right\} \quad (\text{N})$$

Z tych dwóch zrównań rozdzielonych przez siebie wypada następuiące;

$$\text{sty}\,(\lambda - E) = \frac{r'\ \text{wst}(l - E) - R.\text{wst}\,(L - E)}{r'\text{dost}(l - E) - R.\text{dost}(L - E)} \qquad (\text{q}).$$

Ponieważ poprowadzenie płaszczyzny SN, a zatem kąt E zależy od upodobania; położmy $E = \frac{1}{2}(l + L)$; zrównanie (q) zamieni się na następuiące:

$$\text{sty}\,[\lambda - \tfrac{1}{2}(l + L)] = \frac{r'\text{wst}\,\frac{1}{2}(l - L) - R.\text{wst}\,\frac{1}{2}(L - l)}{r'\text{dost}\,\frac{1}{2}(l - L) - R.\text{dost}\,\frac{1}{2}(L - l)}$$
$$= \frac{r' + R}{r' - R}\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(l - L) \qquad (\text{q}'):$$

gdyż $-\text{wst}\,\frac{1}{2}(L - l) = +\ \text{wst}\,\frac{1}{2}(l - L)$;
$-\ \text{dost}\,\frac{1}{2}(L - l) = -\ \text{dost}\,\frac{1}{2}(l - L)$.

Położmy teraz $\frac{R}{r'} = \text{sty}\,\psi$; ponieważ styczna $45° = 1$;
$\frac{r' + R}{r' - R} = \text{sty}\,(45° + \psi)$ § 13. II.

więc

$$\text{sty}\,[\lambda - \tfrac{1}{2}(l + L)] = \text{sty}\,\tfrac{1}{2}(l - L)\,\text{sty}\,(45^\circ + \psi) \qquad (q''):$$

że zaś l, L, są ilości znane, a niewiadomą λ; więc $\lambda - \frac{1}{2}(l + L) + \frac{1}{2}(l + L) = \lambda$ długość środoziemska. Ze zrównań ieszcze (N.) wypada

$$\Delta' = \frac{r'\,\text{dost}\,\frac{1}{2}(l - L) - R.\text{dost}\,\frac{1}{2}(L - l)}{\text{dost}\,[\lambda - \frac{1}{2}(l + L)]}$$

$$= \frac{(r' - R)\,\text{dost}\,\frac{1}{2}(l - L)}{\text{dost}\,[\lambda - \frac{1}{2}(l + L)]} \qquad (h);$$

albo

$$\Delta' = \frac{r'\,\text{wst}\,\frac{1}{2}(l - L) - R.\text{wst}\,\frac{1}{2}(L - l)}{\text{wst}\,[\lambda - \frac{1}{2}(l + L)]}$$

$$= \frac{(r' + R)\,\text{wst}\,\frac{1}{2}(l - L)}{\text{wst}\,[\lambda - \frac{1}{2}(l + L)]}. \qquad (h')$$

Zrównanie (4) § 32 daie na szerokość środo-ziemską

$$\text{sty}\,\gamma = \frac{r'}{\Delta'}\,\text{sty}\,p \qquad (i).$$

Ze znaney więc długości l, i szerokości p środosłoneczney, zrównanie (q″) daie długość środo-ziemską λ: zrównanie (h) albo (h′) odległość skróconą planety od ziemi: zrównanie (i), szerokość środo-ziemską γ: i zadanie iest zupełnie rozwiązane.

Przykład. Na dzień 3 września 1818 roku n. s. Tablice *Saturna* daią iego długość środo-słoneczną $l = 11^{s}\ 14^\circ\ 41'\ 44'',8$; iego szerokość południową $p = 1^\circ\ 58'\ 47''$; iego odległość prawdziwą od słońca $r = 9{,}6694$. Tablice zaś słońca daią długość ziemi $L = 11^{s}\ 10^\circ\ 46'\ 12''$; odległość ziemi od słońca $R = 1{,}00796$, l. $R = 0{,}0034459$. Jakaż była natenczas środo-ziemska długość λ, szerokość γ Saturna, iego odległość skrócona od słońca r', i od ziemi Δ'?

$$\tfrac{1}{2}(l+L) = 11^{s.}\ 12^\circ\ 43'\ 58''9,\quad \tfrac{1}{2}(l-L) = 1^\circ\ 57'\ 45'',9$$

$$\begin{array}{rl} \text{l. } r = & 0{,}9853995 + \\ \text{l. dost } p = & 9{,}9997407 + \\ \hline \text{l. } r' = & 0{,}9851402 + \\ r' = & 9{,}6636 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{l. } R = & 0{,}0034459 + \\ \text{l. } r' = & 0{,}9851402 + \\ \hline \text{l. sty } \psi = & 9{,}0183057 + \\ \psi = & 5^\circ\ 57'\ 17''. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{l. sty}(45^\circ + \psi) = & 0{,}0909292 + \\ \text{l. sty } \tfrac{1}{2}(l - L) = & 8{,}5349184 + \\ \hline \text{l. sty } [\lambda - \tfrac{1}{2}(l+L)] = & 8{,}6258476 + \\ \lambda - \tfrac{1}{2}(l+L) = & 2^\circ\ 25'\ 10''. \end{array}$$

$$\lambda = 11^{s.}\ 15^\circ\ 9'\ 8'',9; \qquad R + r' = 10{,}67156.$$

$$\begin{array}{rl} \text{l. } (R + r') = & 1{,}0282279 + \\ \text{l. wst } \tfrac{1}{2}(l - L) = & 8{,}5346636 + \\ \text{c. l. wst } (2^\circ\ 25'\ 10'') = & 1{,}3745361 + \\ \hline \text{l. } \Delta' = & 0{,}9374276 + \qquad 8{,}6658 = \Delta'. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{l. } r' = & 0{,}9851402 + \\ \text{l. sty } p = & 8{,}5386442 - \\ \text{c. l. } \Delta' = & 9{,}0625724 + \\ \hline \text{l. sty } \gamma = & 8{,}5863568 - \\ \gamma = & 2^\circ\ 12'\ 33'',6 \ \textit{szerokość południ.} \end{array}$$

Sposób dopiero wyłożony zamieniania mieysc środo-ziemskich na środo-słoneczne, i na odwrót środo-słonecznych na środo-ziemskie, iest ze wszystkich w astronomii dotąd znanych, nayprostszy i naykrótszy. Z długości i szerokości środo-ziemskich, za pomocą zrównań dosyć prostych w § 28 podanych, łatwo iest wyrachować wznoszenie się proste i zboczenie planet. Wszelako *analisci* szukali zrównań prowadzących prosto od mieysc środo-słonecznych do wznoszenia się prostego i zboczenia, nie przechodząc przez długość i szerokość środoziemską: iak to widzieć można *Conn: des tems l'an 1819* w zrównaniach podanych przez *Puissant* k. 235, *Delambra* k. 278. Ta atoli sztuka wyciąga rachunków dłuższych iak te, ktore się dopiero wyłożyły: i dla tego ią iako astronomii praktyczney nieprzydatną, opuściłem. Mamy wiele w astronomii przykładów, że *analiza* prowadzi częstokroć do rachunków długich i zawiłych tam, gdzie rachunek trygonometryczny iest krotki i prosty.

Zrównania (N), z których wypadł teraźnieyszy rachunek, podał *Gauss. Theor. mot.* k. 58 bez żadnego dowodu; ten dowód wyciągnąłem tu ze sposobu powszechnie używanego w geometryi liniy krzywych i w mechanice; wprowadzonego przez *Leonarda Eulera*, a szczęśliwie użytego od *Delagrange* w ważnem swoiém piśmie o zaćmieniach podaném w Efemeridach Berlinskich na rok 1782 k. 17. Rozlegleysze ieszcze pożytki tego sposobu pokażą się zaraz.

IV. Odnoszenie ciał niebieskich bliskich ziemi, do iey środka lub powierzchni.

Parallaxa długości i szerokosci.

§ 34. Te same zrównania (N) przystosowane do ciał niebieskich bliskich ziemi, iakie są xiężyc i planety niższe, dadzą nam ich położenie *prawdziwe*, to iest widziane ze środka ziemi: i położenie *pozorne*, widziane z iakiegokolwiek punktu powierzchni ziemskiey. Niech na tey samey figurze 10. Tabl. II, *S* wyraża środek ziemi: *H* punkt iakikolwiek iéy powierzchni, który przez liniią *HT* równoległą *ZC* przenieśmy na ekliptykę przez środek ziemi przechodzącą: więc $SW=R$, będzie promień ziemi do punktu W; ST tenże promień skrócony R': WST iest szerokością *zenith* $=s$: $TS\Upsilon$ iest długością *zenith* czyli *nonagesimi* $=N$ podług § 31; a zatém R dost $s=R'$. Niech Z wyraża mieysce n. p. xiężyca ziemskiego na swoiey drodze: ZC iego przeniesienie na ekliptykę. Jeżeli $SZ=r$, będzie ZSC szerokością prawdziwą xiężyca $=p$; r dost $p=r'$: $CS\Upsilon$ długością prawdziwą xiężyca $=D$; $CT\Upsilon$ iego długością pozorną z wierzchu ziemi widzianą $=D'$; ZWg iest szerokością pozorną xiężyca z wierzchu ziemi widzianą $=p'$; WZ iest odległością xiężyca z wierzchu ziemi widzianą $=\Delta$; Wg iego odległością skróconą $=\Delta'$; i Δ dost $p'=\Delta'$ $=Wg=TC$. Kąty więc i łuki w zrównaniach (N) przełożone na teraźnieysze znaczenie będą $l=D$, $\lambda=D'$, $L=N$, i współ-uszykowane ZC, CP, SP dadzą położenie prawdziwe gwiazdy Z. Współuszykowane znowu WT, TQ, SQ dadzą położenie zenith, czyli mieysca W powierzchni ziemskiey. $ZC=r$ wst p; $CP=r$dost$p$wst$D$; $SP=r$dost$p$dost$D$; $WT=R$wst$s$; $TQ=R$dost$s$wst$N$; $SQ=R$dost$s$dost$N$: $Zg=\Delta$ wst p'. Zrównania (N) § 33 po wprowadzeniu teraźnieyszych wartości łuków i kątów, zamienią się na

$$\left.\begin{aligned}\Delta\text{dost}p'\text{dost}(D'-E) &= r\text{dost}p.\text{dost}(D-E)-R.\text{dost}s.\text{dost}(N-E)\\ \Delta\,\text{dost}p'.\text{wst}(D'-E) &= r.\text{dost}p.\text{wst}(D-E)-R.\text{dost}s.\text{wst}(N-E)\end{aligned}\right\}\quad(\text{N}')$$

a rozdzieliwszy drugie przez pierwsze, i wszystko potém przez r; pomnąc z astronomii, że $\frac{R}{r}=\text{wst}\pi$, gdzie π wyraża parallaxę horyzontalną; otrzymamy

$$\text{sty}(D' - E) = \frac{\text{dost}\, p.\text{wst}(D - E) - \text{wst}\, \pi.\text{dost}\, s.\text{wst}(N - E)}{\text{dost}\, p.\text{dost}(D - E) - \text{wst}\pi.\text{dost}\, s.\text{dost}(N - E)} \quad (\text{N}'')$$

$$\frac{\Delta}{r}\text{dost}\, p' = \frac{\text{dost}\, p.\text{dost}(D - E) - \text{wst}\, \pi.\text{dost}\, s.\text{dost}(N - E)}{\text{dost}(D' - E)}$$
$$= \frac{\text{dost}\, p.\text{wst}(D - E) - \text{wst}\, \pi.\text{dost}\, s.\text{wst}(N - E)}{\text{wst}(D' - E)} \quad (\text{Q})$$

$ZC - Zg = gC = WT$; to iest $r\,\text{wst}\,p - \Delta\,\text{wst}\,p' = R\,\text{wst}\,s$: skąd

$$\frac{\Delta}{r}\,\text{wst}\, p' = \text{wst}\, p - \text{wst}\, \pi.\text{wst}\, s;$$

przeto

$$\text{sty}\, p' = \frac{(\text{wst}\, p - \text{wst}\, \pi.\text{wst}\, s)\text{dost}(D' - E)}{\text{dost}\, p.\text{dost}(D - E) - \text{wst}\pi.\text{dost}\, s.\text{dost}(N - E)} \quad \text{albo}$$
$$= \frac{(\text{wst}\, p. - \text{wst}\, \pi.\text{wst}\, s)\text{wst}(D' - E)}{\text{dost}\, p.\text{wst}(D - E) - \text{wst}\, \pi.\text{dost}\, s.\text{wst}(N - E)} \quad (\text{Q}')$$

Zrównanie (N″) daie długość D' pozorną gwiazdy, przez długość prawdziwą D: zrównanie (Q′) daie szerokość pozorną p', przez prawdziwą p. Rożnica pierwszych daie parallaxę długości $D' - D = \Pi$: różnica drugich daie parallaxę szerokości $p - p' = \varrho$.

Że zaś prowadzenie płaszczyzn pionowych, na których leżą współ-uszykowane, zawisło od upodobania; dla tego możęmy SN (fig. 10) prowadzić po rozmaitych mieyscach nieba: albo co na iedno wychodzi, na kąt E robić różne przypuszczenia. Niech ta liniia SN przechodzi przez punkta równonocne: więc $E = 0$; w takim przypadku

$$\text{sty}\, D' = \frac{\text{dost}\, p.\text{wst}\, D - \text{wst}\, \pi.\text{dost}\, s.\text{wst}\, N}{\text{dost}\, p.\text{dost}\, D - \text{wst}\pi.\text{dost}\, s.\text{dost}\, N} \quad (\text{I})$$

$$\text{sty}\,p' = \frac{(\text{wst}\,p - \text{wst}\,\pi.\text{wst}\,s)\text{dost}\,D'}{\text{dost}\,p.\text{dost}\,D - \text{wst}\,\pi.\text{dost}\,s.\text{dost}\,N} \quad \text{(II)}.$$

Te dwa zrównania (I), (II) na rachunek parallaxy długości i szerokości podał *Olbers* w efemerydach berlińskich na rok 1808 k. 196, i na rok 1811 k. 97.

Jeżeli położymy $E = D$, to iest oś SN poprowadzimy przez S, C, mieysce prawdziwey długości gwiazdy; zrównania (N″), (Q′) staną się

$$\text{sty}(D' - D) = \frac{\text{wst}\,\pi.\text{dost}\,s\;\text{wst}(D - N)}{\text{dost}\,p - \text{wst}\,\pi.\text{dost}\,s.\text{dost}(D - N)} \quad \text{(III)}.$$

$$\text{sty}\,p' = \frac{(\text{wst}\,p - \text{wst}\,\pi.\text{wst}\,s)\text{dost}(D' - D)}{\text{dost}\,p - \text{wst}\,\pi.\text{dost}\,s.\text{dost}(N - D)} \quad \text{(IV)}.$$

Zrównania (III), (IV) podał *Lexell* w Efem. berlińskich na rok 1777 k. 152. Jeżeli rozdzielimy zrównanie (III) przez dost$p$, i dla skrócenia połozymy $\frac{\text{wst}\,\pi.\text{dost}\,s}{\text{dost}\,p} = m$; wypadnie

$$\text{sty}(D' - D) = \frac{m\,\text{wst}(D - N)}{1 - m\,\text{dost}(D - N)}:$$

a zatém § 18

$$\Pi = D' - D = \frac{m\,\text{wst}(D - N)}{\text{wst}\,1''} + \frac{m^2\,\text{wst}\,2(D - N)}{\text{wst}\,2''} + \frac{m^3\,\text{wst}\,3(D - N)}{\text{wst}\,3''} \text{ itd. (V)}$$

To piękne i ważne zrównanie na rachowanie parallaxy długości, podał *Delambre* w roku 1789 i użył go do parallaxy *Urana*. Tego znacznie maleiącego szeregu trzy terminy pierwsze do rachowania łatwe, daią wypadki barzo do prawdy zbliżone, iak to zobaczymy w przykładzie

Poprowadźmy wreście oś SN przez zenith mieysca W powierzchni ziemskiey, czyli zróbmy $E = N$; zrówrania (N″), (Q′) zamienią się na

$$\text{sty}(D'-N)=\frac{\text{dost}\,p.\text{wst}(D-N)}{\text{dost}\,p.\text{dost}(D-N)-\text{wst}\,\pi.\text{dost}\,s} \quad \text{(VI)}.$$

$$\text{dosty}(D'-N)=\text{dosty}(D-N)-\frac{\text{wst}\,\pi.\text{dost}\,s}{\text{dost}\,p.\text{wst}(D-N)} \quad \text{(VII)}.$$

$$\begin{aligned}\text{sty}\,p'&=\frac{(\text{wst}\,p-\text{wst}\,\pi.\text{wst}\,s)\text{dost}(D'-N)}{\text{dost}\,p.\text{dost}(D-N)-\text{wst}\,\pi.\text{dost}\,s}\\&=\frac{(\text{wst}\,p-\text{wst}\,\pi.\text{wst}\,s)\text{wst}(D'-N)}{\text{dost}\,p.\text{wst}(D-N)}\end{aligned} \quad \text{(VIII)}.$$

Jeżeli ze zrównania (VI) wyciągniemy wartość na dost$(D'-N)$, i tę włożymy w zrównanie (VIII), otrzymamy

$$\begin{aligned}\text{sty}\,p'&=\frac{(\text{wst}\,p-\text{wst}\,\pi.\text{wst}\,s)\text{wst}(D'-N)}{\text{dost}\,p.\text{wst}(D-N)}\\&=\frac{\text{sty}\,p.\text{wst}(D'-N)}{\text{wst}(D-N)}\left\{1-\frac{\text{wst}\,\pi.\text{wst}\,s}{\text{wst}\,p}\right\}\end{aligned} \quad \text{(IX)}.$$

Zrównania (VI), (VIII) i (IX) podał *Lexell*: zrównanie zaś (VII), które iak widzimy iest zrównaniem (VI) *Lexella*, podał *Olbers* w Efem. Berl. 1811 k. 99.

Weźmy ieszcze pod uwagę zrównanie (VII) i połóżmy w niém $\frac{\text{wst}\,\pi.\text{dost}\,s}{\text{dost}\,p}=\text{dost}\,u$; będzie

$$\begin{aligned}\text{dosty}(D'-N)&=\frac{\text{dost}(D-N)-\text{dost}\,u}{\text{wst}(D-N)}\\&=\frac{2\text{wst}\tfrac{1}{2}(D+u-N)\text{wst}\tfrac{1}{2}(N+u-D)}{\text{wst}(D-N)}\end{aligned} \quad \text{(X)}.$$

To zrównanie iest nayprostsze, i naywygodnieysze do ścisłego rachowania parallaxy długości.

Rozważmy ieszcze zrównanie (VIII)

$$\text{sty}\, p' = \frac{\text{wst}(D' - N)}{\text{wst}(D - N)} \left\{ \text{sty}\, p - \frac{\text{wst}\, \pi . \text{wst}\, s}{\text{dost}\, p} \right\}$$

Zamiast szerokości p, weźmy iey dopełnienie do 90°, czyli odległość gwiazdy od bieguna ekliptyki: to iest $p = 90° - \delta$; $p' = 90° - \delta'$, a zatém $p - p' = \delta' - \delta = \varrho$, $D' - D = \Pi$, będzie więc $\text{sty}\, p' = \text{dosty}\, \delta'$, $\text{sty}\, p = \text{dosty}\, \delta$: a zatém

$$\text{dosty}\, \delta' = \frac{\text{wst}(D' - N)}{\text{wst}(D - N)} \left\{ \text{dosty}\, \delta - \frac{\text{wst}\, \pi . \text{wst}\, s}{\text{wst}\, \delta} \right\} \quad (\text{VIII}2).$$

$$\text{dosty}\, \delta = \frac{\text{wst}(D - N)}{\text{wst}(D' - N)} \text{dosty}\, \delta' + \frac{\text{wst}\, \pi . \text{wst}\, s}{\text{wst}\, \delta};$$

$$\text{dosty}\, \delta - \text{dosty}\, \delta' + \text{dosty}\, \delta' = \frac{\text{wst}(D - N)}{\text{wst}(D' - N)} \text{dosty}\, \delta' + \frac{\text{wst}\, \pi . \text{wst}\, s}{\text{wst}\, \delta}; \quad \text{dosty}\, \delta - \text{dosty}\, \delta' = \frac{\text{wst}\delta' \text{dost}\delta - \text{dost}\delta' \text{wst}\delta}{\text{wst}\, \delta . \text{wst}\, \delta'}$$

$$= \frac{\text{wst}(D - N) - \text{wst}(D' - N)}{\text{wst}(D' - N)} \text{dosty}\, \delta' + \frac{\text{wst}\, \pi . \text{wst}\, s}{\text{wst}\, \delta};$$

$\text{wst}\, (\delta' - \delta) = \text{wst}\, \pi . \text{wst}\, s\, [\text{wst}\, \delta' - \text{sty}\, x . \text{dost}\, \delta']$, gdzie $\text{sty}\, x = \dfrac{2\, \text{dost}(D - N + \frac{1}{2}\Pi) . \text{wst}\, \frac{1}{2}\Pi . \text{wst}\, \delta}{\text{wst}\, \pi . \text{wst}\, s . \text{wst}(D' - N)}$.

$$\text{wst}(\delta' - \delta) = \frac{\text{wst}\, \pi . \text{wst}\, s}{\text{dost}\, x} \text{wst}\, (\delta' - x). \qquad (\text{XI}).$$

A ponieważ $\delta' - \delta = \varrho$, $\delta' = \delta + \varrho$, więc

$$\text{wst}\, \varrho = \frac{\text{wst}\, \pi . \text{wst}\, s}{\text{dost}\, x} [\text{wst}\, (\delta - x) \text{dost}\, \varrho - \text{dost}\, (\delta - x)\, \text{wst}\, \varrho]:$$

rozdzieliwszy wszystko przez $\text{dost}\, \varrho$, i rozwiązawszy zrównanie, otrzymamy kładąc dla skrócenia $\dfrac{\text{wst}\pi . \text{wst}s}{\text{dost}\, x} = m$

$$\text{sty.}\, \varrho = \frac{m . \text{wst}(\delta - x)}{1 - m . \text{dost}(\delta - x)} \qquad (\text{XII}):$$

a zatém podług § 18

$$\varrho = \frac{m.\text{wst}(\delta - x)}{\text{wst}\,1''} + \frac{m^2\text{wst}\,2(\delta - x)}{\text{wst}\,2''} + \frac{m^3\text{wst}\,3(\delta - x)}{\text{wst}\,3''} \text{ etc. (XIII).}$$

Jeżeli znamy δ', to iest odległość pozorną gwiazdy od bieguna ekliptyki; użyiemy zrównania (XI): ieżeli nie znamy δ', ale tylko δ, to iest odległość od bieguna prawdziwą; użyiemy zrównynia (XII) albo szeregu (XIII) znacznie maleiącego: którego trzy pierwsze terminy, dadzą wartość barzo bliską prawdy. Te trzy ostatnie zrównania wyciągnął *Delambre* ze zrównania *Lexella*, i używa ich do rachowania *parallaxy szerokości.*

Potrafiliśmy więc z iednego początku, to iest ze zrównań (N) wyciągnąć wszystkie znakomitsze zrównania używane od astronomów, do rachowania parallaxy długości i szerokości, i ściśle ich dowieśdź: które róznie od różnych, nayczęściey przez długi i zawiły rachunek są dowodzone: a które nam tak prosto, z trzech wartości na kąt E wprowadzonych wypadły.

Rachunek *parallax* iest ledwo nie nayważnieyszy w astronomii sferyczney; bo od niego zależą odległości planet od ziemi i od słońca, a zatem znaiomość całego świata słonecznego: zależy ieszcze od niego rachunek zaćmień słońca przez xiężyc ziemski, i przez planety niższe; zasłonienie gwiazd przez xiężyc, a zatém wielka massa fundamentalnych astronomicznych wiadomości. Z czego kazdy ocenić może ważność tey pracy, którą tu obszerniey trzeba było wyłożyć.

Obiaśniymy to wszystko przykładem. D. 7 września roku 1820 n. s. o godzinie 2 29′ 23″ czasu prawdziwego w Wilnie, będzie długość słońca $5^s\ 14° 45' 7'',13$ pochyłość ekliptyki $\omega = 23° 27' 55'',7$; długość prawdziwa xiężyca 5^{s} 14° $16'$ $43'',2 = 164^\circ$ $16'$ $43'',2 = D$: szerokość prawdziwa xiężyca północna $= 47' 27'',22 = p$: parallaxa horizontalna słońca $8'',74$; xiężyca $53'$ $55'',4$ pod równikiem; ich różnica $\pi = 53'$ $46'',66$, na szerokość zaś Wilna toż $\pi = 53'$ $40''$. Wynaleźliśmy już pod § 31 na ten sam czas $M = 203^\circ$ $18'$ $24'',69$; $N = 167^\circ$ $58'$ $12''$; $s = 56^\circ$ $58'$ $23''$. Jakaż na ówczas będzie parallaxa długości i szerokości xiężyca? i czyli zaćmienie słońca już się natenczas zaczęło lub nie? Rachujmy wszystkie zrównania, żeby wiedziec, czy ich wypadki są zgodne lub nie?

Zrównanie (I).

l. dost $p = 9{,}9999586+$	l. wst $\pi = 8{,}1934355+$
l. wst $D = 9{,}4329034+$	l. dost $s = 9{,}7364227+$
l. (1) $9{,}4328620+$	l. wst $N = 9{,}3189473+$
(1) $0{,}270933+$	l. (2) $7{,}2488055+$
(2) $+0{,}001773$	(2) $+0{,}001773$
(1) $-$ (2) $= 0{,}269160+$ Licznik (I).	

l. dost $p = 9{,}9999586+$	l. wst π. dost $s = 7{,}9298582+$
l. dost $D = 9{,}9834418-$	l. dost $N = 9{,}9903560-$
l. (1) m $9{,}9834004-$	l. (2) m $7{,}9202142-$
(1) $0{,}96250-$	(2) $0{,}008322-$
(2) $0{,}008322-$	
(1) $-$ (2) $- 0{,}954178$ Mianownik spolny.	

l. $0{,}26916 = 9{,}4300105+$
l. $0{,}954178 = 9{,}9796295-$ log. spolny.
l. sty $D' = 9{,}4503810-$

$D' = 180^\circ - (15^\circ 45' 10'',7) = 164^\circ 14' 49'',3$ dł. poz.

$D' - D = -(1'$ $53'',9)$ parallaxa długości.

Zrównanie (II).

l. wst $p = 8{,}1399821 +$
l. dost $D' = 9{,}9833742 -$
l. (1) $p' = 8{,}1233563 -$

(1) $p' = 0{,}0132848 -$
(2) $p' = 0{,}0125970 -$
(1) p' − (2) $p' = 0{,}0006878 -$

l. wst $\pi = 8{,}1934355 +$
l. wst $s = 9{,}9234587 +$
l. dost $D' = 9{,}9833742 -$
l. (2) $p' = 8{,}1002681 -$

(2) $p' = 0{,}0125970 -$

l. $0{,}0006878 = 6{,}8374622 -$
l. $0{,}954178 = 9{,}9796295 -$
l. sty $p' = 6{,}8578327 +$

$p' = 2'\ 28'',6$ szerokość pozorna północna.
$p' - p = -(44'\ 58'',62)$ parallaxa szerokości.

Zrównanie (III).

l. wst π.dost $s = 7{,}9298582 +$
l. dost $(N - D) = 9{,}9990981$
l. (1) $7{,}9289563$

dost $p = 0{,}999990$
(1) $0{,}008490$
dost p − (1) $= 0{,}991500$

l. wst π.dost $s = 7{,}9298582 +$
l. wst$(N - D) = 8{,}8087601 +$
l. licz. $= 6{,}7386183 +$
l. $0{,}99150 = 9{,}9962927 +$ spólny.
l. sty$(D' - D) = 6{,}7423256$

$D' - D = -(1'\ 53'',9)$.

Zrównanie (IV).

l. wst $p = 8{,}1399821 +$
l. dost$(D' - D) = 9{,}9999999 +$
l. (1) $8{,}1399820$

(1) $0{,}013803$
(2) $0{,}013088$
(1) — (2) $0{,}000715$

l. wst π.wst $s = 8{,}1168942 +$
l. dost$(D' - D) = 9{,}9999999 +$
l. (2) $8{,}1168941$

(2) $0{,}013088$

$$\text{l. } 0{,}000715 = 6{,}8543060$$
$$\text{l. } 0{,}9915 \quad = 9{,}9962927$$
$$\text{l. sty } p' = 6{,}8580133 \qquad p' = 2'\ 28'',7.$$

Zrównanie (V) *szereg.*

$N - D = 3°\ 41'\ 28'',8$; $2(N - D) = 7°\ 22'\ 57'',6$; $3(N - D) = 11°\ 4'\ 26'',4$: a zatém $D - N$ odiemne.

$$\text{l. wst } \pi.\text{dost } s = 7{,}9298582 +$$
$$\text{c. l. dost } p = 0{,}0000414 +$$
$$\text{l. } m = 7{,}9298996 +$$

$$\text{l. m} = 7{,}9298996 +$$
$$\text{l.wst}(D - N) = 8{,}8087601 -$$
$$\text{c. l. wst } 1'' = 5{,}3144251 +$$
$$\text{l. } (1) \quad 2{,}0530848 -$$
$$(1) \quad 113{,}000$$

$$\text{l. m}^2 = 5{,}8597992 +$$
$$\text{l.wst } 2(D - N) = 9{,}1088882 -$$
$$\text{c. l. wst } 2'' = 5{,}0133951 +$$
$$\text{l. } (2) \quad 9{,}9820825 -$$
$$(2) \quad 0{,}959.$$

$$\text{l. m}^3 = 3{,}7896988 +$$
$$\text{l. wst } 3(D - N) = 9{,}2834746 -$$
$$\text{c. l. wst } 3'' = 4{,}8373039 +$$
$$\text{l. } (3) = 7{,}9104773 -$$

$$(1) - 113{,}000$$
$$(2) - \quad 0{,}959$$
$$(3) - \quad 0{,}008$$
$$II = -113{,}967$$
$$= -(1'\ 53'',9)$$

Zrównanie (VI).

$$\text{l. dost } p = 9{,}9999586 +$$
$$\text{l. dost}(D - N) = 9{,}9990981 +$$
$$\text{l. } (1) \quad 9{,}9990567 +$$

$$\text{wst } \pi.\text{dost } s = 0{,}0085086 +$$
$$(1) \quad 0{,}9978300 +$$
$$(2) \quad 0{,}9893214 +$$

$$\text{l. dost} p = 9{,}9999586 +$$
$$\text{l. wst } (D - N) = 8{,}8087601 -$$
$$8{,}8087187 -$$
$$\text{l. } (2) \quad 9{,}9953368 +$$
$$\text{l. sty}(D' - N) = 8{,}8133819 -$$
$$D' - N = -3°\ 43'\ 22'',7$$
$$N - D = \quad 3°\ 41'\ 28'',8$$
$$D' - D = -(1'\ 53'',9).$$

Zrównanie (X).

$$\text{l.wst}\,\pi.\text{dost}\,s = 7{,}9298582 \qquad u = 89^\circ\ 30'\ 44'',8$$
$$\text{c. l. dost}\,p = 0{,}0000414 \qquad \tfrac{1}{2}(u+D-N) = 42^\circ\ 54'\ 38''$$
$$\text{l. dost}\,u = 7{,}9298996 \qquad \tfrac{1}{2}(N+u-D) = 46^\circ\ 36'\ 6'',8$$

$$\text{l. 2 wst}\,\tfrac{1}{2}(D+u-N) = 0{,}1340851+$$
$$\text{l. wst}\,\tfrac{1}{2}(N+u-D) = 9{,}8612936+$$
$$\text{c. l. wst}\,(D-N) = 1{,}1912399-$$
$$\text{l. dosty}(D'-N) = 1{,}1866186-$$
$$D'-N = -(3^\circ\ 43'\ 23'');$$

a zatem

$$D' = 164^\circ\ 14'\ 49''.$$

Zrównanie (VIII).

$$\text{l. wst}\,p = 8{,}1399821+ \qquad \text{l. wst}\,\pi.\text{wst}\,s = 8{,}1168942+$$
$$\text{l. wst}(D'-N) = 8{,}8124712- \qquad \text{l. wst}(D'-N) = 8{,}8124712-$$
$$\text{l. (1)} \quad 6{,}9524533- \qquad \text{l. (2)} \quad 6{,}9293654-$$
$$(1) = -0{,}00089630 \qquad (2) = -0{,}00084989$$

$$\text{l. dost}\,p = 9{,}9999586+ \qquad (1) = -0{,}00089630$$
$$\text{l.wst}(D-N) = 8{,}8087601- \qquad (2) = -0{,}00084989$$
$$\text{l. (3)} \quad 8{,}8087187- \qquad (1)-(2) = -0{,}00004641 = (4)$$

$$\text{l. (4)} = 5{,}6666116-$$
$$\text{c.l. (3)} = 1{,}1912813-$$
$$\text{l. sty}\,p' = 6{,}8578929+ \qquad p' = 2'\ 28'',7.$$

Zrównanie (IX).

$$\text{l. sty}\,p = 8{,}1399711+ \qquad \text{l. wst}\,\pi.\text{wst}\,s = 8{,}1168942+$$
$$\text{l. wst}(D'-N) = 8{,}8124712- \qquad \text{c. l. wst}\,p = 1{,}8600179+$$
$$\text{c.l.wst}(D-N) = 1{,}1912399- \qquad \text{l. (2)} = 9{,}9769121$$
$$\text{l. (1)} \quad 8{,}1436822+ \qquad 1-(2) = 1-0{,}948226$$
$$\text{l. (3)} \quad 8{,}7141117+ \qquad = 0{,}051774 = (3)$$
$$\text{l. sty}\,p' = 6{,}8577939+$$
$$p' = 2'\ 28'',6$$

Z równania (XI), (XII), i (XIII).

$\Pi = -(1'\ 53'',9)$; $\frac{1}{2}\Pi = -56'',95$;

$D - N + \frac{1}{2}\Pi = -(3^\circ\ 42'\ 25'',75)$; $\delta = 89^\circ\ 12'\ 32'',78$.

$$\begin{array}{rl}
\text{l. } 2 = & 0{,}3010300 + \\
\text{l. dost}(D - N + \frac{1}{2}\Pi) = & 9{,}9990903 + \\
\text{l. wst} \frac{1}{2}\Pi = & 6{,}4410653 - \\
\text{l. wst}\ \delta = & 9{,}9999584 + \\
\hline
\text{l. } (1) & 6{,}7411440 -
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{l. wst}\,\pi.\text{wst}\,s = & 8{,}1168942 + \\
\text{l. wst}(D' - N) = & 8{,}8124712 - \\
\hline
\text{l. } (2) & 6{,}9293654 - \\
\text{l. } (1) & 6{,}7411440 - \\
\hline
\text{l. } (1) - \text{l. } (2) = \text{l. sty}\ x = & 9{,}8117786 + \\
x = & 32^\circ\ 57'\ 20'' \\
\delta' - x = & 57^\circ\ 0'\ 11'',4.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{l. wst}\,\pi.\text{wst}\,s = & 8{,}1168942 + \\
\text{l. wst}(\delta' - x) = & 9{,}9236069 + \\
\text{c. l. dost}\,x = & 0{,}0761900 + \\
\hline
\text{l. wst}(\delta' - \delta) = & 8{,}1166911 +
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\delta' - \delta = \varrho = & 44'\ 58'',5 \\
\delta - x = & 56^\circ\ 15'\ 12'',78 \\
2(\delta - x) = & 112^\circ\ 30'\ 25'',56 \\
3(\delta - x) = & 168^\circ\ 45'\ 38'',34
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{l. wst}\,\pi.\text{wst}\,s = & 8{,}1168942 + \\
\text{c. l. dost}\,x = & 0{,}0761900 + \\
\text{l. } m = & 8{,}1930842 +
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{l. } m = & 8.1930842 + \\
\text{l. wst}(\delta - x) = & 9{,}9198643 + \\
\text{c. l. wst } 1'' = & 5{,}3144251 + \\
\hline
\text{l. } (1) = & 3{,}4273736 + \\
(1) = & 2675'',3.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{l. } m^2 = & 6{,}3861684 \\
\text{l. wst } 2(\delta - x) = & 9{,}9655930 \\
\text{c. l. wst } 2'' = & 5{,}0133951 \\
\hline
\text{l. } (2) & 1{,}3651565 \\
(2) = & 23'',182
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{l. } m^3 = & 4{,}5792526 \\
\text{l. wst } 3(\delta - x) = & 9{,}2898297 \\
\text{c. l. wst } 3'' = & 4{,}8373039 \\
\hline
\text{l. } (3) = & 8{,}7063862 \\
(3) = & 0'',0508.
\end{array}$$

(1) + (2) + (3) = 2698″,53 = 44′ 58″,5 = ρ, parallaxa szerokości: skąd $p' = 2'$ 28″,7 szerokość pozorna północna xiężyca.

Widzimy więc z tych rachunków, że wszystkie zrównania pod rozmaitemi postaciami wystawione, i wyrażone przez różne kąty i łuki, daią te same wypadki na parallaxę długości i szerokości xiężyca.

Maiąc teraz na czas dany w Wilnie to iest 2^{g} 29′ 23″ długość prawdziwą słońca 164° 45′ 7″,13; długość pozorną xiężyca 164° 14′ 49″,3; ich różnicę 30′ 17″,83: szerokość pozorną xiężyca 2′ 28″,6, wiemy dwa boki kąt prosty zawieraiące w tróykącie prostokreślnym i prostokątnym. Jednym z tych boków iest różnica długości 30′ 17″,83 = 1817″,83; drugim bokiem szerokość pozorna xiężyca 2′ 28″,6 = 148″,6; więc przeciwprostokątna czyli odległość środków słońca i xiężyca iest 30′ 23″,9 = 1824″. Promień tarczy xiężycowey z tablic iest 14′ 43″,1, powiększywszy go o 7″,5 będzie 14′ 50″,6; promień tarczy słoneczney 15′ 54″,8. Summa tych promieni = 30′ 45″,4, iest odległością środków na początek i koniec zaćmienia. Znaleźliśmy zaś odległość środków na początek zaćmienia 30′ 24″; 30′ 45″,4 − (30′ 24″) = 21″,4, więc już o 21″,4 xiężyc zakroił słońce. Jeżeli powtórzymy ten sam rachunek o 5′ czasu wcześniey, to iest na 2^{g} 24′ 23″, znaydziemy długość prawdziwą słońca 164° 44′ 55: długość prawdziwą xiężyca 164° 14′ 16″; szerokość prawdziwą północną xiężyca 47′ 40″,65, kąt godzinny słońca 36° 5′ 45″, wznoszenie się proste słońca = 165° 57′ 28″,44: a zatém M = 202° 3′ 13″,44;

$N = 166° 59' 7''$; $s = 56° 29' 10''$; a stąd długość pozorną xiężyca $D' = 164° 12' 50''$; szerokość pozorną xiężyca północną $2' 57'',3$: a zatém odległość środków $32' 13'',18$; $32' 13'',18 - (30' 24) = 1' 49'',18 = 109'',18$ o tyle się zbliżyły środki w 5' czasu: zrobimy więc proporcyą $109'',18 : 300'' = 21'',4 : 58'',8$; odciągnąwszy tę ostatnią liczbę od czasu $2^{g.} 29' 23''$; otrzymamy czas prawdziwy na początek zaćmienia w Wilnie $2^{g.} 28' 24'',2$.

Parallaxa wznoszenia się prostego i zboczenia.

§ 35. Z dowiedzionych zrównań na parallaxę długości i szerokości, nie trudno nam teraz będzie wynaleśdź parallaxy na inne położenia, iakie są n. p. względem równika i poziomu. W zrównania nasze wchodzi N, s, to iest długość i szerokość zenith: o których wiemy z § 31, że

$$\text{sty} N = \frac{\text{sty} H . \text{wst} \omega}{\text{dost} M} + \text{dost} \omega . \text{sty} M.$$

$$\text{wst} s = - \text{wst} M . \text{dost} H . \text{wst} \omega + \text{wst} H . \text{dost} \omega.$$

Zniszczmy kąt pochyłości ekliptyki, czyli połóżmy $\omega = 0$, a zatém $\text{wst}\,\omega = 0$, $\text{dost}\,\omega = 1$: natenczas biegun ekliptyki zamieni się na biegun świata, ekliptyka na równika: długość stanie się wznoszeniem się prostém, szerokość zboczeniem: to iest, będzie $D = \alpha$, $D' = \alpha'$; $p = \beta$; $p' = \beta'$; $N = M$; $s = H$: H znaczy tu szerokość mieysca: a zatém zrownania (I), (II) zamienią się na

$$\text{sty}\,\alpha' = \frac{\text{dost}\,\beta . \text{wst}\,\alpha - \text{wst}\,\pi . \text{dost}\,H . \text{wst}\,M}{\text{dost}\,\beta . \text{dost}\,\alpha - \text{wst}\,\pi . \text{dost}\,H . \text{dost}\,M} \quad \text{(XIV)}.$$

$$\text{sty}\,\beta' = \frac{(\text{wst}\,\beta - \text{wst}\,\pi.\text{wst}\,H)\text{dost}\,\alpha'}{\text{dost}\,\beta.\text{dost}\,\alpha - \text{wst}\,\pi.\text{dost}\,H.\text{dost}\,M} \quad (XV).$$

$\alpha' - \alpha$ iest *parallaxą wznoszenia się prostego*; $\beta' - \beta$ *parallaxą zboczenia*. Podał te zrównania *Bessel* w korrespondencyi miesięczney *Zacha* na rok 1806. k. 484. ale pod inną postacią, i bez żadnego dowodu. Są one wygodne do rachowania zasłonień gwiazd przez xiężyc. Nie trzeba bowiem do tego rachunku ani długości ani szerokości tak gwiazdy, iako zenith mieysca. *Bessel* wprowadził długość i szerokość xiężyca iako daną z tablic, a zatém u niego zamiast α, β, wchodzi p, D; to iest nazwawszy

$\text{sty}\,\psi = \text{dosty}\,p.\text{wst}\,D = \frac{\text{wst}\,D}{\text{sty}\,p}$; *Bessel* podał

$$\text{sty}\,\alpha' = \frac{\frac{\text{wst}\,p}{\text{dost}\,\psi}\,\text{wst}(\psi - \omega) - \text{wst}\,\pi.\text{wst}\,M.\text{dost}\,H.}{\text{dost}\,p.\text{dost}\,D - \text{wst}\,\pi.\text{dost}\,M.\text{dost}\,H}$$

$$\text{sty}\,\beta' = \frac{\left\{\frac{\text{wst}\,p}{\text{dost}\,\psi}\text{dost}(\psi - \omega) - \text{wst}\,\pi.\text{wst}\,H\right\}\text{dost}\,\alpha'}{\text{dost}\,p.\text{dost}\,D - \text{wst}\,\pi.\text{dost}\,M.\text{dost}\,H}$$

które zamienią się na zrównania (XIV), (XV), położywszy $\omega = 0$, $p = \beta$, $D = \alpha$, i ieżeli w zrównania (XIV), (XV), wprowadzimy p, D, zamiast α, β, a to za pomocą dowiedzionych w §§ 29, 28 wartości $\text{dost}\,D.\text{dost}\,p = \text{dost}\,\alpha.\text{dost}\,\beta$; $\text{dost}\,\omega.\text{dost}\,p.\text{wst}\,D - \text{wst}\,\omega.\text{wst}\,p = \text{wst}\,\alpha.\text{dost}\,\beta$; i znowu ze zrównania na $\text{sty}\,\alpha$. § 28 kładąc $\text{dost}\,\lambda.\text{dosty}\,\gamma = \text{dost}\,\alpha.\text{dost}\,\beta$, otrzymamy zrównania *Bessela*.

Przykład. Szukaymy za pomocą parallaxy wznoszenia się prostego i zboczenia, odległości środków słońca i xiężyca na 7 września 1820 w Wilnie o $2^{g}\ 29'\ 23''$ c. p. Mamy iuż znane $\omega = 23°\ 27'\ 55'',7$

Na Słońce $\lambda = 164° 45' 7'',13$, $\alpha = 165° 57' 39'',69$; $\beta = 6° 0' 40''$. północne.

Na Xiężyc $\lambda = D = 164° 16' 43'',2$; $p = \gamma = 47' 27'',22$. $\pi = 53' 40''$; $M = 180° + 23° 18' 24'',69$; $\alpha = 165° 49' 44'',63$; $\beta = 6° 55' 24''$.

Szukaymy naprzód na xiężyc α', β', przez zrównanie (XIV), (XV) biorąc $\alpha = 165° 49' 44'',63$, $\beta = 6° 55' 24''$.

l. dost β	$= 9,9968217 +$	l. wst π	$= 8,1934355 +$
l. wst α	$= 9,3888391 +$	l. dost H	$= 9,7637473 +$
l. (1)	$9,3856608 +$	l. wst M	$= 9,5973171 -$
(1)	$0,24303 +$	l. (2)	$7,5544999 -$
(2)	$0,003585 -$	(2)	$0,003585 -$

$(1) - (2) = 0,246615 +$ licznik.

l. dost β	$= 9,9968217 +$	l. wst π. dost H	$= 7,9571828 +$
l. dost α	$= 9,9865791 -$	l. dost M	$= 9,9630314 -$
l. (3)	$9,9834008 -$	l. (4)	$7,9202142 -$
(3)	$0,96250 -$	(4)	$0,0083218 -$

$(3) - (4) = -0,954178$. mianownik spólny.

l. $0,246615 = 9,3920019 +$
l. $0,954178 = 9,9796295 -$
l. sty $\alpha' = 9,4123724 -$

$\alpha' = 180° - (14° 29' 27'') = 165° 30' 33''$

l. wst β	$= 9,0811353 +$	l. wst π	$= 8,1934355 +$
l. dost α'	$= 9,9859596 -$	l. wst H	$= 9,9107911 +$
l. (1)	$9,0670949 -$	l. dost α'	$= 9,9859596 -$
(1)	$0,116706 -$	l. (2)	$= 8,0901862 -$

$(1) - (2) = -0,104398$ licznik. (2) $0,012308 -$

$$
\begin{aligned}
\text{l. } 0,104398 &= 9,0186923 - \\
\text{l. } 0,954178 &= 9,9796295 - \\
\text{l. sty } \beta' &= 9,0390628 + \\
\beta' &= 6^\circ\ 14'\ 38''.
\end{aligned}
$$

α słońca	$= 165^\circ\ 57'\ 39''$.	β słońca	$= 6^\circ\ \ 0'\ 40''$.
α' xiężyca	$= 165\ \ 30\ \ 33$	β' xiężyca	$= 6\ \ 14\ \ 38$
różnica	$27'\ \ 6'' = 1626''$.	różnica	$= 0^\circ\ 13'\ 58'' = 838''$.

W tróykącie prostokreślnym i prostokątnym, dwa boki kąt prosty zawieraiące są 1626″; 838″. z których wypada przeciwprostokątna czyli odległość środków słońca i xiężyca 1829″ = 30′ 29″.

Parallaxa kąta godzinnego, i nowy sposób rachowania zaćmień.

§ 36. Wprowadźmy w zrównanie (III), ten sam warunek $\omega = 0$; ekliptyka przeydzie na równika, a kąty i łuki zamienią się tak, że $N = M$, $s = H$, $D' = \alpha'$; $D = \alpha$; $D' - D = \alpha' - \alpha$ iest parallaxą kąta godzinnego, którą nazwiemy dP; kąt zaś godzinny $N - D = M - \alpha = P$: zrównanie więc (III) będzie teraz

$$
\text{sty}\, dP = \frac{\text{wst}\, \pi.\text{dost}\, H.\text{wst}\, P}{\text{dost}\beta - \text{wst}\, \pi.\text{dost} H.\text{dost} P} = \frac{m.\text{wst}\, P}{1 - m.\text{dost} P} \quad \text{(XVI)}.
$$

Położywszy dla skrócenia

$$
m = \frac{\text{wst}\, \pi.\text{dost}\, H}{\text{dost}\beta};
$$

a zatém § 18

$$
dP = \frac{m.\text{wst} P}{\text{wst}\ 1''} + \frac{m^2 \text{wst}\ 2P}{\text{wst}\ 2''} + \frac{m^3 \text{wst}\ 3P}{\text{wst}\ 3''} + \text{i t. d.} \quad \text{(XVII)}.
$$

To zrównanie podał *Delambre* na parallaxę kąta godzinnego. Przystosował ie zaś bardzo dowcipnie do zaćmień słońca, uważaiąc w środku słońca kąt P, i iego odmianę; a z tey odmiany za pomocą zrównania (VIII) przychodzi do odległości środków słońca i xiężyca. Na fig. 11. Tab. II. OPZ iest południk, P biegun świata, Z zenith, S mieysce słońca, L mieysce xiężyca; LV niech będzie parallaxą wysokości: trzeba znaleśdź kąt LSV iako odmianę kąta $ZSL = S'$. Jeżeli kąt godzinny P przeniesiemy do S, żeby wyrażał $ZSL = S'$, więc PZ, PS będą tu ZS, SL: ZS iest odległość słońca od zenith $= q$; LS iest odległość prawdziwa środków słońca i xiężyca $= E$; dP będzie teraz $LSV = \Pi$; $m = \frac{\text{wst}\,\pi.\text{wst}\,q}{\text{wst}\,E}$, $P = S'$

$$\text{sty}\,\Pi = \frac{m.\text{wst}\,S'}{1 - m.\text{dost}\,S'}$$

$ZSV = S' + \Pi = S''$; S' iest kąt prawdziwy, S'' iest kąt pozorny: LS iest odległość środków prawdziwa $= E$: trzeba teraz wynaleśdź odległość pozorną środków $VS = E + \sigma = E'$ przez odległość prawdziwą E, i przez odmianę kąta S': co nam skazuie zrownanie (VIII2) § 34 przetłumaczone na teraźnieysze znaczenia, to iest $\delta' = E + \sigma$, $\delta = E$; kąt $D - N = S''$, $D - N = S$; a zatém

$$\text{dosty}(E + \sigma) = \frac{\text{wst}\,S''}{\text{wst}\,S'}\left\{\text{dosty}\,E - \text{sty}\,u\right\}$$

położywszy

$$\frac{\text{wst}\,\pi.\text{wst}\,s}{\text{wst}\,E} = \text{sty}\,u\,.$$

Aże w tym przypadku $s = H$, $\text{wst}\,s = \text{wst}\,H = \text{dost}\,PZ$, co tu znaczy $\text{dost}\,ZS = \text{dost}\,q$; więc

$$\text{sty}\, u = \frac{\text{wst}\, \pi . \text{dost}\, q}{\text{wst}\, E};$$

a prościey

$$\text{dosty}(E+\sigma) = \frac{\text{wst}\, S' \text{dost}(E+u)}{\text{wst}\, S' \text{wst}\, E . \text{dost}\, u} \quad \text{albo}$$

$$\text{sty}(E+\sigma) = E' = \frac{\text{wst}\, S' \text{wst}\, E . \text{dost}\, u}{\text{wst}\, S' \text{dost}(E+u)}. \qquad \text{(XVIII)}$$

Ten nowy sposób na rachowanie zaćmienia słonecznego podał *Delambre* w Tomie II. k. 417. Do wynalezienia kątów tu wchodzących spuszcza on łuk pionowy ZQ, $PQ = \gamma$, $PS = \Delta$, $QS = \Delta - \gamma$, $\text{sty}\,\gamma = \text{sty}\, PZ . \text{dost}\, P = \text{dost}\, P . \text{dosty}\, H$; $PSZ = a$: $\text{sty}\, a = \frac{\text{sty}\, P . \text{wst}\, \gamma}{\text{wst}\, (\Delta - \gamma)}$; $\text{dost} ZS = \text{dost}\, q = \frac{\text{wst} H . \text{dost}(\Delta - \gamma)}{\text{dost}\, \gamma}$. Różnica między wznoszeniem się prostém słońca i xiężyca, da kąt LPS; z którego wynaleśdź trzeba $PSL = S$ i $LS = E$, odległość prawdziwą środków. Wyciąga więc ten sposób scisłey i dokładney wiadomości wznoszenia się prostego, gdzie na części nawet dziesiątne sekundy, mieć wzgląd należy. Kąt $ZSV = S''$, który czyni linia wierzchołkowa z linią łączącą środki słońca i xiężyca, iest wiadomością bardzo ważną w zaćmieniach: bo nam daie punkt na obwodzie tarczy słoneczney, gdzie przypada początek lub koniec zaćmienia.

Przykład. Dnia 7. września 1820. roku n. s. o $2^{g.}$ 29′ 23″ czasu prawdziwego w Wilnie, tablice słońca daią długość słońca 164° 45′ 7″,13; bieg godzinny na długość 2′ 25″,82; parallaxę horyzontalną słońca 8″,74; promień tarczy słoneczney 15′ 54″,8. Tablice znowu xiężyca daią długość xiężyca 164° 16′ 43″,2, szerokość północną xiężyca 0° 47′ 27″,22; bieg godzinny xiężyca na długość 29′ 26″,46; na szerokość — 161″,2; parallaxę horyzontalną xiężyca pod równikiem 53′ 55″,4; promień tarczy xiężycowey 14′ 43″,1. Biorąc za pochyłość ekliptyki $\omega = 23°$ 27′ 55″,7; za figurę ziemi $\frac{329}{330}$; a zatém szerokość poprawną Wilna 54° 31′ 10″, znaydziemy przez zrównania podane w § 31. wznoszenie się proste słońca na ten czas 165° 57′ 39″,69; zboczenie północne słońca 6° 0′ 40″; a zatém odległość słońca od bieguna świata czyli $PS = 83°$ 59′ 20″. Wznoszenie się proste xiężyca 165° 49′ 44″,63; zboczenie północne xiężyca 6° 55′ 24″; a zatém iego odległość od bieguna czyli $PL = 83°$ 4′ 36″. Różnica między wznoszeniem się prostém słońca i xiężyca 7′ 55″,06 daie kąt LPS w biegunie świata. W tróykącie LPS, mamy znane dwa boki LP, PS, i kąt LPS, więc przez analogie Nepera wynaydziemy kąty, przy $L = 171°$ 48′ 46″,8: przy $S = 8°$ 10′ 20″,4, i bok $LS = 55′$ 17″ prawdziwą odległość środków słońca i xiężyca, którą nazwiemy E. Idzie teraz o wynalezienie odległości pozorney czyli E' tychże środków, odmienioney przez parallaxę. W tróykącie ZSP znaiąc ZP, PS i kąt godzinny słońca $ZPS = 37°$ 20′ 45″, wynaydziemy odległość słońca od zenith $ZS = 57°$ 2′ 56″2 $= q$ i kąt parallaktyczny słońca $ZSP = 24°$ 48′ 33″,5. Kiedy zaćmienie słoneczne przypada zrana, xiężyc znayduie się między południkiem i słońcem tak, iak na figurze; kąt godzinny xiężyca iest mnieyszy niż słońca: i na ten czas kąt ZSL iest różnicą $= PSL - PSZ$. Ale kiedy zaćmienie przypada po południu, na początek zaćmienia słońce iest bliższe południka niż xiężyc; kąt godzinny xiężyca iest większy niż słońca; i kąt ZSL iest summą kątów $PSL + PSZ$, iak każdego łatwa do zrysowania na ten przypadek figura, przekona. Tey uwagi nie zrobił *Delambre* tłumacząc swóy sposób; każe tylko odciągać kąt swóy a czyli PSZ: co może prowadzić do wypadków błędnych. W naszym przykładzie znaleźliśmy kąt $PSL = 8^{\circ}\ 10'\ 20'',4$. $PSZ = 24^{\circ}\ 48'\ 33'',5$: ponieważ początek zaćmienia pada po południu; kąt $ZSL = 32^{\circ}\ 58'\ 53'',9 = S'$. Parallaxa tego kąta da nam odległość pozorną środków. Szukaymy iéy przez zrównania wyżey podane na Π i E'; biorąc różnicę parallax horizontalnych słońca i xiężyca na szerokość Wilna $\pi = 53'\ 40''$, i powiększywszy promień tarczy xiężycowey $7'',5$, czego damy przyczynę niżey.

$$\begin{array}{rl}
\text{l. wst}\,\pi = & 8{,}1934355 + \\
\text{l. wst}\,q = & 9{,}9238321 + \\
\text{c. l. wst}\,E = & \underline{1{,}7936496} + \\
\text{l.}\,m = & 9{,}9109172 + \\
\text{l. wst}\,S' = & \underline{9{,}7358944} + \\
 & 9{,}6468116
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{l.}\,m = & 9{,}9109172 + \\
\text{l. dost}\,S' = & \underline{9{,}9236818 +} \\
 & 9{,}8345990 + \\
 & \\
1 - 0{,}68328 = & 0{,}31672
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & 9{,}6468116 + \\
\text{l.}\ 0{,}31672 = & \underline{9{,}5006755 +} \\
\text{l. sty}\,\Pi = & 0{,}1461361
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\Pi = & 54^{\circ}\ 27'\ 46'',1 \\
S' = & \underline{32\ \ 58\ \ 53\ ,9} \\
\Pi + S' = & 87^{\circ}\ 26'\ 40'' = S''.
\end{array}$$

l. wst $\pi = 8{,}1934355 +$	$u = 27^\circ\ 50'\ 0''$.
l. dost $q = 9{,}7355370 +$	$E = \quad 55\ 17$
c. l. wst $E = 1{,}7936496 +$	$E + u = 28\ 45\ 17$
l. sty $u = 9{,}7226221 +$	

l. wst $S' = 9{,}7358944$	l. wst $S'' = 9{,}9995679$
l. wst $E = 8{,}2063504$	l. dost $(E + u) = 9{,}9428447$
l. dost $u = 9{,}9466043$	l. mian. $= 9{,}9424126$
l. liczn. $= 7{,}8888491$	$0{,}0575874$
$0{,}0575874$	
l. sty $E' = 7{,}9464365$	$\frac{1}{2}$ ☽ $= 14'\ 50'',6$
$E' = E + \sigma = 30'\ 23'',3$	$\frac{1}{2}$ ☉ $= 15\ 54\ ,8$
	$30'\ 45'',4$
	$30\ 23\ ,3$
	$22'',1$

Wypadła ta sama odległość środków, iaką otrzymaliśmy wyżey przez sposoby tam opisane. Kąt $S'' = 87^\circ\ 26'\ 40''$ pokazuie, że wziąwszy punkt naywyższy tarczy słoneczney, w tey odległości od niego ku zachodowi, to iest na prawey stronie, słońce zetknie się z xiężycem, czyli o półtrzecia przeszło stopnia nad średnicą poziomą słońca. W lunecie astronomiczney wywrotnie; to iest $2^\circ{,}5$ pod średnicą poziomą z lewey strony.

Parallaxa Wysokości.

§ 37. Dla dopełnienia nauki o parallaxach, zastanówmy się ieszcze nad parallaxą wysokości. Na f. 12 T. II C iest środek ziemi: M punkt na iey powierzchni; Z zenith: L mieysce xiężyca lub planety: $ZML = q$ odległość od zenith zarażona parallaxą: ZCL odległość prawdziwa. $CL : CM =$ wst ZML : wst MLC to iest $r : R =$ wst$(q + \mu)$: wst μ; gdzie μ znaczy parallaxę wysokości.

$$\text{wst}\,\mu = \frac{R}{r}\,\text{wst}\,(q+\mu) \qquad \text{(XIX)}.$$

Kiedy $q + \mu = 90^\circ$; $\text{wst}\,\mu = \frac{R}{r} = \text{wst}\,\pi$: na parallaxę horizontalną czyli poziomą, którą zawsze znaczyć będziemy przez π. Aże ziemia nie iest kulą ale *sferoidą*; i punkta iey powierzchni różną maią od środka ziemi odległość R; dla tego w kalendarzach astronomicznych podaią na xiężyc parallaxę poziomą pod równikiem; którą częstokroć przerobić trzeba na parallaxę mieysca obserwacyi czyli rachunku, maiąc wzgląd na figurę ziemi. Odbywa się to przerobienie za pomocą stosunku, iaki ma promień czyli odległość powierzchni od środka ziemi pod równikiem, do podobney odległości na pewną daną szerokość mieysca. Uważaiąc ziemię iako ellipsoidę, powstaiącą z obrotu *ellipsy* około swey osi mnieyszey, dowodzi się w Geometryi liniy krzywych, że w ellipsie

$$\text{sty}\,\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\,\text{sty}\,\varphi$$

$$R = a\sqrt{\frac{\text{dost}\,\varphi}{\text{dost}\,\varphi'\,\text{dost}(\varphi-\varphi')}} = b\sqrt{\frac{\text{wst}\,\varphi}{\text{wst}\varphi'\,\text{dost}(\varphi-\varphi')}};$$

gdzie a wyraża oś większą, b oś mnieyszą ellipsy; φ szerokość mieysca pozorną, iaką otrzymuiemy przez obserwacye; φ' szerokość mieysca poprawną: a zatém $\varphi - \varphi'$ kąt zawarty między liniią pionową na powierzchnią ziemi, i liniią do środka ziemi idącą. Wziąwszy za figurę ziemi $\frac{329}{330} = \frac{b}{a}$; ieżeli oś mnieysza $b = 1$; będzie promień równika $R = 1{,}0030395$, l. $R = 0{,}0013 1803$: na szerokość Wilna $54^\circ\ 41'$. $R' = 1{,}0010212$; l. $R' = 0{,}00014326$; a zatém parallaxa pozioma na Wilno $=\frac{R'}{R}$ wst π: gdzie π iest parallaxa pozioma pod równikiem. W przykładzie wyżey podanym na zaćmienie słońca, różnica parallax słońca i xiężyca pod równikiem była $53' 46'',66 = \pi$.

$$\text{l.}\frac{R'}{R} = 9{,}9991252$$

$$\text{l. wst}\,\pi = 8{,}1943103$$

$$\text{l. wst}\,\pi' = 8{,}1934355 \qquad \pi' = 53'\,40''$$ parallaxa pozioma na Wilno.

Chcąc mieć parallaxę horyzontalną iakiegokolwiek planety, potrzeba promień ziemi rozdzielić przez odległość tego Planety od ziemi: aże promień ziemi względem odległości słońca od ziemi iest równy parallaxie horyzontalney słońca $= 8'',7$; więc $8'',7$ rozdzieliwszy przez odległość planety od ziemi, otrzymamy parallaxę horyzontalną planety. Tę parallaxę horyzontalną rozmnóżmy przez wst$(q+\mu)$ to iest odległość od zenith wyciągnioną z obserwacyi, i mieć będziemy parallaxę wysokości.

Zrównanie (XIX) daie proporcyą

$$1 : \text{wst}\,\pi = \text{wst}(q+\mu) : \text{wst}\,\mu :$$

a zatém

$$1 + \text{wst}\pi : 1 - \text{wst}\pi = \text{wst}(q+\mu) + \text{wst}\mu : \text{wst}(q+\mu) - \text{wst}\mu;$$

to iest

$$\frac{1+\text{wst}\,\pi}{1-\text{wst}\,\pi} = \frac{\text{wst}(q+\mu)+\text{wst}\,\mu}{\text{wst}(q+\mu)-\text{wst}\,\mu}$$

$$= \frac{\text{wst}(\frac{1}{2}q+\mu)\text{dost}\frac{1}{2}q}{\text{dost}(\frac{1}{2}q+\mu)\text{wst}\frac{1}{2}q} = \frac{\text{sty}(\frac{1}{2}q+\mu)}{\text{sty}\,\frac{1}{2}q}:$$

aże z § 13, i z Algebry § 54 wiemy, że

$$\frac{1+\text{wst}\,\pi}{1-\text{wst}\,\pi} = \text{sty}^2(45^\circ + \tfrac{1}{2}\pi);$$

przeto

$$\operatorname{sty}(\tfrac{1}{2}q+\mu)=\operatorname{sty}\tfrac{1}{2}q.\operatorname{sty}^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}\pi) \qquad (XX).$$

Do tego zrównania przyszedł *Lexell* przez rachunek dosyć długi i zawiły. Wyraża się w niém odległość pozorna od zenith, przez odległość prawdziwą, i przez parallaxę poziomą równikową.

Fig. 12 Tab. II uczy nas, że $MQ=R.\operatorname{wst} q$; $CQ=R.\operatorname{dost} q$; a zatém $\operatorname{sty} MLC=\frac{MQ}{CL-CQ}$; i to samo wypadnie rozwinąwszy zrównanie (XIX); to iest

$$\operatorname{sty}\mu=\frac{\operatorname{wst}\pi.\operatorname{wst} q}{1-\operatorname{wst}\pi.\operatorname{dost} q} \qquad (XXI).$$

$$\mu=\frac{\operatorname{wst}\pi.\operatorname{wst} q}{\operatorname{wst} 1''}+\frac{\operatorname{wst}^2\pi.\operatorname{wst} 2q}{\operatorname{wst} 2''}+\frac{\operatorname{wst}^3\pi.\operatorname{wst} 3q}{\operatorname{wst} 3''}+\text{i t d. § 18}$$

$$\operatorname{sty}(q+\mu)=\frac{\operatorname{sty} q+\operatorname{sty}\mu}{1-\operatorname{sty} q.\operatorname{sty}\mu}.$$

Jeżeli w drugiey stronie tego zrównania włożymy za $\operatorname{sty}\mu$ iey wartość z (XXI), i przywiedziemy wszystko do iednego mianownika, wypadnie

$$\operatorname{sty}(q+\mu)=\frac{\operatorname{wst} q}{\operatorname{dost} q-\operatorname{wst}\pi};\ \operatorname{dosty}(q+\mu)=\frac{\operatorname{dost} q-\operatorname{wst}\pi}{\operatorname{wst} q}$$

aże przez $\varkappa$ wyrażamy wysokość nad poziomem $q=90^\circ-\varkappa$; $q+\mu=90^\circ-\varkappa+\mu=90^\circ-(\varkappa-\mu)$ $\operatorname{dosty}(q+\mu)=\operatorname{sty}(\varkappa-\mu)$; więc

$$\operatorname{sty}(\varkappa-\mu)=\frac{\operatorname{wst}\varkappa-\operatorname{wst}\pi}{\operatorname{dost}\varkappa}=\frac{2\operatorname{wst}\tfrac{1}{2}(\varkappa-\pi)\operatorname{dost}\tfrac{1}{2}(\varkappa+\pi)}{\operatorname{dost}\varkappa} \qquad (XXII).$$

To ostatnie zrównanie bardzo do rachunku wygodne podał *Delambre*; gdzie wysokość pozorna wyraża się przez prawdziwą, i przez parallaxę poziomą równikową.

Wszystkie parallaxy, iakoto długości, szerokości wznoszenia się prostego, zboczenia i t. d. są tylko odmianą parallaxy wysokości, i z niey wyprowadzićby się dały, ale przez rachunek dłuższy i zawilszy od tego, iakiegośmy się w tém piśmie trzymali.

Wpływ parallaxy na tarczę xiężycową: i powiększenie tey tarczy.

§ 38. Jeżeli sobie wystawimy dwa koła wierzchołkowe przecinaiące się w *zenith*, i przechodzące przez dwa punkta ostateczne średnicy poziomey xiężyca; te koła zbliżaią się do siebie ku zenith, a oddalaią ku poziomowi. Parallaxa zniżaiąc ku poziomowi xiężyc, wprawia go w mieysce rozlegleysze, i powiększa iego średnicę poziomą: a zniżaiąc znowu barziey brzeg xiężyca dolny niż górny, powiększa także iego średnicę wierzchołkową. Oprócz tego, środek ziemi iest dalszy od xiężyca, niż iakikolwiek punkt powierzchni ziemskiey ku niemu obróconey: a zatem xiężyc widziany z wierzchu ziemi iako z mieysca bliższego, pokazać się powinien większy niż ze środka ziemi. Tablice xiężyca daią nam iegò średnicę widzianą ze środka ziemi; więc ią należy powiększyć, żeby otrzymać taką, iaka się z wierzchu ziemi patrzącym pokazuie. Rozmaite są zrównania na to powiększenie. Obierzmy z nich podane przez *Olbersa*, iako i ściśłe, i prosto wypadaiące ze sposobu wyłożonego w § 34. Niech będzie na fig. 10. Tab. II. *S* środkiem ziemi, *W* punktem iey powierzchni: *Z* mieyscem xiężyca: iego odległością od środka ziemi $SZ = r$; od powierzchni ziemi $WZ = \Delta$. Wszystkie nazwiska liniy i kątów wymienione w § 34, tu się zachowuią, położywszy tam kąt $E = 0$:

$$WZ = \Delta = \frac{Wg}{\text{dost}\, p'} = \frac{TC}{\text{dost}\, p'}; \quad TC = \frac{Tp}{\text{dost}\, D'} =$$

$$= \frac{SP - SQ}{\text{dost}\, D'} = \frac{r.\text{dost}\, p.\text{dost}\, D - R.\text{dost}\, s.\text{dost}\, N}{\text{dost}\, D'}; \text{ więc}$$

$$\Delta = \frac{r.\text{dost}\, p.\text{dost}\, D - R.\text{dost}\, s.\text{dost}\, N}{\text{dost}\, p'.\text{dost}\, D'}:$$ gdzie p iest szerokością prawdziwą; p' szerokością pozorną: D długością prawdziwą; D' długością pozorną xiężyca: $SW = R$; N długością *zenith*, s iego szerokością.

Patrząc ze środka ziemi na xiężyc, widzielibyśmy go pod kątem T; patrząc zaś na niego z wierzchu ziemi, widzimy go pod kątem T'. Wstawy tych kątów są w stosunku spacznym odległości; więc

$\text{wst}\, T : \text{wst}\, T' = \Delta : r$; $\text{wst}\, T' = \frac{r.\,\text{wst}\, T}{\Delta}$; to iest, wprowadziwszy wyżey wyrażoną wartość na Δ, i całą potem prawą stronę zrównania rozdzieliwszy przez r

$$\text{wst}\, T' = \frac{\text{wst}\, T.\text{dost}\, p'.\text{dost}\, D'}{\text{dost}\, p.\text{dost}\, D - \text{wst}\, \pi.\text{dost}\, s.\text{dost}\, N} \quad \text{(XXIII)}:$$

z czego $T' - T$ daie powiększenie tarczy. Mianownik tego zrównania iest ten sam, co w zrównaniach (I), (II); a zatém rachunek znacznie skrócony. Znaleźliśmy iuż na zaćmienie 7. Września 1820 roku; $p' = 2'\ 28'',6$; $D' = 164°\ 14'\ 49'',3$. Wartość mianownika $-0{,}954178$, iego logarytm $9{,}9796295-$; $T = 14'\ 43'',1$.

$$
\begin{array}{lrl}
\text{l. wst } T' = & 7{,}6315342 & + \\
\text{l. dost } p' = & 9{,}9999999 & + \\
\text{l. dost } D' = & 9{,}9833742 & - \\
\hline
& 7{,}6149083 & - \\
\text{l. mian.} & 9{,}9796295 & - \\
\hline
\text{l. wst } T' = & 7{,}6352788 & + \\
T' = & 14'\ 50'',6 & \\
T = & 14\ \ 43\ ,1 & \\
\hline
& 7'',5 &
\end{array}
$$

powiększenie tarczy xiężycowey.

V. Położenie ciał niebieskich na własney ich drodze.

Pierwiastki trygonometryczne biegu.

§ 39. Płaszczyzny wszystkich dróg opisywanych od gwiazd ruchomych świata słonecznego przechodzą przez środek słońca, iako środek ich biegu; a zatém muszą przecinać ekliptykę pod pewnym kątem w dwóch punktach, które zowią *węzłami* (nodi). Z nich ieden iest *węzłem górnym* (nodus ascendens), od którego ciało niebieskie zaczyna szerokość północną, podnosząc się nad ekliptykę: drugi *węzłem dolnym* (nodus descendens), od którego gwiazda spadaiąc pod ekliptykę, zaczyna szerokość południową. Tu położenie ciała niebieskiego możemy pod dwoiakim względem uważać: raz iako opisuiącego biegiem swoim drogę pewney figury czyli postaci, którą trzeba oznaczyć: i mieysce na tey drodze odnosić do punktów tey figurze właściwych, iakoto n. p. w ellipsie do ogniska, mimośrodu, osi większey i t. d. a stąd wydobydź to, co nazywaią *pierwiastkami biegu* (elementa motûs corporis): i takie położenie, ponieważ zawisło od pocżątków Mechaniki i Geometryi wyższey, do teraźnieyszey nauki cale nie należy. Drugi raz uważa się ciało niebieskie iako ruszaiące się w przestrzeni kulistey: linie proste od środka słońca lub od środka ziemi do niego prowadzone, skazuią mieysca tegoż ciała na kuli nieoznaczonego promienia: są to iak rzuty tegoż ciała na powierzchnią kuli. Płaszczyzny prowadzone przez to ciało, i przez punkta znane ekliptyki, rysuią łuki kół wielkich różnie się przecinaiące, i składaiące tróykąty kuliste, których rozwiązanie całkiem od trygonometryi kulistey zależące, daie nam tylko położenie drogi, i mieysce ciała niebieskiego względem ekliptyki: ale nam nie daie ani figury drogi opisaney, ani biegu elliptycznego, ani trwałości czasu, w którym się ten bieg odbywa. Jestto tylko iak wstęp i przygotowanie do tego, czego potrzebuią przepisy Mechaniki i Geometryi wyższey. Zgoła podzielić można pierwiastki biegu na proste trygonometryczne tu należące, iakiemi są *pochyłość drogi do ekliptyki*, i *długość węzła*: i na *geometryczno-mechaniczne*: iakiemi są w *biegu* elliptycznym naprzód *epoka*, toiest długość średnia ciała niebieskiego na pewny wymieniony czas. Za tę epokę bierze się zwyczaynie początek roku, toiest południe 31 Grudnia w latach pospolitych: w latach zaś przestępnych 1. Stycznia: powtóre *mimośród* (excentricitas): potrzecie *długość perihelii* czyli naymnieyszeyod słońca odległości: poczwarte *połowa osi większey ellipsy* czyli odległość średnia planety od słońca. Z czego wyciąga się bieg dzienny średni. W biegu zaś *parabolicznym* iak na komety, pierwiastkami biegu są: naprzód *perihelium* czyli naymnieysza komety odległość od słońca: powtóre *długość perihelii*: potrzecie *czas przechodu* komety przez *perihelium*: poczwarte *bieg średni dzienny*. W tych pierwiastkach iak widzimy zachodzą prawa biegu i figura drogi, iaką ciało niebieskie opisuie, co wszystko iest zatrudnieniem inney nauki.

Niech na fig. 13. Tab. I. V wyraża początek znaku *Barana*, od którego rachuią się długości na ekliptyce VCA: niech B będzie mieyscem heliocentrycznem ciała niebieskiego na własney iego drodze: płaszczyzna przez B i przez środek słońca przechodząca niech przetnie ekliptykę w punkcie C, będzie C *węzłem górnym*. Łuk koła wielkiego BC zowie się *znamieniem szerokości* (argumentum latitudinis); bo ten łuk pokazuie, że ciało B ma szerokość, bez którey nie byłoby tego łuku. Jestto iak widzimy, odległość ciała od węzła, uważana na własney iego drodze. Z punktu B spuśćmy łuk koła wielkiego przechodzącego przez biegun ekliptyki, a zatem na nię pionowy: będzie $VA = l$ długością środo-słoneczną ciała B; $BA = p$ iego szerokością środo-słoneczną; $VC = \Omega$ długością węzła; $CA = l - \Omega$ odległością ciała B od węzła na ekliptyce: którą także nazwać można *znamieniem ekliptycznem* szerokości: kąt $BCA = i$ iest pochyłością drogi ciała B do ekliptyki. Mamy więc tróykąt kulisty BCA prostokątny przy A; w którym zachodzą cztery ważne w Astronomii ilości $l - \Omega$, p, u, i: trzeba między temi ilościami poznać zachodzące związki; żeby znaiąc iedne, przyiśdź do wynalezienia drugich. Trzeba oprócz tego poznać iak odmiany iednych tych ilości, wpływaią w odmianę drugich: i na tem się skończą nasze badania. Ilości i, Ω nazywam pierwiastkami trygonometrycznemi biegu, których znaiomość daie nam położenie płaszczyzny, na którey leży droga ciała niebieskiego B. Zrównania dowiedzione pod § 9, kiedy nazwiska tamte łuków i kątów tu zastósuiemy, to iest

$a = u$, $b = l - \Omega$; $C = i$; $c = p$; daią cztery następuiące.

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & \operatorname{sty}(l-\Omega) = \operatorname{dost} i.\operatorname{sty} u & \text{(e) § 9.} \\ \text{II.} & \operatorname{sty} p = \operatorname{sty} i.\operatorname{wst}(l-\Omega) & \text{(f)} \\ \text{III.} & \operatorname{wst} p = \operatorname{wst} i.\operatorname{wst} u & \text{(b)} \\ \text{IV.} & \operatorname{dost} u = \operatorname{dost} p.\operatorname{dost}(l-\Omega) & \text{(a)} \end{array}$$

Zrównania I i IV pokazuią; że łuki $l-\Omega$, u, należą do tey samey ćwiartki koła; bo są wyrazone przez te same liniie trygonometryczne, kiedy i iest kątem ostrym między 0° i 90°: lecz kiedy i iest kątem rozwartym między 90° i 180°, a zatém bieg wsteczny; kąty $l-\Omega$, $360° - u$, znayduią się w téy samey ćwiartce koła. Przez tę uwagę znosi się wątpliwość o kącie $l - \Omega$, kiedy znamy u.

Jeżeli w I. zniesiemy styczne, a włożymy za

$$\operatorname{dost} i = 1 - 2 \operatorname{wst}^2 \tfrac{1}{2} i\,;$$

będzie

$$\operatorname{wst}(l-\Omega)\operatorname{dost} u = \operatorname{wst} u.\operatorname{dost}(l-\Omega) - 2\operatorname{wst}^2\tfrac{1}{2}i.\operatorname{wst} u.\operatorname{dost}(l-\Omega),$$

czyli

$$\text{V.} \quad \operatorname{wst}(u-l+\Omega) = 2\operatorname{wst}^2\tfrac{1}{2}i.\operatorname{wst} u.\operatorname{dost}(l-\Omega):$$

tu wprowadziwszy z III za

$$\operatorname{wst} u = \frac{\operatorname{wst} p}{\operatorname{wst} i} = \frac{\operatorname{wst} p}{2\operatorname{wst}\tfrac{1}{2}i.\operatorname{dost}\tfrac{1}{2}i};$$

otrzymamy

$$\text{VI.} \quad \operatorname{wst}(u-l+\Omega) = \operatorname{sty}\tfrac{1}{2}i.\operatorname{wst} p.\operatorname{dost}(l-\Omega):$$

albo położywszy z IV za $\operatorname{dost}(l-\Omega) = \dfrac{\operatorname{dost} u}{\operatorname{dost} p}$

$$\text{VII.} \quad \operatorname{wst}(u-l+\Omega) = \operatorname{sty}\tfrac{1}{2}i.\operatorname{sty} p.\operatorname{dost} u.$$

Wprowadźmy ieszcze w zrównanie V. za

$$\text{wst}^2\tfrac{1}{2}i = 1 - \text{dost}^2\tfrac{1}{2}i,$$

a wypadnie

$$2\text{dost}^2\tfrac{1}{2}i.\text{wst}\,u.\text{dost}(l-☊) = \text{wst}\,u.\text{dost}(l-☊) + \text{dost}\,u.\text{wst}(l-☊);$$

więc

$$\text{VIII.}\quad \text{wst}(u+l-☊) = 2\text{dost}^2\tfrac{1}{2}i.\text{wst}\,u.\text{dost}(l-☊):$$

aże z III.

$$\text{wst}\,u = \frac{\text{wst}\,p}{\text{wst}\,i} = \frac{\text{wst}\,p}{2\,\text{wst}\,\frac{1}{2}i.\text{dost}\,\frac{1}{2}i};$$

więc

$$\text{IX.}\quad \text{wst}(u+l-☊) = \text{dosty}\,\tfrac{1}{2}i.\text{wst}\,p.\text{dost}(l-☊):$$

że znowu z IV. $\text{dost}(l-☊) = \dfrac{\text{dost}\,u}{\text{dost}\,p}$;

przeto

$$\text{X.}\quad \text{wst}(u+l-☊) = \text{dosty}\,\tfrac{1}{2}i.\text{sty}\,p.\text{dost}\,u.$$

Te zrównania w rachunkach astronomicznych barzo przydatne, bez żadnego rysunku i dowodu przytoczył *Gauss* w dziele *Theoria Motus* k. 48.

Łuk $u-l+☊ = u-(l-☊)$, kiedy i iest kąt ostry między 0° i 90°: albo $u+(l-☊) = u-(☊-l)$, kiedy kąt i iest rozwarty między 90° a 180°, łuk mówię ten nazywa się w Astronomii *przywiedzeniem do ekliptyki* (reductio ad eclipticam). Jestto iak widzimy różnica między przeciwprostokątną BC i łukiem CA: toiest między długością środo-słoneczną planety VCA, i długością na własney iego drodze $☊+CB$. Do wystawienia tey ostatniey na figurze, trzeba przeciągnąć pod ekliptykę łuk BC, i na przedłużonym, od C odciąć łuk równy $VC = ☊$; gdzie będzie początek długości rachowanych na drodze, tak iak V iest początkiem długości na ekliptyce. Będzie więc zawsze długość na drodze $\Omega + u$: Astronomowie wyrażali ią $\Omega \pm u$, bo przemieniali węzły w biegu wstecznym, co dziś iest niepotrzebne, byleby kąt i uważać od 0° do 180°. Kilka zrownań na ten sam łuk lub kąt, służy i do utwierdzenia rachunku, i do zniesienia wątpliwości o kącie, ieżeli iaka zachodzi.

Weźmy za przykład bieg *Westy* w miesiącu wrześniu 1819 roku, toiest 22 dnia o północy w Wilnie: Na ten czas długość środo-słoneczna Westy $l = 0^s\ 0°\ 29'\ 59''$; szerokość środo-słoneczna południowa $p = -6°\ 57'\ 47''$; pochyłość drogi $i = 7°\ 8'\ 5''$.

Zrów. III.
$$\begin{aligned} \text{l. wst}\,p &= 9{,}0836077\ - \\ \text{l. wst}\,i &= 9{,}0941315\ + \\ \text{l. wst}\,u &= 9{,}9894762\ - \\ u &= -77°\ 26'\ 15'';\quad 282°\ 33'\ 45''. \end{aligned}$$

Zrów. II.
$$\begin{aligned} \text{l. sty}\,p &= 9{,}0868227\ - \\ \text{l. sty}\,i &= 9{,}0975074\ + \\ \text{l. wst}(l - \Omega) &= 9{,}9893153\ - \\ l - \Omega &= -77°\ 20'\ 33'';\quad 282°\ 39'\ 27''. \end{aligned}$$

Zrów. I.
$$\begin{aligned} \text{l. dost}\,i &= 9{,}9966241\ + \\ \text{l. sty}\,u &= 0{,}6520080\ - \\ \text{l. sty}(l - \Omega) &= 0{,}6486321\ - \\ l - \Omega &= -77°\ 20'\ 33''. \end{aligned}$$

Zrów. IV.
$$\begin{aligned} \text{l. dost}\,p &= 9{,}9967850\ + \\ \text{l. dost}(l - \Omega) &= 9{,}3406832\ + \\ \text{l. dost}\,u &= 9{,}3374682\ + \\ u &= -77°\ 26'\ 15''. \end{aligned}$$

Zrów. V. $\quad$ l. wst$^2\frac{1}{2}i = 7{,}5878876 +$
$\quad$ l. $2 = 0{,}3010300 +$
$\quad$ l. wst $u = 9{,}9894762 -$
$\quad$ l. dost$(l - \Omega) = 9{,}3406832 +$
$\quad$ l. wst$(u - l + \Omega) = 7{,}2190770 -$
$\quad$ $u - l + \Omega = -5'\ 42''.$

Zrów. VI. $\quad$ l. sty $\frac{1}{2}i = 8{,}7947861 +$
$\quad$ l. wst $p = 9{,}0836077 -$
$\quad$ l. dost$(l - \Omega) = 9{,}3406832 +$
$\quad$ l. wst$(u - l + \Omega) = 7{,}2190770 -$

To samo zupełnie daie zrównanie VII. Zrównania VIII, IX, X nie maią mieysca, ani się użyć mogą w znanych dotąd planetach, których pochyłość do ekliptyki iest ostra, i żaden nie ma biegu środosłonecznego wstecznego.

Rachunek więc na *Westę* pokazuie: że długość iey węzła dolnego $l-(l-\Omega)=\Omega=77°\ 50'\ 32''$: iego spełnienie używane w tablicach, czyli długość węzła górnego $180° - \Omega = 102°\ 9'\ 28''$; $u = -77°\ 26'\ 15''$.

$$l-(l-\Omega)+u = u+\Omega = 0°\ 24'\ 17''.$$

$u-(l-\Omega)=$ przywiedzenie do eklipt. $= -5'\ 42''$.
skąd wypada
$u+\Omega-u+l-\Omega = l = 0°\ 29'\ 59''$, iak dały tablice.

Odmiany tych pierwiastków: i związki między odmianami.

§ 40. Różnicuymy zrownanie III. § 39. odmieniaiąc p, i, u,

$$\text{dost}\, p.dp = \text{wst}\, u.\text{dost}\, i.di + \text{wst}\, i.\text{dost}\, u.du:$$

aże dostawa $=$ dosty.wst. więc

$$\text{dost}y\,p.\text{d}p = \text{dost}y.\text{d}i + \text{dost}y\,u.\text{d}u$$

$$\text{d}p = \frac{\text{dost}y\,i}{\text{dost}y\,p}\text{d}i + \frac{\text{dost}y\,u}{\text{dost}y\,p}\text{d}u = \frac{\text{st}y\,p}{\text{st}y\,i}\text{d}i + \frac{\text{st}y\,p}{\text{st}y\,u}\text{d}u:$$

aże $\frac{\text{st}y\,p}{\text{st}y\,i} = \text{wst}(l - \Omega)$ z II, $\frac{\text{st}y\,p}{\text{st}y\,u} = \text{wst}\,i.\text{dost}(l - \Omega)$; z (III) i (IV); więc

$$\text{d}p = \text{d}i.\text{wst}(l - \Omega) + \text{d}u.\text{wst}\,i.\text{dost}(l - \Omega) \qquad \text{(m)}.$$

Jeżeli zrożnicuiemy (I); otrzymamy

$$\frac{\text{d}(l - \Omega)}{\text{dost}^2(l - \Omega)} = -\,\text{d}i.\text{wst}\,i.\text{st}y\,u + \frac{\text{dost}\,i}{\text{dost}^2 u}\text{d}u;$$

aże z IV. $\text{dost}(l - \Omega) = \frac{\text{dost}\,u}{\text{dost}\,p}$; z III. zaś $\text{wst}\,i.\text{wst}\,u = \text{wst}\,p$; wprowadzone te wartości w zrównanie na $\text{d}(l - \Omega)$, okażą

$$\text{d}(l - \Omega) = -\,\text{st}y\,p.\text{dost}(l - \Omega)\text{d}i + \frac{\text{dost}\,i}{\text{dost}^2 p}\text{d}u \qquad \text{(n)}.$$

Zrównania (m), (n) daią nam odmianę długości i szerokości środo-słonecznych, przez odmianę znamienia szerokości u, i pochyłości drogi i.

Wiemy ieszcze z § 34; że ieżeli r wyraża odległość planety od słońca, a p iego szerokość środo-słoneczną, będzie odległość tego planety skrócona czyli przeniesiona na ekliptykę $r' = r.\text{dost}\,p$; $\text{d}r' = \text{d}r\,\text{dost}\,p - r.\text{wst}\,p.\text{d}p$; wprowadziwszy znalezioną wartość na $\text{d}p$ z (m), otrzymamy:

$$\text{d}r' = \text{dost}\,p.\text{d}r - r\,\text{wst}\,p\,\text{wst}(l - \Omega)\text{d}i - r\,\text{wst}\,p\,\text{wst}\,i.\text{dost}(l - \Omega)\,\text{d}u \qquad \text{(r)}.$$

Jeżeli $\text{d}i$, $\text{d}u$ w tém ostatniém zrównaniu są wyrażone przez sekundy kąta; trzeba ie rozmnożyć przez wst 1″, żeby ie na liniią prostą zamienić, iak dr, dr': albo też dr, dr' treba rozdzielić przez wst 1″; żeby mieć wszystko w sekundach.

Zrównania (m), (n), (r) w ścisłeyszych astronomicznych rachunkach staią się potrzebne, kiedy dostrzegłszy małą odmianę w pochyłości drogi di, i w znamieniu szerokości du na drodze CB, chcemy wiedzieć iak się przez to odmieniła szerokość środosłoneczna dp, albo znamie szerokości ekliptyczne d$(l—☊)$: i znowu kiedy popełniwszy błąd i omyłkę w i, u; poznać chcemy, iaki stąd wyniknął błąd w p, $(l—☊)$, r'. Ważnieysze ieszcze tych zrownań użycie zachodzi w poprawie tablic, albo raczey pierwiastków, na których się zasadzaią tablice na biegi planet.

Porównywaiąc obserwacye z rachunkiem tablic, otrzymuiemy różnice liczbowe w długości środo-słoneczney dl, i w szerokości dp: wprowadzam tę wartość liczbową za dp w zrównanie (m); każda obserwacya da mi iedno takie zrównanie; z dwóch obserwacyy otrzymuię dwa zrównania (m); za których pomocą wyrzucam du, i otrzymuię w liczbach wartość na di to iest poprawę pochyłości drogi. Maiąc di wynaydę wartość na du; a tę wprowadziwszy w zrównanie (n), i za dl różnicę w długości między obserwacyami i rachunkiem z tablic, otrzymam d☊ na poprawę długości węzła. Jeżeli użyię wielkiey liczby obserwacyy, wypadnie mi więcey zrównań niż ilości nie znanych, a przeto zrównania warunkowe, którym trzeba zadosyć uczynić. Żeby atoli poprawa przytoczonych tu pierwiastków była bespieczna i gruntowna, biorą się do tego obserwacye *przeciwległości* czyli *oppozycyy* planety ze słońcem; bo w ten czas długość planety widziana z ziemi, iest ta sama, iakaby się pokazała ze środka słońca. Zbiór wielu przeciwległości daie wiele zrównań warunkowych. Tu otwiera się nauka o sposobach uczynienia zadosyć podobnym zrównaniom: która iuż do rzeczy naszey nie należy.

Z dwóch lub trzech długości i szerokości środo-słonecznych, iak wynaleśdź długość węzła, i pochyłość drogi na ciało niebieskie?

§ 41. To zadanie nayczęściey nam przypada rozwiązać w biegu *komet*, szukaiąc ich drogi z danych trzech obserwacyy. Nazwiymy trzy długości środo-słoneczne l, l', l''; trzy szerokości środo-słoneczne p, p', p''. Zrównanie II § 39 daie

$$\text{sty}\, i = \frac{\text{sty}\, p}{\text{wst}(l - ☊)} = \frac{\text{sty}\, p'}{\text{wst}(l' - ☊)} = \frac{\text{sty}\, p''}{\text{wst}(l'' - ☊)} \qquad (z);$$

skąd otrzymuiemy trzy zrównania

$$\begin{aligned} \text{sty}\, p.\text{wst}(l' - ☊) &= \text{sty}\, p'.\text{wst}(l - ☊) \\ \text{sty}\, p.\text{wst}(l'' - ☊) &= \text{sty}\, p''.\text{wst}(l - ☊) \qquad (z') \\ \text{sty}\, p'.\text{wst}(l'' - ☊) &= \text{sty}\, p''.\text{wst}(l' - ☊) \end{aligned}$$

Każde z tych zrównań rozwiązane, da nam tę samę wartość na sty ☊, to iest

$$\text{sty}\, ☊ = \frac{\text{sty}\, p.\text{wst}\, l' - \text{sty}\, p' \text{wst}\, l}{\text{sty}\, p.\text{dost}\, l' - \text{sty}\, p' \text{dost}\, l} = \frac{\text{sty}\, p.\text{wst}\, l'' - \text{sty}\, p'' \text{wst}\, l}{\text{sty}\, p.\text{dost}\, l'' - \text{sty}\, p'' \text{dost}\, l}$$

$$= \frac{\text{sty}\, p' \text{wst}\, l'' - \text{sty}\, p''.\text{wst}\, l'}{\text{sty}\, p' \text{dost}\, l'' - \text{sty}\, p'' \text{dost}\, l'} \qquad (z'').$$

Maiąc długość węzła przez (z''), otrzymamy pochyłość drogi *i* przez (z). Zrównania (z') i (z'') dowodzą; że do otrzymania długości węzła i pochyłości drogi, dosyć nam iest mieć dwie obserwacye. Ale obserwacye daią nam położenie ciała niebieskiego środo ziemskie: kiedy tu trzeba mieć położenie środo-słoneczne. Żeby od tamtego przyyśdź do tego, wiemy z § 32. że nam potrzeba wiedzieć odległość ciała niebieskiego od słońca, albo od ziemi: co w kometach iest nieźmierną trudnością prawie dotąd zupełnie niepokonaną: bo nie wiemy ani parallaxy, ani rewolucyi tych ciał około słońca, to iest dwóch początków, które nas prowadzą do poznania wspomnionych odległości. Na komety więc w tróykącie *SPZ* (fig. 8 Tabl. II) nie znamy tylko dwie rzeczy: odległość słońca od ziemi, i kąt *SZP* odsunienie się komety od słońca, czyli różnicę między długością słońca i długością środo-ziemską komety; nie możemy więc tego tróykąta rozwiązać. Sposoby, które począwszy od *Newtona* różni astronomowie i geometrowie podali na pokonanie tey trudności, prawie wszystkie zależą na prawidle *fałszywego położenia.*

Przykład. Kometa znakomity, w miesiącu Lipcu 1819 roku obserwowany i obrachowany w Wilnie, miał dnia 6. Lipca n. s. o godzinie 12 czasu średniego, toiest o północy, długość środo-słoneczną $9^{s}\ 23^{\circ}\ 22'\ 58'' = l$; szerokość środo-słoneczną północną $64^{\circ}\ 12'\ 1'' = p$. Dnia zaś 14. Lipca n. s. o teyże samey godzinie miał długość środo-słoneczną $0^{s}\ 20^{\circ}\ 25'\ 17'' = l'$: szerokość środo-słoneczną północną $80^{\circ}\ 21'\ 10'' = p'$: iakaż stąd wypada długość iego węzła, i pochyłość iego drogi?

$$\begin{array}{rl} \text{l. sty}\, p = & 0{,}3156818 + \\ \text{l. wst}\, l' = & 9{,}5427282 + \\ \hline \text{l.}\,(1) = & 9{,}8584100 - \\ (1) = & 0{,}7218 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{l. sty}\, p' = & 0{,}7695888 + \\ \text{l. wst}\, l = & 9{,}9627830 - \\ \hline \text{l.}\,(2) = & 0{,}7323718 - \\ (2) = & 5{,}3996 - \end{array}$$

$(1) - (2) = 6{,}1214 +$ Licznik.

$$\begin{array}{rl} \text{l. sty}\, p = & 0{,}3156818 + \\ \text{l. dost}\, l' = & 9{,}9718100 + \\ \hline \text{l.}\,(3) = & 0{,}2874918 + \\ (3) = & 1{,}9386 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{l. sty}\, p' = & 0{,}7695888 + \\ \text{l. dost}\, l = & 9{,}5986505 + \\ \hline \text{l.}\,(4) = & 0{,}3682393 + \\ (4) = & 2{,}3347 \end{array}$$

$(3) - (4) = -0{,}3961.$ Mianownik.

$$\begin{array}{rl} \text{l.}\ 6{,}1214 = & 0{,}7868508 + \\ \text{l.}\ 0{,}3961 = & 9{,}5978048 - \\ \hline \text{l. sty}\ ☊ = & 1{,}1890460 - \end{array}$$

$☊ = 180^\circ - (86^\circ\ 17'\ 51'')$ węzeł dolny.

$☊ = 360^\circ - (86\ \ 17\ \ 51\ )$ węzeł górny.

$= 9^{s.}\ 3^\circ\ 42'\ 9''.$

$$\begin{array}{rl} l = & 9^{s.}\ 23^\circ\ 22'\ 58'' \\ ☊ = & 9\ \ \ 3\ \ \ 42\ \ \ 9 \\ \hline l - ☊ = & 0^{s.}\ 19^\circ\ 40'\ 49'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} l' = & 0^{s.}\ 20^\circ\ 25'\ 17'' \\ ☊ = & 9\ \ \ 3\ \ \ 42\ \ \ 9 \\ \hline l' - ☊ = & 3^{s.}\ 16^\circ\ 43'\ 8''. \end{array}$$

$l - ☊$, $l' - ☊$, są to znamiona szerokości ekliptyczne, czyli odległości komety od węzła rachowane na ekliptyce. Szukaymy teraz pochyłości drogi i przez (z).

$$\begin{array}{rl} \text{l. sty}\, p = & 0{,}3156818 + \\ \text{l. wst}\,(l - ☊) = & 9{,}5273349 + \\ \hline \text{l. sty}\, i = & 0{,}7883469 + \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{l. sty}\, p' = & 0{,}7695888 + \\ \text{l. wst}\,(l' - ☊) = & 9{,}9812420 + \\ \hline \text{l. sty}\, i = & 0{,}7883468 + \end{array}$$

$i = 80^\circ\ 45'\ 12''.$

Biegł więc kometa po drodze ledwo nie pionowey na ekliptykę; a zatém to, co się nazywa *przeniesieniem* *na ekliptykę* czyli różnica między łukiem opisanym na drodze, i tymże łukiem przeniesionym na ekliptykę, musi bydź znaczna, i coraz barziey rosnąca. Weźmy pod rachunek zrównanie I § 39, na wynalezienie u, u', toiest znamion szerokości na własney drodze, i zrównanie n. p. VII. tegoż § na przywiedzenie do ekliptyki łuków pierwszey i drugiey obserwacyi.

$$\begin{array}{rl} \text{l.sty}(l-\text{☊}) = & 9{,}5534746+ \\ \text{l. dost}\, i = & 9{,}2059757+ \\ \hline \text{l. sty}\, u = & 0{,}3474989+ \\ u = & 65^\circ\ 48'\ 26'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{l.sty}(l'-\text{☊}) = & 0{,}5223380- \\ \text{l. dost}\, i = & 9{,}2059757+ \\ \hline \text{l. sty}\, u' = & 1{,}3163623- \\ u' = & 180^\circ - (87^\circ\ 14'\ 12'') \\ = & 92^\circ\ 45'\ 48'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{l. sty}\, \tfrac{1}{2} i = & 9{,}9296052+ \\ \text{l. sty}\, p = & 0{,}3156818+ \\ \text{l. dost}\, u = & 9{,}6125805+ \\ \hline \text{l.wst}[u-(l-\text{☊})] = & 9{,}8578675+ \\ u-(l-\text{☊}) = & 46^\circ\ 7'\ 40''. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{l. sty}\, \tfrac{1}{2} i = & 9{,}9296052+ \\ \text{l. sty}\, p' = & 0{,}7695888+ \\ \text{l. dost}\, u' = & 8{,}6831423- \\ \hline \text{l.wst}[u'-(l'-\text{☊})] = & 9{,}3823363- \\ u'-(l'-\text{☊}) = & -(13^\circ\ 57'\ 18''.) \end{array}$$

Te są *elementa*, czyli pierwiastki trygonometryczne biegu komety, istotnie potrzebne do rachowania iego biegu tak w *paraboli* iak w *ellipsie*.

KONIEC.

OMYŁKI DRUKU.

k. 76. *w.* 3 od końca δH *popraw* dH.

k. 80. *w.* 7 od końca wst $C = \frac{d}{2bc}$ *popraw* $\frac{d}{2ab}$

k. 104. *w.* 13 § 25. *popraw* § 28.

k. 155. *w.* 15. wst ω.wst α.wst α.sty β. *popraw* wst ω.wst α. sty β.

k. 108. *w* 16. zawiła. *popraw* zawiłe.

k. 109. *w.* 21. na stronie iego wschodniey, *doday* lub zachodniey.

k. 112. *w.* 11. szerokość zenith S. *popraw* szerokość zenith s.

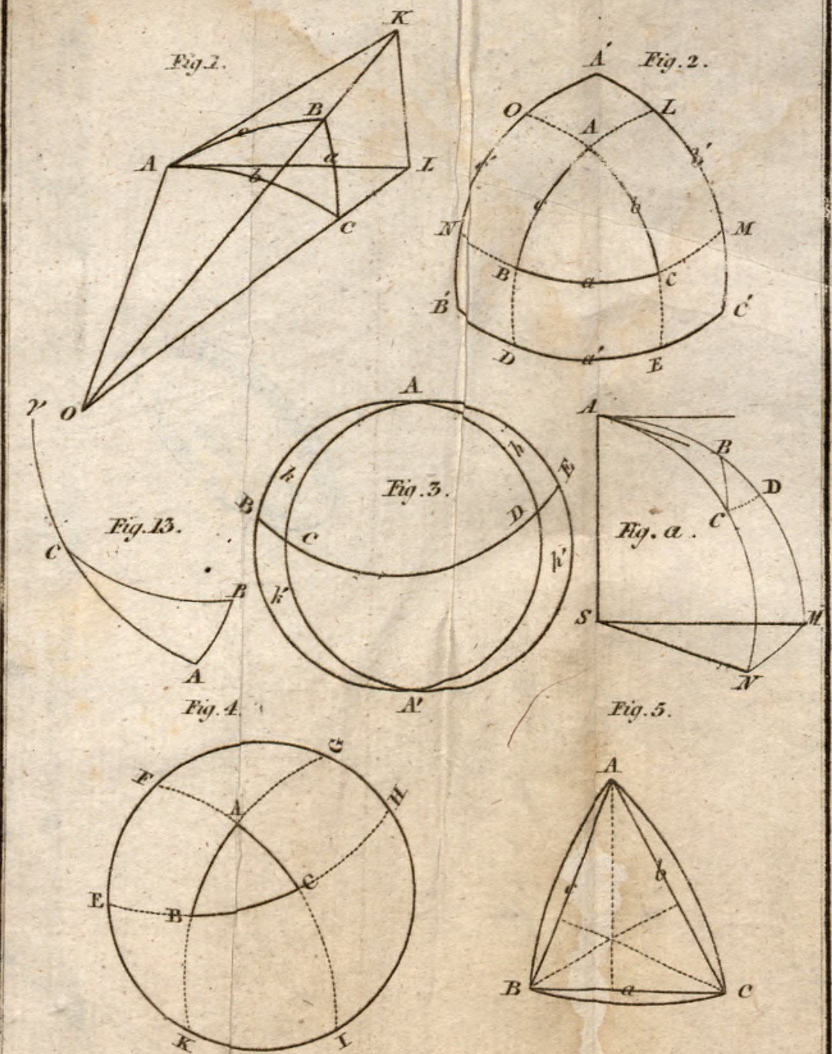
k. 138. *w.* 13. sty x ostatnie liczby 66. *popraw* 86.

k. 141. *w.* 6 od końca dost λ.dosty γ. *popraw* dost λ.dost γ.

k. 157. *w.* 12. $350° - u$ *popraw* $360° - u$.

k. 160. *w.* 19. dla zniesienia wątpliwości *przyday*

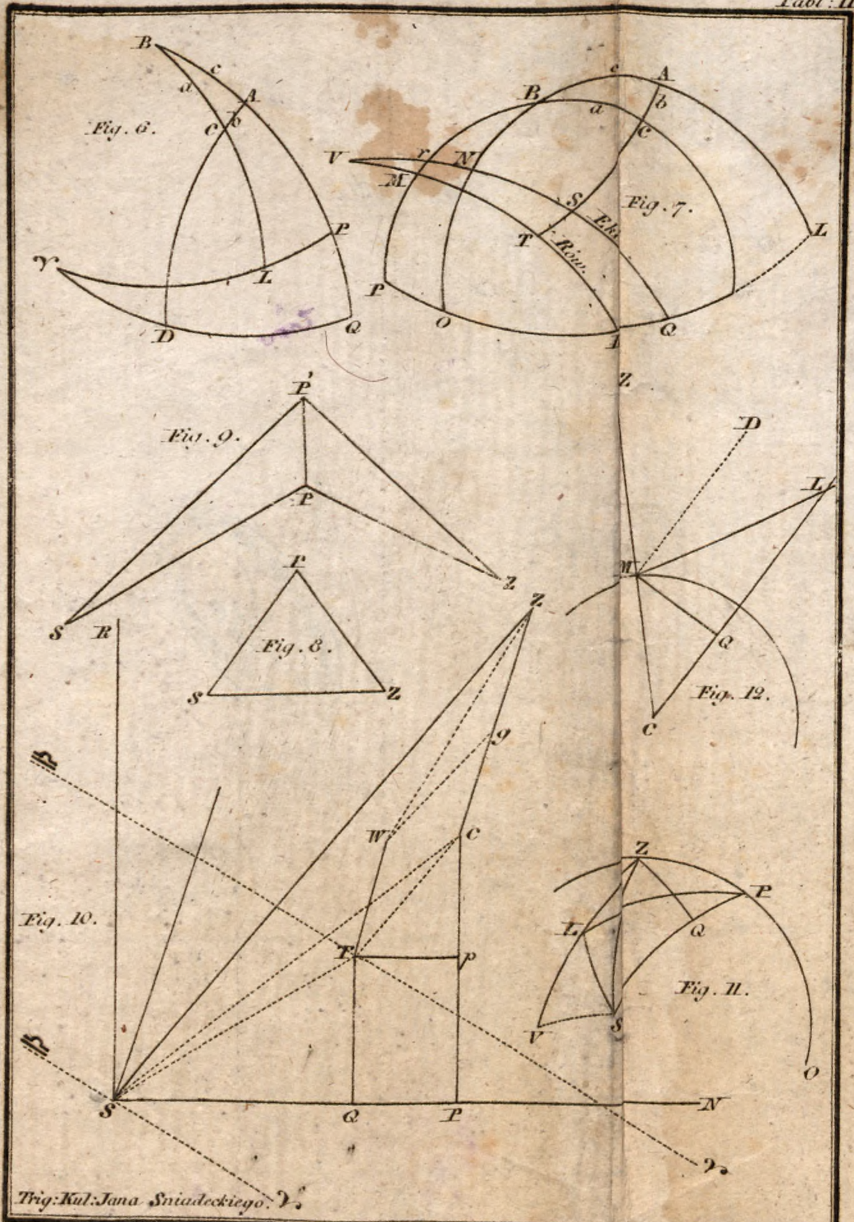
$$360° - (180° + ☊) = 180° - ☊ = 102° \; 9' \; 28''.$$



Trigon: Kulista Jana Sniadeckiego.

I. Chrzczenowicz Sztych. Szkol. Uniwer. Wilenskiego.

Tabl: II.



J. Chrzczonowicz r. 1810.