LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE

DES MÊMES AUTEURS:

BRIOT ET BOUQUET.

Complément de Géométrie analytique, leçons faites par M. Briot à l'École normale supérieure et rédigées par les élèves. In-8. . . . . 5 fr.

Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques. In-8. . . . . 6 fr.

BRIOT.

Essai sur la Théorie mathématique de la lumière. In-8. . . . . 4 fr.

s. — IMPRIMÉ CHEZ JULES BONAVENTURE,
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS.

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE

PAR MM.

BRIOT

Maître de conférences à l'École normale supérieure,

ET

BOUQUET

Professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand,
Répétiteur à l'École polytechnique.

SIXIÈME ÉDITION

revue et corrigée.

PARIS

CH. DELAGRAVE ET C^ie^, LIB.-ÉDITEURS

RUE DES ÉCOLES, 78

1868

GÉOMÉTRIE
ANALYTIQUE

La *Géométrie analytique* a pour but l'étude des *figures* par les procédés du calcul ou de l'*analyse* algébrique.

C'est à Descartes que l'on doit la représentation des figures par des symboles algébriques; il en résulte, comme nous le verrons, une méthode générale pour la résolution des questions de géométrie.

Nous nous occuperons d'abord des figures planes ou à deux dimensions, et ensuite des figures dans l'espace ou à trois dimensions.

GÉOMÉTRIE PLANE

LIVRE I

PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE Ier

Des Coordonnées.

On détermine la position d'un point dans un plan au moyen de deux quantités que l'on nomme les *coordonnées* du point.

Il y a une infinité de *systèmes de coordonnées;* nous indiquerons seulement les systèmes les plus simples et le plus fréquemment employés.

COORDONNÉES RECTILIGNES.

1 — Soient deux droites ou axes fixes X'X et Y'Y tracées dans le plan (fig. 1); la position d'un point quelconque M du plan sera déterminée par l'intersection de deux droites G'G, H'H parallèles aux axes. La position de la parallèle H'H est définie par sa distance OP à l'axe Y'Y, distance comptée sur l'autre axe; il faut, de plus, indiquer dans quel sens est comptée la longueur OP; on convient pour cela d'affecter la distance OP du signe $+$ si elle est portée sur OX par exemple, du signe $-$ si elle est portée sur OX'. De même, la position de la parallèle G'G est définie par sa distance OQ à l'axe X'X, distance comptée sur le second axe et prise avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant qu'elle est portée sur OY ou OY'.

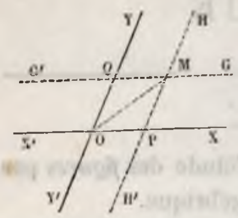


Fig. 1.

Ces deux longueurs OP et OQ (affectées chacune du signe convenable), qui déterminent ainsi la position des deux parallèles, et par conséquent le point M, sont les *coordonnées rectilignes* du point. On les désigne ordinairement par les lettres x et y. Cependant la coordonnée désignée par x porte plus particulièrement le nom d'*abscisse*, l'autre y celui d'*ordonnée*. Les deux droites fixes X'X et Y'Y s'appellent les *axes des coordonnées;* le premier est l'axe des x, le deuxième l'axe des y. Le point O, à partir duquel on compte les coordonnées sur chaque axe, dans un sens ou dans l'autre, prend le nom d'*origine des coordonnées*.

Si l'on donne à x et à y toutes les valeurs possibles positives ou négatives: en d'autres termes, si l'on fait varier x et y de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient tous les points du plan; d'ailleurs chaque couple de valeurs donne un point et un seul.

Nous ferons remarquer que les deux coordonnées du point M sont les projections de la droite OM sur les axes OX et OY, la projection sur chaque axe se faisant parallèlement à l'autre. La projection sur l'axe des x, comme la coordonnée x elle-même, est la longueur OP, affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant qu'elle est portée dans la direction OX ou dans la direction opposée OX′; de même la projection sur l'axe des y, comme la coordonnée y, est la longueur OQ, affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant qu'elle est portée dans la direction OY ou dans la direction opposée OY′.

COORDONNÉES RECTILIGNES RECTANGULAIRES.

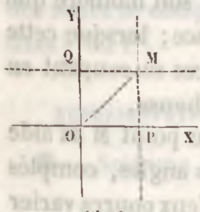


Fig. 2.

2 — Ordinairement on trace les axes fixes perpendiculaires entre eux : dans ce cas les deux coordonnées du point M (fig. 2) sont les distances de ce point aux deux axes, ce sont aussi les projections orthogonales de la droite OM sur les deux axes.

COORDONNÉES POLAIRES.

3 — Soit O un point fixe nommé *pôle*, OX un axe fixe (fig. 3); on peut déterminer la position du point M par la longueur ρ du *rayon vecteur* OM et par l'angle ω que fait ce rayon vecteur avec l'axe.

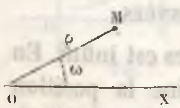


Fig. 3.

La position du point M est déterminée par l'intersection d'un cercle de rayon ρ, ayant pour centre le pôle, et d'une demi-droite OL partant du pôle et faisant avec l'axe OX l'angle ω (fig. 4); mais il faut convenir du sens dans lequel on compte l'angle ω, à partir de l'axe OX.

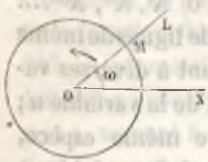


Fig. 4.

On obtient tous les points du plan en faisant varier ρ de 0 à $+\infty$ et ω de 0 à 2π. En effet, si laissant ω constant, on fait varier ρ de 0 à $+\infty$, on a tous les points de la demi-droite OL; si, ensuite, on fait varier ω de 0 à 2π, la demi-droite OL part de la position OX et décrit tout le plan.

COORDONNÉES BI-POLAIRES.

4 — On peut aussi définir la position d'un point M par ses distances u et v à deux points fixes F et F′ (fig. 5). La position du point M se trouve alors déterminée par l'intersection de deux circonférences décrites des points F et F′ comme centres avec les rayons u et v. Mais ce système n'offre pas la même perfection théorique que les deux précédents; d'abord, toute couple de valeurs de u et v n'est pas admissible; il faut que la distance des pôles soit moindre que leur somme et plus grande que leur différence; lorsque cette condition est remplie, les deux circonférences se coupant en deux points, il en résulte une ambiguïté fâcheuse.

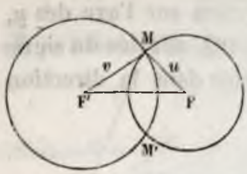


Fig. 5.

On peut encore déterminer la position du point M à l'aide des angles MFF′, MF′F; nous désignerons ces angles, comptés dans un sens déterminé, par α et β; chacun d'eux pourra varier entre o et 2π; à toute couple de valeurs de α et β correspond un point du plan et un seul.

IDÉE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE COORDONNÉES.

5 — Le nombre de systèmes des coordonnées est infini. En général, on détermine la position d'un point dans un plan par l'intersection de deux lignes tracées dans ce plan. Soient (fig. 6) A′, A″, A‴.... une première série de lignes de même espèce, correspondant à diverses valeurs u', u'', u''',.... de la variable u; B′, B″, B‴,... une seconde série de lignes de même espèce, correspondant à diverses valeurs v', v'', v''',... de la variable v; un point quelconque du plan est défini par les deux lignes qui passent en ce point, et les valeurs particulières qu'il faut donner aux variables u et v pour avoir ces deux lignes s'appellent les *coordonnées* du point. L'ensemble de ces deux séries de lignes constitue un système de coordonnées.

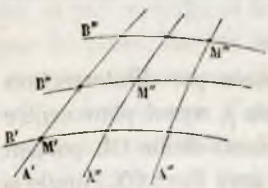


Fig. 6.

Dans le premier des systèmes que nous avons étudiés, chacune des deux séries de lignes se compose de droites parallèles; c'est pourquoi on désigne ces coordonnées sous le nom de coordonnées rectilignes.

Dans le système polaire, la première série se compose de demi-droites émanant du pôle O, et définies par l'angle variable ω qu'elles font avec l'axe OX (fig. 4); la seconde série, de cercles concentriques décrits autour du pôle avec le rayon variable ρ.

Dans le premier système bi-polaire, chacune des séries se compose de cercles concentriques. Dans le second, chacune des séries se compose de demi-droites partant de l'un des points fixes F ou F'.

REPRÉSENTATION DES LIGNES PLANES PAR DES ÉQUATIONS.

6 — Soit une ligne plane quelconque AB (fig. 7); traçons dans le plan deux axes OX et OY, et désignons par x et y les deux coordonnées OP et MP d'un point M quelconque de la ligne; quand le point M se meut sur la ligne, les deux coordonnées varient simultanément; si l'on donne à l'abscisse une valeur arbitraire OP, la grandeur de l'ordonnée correspondante MP est parfaitement déterminée, et la variation de l'abscisse entraîne celle de l'ordonnée. Ainsi l'ordonnée MP est une fonction de l'abscisse OP; la nature de cette fonction dépend de celle de la ligne. Quand la ligne est définie géométriquement, on conçoit que l'on puisse, de la définition géométrique de la ligne, déduire une équation entre x et y, servant à définir analytiquement la fonction y. L'équation en x et y que l'on trouve de cette manière s'appelle l'équation de la ligne.

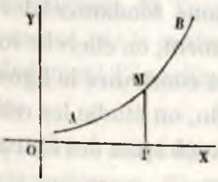


Fig. 7.

7 —Supposons, réciproquement, que l'on donne une équation

$$F(x,y)=0,$$

entre deux variables x et y; chaque couple de valeurs réelles de x et y satisfaisant à cette équation détermine un point du plan. Soient x_0 et y_0 des valeurs réelles de x et y vérifiant l'équation; si l'on fait varier x d'une manière continue à partir de x_0, l'une des valeurs de y variera aussi d'une manière continue à partir de y_0, et sera en général réelle tant que x restera comprise entre certaines limites ; le point, dont les coordonnées sont x et y, décrira dans le plan une ligne continue. Ainsi, *l'ensemble des solutions réelles d'une équation à deux variables est, en général, figuré par une ligne plane.*

8 — Ce que nous venons de dire des coordonnées rectilignes a lieu évidemment dans tout autre système de coordonnées. Dans le système polaire, quand le point M se meut sur la ligne, le rayon vecteur ρ varie avec l'angle ω ; c'est une fonction de ω, et la ligne est représentée par une certaine équation entre ρ et ω.

9 — La représentation des figures par des équations est la base de la Géométrie analytique; elle permet d'appliquer à l'étude des figures les procédés du calcul algébrique. On s'occupe, en Géométrie analytique, de trois questions fondamentales : quand une figure est définie géométriquement, on cherche son équation ; réciproquement, on apprend à construire la figure que représente une équation donnée ; enfin, on étudie les relations qui existent entre les propriétés géométriques des figures et les propriétés analytiques des équations.

Les exemples que nous donnons dans le chapitre suivant feront bien comprendre comment on représente les lignes par des équations.

CHAPITRE II

Exemples.

En général, la définition géométrique d'une courbe, déterminant chacun de ses points, correspond à un certain système de coordonnées; si l'on choisit le système particulier indiqué par l'énoncé, l'équation de la courbe est la traduction immédiate de sa définition géométrique.

CERCLE.

10 — *Le cercle est le lieu des points également distants d'un point fixe appelé centre.* On le décrit à l'aide d'un compas :

une pointe étant placée au centre, l'autre pointe trace la circonférence.

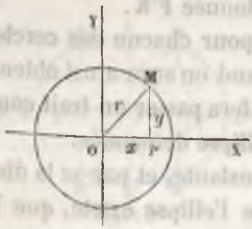


Fig. 8.

Si l'on prend le centre O pour pôle et une droite quelconque OX pour axe polaire (fig. 8), et que l'on désigne par r la longueur du rayon, l'équation de la circonférence en coordonnées polaires est

$$\rho = r, \tag{1}$$

puisque la longueur du rayon vecteur est constamment égale à r, quelle que soit la valeur de l'angle ω.

Cherchons maintenant l'équation du cercle en coordonnées rectilignes. Si l'on prend deux axes rectangulaires OX et OY passant par le centre, le triangle rectangle OMP donne immédiatement l'équation

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{2}$$

qui existe entre les deux coordonnées x et y d'un point M de la circonférence. C'est l'équation de la circonférence dans ce système de coordonnées.

ELLIPSE.

11 — *L'ellipse est une courbe telle que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constante.* Ces deux points sont les *foyers* de l'ellipse.

Il est facile de construire l'ellipse par points. Soient F et F′ (fig. 9) les deux foyers; portons sur la droite F′F une longueur F′K égale à la somme constante des distances de chacun des points de la courbe aux deux foyers. Du foyer F′ comme centre, avec différents rayons, décrivons une série de cercles; soit D

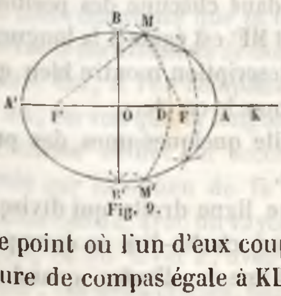


Fig. 9.

le point où l'un d'eux coupe la droite F′F; prenons une ouverture de compas égale à KD, et du foyer F comme centre, avec cette ouverture de compas, décrivons un second cercle; ce cercle coupera le premier en deux points M et M′ qui appartiendront à l'ellipse ; car la somme des distances MF′ et MF du point M aux deux foyers est égale à la somme des deux rayons F′D et KD, c'est-à-dire à la longueur donnée F′K.

On répétera la même construction pour chacun des cercles décrits du foyer F′ comme centre ; quand on aura ainsi obtenu un assez grand nombre de points, on fera passer un trait continu par tous ces points, et on aura l'ellipse demandée.

Si l'on désigne par $2a$ la somme constante, et par $2c$ la distance FF′ des foyers, il faut, pour que l'ellipse existe, que la longueur $2a$ soit plus grande que $2c$. Représentons par $a+\alpha$ le plus grand rayon ; le plus petit sera $a-\alpha$; les deux cercles se couperont lorsque la différence 2α des rayons sera plus petite que la distance des centres $2c$. Ainsi le plus grand rayon doit être plus petit que $a+c$, le plus petit plus grand que $a-c$.

On emploie la construction graphique que nous venons d'indiquer dans les épures sur le papier. Mais, dans les arts, quand on veut tracer une ellipse sur une planche ou sur une feuille de carton, on a recours à un procédé beaucoup plus rapide.

On fixe aux deux foyers F et F′ (fig. 10) deux pointes auxquelles on attache les deux extrémités d'un fil ayant la longueur voulue. On tend ensuite le fil avec un style ou un crayon que l'on fait mouvoir dans le plan en tenant le fil constamment tendu, et l'on décrit ainsi l'ellipse. Car, dans chacune des positions du fil, la somme des distances MF et MF′ est égale à la longueur constante de ce fil. Ce mode de description montre bien que l'ellipse est une courbe fermée comme le cercle.

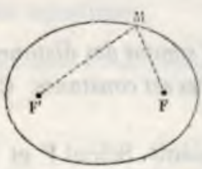


Fig. 10.

12 — Nous indiquerons de suite quelques-unes des propriétés les plus simples de l'ellipse.

On appelle *axe* d'une courbe une ligne droite qui divise la courbe en deux parties symétriques, c'est-à-dire en deux parties qui s'appliquent exactement l'une sur l'autre, quand on fait tourner la première autour de l'axe pour la rabattre sur la seconde.

Il est aisé de voir que la droite AA′ (fig. 11) menée par les deux foyers est un axe de l'ellipse. Car si l'on considère les deux points M et M′ déterminés par l'intersection de deux cercles décrits des foyers F et F′ comme centres, on a deux triangles égaux FMF′, FM′F′, qui coïncident lorsqu'on fait tourner la partie supérieure de la figure autour de la droite AA′, pour la rabattre sur la partie inférieure; le point M vient donc en M′; et, comme il en est de même pour tous les points deux à deux, la demi-ellipse AMA′ s'applique exactement sur l'autre moitié AM′A′. Ainsi la droite AA′ est un axe de l'ellipse.

Fig. 11.

On appelle *sommets* les points A et A′ où l'axe coupe la courbe. Nous avons, dans la construction de l'ellipse par points, porté sur l'axe, à partir du foyer F′, la longueur F′K égale à la somme constante. Le point A, milieu de FK, appartient à l'ellipse; car si l'on remplace la distance AF par son égale AK, on voit que la somme des distances AF′ et AF de ce point aux deux foyers est égale à la somme constante F′K; ainsi le point A est l'un des sommets. De même si l'on porte sur l'axe, à partir de l'autre foyer F, la longueur FK′ égale à F′K, et si l'on prend le milieu de F′K′, on aura le second sommet A′. Les deux distances AF et A′F′ sont égales comme moitiés de distances égales FK, F′K′, et les deux sommets A et A′ sont également distants des deux foyers F et F′.

Il faut remarquer que *la longueur* AA′ *est égale à la somme constante des distances de chacun des points de l'ellipse aux deux foyers*. Car, si l'on remplace le segment A′F′ par son égal AF ou AK, on voit que la longueur AA′ est égale à F′K.

L'ellipse admet un second axe, la perpendiculaire BB′ élevée sur le milieu de la droite FF′. En effet, du foyer F′ comme centre, avec un rayon égal à FM, décrivons un premier cercle, et du foyer F, avec un rayon égal à F′M, un second cercle; ces deux cercles, par leur intersection, détermineront deux nouveaux points N et N′ de l'ellipse. Les deux triangles FMF′, F′NF sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Faisons tourner la partie BAB' de la figure autour de BB', pour la rabattre de l'autre côté ; la droite OF s'applique sur OF' ; l'angle OFM étant égal à $OF'N$ dans les deux triangles égaux, la droite FM prend la direction $F'N$; et, comme ces deux droites sont égales, le point M tombe en N. Ainsi, la partie BAB' s'applique exactement sur l'autre moitié $BA'B'$, ce qui montre que la droite BB' est aussi un axe de l'ellipse.

On détermine les deux sommets B et B' par l'intersection de deux cercles égaux décrits des foyers comme centres, avec un rayon égal à la moitié OA de AA'. Car, les deux distances BF et BF' étant égales entre elles, chacune d'elles est égale à la moitié de la somme constante, et par conséquent à la moitié de AA'. La longueur BB' est plus petite que AA' ; car la ligne droite BB' est plus petite que la ligne brisée $BF + BF'$, qui est égale à AA'.

Les deux axes divisent l'ellipse en quatre parties égales.

13 — On appelle *centre* d'une courbe un point tel que tous les points de la courbe sont situés deux à deux sur une droite passant par le centre et à égale distance de part et d'autre.

Le point O, intersection des deux axes, ou milieu de la distance FF' des foyers, est centre de l'ellipse. En effet, soit M un point quelconque de l'ellipse ; joignons MO et prolongeons cette droite d'une longueur ON', égale à OM ; les deux diagonales FF', MN', se coupant mutuellement en deux parties égales, le quadrilatère $FMF'N'$ est un parallélogramme, et les côtés opposés sont égaux. La somme des distances $N'F + N'F'$ du point N' aux deux foyers étant égale à la somme $MF' + MF$, le point N' appartient aussi à l'ellipse. Ainsi les deux points M et N' de l'ellipse sont situés sur une droite MN' passant par le point O et à égale distance de part et d'autre. Il en est de même de tous les points deux à deux ; donc le point O est centre de l'ellipse.

14 — La forme et les dimensions de l'ellipse dépendent de la distance FF' des foyers et de la somme constante AA'. Nous avons vu comment on en déduit la longueur BB'. Inversement les deux longueurs AA' et BB', qui sont les portions des axes comprises dans l'ellipse, et que, pour abréger, on appelle les axes de l'ellipse, peuvent servir à définir cette courbe. On commencera par déterminer les foyers (fig. 12); pour cela, de l'une des extrémités B du petit axe comme centre, avec un rayon égal au demi-grand axe OA, on décrit une circonférence qui coupera le grand axe en deux points F et F′; l'ellipse dont les foyers sont F et F′ et le grand axe AA′ admet pour petit axe la droite BB′. Une fois les foyers déterminés, on construit l'ellipse par points, ou bien on la trace d'un mouvement continu, comme nous l'avons expliqué.

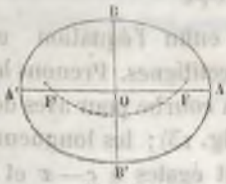


Fig. 12.

On appelle *excentricité* le rapport de la distance FF′ des foyers au grand axe AA′.

L'ellipse est une courbe fermée plus ou moins allongée; sa forme dépend de l'excentricité. Quand l'excentricité est nulle, les deux foyers se confondent avec le centre; la distance d'un point quelconque de l'ellipse au centre est constante et l'ellipse se réduit rigoureusement à une circonférence de cercle. Quand l'excentricité est très-petite, les foyers sont très-rapprochés du centre; les deux axes diffèrent peu l'un de l'autre, l'ellipse est arrondie et peu différente d'un cercle. A mesure que l'excentricité augmente, le grand axe étant supposé constant, les foyers s'écartent, le petit axe diminue et l'ellipse prend une forme de plus en plus aplatie.

15 — Cherchons maintenant l'équation de l'ellipse. Le système de coordonnées indiqué par l'énoncé est le premier système bi-polaire; si l'on détermine la position de chacun des points du plan par ses distances aux deux points fixes F et F′, l'ellipse aura pour équation

$$u + v = 2a. \tag{1}$$

Dans le second système bi-polaire, l'équation a aussi une forme très-simple; si l'on désigne par α et β les deux angles coordonnés MFF′, MF′F, et par $2p$ le périmètre $2a+2c$ du triangle MFF′, on a

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-2c)\,(p-u)}{p(p-v)}}, \qquad \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-2c)\,(p-v)}{p(p-u)}};$$

d'où (2) $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}=\frac{p-2c}{p}=\frac{a-c}{a+c}.$

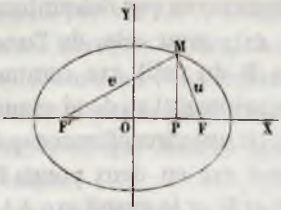


Fig. 13.

Cherchons enfin l'équation en coordonnées rectilignes. Prenons les deux axes de la courbe pour axes des coordonnées (fig. 13); les longueurs PF et PF′ étant égales à $c-x$ et à $c+x$, les triangles rectangles FMP, F′MP donnent

$$u=\sqrt{y^2+(c-x)^2},\quad v=\sqrt{y^2+(c+y)^2}.$$

En substituant les valeurs de u et de v dans l'équation (1), on obtient l'équation

$$(3)\qquad \sqrt{y^2+(c-x)^2}+\sqrt{y+(c+x^2}=2a.$$

Pour mettre cette équation sous forme entière, nous élèverons au carré, après avoir fait passer le premier radical dans le second membre, ce qui donne

$$y^2+(c+x)^2=4a^2+y^2+(c-x)^2-4a\sqrt{y^2+(c-x)^2},$$

ou, en simplifiant,

$$a\sqrt{y^2+(c-x)^2}=a^2-cx.$$

Une nouvelle élévation au carré conduit à l'équation

$$(4)\qquad a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2).$$

Mais l'équation (4) n'est pas équivalente à l'équation (3); elle équivaut aux quatre équations

$$u+v=2a,\quad u-v=2a,\quad -u+v=2a,\quad -u-v=2a,$$

que l'on obtient, quand dans l'équation (3) on change les signes des radicaux. L'équation $-u-v=2a$ n'a pas de solution réelle. Les équations $u-v=2a$, $-u+v=2a$ n'ont pas non plus de solution réelle, quand on suppose $2a>2c$; car les quantités u et v désignent les distances des points F et F′ à un point du plan ayant pour coordonnées x et y, et la différence des distances ne peut pas être égale à la longueur $2a$ plus grande que la distance $2c$ ou FF′. Ainsi, quand on se borne aux solutions réelles, on peut dire que l'équation (4) est équivalente à l'équation (3). La somme constante $2a$ étant plus grande que la distance des foyers $2c$, on peut poser $a^2 - c^2 = b^2$, et l'équation de l'ellipse se met sous la forme $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$,

ou
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (5)$$

HYPERBOLE.

16 — *L'hyperbole est une courbe telle que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constante.* Ces deux points fixes F et F′ sont les *foyers* de l'hyperbole.

Il est facile de construire l'hyperbole par points. Portons sur la droite F′F (fig. 14) une longueur F′K égale à la différence constante. Du foyer F′ comme centre, avec différents rayons, décrivons une série de cercles; soit D le point où l'un d'eux coupe la droite FF′; prenons une ouverture de compas égale à KD, et, du foyer F comme centre, avec cette ouverture du compas, décrivons un second cercle; ce cercle coupera le premier en deux points M et M′, qui appartiennent à l'hyperbole; car la différence des distances MF′ et MF du point M aux deux foyers est égale à la différence des deux rayons F′D et KD, c'est-à-dire à la longueur donnée F′K. On répétera la même construction pour chacun des cercles décrits du foyer F′ comme centre; quand on aura obtenu un assez grand nombre de points, on fera passer un trait continu par tous ces points, et on aura un arc d'hyperbole MAM′.

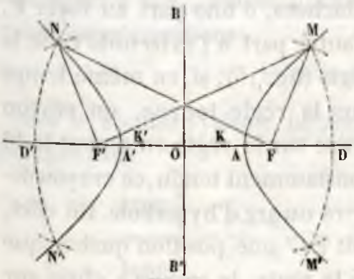


Fig. 14.

L'hyperbole se compose de deux branches indéfinies MAM′ NA′N′; pour la première, la distance MF est plus petite que MF′; pour la seconde, la distance NF est, au contraire, plus grande que NF′. On obtient la seconde branche comme la première, en portant sur la droite FF′ une longueur FK′ égale à la différence constante, décrivant, du foyer F comme centre, un cercle avec un rayon arbitraire FD′, et, du foyer F′ comme centre, un second cercle avec un rayon égal à F′D′.

Si l'on appelle $2a$ la différence constante et $2c$ la distance FF′ des foyers, il faut, pour que la courbe existe, que $2a$ soit moindre que $2c$. Désignons par $\alpha+a$ le plus grand rayon, le plus petit sera $\alpha-a$; les cercles se couperont lorsque la somme 2α des rayons sera plus grande que $2c$. Ainsi, le plus grand rayon doit être plus grand que $c+a$, le plus petit plus grand que $c-a$.

17 — On peut aussi décrire l'hyperbole d'un mouvement continu. Supposons qu'une règle tourne autour du foyer F′ et que les extrémités d'un fil soient attachées, d'une part au foyer F, d'autre part à l'extrémité G de la règle (fig. 15); si, en même temps que la règle tourne, un crayon glisse sur la règle en tenant le fil constamment tendu, ce crayon décrira un arc d'hyperbole. En effet, soit F′G′ une position quelconque de la règle; le crayon a glissé sur la règle de G′ en M, et le fil occupe alors la position G′MF. La différence des distances MF′ et MF ne change pas, si l'on augmente ces deux longueurs de la même quantité G′M; elle est donc égale à la différence constante qui existe entre la longueur de la règle G′F′ ou GF′, et la longueur du fil G′MF ou GF. On obtiendrait la seconde branche en faisant tourner la règle autour du foyer F.

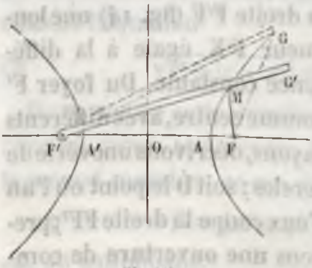


Fig. 15.

18 — La droite FF′ est un axe de la courbe; elle partage chacune des branches en deux parties symétriques; car les deux points M et M′, ou N et N′ (fig. 14), déterminés par l'intersection des deux cercles décrits des foyers comme centres, sont symétriques par rapport à cette droite. Les points A et A′, où elle rencontre la courbe, sont les sommets de l'hyperbole.

On obtient les sommets A et A′ en prenant les milieux de FK et de F′K′. La longueur AA′ de l'axe est égale à la différence constante des distances de chacun des points de l'hyperbole aux deux foyers; car, si l'on remplace A'F' par son égale AK, on voit que F'K est égale à AA'.

L'hyperbole admet un second axe, la perpendiculaire BB' élevée sur le milieu de la droite FF'. Le raisonnement que nous avons fait pour l'ellipse (nº 12) peut, en effet, être appliqué aux deux branches de l'hyperbole. Mais ce second axe ne rencontre pas la courbe; c'est pourquoi on a donné au premier le nom d'axe *transverse*, au second le nom d'axe *non transverse*. On voit aussi que le point O, milieu de la distance FF' des foyers, est le centre de la courbe.

19 — Dans le premier système bi-polaire, si l'on appelle u et v les distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers F et F', les deux branches de courbe ont respectivement pour équations

(1) $$v-u=\pm 2a.$$

Dans le second système bi-polaire, les équations des deux branches sont

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}=\frac{c+a}{c-a},\qquad \frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}=\frac{c-a}{c+a}.$$

En coordonnées rectangulaires, si l'on prend pour axes des coordonnées les deux axes de la courbe, l'équation de l'hyperbole est

$$\sqrt{y^2+(c+x)^2}-\sqrt{y^2+(c-x)^2}=\pm 2a.$$

En répétant ici les transformations du nº 15, on arrive à l'équation sous forme entière, $a^2y^2+(a^2-c^2)\,x^2=a^2\,(a^2-c^2)$, que nous avons déjà obtenue pour l'ellipse.

Cette équation, comme nous l'avons remarqué, équivaut aux quatre équations distinctes $v-u=\pm 2a$, $u+v=\pm 2a$; mais, dans le cas actuel, $2a$ étant plus petit que $2c$, les deux dernières n'ont pas de solution réelle. Si l'on pose $c^2-a^2=b^2$, l'équation de l'hyperbole prend la forme

(2) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Il est bon d'observer que, dans le système rectiligne, les deux branches de l'hyperbole sont comprises dans la même équation (2), tandis que, dans le premier système bi-polaire, l'une des branches est représentée par l'équation $v-u=2a$, l'autre par l'équation $u-v=2a$. Il faut aussi deux équations distinctes dans le second système bi-polaire.

PARABOLE.

20 — *La parabole est une courbe dont chacun des points est également distant d'un point fixe nommé foyer et d'une droite fixe appelée directrice.*

Il est facile de construire la parabole par points. Soit F le foyer, DD′ la directrice (fig. 16); menons par le foyer une droite BD perpendiculaire à la directrice; le point A, milieu de FD, est un premier point de la parabole. Traçons une série de droites parallèles à la directrice, à une distance plus grande que AD. Soit P le point où l'une d'elles rencontre la droite DB; du foyer F, avec une ouverture de compas égale à DP, décrivons un cercle qui coupera la parallèle en deux points M et M′ appartenant à la parabole. Car la perpendiculaire ME, abaissée du point M sur la directrice, est égale à DP, et par suite au rayon MF; le point M, étant également distant du foyer et de la directrice, est un point de la parabole. Répétons cette même construction pour chaque parallèle; quand nous aurons déterminé ainsi un nombre suffisant de points, nous ferons passer un trait continu par tous ces points.

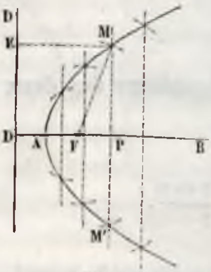


Fig. 16.

La droite DB, menée par le foyer perpendiculairement à la directrice, est un axe de parabole; car, d'après la construction, la corde MM′ est perpendiculaire à DB et divisée au point P en deux parties égales. Si donc on fait tourner la partie supérieure de la parabole autour de la droite DB, pour la rabattre de l'autre côté, la droite PM s'appliquera sur PM′, le point M en M′. Comme il en est de même pour tous les points deux à deux, on voit que la partie supérieure coïncidera exactement avec la partie inférieure ; donc la droite DB est *axe* de la parabole. Le point A, milieu de FD, est le *sommet* de la parabole.

La parabole n'est pas une courbe fermée comme l'ellipse ; elle se compose de deux branches qui se prolongent indéfiniment. Les dimensions de la parabole dépendent de la distance du foyer à la directrice, distance que l'on appelle *paramètre* de la parabole ; quand cette distance est très-petite, les deux branches de la parabole sont très-rapprochées l'une de l'autre. Elles s'écartent et la parabole s'ouvre d'autant plus que ce paramètre est plus grand.

21 — On peut aussi tracer la parabole d'un mouvement continu. Plaçons une règle sur la directrice DD′ (fig. 17); appliquons contre la règle une équerre GHK ; au sommet G attachons un fil d'une longueur égale au côté GH de l'équerre, l'autre extrémité étant attachée au foyer F ; tendons le fil contre l'équerre avec un crayon, puis faisons glisser l'équerre le long de la règle, et, en même temps, le crayon le long de l'équerre de manière à tenir le fil constamment tendu; nous décrirons un arc de parabole. En effet, soit M le point où se trouve le crayon quand l'équerre occupe la position GHK ; la longueur du fil ou la ligne brisée GM + MF étant égale au côté GH de l'équerre, la distance MF égale MH, et, par conséquent, le point M appartient à la parabole.

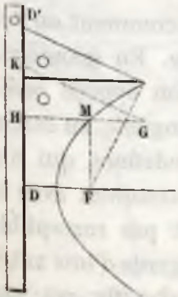


Fig. 17.

22 — La définition de la parabole indique un système de coordonnées dont nous n'avons point encore parlé. On peut déterminer un point quelconque M du plan par ses distances MF et ME au foyer F et à la directrice DD (fig. 18) : la position du point M sera donnée par l'intersection d'un cercle décrit du foyer comme centre et d'une droite parallèle à la directrice. Si l'on appelle u et v les deux coordonnées du point M, la para-

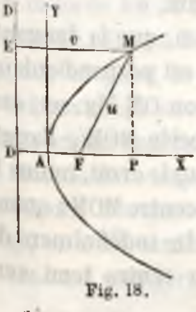


Fig. 18.

bole aura pour équation dans ce système

(1) $$u=v.$$

Prenons maintenant pour origine des coordonnées rectilignes le sommet A de la parabole, pour axe des x l'axe AX de la parabole, et pour axe des y une perpendiculaire AY. En désignant par p la distance FD du foyer à la directrice, on a

$$v=\mathrm{AP}+\mathrm{AD}=x+\frac{p}{2},\quad u=\sqrt{y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2},$$

et l'équation de la parabole devient

$$\sqrt{y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2},$$

ou (2) $$y^2=2px.$$

23 — Avant d'aller plus loin nous dirons comment on définit la tangente à une courbe quelconque. En géométrie élémentaire, on appelle ordinairement tangente au cercle une droite indéfinie, qui n'a qu'un point commun avec la circonférence; mais cette définition n'étant pas susceptible d'être généralisée, il convient de définir la tangente d'une autre manière. Soit M un point donné sur une courbe (fig. 19); par ce point et un point voisin M′, menons une droite indéfinie; imaginons maintenant que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, la droite MM′ tendra vers une position limite MT. C'est cette droite MT que l'on appelle *tangente* à la courbe au point M. On appelle *normale* à la courbe au point M la perpendiculaire menée par ce point à la tangente.

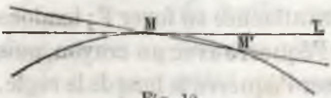


Fig. 19.

Il est aisé de voir, d'après cette définition, que la tangente au cercle au point M est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OM (fig. 20); car, dans le triangle isocèle MOM′, l'angle OMM′ est égal à un angle droit, moins la moitié de l'angle au centre MOM′; quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, l'angle au centre tend vers

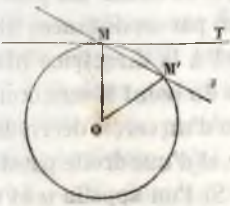


Fig. 20.

zéro, et l'angle OMM′ devient droit. La normale au cercle en M est le rayon MO.

CISSOÏDE DE DIOCLÈS.

24 — Étant donnés un cercle, un diamètre AB, une tangente BC à l'extrémité de ce diamètre (fig. 21), si autour du point A on fait tourner une sécante AE, sur laquelle on porte à partir du point A une longueur AM égale à la portion DE de la sécante comprise entre le cercle et la tangente fixe, le lieu du point M est une courbe qui porte le nom de *Cissoïde*.

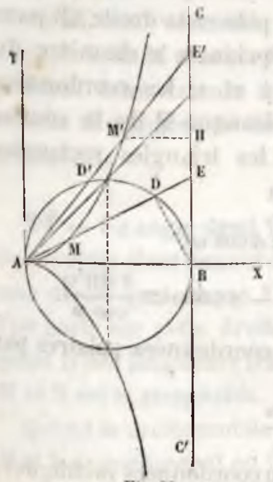


Fig. 21.

Si l'on suppose que la sécante mobile parte de la position AB et tourne autour du point A, de AX vers la perpendiculaire AY, la longueur DE, et par suite AM, augmentera indéfiniment; le point M décrira une branche de courbe infinie AMM′. Si l'on fait tourner la sécante mobile de l'autre côté de AB, on obtiendra évidemment une seconde branche égale à la première.

La droite AB est un axe de la courbe, puisque les deux branches sont symétriques par rapport à cette droite.

La tangente aux deux branches au point A coïncide avec l'axe. Car, si la sécante AM tourne autour du point A de manière à ce que la corde AM ou DE devienne nulle, elle tend vers la position limite AB; donc AB est la tangente en A. Le point A est ce qu'on appelle un point de *rebroussement*.

On peut voir aussi que les deux branches de la courbe se rapprochent indéfiniment de la droite CC′. En effet, considérons la sécante dans la position AE′; si de la longueur totale AE′ on retranche alternativement les deux longueurs égales AM′ et D′E′, on a M′E′ = AD′. La corde AD′ diminuant de plus en plus et tendant vers zéro, il en est de même de la longueur M′E′, et à plus forte raison de la perpendiculaire M'H. Cette droite CC', dont la courbe se rapproche indéfiniment, s'appelle une *asymptote*.

La cissoïde a été imaginée par le géomètre grec Dioclès, pour résoudre le problème de la construction de deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données.

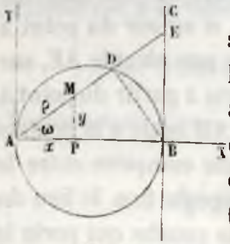


Fig. 22.

25 — Cherchons l'équation de la cissoïde en coordonnées polaires; prenons le point A pour pôle et la droite AB pour axe polaire. Appelons a le diamètre du cercle donné, ρ et ω les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe (fig. 22). Dans les triangles rectangles ABE, ABD, on a

$$AE=\frac{a}{\cos\omega}, \quad AD=a\cos\omega;$$

d'où $$\rho=DE=AE-AD=\frac{a}{\cos\omega}-a\cos\omega=\frac{a\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

Ainsi la cissoïde est représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$(1) \qquad \rho=\frac{a\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

Cherchons maintenant l'équation en coordonnées rectilignes; prenons le point A pour origine, la droite AB pour axe des x et une perpendiculaire pour axe des y. Dans le triangle rectangle MAP, on a

$$x=\rho\cos\omega, \quad y=\rho\sin\omega, \quad \rho^2=x^2+y^2;$$

si, dans l'équation (1), on remplace d'abord $\cos\omega$ par $\frac{x}{\rho}$, $\sin\omega$ par $\frac{y}{\rho}$, ce qui donne $\rho^2 x=ay^2$, puis ρ^2 par x^2+y^2, on arrive à l'équation de la cissoïde en coordonnées rectilignes

$$(2) \qquad y^2(a-x)-x^3=0.$$

26 — Proposons-nous de construire, au moyen de son équation en coordonnées rectilignes, la cissoïde dont nous avons déjà trouvé la forme d'après sa définition géométrique.

En résolvant l'équation par rapport à y, on a

$$y=\pm x\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

L'ordonnée n'est réelle que pour les valeurs de l'abscisse comprises entre o et a; donc la courbe est située tout entière entre l'axe des y et la parallèle CC′ menée à la distance a (fig. 21). Quand x croît de o à a, la valeur numérique de y croît de o à ∞, ce qui donne une branche de courbe partant de l'origine A et s'élevant indéfiniment. En même temps, la distance $MH = a - x$ d'un point de la courbe à la droite BC tend vers zéro, ce qui fait voir que la droite BC est asymptote de la courbe. Comme à chaque valeur de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires, la courbe se compose de deux branches symétriques par rapport à l'axe AX.

STROPHOÏDE.

27 — Un angle droit YOX (fig. 23) et un point fixe A sur un de ses côtés étant donnés dans un plan, on mène du point fixe A une droite quelconque AD qui rencontre le côté OY en D, et l'on porte sur cette droite d'un côté et de l'autre à partir du point D des longueurs DM et DN égales à OD; le lieu des points M et N est la *strophoïde*.

Quand la droite mobile occupe la position AO, les deux points M et N se confondent en O. Si la droite tourne de manière à ce que le point D s'élève indéfiniment sur OY, OD augmente, et l'on voit que le point N décrit une branche de courbe infinie ON. Quant au point M, il se rapproche de plus en plus du point A. En effet, on obtient les points M et N en décrivant un cercle du point D comme centre avec DO pour rayon; quand le point D s'élève à l'infini, l'arc de cercle OM coïncide avec la droite OA, et le point M vient en A. Il y a évidemment une partie symétrique de l'autre côté de l'axe OX.

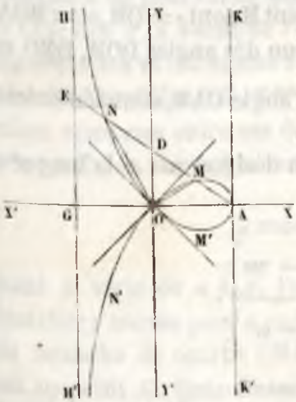


Fig. 23.

Le point O, par lequel passent les deux branches de courbe, s'appelle *point multiple*. Les tangentes en ce point aux deux branches de courbe coïncident avec les bissectrices des angles droits YOX, YOX'. Car l'angle ODE, extérieur au triangle isocèle DOM, est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés, et, par conséquent, à deux fois l'angle DOM ; de même l'angle ODA est égal à deux fois l'angle DON. Quand la droite AD s'applique sur AO, l'angle obtus ODE diminue et tend vers un angle droit; l'angle moitié YOM diminue et tend vers $\frac{\pi}{4}$; l'angle aigu ODA augmente et tend vers un angle droit ; l'angle moitié YON augmente et tend aussi vers $\frac{\pi}{4}$. On peut remarquer d'ailleurs que les deux droites OM et ON sont rectangulaires. On voit, en outre, que l'arc OMA est situé au-dessous de sa tangente, tandis que l'arc ON est au-dessus.

La tangente au sommet A est perpendiculaire à l'axe OX ; car, lorsque le point D s'élève indéfiniment, la corde AM devient perpendiculaire à OX.

Sur le prolongement de AO prenons OG = OA, et par le point G élevons la perpendiculaire HH' ; cette droite est asymptote de part et d'autre aux deux branches infinies de la courbe ; car la distance NE, égale à AM, tend vers zéro.

28 — Cherchons l'équation de la courbe en coordonnées polaires. Prenons le point O pour pôle, et la droite OA pour axe polaire ; les coordonnées du point M sont $\rho = \text{OM}$, $\omega = \text{MOA}$; dans le triangle isocèle DOM, chacun des angles DOM, DMO est égal à $\frac{\pi}{2} - \omega$, et l'angle ODM à 2ω ; l'angle OAM, complémentaire du précédent, vaut $\frac{\pi}{2} - 2\omega$. Si l'on désigne par a la longueur OA, on a, dans le triangle OMA,

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\omega\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)},$$

d'où
$$(1) \qquad \rho = \frac{a \cos 2\omega}{\cos \omega}.$$

Les coordonnées du point N vérifient la même équation.

Cherchons maintenant l'équation de la courbe en coordonnées rectilignes, en prenant pour axes les deux droites OX et OY; si, dans l'équation précédente, mise sous la forme $\rho \cos\omega = a(\cos^2\omega - \sin^2\omega)$, on remplace $\cos\omega$ et $\sin\omega$ par leurs valeurs $\frac{x}{\rho}$ et $\frac{y}{\rho}$, on a $x\rho^2 = a(x^2 - y^2)$; mettant ensuite à la place de ρ^2 sa valeur $x^2 + y^2$, on arrive à l'équation du troisième degré

$$x(x^2+y^2) - a(x^2-y^2) = 0. \tag{2}$$

29 — Proposons-nous maintenant de construire la courbe au moyen de son équation en coordonnées rectilignes. L'équation (2), résolue par rapport à y, donne

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Pour que l'ordonnée y soit réelle, il faut que la quantité placée sous le radical soit positive. Quand on donne à x des valeurs positives, le dénominateur étant positif, le numérateur doit être aussi positif, ce qui exige que x soit plus petit que a. Quand on donne à x des valeurs négatives, le numérateur étant positif, le dénominateur doit être aussi positif, ce qui exige que la valeur absolue de x soit moindre que a. Ainsi l'abscisse x ne peut varier que de $-a$ à $+a$; si donc on porte sur l'axe des x, à partir de l'origine, et de part et d'autre, des longueurs OA et OG égales à a, et que par les points G et A on mène des parallèles HH', KK' à l'axe des y, la courbe sera tout entière comprise entre ces deux parallèles. On verra la forme de la courbe en suivant la variation de la fonction

$$y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Quand x varie de 0 à a, l'ordonnée y conserve des valeurs finies; elle s'annule pour $x=0$, et aussi pour $x=a$; il en résulte une branche de courbe OMA, partant du point O, et aboutissant au point A. Quand x varie de 0 à $-a$, l'ordonnée y est négative et varie de 0 à $-\infty$; il en résulte une branche ON', qui part de l'origine et s'abaisse indéfiniment, en se rapprochant de plus en plus de la droite HH', qui est une asymptote; cette branche ON' fait suite à la branche AMO.

En changeant le signe du radical, on obtient une branche AM'ON symétrique de la première par rapport à l'axe des x.

LIMAÇON DE PASCAL.

30 — Par un point A pris sur un cercle, on mène une sécante quelconque AD, sur laquelle à partir du point D, où elle rencontre le cercle, on porte de part et d'autre une longueur donnée DM ou DN ; le lien des points M et N (fig. 24) est une courbe nommée *limaçon de Pascal*.

On obtiendra la courbe entière en supposant que le rayon vecteur coïncide d'abord avec le diamètre AB du cercle, et tourne ensuite d'un angle droit dans un sens ou dans l'autre. On obtiendra aussi la courbe entière en faisant faire au rayon une révolution complète, et portant la longueur constante dans le sens du rayon à partir du point où ce rayon ou son prolongement coupe le cercle. La courbe présente trois formes différentes, suivant que la longueur constante a est supérieure, égale ou inférieure au diamètre b du cercle.

1° Considérons d'abord le cas où la longueur a est plus grande que b. Quand le rayon coïncide avec AB, il faut, à partir du point B, porter sur ce rayon une longueur BG égale à a, ce qui donne un point G du lieu (fig. 24). Lorsque le rayon tourne autour du point A et occupe la position AD, on a le point M.

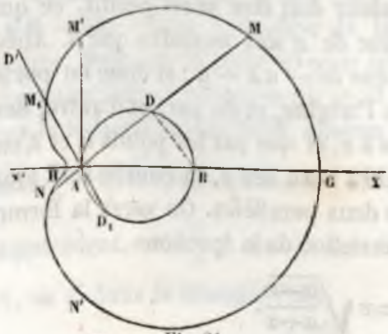


Fig. 24.

Quand le rayon a tourné d'un angle droit, le point D vient en A, et le point M en M'. Le rayon, continuant son mouvement, prend la direction AD' ; son prolongement coupe le cercle en D_1; il faut, à partir de ce point D_1, porter dans la direction même AD' une longueur D_1M_1 égale à a. Quand le rayon, ayant tourné de deux angles droits, occupe la position AX', le point D_1 vient en B, et le point M_1 en H; on a ainsi l'arc $M'M_1H$ qui fait suite au premier, et qui est aussi extérieur au cercle. Le rayon dépassant la position AX' et tournant encore de deux angles droits pour revenir à la position initiale AX, le point mobile décrit l'arc $HN'G$, symétrique de l'arc GMH par rapport à la droite $X'X$. De cette manière le point décrit la courbe entière d'un mouvement continu.

2° Supposons maintenant que la longueur a soit égale à b. Le rayon vecteur tournant de deux angles droits, à partir de la position initiale AX, le point M décrit l'arc $GMM'A$ (fig. 25), qui vient aboutir au point A. La tangente en A est la droite AX', position limite de la sécante AM_1. Le point A est un point de rebroussement.

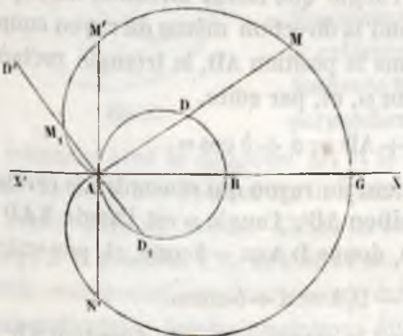


Fig. 25.

3° Considérons enfin le cas où la longueur a est plus petite que b. Lorsque le rayon vecteur tourne d'un angle droit à partir de la position initiale AX, le point M décrit l'arc GMM' (fig. 26). Le rayon prend ensuite la direction AD'; le point D vient en D_1, le point M en M_1. Le rayon arrive à une position AD'' telle que la corde D_2A est égale à a; le point M_1 vient alors en A et la courbe est tangente à la droite AD''. Le rayon continuant son mouvement, la corde D_2A devient plus grande que a, et, si l'on prend la longueur D_3M_2 égale à a, on a un point M_2 situé à l'intérieur du cercle. Enfin.

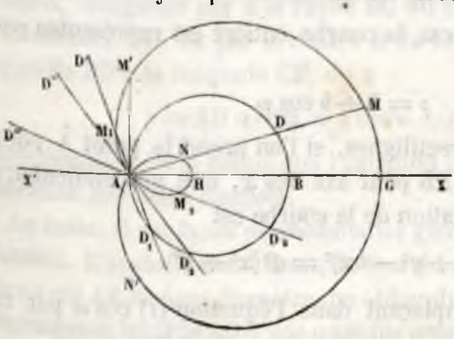


Fig. 26.

quand le rayon prend la direction AX', le point M_3 vient en H. L'arc extérieur GM'A se prolonge ainsi suivant l'arc intérieur AM_3H. L'autre moitié de la rotation donne l'arc HNAN'G, symétrique du premier par rapport à la droite X'X, et complète la courbe.

31 — Cherchons l'équation de la courbe en coordonnées polaires. Prenons le point A pour pôle, et la droite AX pour axe polaire. Appelons ω l'angle que fait la direction du rayon avec la direction AX. Quand la direction même du rayon coupe le cercle, ce qui a lieu dans la position AD, le triangle rectangle ADB donne $AD = b\cos\omega$, et, par suite,

$$\rho = DM + AD = a + b\cos\omega.$$

Quand c'est le prolongement du rayon qui rencontre le cercle, ce qui a lieu dans la position AD', l'angle ω est l'angle XAD'; le triangle rectangle BAD_1 donne $D_1A = -b\cos\omega$, et, par suite,

$$\rho = D_1M_1 - D_1A = a + b\cos\omega.$$

Dans la figure 26, quand le rayon occupe la direction AD''', la longueur du rayon vecteur n'est plus portée dans la direction même de ce rayon, mais dans la direction opposée; il convient de regarder ce rayon vecteur comme négatif; on a alors

$$\rho = -AM_3 = D_3M_3 - AD_3 = a + b\cos\omega.$$

Ainsi, dans tous les cas, la courbe entière est représentée par l'équation

$$\rho = a + b\cos\omega. \qquad (1)$$

En coordonnées rectilignes, si l'on prend le point A pour origine, le diamètre AB pour axe des x, une perpendiculaire pour axe des y, l'équation de la courbe est

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2). \qquad (2)$$

On l'obtient en remplaçant dans l'équation (1) $\cos\omega$ par sa valeur $\frac{x}{\rho}$, puis ρ^2 par $x^2 + y^2$ (n° 25), et élevant au carré pour faire disparaître le radical.

32 — On obtient cette même courbe par un autre procédé.

Étant donné un cercle GH et un point fixe A, imaginons qu'une tangente mobile CM roule sur le cercle, et du point A abaissons

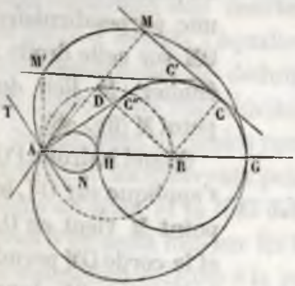


Fig. 27.

une perpendiculaire AM sur cette tangente (fig. 27); on demande le lieu du point M.

Il y a trois cas à considérer, suivant que le point A est intérieur au cercle, sur le cercle, ou extérieur. Supposons, par exemple, le point A extérieur au cercle. Lorsque la tangente touche le cercle en G, la perpendiculaire abaissée du point A coïncide avec le diamètre AG et le point G est un point du lieu. La tangente roulant sur le quart de cercle GCC′, le point M décrit l'arc de courbe GMM′. La tangente s'incline ensuite jusqu'à la position C′A, et l'on a l'arc de courbe M′A. La tangente continuant son mouvement suivant C″H, le pied de la perpendiculaire tombe au-dessous du diamètre et l'on a l'arc de courbe ANH. Nous avons fait rouler la tangente sur le demi-cercle GC′N; en la faisant rouler sur le demi-cercle inférieur, on obtiendra une partie symétrique de la première.

Cherchons l'équation de cette courbe en coordonnées polaires; prenons le point A pour pôle, le diamètre AG pour axe polaire; désignons par a le rayon BG du cercle donné, et par b la distance AB. Si, par le centre B du cercle, on mène une parallèle BD à la tangente CM, on a

$$\rho = \mathrm{AD} + \mathrm{DM} = b \cos \omega + a.$$

Cette équation est la même que l'équation (1), d'où l'on conclut l'identité des deux courbes.

Au reste, il est facile de reconnaître géométriquement cette identité. L'angle D étant droit, le lieu du point D est le cercle décrit sur AB comme diamètre; on obtiendra donc le point M en prolongeant la corde AD d'une quantité constante DM égale à BC.

ROSACE A QUATRE BRANCHES.

33 — Étant données deux droites rectangulaires OX, OY, sur lesquelles glissent les extrémités d'une droite PQ de longueur constante, du point O on abaisse une perpendiculaire OM sur cette droite; étudier le lieu du point M (fig. 28).

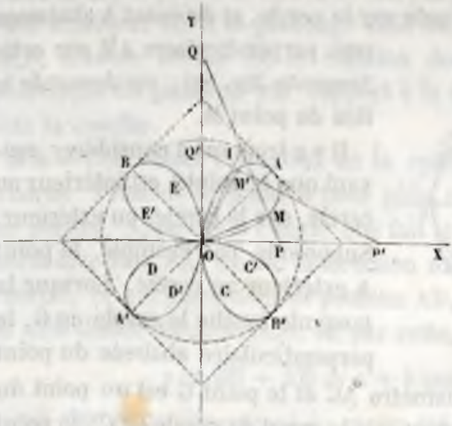


Fig. 28.

Quand la droite PQ s'applique sur OY, le point M vient en O, et la corde OM prend la direction OX; donc la tangente en O à l'arc OM coïncide avec OX. Le point I, milieu de PQ, décrit un cercle dont le centre est en O, et le rayon égal à a, si l'on désigne par $2a$ la longueur constante PQ. Or la perpendiculaire OM est plus petite que l'oblique OI; donc la distance OM est maximum quand la droite PQ est perpendiculaire sur la bissectrice OA. Lorsque la droite mobile continue son mouvement, elle passe par une position P'Q' symétrique de PQ par rapport à la bissectrice OA, et l'on obtient un arc OM'A symétrique de l'arc OMA. La même courbe se reproduit dans chacun des quatre angles droits. Ainsi la courbe a *quatre axes*, savoir : les deux droites fixes O'X, O'Y, et les deux bissectrices à A'A, B'B. Le point O est *centre* de la courbe.

Si l'on prend le point O pour pôle, et OX pour axe polaire, on a, dans les triangles rectangles OMP, OPQ,

$$\rho = \mathrm{OP}\cos\omega,\quad \mathrm{OP} = 2a\sin\omega;$$

donc

$$\rho = a\sin 2\omega. \tag{1}$$

En coordonnées rectilignes, la courbe est représentée par une équation du sixième degré :

$$(x^2+y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0. \tag{2}$$

TANGENTE.

34 — Les exemples qui précèdent montrent comment on peut construire une courbe d'après sa définition géométrique et trouver ensuite l'équation qui la représente. Il est possible aussi quelquefois de déduire de la définition géométrique de la courbe une construction simple de la tangente. Nous en citerons deux exemples remarquables, savoir : les courbes décrites par les différents points d'une figure plane qui se meut dans un plan, et le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes à une courbe donnée. La construction relative à la première classe dépend des propositions suivantes:

LEMME. *Toute figure plane peut être amenée d'une position à une autre par une rotation autour d'un point fixe.*

Nous remarquons d'abord que la position d'une figure plane dans un plan est déterminée lorsqu'on connaît les positions de deux de ses points. Soient A et B, deux points de la figure dans sa première position (fig. 29), A′ et B′ ces mêmes points dans sa seconde position ; la droite AB, de longueur invariable, s'est transportée en A′B′. Élevons des perpendiculaires aux droites AA′ BB′ ; en leurs milieux, ces perpendiculaires se coupent en un point I. Les deux triangles AIB, A′IB′ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir : AB égal à A′B′, IA et IA′ égaux comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire, et de même IB et IB′ ; donc les deux angles AIB, A′IB′ sont égaux ; en retranchant la partie commune A′IB, on en conclut que les angles AIA′, BIB′ sont égaux. Imaginons maintenant que la figure tourne autour du point fixe I de l'angle AIA′, le rayon IA viendra sur IA′ et le point A en A′ ; de même, le rayon IB, tournant d'un angle BIB′ égal à AIA′, viendra sur IB′ et le point B en B′. Cette rotation autour du point I amène donc la figure de sa première position à la seconde.

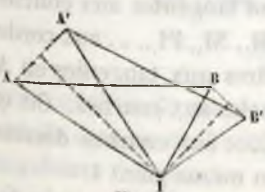


Fig. 29.

THÉORÈME. *Si l'on considère les courbes décrites par les différents points* A, B, C *d'une figure plane invariable qui se meut dans un plan, les normales à ces courbes aux points qui correspondent à une même position de la figure passent par un même point.*

Soient A, B, C différents points de la figure dans une position quelconque, A′, B′, C′,... ces mêmes points dans une position voisine; d'après ce que nous avons dit, on peut amener la figure de la première position à la seconde en la faisant tourner autour d'un certain point I_1; dans le mouvement, les rayons I_1A, I_1B, I_1C,... décrivent des angles respectivement égaux et viennent se placer sur I_1A', I_1B', I_1C'... (fig. 30). Les perpendiculaires MI_1, NI_1, PI_1,... aux cordes AA′, BB′, CC′,... en leurs milieux, passent toutes par le point I_1.

Fig. 30.

Supposons maintenant que la seconde position se rapproche de plus en plus de la première; le point I_1 tend vers une position limite I; les cordes AA′, BB′, CC′,... prolongées, deviennent tangentes aux courbes en A, B, C...; les perpendiculaires MI_1, NI_1, PI_1,... aux cordes se confondent avec les perpendiculaires aux tangentes en A, B, C,... c'est-à-dire avec les normales aux courbes. On en conclut que les normales en A, B, C,... aux courbes décrites par ces points, passent toutes par un même point I.

COROLLAIRE. Si l'on sait mener les normales aux courbes décrites par deux points A et B de la figure mobile, ces deux normales, par leur intersection, détermineront le point I; en joignant le point I à un troisième point quelconque C, on aura la normale à la courbe décrite par le point C; une perpendiculaire à la normale sera la tangente. C'est ce qui a lieu si deux points décrivent des lignes droites ou des circonférences de cercle. Voici quelques applications de cette méthode.

35 — Nous allons faire voir que lorsque deux points de la figure mobile décrivent des droites, la courbe décrite par un point quelconque est une ellipse; la méthode précédente nous donnera le moyen de construire la tangente à l'ellipse.

Supposons d'abord que les deux extrémités d'une droite CD, de longueur invariable, glissent sur deux droites rectangulaires fixes OX, OY, et cherchons le lieu décrit par un point M de cette droite (fig. 31). Quand la droite CD est appliquée sur

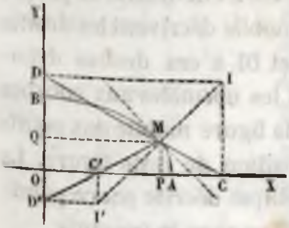


Fig. 31.

OX, le point M est en A, à une distance OA égale à DM; l'extrémité D glissant sur OY et s'éloignant du point O, l'extrémité C se rapproche du point O, et le point M décrit l'arc AMB ; la droite s'appliquant sur OY, le point M vient en B, à une distance MB égale CM. Le même arc se reproduit dans chacun des quatre angles droits, et la courbe fermée que l'on obtient ainsi est une ellipse.

En effet, si l'on prend les deux droites fixes OX, OY pour axes des coordonnées, que l'on appelle a et b les deux longueurs constantes DM et CM, x et y les coordonnées du point M, les triangles semblables MPC, DQM donnent

$$\frac{MP}{CQ}=\frac{CM}{DM}, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{a},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,;$$

c'est l'équation (5) du n° 15. Ainsi, la courbe est une ellipse dont les axes $2a$ et $2b$ sont dirigés suivant les deux droites rectangulaires données.

Il n'est pas nécessaire que le point M soit situé sur la droite mobile entre les points C et D; il peut être situé sur le prolongement. Considérons la droite C′D′ dont les deux points C′ et D′ glissent sur les deux droites rectangulaires OX et OY, et cherchons le lieu décrit par le point M. Si l'on appelle a et b les distances D′M et C′M, les triangles semblables MPC′, D′QM donneront, comme précédemment,

$$\frac{MP}{DQ}=\frac{MC'}{MD'}, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{a}.$$

C'est sur cette propriété que repose la construction d'un petit instrument appelé *compas elliptique*. Deux pointes sont fixées en deux points C et D, pris à volonté sur une droite CD, et un crayon au point M ; les deux pointes glissent dans des rainures pratiquées sur deux droites rectangulaires OX et OY ; le crayon placé en M décrit l'ellipse d'un mouvement continu.

Il est évident qu'une ligne droite est à elle-même sa propre tangente. Les points C et D du plan mobile décrivent les droites OX et OY ; les perpendiculaires CI et DI à ces droites déterminent le point I par lequel passent les normales aux courbes décrites par les différents points de la figure mobile aux points qui correspondent à une même position de cette figure. La droite IM est donc normale en M à l'ellipse décrite par ce point ; en menant une perpendiculaire à IM, on aura la tangente.

Supposons maintenant que deux points E et F du plan mobile glissent sur deux droites fixes quelconques OA et OB (fig. 32). Les perpendiculaires à ces droites aux points E et F

Fig. 32.

déterminent le point de concours I des normales. Le cercle décrit sur OI, comme diamètre, passe par les points E et F ; la droite EF étant constante ainsi que l'angle EOF, le diamètre du cercle est constant. Imaginons que le cercle soit situé dans le plan mobile et emporté dans son mouvement avec la droite EF ; ce cercle passera constamment par le point O ; tout point D de la circonférence décrira une ligne droite OY, puisque l'angle inscrit FOD, qui a pour mesure la moitié de l'arc constant FD, est lui-même constant.

Considérons un point quelconque M du plan mobile ; joignons ce point au centre K du cercle ; les deux points C et D, extrémités du diamètre MK, décrivent deux droites rectangulaires OX et OY ; on en conclut que le point M décrit une ellipse dont les axes, égaux à deux fois les distances DM et CM, sont dirigés suivant OX et OY. La droite IM est normale à l'ellipse au point M.

36. — *Conchoïde*. Étant donnés un point A et une droite CC', par le point A on mène une sécante quelconque AD et, à partir du point D où elle rencontre la droite CC', on porte de part et d'autre une longueur donnée DM et DN; le lieu des points M et N est une conchoïde (fig. 33).

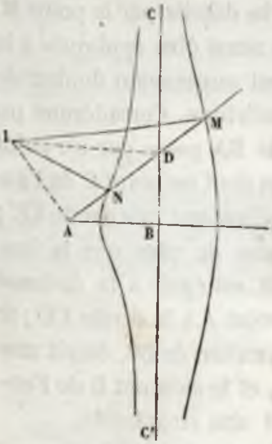


Fig. 33.

On voit aisément que cette courbe se compose de deux branches infinies situées de part et d'autre de la droite CC', asymptotes à cette droite. La branche de gauche présente des formes différentes suivant que la longueur DM est inférieure, égale ou supérieure à la perpendiculaire AB abaissée du point A sur la droite CC'.

Cette courbe rentre dans la catégorie précédente; on peut regarder en effet la droite AD comme se mouvant dans le plan, de manière que l'un de ses points D décrive la droite CC', tandis qu'elle glisse sur le point A autour duquel elle tourne. Un point M de cette droite décrit une branche de conchoïde. Considérons le point de la droite mobile qui est en A, lorsque la droite occupe la position AD; ce point décrit une branche de conchoïde passant par le point A et tangente en ce point à la droite AD; la normale à cette courbe particulière est la droite AI perpendiculaire à AD. La normale à la ligne décrite par le point D est la perpendiculaire DI à la droite CC'; en joignant au point M le point d'intersection I de ces deux normales, on a la normale IM à la courbe décrite par le point M; la perpendiculaire à IM est la tangente en M.

Le limaçon (nº 30) est une courbe analogue à la conchoïde; il suffit de remplacer la droite CC', sur laquelle glisse le point D, par une circonférence de cercle (fig. 34). Considérons encore le point de la droite mobile qui est en A, quand la droite occupe la position AD; ce point décrit une courbe passant par le point A et tangente en ce point à la droite AD; la normale à cette courbe est la perpendiculaire AI. La normale à la circonférence décrite par le

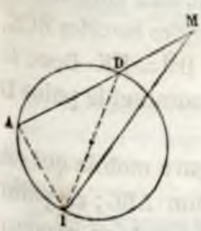


Fig. 34.

point D est le diamètre DI; le point de concours I des normales est donc l'extrémité du diamètre qui passe par le point D; en joignant IM, on a la normale à la courbe décrite par le point M.

37 — La même construction peut aussi être appliquée à la cissoïde et à la strophoïde; mais il faut auparavant donner de ces courbes une autre définition géométrique. Considérons un angle droit ABC (fig. 35), dont un côté BA passe par un point fixe A, et dont un point C de l'autre côté glisse sur une droite EE′; on suppose de plus que la longueur BC est égale à la distance AO du point A à la droite EE′; le point M, milieu de BC, décrit une cissoïde, et le sommet B de l'angle droit une strophoïde.

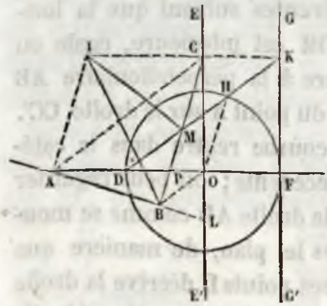


Fig. 35.

En effet, les deux triangles rectangles ABC, AOC étant égaux, les angles CAL, ACL sont égaux, et le triangle ALC isocèle; puisque AB est égal à CO, on a aussi LB = LO; donc le lieu du point B est une strophoïde (n° 27).

Dans les mêmes triangles rectangles, les angles ACP, CAP étant égaux, le triangle ACP est isocèle. Joignons le point M au point D, milieu de AO; puisque CM est égal à AD, la droite DM est parallèle à AC; prolongeons cette ligne jusqu'à sa rencontre en K avec la parallèle à AO, menée par le point C, on aura CK = AD = CM. Du point O comme centre avec un rayon égal à OD, décrivons un cercle; joignons le centre au point de rencontre du cercle avec la droite DK et menons par l'extrémité F du diamètre une parallèle GG′ à EE′; cette droite sera tangente au cercle et passera par le point K. Les deux triangles isocèles MCK, DOH étant égaux, on a DH = MK et par suite DM = HK. Donc le lieu du point M est une cissoïde ayant pour sommet le point D t pour asymptote la droite GG′ (n° 24).

Considérons maintenant le point de la figure mobile qui est en A, lorsque l'angle droit occupe la position ABC; ce point décrit une courbe passant par le point A et tangente en ce point à la droite AB; la droite AI, perpendiculaire à AB, sera la normale à cette courbe. D'autre part, la droite CI, perpendiculaire à EE′, est la normale à la droite décrite par le point C. Le point d'intersection I de ces deux normales est le point de concours de toutes les normales. Donc les droites IB et IM sont normales, l'une à la strophoïde, l'autre à la cissoïde.

PODAIRES.

38 — On appelle podaire d'une courbe donnée AB le lieu du pied P de la perpendiculaire abaissée d'un point fixe O sur une tangente quelconque MP à cette courbe (fig. 36). Une tangente voisine M′P′ donnera un second point P′ de la podaire. Soit D le point d'intersection des deux tangentes; le cercle décrit sur OD, comme diamètre, passe par les points P et P′, et la droite PP′ est une sécante du cercle. Imaginons maintenant que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, le point D viendra en M, et le diamètre OD coïncidera avec OM; la sécante PP′ deviendra tangente à la fois à la podaire et au cercle; la normale à la podaire coïncidera donc avec la normale au cercle construit sur OM comme diamètre, et l'on obtiendra cette normale en joignant le point P au point C, milieu de OM.

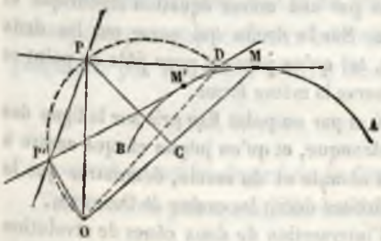


Fig. 36.

Cette construction peut être appliquée aussi au limaçon, qui est la podaire du cercle (n° 32). Mais nous verrons plus tard que la construction des tangentes aux podaires se ramène à la méthode générale indiquée au n° 34.

EXERCICES.

1° Un triangle variable ABC, dont le sommet A est fixe et l'angle A constant, est inscrit dans un cercle donné. Démontrer que le lieu des centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits au triangle se compose de deux limaçons.

2° Démontrer que le lieu des sommets des angles de grandeur donnée dont les côtés sont tangents à deux cercles donnés se compose de deux limaçons.

3° Un cercle variable touche un cercle donné en un point donné, on mène une tangente commune aux deux cercles. Démontrer que le lieu du point de contact de cette tangente avec le cercle variable est une cissoïde.

4° Un plan mobile se meut dans un plan fixe, de manière que deux droites du plan mobile restent tangentes respectivement à deux cercles du plan fixe. Démontrer qu'un point du plan fixe trace une ellipse sur le plan mobile.

5° Construire les courbes qui, dans le premier système des coordonnées bi-polaires, sont définies par l'équation $u+nv=a$. Démontrer que des trois équations $u+nv=a$, $u-nv=a$, $-u+nv=a$, dans lesquelles les deux constantes a et n ont les mêmes valeurs, deux seulement définissent des lieux géométriques. Ces lieux sont deux courbes fermées intérieures l'une à l'autre ; on les appelle ovales conjuguées de Descartes. Elles sont représentées par une même équation algébrique et entière en coordonnées rectilignes. Sur la droite qui passe par les deux pôles, il existe un troisième point, tel qu'en prenant pour pôle ce point et l'un des premiers, l'équation conserve la même forme.

6° Étant donnés deux cercles, si par un point fixe pris sur la ligne des centres on mène une sécante quelconque, et qu'on joigne chaque centre à l'un des points de rencontre de la sécante et du cercle, démontrer que le point d'intersection de ces deux droites décrit les ovales de Descartes.

7° La projection de la courbe d'intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont parallèles sur un plan perpendiculaire aux axes est un système d'ovale de Descartes.

8° Construire la courbe qui, dans le premier système bi-polaire, est représentée par l'équation $uv=a^2$, $2a$ étant la distance des deux pôles. Cette courbe se nomme *lemniscate*.

9° Trouver le lieu du sommet d'un triangle dont la base a reste fixe, et dans lequel les deux autres côtés b, c et la médiane correspondante m vérifient la relation $b-c=m\sqrt{2}$ (lemniscate).

10° Une ligne droite et une circonférence tournent chacune d'un mouvement uniforme autour d'un point fixe commun aux deux lignes, on connaît le rapport m des deux vitesses angulaires, rapport affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que les rotations sont de même sens ou de sens contraire ; on demande le lieu décrit par le point de rencontre des deux lignes.

On appliquera aux cas particuliers suivants : 1° $m=\frac{3}{4}$, ou $m=\frac{3}{2}$, limaçon de Pascal; 2° $m=-1$, ou $m=\frac{1}{3}$; rosace à quatre branches ; 3° $m=-\frac{1}{2}$, ou $m=\frac{1}{4}$; 4° $m=2$, ou $m=\frac{2}{3}$.

11° Même question, en prenant pour lignes mobiles deux circonférences égales qui tournent autour d'un point fixe qui leur est commun.

Applications : 1° $m=2$, limaçon de Pascal; 2° $m=3$, rosace à quatre branches ; 3° $m=-2$; 4° $m=-3$.

CHAPITRE III

De l'Homogénéité.

39 — DÉFINITIONS. — On dit qu'une fonction $f(a, b, c, \ldots)$ est *homogène* par rapport aux lettres a, b, $c, \ldots$, lorsque, en remplaçant a par ka, b par $kb, \ldots$, on a

$$f(ka, kb, kc, \ldots) = k^m f(a, b, c, \ldots);$$

l'exposant m est le degré de la fonction homogène.

Telles sont, par exemple, les fonctions

$$a^2 + 2ab, \quad \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{c}\sin\frac{c}{a}}{a+b}, \quad \frac{a+\sqrt{ab}}{a+c}, \quad \frac{a}{a^3 - b^3};$$

le degré de la première est 2, celui de la seconde $\frac{1}{2}$, celui de la troisième 0, et celui de la quatrième — 2.

On voit aisément :

1° Que la somme ou la différence de deux fonctions homogènes du même degré est une fonction homogène du même degré que les fonctions proposées;

2° Que le produit de plusieurs fonctions homogènes de degrés quelconques est une fonction homogène dont le degré est égal à la somme des degrés des fonctions proposées;

3° Que le quotient de deux fonctions homogènes est une fonction homogène dont le degré est égal à l'excès du degré du dividende sur le degré du diviseur;

4° Que la puissance d'une fonction homogène est une fonction homogène dont le degré est égal au degré de la fonction proposée multiplié par l'indice de la puissance;

5° Que la racine d'une fonction homogène est une fonction homogène dont le degré est égal au degré de la fonction proposée divisé par l'indice de la racine;

6° Qu'une fonction transcendante d'une fonction homogène de degré o est elle-même homogène et de degré o. Par exemple, les fonctions

$$\sin\left(\frac{ab}{a^2+b^2}\right), \quad \log\left(\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}\right)$$

sont homogènes et de degré o; car si on remplace a et b par ka et kb, la lettre k disparaît sous le signe transcendant, et on peut mettre en avant le facteur k^0. Mais si la quantité placée sous le signe transcendant, quoique homogène, n'était pas du degré o, la lettre k ne pourrait se mettre en facteur en avant du signe transcendant et la fonction ne serait pas homogène. Ainsi la fonction $\sin(a+\sqrt{bc})$ n'est pas homogène.

Lorsqu'un monôme est rationnel et entier par rapport aux lettres $a, b, c,\ldots$, on appelle degré du monôme, par rapport à une lettre, l'exposant de cette lettre dans le monôme; degré du monôme, par rapport à plusieurs lettres, la somme des exposants de ces lettres. Un monôme est toujours une fonction homogène d'un degré égal au degré du monôme : donc la somme de plusieurs monômes de même degré est un polynôme homogène de ce même degré. Par exemple, le polynôme

$$a^3-4a^2b+5ab^2-2b^3$$

est une fonction homogène du troisième degré, par rapport aux lettres a et b.

40 — Lorsqu'on cherche les relations qui existent entre les longueurs des diverses lignes A, B, C,... d'une figure, on imagine ces lignes rapportées à une unité de longueur, qui ordinairement n'est pas spécifiée et reste tout à fait arbitraire. Désignons par les lettres $a, b, c,\ldots$ les nombres qui expriment ainsi les mesures des lignes de la figure, et supposons que l'on ait trouvé entre ces nombres la relation

$$f(a, b, c,\ldots)=0. \tag{1}$$

Les raisonnements que l'on a faits pour arriver à cette relation étant indépendants de l'unité de longueur, il est évident que cette relation doit subsister, quelle que soit cette unité. Appelons $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les valeurs particulières de $a, b, c, \ldots$ pour une première unité; $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ les valeurs de ces mêmes quantités pour une autre unité; ces deux séries de nombres vérifient les relations

(2) $$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0,$$

(3) $$f(\alpha', \beta', \gamma' \ldots) = 0.$$

Mais quand on change l'unité, les nombres varient proportionnellement, de sorte que, si l'on désigne par k le rapport de la première unité à la seconde, on a

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \ldots = k;$$

d'où $$\alpha' = k\alpha, \beta' = k\beta, \gamma' = k\gamma \ldots.$$

Si l'on substitue dans la relation (3), il vient

(4) $$f(k\alpha, k\beta, k\gamma, \ldots) = 0.$$

Concevons que, la première unité restant fixe, la seconde varie, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seront des nombres constants, k un nombre arbitraire, et l'équation (4) devra être vérifiée quel que soit ce nombre k.

Ainsi : *si l'équation* (1) *est vérifiée quand on y remplace les lettres* a, b, c,... *par les nombres* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, *elle sera aussi vérifiée quand on y remplacera ces mêmes lettres par* $k\alpha, k\beta, k\gamma, \ldots$ *quel que soit le nombre* k.

41 — La condition précédente est évidemment remplie lorsque le premier membre de l'équation (1) est une fonction homogène des lettres $a, b, c, \ldots$; car alors on a

$$f(k\alpha, k\beta, k\gamma, \ldots) = k^m f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots);$$

si l'expression $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ est nulle, il en sera de même de $f(k\alpha, k\beta, k\gamma, \ldots)$, quel que soit k.

Réciproquement pour que la condition précédente soit remplie, il est nécessaire que l'équation soit homogène. Nous ne considérerons ici que le cas où l'équation est algébrique.

Supposons que $f(a, b, c,...)$ soit un polynôme entier; si tous les termes ne sont pas du même degré, groupons les termes dont le degré est le même; appelons $\varphi(a, b, c,...)$ l'ensemble des termes du degré le plus élevé m, $\psi(a, b, c,...)$ l'ensemble des termes du degré n, etc., l'équation (4) devient

$$k^m\varphi(\alpha, \beta, \gamma,...)+k^n\psi(\alpha, \beta, \gamma,...)+...=0.$$

Pour que cette équation soit vérifiée, quel que soit k, il est nécessaire que l'on ait séparément

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma,...)=0, \quad \psi(\alpha, \beta, \gamma,...)=0,...$$

Comme l'unité à laquelle se rapportent les nombres $\alpha, \beta, \gamma,...$ est arbitraire, on a entre les lignes de la figure les relations homogènes

$$\varphi(a, b, c,...)=0, \quad \psi(a, b, c,...)=0,....$$

Donc, *si l'équation* (1) *n'est pas homogène, elle équivaut à plusieurs équations homogènes séparément.*

42 — Cependant il peut arriver qu'une équation non homogène soit vérifiée, quand on fait choix d'une unité particulière, sans que les parties qui la composent soient nulles séparément; mais alors, si l'on change l'unité, l'équation cessera d'être vérifiée.

Expliquons ceci par un exemple : Proposons-nous de déterminer les dimensions d'un cylindre de telle sorte que sa surface totale soit équivalente à celle d'une sphère de rayon donné A et son volume à celui d'une sphère de rayon B.

Soient X le rayon et Y la hauteur du cylindre; appelons a, b, x, y les mesures des lignes A, B, X, Y, rapportées à une unité quelconque; les inconnues devront satisfaire aux deux équations

(5) $$x^2+xy-2a^2=0,$$

(6) $$x^2y-\frac{4}{3}b^3=0.$$

Chacune de ces équations est homogène : l'une est du second degré, l'autre du troisième. Si elles sont vérifiées quand on rapporte les lignes à une certaine unité, il en sera de même quand on les rapportera à une autre unité.

Les inconnues x et y satisfont également à l'équation non homogène

$$(7) \qquad (x^2+xy-2a^2)+\left(x^2y-\frac{4}{3}b^3\right)=0,$$

que l'on obtient en ajoutant les précédentes membre à membre.

Considérons maintenant l'équation (7), abstraction faite de son origine. On peut trouver quatre lignes A, B, X, Y, telles que, si on les mesure avec une unité particulière, les nombres obtenus vérifient cette équation sans annuler séparément les deux parties. Supposons, par exemple, que les lignes rapportées à une première unité aient pour mesure les quatre nombres $a=1$, $b=3$, $x=1$, $y=18,5$, dont trois ont été pris arbitrairement et le quatrième déterminé ensuite par l'équation (7); si on mesure les mêmes lignes avec une unité deux fois plus petite, on obtient les nombres $a=2$, $b=6$, $x=2$, $y=37$, qui ne satisfont plus à l'équation. Le cylindre construit avec les lignes X et Y ainsi déterminées jouit de cette propriété que la somme des nombres qui, avec l'unité choisie, expriment les mesures de sa surface et de son volume, est égale à la somme des nombres qui expriment les mesures de la surface d'une sphère et du volume d'une autre sphère; mais la même relation n'a plus lieu quand l'unité linéaire change.

L'équation (7) ne peut être vérifiée par les mesures des mêmes lignes, quand on fait varier arbitrairement l'unité de longueur, qu'autant que ces lignes satisfont aux équations (5) et (6) prises isolément.

Dans la résolution des problèmes de géométrie, on ne fait jamais de combinaisons d'équations analogues à la précédente. Les équations que donnent immédiatement les théorèmes de la géométrie élémentaire sont homogènes; et, quand on ajoute deux équations membre à membre, c'est afin d'obtenir une nouvelle équation plus simple que l'une des proposées; pour cela, il faut d'abord que les équations que l'on ajoute soient du même degré. Le principe de l'homogénéité pourra donc servir à chaque instant à vérifier les transformations algébriques effectuées.

43 — Lorsqu'on prend pour unité de longueur une des lignes de la figure, les équations cessent d'être homogènes; mais il est facile de rétablir l'homogénéité. Soit

$$(8) \qquad F(b', c', \ldots) = 0,$$

l'équation à laquelle on arrive quand on prend pour unité la ligne A ; les lettres b', c',... désignent les mesures des lignes B, C,... rapportées à A. Laissons l'unité arbitraire et appelons a, b, c,... les mesures des lignes A, B, C,... ; on a

$$\frac{1}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \ldots,$$

d'où

$$b' = \frac{b}{a}, \quad c' = \frac{c}{a}, \ldots,$$

et l'équation (8) se transforme dans la suivante

$$(9) \qquad F\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots\right) = 0,$$

qui est homogène.

Ainsi, par exemple, si l'on rapporte les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle à l'hypoténuse de ce triangle prise pour unité, les mesures des côtés vérifient l'équation non homogène

$$b'^2 + c'^2 = 1,$$

de laquelle on déduit l'équation homogène

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1, \text{ ou } b^2 + c^2 = a^2,$$

en remplaçant b' par $\frac{b}{a}$ et c' par $\frac{c}{a}$.

Les courbes, ellipse, hyperbole, parabole, cissoïde, etc., étudiées dans le chapitre précédent, sont représentées par des équations homogènes. Une équation homogène quelconque

$$f(x, y, a, b, c, \ldots) = 0,$$

entre les coordonnées variables x et y d'un point du plan et les longueurs a, b, c,... de diverses droites données, détermine une courbe, dont la position et les dimensions sont indépendantes de l'unité avec laquelle on mesure les lignes. Considérons au contraire une équation numérique entre x et y,

$$f(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire une équation ne renfermant pas d'autres lettres que x et y, et supposons cette équation non homogène. Pour représenter par des points du plan les solutions réelles de cette équation, il faut commencer par choisir arbitrairement une échelle ou la droite que l'on prendra pour unité. Quand l'échelle varie, la courbe ne reste plus la même; nous verrons plus tard que les diverses courbes ainsi obtenues ont des analogies remarquables; ce sont des courbes *homothétiques*.

44 — Remarque I. Il arrive souvent que l'on considère dans une même question des nombres qui expriment des mesures de lignes, de surfaces et de volumes; les unités de surface et de volume restent, comme l'unité de ligne, indéterminées; mais on suppose habituellement qu'il existe entre elles cette relation, que l'unité de surface est le carré construit sur l'unité de longueur, et l'unité de volume le cube construit sur la même droite. Dans ce cas, pour vérifier l'homogénéité d'une relation dans laquelle certaines lettres, S et V, désignent la mesure d'une surface ou d'un volume, on remplacera ces lettres par p^2 et q^3, en désignant par p et q les côtés du carré ou du cube équivalents à la surface ou au volume considéré; de cette manière l'équation ne contiendra plus que des lignes. On peut aussi se dispenser de faire cette substitution, et alors, dans l'évaluation du degré de chaque terme, on double l'exposant des lettres qui désignent des surfaces, et on triple ceux des lettres qui désignent des volumes.

Remarque II. En général, lorsque des angles entrent dans un calcul, ces angles sont rapportés à une unité complétement déterminée et leurs mesures sont des nombres fixes. Pour évaluer un angle, on décrit de son sommet comme centre avec un rayon arbitraire un arc de cercle et on prend le rapport de cet arc au rayon, ce qui revient à prendre pour unité d'angle celui dans lequel l'arc est égal au rayon. Les fonctions trigonométriques des angles sont également des nombres.

Dans l'application du principe de l'homogénéité, on fera donc abstraction des lettres qui désignent des angles ou leurs fonctions trigonométriques.

CONSTRUCTION DES FORMULES.

45 — En résolvant, si cela est possible, les équations d'un problème déterminé, on obtient des formules qui indiquent les opérations arithmétiques qu'il faut effectuer sur les nombres qui mesurent les grandeurs connues pour avoir les valeurs numériques des inconnues. Mais ne pourrait-on pas déduire de chaque formule, ou même de chaque équation, une construction graphique propre à donner, non plus la valeur numérique de l'inconnue, mais l'inconnue elle-même? En un mot, est-il possible de remplacer les opérations numériques par des opérations graphiques? En géométrie élémentaire, on ne considère que les constructions qui peuvent être effectuées au moyen d'un nombre limité de lignes droites et de cercles, et qui, par conséquent, n'exigent que l'emploi de la règle et du compas. Comme le cercle est la plus simple des courbes et la plus facile à décrire, les anciens géomètres attachaient beaucoup de prix à ces sortes de constructions; d'un autre côté, ignorant l'analyse algébrique, ils manquaient de moyens pour décider si la question qu'ils avaient en vue est susceptible d'une solution de ce genre, et ce n'est qu'après avoir fait bien des efforts inutiles qu'ils se décidaient enfin à recourir à d'autres courbes. Leurs recherches ont rendu célèbres certains problèmes que l'on démontre aujourd'hui ne pouvoir être résolus par la ligne droite et le cercle. Tels sont les problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, etc.

Nous supposerons que l'inconnue est une ligne droite; quand l'inconnue est une surface ou un volume, on la représente par ax ou a^2x, a étant une ligne prise arbitrairement; la construction de la ligne x donne un rectangle ou un parallélipipède équivalents à la surface ou au volume cherché. La détermination d'un angle donné par une de ses lignes trigonométriques se ramène aussi à celle d'une droite. Nous supposerons encore que toutes les lettres désignent, ainsi que x, des lignes droites.

46 — Formule rationnelle. — La formule qui donne l'inconnue x doit être homogène et du premier degré; elle peut d'ailleurs être entière, rationnelle ou irrationnelle. Quand elle est entière, elle a la forme

$$x=a-b+c\ldots,$$

et on obtient la longueur x en portant à la suite l'une de l'autre, dans un sens ou dans l'autre, les longueurs $a, b, c, \ldots$

La formule fractionnaire la plus simple est

$$x=\frac{ab}{c}.$$

L'inconnue est une quatrième proportionnelle que l'on construira par deux parallèles ou par un cercle.

On construira de même la formule

$$x=\frac{abcd}{a'b'c'} \quad \text{ou} \quad x=\frac{a}{a'}\times\frac{b}{b'}\times\frac{cd}{c'}$$

par une série de quatrièmes proportionnelles,

$$\gamma=\frac{cd}{c'}, \quad \beta=\frac{b\gamma}{b'}, \quad x=\frac{a\beta}{a'}.$$

A l'aide de la construction précédente, un monôme $\frac{abc\ldots ghi\ldots l}{a'b'c'\ldots g'}$ du degré m se ramènera à la forme $\alpha i\ldots l$, ou encore à la forme $\lambda^{m-1}\,t$, λ étant une longueur quelconque et t une ligne déterminée par la formule

$$t=\frac{\alpha i\ldots l}{\lambda^{m-1}}.$$

Considérons maintenant la formule

$$x=\frac{A-B+C}{A'+B'-C'},$$

dans laquelle A, B, C désignent des monômes du degré $m+1$, A', B', C' des monômes du degré m. On ramène d'abord chacun de ces monômes aux formes simples

$$\lambda^m a,\quad \lambda^m b,\quad \lambda^m c,\ldots,\quad \lambda^{m-1}a',\quad \lambda^{m-1}b',\quad \lambda^{m-1}c',$$

et l'on a

$$x=\frac{\lambda(a-b+c)}{a'+b'-c'}=\frac{\lambda\alpha}{\beta}.$$

On déterminera ensuite l'inconnue x par une quatrième proportionnelle entre les lignes β, α, λ.

Si la fraction était du degré m, les opérations qui précèdent la ramèneraient à la forme

$$\lambda^{m-1}\frac{\lambda\alpha}{\beta}=\lambda^{m-1}t.$$

47 — Formule irrationnelle du second degré. — Soit d'abord la formule

$$x=\sqrt{ab},\quad \text{ou}\quad \frac{a}{x}=\frac{x}{b}.$$

L'inconnue x est une moyenne proportionnelle entre les lignes a et b; on l'obtient par un triangle rectangle ou par une tangente au cercle.

Lorsque le radical porte sur une fonction rationnelle du degré m, on la ramène à la forme

$$\sqrt{\lambda^{m-1}t}=\sqrt{\lambda^{m-2}\lambda t}=\lambda^{\frac{m-2}{2}}u.$$

Considérons maintenant une formule irrationnelle du second degré dans laquelle nous supposons que les quantités réunies par le signe + ou le signe — sont homogènes et du même degré. Pour plus de clarté, nous imaginerons la valeur de x ramenée à la forme

$$x=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}},$$

N et D désignant des fonctions dans lesquelles n'entre pas le signe de la division ni d'exposant fractionnaire ou négatif; on peut supposer aussi qu'il n'y a pas de produit de deux radicaux ni de produit d'un radical par une quantité entière. Pour obtenir la valeur du numérateur N, il faut effectuer certaines opérations dans un ordre déterminé; le premier signe radical porte sur une expression entière, on le ramènera à la forme $\lambda^{\frac{m}{2}}u$; si cette quantité doit être ajoutée à d'autres, on ramènera celles-ci à la même forme, et par suite aussi leur somme. Un nouveau signe radical peut porter maintenant, soit sur une quantité entière, soit sur une quantité affectée de l'exposant $\frac{m}{2}$, m étant impair. Dans tous les cas, on ramènera le radical à la forme $\lambda^{\frac{m}{4}}v$, on ajoutera ce terme à d'autres de même forme, et ainsi de suite. On voit ainsi que le numérateur N prendra la forme $\lambda^{\frac{m}{2^p}}t$. Il en sera de même du dénominateur D; l'inconnue x étant du premier degré, on l'obtiendra par une quatrième proportionnelle.

On démontre que les hypothèses que nous avons faites sur la composition de la formule sont nécessaires pour qu'elle soit homogène.

Ainsi, *toute expression homogène du premier degré, composée d'une manière quelconque au moyen des signes d'opérations simples, addition, soustraction, multiplication, division, élévation à une puissance entière, racine carrée; en un mot, toutes les expressions rationnelles et toutes les expressions irrationnelles ne contenant que des racines carées, peuvent être construites au moyen d'un nombre limité de lignes droites et de cercles.*

On démontre aussi que les expressions de cette nature sont seules susceptibles d'être construites de la façon indiquée; mais cette démonstration ne peut trouver place ici. Ainsi, par exemple, le côté x du cube double d'un autre dont le côté est a, côté donné par la formule

$$x=\sqrt[3]{2a^3},$$

ne peut pas s'obtenir par la règle et le compas; il en est de même, en général, des racines des équations du troisième et du quatrième degré, puisqu'il entre des radicaux cubiques dans l'expression de ces racines.

48 — Construction des racines de l'équation du second degré. — L'équation du second degré à une seule inconnue se ramène à la forme $x^2+px+q=0$; pour qu'elle soit homogène, il faut que la quantité p soit du premier degré, et q du second degré ; si ces quantités sont rationnelles ou irrationnelles du second degré, on pourra construire une ligne a équivalente à la première et un carré b^2 équivalent à la seconde ; et l'équation du second degré présentera l'une des quatre dispositions suivantes :

$$x^2+ax+b^2=0,$$
$$x^2+ax-b^2=0,$$
$$x^2-ax+b^2=0,$$
$$x^2-ax-b^2=0.$$

Les racines de la première et de la seconde équation sont égales à celles de la troisième et de la quatrième, prises en signes contraires ; il suffit donc de considérer celles-ci ; or, si on les met sous la forme

$$x(a-x)=b^2,\quad x(x-a)=b^2,$$

on voit qu'il s'agit de construire un rectangle équivalent à un carré b^2, et dont la somme ou la différence des côtés soit égale à une ligne donnée a, problèmes que l'on résout en géométrie élémentaire. La résolution des équations et la construction des formules feraient au besoin retrouver les solutions de la géométrie.

L'équation bi-carrée se ramène pareillement à l'un des types

$$x^4+abx^2-c^2d^2=0,$$
$$x^4-abx^2+c^2d^2=0,$$
$$x^4-abx^2-c^2d^2=0;$$

car il est inutile de considérer l'équation $x^4+abx^2+c^2d^2=0$, qui n'a que des racines imaginaires. Si l'on pose $x^2=cz$, ces équations deviennent

$$z^2+\frac{ab}{c}z-d^2=0,\quad z^2-\frac{ab}{c}z+d^2=0,\quad z^2-\frac{ab}{c}z-d^2=0.$$

On détermine, comme on vient de le dire, les racines z de celles-ci, puis on trouve x par une moyenne proportionnelle entre c et z.

CHAPITRE IV

Transformation des coordonnées.

Quand on connaît l'équation d'une ligne par rapport à certaines coordonnées, il importe de pouvoir en déduire l'équation de la même ligne par rapport à d'autres coordonnées.

Pour résoudre cette question d'une manière générale, il faut trouver des formules qui expriment les coordonnées d'un point quelconque du plan dans un certain système, au moyen des coordonnées du même point dans un autre système. Ces formules sont utiles aussi dans un grand nombre d'autres questions.

Nous nous occuperons en premier lieu de la transformation des coordonnées rectilignes en d'autres coordonnées rectilignes.

DÉPLACEMENT DE L'ORIGINE.

49 — Supposons d'abord que l'on remplace les deux axes OX et OY par d'autres axes O′X′ et O′Y′ respectivement parallèles aux premiers (fig. 37) et de même sens. La position des nouveaux axes sera déterminée par les coordonnées a et b de la nouvelle origine O′ relativement aux axes primitifs. Nous appellerons x et y les coordonnées d'un point quelconque M du plan relatives aux premiers axes, x' et y' les coordonnées du même point relatives aux nouveaux axes.

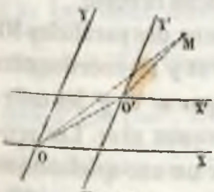


Fig. 37.

Imaginons qu'un mobile aille du point O au point M en suivant la ligne droite OM ou la ligne brisée OO′M, et projetons ces deux chemins sur l'axe OX parallèlement à OY. La projection de la droite OM, avec le signe qui lui convient, est l'abscisse x du point M ; la projection de la droite OO′ est l'abscisse a du point O′; la projection de la droite O′M sur OX ou sur l'axe parallèle O′X′ est la nouvelle abscisse x'. Les projections des deux chemins étant égales entre elles, on a $x = a + x'$. En projetant sur l'axe OY, on a de même $y=b+y'$. On obtient ainsi les deux relations

$$(1)\qquad x=a+x',\quad y=b+y',$$

entre les anciennes et les nouvelles coordonnées du point M. Ces relations sont vraies, quelle que soit la position du point M dans le plan. On en déduit

$$(2)\qquad x'=x-a,\ y'=y-b.$$

CHANGEMENT DE LA DIRECTION DES AXES.

50 — Supposons maintenant que l'on change la direction des axes en conservant la même origine. Nous traiterons d'abord un cas particulier qui se présente souvent dans la pratique, celui où les axes des deux systèmes sont rectangulaires. Imaginons que l'on change la direction des axes en faisant tourner l'angle droit XOY (fig. 38) d'un certain angle α autour de l'origine pour l'amener dans la position X'OY' et considérons l'angle α comme positif, si la rotation s'effectue de OX vers OY, comme négatif si la rotation s'exécute en sens inverse.

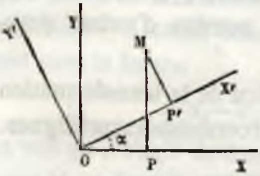


Fig. 38.

Par un point quelconque M du plan menons des parallèles MP et MP' aux axes OY et OY'; désignons par x et y les coordonnées du point M relatives aux premiers axes, et par x' et y' les coordonnées du même point relatives aux nouveaux axes. Les projections des deux chemins OPM, OP'M sur un axe quelconque sont égales. Projetons ces deux chemins d'abord sur l'axe OX; la projection de la longueur OP est cette longueur elle-même, prise avec le signe + ou le signe —, suivant qu'elle est portée dans la direction OX, ou dans la direction opposée; c'est, dans tous les cas, l'abscisse x; PM étant perpendiculaire sur OX, sa projection est nulle ; la projection du premier chemin se réduit donc à x. Projetons maintenant le chemin OP'M ; et d'abord projetons le premier côté OP' ; si la longueur OP' est portée sur OX', il faut multiplier par $\cos\alpha$, ce qui donne la projection $OP' \times \cos\alpha$; si cette longueur est portée en sens inverse, il faut la multiplier par $\cos(\alpha+\pi)$, ce qui donne $OP' \times \cos(\alpha+\pi)$ ou $-OP' \times \cos\alpha$; mais, dans le premier cas, on a $x' = OP'$, dans le second cas $x' = -OP'$; ainsi la projection du côté OP' est toujours exprimée par $x' \cos\alpha$. Considérons le second côté $P'M$; s'il est dirigé dans le sens OY', il fait avec OX' l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$, et sa projection est $P'M \times \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$; s'il est dirigé en sens inverse, il fait avec OX l'angle $\alpha+\frac{\pi}{2}+\pi$, et sa projection est $-P'M \times \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$; mais on a dans le premier cas $y' = P'M$, dans le second cas $y' = -P'M$; ainsi, la projection de $P'M$ est toujours exprimée par $y' \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$. Il en résulte que le chemin $OP'M$ a pour projection $x' \cos\alpha + y' \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, ou $x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$. En égalant les projections des deux chemins OPM, $OP'M$, on obtient la relation $x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$.

Projetons ensuite les deux chemins sur l'axe OY. La projection de OP est nulle ; celle de PM, prise avec le signe convenable, est y ; ainsi la projection du premier chemin se réduit à y. Les deux directions OX' et OY' font avec OY les angles $-\frac{\pi}{2}+\alpha$ et α, ce qui donne pour la projection du second chemin $x' \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + y' \cos\alpha$, ou $x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$, et l'on a la relation $y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$. On obtient ainsi les formules

$$(3) \qquad x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

qui expriment les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.

51 — Occupons-nous maintenant de la question générale. Soient OX et OY deux axes quelconques faisant entre eux un angle θ, OX' et OY' deux nouveaux axes dont on définit les directions par les angles α et β qu'ils font avec OX (fig. 39) ; on convient de regarder les angles α et β comme positifs, quand une droite mobile les décrit en tournant de OX vers OY, et comme négatifs, quand la droite tourne en sens contraire. Par un point M quelconque du plan menons les droites MP et MP′ respectivement parallèles aux axes OY et OY′. Pour avoir x, nous projetterons les deux chemins OPM, OP′M sur une direction OH perpendiculaire à OY, et telle qu'une droite, partant de la position OY, tourne d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$ de OY vers OX pour arriver à la position OH.

Fig. 39.

La direction OX faisant avec OH l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$, et la direction OY étant perpendiculaire à OH, la projection du premier chemin se réduit à $x \sin \theta$. La direction OX′ fait avec OH un angle égal à l'angle HOX, augmenté de l'angle XOX′, ce qui fait $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \alpha$; de même, la direction OY′ fait avec OH un angle égal à $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \beta$; on a donc pour la projection du second chemin

$$x' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right) + y' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \beta\right),$$

ou
$$x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta),$$

ce qui donne la relation

$$x \sin \theta = x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta).$$

Pour avoir y, projetons les deux chemins OPM, OP′M sur une direction OK perpendiculaire à OX, et telle qu'une droite, partant de la position OX, tourne d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$ de OX vers OY pour arriver à la position OK. La direction OX étant perpendiculaire à OK et la direction OY faisant avec cette droite l'angle $-\frac{\pi}{2} + \theta$, la projection du premier chemin se réduit à $y \sin \theta$. Les angles que les directions OX′ et OY′ font avec OK sont égaux aux angles qu'elles font avec OX, diminués de $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne $-\frac{\pi}{2} + \alpha$, et $-\frac{\pi}{2} + \beta$; la projection du second chemin est donc $x' \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+y' \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\beta\right)$, ou $x' \sin\alpha + y' \sin\beta$, et l'on a la relation

$$y' \sin\theta = x' \sin\alpha + y' \sin\beta.$$

On obtient ainsi les deux formules

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\theta-\alpha) + y' \sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}, \\ y &= \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta}, \end{aligned}\right.$$

pour la transformation des coordonnées obliques en d'autres coordonnées obliques.

On en déduit facilement des formules servant à revenir des nouveaux axes aux anciens. L'angle des nouveaux axes est $\beta-\alpha$; les axes OX et OY font avec OX$'$ les angles $-\alpha$ et $\theta-\alpha$; il suffit donc, dans les formules précédentes, de remplacer θ par $\beta-\alpha$, α par $-\alpha$, β par $\theta-\alpha$, ce qui donne

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{x \sin\beta + y \sin(\beta-\theta)}{\sin(\beta-\alpha)}, \\ y' &= \frac{-x \sin\alpha + y \sin(\theta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}. \end{aligned}\right.$$

52—On déduit de ces formules générales quelques formules particulières qu'il est bon de connaître.

1° *Cas où les axes primitifs sont rectangulaires.* Dans ce cas on a $\theta = \frac{\pi}{2}$, et les formules (4) se réduisent à

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\beta, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin\beta. \end{aligned}\right.$$

2° *Cas où les nouveaux axes sont rectangulaires.* Supposons $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, les formules (4) deviennent

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\theta-\alpha) - y' \cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta}, \\ y &= \frac{x' \sin\alpha + y' \cos\alpha}{\sin\theta}. \end{aligned}\right.$$

On pourrait supposer aussi $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$, ce qui revient à changer le sens de l'axe OY', et, par conséquent, le signe de y dans les formules (7).

3° *Cas où les deux systèmes d'axes sont rectangulaires.* Si, dans les formules (6), on suppose $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, on obtient les formules (3) déjà trouvées,

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned} \right.$$

On les obtiendrait aussi en supposant dans les formules (7) $\theta = \frac{\pi}{2}$.

TRANSFORMATION GÉNÉRALE.

53 — Supposons que l'on change à la fois l'origine et la direction des axes. On déterminera le nouveau système d'axes par les coordonnées a et b de la nouvelle origine O' relativement aux anciens axes, et par les angles α et β que font les nouveaux axes O'X' et O'Y' avec l'axe OX (fig. 40).

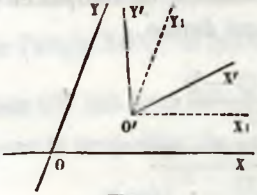


Fig. 40.

Par le point O' menons deux axes O'X₁ et O'Y₁ respectivement parallèles à OX et OY. On a d'une part

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1;$$

d'autre part, en vertu des formules (4),

$$x_1 = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta}, \quad y_1 = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta};$$

on en déduit les formules générales de transformation

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a + \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta}, \\ y &= b + \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta}. \end{aligned} \right.$$

Nous remarquerons que les coordonnées anciennes x et y s'expriment par des fonctions entières du premier degré au moyen des coordonnées nouvelles x' et y'.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTILIGNES EN COORDONNÉES POLAIRES.

54 — Soient OX et OY deux axes rectangulaires ; prenons l'origine pour pôle, et l'axe des x pour axe polaire (fig. 41) ; en projetant la droite OM sur l'axe OX et sur l'axe OY, on obtient les relations

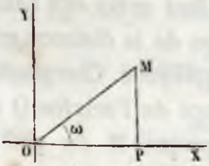


Fig. 41.

$$(9)\qquad x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega.$$

On passera réciproquement des coordonnées polaires aux coordonnées rectilignes à l'aide des formules

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \tang\omega=\frac{y}{x}.$$

Nous avons fait plusieurs transformations de cette sorte, quand nous avons cherché les équations en coordonnées rectilignes de la cissoïde, du limaçon de Pascal et de la rosace (nos 24, 31, 33).

DISTANCE DE DEUX POINTS.

55 — Supposons d'abord les axes rectangulaires et cherchons la distance de l'origine à un point M dont nous appelons x et y les coordonnées; dans le triangle rectangle OPM (fig. 42), on a

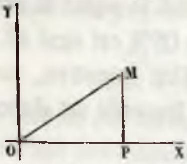


Fig. 42.

$$\overline{OM}^2=\overline{OP}^2+\overline{PM}^2=x^2+y^2,$$

quelle que soit la position du point M dans le plan ; d'où l'on déduit, en désignant par l la distance OM,

$$(10)\qquad l=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Cherchons maintenant la distance des deux points M et M′, situés d'une manière quelconque dans le plan ; nous appelons x et y les coordonnées du point M, x' et y' celles du point M′ par rapport aux axes rectangulaires OX, OY. Par le point M (fig. 43) menons des axes MX′, MY′, parallèles aux axes proposés ; les coordonnées du point M′ relatives à ces nouveaux axes sont égales à $x'-x$, $y'-y$, en vertu des formules (2) du n° 49. La distance l de la nouvelle origine M

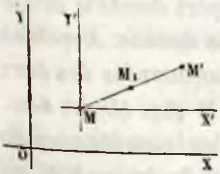


Fig. 43.

au point M′ sera donc, d'après la formule (10),

$$l=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}. \tag{11}$$

56 — Nous avons supposé jusqu'à présent les axes rectangulaires. Quand les axes sont obliques et font entre eux l'angle θ, l'expression de la distance est un peu plus compliquée. Cherchons d'abord la distance de l'origine O à un point quelconque M du plan. Dans le triangle OPM (fig. 44), quelle que soit la position du point M, on a

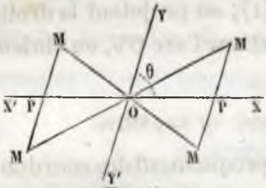


Fig. 44.

$$\overline{OM}^2=\overline{OP}^2+\overline{PM}^2-2.OP.PM.\cos OPM.$$

Quand le point M est situé dans l'angle YOX, les coordonnées x et y de ce point sont égales à $+$OP et à $+$PM, et l'angle OPM est le supplément de l'angle θ ; on a donc

$$l=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\theta}. \tag{12}$$

Si le point M est situé dans l'angle Y′OX′, les coordonnées x et y étant égales à $-$OP et à $-$PM, et l'angle OPM le supplément de θ, on obtient la même formule (12). Quand le point M est situé dans l'un des angles YOX′, Y′OX, l'angle OPM est égal à θ, mais l'une des coordonnées est positive, l'autre négative, ce qui reproduit encore la formule (12). Cette formule est donc générale.

Pour avoir la distance de deux points M et M′, on imaginera comme précédemment par le point M des axes parallèles aux premiers, et on obtiendra la formule

$$l=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+2(x'-x)(y'-y)\cos\theta}. \tag{13}$$

57 — On a souvent besoin des coordonnées du point qui partage dans un rapport donné la droite qui joint deux points donnés. Appelons x et y, x' et y' les coordonnées des deux points donnés M et M′ (fig. 45), et désignons par x_1 et y_1 les coordonnées du point M_1 qui partage la droite MM′ en deux segments tels que l'on ait $\frac{M_1M}{M_1M'}=\frac{m'}{m}$. Si l'on transporte les

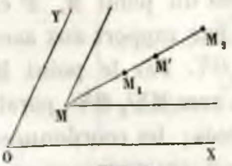


Fig. 45.

axes parallèlement à eux-mêmes au point M, les coordonnées nouvelles du point M′ et du point M_1 seront $x'-x$, $y'-y$ et x_1-x, y_1-y. Les différences x_1-x et $x'-x$, ou y_1-y et $y'-y$, ont le même signe : leur rapport est égal à $\frac{M_1M}{M'M}$ ou $\frac{m'}{m+m'}$; on a donc $\frac{x_1-x}{x'-x}=\frac{y_1-y}{y'-y}=\frac{m'}{m+m'}$;

d'où
$$x=\frac{mx+m'x'}{m+m'},\quad y_1=\frac{my+m'y'}{m+m'}.$$

On peut se proposer plus généralement de chercher sur une droite MM′ un point tel que le rapport de ses distances aux deux points M et M′ soit égal au rapport de m' et m. Envisagée de ce point de vue, la question présente deux solutions ; les formules précédentes se rapportent au cas où le point M_1 est placé entre les deux points M et M′ ; mais il y a une seconde solution : supposons, par exemple, m' plus grand que m ; on peut trouver sur le prolongement de la droite MM′, au delà du point M′, un point M_2 tel que l'on ait $\frac{M_2M}{M_2M'}=\frac{m'}{m}$. Appelons x_2 et y_2 les coordonnées de ce point ; on aura, comme précédemment,

$$\frac{x_2-x}{x'-x}=\frac{y_2-y}{y'-y}=\frac{M_2M}{MM'}=\frac{m'}{m'-m};$$

on déduit ces formules des précédentes en changeant le signe de l'une des quantités m et m'. On aura donc

$$x_2=\frac{m'x'-mx}{m'-m},\quad y_2=\frac{m'y'-my}{m'-m}.$$

Quand les deux quantités m et m' sont égales, le point M_1 devient le point milieu de MM′ et a pour coordonnées

$$x_1=\frac{x+x'}{2},\quad y_1=\frac{y+y'}{2}.$$

Le point M_2 s'éloigne à l'infini.

CLASSIFICATION DES LIGNES.

58 — On emploie surtout les coordonnées rectilignes pour l'étude des propriétés générales des lignes planes. Dans ce système, on classe les lignes de la manière suivante : on distingue d'abord les lignes en *lignes algébriques* et en *lignes trans-*

cendantes, suivant que les équations qui les représentent son algébriques ou transcendantes. Une équation est dite algébrique lorsque les coordonnées x et y n'y entrent qu'affectées des signes d'opérations algébriques. Mais, si l'une des coordonnées entre sous un signe transcendant, comme un sinus, un logarithme, etc., l'équation est dite transcendante. On peut toujours mettre les équations algébriques sous la forme entière, en faisant disparaître les radicaux et les dénominateurs.

On classe ensuite les lignes algébriques d'après le degré de leurs équations. Les lignes du premier degré sont celles qui sont représentées par des équations du premier degré en x et y; l'équation du second degré donne les lignes du second degré, etc.

Il est aisé de voir que le degré d'une ligne reste le même, quelle que soit la position des axes des coordonnées dans le plan. En effet, soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une ligne rapportée à de certains axes OX et OY, m le degré de cette équation supposée entière (dans l'évaluation du degré, on ne tient compte que des coordonnées x et y). Pour rapporter cette ligne à d'autres axes O'X' et O'Y', on substituera à x et y dans l'équation les valeurs données par les formules de transformation (8); ces formules étant du premier degré par rapport aux coordonnées x' et y', il est impossible que l'équation en x' et y' soit d'un degré supérieur à m. Elle ne sera pas non plus d'un degré moindre; car alors la transformation inverse élèverait le degré, ce qui est impossible. Ainsi, la nouvelle équation est du même degré que l'équation primitive.

Le degré d'une ligne indique en combien de points au plus la ligne peut être coupée par une droite. En effet, soit m le degré d'une ligne, $f(x, y) = 0$ l'équation qui la représente lorsqu'on prend la droite sécante pour axe des x; si dans cette équation on fait $y = 0$, l'équation en x ainsi obtenue donnera les abscisses des points du lieu qui ont une ordonnée nulle, c'est-à-dire les points communs à ce lieu et à l'axe des x. Quand le premier membre de l'équation n'est pas identiquement nul, comme il est au plus du degré m, l'équation n'a pas plus de m racines, et, par conséquent, la droite a au plus m points communs avec la ligne. Si l'équation était vérifiée par plus de m

valeurs de x, le premier membre serait identiquement nul, et, par conséquent, la droite entière ferait partie du lieu; dans ce cas, le polynôme $f(x, y)$ devenant identiquement nul, quand on y fait $y = 0$, contiendrait y en facteur et l'équation $f(x, y) = 0$ se décomposerait en deux, l'une $y = 0$ du premier degré, l'autre du degré $m - 1$.

D'après cela, les lignes du premier degré, ne pouvant être coupées par une droite en plus d'un point, sont des lignes droites. Les lignes du second degré ne peuvent être coupées par une droite en plus de deux points; celles du troisième degré en plus de trois points. Le cercle, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole sont des courbes du second degré (nos 10, 15, 19, 26); ces courbes peuvent être coupées en deux points par des droites. La cissoïde et la strophoïde (nos 25 et 27) sont du troisième degré; ces courbes peuvent être coupées en trois points par des droites. Le limaçon de Pascal (no 31) est du quatrième degré, la rosace à quatre branches (no 33) du sixième degré.

Nous étudierons d'abord les lignes du premier degré, puis celles du second degré, et ensuite les lignes d'un degré quelconque.

Quand on dit qu'une équation algébrique entière du degré m représente une courbe du degré m, on suppose que le premier membre n'est pas décomposable en un produit de facteurs entiers; autrement l'équation représenterait deux ou un plus grand nombre de lignes d'ordres inférieurs. Ainsi, par exemple, une équation du second degré, dont le premier membre est le produit de deux facteurs entiers du premier degré, représente deux lignes du premier degré, c'est-à-dire deux droites. De même, une équation du troisième degré peut représenter trois droites, ou une ligne du second degré avec une ligne droite. C'est pourquoi certaines propriétés des lignes de l'ordre m s'appliquent au système de m droites, c'est-à-dire au polygone de m côtés. Ainsi nous verrons que certaines propriétés des courbes du second degré s'appliquent au système de deux droites, parce que ce système peut être considéré comme un lieu du second degré.

LIVRE II

LIGNE DROITE ET CERCLE.

CHAPITRE I

Ligne droite.

CONSTRUCTION DE L'ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ.

59 — L'équation générale du premier degré entre les deux variables x et y est de la forme

$$(1) \qquad Ax + By + C = 0.$$

Nous avons déjà fait remarquer que la ligne représentée par cette équation, ne pouvant être coupée par une droite en plus d'un point, est nécessairement droite. Mais il est bon de démontrer directement que cette équation représente une ligne droite.

Il est impossible que les deux coefficients A et B des variables soient nuls à la fois; car alors il faudrait que l'on eût $C = 0$, et l'équation se réduirait à une identité. Mais il peut arriver que l'un des coefficients soit nul; si, par exemple, le coefficient A est nul, l'équation se réduit à la forme $By + C = 0$ ou $y = b$. Cette équation représente le lieu d'un point M dont l'ordonnée MP est constante et égale à b, quelle que soit l'abscisse OP; c'est une droite G'G parallèle à l'axe OX (fig. 46); on l'obtient en portant sur l'axe OY, à partir de l'origine, une longueur OB égale à la valeur absolue de b, dans un sens ou dans l'autre suivant le signe de b, et menant par le point B une parallèle G'G à l'axe OX. En particulier, l'équation $y = 0$ représente l'axe OX lui-même.

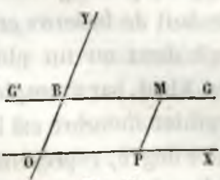
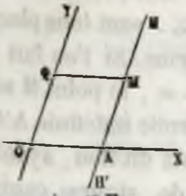


Fig. 46.

Lorsque le coefficient B est nul, l'équation se réduit à

$Ax+C=o$, ou $x=a$. Cette équation représente le lieu du point M dont l'abscisse MQ est constante et égale à a, quelle que soit l'ordonnée OQ; c'est une droite H'H parallèle à l'axe OY (fig. 47); on l'obtient en portant sur l'axe OX, à partir de l'origine, une longueur OA égale à la valeur absolue de a, dans un sens ou dans l'autre suivant le signe de a, et menant par le point A une parallèle H'H à l'axe OY. En particulier, l'équation $x=0$ représente l'axe OY.



47 Fig.

Lorsque le coefficient B n'est pas nul, on peut diviser par B et mettre l'équation sous la forme

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

ou

$$(2) \quad y=ax+b,$$

en posant, pour abréger, $a=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$.

Considérons d'abord le cas particulier où $b=o$, ce qui réduit l'équation à la forme

$$y=ax, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x}=a.$$

Si a est un nombre positif, tous les points du lieu, ayant leurs coordonnées de même signe, se trouvent dans l'angle YOX, ou dans son opposé par le sommet Y'OX' (fig. 48). Prenons une abscisse quelconque OP, et par le point P menons une parallèle à l'axe des y; on pourra, sur cette parallèle, trouver un point M tel que l'on ait $\frac{MP}{OP}=a$, le point M sera un point du lieu. Soient M, M', M'',... divers points du lieu construits de cette façon; des rapports égaux

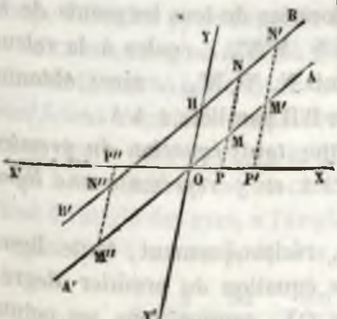


Fig. 48.

$$\frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{-M''P''}{-OP''}=\ldots=a,$$

il résulte que les triangles OPM, OP'M', OP''M'',... sont semblables, et que, par suite, les angles MOP, M'OP', M''OP''... sont égaux : donc les points M, M', M''... sont tous placés sur une même droite A'A passant par l'origine. Si l'on fait varier x d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, le point M se meut d'un mouvement continu et décrit la droite indéfinie A'A.

Lorsque a est négatif, tous les points du lieu, ayant leurs coordonnées de signes contraires, sont situés dans les angles Y'OX et YOX' (fig. 49). Soient M, M', M'',... différents points du lieu ; des relations

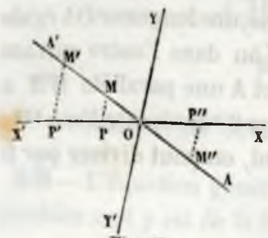


Fig. 49.

$$\frac{MP}{-OP}=\frac{M'P'}{-OP'}=\frac{-M''P''}{OP''}=\ldots=a,$$

on conclut, comme précédemment, que tous ces points sont sur une même droite A'A passant par l'origine. Ainsi, dans tous les cas, l'équation $y=ax$ représente une ligne droite A'A passant par l'origine.

Revenons maintenant à l'équation $y=ax+b$. Si l'on compare les deux équations $y=ax+b$ et $y=ax$, on voit que les ordonnées correspondantes à une même abscisse diffèrent d'une quantité constante b ; on augmentera donc ou l'on diminuera, suivant le signe de b, les ordonnées de tous les points de la droite A'A de longueurs MN, M'N', M''N'',... égales à la valeur absolue de b (fig. 48) ; les points N, N', N'',... ainsi obtenus forment évidemment une droite B'B parallèle à A'A.

Il résulte de ce qui précède que *toute équation du premier degré entre les deux variables* x *et* y *représente une ligne droite.*

60 — Nous ferons voir que, réciproquement, toute ligne droite est représentée par une équation du premier degré. Si la droite est parallèle à l'axe OX, comme tous ses points ont même ordonnée, son équation est de la forme $y=b$ (fig. 46). Si elle est parallèle à l'axe OY, tous ses points ayant même abscisse, son équation est de la forme $x=a$ (fig. 47). Si la droite passe par l'origine, elle occupe l'une des deux positions indiquées dans les figures 48 et 49, et les triangles semblables donnent

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-M''P''}{-OP''} = \ldots,$$

ou

$$\frac{MP}{-OP} = \frac{MP'}{-OP'} = \frac{-M''P''}{OP''} = \ldots.$$

Si l'on appelle a ce rapport constant, l'équation de la droite est $\frac{y}{x} = a$ ou $y = ax$. Supposons enfin que la droite, sans être parallèle à l'un des axes, ne passe pas par l'origine (fig. 48); une parallèle à cette droite menée par l'origine aura pour équation, d'après ce qui précède, $y = ax$; or, l'excès de l'ordonnée de la droite proposée sur l'ordonnée correspondante de la parallèle est une quantité constante b; donc la droite proposée a pour équation $y = ax + b$.

SIGNIFICATION DES COEFFICIENTS.

61 — L'équation de toute droite non parallèle à l'axe des y peut être mise sous la forme

$$y = ax + b.$$

La constante b est l'ordonnée du point H (fig. 48) où la droite coupe l'axe des y; on l'appelle *ordonnée à l'origine*.

La constante a ne dépend que de la direction de la droite; elle est la même pour toutes les droites parallèles; on l'appelle *coefficient angulaire* ou *de direction*. Menons par l'origine une demi-droite OA parallèle à la droite proposée et située par rapport à l'axe X'X du même côté que la demi-droite OY. Appelons θ l'angle des axes, α l'angle de OA avec OX, angle qui peut varier de o à π; on a, dans la disposition de la figure 48,

$$a = \frac{y}{x} = \frac{MP}{OP} = \frac{\sin MOP}{\sin OMP} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)},$$

et, dans celle de la figure 49,

$$a = \frac{y}{x} = \frac{MP}{-OP} = \frac{\sin MOP}{-\sin OMP} = \frac{\sin \alpha}{-\sin(\alpha - \theta)} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)};$$

on a donc, dans tous les cas,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}=a. \tag{3}$$

Quand les axes sont rectangulaires, cette relation se réduit à

$$\operatorname{tang}\alpha=a, \tag{4}$$

et détermine l'angle α que fait avec l'axe OX la direction OA.

Quand les axes sont obliques, de la relation (3) on déduit la formule

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{a\sin\theta}{1+a\cos\theta}. \tag{5}$$

Cette formule n'étant pas calculable par logarithmes, pour obtenir l'angle α au moyen des tables, on la transforme de la manière suivante. On a

$$\frac{a-1}{a+1}=\frac{\sin\alpha-\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha+\sin(\theta-\alpha)}=\frac{\operatorname{tang}\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{a-1}{a+1}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}. \tag{6}$$

62 — Lorsqu'on veut construire la droite représentée par une équation du premier degré à coefficients numériques, on cherche ordinairement les points où elle coupe les axes, et on fait passer une droite par ces deux points.

Soit, par exemple, l'équation $2x-3y=5$; pour $y=0$, on a $x=\frac{5}{2}$; pour $x=0$, $y=-\frac{5}{3}$; on portera, à partir de l'origine, sur l'axe des x la longueur $\frac{3}{2}$ dans la direction OX, sur l'axe des y la longueur $\frac{5}{3}$ dans la direction OY'.

Quand l'équation ne renferme pas de terme constant, la droite passe par l'origine. On en détermine un second point, en donnant à x une valeur particulière; soit, par exemple, l'équation $2y+3x=0$; l'équation étant vérifiée pour $x=0$, $y=0$, la droite passe par l'origine; si l'on fait $x=2$, on a $y=-3$; construisant le point qui a pour coordonnée $x=2$, $y=-3$, on obtiendra un second point que l'on joindra à l'origine.

63 — L'équation générale de la ligne droite

$$Ax+By+C=0$$

renferme deux coefficients ou *paramètres* arbitraires; car on peut diviser l'équation par l'un des coefficients, et il restera les rapports des deux autres coefficients à celui par lequel on a divisé. Quand on met l'équation sous la forme $y=ax+b$, ces deux paramètres sont a et b. Pour fixer la position de la ligne droite dans le plan, il faudra donner les valeurs des deux paramètres, ou deux relations entre ces paramètres servant à déterminer leurs valeurs.

PROBLÈME 1.

64 — *Trouver l'équation générale des droites qui passent par un point donné.*

Appelons x' et y' les coordonnées du point donné M. L'équation d'une droite quelconque est

$$y=ax+b.$$

Pour que cette droite passe par le point M, il faut que les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la droite; si donc on remplace les coordonnées variables x et y par les coordonnées x' et y' du point M, on aura l'équation de condition

$$y'=ax'+b.$$

Cette relation entre les deux paramètres a et b détermine l'un d'eux en fonction de l'autre, par exemple le paramètre b en fonction de a; en remplaçant dans l'équation de la droite b par sa valeur $y'-ax'$ tirée de l'équation de condition, on obtient l'équation

$$y-y'=a(x-x'). \tag{7}$$

L'équation (7), dans laquelle le coefficient angulaire a est arbitraire, représente toutes les droites qui passent par le point M. Quand on fait varier le paramètre a, la droite tourne autour du point M.

Nous avons supposé que toute droite est représentée par une équation de la forme $y=ax+b$, quelle que soit sa position dans le plan. Mais il y a une exception, c'est lorsque la droite est parallèle à l'axe des y; car, dans ce cas, le coefficient angulaire a est infini, ainsi que l'ordonnée à l'origine b. Cependant, si dans l'équation (7) on remplace a par le rapport $\frac{m}{n}$, qu'on mette l'équation sous la forme

$$n(y-y') = m(x-x'),$$

et qu'on fasse ensuite $n=0$, on obtient l'équation $x=x'$, qui représente la parallèle à l'axe des y, menée par le point M.

PROBLÈME II.

65 — *Par un point donné mener une droite parallèle à une droite donnée.*

Soit $y=ax+b$ l'équation de la droite donnée AB, x' et y' les coordonnées du point donné M (fig. 50). La droite demandée devant passer par le point donné, son équation, comme nous l'avons dit, sera de la forme

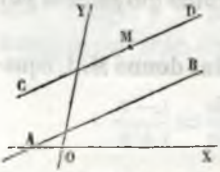


Fig. 50.

$$y-y' = a'(x-x').$$

Cette droite devant être parallèle à la droite AB, son coefficient angulaire a' sera égal au coefficient angulaire a de la droite AB ; on aura donc $a'=a$, et la parallèle demandée CD sera représentée par l'équation

$$y-y' = a(x-x').$$

PROBLÈME III.

66 — *Mener une droite par deux points donnés.*

Soient M et M' (fig. 51) les deux points donnés, x' et y' les coordonnées du point M, x'' et y'' celles du point M'. La droite M'M, passant par le point M, est représentée par une équation de la forme

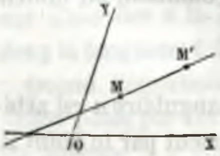


Fig. 51.

$$(7) \quad y-y' = a(x-x');$$

il s'agit de déterminer le coefficient a, de manière que cette droite passe aussi par le point M'. Il faut pour cela que les coordonnées du point M' vérifient l'équation (7), ce qui donne la relation

$$y''-y' = a(x''-x'),$$

d'où l'on déduit

$$a=\frac{y''-y'}{x''-x'}.$$

On voit que le coefficient angulaire de la droite MM' est égal au rapport de la différence des ordonnées à la différence des abscisses des deux points donnés. Si dans l'équation (7) on remplace a par sa valeur, on obtient l'équation de la droite MM'

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x'), \tag{8}$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}.$$

Lorsque le point M est à l'origine, on a $x'=0$, $y'=0$, et l'équation (8) se réduit à

$$y=\frac{y''}{x''}x.$$

67 — Il arrive souvent que la droite est définie par les points A et B où elle coupe les axes (fig. 52); appelons a l'abscisse du premier point, b l'ordonnée du second, et soit

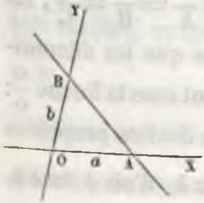


Fig. 52.

$$Ax+By+C=0$$

l'équation de la droite cherchée. Si l'on y fait successivement $y=0$ et $x=0$, on obtient les points où la droite coupe les axes; on a ainsi $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$; d'où $A=-\frac{C}{a}$, $B=-\frac{C}{b}$. En remplaçant A et B par leurs valeurs, on met l'équation sous la forme simple

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{9}$$

PROBLÈME IV.

68 — *Trouver le point d'intersection de deux droites données.*

Soient

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0,$$

les équations de deux droites données AB et CD (fig. 53), M le point d'intersection de ces deux droites. Le point M appartenant à chacune des droites, ses coordonnées vérifient à la fois les deux équations; si donc on résout ces deux équations simultanées à deux inconnues x et y, on obtiendra les coordonnées du point M,

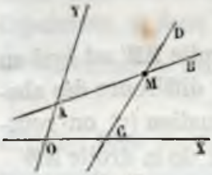


Fig. 53.

$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}, \quad y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}.$$

Quand le dénominateur $AB' - BA'$ est différent de zéro, les formules donnent pour x et y des valeurs finies et déterminées et les deux droites se coupent effectivement en un point M. Mais quand le dénominateur $AB' - BA'$ est nul, sans que les numérateurs le soient, on obtient pour x et y des valeurs infinies; ceci indique que les deux droites proposées sont parallèles; et, en effet, dans ce cas elles ont leurs coefficients angulaires égaux $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$. Si l'on a à la fois $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$, les deux numérateurs sont nuls en même temps que les dénominateurs, et les valeurs de x et de y se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$; il y a indétermination, et, en effet, les deux droites proposées coïncident; car, si l'on pose $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = k$, d'où $A' = Ak$, $B' = Bk$, $C' = Ck$, que l'on remplace dans la seconde équation, et que l'on divise par k, cette équation devient identique à la première.

PROBLÈME V.

69—*Trouver l'équation générale des droites qui passent par le point d'intersection de deux droites données.*

Soient

$$(10) \qquad Ax + By + C = 0,$$

$$(11) \qquad A'x + B'y + C' = 0,$$

les équations des deux droites données. On pourrait traiter la question en cherchant les coordonnées du point d'intersection des deux droites par la résolution des équations (10) et (11), et faisant passer ensuite une droite quelconque par ce point (n° 64). Mais on arrive au même résultat par une marche beaucoup plus rapide.

Si l'on ajoute membre à membre les deux équations (10) et (11), après avoir multiplié l'une d'elles par une quantité arbitraire λ, on obtient une équation du premier degré

$$(12) \qquad (Ax+By+C)+\lambda(A'x+B'y+C')=0,$$

qui représente une troisième droite passant par le point d'intersection des deux premières; et, en effet, les coordonnées de ce point, vérifiant à la fois les deux équations (10) et (11), annulent les deux parenthèses, et, par conséquent, satisfont à l'équation (12). Cette équation (12), dans laquelle le coefficient λ est arbitraire, représente toutes les droites qui passent par le point d'intersection des deux droites données; car on peut déterminer ce coefficient de manière que la droite passe par un point quelconque M du plan, ayant pour coordonnées x' et y'; il suffit pour cela que l'équation de condition

$$(Ax'+By'+C)+\lambda(A'x'+B'y'+C')=0$$

soit vérifiée, ce qui donne

$$(13) \qquad \lambda=-\frac{Ax'+By'+C}{A'x'+B'y'+C'}.$$

Quand on fait $\lambda=0$, l'équation (12) devient $Ax+By+C=0$; c'est la première droite. Si l'on remplace λ par $\frac{m}{n}$, et qu'après avoir multiplié par n, on fasse $n=0$, on a la seconde droite $A'x+B'y+C'=0$.

Si, dans l'équation (12), on remplace λ par sa valeur (13), on obtient l'équation

$$(14) \qquad \frac{Ax+By+C}{Ax'+By'+C}=\frac{A'x+B'y+C'}{A'x'+B'y'+C'},$$

qui représente la droite passant par le point M et le point d'intersection des deux droites données. Les numérateurs sont les premiers membres des équations des deux droites données, les dénominateurs les valeurs de ces polynômes, quand on y remplace x et y par les coordonnées du point donné. On reconnaît immédiatement, à l'inspection de cette équation, que la droite qu'elle représente passe par le point donné et par le point d'intersection des deux droites données.

Lorsque les deux droites (10) et (11) sont parallèles, l'équation (12) représente toutes les droites parallèles à celles-là.

Une équation du premier degré en x et y contenant un paramètre arbitraire λ représente une infinité de droites ; lorsque ce paramètre n'entre qu'au premier degré dans l'équation, on peut mettre l'équation sous la forme (12) ; on voit alors que toutes les droites passent par un même point, le point d'intersection des droites (10) et (11).

PROBLÈME VI.

70 — *Reconnaître si trois points sont en ligne droite.*

Soient M, M', M'' les trois points donnés, x' et y' les coordonnées du premier point, x'' et y'' celles du second, x''' et y''' celles du troisième (fig. 54). Les coefficients angulaires des droites MM', MM'' sont $\frac{y''-y'}{x''-x'}$, $\frac{y'''-y'}{x'''-x'}$ (n° 66) ; quand les trois points M, M', M'' sont en ligne droite, les deux droites MM', MM'', coïncident, leurs coefficients angulaires sont égaux, et l'on a la relation

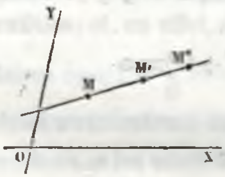


Fig. 54.

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{y'''-y'}{x'''-x'}. \tag{15}$$

PROBLÈME VII.

71 — *Reconnaître si trois droites passent par un même point.*

Soient

$$A\,x+B\,y+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0,$$
$$A''x+B''y+C''=0,$$

les équations des trois droites données. On cherchera le point d'intersection des deux premières droites, et on substituera les coordonnées de ce point dans la troisième équation.

On peut aussi traiter la question par une autre méthode. L'équation

$$(A+\lambda A')x+(B+\lambda B')y+(C+\lambda C')=0$$

représente toutes les droites qui passent par le point d'intersection des deux premières droites (nº 69); si la troisième droite passe par ce point, on doit pouvoir déterminer le paramètre λ, de manière que l'équation précédente représente cette troisième droite. Or, pour que deux équations représentent une même droite, il est nécessaire et il suffit que les coefficients soient proportionnels: on a ainsi les deux relations

$$\frac{A+\lambda A'}{A''}=\frac{B+\lambda B'}{B''}=\frac{C+\lambda C'}{C''},$$

à une inconnue λ. L'élimination de cette inconnue conduit à une équation de condition.

72 — Considérons, par exemple, les trois médianes d'un triangle OAB (fig. 55); prenons le sommet O pour origine, les deux côtés OA et OB pour axes des coordonnées, et désignons par a et b les deux longueurs OA et OB. La médiane AE, coupant les axes à des distances a et $\frac{b}{2}$ de l'origine, a pour équation

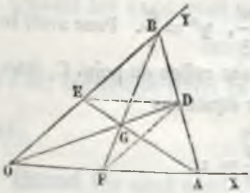


Fig. 55.

$$\frac{x}{a}+\frac{2y}{b}=1;$$

de même, la médiane BF a pour équation

$$\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Le point D, milieu de AB, a pour coordonnées OF $=\frac{a}{2}$, OE $=\frac{b}{2}$; la droite OD, qui va de l'origine à ce point, est représentée par l'équation

$$y=\frac{b}{a}x.$$

En résolvant les deux premières équations, on obtient les coordonnées $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{b}{3}$, du point d'intersection G des deux premières médianes AE et BF. Ces coordonnées vérifiant la troisième équation, on en conclut que la troisième médiane passe aussi par le point G.

En appliquant la seconde méthode, on reconnaît immédiatement que les trois médianes passent par un même point; car, si l'on retranche les deux premières équations membre à membre, on obtient la troisième.

73 — Comme exemple de trois points en ligne droite, considérons un quadrilatère OACB (fig. 56); si l'on prolonge les quatre côtés indéfiniment, on forme ce qu'on appelle un quadrilatère complet; les côtés se coupent deux à deux en six points ou sommets; en joignant les sommets opposés, on obtient trois diagonales AB, A'B', OC; nous allons démontrer que les trois points D, E, F, qui divisent ces diagonales en deux parties égales, sont en ligne droite.

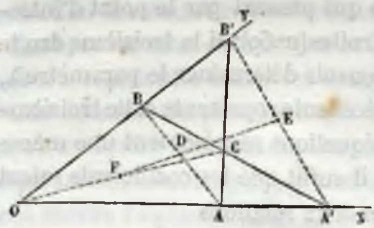


Fig. 56.

Prenons les côtés OA et OB pour axes des coordonnées; désignons par a et a' les deux longueurs OA et OA', par b et b' les deux longueurs OB et OB'. Le point D, milieu de AB, a pour coordonnées $x'=\frac{a}{2}$, $y'=\frac{b}{2}$. Le point E, milieu de A'B', a pour coordonnées $x''=\frac{a'}{2}$, $y''=\frac{b'}{2}$. Pour avoir les coordonnées du point F, milieu de OC, cherchons celles du point C, intersection des deux droites AB', A'B, qui ont pour équations

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b'}=1, \quad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b}=1.$$

En résolvant ces deux équations simultanées, on obtient les coordonnées du point C,

$$x=\frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'}, \quad y=\frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'}.$$

Le point F étant le milieu de la droite OC, ses coordonnées x''', y''' sont les moitiés de celles du point C; on a donc

$$x'''=\frac{aa'(b-b')}{2(ab-a'b')}, \quad y'''=\frac{bb'(a-a')}{2(ab-a'b')}.$$

Ayant les coordonnées des points D, E, F, on reconnaît aisément que les trois points sont en ligne droite. Les droites DE et DF ont pour coefficients angulaires

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{b'-b}{a'-a}, \quad \frac{y'''-y'}{x'''-x'}=\frac{\dfrac{bb'(a-a')}{ab-a'b'}-b}{\dfrac{aa'(b-b')}{ab-a'b'}-a}=\frac{b'-b}{a'-a};$$

ces deux coefficients angulaires étant égaux entre eux, on en conclut que les trois points D, E, F sont en ligne droite.

PROBLÈME VIII.

74 — *Trouver l'angle de deux droites.*

Soient $y = ax + b$, $y = a'x + b'$, les équations de deux droites données. Par l'origine, et du côté de l'axe X'X où se trouve OY, menons des demi-droites OA et OA' parallèles aux droites données (fig. 57); appelons α et α' les angles que font ces directions avec OX, V l'angle qu'elles font entre elles, et, pour préciser, supposons $\alpha' > \alpha$. On a évidemment $V = \alpha' - \alpha$, d'où

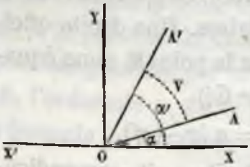


Fig. 57.

$$\operatorname{tang} V = \frac{\operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha'}.$$

Quand les axes sont rectangulaires, on sait que

$$\operatorname{tang} \alpha = a, \quad \operatorname{tang} \alpha' = a';$$

si l'on substitue dans la formule précédente, il vient

(16) $$\operatorname{tang} V = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Quand les axes sont obliques, on a (n° 61) :

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a \sin\theta}{1 + a\cos\theta}, \quad \operatorname{tang} \alpha' = \frac{a' \sin\theta}{1 + a'\cos\theta},$$

et, par suite,

(17) $$\operatorname{tang} V = \frac{(a' - a)\sin\theta}{1 + aa' + (a + a)\cos\theta}.$$

De ces formules, on déduit la relation qui existe entre les coefficients angulaires de deux droites perpendiculaires entre elles. En effet, quand l'angle V est droit, sa tangente devenant infinie, on a, si les axes sont rectangulaires,

(18) $$1 + aa' = 0,$$

et, si les axes sont obliques,

(19) $$1 + aa' + (a + a')\cos\theta = 0.$$

PROBLÈME IX.

75 — *D'un point donné abaisser une perpendiculaire sur une droite donnée, et trouver la longueur de cette perpendiculaire.*

Soient

$$(2) \qquad y = ax + b$$

l'équation de la droite donnée AB, x' et y' les coordonnées du point donné M (fig. 58). Supposons d'abord les axes rectangulaires. Une droite quelconque passant par le point M a une équation de la forme (n° 64)

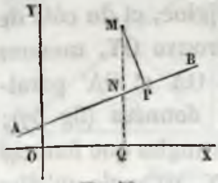


Fig. 58.

$$y - y' = a(x - x').$$

Pour que cette droite soit perpendiculaire à la droite AB, il faut que la relation (n° 74) $1 + aa' = 0$ soit vérifiée; d'où l'on déduit $a' = -\frac{1}{a}$. En remplaçant a' par sa valeur, on obtient l'équation de la perpendiculaire MP

$$(20) \qquad y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

On trouvera les coordonnées x et y du pied P de la perpendiculaire, ou le point d'intersection des deux droites AB et MP, en résolvant les deux équations simultanées (2) et (20); mais nous préférons chercher les différences $x - x'$ et $y - y'$, parce que l'expression de la distance ne contient que ces différences (n° 55). L'équation (2) peut être mise sous la forme

$$y - y' = a(x - x') - (y' - ax' - b);$$

si, dans cette équation, on remplace $y - y'$ par sa valeur donnée par l'équation (20), on trouve

$$x - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2},$$

et, par suite, en vertu de l'équation (20),

$$y - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}.$$

En appliquant la formule de la distance de deux points (n° 55), on obtiendra la longueur l de la perpendiculaire MP,

$$l = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \sqrt{\frac{(y' - ax' - b)^2(1 + a^2)}{(1 + a^2)^2}},$$

d'où

$$(21) \qquad l = \pm\frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

On prendra le signe de façon que l'on ait pour l une valeur positive. Il est aisé de voir que le numérateur est positif ou négatif, suivant que le point M est placé par rapport à la droite AB du côté des y positives ou du côté des y négatives. En effet, soit N le point où la droite AB est rencontrée par la parallèle à l'axe des y menée par le point M ; le point N étant sur la droite AB, l'ordonnée y_1 de ce point est égale à $ax'+b$, de sorte que la formule (21) devient

$$l=\pm\frac{y'-y_1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

La différence $y'-y_1$ est positive dans le premier cas, négative dans le second cas.

On aurait pu obtenir immédiatement la longueur de la perpendiculaire sous cette dernière forme, en remarquant que le triangle rectangle MNP donne

$$\mathrm{MP}=\mathrm{MN}\sin\mathrm{MNP}=\pm(y'-y_1)\cos\alpha=\pm\frac{y'-y_1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

76 — Supposons maintenant les coordonnées obliques ; les droites AB et MP seront perpendiculaires si leurs coefficients angulaires a et a' vérifient la relation $1+aa'+(a+a')\cos\theta=0$, d'où l'on déduit $a'=-\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta}$. L'équation de la perpendiculaire MP est donc

$$y-y'=-\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta}(x-x'). \tag{22}$$

En résolvant les deux équations simultanées (2) et (22), on obtiendra les coordonnées x et y du point P ; si, comme précédemment, on cherche les différences $x-x'$, $y-y'$, on trouve

$$x-x'=\frac{(y'-ax'-b)(a+\cos\theta)}{1+a^2+2a\cos\theta},$$

$$y-y'=-\frac{(y-ax'-b)(1+a\cos\theta)}{1+a^2+2a\cos\theta};$$

substituant ces différences dans la formule de la distance de deux points (nº 56)

$$l=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+2(x-x')(y-y')\cos\theta},$$

on a

$$l=\frac{\pm(y'-ax'-b)\sqrt{(a+\cos\theta)^2+(1+a\cos\theta)^2-2(a+\cos\theta)(1+a\cos\theta)\cos\theta}}{1+2a\cos\theta+a^2}.$$

En développant les calculs, on voit que la quantité placée sous le radical contient le facteur $1-\cos^2\theta$ ou $\sin^2\theta$, et s'écrit

$$(1+2a\cos\theta+a^2)\sin^2\theta;$$

il en résulte

$$(23)\qquad l=\pm\frac{(y'-ax'-b)\sin\theta}{\sqrt{1+2a\cos\theta+a^2}}.$$

Le numérateur est positif ou négatif suivant que le point M est placé par rapport à la droite AB du côté des y positives, ou du côté des y négatives. On prendra le signe de façon que l'on ait pour l une quantité positive.

77 — Dans ce qui précède, nous avons supposé l'équation de la droite donnée mise sous la forme $y=ax+b$. Si cette équation avait la forme générale

$$(1)\qquad Ax+By+C=0,$$

le coefficient angulaire a de la droite donnée étant égal à $-\frac{A}{B}$, on aurait dans le cas des coordonnées rectangulaires $a'=-\frac{1}{a}=\frac{B}{A}$, et la perpendiculaire abaissée du point M serait représentée par l'équation

$$y-y'=\frac{B}{A}(x-x'),$$

ou plus simplement

$$(24)\qquad \frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}.$$

La formule (21), dans laquelle on remplace a et b par leurs valeurs $-\frac{A}{B}$, $-\frac{C}{B}$, devient

$$(25)\qquad l=\pm\frac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Cette formule exprime la distance d'un point à une droite en coordonnées rectangulaires : le numérateur est le premier membre de l'équation de la droite, dans lequel on remplace x

et y par les coordonnées du point; le dénominateur est la racine carrée de la somme des carrés des coefficients de x et de y.

Quand les axes sont obliques, on a

$$a' = \frac{B - A\cos\theta}{A - B\cos\theta};$$

l'équation de la perpendiculaire est

$$(26) \qquad \frac{x - x'}{A - B\cos\theta} = \frac{y - y'}{B - A\cos\theta},$$

et la formule (23) devient

$$(27) \qquad l = \pm \frac{(Ax' + By' + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}.$$

Il est aisé de reconnaître le signe du numérateur, suivant la position du point M par rapport à la droite AB. Soit N (fig. 38) le point où la parallèle MQ à l'axe des y rencontre la droite AB; imaginons qu'un point mobile, ayant pour coordonnées x et y, parcoure cette droite, et considérons les valeurs du polynôme $Ax + By + C$ pour les diverses positions du point mobile; quand le point mobile est en N, la valeur du polynôme est nulle. Si le coefficient B est positif, quand on marche dans le sens des y positives, le terme By augmente, et la fonction prend des valeurs positives de plus en plus grandes; quand on marche dans le sens opposé, elle prend des valeurs négatives. C'est le contraire qui a lieu, lorsque B est négatif.

PROBLÈME X.

78 — *Par le point d'intersection de deux droites données, mener une droite perpendiculaire à une droite donnée.*

Soient

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A'x + B'y + C' &= 0, \\ A''x + B''y + C'' &= 0, \end{aligned}$$

les équations des trois droites en coordonnées rectangulaires; toute droite passant par le point d'intersection des deux premières droites est représentée par une équation de la forme

$$(Ax + By + C) + \lambda(A'x + B'y + C') = 0;$$

pour qu'elle soit perpendiculaire à la troisième droite, on doit avoir

$$1+\frac{A''(A+\lambda A')}{B''(B+\lambda B')}=0,$$

d'où l'on déduit

$$\lambda=-\frac{AA''+BB''}{A'A''+B'B''};$$

en remplaçant λ par sa valeur, on obtient l'équation de la droite cherchée

$$(28)\quad (A'A''+B'B'')(Ax+By+C)=(A''A+B''B)(A'x+B'y+C').$$

79—Les trois droites données forment un triangle dont les sommets sont les points d'intersection de ces droites deux à deux ; l'équation (28) représente la perpendiculaire abaissée de l'un des sommets sur le côté opposé. En permutant les accents, on aura les équations des perpendiculaires abaissées de chacun des deux autres sommets sur le côté opposé :

$$(A''A+B''B)(A'x+B'y+B'')=(AA'+BB')(A''x+B''y+C''),$$
$$(AA'+BB'')(A''x+B''y+C'')=(A'A''+B'B'')(Ax+By+C).$$

On voit qu'en ajoutant les deux premières équations membre à membre, on obtient la troisième. On en conclut (nº 71) que les trois hauteurs d'un triangle passent par un même point.

PROBLÈME XI.

80 — *Trouver le lieu des points également distants de deux points donnés.*

Supposons les axes rectangulaires et soient x' et y', x'' et y'' les coordonnées des deux points donnés. Si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point quelconque du lieu, l'équation du lieu sera

$$(x-x')^2+(y-y')^2=(x-x'')^2+(y-y'')^2,$$

ou plus simplement

$$(29)\qquad (x''-x')\left(x-\frac{x'+x''}{2}\right)+(y''-y')\left(y-\frac{y'+y''}{2}\right)=0.$$

Ce lieu est une droite perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les deux points donnés.

PROBLÈME XII.

81 —*Trouver le lieu des points également distants de deux droites données.*

Nous supposons encore les axes rectangulaires; soient

$$A\,x + B\,y + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

les équations des deux droites données. Si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point quelconque du lieu, l'équation du lieu sera

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}. \tag{30}$$

A cause du double signe, cette équation représente deux droites, qui sont les bissectrices des angles formés par les deux droites données.

ÉQUATION DE LA LIGNE DROITE EN COORDONNÉES POLAIRES.

82 — Soit O le pôle et OX l'axe polaire. On peut déterminer la position d'une droite AB par la longueur a de la perpendiculaire OD abaissée de l'origine sur cette droite (fig. 59), et par l'angle α que fait cette perpendiculaire avec l'axe polaire, cet angle étant compris entre 0 et 2π. Appelons ρ et ω les coordonnées d'un point quelconque M de la droite; en projetant le rayon vecteur OM sur la perpendiculaire OD, on a

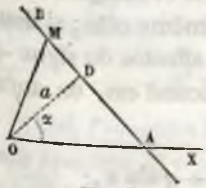


Fig. 59.

$$\rho \cos(\omega - \alpha) = a; \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{a}{\cos(\omega - \alpha)}. \tag{31}$$

Puisque a et α sont des constantes, cette équation est de la forme

$$\rho = \frac{C}{A\cos\omega + B\sin\omega}. \tag{32}$$

Réciproquement, toute équation de cette forme représente une droite; car si l'on revient aux coordonnées rectilignes, en prenant l'axe polaire pour axe des x, et une perpendiculaire menée par le pôle pour axe des y, à l'aide des formules de transformation $x = \rho\cos\omega$, $y = \sin\omega$, l'équation devient $A\,x + B\,y = C$.

AUTRE FORME DE L'ÉQUATION D'UNE DROITE.

83 — L'équation (31) développée devient

$$\rho\cos\omega\cos\alpha + \rho\sin\omega\sin\alpha = a,$$

ou, en coordonnées rectilignes rectangulaires,

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - a = 0. \tag{33}$$

L'équation de la droite étant mise sous cette forme, le premier membre a une signification géométrique très-simple. Considérons un point quelconque M du plan, ayant pour coordonnées polaires ρ et ω, et pour coordonnées rectilignes x et y; de ce point abaissons une perpendiculaire MP sur la droite AB (fig. 60). La projection du rayon vecteur OM sur la droite OD est $\rho \cos(\omega - \alpha)$; mais cette projection est égale à OD, augmentée ou diminuée de la perpendiculaire PM, suivant que le point M et l'origine O sont situés de part et d'autre de la droite ou du même côté; si donc on désigne par p cette perpendiculaire, affectée du signe $+$ dans le premier cas, du signe $-$ dans le second cas, on aura, d'une manière générale,

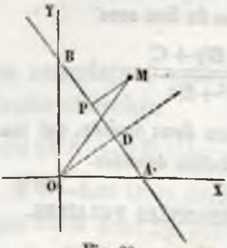


Fig. 60.

$$a + p = \rho \cos(\omega - \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

d'où

$$p = x \cos \alpha + y \sin \alpha - a.$$

Ainsi, le premier membre de l'équation (33) représente la distance d'un point quelconque du plan ayant pour coordonnées x et y à la droite définie par cette équation, distance affectée d'un signe convenable.

Il est facile d'en déduire les coordonnées x_1 et y_1 du pied P de la perpendiculaire; les différences $x - x_1$, $y - y_1$ étant les projections de la droite PM sur les deux axes, on a

$$x - x_1 = p \cos \alpha = (x \cos \alpha + y \sin \alpha - a) \cos \alpha,$$
$$y - y_1 = p \sin \alpha = (x \cos \alpha + y \sin \alpha - a) \sin \alpha.$$

La forme (33), sous laquelle on peut toujours mettre l'équation de la droite, est utile dans un grand nombre de questions.

CHAPITRE II

Du cercle.

84 — Cherchons d'abord l'équation de la circonférence en coordonnées rectangulaires. Désignons par a et b les coordonnées du centre C (fig. 61) et par r le rayon; la circonférence, étant le lieu des points dont la distance au centre est égale au rayon, a pour équation

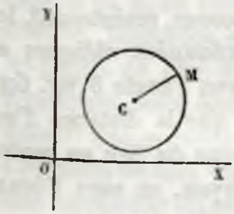


Fig. 61.

$$(1)\quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2;$$

cette équation développée se met sous la forme

$$(2)\qquad x^2+y^2+Ax+By+C=0.$$

Ainsi, *l'équation du cercle, en coordonnées rectangulaires, est une équation du second degré, qui ne renferme pas le rectangle* xy *des variables, et dans laquelle les termes en* x^2 *et en* y^2 *ont même coefficient.*

85 — Réciproquement, toute équation de cette forme, en coordonnées rectangulaires, représente une circonférence de cercle, quand elle représente un lieu. En effet, on peut écrire l'équation (2) de la manière suivante

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2}{4}-C.$$

Marquons le point C, qui a pour coordonnées $-\frac{A}{2}$ et $-\frac{B}{2}$; le premier membre représente le carré de la distance d'un point quelconque M du plan ayant pour coordonnées x et y au point C; si le second membre est positif, l'équation sera vérifiée par les coordonnées de tous les points du plan dont la distance au point C est égale à $\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4}-C}$; elle représente donc une circonférence de cercle. Lorsque le second membre est nul, la distance MC devant être nulle, le point M coïncidera avec le point C, et l'équation ne sera vérifiée que par les coordonnées de ce point ; le lieu se réduit donc à un point unique. Enfin, lorsque le second membre est négatif, l'équation ne peut être vérifiée par les coordonnées d'aucun point du plan ; car le carré de la distance du point M au point C est une quantité positive ; l'équation ne représente donc, dans ce cas, aucun lieu géométrique.

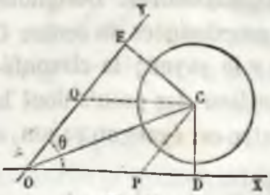


Fig. 62.

86 — Supposons, maintenant, les axes des coordonnées obliques et faisant entre eux l'angle θ (fig. 62); en exprimant que la distance d'un point quelconque du lieu au centre est égale au rayon, on aura l'équation de la circonférence

$$(3) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta = r^2.$$

Cette équation est de la forme

$$(4) \qquad x^2+y^2+2xy\cos\theta + Ax + By + C = 0.$$

Ainsi *l'équation du cercle, en coordonnées obliques, est une équation du second degré, dans laquelle les termes en* x² *et en* y² *ont pour coefficients l'unité, et le terme en* xy *deux fois le cosinus de l'angle des axes.*

87 —Réciproquement, toute équation de cette forme représente une circonférence de cercle, quand elle représente un lieu. En effet, on peut déterminer les trois constantes a, b, r^2, de manière à identifier les équations (3) et (4). L'équation (3), développée, devient

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta - 2(a+b\cos\theta)x - 2(b+a\cos\theta)y$$
$$+a^2+b^2+2ab\cos\theta - r^2 = 0.$$

On identifiera cette équation à l'équation (4) en posant

$$a+b\cos\theta = -\frac{A}{2}, \quad b+a\cos\theta = -\frac{B}{2},$$
$$a^2+b^2+2ab\cos\theta - r^2 = C.$$

Les deux premières relations donnent pour a et b des valeurs finies, puisque le dénominateur $1-\cos^2\theta$ ou $\sin^2\theta$ est différent de zéro. La troisième donne

$$r^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - C.$$

Marquons le point C, qui a pour coordonnées a et b. Le premier membre de l'équation (3) représente le carré de la distance d'un point quelconque M du plan, ayant pour coordonnées x et y, au point C. Si l'on trouve pour r^2 une quantité positive, l'équation sera vérifiée par les coordonnées de tous les points du plan distants du point C de la longueur r; elle représente donc une circonférence de cercle. Si l'on trouve pour r^2 une quantité nulle, la distance MC devant être nulle, l'équation ne sera vérifiée que par les coordonnées du point C; elle représente un seul point. Enfin, si l'on trouve pour r^2 une quantité négative, l'équation n'est vérifiée par les coordonnées d'aucun point du plan.

Au lieu de déterminer le centre C du cercle par ses coordonnées a et b, il est plus commode de le déterminer par les projections orthogonales de la droite OC sur les deux axes. Appelons a' et b' ces deux projections OD et OE (fig. 62), prises avec les signes convenables, et exprimons que la projection de la droite OC sur l'un ou l'autre axe est égale à celle de la ligne brisée OPC ou OQC; nous aurons

$$a' = a + b\cos\theta, \quad b' = b + a\cos\theta;$$

il en résulte $a' = -\dfrac{A}{2}$, $b' = -\dfrac{B}{2}$.

Après avoir porté sur les axes à partir de l'origine les longueurs a' et b', on mènera par les points D et E des perpendiculaires aux axes; l'intersection des deux perpendiculaires déterminera le centre C.

88—L'équation d'une circonférence de cercle, comme nous l'avons dit, est

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\theta - r^2 = 0. \tag{5}$$

Le premier membre a une signification géométrique qu'il est bon de remarquer. Considérons un point M du plan ayant pour coordonnées x et y ; l'expression

$$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta$$

représente le carré de la droite MC qui joint le point M au centre (fig. 63) ; le premier membre de l'équation est donc égal à $\overline{MC}^2-r^2$, c'est-à-dire au produit des deux facteurs $MC+r$ et $MC-r$, qui sont les deux segments MA et MB du diamètre mené par le point M, segments affectés du même signe ou de signes contraires, suivant qu'ils sont portés dans le même sens, ou dans des sens opposés. Ainsi, le premier membre de l'équation (5) représente le produit des deux segments d'une sécante quelconque menée par le point M. Quand le point M est extérieur au cercle, ce produit est égal au carré de la tangente.

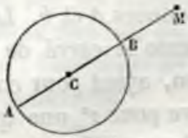


Fig. 63.

PROBLÈME I.

89 — *Trouver l'équation de la tangente à une courbe quelconque.*

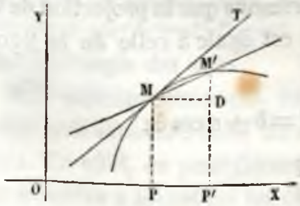


Fig. 64.

Nous avons déjà donné la définition de la tangente en un point M d'une courbe (n° 23). Par le point M et un point voisin M′ pris sur la courbe, menons une sécante MM′, puis supposons que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M ; la sécante MM′ tournera autour du point M et tendra vers une position limite MT ; cette droite MT est dite *tangente* à la courbe au point M (fig. 64).

Soient x et y les coordonnées du point de contact M, $x+h$ et $y+k$ celle du point voisin M′ ; le coefficient angulaire de la sécante MM′ est le rapport $\frac{k}{h}$ de la différence des ordonnées des deux points M et M′ à la différence de leurs abscisses. Quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, les deux accroissements h et k tendent simultanément vers zéro, et leur rapport $\frac{k}{h}$ tend vers une limite, qui est la dérivée de l'ordonnée considérée comme fonction de l'abscisse.

Si l'équation de la courbe est résolue par rapport à y et mise sous la forme $y=f(x)$, la tangente aura pour coefficient angulaire $y'=f'(x)$. Lorsque l'équation de la courbe $f(x, y)=0$ n'est pas résolue, on obtient la dérivée y' de la fonction implicite y à l'aide de l'équation $f'_x+y'f'_y=0$, dans laquelle f'_x et f'_y désignent les dérivées partielles de la fonction $f(x,y)$ par rapport à x et par rapport à y. On en déduit

$$(6) \qquad y'=-\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Ainsi, si l'on désigne par X et Y les coordonnées d'un point quelconque de la tangente, l'équation de cette droite est

$$(7) \qquad Y-y=-\frac{f'_x}{f'_y}(X-x), \quad \text{ou} \quad (X-x)f'_x+(Y-y)f'_y=0.$$

PROBLÈME II.

90 — *Trouver l'équation de la tangente au cercle.*

Appliquons la formule précédente au cercle, et, pour simplifier, supposons les axes rectangulaires et l'origine des coordonnées placée au centre du cercle ; le cercle a pour équation

$$x^2+y^2-r^2=0.$$

Résolue par rapport à y, l'équation devient $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$; en prenant la dérivée de cette fonction, on a

$$y'=\frac{-x}{\pm\sqrt{r^2-x^2}}=-\frac{x}{y}.$$

En conservant l'équation non résolue et appliquant la formule (6), on obtient la même valeur $y'=-\frac{x}{y}$. Ainsi l'équation de la tangente est

$$Y-y=-\frac{x}{y}(X-x), \quad \text{ou} \quad xX+yY=x^2+y^2.$$

Puisque le point M est sur le cercle, ses coordonnées vérifient l'équation du cercle, et l'on a $x^2+y^2=r^2$. L'équation de la tangente se simplifie et devient

$$xX+yY=r^2. \tag{8}$$

Le coefficient angulaire du rayon qui va du centre au point de contact étant $\frac{y}{x}$, on voit que la tangente est perpendiculaire à ce rayon.

PROBLÈME III.

91 — *Mener une tangente au cercle par un point extérieur* P.

Supposons toujours le cercle rapporté à des axes rectangulaires menés par le centre, et représenté par l'équation

$$x^2+y^2=r^2. \tag{9}$$

Désignons par x_1 et y_1 les coordonnées du point donné P (fig. 65).

Fig. 65.

Soit MP une tangente menée par ce point; la question revient à déterminer le point de contact M, dont nous appellerons x et y les coordonnées inconnues. Le point M étant sur le cercle, ses coordonnées vérifient l'équation (9). La tangente au point M a pour équation $xX+yY=r^2$. Cette tangente passant par le point P, son équation doit être vérifiée par les coordonnées de ce point, ce qui donne la relation

$$xx_1+yy_1=r^2. \tag{10}$$

En résolvant les deux équations simultanées (9) et (10), on obtiendra les valeurs des inconnues x et y.

La résolution des deux équations (9) et (10) revient à la recherche des points d'intersection de deux lignes. La première équation représente le cercle proposé; la seconde une ligne droite. Chercher les valeurs de x et de y qui vérifient à la fois ces deux équations, c'est chercher les points d'intersection de la droite et du cercle. Cette droite coupe le cercle en deux points M et M'; c'est la droite des contacts. On remarque que l'équation (10) de la droite des contacts a même forme que l'équation (8) de la tangente ; seulement, les coordonnées du point de contact sont remplacées par celles du point P.

92 — On sait que, lorsqu'on a deux équations simultanées

$$A=0, \quad B=0,$$

à deux inconnues x et y, si l'on remplace l'une d'elles par l'équation $mA+nB=0$, que l'on obtient en ajoutant membre à membre les deux équations proposées, après les avoir multipliées par des nombres arbitraires m et n, on forme un nouveau système d'équations

$$A=0, \quad mA+nB=0,$$

équivalent au système proposé. Cela signifie géométriquement que les points d'intersection des deux lignes représentées par les deux équations proposées sont les mêmes que les points d'intersection de l'une d'elles par la troisième ligne.

Nous avons dit que les points de contact M et M′ sont donnés par l'intersection du cercle proposé et de la droite des contacts. En retranchant les deux équations (9) et (10) membre à membre, on obtient la nouvelle équation

$$x^2+y^2-x_1x-y_1y=0,$$

ou

$$\left(x-\frac{x_1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2=\frac{x_1^2+y_1^2}{4},$$

qui peut remplacer l'équation (10) ; cette nouvelle équation représente un cercle ; le centre, dont les coordonnées sont $\frac{x_1}{2}$ et $\frac{y_1}{2}$, est le milieu de la droite OP ; l'équation ne contenant pas de terme constant, le cercle passe par l'origine ; on a ainsi le cercle décrit sur la droite OP comme diamètre ; les points où ce cercle coupe le cercle proposé sont les points de contact. On retrouve de cette manière la construction de la géométrie élémentaire.

PROBLÈME IV.

93 — *Mener une tangente parallèle à une droite donnée.*

Au cercle

(9) $$x^2+y^2=r^2$$

on veut mener une tangente parallèle à la droite $y=mx$, que l'on peut supposer passant par l'origine (fig. 66). Si l'on désigne par x et y les coordonnées du point de contact M, on sait que le coefficient angulaire de la tangente est égal à $-\frac{x}{y}$; pour que la tangente MT soit parallèle à la droite donnée, il faut que son coefficient angulaire soit égal à m; on aura donc la relation $-\frac{x}{y}=m$, ou

Fig. 66.

$$y=-\frac{1}{m}x. \tag{11}$$

D'ailleurs les coordonnées du point M vérifient l'équation du cercle. Ces coordonnées seront donc déterminées par les deux équations simultanées (9) et (11), et par conséquent, les points de contact M et M′ seront donnés par l'intersection du cercle et de la droite que représente l'équation (11); cette droite MM′ est un diamètre perpendiculaire à la droite donnée OA.

94 — On peut traiter la question d'une autre manière, et ceci nous fournira l'occasion de présenter l'équation de la tangente au cercle sous une forme nouvelle. Proposons-nous d'abord de chercher les points d'intersection d'un cercle $x^2+y^2=r^2$ et d'une droite quelconque $y=mx+k$. En éliminant y, on obtient l'équation du second degré $x^2+(mx+k)^2=r^2$, ou

$$(m^2+1)x^2+2mkx+k^2-r^2=0.$$

Quand cette équation a ses racines réelles, la droite coupe le cercle en deux points, dont les abscisses sont les racines de l'équation. Si les racines deviennent égales entre elles, les deux points d'intersection se confondent, et la sécante devient tangente au cercle. Enfin, quand les racines sont imaginaires, la droite ne rencontre pas le cercle.

Ainsi, la condition pour que la droite soit tangente au cercle est

$$m^2k^2-(m^2+1)(k^2-r^2)=0, \quad \text{ou} \quad k^2=r^2(m^2+1).$$

L'équation de la droite, dans laquelle on remplace k par sa valeur, devient

(12) $$y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}.$$

Cette équation, qui renferme un paramètre arbitraire m, représente toutes les tangentes au cercle.

Si l'on donne la direction de la tangente, le coefficient angulaire m étant connu, on a immédiatement les équations des deux tangentes parallèles à la direction donnée.

PROBLÈME V.

95 — *Trouver le lieu des points dont les distances à deux points fixes soient entre elles dans un rapport donné.*

Soient A et B les deux points donnés (fig. 67); prenons pour axes des x la droite AB et pour axe des y la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB. Si l'on appelle $2a$ la distance AB, $\frac{m}{n}$ le rapport donné, et si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point quelconque du lieu, l'équation de ce lieu sera

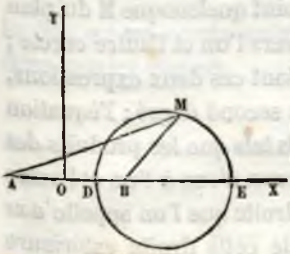


Fig. 67.

$$\frac{y^2+(x+a)^2}{y^2+(x-a)^2} = \frac{m^2}{n^2},$$

ou

(13) $$x^2+y^2-2ax\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}+a^2=0.$$

C'est un cercle dont le centre est situé sur l'axe des x; les deux extrémités du diamètre DE sont les points qui divisent la droite AB dans le rapport de m à n.

PROBLÈME VI.

96 — *Trouver les points d'intersection de deux cercles.*

Soient

(14) $$x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0,$$

(15) $$x^2+y^2+\mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y+\mathrm{C}'=0,$$

les équations des deux cercles en coordonnées rectangulaires. Les points d'intersection seront donnés par ces deux équations simultanées. On peut rémplacer le second cercle par la droite

(16) $$(\mathrm{A}-\mathrm{A}')x+(\mathrm{B}-\mathrm{B}')y+(\mathrm{C}-\mathrm{C}')=0,$$

que l'on obtient en retranchant ces équations membre à membre, et la question est ramenée à la recherche des points d'intersection du premier cercle par cette droite. Si la droite coupe le cercle, les deux cercles auront deux points d'intersection, et l'équation (16) représentera la sécante commune. Si la droite devient tangente au cercle, les deux points d'intersection se confondent, et les deux cercles sont tangents; l'équation (16) représente dans ce cas la tangente commune. Enfin, lorsque la droite ne rencontre pas le cercle, les deux cercles n'ont pas de point commun.

Cependant l'équation (16) a, dans tous les cas, une signification géométrique remarquable. Les premiers membres des équations (14) et (15) représentent (nº 88) les produits des segments des sécantes menées par un point quelconque M du plan ayant pour coordonnées x et y à travers l'un et l'autre cercle; or, on obtient l'équation (16) en égalant ces deux expressions, ce qui fait disparaître les termes du second degré; l'équation (16) représente donc le lieu des points tels que les produits des segments des sécantes menées de chacun d'eux à l'un et l'autre cercle soient égaux; ce lieu est une droite que l'on appelle *axe radical* des deux cercles. La partie de cette droite extérieure aux cercles est le lieu des points d'où les tangentes menées aux deux cercles sont égales entre elles. Il est clair que les axes radicaux de trois cercles combinés deux à deux passent par un même point; on appelle ce point *centre radical* des trois cercles.

ÉQUATION DU CERCLE EN COORDONNÉES POLAIRES.

97 — Soit O le pôle et OX l'axe polaire (fig. 68); appelons a et α les coordonnées du centre C, r le rayon, ρ et ω les coordonnées d'un point quelconque M de la circonférence. Dans le triangle OCM, on a

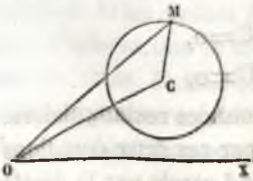


Fig. 68.

$$(17)\quad \rho^2 - 2a\rho\cos(\omega-\alpha) + a^2 - r^2 = 0.$$

Lorsque le pôle O est situé sur la circonférence, on a $a = r$, et l'équation se réduit à

$$(18)\quad \rho = 2r\cos(\omega-\alpha).$$

Pour montrer une application de cette équation, considéron deux cercles qui se coupent ; par l'un des points d'intersection O, menons une sécante quelconque ; cette sécante rencontre les cercles en deux autres points M et M' ; cherchons le lieu du point milieu de la droite MM'. Si l'on prend le point O pour pôle, les deux cercles sont représentés par les équations

$$\rho=2r\cos(\omega-\alpha),\quad \rho=2r'\cos(\omega-\alpha'),$$

et l'on obtient immédiatement l'équation du lieu

$$\rho=r\cos(\omega-\alpha)+r'\cos(\omega-\alpha');$$

cette équation pouvant être mise sous la forme

$$\rho=r_1\cos(\omega-\alpha_1),$$

le lieu est un cercle passant par le point d'intersection O des deux cercles donnés.

CHAPITRE III

Lieux géométriques.

98 — On définit les lieux géométriques de plusieurs manières : tantôt on donne une propriété commune à chacun des points du lieu ; et c'est en traduisant cette propriété, à l'aide des signes algébriques, que l'on obtient l'équation du lieu. C'est ainsi que nous avons défini la circonférence du cercle, le lieu des points distants d'un point donné d'une quantité donnée ; en exprimant cette propriété commune à tous les points du lieu, nous avons obtenu l'équation de la circonférence (nº 84). Nous avons trouvé de la même manière le lieu des points dont les distances à deux points donnés sont entre elles dans un rapport donné (nº 95) ; l'expression de cette propriété donne l'équation du lieu. Nous avons aussi obtenu par le même procédé l'équation de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui joint deux points donnés (nº 80), et celles des bissectrices des angles formés par deux droites données (n° 81).

Mais on définit ordinairement une ligne PQ (fig. 69) par le mouvement d'un point dans le plan. Chacune des positions du point mobile M est donnée par la construction d'une figure dont les diverses parties ne dépendent que d'un paramètre arbitraire a. D'après cela, les deux coordonnées x et y du point M sont des fonctions de ce paramètre variable a : soient

$$x = f(a), \quad y = f_1(a),$$

ces deux fonctions ; on obtiendra l'équation du lieu décrit par le point M, en éliminant le paramètre a entre ces deux équations.

En général, la construction géométrique détermine chacun des points du lieu par la rencontre de deux lignes mobiles qui dépendent par conséquent du paramètre a ; soient

$$(1) \qquad F(x, y, a) = 0$$

$$(2) \qquad F_1(x, y, a) = 0$$

les équations de ces deux lignes. Si l'on attribue à ce paramètre une valeur particulière, on obtient deux lignes A et B qui se coupent en un point M, dont les coordonnées x et y vérifient les deux équations simultanées (1) et (2). Si l'on attribue au paramètre une autre valeur a', les deux lignes occuperont les positions A′ et B′ et le point d'intersection viendra en M′ : une troisième valeur a'' attribuée au paramètre donnera les deux lignes A″ et B″ et le point d'intersection M″, et ainsi de suite. Concevons que l'on fasse varier le paramètre a d'une manière continue, les deux lignes A et B se déplaceront dans le plan d'une manière continue, et le point d'intersection M décrira la ligne PQ.

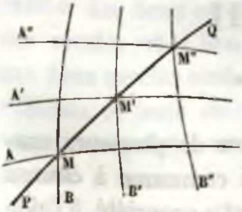


Fig. 69.

On obtiendra l'équation de la ligne PQ, lieu du point M, en éliminant le paramètre a entre les deux équations (1) et (2). En effet, éliminer a entre les deux équations (1) et (2), c'est trouver un système de deux équations

$$(3) \qquad F_1(x, y, a) = 0,$$
$$(4) \qquad f(x, y) = 0,$$

équivalent au système des deux équations (1) et (2), et tel que l'une d'elles ne renferme plus la lettre a. On dit que deux systèmes d'équations sont équivalents, lorsqu'ils sont vérifiés par les mêmes valeurs attribuées aux variables. Quand on attribue à a une valeur particulière, les coordonnées x et y du point M, jointes à cette valeur de a, forment un système de valeurs des trois quantités x, y, a vérifiant à la fois les deux équations (1) et (2); puisque le système des équations (3) et (4) est équivalent au précédent, ces valeurs vérifient aussi les équations (3) et (4); l'équation (4), ne renfermant pas a, est donc vérifiée par les coordonnées de l'un quelconque des points du lieu.

Réciproquement, tout point M, dont les coordonnées x et y vérifient l'équation (4), appartient au lieu. Car, si l'on détermine la valeur de a qui vérifie l'équation (3), dans laquelle on attribue à x et y les valeurs précédentes, on obtient un système de valeurs des trois quantités x, y, a vérifiant le système des équations (3) et (4). Les équations (1) et (2), formant un système équivalent à celui-là, seront vérifiées par les mêmes valeurs; on obtiendra ainsi deux lignes A et B passant par le point M.

Il peut arriver cependant qu'à un système de valeurs réelles de x et de y vérifiant l'équation (4) corresponde une valeur de a, pour laquelle les équations (1) et (2) ne représentent pas de lignes réelles; c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si la valeur de a était imaginaire. Mais, dans tous les cas, les valeurs de x, y, a satisferont aux deux équations (1) et (2).

99—Quoique la construction de chacune des positions de la figure qui donne les divers points du lieu ne dépende que de la valeur attribuée à un paramètre arbitraire, il est souvent plus commode d'introduire dans le calcul plusieurs paramètres variables $a, b, c, \ldots$; mais alors ces paramètres sont liés entre eux de telle sorte que la valeur d'un seul soit arbitraire et que la variation de ce paramètre détermine, par conséquent, celle de tous les autres. Si ces paramètres sont au nombre de n, ils seront liés par $n-1$ équations de condition.

Supposons d'abord que l'on n'emploie que deux paramètres variables a et b liés par l'équation de condition

$$\varphi(a,b)=0, \tag{5}$$

et soient

$$F(x,y,a,b)=0, \tag{6}$$

$$F_1(x,y,a,b)=0, \tag{7}$$

les équations des deux lignes mobiles A et B dont l'intersection donne chaque point du lieu. Si l'on fait varier le paramètre a d'une manière continue, le paramètre b, qui dépend de a d'après la relation (5), variera aussi d'une manière continue; les deux lignes A et B, dont les équations contiennent ces deux paramètres, varieront aussi d'une manière continue, et leur point d'intersection M décrira la ligne PQ.

On obtiendra l'équation de cette ligne en éliminant les deux paramètres a et b entre les trois équations (5), (6), (7). En effet, éliminer a et b entre ces trois équations, c'est trouver un système de trois équations

$$F_2(x,y,a,b)=0, \tag{8}$$

$$F_3(x,y,a,b)=0, \tag{9}$$

$$f(x,y)=0, \tag{10}$$

équivalent au système proposé et tel que l'une d'elles ne contienne plus a et b. Quand on attribue à a et b des valeurs vérifiant l'équation (5), les coordonnées x et y du point M, jointes à ces valeurs de a et de b, forment un système de valeurs des quatre quantités x, y, a, b, vérifiant à la fois les trois équations (5), (6), (7). Les trois équations (8), (9), (10), formant un système équivalent au système précédent, seront aussi vérifiées par les mêmes valeurs; l'équation (10), étant indépendante de a et de b, sera donc vérifiée par les coordonnées x et y de chacun des points du lieu. Réciproquement, tout point M dont les coordonnées x et y vérifient l'équation (10) appartient au lieu; car, si l'on détermine les valeurs de a et de b qui vérifient les deux équations (8) et (9), dans lesquelles on attribue à x et à y les valeurs précédentes, on obtient un système de valeurs des quatre quantités x, y, a, b vérifiant le système des trois équations (8), (9), (10). Les trois équations (5), (6), (7), formant un système équivalent à celui-là, seront aussi vérifiées, et l'on aura deux lignes A et B passant par le point M.

100 — Supposons, en général, que l'on emploie n paramètres variables $a, b, c, \ldots, h$, liés entre eux par $n-1$ équations de condition

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(a,b,c,\ldots,h)=0, \\ \varphi_2(a,b,c,\ldots,h)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(a,b,c,\ldots,h)=0, \end{array} \right.$$

et soient

$$(12) \qquad F(x,y,a,b,c,\ldots,h)=0,$$

$$(13) \qquad F_1(x,y,a,b,c,\ldots,h)=0,$$

les équations des deux lignes mobiles A et B, dont l'intersection donne chaque point du lieu. Quand on fait varier le paramètre a, les autres paramètres varient simultanément, et le point M décrit le lieu. On obtient l'équation de ce lieu en éliminant les n paramètres entre les $n+1$ équations (11), (12), (13).

101 — Nous avons dit que la construction de la figure ne dépend que d'un seul paramètre arbitraire a. Si la figure dépendait de deux paramètres arbitraires a et b, les deux coordonnées x et y du point M seraient des fonctions de ces deux paramètres

$$x=f(a,b), \quad y=f_1(a,b).$$

On pourrait attribuer à ces paramètres des valeurs telles que le point M coïncidât avec un point quelconque du plan ayant pour coordonnées x_1 et y_1 ; il suffirait, pour cela, de déterminer a et b à l'aide des deux équations

$$x_1=f(a,b), \quad y_1=f_1(a,b).$$

Le point M décrirait ainsi tout le plan et non une ligne déterminée dans le plan.

On comprend bien par là comment il est nécessaire, lorsqu'on emploie n paramètres variables, que ces n paramètres soient liés par $n-1$ équations de conditions distinctes ; car si on pouvait réduire ces équations de conditions à un nombre moindre, deux paramètres au moins seraient arbitraires.

Il peut arriver que les deux lignes variables A et B se coupent en plusieurs points ; le calcul précédent donne le lieu décrit par l'ensemble de ces points.

PROBLÈME I.

102—*Étant donnés un angle* XOY *et un point fixe* P *dans le plan* (fig. 70), *par le point* P *on mène une sécante fixe* PBA *et une sécante mobile* PDC, *on mène les droites* AD, BC ; *trouver le lieu de leur point de rencontre* M.

Prenons les droites OX et OY pour axes des coordonnées, et désignons par x_1 et y_1 les coordonnées du point P. La sécante fixe PBA aura une équation de la forme

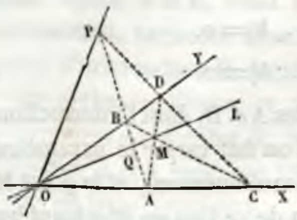


Fig. 70.

$$y - y_1 = a(x - x_1),$$

dans laquelle le paramètre a a une valeur constante. De même la sécante mobile PDC sera représentée par l'équation

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

dans laquelle m désigne un paramètre variable. Si, dans chacune de ces équations, on fait successivement $y = 0$, $x = 0$, on obtient les coordonnées des points où ces droites recontrent les axes des coordonnées,

$$\text{A},\quad y = 0,\quad x = x_1 - \frac{y_1}{a},$$

$$\text{B},\quad x = 0,\quad y = y_1 - ax_1,$$

$$\text{C},\quad y = 0,\quad x = x_1 - \frac{y_1}{m},$$

$$\text{D},\quad x = 0,\quad y = y_1 - mx_1.$$

En appliquant la formule du nº 67, on a les équations des droites AD, CB,

$$(1)\qquad \frac{x}{x_1 - \frac{y_1}{a}} + \frac{y}{y_1 - mx_1} = 1,$$

$$(2)\qquad \frac{x}{x_1 - \frac{y_1}{m}} + \frac{y}{y_1 - ax_1} = 1.$$

Les valeurs de x et y, qui vérifient les deux équations simultanées (1) et (2), sont les coordonnées du point d'intersection M des deux droites AD et BC ; ces coordonnées varient avec le paramètre arbitraire m. Si l'on retranche les deux équations membre à membre, on obtient l'équation

$$x\left(\frac{m}{y_1-mx_1}-\frac{a}{y_1-ax_1}\right)+y\left(\frac{1}{y_1-mx_1}-\frac{1}{y_1-ax_1}\right)=0,$$

ou plus simplement

(3) $$\frac{m-a}{(y_1-mx_1)(y_1-ax_1)}(y_1x+x_1y)=0,$$

qui, jointe à l'équation (1), forme un système équivalent au système des deux équations (1) et (2). Tant que le paramètre m a une valeur différente de a, le premier facteur étant différent de zéro, les coordonnées x et y de point M doivent annuler le second facteur. Ainsi, les coordonnées de chacun des points du lieu vérifient l'équation

$$y_1x+x_1y=0,$$

(4) $$\frac{y}{x}=-\frac{y_1}{x_1}.$$

Ce lieu est une droite OL passant par l'origine.

Quand $m=a$, le système des deux équations (1) et (2) se réduit à l'équation (1); les deux droites AD et BC coïncident, et leur point d'intersection est un point quelconque de la sécante fixe PA.

Si l'on avait fait l'élimination d'une autre manière, si l'on avait, par exemple, tiré la valeur de m de l'équation (1) pour la porter dans l'équation (2), on aurait obtenu une équation du second degré, dont le premier membre serait décomposable en deux facteurs du premier degré et qui, par conséquent, représenterait deux droites, le lieu OL et la droite PA. Cette équation serait

$$(y_1x+x_1y)\left[y-y_1-a(x-x_1)\right]=0.$$

On voit que l'équation (4) ne contient pas le paramètre constant a; il en résulte que le lieu est indépendant de la position particulière attribuée à la sécante fixe PA. On en conclut le théorème suivant : Étant donnés un angle XOY et un point fixe P dans son plan, si par le point P on mène deux sécantes quelconques PA, PC, le point de rencontre M des deux droites AD et BC est toujours situé sur une même droite OL.

Nous remarquerons encore que l'équation (4) ne dépend que du rapport $\frac{y_1}{x_1}$, c'est-à-dire du coefficient angulaire de la droite OP. Ainsi le lieu OL restera le même, si l'on déplace le point P sur la droite OP passant à l'origine.

103 — On peut traiter cette question d'une manière plus rapide. Supposons que l'on ait tracé dans le plan deux axes quelconques. Représentons, pour abréger, par $\alpha = 0$, $\beta = 0$ les équations des droites données OA et OB, et par $\gamma = 0$ celle de la sécante fixe PA. On déterminera le point donné P, non plus par ses coordonnées, mais par l'intersection des deux droites données PA et OP ; cette dernière, passant par le point d'intersection O des droites OA et OB, a une équation de la forme $\beta + a\alpha = 0$. La sécante mobile PC, menée par le point d'intersection P des deux droites $\beta + a\alpha = 0$, $\gamma = 0$, est représentée par une équation de la forme

$$(1) \qquad \beta + a\alpha + m\gamma = 0,$$

dans laquelle m désigne un paramètre arbitraire. Le point C, où cette sécante coupe la droite OA, est donné par les deux équations simultanées $\alpha = 0$, $\beta + a\alpha + m\gamma = 0$, ou plus simplement $\alpha = 0$, $\beta + m\gamma = 0$; cette dernière équation représente une droite passant par le point C, et aussi par le point d'intersection B des droites $\beta = 0$, $\gamma = 0$; c'est donc l'équation de la droite BC. De même, le point D, où la sécante mobile coupe la droite OB, est donné par les deux équations simultanées $\beta = 0$, $\beta + a\alpha + m\gamma = 0$, ou plus simplement $\beta = 0$, $a\alpha + m\gamma = 0$; la droite représentée par cette dernière équation, passant aussi par le point d'intersection A des droites $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, n'est autre chose que la droite AD. Les deux droites mobiles BC et AD, dont l'intersection détermine un point M du lieu, ont donc pour équations

$$(2) \qquad \beta + m\gamma = 0,$$

$$(3) \qquad a\alpha + m\gamma = 0.$$

On obtiendra l'équation du lieu en éliminant le paramètre m entre ces deux équations ; si on les retranche membre à membre, on obtient l'équation

$$(4) \qquad \beta - a\alpha = 0.$$

On en conclut que le lieu est une droite passant par le point O. Cette droite est indépendante de γ, c'est-à-dire de la sécante fixe PA, et elle est la même quelle que soit la position du point P sur la droite OP.

Nous avons supposé que le paramètre m a une valeur finie, si l'on remplace m par $\frac{p}{q}$, et, qu'après avoir multiplié par q, on fasse $q = 0$, les équations (1), (2), (3) se réduisent à $\gamma = 0$; la sécante mobile coïncide avec la sécante fixe PA, ainsi que les deux droites BC et AD.

PROBLÈME II.

104 — *Les côtés d'un triangle variable* ABC *tournent autour de trois* *points fixes* P, P′, P″, *situés en ligne droite, tandis que deux des sommets* A *et* B *glissent sur deux droites fixes* ID *et* IE ; *trouver le lieu décrit par le troisième sommet* C (fig. 71).

Traçons dans le plan deux axes quelconques, et, pour abréger, représentons, comme précédemment, par $\alpha = 0$, $\beta = 0$, les équations des droites données ID, IE, et par $\gamma = 0$ celle de la droite PP′P″; chacun des points fixes P, P′, P″ peut être défini par l'intersection de cette droite et d'une droite passant par le point I; le point I étant le point d'intersection des droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, les droites IP, IP′, IP″ ont des équations de la forme

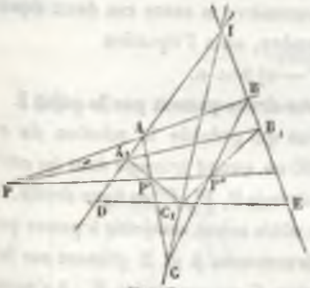


Fig. 71.

$$\beta + a\alpha = 0,\quad \beta + a'\alpha = 0,\quad \beta + a''\alpha = 0,$$

dans lesquelles a, a', a'' désignent des coefficients constants. Pour construire une position particulière de la figure variable, on mènera par le point P une droite arbitraire PA, puis on tracera les droites AP′ et BP″ dont l'intersection donnera un point C du lieu. Le point P étant l'intersection des deux droites $\gamma = 0$, $\beta + a\alpha = 0$, la droite PA, menée par ce point, aura une équation de la forme

$$\beta + a\alpha + m\gamma = 0, \tag{1}$$

dans laquelle m désigne un paramètre arbitraire. Le point A, où la droite PA coupe la droite IA, est donné par les deux équations simultanées $\alpha = 0$, $\beta + a\alpha + m\gamma = 0$, ou plus simplement $\alpha = 0$, $\beta + m\gamma = 0$. La droite AP′, passant par ce point, a une équation de la forme $\beta + m\gamma + m'\alpha = 0$; il faut déterminer le coefficient m' de manière que la droite passe aussi par le point P′, défini par les deux équations $\gamma = 0$, $\beta + a'\alpha = 0$; si dans l'équation de cette droite on fait $\gamma = 0$ et $\beta = -a'\alpha$, on a $(m' - a')\alpha = 0$; comme α n'est pas nulle, puisque le point P′ n'est pas sur la droite $\alpha = 0$, on a $m' - a' = 0$; on prendra donc $m' = a'$. Ainsi, la droite AP′ est représentée par l'équation

$$\beta + a'\alpha + m\gamma = 0. \tag{2}$$

De même, le point B, où la droite PB coupe la droite IB, est donné par les deux équations $\beta = 0$, $\beta + a\alpha + m\gamma = 0$, ou plus simplement $\beta = 0$, $a\alpha + m\gamma = 0$; la droite BP″, passant par ce point, a une équation de la forme $a\alpha + m\gamma + m''\beta = 0$; on déterminera le coefficient m'' de manière que cette droite passe par le point P″, intersection des droites $\gamma = 0$, $\beta + a''a = 0$; si dans cette équation on fait $\gamma = 0$ et $\beta = -a''\alpha$, on a $(a - m''a'')\,\alpha = 0$; on prendra donc $m'' = \frac{a}{a''}$; ainsi la droite BP″ est représentée par l'équation

$$\frac{a}{a''}(\beta + a''\alpha) + m\gamma = 0. \tag{3}$$

Les équations (2) et (3) sont les équations des deux droites mobiles AP′ et BP″, dont l'intersection donne un point quelconque C du lieu ; on obtiendra l'équation du lieu en éliminant le paramètre m entre ces deux équations ; si on les retranche membre à membre, on a l'équation

$$(a' - a)\,a''\alpha + (a'' - a)\,\beta = 0. \tag{4}$$

On en conclut que le lieu cherché est une droite passant par le point I.

105 — Corollaire I. On déduit de ce qui précède la solution de ce problème : *Inscrire dans un triangle* IDE *un second triangle dont les côtés passent respectivement par trois points donnés* P, P′, P″ *en ligne droite.* Si l'on conçoit un triangle variable dont les côtés soient assujettis à passer par les points P, P′, P″, tandis que deux des sommets A et B glissent sur les droites ID, IE, le lieu du troisième sommet C est une droite IC. Le point de rencontre C_1 des droites IC et DE est donc l'un des sommets du triangle cherché ; les droites C_1P', C_1P'' donnent les deux autres sommets A_1 et B_1. Il est à remarquer que cette solution n'exige aucun autre instrument que la règle.

Corollaire II. On peut aisément généraliser le problème précédent. Considérons un quadrilatère dont les quatre côtés pivotent autour de quatre points fixes P, P′, P″, P‴ situés en ligne droite, tandis que trois sommets A, B, C glissent sur trois droites fixes R, S, T ; et proposons-nous de chercher le lieu décrit par le quatrième sommet D (fig. 72).

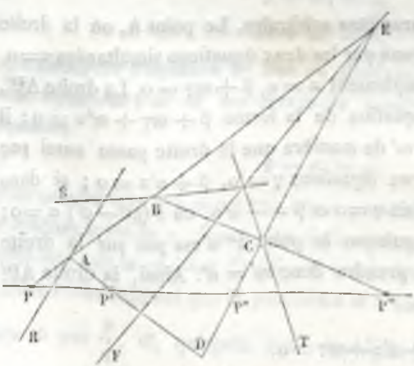


Fig. 72.

Les trois côtés du triangle BCE pivotent autour des trois points fixes P, P″, P‴, tandis que deux sommets B et C glissent sur les droites fixes S et T ; le sommet E décrit donc une droite EF. D'après cela, les trois côtés du triangle AED pivotent autour des trois points fixes P, P′, P″, tandis que deux sommets A et E glissent sur les deux droites R et EF ; le sommet D décrit donc une ligne droite.

Du quadrilatère on passera de la même manière au pentagone. Ainsi, quand les n côtés d'un polygone pivotent autour de n points fixes situés en ligne droite, tandis que $n-1$ sommets glissent sur $n-1$ droites fixes, le n^{me} sommet décrit une ligne droite.

On en déduit le moyen d'inscrire dans un polygone de n côtés un autre polygone de n côtés passant respectivement par n points fixes en ligne droite.

PROBLÈME III.

106 — *Étant donné un triangle* ABA′, *par un point fixe* O *pris sur un côté* AA′, *on mène une sécante mobile* OCC′, *on fait passer un premier cercle par les trois points* O, A, C *et un second cercle par les trois points* O, A′, C′; *trouver le lieu du point d'intersection* M *de ces deux cercles* (fig. 73).

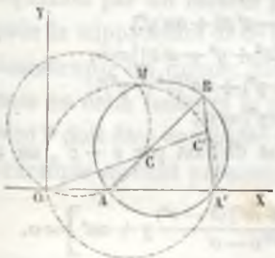


Fig. 73.

Prenons la droite OA′ pour axe des x et une perpendiculaire OY menée par le point O pour axe des y. Si l'on appelle a et a' les abscisses des points A et A′, les deux droites fixes AB, A′B seront représentées par les équations

$$(1) \qquad y = c\,(x - a),$$

$$(2) \qquad y = c'\,(x - a'),$$

et la sécante mobile par l'équation

$$(3) \qquad y = mx,$$

dans laquelle m désigne un paramètre variable. On obtient les coordonnées du point C en résolvant les deux équations simultanées (1) et (3), ce qui donne

$$x = \frac{ca}{c-m}, \quad y = \frac{mca}{c-m}.$$

Tout cercle passant par les points O et A a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0,$$

dans laquelle la paramètre b est arbitraire. On détermine ce paramètre en exprimant que le cercle passe par le point C, ce qui donne

$$b = \frac{a\,(cm+1)}{c-m};$$

le cercle qui passe par les trois points O, A, C a donc pour équation

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - ax - \frac{a\,(cm+1)}{c-m}\,y = 0.$$

Si, dans cette équation, on remplace a et c par a' et c', on obtiendra évidemment l'équation du cercle qui passe par les trois points O, A', C',

$$(5) \qquad x^2+y^2-a'x-\frac{a'(c'm+1)}{c'-m}y=0.$$

Pour avoir l'équation du lieu du point d'intersection M des deux cercles, il faut éliminer le paramètre variable m entre les deux équations (4) et (5). En égalant les valeurs de m tirées des équations (4) et (5), on obtient l'équation

$$\frac{c(x^2+y^2-ax)-ay}{(x^2+y^2-ax)+cay}=\frac{c'(x^2+y^2-a'x)-a'y}{(x^2+y^2-a'x)+c'a'y},$$

qui, mise sous forme entière, s'écrit

$$(c-c')[(x^2+y^2-ax)(x^2+y^2-a'x)+aa'y^2]$$
$$+(1+cc')y[a'(x^2+y^2-ax)-a(x^2+y^2-a'x)]=0,$$

ou
$$(c-c')[(x^2+y^2)^2-(a+a')x(x^2+y^2)+aa'(x^2+y^2)]$$
$$+(1+cc')(a'-a)y(x^2+y^2)=0;$$

en mettant x^2+y^2 en facteur commun, et divisant par $c-c'$, on a l'équation

$$(6) \qquad (x^2+y^2)\left[x^2+y^2-(a+a')x-\frac{(1+cc')(a-a')}{c-c'}y+aa'\right]=0.$$

Cette équation se décompose en deux : l'une,

$$x^2+y^2=0,$$

donne le point O où se coupent toujours les deux cercles mobiles ; l'autre,

$$(7) \qquad x^2+y^2-(a+a')x-\frac{(1+cc')(a-a')}{c-c'}y+aa'=0,$$

est l'équation du lieu du point M. Ce lieu est un cercle.

On reconnaît *à priori* que les trois points B, A, A' appartiennent au lieu. Car, si la sécante mobile passe par le point B, les deux cercles se coupent en B ; ce point fait partie du lieu. Supposons maintenant que la sécante devienne parallèle à la droite A'B ; le point C' s'éloignant à l'infini, le second cercle coïncide avec la droite OA', qui coupe en A le premier cercle. On obtient de même le point A', quand la sécante devient parallèle à AB. Il est d'ailleurs facile de vérifier sur l'équation (7) que le lieu passe par trois points B, A, A'. Ainsi le lieu demandé est le cercle circonscrit au triangle ABA'.

107 — Remarque. Il arrive quelquefois que l'une des deux courbes mobiles A et B, dont l'intersection donne un point M du lieu, passe par un point fixe P. Dans ce cas, les coordonnées de ce point P vérifient l'équation résultant de l'élimination. En effet, supposons que les équations des deux lignes contiennent n paramètres variables liés entre eux par $n-1$ relations (n° 100); si les coordonnées x_1 et y_1 d'un point fixe P satisfont à l'équation de la ligne A, quelles que soient les valeurs des paramètres, en remplaçant x et y par x_1 et y_1 dans l'équation de la ligne B, on aura une équation qui, jointe aux $n-1$ équations de condition entre les paramètres, formera un système de n équations pour déterminer les valeurs de ces paramètres. Ce point P sera étranger au lieu géométrique proprement dit, si aux valeurs trouvées ne correspondent pas de lignes réelles.

Dans ce cas, il arrive quelquefois que le point P entre dans l'équation par un facteur particulier que l'on peut supprimer; après la suppression de ce facteur, l'équation représente le lieu géométrique lui-même. Mais souvent il est impossible de décomposer en deux facteurs le premier membre de l'équation, et le point P doit être considéré comme un point isolé lié à la courbe. L'exemple suivant présente la première circonstance.

PROBLÈME IV.

108—*Étant donnés un cercle et un point fixe* P, *autour du point* P *on fait tourner un angle droit* APB; *on joint par une droite les deux points* A *et* B, *où les côtés de l'angle droit rencontrent le cercle, et on abaisse du point* P *une perpendiculaire* PM *sur la droite* AB; *trouver le lieu du pied* M *de la perpendiculaire* (fig. 74).

Prenons pour axe des x le diamètre OP, pour axe des y le diamètre perpendiculaire; le cercle donné est représenté par l'équation

$$x^2+y^2=r^2. \tag{1}$$

Soit

$$y=ax+b \tag{2}$$

l'équation de la sécante AB. Si l'on élimine y entre les deux équations (1) et (2), on obtient une équation du second degré

Fig. 74.

$$(1+a^2)x^2+2abx+b^2-r^2=0, \tag{3}$$

dont les racines sont les abscisses x' et x'' des points A et B; les ordonnées y' et y'' auront pour valeurs $ax'+b$, $ax''+b$. Si l'on appelle c la longueur constante OP, les deux droites PA, PB ont pour coefficients angulaires

$$\frac{y'}{x'-c},\quad \frac{y''}{x''-c},\quad \text{ou}\quad \frac{ax'+b}{x'-c},\quad \frac{ax''+b}{x''-c};$$

l'angle APB étant droit, on a la condition

$$\frac{(ax'+b)(ax''+b)}{(x'-c)(x''-c)} = -1,$$

qui s'écrit

$$(1+a^2)x'x''+(ab-c)(x'+x'')+b^2+c^2=0;$$

si l'on remplace $x'+x''$ et $x'x''$ par leurs valeurs tirées de l'équation (3), on obtient la relation

$$(1+a^2)(c^2-r^2)+2b(ac+b)=0, \tag{4}$$

qui lie les deux paramètres variables a et b.

La perpendiculaire PM, abaissée du point P sur la droite AB, a pour équation

$$y = -\frac{1}{a}(x-c). \tag{5}$$

Le point M est défini par les équations (2) et (5), dans lesquelles les paramètres variables a et b satisfont à l'équation (4) ; on obtient l'équation du lieu du point M en éliminant ces deux paramètres entre les trois équations (2), (4), (5). De l'équation (5) on tire $a = -\frac{x-c}{y}$; de l'équation (2) on déduit ensuite $b = \frac{y^2+(x-c)x}{y}$. En portant ces valeurs dans l'équation (4), on obtient l'équation

$$[y^2+(x-a)^2]\left(x^2+y^2-cx+\frac{c^2-r^2}{2}\right)=0 \tag{6}$$

qui se décompose en deux ; l'une, $y^2+(x-c)^2=0$, donne le point P ; l'autre,

$$x^2+y^2-cx+\frac{c^2-r^2}{2}=0, \tag{7}$$

représente le lieu cherché.

Il est évident que le point P n'appartient pas au lieu géométrique tel qu'on l'a défini ; mais il est facile de comprendre comment l'analyse l'introduit dans le résultat. Les coordonnées $x=c$, $y=0$ du point P vérifient l'équation (5), quels que soient les paramètres ; on pourra donc déduire des deux équations (2) et (4) des valeurs correspondantes des deux paramètres a et b ; on trouve ainsi $a=\pm i$, $b=-ac$. C'est une application de la remarque faite au n° 98.

L'équation (7) montre que le lieu est un cercle ayant son centre sur la droite OP. Pour le construire, il suffit de déterminer les deux extrémités du diamètre CD ; si l'on mène des droites AB', BA' faisant des angles de 45° avec le diamètre OP, les cordes AA', BB', étant perpendiculaires sur ce diamètre, donneront les deux points C et D.

On obtient le même cercle en cherchant le lieu du milieu M' de la corde AB. En effet, ce point milieu est déterminé par l'intersection de la corde AB et de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette corde. Ces deux droites ayant pour équations

$$y = ax + b, \quad y = -\frac{1}{a}x,$$

on obtiendra l'équation du lieu en éliminant les deux paramètres variables a et b entre ces deux équations et l'équation (4), ce qui conduit à l'équation

$$(x^2+y^2)\left(x^2+y^2-cx+\frac{c^2-r^2}{2}\right)=0,$$

qui se décompose en deux, donnant l'une le point O étranger au lieu géométrique, l'autre le cercle.

PROBLÈME V.

109 — *Trouver le lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de chacun d'eux sur les trois côtés d'un triangle* ABC *soient en ligne droite.*

Soient (1) $$\left\{\begin{array}{l} x\cos a + y\sin a - p_1 = 0, \\ x\cos b + y\sin b - p_2 = 0, \\ x\cos c + y\sin c - p_3 = 0, \end{array}\right.$$

les équations des trois côtés du triangle rapportées à deux axes rectangulaires quelconques, et, pour abréger, désignons par α, β, γ les premiers membres de ces équations. Appelons x et y les coordonnées d'un point M du lieu, x_1 et y_1, x_2 et y_2, x_3 et y_3 celles des pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés du triangle, on a (nº 83)

$$\begin{array}{lll} x - x_1 = \alpha\cos a, & x - x_2 = \beta\cos b, & x - x_3 = \gamma\cos c, \\ y - y_1 = \alpha\sin a, & y - y_2 = \beta\sin b, & y - y_3 = \gamma\sin c. \end{array}$$

Nous obtiendrons l'équation du lieu en exprimant que ces trois points sont en ligne droite. Il faut pour cela égaler les deux rapports $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$, que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{(y_2-y)-(y_1-y)}{(x_2-x)-(x_1-x)} = \frac{(y_3-y)-(y_1-y)}{(x_3-x)-(x_1-x)}.$$

On a ainsi l'équation

$$\frac{\beta\sin b - \alpha\sin a}{\beta\cos b - \alpha\cos a} = \frac{\gamma\sin c - \alpha\sin a}{\gamma\cos c - \alpha\cos a},$$

ou (2) $$\alpha\beta\sin(b-a) + \beta\gamma\sin(c-b) + \gamma\alpha\sin(a-c) = 0.$$

Les lettres α, β, γ désignant des polynômes du premier degré en x et y, on voit que l'équation (2) est du second degré. Le coefficient du terme en xy est

$$\sin(a+b)\sin(b-a)+\sin(b+c)\sin(c-b)+\sin(c+a)\sin(a-c);$$

si l'on transforme les produits de sinus en différences de cosinus, ce coefficient devient

$$\frac{(\cos 2a-\cos 2b)+(\cos 2b-\cos 2c)+(\cos 2c-\cos 2a)}{2};$$

il est égal à zéro. Les coefficients des termes en x^2 et en y^2 sont

$$A=\cos a\cos b\sin(b-a)+\cos b\cos c\sin(c-b)+\cos c\cos a\sin(a-c),$$
$$B=\sin a\sin b\sin(b-a)+\sin b\sin c\sin(c-b)+\sin c\sin a\sin(a-c).$$

Si on calcule leur somme et leur différence, on a

$$A-B=\cos(a+b)\sin(b-a)+\cos(b+c)\sin(c-b)+\cos(c+a)\sin(a-c)$$
$$=\frac{\sin 2b-\sin 2a+\sin 2c-\sin 2b+\sin 2a-\sin 2c}{2}=0,$$

$$A+B=\cos(a-b)\sin(b-a)+\cos(b-c)\sin(c-b)+\cos(c-a)\sin(a-c)$$
$$=\frac{\sin 2(b-a)+\sin 2(c-b)+\sin 2(a-c)}{2}$$
$$=-2\sin(b-a)\sin(c-b)\sin(a-c);$$

on en déduit

$$A=B=-\sin(b-a)\sin(c-b)\sin(a-c).$$

Ainsi, le lieu est une circonférence de cercle. L'équation (2) étant vérifiée quand on y fait $\beta=0$, $\gamma=0$, le point A appartient au lieu; il en est de même des points B et C; le lieu est donc le cercle circonscrit au triangle ABC.

110 — Il faut remarquer cette forme de l'équation du cercle circonscrit à un triangle. Le premier membre a une signification géométrique très-simple. Pour préciser, supposons que l'origine des coordonnées soit placée à l'intérieur du triangle ABC (fig. 75) et que les angles a, b, c, compris entre 0 et 2π, soient rangés par ordre de grandeur croissante. Considérons un point M ayant pour coordonnées x et y et situé aussi à l'intérieur du triangle; de ce point abaissons des perpendiculaires sur les côtés et joignons

Fig. 75.

les pieds de ces perpendiculaires pour former le triangle DEF. Les lettres α, β, γ désignent les longueurs de ces perpendiculaires affectées ici du signe $-$; ces perpendiculaires sont d'ailleurs dirigées dans le même sens que celles qui ont été menées de l'origine et qui ont servi à déterminer les angles a, b, c. Le terme $\alpha\beta \sin(b-a)$ étant égal à $MD \times ME \times \sin DME$ représente le double de l'aire du triangle DME; les deux autres termes représentent de même les doubles des triangles EMF, FMD; ainsi, le premier membre de l'équation (2) représente le double de l'aire du triangle DEF.

Considérons maintenant un point M′ situé à l'extérieur du triangle ABC. On a, dans ce cas, $\alpha = -M'D'$, $\beta = -M'E'$, $\gamma = +M'F'$; le premier membre de l'équation représente le double de la différence qui existe entre le triangle D′M′E′ et la somme des deux triangles E′M′F′, F′M′D′; c'est encore le double de l'aire du triangle D′E′F′ affectée du signe + ou du signe —. Ainsi, quelle que soit la position du point M dans le plan, le premier membre de l'équation représente le double de l'aire du triangle DEF affectée du signe + ou du signe —. L'équation (2) exprime donc que l'aire du triangle DEF est nulle, c'est-à-dire que les trois points D, E, F sont en ligne droite.

Si l'on appelle r le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, et d la distance d'un point ayant pour coordonnées x et y au centre de ce cercle, le premier membre de l'équation (2) pouvant être mis sous la forme

$$A(x^2 + y^2 + \ldots)$$

est égal à $A(d^2 - r^2)$. Cette expression conserve le même signe, tant que la distance d est moindre que r, c'est-à-dire tant que le point M reste à l'intérieur du cercle, et elle prend un signe contraire quand le point M passe à l'extérieur.

Il résulte de ce qui précède que le lieu des points tels que l'aire du triangle ayant pour sommets les pieds des trois perpendiculaires soit égale à une quantité donnée k^2 se compose de deux cercles représentés par les équations

$$\alpha\beta \sin(b-a) + \beta\gamma \sin(c-b) + \gamma\alpha \sin(a-c) = \pm 2k^2.$$

Ces deux cercles sont concentriques au cercle circonscrit au triangle ABC, l'un est extérieur et toujours réel, quelle que soit l'aire donnée; l'autre est intérieur et n'est réel que si l'aire donnée est moindre que la valeur absolue de $\frac{Ar^2}{2}$.

EXERCICES.

1° Exprimer l'aire d'un triangle et d'un polygone quelconque en fonction des coordonnées des sommets.

2° Trouver l'aire d'un triangle formé par trois droites dont on donne les équations.

3° Étant donnés dans un plan n points A, B, C,... et n quantités

m', m'', m''',... qui correspondent à ces n points ; sur la droite AB on prend un point N_1, tel que les distances de ce point aux deux premiers points soient dans le rapport de m' à m'' ; puis sur la droite N_1C qui joint N_1 au troisième point on prend un point N_2 tel que ses distances aux points N_1 et C soient dans le rapport de m''' à $m'+m''$; puis sur la droite N_2D qui joint le point N_2 au quatrième point D un point N_3, tel que ses distances aux points N_2 et D soient dans le rapport de m^{IV} à $m'+m''+m'''$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé au dernier point donné ; trouver les coordonnées du dernier point de division que l'on appelle *centre des distances proportionnelles.*

Lorsque les multiplicateurs m', m'', m''',... sont égaux entre eux, le dernier point de division s'appelle *centre des moyennes distances.*

Comme application, trouver les quantités m', m'', m''' qui donnent, dans le cas d'un triangle, soit le centre de gravité, soit le centre du cercle inscrit, soit le point de rencontre des trois hauteurs, soit le centre du cercle circonscit.

4° Trouver le lieu des points tels que la somme des produits des carrés des distances de chacun d'eux à n points donnés par des quantités constantes m', m'', m''',... soit égale à une quantité donnée.

5° Lieu des centres des cercles qui sont vus de deux points donnés sous des angles donnés.

6° Lieu des centres des cercles qui rencontrent, en des points diamétralement opposés, deux cercles donnés.

7° Lieu des points tels que la somme des distances de chacun d'eux à deux droites et en général à plusieurs droites données soit constante.

8° Sur deux droites rectangulaires OX, OY on construit un rectangle variable OABC ayant un périmètre donné $2a$, la perpendiculaire menée du sommet C sur la diagonale AB passe par un point fixe.

9° Ayant fait la figure qui sert à démontrer le théorème du carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, démontrer que les deux droites qui joignent les extrémités de l'hypoténuse aux sommets des carrés construits sur les côtés opposés se coupent sur la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.

10° D'un point fixe P on mène des tangentes aux cercles qui passent par deux points donnés ; trouver le lieu du point où la corde des contacts rencontre le diamètre qui passe au point P.

11° Étant donné un hexagone régulier ABCDEF, on joint AC et AE ; par le centre on mène une sécante quelconque qui coupe les deux droites AC et AE aux points G et H ; on joint BG et FH ; trouver le lieu du point de rencontre de ces deux droites.

12° Les circonférences décrites sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet, comme diamètres, ont deux à deux même axe radical.

13° Étant données cinq droites, on en prend quatre qui forment un quadrilatère complet, dans lequel les milieux des trois diagonales sont en ligne droite ; les cinq droites ainsi obtenues se coupent au même point.

14° Étant donnés trois points A, B, C, et deux droites X, Y ; sur AB comme diagonale, on construit un parallélogramme dont les côtés sont parallèles à X et Y ; on opère de même avec B, C et C, A ; les secondes diagonales des trois parallélogrammes passent au même point.

15° Étant données quatre droites A, B, C, D, on en prend trois pour former un triangle, dont on détermine le point de concours des hauteurs ; les quatre points ainsi obtenus sont en ligne droite.

16° Étant donnés deux cercles fixes, deux cercles variables sont tangents entre eux et aux précédents ; trouver le lieu du point de contact des cercles variables.

17° On prend quatre points arbitrairement sur une circonférence, les bissectrices des trois couples de droites qui passent par ces quatre points sont parallèles deux à deux.

18° Lieu du point tel que les cordes de contact des tangentes menées de ce point à trois cercles donnés se coupent en un même point.

19° On donne un angle AOA′ et un point C sur la bissectrice. Un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet placé en C, on joint les points de rencontre B et B′ des côtés de l'angle mobile avec les côtés de l'angle fixe, du point C on abaisse une perpendiculaire sur BB′ ; trouver le lieu du pied de la perpendiculaire.

20° On donne quatre droites A, B, C, D, qui, prises trois à trois, forment quatre triangles. La droite A appartient à trois de ces triangles, on joint le centre du cercle circonscrit à chacun d'eux au sommet non situé sur A ; les trois droites ainsi obtenues se coupent en un même point I ; les quatre points analogues à I et les centres des quatre cercles sont sur une même circonférence.

21° Étant donnés divers cercles qui, pris deux à deux, admettent le même axe radical ; si un cercle variable coupe deux de ces cercles sous des angles constants, il coupera également chacun des autres cercles sous un angle constant.

22° Étant donnés une circonférence et un point P, un angle droit tourne autour de son sommet placé en P; trouver le lieu du point de concours des tangentes menées à la circonférence aux points de rencontre avec les côtés de l'angle.

LIVRE III

COURBES DU SECOND DEGRÉ

CHAPITRE I

Construction des lignes du second degré.

111—L'équation générale du second degré entre les deux variables x et y est de la forme

(1) $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0;$

elle renferme cinq paramètres arbitraires, les rapports de cinq coefficients au sixième. Supposons d'abord que l'un des coefficients de x^2 et y^2, C par exemple, ne soit pas nul, et résolvons l'équation par rapport à y; on a

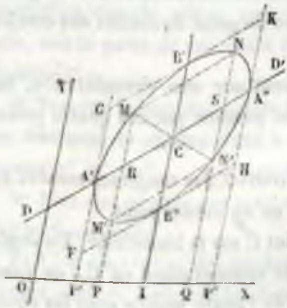


Fig. 76.

$$(2)\qquad y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P},$$

en posant $M=B^2-4AC$, $N=BE-2CD$, $P=E^2-4CF$.

Construisons la droite DD′ représentée par l'équation

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}.$$

Pour chaque valeur de x, il faut, à partir de la droite DD′, porter de part et d'autre sur l'ordonnée une longueur égale à

$$Y=\frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}.$$

La droite DD′ (fig. 76), qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe OY, est un *diamètre* de la courbe ; la quantité Y est la valeur de l'ordonnée comptée à partir du diamètre. La construction du lieu est ainsi ramenée à l'étude du trinôme

$$Mx^2 + 2Nx + P\,;$$

et comme la forme du lieu dépend principalement du signe du coefficient M, on distingue trois cas principaux.

GENRE ELLIPSE.

112—Considérons d'abord le cas où le coefficient M, qui est égal à $B^2 - 4AC$, a une valeur négative. L'ordonnée Y n'est réelle que si le trinôme a une valeur positive. Pour reconnaître le signe du trinôme, quand x varie, on lui donne diverses formes ; c'est pourquoi le cas que nous examinons se subdivise à son tour en trois autres.

1° $N^2 - MP > 0$. Les deux racines du trinôme sont réelles et inégales. Désignons par x' la plus petite et par x'' la plus grande ; le trinôme peut s'écrire

$$M(x - x')(x - x''), \quad \text{ou} \quad -M(x - x')(x'' - x)\,;$$

le trinôme est positif, et par conséquent l'ordonnée Y est réelle, pour toutes les valeurs de x comprises entre x' et x'' ; le trinôme est au contraire négatif, et l'ordonnée imaginaire, pour toute valeur de x plus petite que x', ou plus grande que x''.

Prenons sur l'axe des x deux points P′ et P″ ayant pour abscisses x' et x'' ; et par les points P′ et P″ menons des parallèles P′A′, P″A″ à l'axe des y ; la courbe sera tout entière comprise entre ces deux parallèles. L'abscisse x variant de x' à x'', l'ordonnée Y conserve une valeur finie, et part de la valeur zéro pour revenir à zéro ; on a ainsi une courbe fermée qui passe par les points A′ et A″, et à laquelle on a donné le nom d'*ellipse*.

Une valeur de x comprise entre x' et x'' sera l'abscisse d'un point P compris entre P′ et P″, et la valeur correspondante de Y sera égale à

$$\frac{1}{2C}\sqrt{(-M).PP'.PP''}.$$

Le produit variable $PP' \times PP''$ des deux segments de la droite P′P″ est égal au carré de l'ordonnée du cercle décrit sur P′P″

comme diamètre ; quand le point P va de P′ au point I, milieu de P′P″, l'ordonnée du cercle, et par suite la quantité Y qui lui est proportionnelle, va en augmentant ; elle diminue au contraire quand le point P va de I en P″. La quantité Y acquiert donc sa valeur maximum, quand le point P est en I, c'est-à-dire quand $x = \frac{x' + x''}{2} = -\frac{N}{M}$; cette valeur maximum est égale à $\frac{(x'' - x')\sqrt{-M}}{4C}$. A partir du point C, milieu du diamètre A′A″, portons sur l'ordonnée, et de part et d'autre, une longueur égale à cette valeur maximum, nous aurons deux points B′ et B″ de la courbe, et en menant par ces points des parallèles au diamètre, nous formerons un parallélogramme FGKH, dans lequel sera comprise l'ellipse.

Il est clair qu'à deux points P et Q également distants du milieu I correspondent des valeurs égales de Y ; ces valeurs, portées de part et d'autre du diamètre DD′, donnent les quatre points M, M′, N, N′. Les deux triangles CRM, CSN′ étant égaux, les trois points M, C, N′ sont en ligne droite et le point C est le milieu de MN′ ; ainsi tous les points de la courbe sont deux à deux symétriques par rapport au point C, milieu du diamètre A′A″ ; ce point C est donc le *centre* de l'ellipse. On voit également que les droites MN, M′N′ sont parallèles au diamètre A′A″ et partagées chacune en deux parties égales par la droite B′B″ ; cette droite est un second diamètre. Les deux diamètres A′A″, B′B″, qui partagent chacun en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, sont dits *diamètres conjugués* de l'ellipse.

113 — Remarque. Puisqu'on a

$$Mx^2 + 2Nx + P = M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP - N^2}{M},$$

l'équation (1) peut être mise sous la forme

$$(3) \qquad (2Cy + Bx + E)^2 - M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{N^2 - MP}{M} = 0.$$

Le premier terme est le carré d'un polynôme contenant les deux variables x et y, le second le carré d'un polynôme qui ne contient que la variable x, et le troisième une quantité constante négative.

114 — 2° $N^2-MP=0$. Les deux racines x' et x'' sont égales, et l'on a

$$x'=x''=-\frac{N}{M},\quad Y=\frac{x-x'}{2C}\sqrt{M};$$

le coefficient M étant négatif, la quantité Y est imaginaire pour toutes les valeurs de x, excepté pour $x=x'$, et alors $Y=0$. L'équation n'admettant qu'un système de solutions réelles, le lieu est un point unique C placé sur la droite DD'. L'équation (3) se réduit, dans ce cas, à

$$(4)\qquad (2Cy+Bx+E)^2-M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2=0,$$

et l'on voit immédiatement qu'elle n'a qu'une solution réelle.

115 — 3° $N^2-MP<0$. Le trinôme

$$Mx^2+2Nx+P=M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2+\frac{MP-N^2}{M},$$

est négatif, et par conséquent Y imaginaire, pour toutes les valeurs de x ; l'équation, n'ayant pas de solution réelle, ne représente aucun lieu géométrique. Si l'on met l'équation (1) sous la forme (3), les trois termes étant positifs, on voit qu'en effet l'équation n'admet pas de solution réelle.

GENRE HYPERBOLE.

116 — Considérons maintenant le cas où le coefficient M a une valeur positive; ce cas se subdivise aussi en trois.

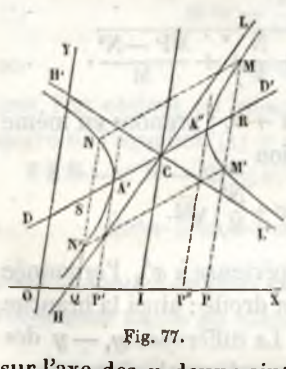


Fig. 77.

1° $N^2-MP>0$. Le trinôme

$$Mx^2+2Nx+P,$$

que l'on met sous la forme $M(x-x')(x-x'')$, est positif, et par suite, Y est réelle quand x varie de x'' à $+\infty$ et de x' à $-\infty$; d'aileurs Y varie en même temps de 0 à ∞. Prenons, comme précédemment, sur l'axe des x deux points P' et P'' ayant pour abscisses x' et

x'', et menons par ces points deux parallèles $P'A'$, $P''A''$ à l'axe des y; la courbe sera située en dehors de ces parallèles; elle se compose de deux branches séparées l'une de l'autre et qui s'étendent à l'infini (fig. 77); on a donné à cette courbe le nom d'*hyperbole*. Si, à partir du point I, milieu de $P'P''$, on prend deux longueurs égales IP et IQ de part et d'autre sur l'axe des x, les valeurs correspondantes de Y sont égales; on voit que le point C, milieu de $A'A''$, est le centre de la courbe, et que les deux droites DD' et IC sont deux diamètres conjugués.

117 — Considérons la valeur de y,

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}}.$$

Lorsque x a une valeur numérique très-grande, le premier terme de la parenthèse placée sous le signe radical est très-grand par rapport au second; si l'on réduit la parenthèse à son premier terme, on a une valeur approchée de y,

$$(5) \qquad y_1 = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}.$$

L'équation précédente définit deux droites distinctes, qui se coupent en un point du diamètre DD' dont l'abscisse est égale à $-\frac{N}{M}$, c'est-à-dire à la demi-somme des abscisses des points P' et P''; ce point est donc le centre C de la courbe. Considérons la branche de courbe $A''M$; si C est positif, cette branche est représentée par l'équation

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} + \frac{1}{2C}\sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}},$$

dans laquelle on fait varier x de x'' à $+\infty$; prenons en même temps la droite CL qui a pour équation

$$y_1 = -\frac{Bx+E}{2C} + \frac{1}{2C}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}.$$

Pour une valeur quelconque de x supérieure à x'', l'ordonnée de la courbe est inférieure à celle de la droite; ainsi la branche $A''M$ est comprise dans l'angle LCD'. La différence $y_1 - y$ des ordonnées qui correspondent à une même abscisse a pour valeur

$$y_1 - y = \frac{1}{2C}\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M} - \sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}}\right]$$

$$= \frac{MP-N^2}{2CM\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M} + \sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}}\right]}.$$

Quand x augmente indéfiniment, le dénominateur augmente indéfiniment, et par conséquent la différence $y_1 - y$ tend vers zéro. La droite CL, dont s'approche indéfiniment la branche de courbe A″M, est dite *asymptote* de cette branche de courbe qui est comprise dans l'angle LCD′. On verrait de même que les branches A″M′, A′N, A′N′ sont comprises dans les angles L′CD′, H′CD, HCD et ont pour asymptotes les droites CL′, CH′, CH. Ainsi la courbe est comprise dans les deux angles opposés par le sommet LCL′, HCH′, et chacune des droites indéfinies HL, H′L′ est asymptote à deux branches de courbe.

Si l'on met l'équation (1) sous la forme (3), et que l'on néglige le terme constant, on obtient une équation

$$(6) \qquad (2Cy+Bx+E)^2 - M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 = 0,$$

qui représente les deux asymptotes. Il est bon d'observer, en outre, que les coefficients angulaires de ces deux droites sont donnés par l'équation

$$(7) \qquad m = -\frac{B}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{B^2-4AC},$$

ou

$$Cm^2 + Bm + A = 0,$$

que l'on obtient en remplaçant dans les termes du second degré de l'équation (1) x par 1 et y par m.

118— 2° $N^2 - MP < 0$. Le trinôme

$$Mx^2 + 2Nx + P = M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}$$

étant la somme de deux quantités positives, la valeur de Y est réelle pour toutes les valeurs de x et ne s'annule jamais; Y acquiert sa valeur minimum $\frac{\sqrt{MP-N^2}}{2C\sqrt{M}}$ pour $x = -\frac{N}{M}$. Soit I (fig. 78) le point de l'axe des x dont l'abscisse est $-\frac{N}{M}$; menons IC parallèle à l'axe OY et prenons les longueurs CB′ et CB″ égales à la valeur minimum de Y; les deux points B′ et B″ appartiennent au lieu. Quand x varie de $-\frac{N}{M}$ à $+\infty$, ou de $-\frac{N}{M}$ à $-\infty$, la valeur de Y croît indéfiniment; si donc

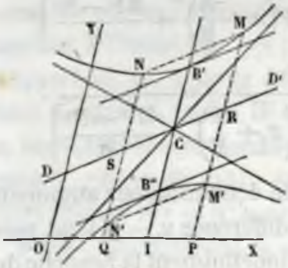


Fig. 78.

par les points B′ et B″, on mène des parallèles au diamètre DD′, on voit que la courbe se compose de deux branches infinies situées en dehors des parallèles. On donne encore à cette courbe le nom d'*hyperbole*.

Si l'on attribue à x les deux valeurs $x = -\frac{N}{M} \pm \alpha$, ce qui revient à porter à partir du point I les deux distances $IP = IQ = \alpha$, les valeurs correspondantes de Y sont égales; il en résulte que le point C est centre de la courbe, et que les deux droites DD′, IC sont deux diamètres conjugués.

On reconnaît également que les deux droites

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M},$$

qui se coupent au centre, sont asymptotes des branches infinies.

119 — 3° $N^2 - MP = 0$. On a alors

$$Y = \frac{1}{2C}\sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2} = \frac{\sqrt{M}}{2C}\left(x+\frac{N}{M}\right),$$

et

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\left(x+\frac{N}{M}\right).$$

Le lieu se compose de deux droites qui se coupent sur le diamètre DD′. Dans ce cas, l'équation (3) se réduit à

$$(2Cy+Bx+E)^2 - M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 = 0;$$

son premier membre est le produit de deux facteurs du premier degré

$$\left[2Cy+Bx+E+\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}\right]\left[2Cy+Bx+E-\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}\right]=0.$$

GENRE PARABOLE.

120 — Supposons enfin que le coefficient M soit nul. La valeur de Y se réduit à

$$Y=\frac{1}{2C}\sqrt{2Nx+P}.$$

Nous subdiviserons ce cas en plusieurs autres.

1° $N>0$. Si l'on pose $-\frac{P}{2N}=x'$, on aura

$$Y=\frac{1}{2C}\sqrt{2N(x-x')}.$$

Quand x varie de x' à $+\infty$, la quantité Y est réelle et varie de 0 à $+\infty$; mais elle est imaginaire pour les valeurs de x inférieures à x'. Si donc, par le point P′, dont l'abscisse est x', on mène P′A′ parallèle à l'axe des y, on voit que la courbe est tout entière située à droite de cette parallèle; elle est formée d'une seule branche passant par le point A′ et s'étendant à l'infini de part et d'autre du diamètre DD′ (fig. 79); on a donné à cette courbe le nom de *parabole*.

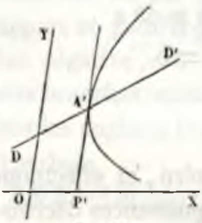


Fig. 79.

2° $N<0$. La quantité Y est réelle quand x varie de x' à $-\infty$; la courbe passe par le point A′ et s'étend à l'infini du côté des x négatives ; on l'appelle aussi parabole.

3° $N=0$. La valeur de y se réduit à

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{P}.$$

Si P est positif, cette équation représente deux droites parallèles au diamètre DD′ et situées à égale distance de ce diamètre. Si $P=0$, ces deux parallèles se confondent avec le diamètre ; enfin si P est négatif, l'équation n'a pas de solution réelle.

Dans le cas où M est égal à zéro, l'équation (1) peut se mettre sous l'une des trois formes

$$(12)\qquad (2Cy+Bx+E)^2-(2Nx+P)=0,$$

$$(13)\qquad (2Cy+Bx+E)^2-P=0,$$

$$(14)\qquad (2Cy+Bx+E)^2=0.$$

121 — Nous avons supposé dans ce qui précède que le coefficient C est différent de zéro. Lorsque le coefficient C est nul, et le coefficient A différent de zéro, on pourrait résoudre l'équation par rapport à x et construire le lieu comme précédemment; le premier terme du trinôme placé sous le radical ayant pour coefficient B^2, et par conséquent ayant une valeur positive ou nulle, le lieu sera du genre hyperbole ou du genre parabole. Mais il est préférable de résoudre l'équation par rapport à la variable qui n'y entre qu'au premier degré; d'ailleurs cette méthode est seule applicable quand les deux coefficients A et C sont nuls à la fois.

En ordonnant l'équation (1) par rapport à y, on a

$$(Bx+E)y+Ax^2+Dx+F=0,$$

d'où

$$y=-\frac{Ax^2+Dx+F}{Bx+E}.$$

Supposons d'abord que B soit différent de zéro, et effectuons la division, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x jusqu'à ce que l'on arrive à un reste indépendant de x. Nous distinguerons deux cas, suivant que le reste est différent de zéro ou égal à zéro. Dans le premier cas, on obtiendra un résultat de la forme

$$y=ax+b+\frac{r}{Bx+E}=ax+b+\frac{c}{x-d}.$$

Pour fixer les idées supposons $c>0$. Construisons le lieu auxiliaire défini par l'équation $y=ax+b$, et posons $Y=\dfrac{c}{x-d}$. L'équation $y=ax+b$ représente une droite DD' (fig. 80); pour chaque valeur de x, il faut augmenter l'ordonnée de cette droite d'une quantité QM égale à la valeur de Y. Cette quantité devient infinie pour $x=d$; prenons donc un point C ayant pour abscisse d et menons CC′ parallèle à OY. Si l'on donne à x une valeur $d+x'$, x' étant positive, Y a une valeur positive, et quand x' tend vers zéro, Y augmente indéfiniment; si, au contraire, x' augmente indéfiniment, Y tend vers zéro; on obtient ainsi une branche de courbe comprise dans l'angle C′ID′ et formée de deux arcs infinis, asymptotes respectivement aux deux droites IC′ et ID′. Aux valeurs de x inférieures à d correspondent des valeurs négatives de Y, et l'on obtient une seconde branche comprise dans l'angle CID, et formée de deux arcs infinis asymptotes aux droites IC, ID. A deux valeurs de x' égales et de signes contraires, correspondent des valeurs de Y qui sont aussi égales et de signes contraires, et, par suite, deux points M et M′ symétriques par rapport au point I, qui est centre de la courbe. Si la constante c était négative, on obtiendrait encore une courbe formée de deux branches infinies; mais ces deux branches seraient situées dans les angles C′ID, CID′. Dans les deux cas, la courbe est une hyperbole.

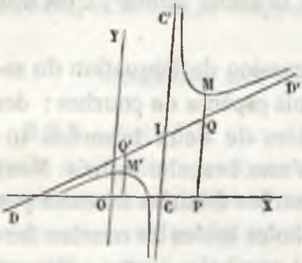


Fig. 80.

122 — Lorsque le reste de la division est nul, on a

$$Ax^2+Dx+F=-(Bx+E)(ax+b),$$

et l'équation prend la forme $(y-ax-b)(Bx+E)=0$; elle se décompose en deux autres, $y-ax-b=0$, $Bx+E=0$, qui représentent deux droites, dont l'une est parallèle à l'axe des y.

Lorsque A est nul en même temps que C, il suffit de faire dans la discussion précédente $a=0$; la droite DD′ devient parallèle à l'axe des x; on obtient ainsi, soit une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles aux axes des coordonnées, soit deux droites respectivement parallèles aux axes.

123 — Supposons maintenant que le coefficient B soit égal à zéro, en même temps que C. Le coefficient A est nécessairement différent de zéro, autrement l'équation serait du premier degré. La valeur de y est de la forme $y=ax^2+bx+c$;

elle est réelle quelle que soit la valeur de x; en faisant varier x de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient une branche infinie; c'est une parabole.

124 — Remarque. Dans la discussion de l'équation du second degré, nous avons trouvé trois espèces de courbes : des courbes fermées, des courbes formées de deux branches infinies, et des courbes n'ayant qu'une branche infinie. Nous avons appelé ellipses toutes les courbes fermées données par l'équation du second degré ; hyperboles toutes les courbes formées de deux branches infinies ; et paraboles toutes celles qui n'ont qu'une branche infinie.

Nous avons vu au commencement de cet ouvrage (liv. I, chap. II) que les courbes désignées par les mêmes noms en Géométrie élémentaire sont représentées par des équations du second degré. Nous verrons plus tard que, réciproquement, toutes les courbes représentées par l'équation du second degré jouissent des propriétés qui servent de définitions en Géométrie élémentaire, de telle sorte que les deux modes de définitions sont équivalents.

En résumant la discussion, on voit que c'est le signe de la quantité B^2-4AC qui indique l'espèce de la courbe représentée par l'équation du second degré ; la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que la quantité B^2-4AC est négative, positive ou nulle.

Toutefois, il importe de se rappeler que l'équation ne représente pas toujours une courbe ni même un lieu ; dans le cas où la quantité B^2-4AC est négative, l'équation représente une ellipse, ou un point, ou n'admet pas de solution réelle ; dans le cas où la quantité B^2-4AC est positive, l'équation représente une hyperbole ou deux droites qui se coupent ; enfin, dans le cas où $B^2-4AC=0$, l'équation représente, soit une parabole, soit deux droites parallèles, ou une seule droite, ou elle n'admet pas de solution réelle.

Lorsque la quantité B^2-4AC est différente de o, le lieu se réduit à un point ou à un système de deux droites, quand les coefficients vérifient la relative $N^2-MP=0$, ou

$$AE^2+CD^2-BDE+F(B^2-4AC)=0.$$

Lorsque la quantité B^2-4AC est nulle, cette relation équivaut à $N=0$, et le lieu se compose de deux droites parallèles.

TANGENTES AUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

125 — Soit $f(x, y)=0$ l'équation d'une courbe ; si l'on appelle x et y les coordonnées du point de contact M, X et Y les coordonnées variables d'un point quelconque de la tangente, nous avons vu (nº 89) que la tangente est représentée par l'équation

$$(X-x)f'_x+(Y-y)f'_y=0.$$

ou

$$Xf'_x+Y'_y-(xf'_x+xf'_y)=0.$$

Lorsque la courbe est du second degré, on a

$$f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F;$$
$$f'_x=2Ax+By+D,\quad f'_y=Bx+2Cy+E,$$
$$xf'_x+yf'_y=2Ax^2+2Bxy+2Cy^2+Dx+Ey.$$

Le point de contact M étant situé sur la courbe, ses coordonnées x et y vérifient la relation

$$(1)\qquad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0;$$

on en déduit

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=-(Dx+Ey+F),$$

et, par su

$$xf'_x+yf'_y=-(Dx+Ey+2F).$$

L'équation de la tangente au point dont les coordonnées sont x et y devient ainsi

$$(2)\quad (2Ax+By+D)X+(Bx+2Cy+E)Y+(Dx+Ey+2F)=0.$$

On remarque que les coordonnées x et y du point de contact n'entrent qu'au premier degré dans cette équation. Comme cette équation peut être mise sous la forme

$$(3)\quad (2AX+BY+D)x+(BX+2CY+E)y+(DX+EY+2F)=0,$$

on remarque aussi qu'elle ne change pas, quand on y remplace X et Y par x et y, et réciproquement.

126 — Proposons-nous maintenant de mener des tangentes à la courbe par un point donné P non situé sur la courbe et ayant pour coordonnées x_1 et y_1. Prenons pour inconnues les coordonnées x et y de l'un des points de contact M; ces coordonnées doivent vérifier l'équation (1); la tangente au point M est représentée par l'équation (2); cette tangente devant passer par le point P, les coordonnées de ce point vérifieront l'équation (2) ou l'équation (3), et l'on aura

$$(4)\quad (2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y+(Dx_1+Ey_1+2F)=0.$$

Les coordonnées x et y sont donc déterminées par les deux équations simultanées (1) et (4). L'une étant du second degré, l'autre du premier degré, le système de ces deux équations admet deux solutions, et l'on peut mener par un point donné P deux tangentes à une courbe du second degré. La résolution de ces deux équations revient à chercher les points d'intersection des lignes définies par chacune d'elles; la première est la courbe proposée, la seconde une droite passant par les deux points de contact. On peut remarquer que l'équation (4) de la corde des contacts a la même forme que l'équation (2) de la tangente; il suffit de remplacer dans celle-ci les coordonnées du point de contact par celles du point P.

EXERCICES.

1° Construire les courbes représentées par les équations

$$xy+2x-5y=0,\quad x^2-2xy+y^2+2x-7=0,$$
$$2y^2+7xy+3x^2-3y+x-2=0,\quad x^2+3xy-2x=0,$$
$$3x^2-5xy+2y^2+3x-2y=0,\quad 5x^2+4xy+y^2-2x+5=0,$$
$$2x^2-2xy+y^2+2x+1=0,\quad x^2-2xy+y^2-2x+2y-8=0.$$

2° Lieu du point dont l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre les ordonnées correspondantes de deux droites données.

3° Trouver le lieu du centre d'un cercle qui coupe deux cercles donnés sous des angles donnés.

4° On donne un cercle tangent à deux droites rectangulaires OX, OY et deux points P et Q placés symétriquement par rapport à la bissectrice de l'angle; on mène au cercle une tangente quelconque qui coupe les côtés de l'angle en A et B; trouver le lieu du point de rencontre des droites AP, BQ.

5° Le triangle ABC est circonscrit à un cercle donné, l'angle C est constant, le sommet B décrit une ligne droite; quel est le lieu du sommet A?

6° Construire la parabole $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1.$

CHAPITRE II

Centre, diamètres et axes des courbes du second degré.

CENTRE.

127 — Nous avons appelé centre d'une courbe un point fixe C, par rapport auquel tous les points de la courbe sont symétriques deux à deux. En discutant l'équation générale du second degré, nous avons reconnu que l'ellipse et l'hyperbole ont un centre. Nous nous proposons maintenant de rechercher directement le centre d'une courbe du second degré, sans résoudre l'équation. La méthode que nous suivrons repose sur ce théorème : quand l'origine des coordonnées est centre d'une ligne du second degré, l'équation de la ligne ne contient pas de termes du premier degré.

Soit, en effet,

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1}$$

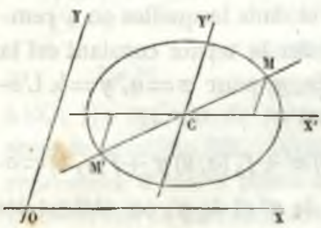


Fig. 81.

l'équation d'une ligne du second degré ayant l'origine pour centre (fig. 81); l'équation d'une droite MM′ menée par l'origine est de la forme $y=mx$. L'élimination de x entre cette équation et celle de la courbe donne l'équation

$$(A+Bm+Cm^2)x^2+(D+Em)x+F=0, \tag{2}$$

qui détermine les abscisses des deux points de rencontre. L'origine étant le milieu de la droite MM′, l'équation précédente doit avoir ses deux racines égales et de signes contraires, ce qui exige que le coefficient de la première puissance de x soit égal à zéro; on a ainsi $D+Em=0$, et, comme cette condition doit être vérifiée pour une infinité de valeurs de m, on doit avoir séparément $D=0$, $E=0$. Réciproquement, lorsque ces conditions sont remplies, l'équation (2) a ses deux racines égales et de signes contraires, quelle que soit la valeur de m, et, par suite, l'origine est centre de la courbe.

128 — Pour reconnaître si un lieu du second degré a un centre, on transportera les axes parallèlement à eux-mêmes en un point arbitraire dont nous désignerons les coordonnées par a et b, puis on examinera si l'on peut déterminer ces quantités de manière que la nouvelle équation ne renferme pas de termes du premier degré.

Les formules pour déplacer les axes parallèlement à eux-mêmes sont $x=a+x'$, $y=b+y'$. En substituant dans l'équation (1), on obtient l'équation nouvelle

$$(3)\quad \begin{aligned} &Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+(2Aa+Bb+D)x'+(Ba+2Cb+E)y' \\ &\qquad +Aa^2+Bab+Cb^2+Da+Eb+F=0, \end{aligned}$$

dont il importe de remarquer la composition. Désignons, pour abréger, par $f(x, y)$ le premier membre de l'équation (1) qui est une fonction entière du second degré en x et y; dans l'équation (3) les termes du second degré sont les mêmes que dans l'équation (1); les termes du premier degré ont pour coefficients les dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ prises par rapport aux variables x et y, et dans lesquelles on a remplacé ces variables par a et b; enfin le terme constant est la valeur que prend le polynôme $f(x, y)$ pour $x=a$, $y=b$. L'équation (3) peut donc s'écrire ainsi

$$(4)\quad Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+f'_a(a, b)x'+f'_b(a, b)y'+f(a, b)=0.$$

En égalant à zéro les coefficients de x' et de y', on obtient les deux équations du premier degré

$$(5)\quad \begin{cases} 2Aa+Bb+D=0. \\ Ba+2Cb+E=0. \end{cases}$$

On voit par là *que l'on détermine le centre d'une courbe du second degré en résolvant les deux équations que l'on obtient en égalant à zéro les dérivées partielles du premier membre de l'équation proposée, prises par rapport à* x *et à* y.

129 — Si l'on considère a et b comme des coordonnées variables, chacune des équations (5) définit une droite, et il y a lieu de distinguer plusieurs cas.

1° $B^2 - 4AC \gtrless 0$. Les deux équations sont vérifiées par un système de valeurs de a et de b et par un seul; les deux droites se coupent et la ligne admet un centre et un centre unique dont les coordonnées sont

$$(6)\quad \begin{cases} a = \dfrac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \\ b = \dfrac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}. \end{cases}$$

2° $B^2 - 4AC = 0$. Les droites (5) sont parallèles ou se confondent ; dans le premier cas, le lieu n'a pas de centre; dans le second cas, il admet comme centre chacun des points de la droite définie par l'une des équations (5). Il est facile de voir que, dans ce dernier cas, s'il y a un lieu, ce lieu se compose nécessairement de deux droites parallèles. Soit, en effet, CC′ la droite, lieu des centres (fig. 82), et M un point appartenant au lieu ; joignons le point M aux divers points de la droite CC′, et prolongeons chacune de ces droites d'une longueur égale à elle-même, les points N, N′, N″,... ainsi obtenus, appartiendront encore au lieu ; or, tous ces points sont situés sur une parallèle à CC′. En opérant de même avec le point N on aurait une seconde parallèle MM′. D'ailleurs, l'équation (1) ne peut pas représenter d'autres points que ceux de ces deux droites ; autrement une droite rencontrerait le lieu en plus de deux points. Si le point M était situé sur la droite CC′, les deux parallèles se confondraient avec le lieu des centres.

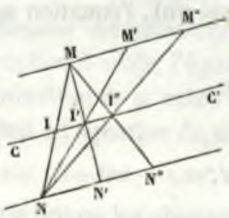


Fig. 82.

130 — Lorsque la courbe admet un centre, si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point, l'équation se simplifie et devient

$$(7)\qquad Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F_1 = 0,$$

puisque les termes du premier degré disparaissent. Le terme constant F_1 de la nouvelle équation a pour valeur

$$F_1 = Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F,$$

a et b désignant les coordonnées du centre. Mais les quantités a et b satisfont aux équations (5) ; si l'on multiplie les deux membres de chacune d'elles respectivement par a et b et que l'on ajoute, il vient

$$2Aa^2+2Bab+2Cb^2+Da+Eb=0,$$

d'où

$$Aa^2+Bab+Cb^2=-\frac{Da+Eb}{2},$$

et, par suite,

$$F_1=F+\frac{Da+Eb}{2}.$$

Il est bon d'observer, qu'en remplaçant a et b par leurs valeurs, on a aussi

$$F_1=\frac{AE^2+CD^2-BDE+F(B^2-4AC)}{B^2-4AC}.$$

Lorsque le nouveau terme constant F_1 est nul, l'équation se réduit à

(8) $$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2=0.$$

On en déduit

(9) $$y'=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2C}x'.$$

Si la quantité B^2-4AC est négative, l'équation n'admet qu'une solution réelle $x'=0$, $y'=0$. Si la quantité B^2-4AC est positive, l'équation représente deux droites passant par l'origine.

Dans ce cas, l'équation (7), dans laquelle on attribue à la constante F_1 une valeur quelconque, définit une hyperbole ; nous avons vu (n° 117) que les asymptotes d'une hyperbole passent par son centre, et que les coefficients angulaires en sont donnés par la formule

$$m=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2C};$$

ces asymptotes ne sont autre chose que les droites représentées par l'équation (9) ou par l'équation (8). Ainsi, quand une équation du second degré représente une hyperbole rapportée à son centre, on obtient l'équation des asymptotes en supprimant le terme constant dans l'équation proposée.

DIAMÈTRES.

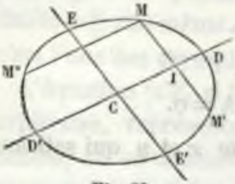


Fig. 83.

131—Si l'on coupe une courbe du second degré par une série de droites parallèles, le lieu des points milieux I des cordes MM′ terminées aux deux points de rencontre est un *diamètre* de la courbe. Soit m le coefficient angulaire des cordes, et

(1) $$f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

l'équation de la courbe. Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en un point arbitraire I du plan, ayant pour coordonnées a et b, l'équation de la courbe devient (nº 128)

(4) $$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+f'_a(a,b)\,x'+f'_b(a,b)\,y'+f(a,b)=0.$$

Menons actuellement par ce point I une parallèle MM′ à la direction donnée, l'équation de cette parallèle est $y'=mx'$. L'élimination de y' entre cette équation et celle de la courbe conduit à l'équation du second degré

(10) $$(A+Bm+Cm^2)\,x'^2+[f'_a(a,b)+f'_b(a,b)m]\,x'+f(a,b)=0,$$

qui donne les abscisses des points de rencontre. Si la valeur attribuée à m n'annule pas le trinôme $A+Bm+Cm^2$, coefficient de x'^2, chacune des sécantes rencontre la courbe en deux points; si l'on suppose que l'origine I soit placée au milieu de la corde MM′ (fig. 83), l'équation (10) ayant ses racines égales et de signes contraires, on aura la relation

(11) $$f'_a(a,b)+m\,f'_b(a,b)=0;$$

cette équation, devant être satisfaite par les coordonnées du point milieu de l'une quelconque des cordes considérées, est l'équation du lieu. Si l'on y remplace a et b par x et y, elle devient

(12) $$f'_x(x,y)+m\,f'_y(x,y)=0,$$

ou

(13) $$(2Ax+By+D)+m\,(Bx+2Cy+E)=0.$$

Cette équation étant du premier degré, on en conclut que le diamètre correspondant à une série quelconque de cordes parallèles est une droite DD′. Appelons m' le coefficient angulaire du diamètre, on aura la relation

$$(14) \qquad m' = -\frac{2A+Bm}{B+2Cm},$$

ou

$$(15) \qquad 2Cmm' + B(m+m') + 2A = 0.$$

132 — Remarque I. — Les valeurs de x et y qui satisfont aux équations simultanées

$$2Ax+By+D=0, \quad Bx+2Cy+E=0,$$

vérifient l'équation (13) quelle que soit la valeur de m; donc, si le lieu a un centre unique, tous les diamètres passent par le centre, et, s'il en a une infinité, tous les diamètres se confondent avec le lieu des centres.

Les deux équations qui déterminent le centre représentent deux diamètres; le premier correspond aux cordes parallèles à l'axe des x, le second aux cordes parallèles à l'axe des y. On les obtient en faisant $m=0$ ou $m=\infty$.

Remarque II. — Lorsque la courbe est une ellipse, le trinôme $A+Bm+Cm^2$, ayant ses racines imaginaires, est toujours différent de zéro; à toute direction des cordes correspond un diamètre défini par l'équation (13).

Cette équation (13), si l'on y considère m comme un paramètre arbitraire, représente toutes les droites qui passent par le centre; on en conclut que toute droite passant par le centre est un diamètre.

133 — Remarque III. — Dans le cas de l'hyperbole, le trinôme $A+Bm+Cm^2$ s'annule pour deux valeurs réelles de m, qui sont précisément les coefficients angulaires des asymptotes. Si l'on attribue à m l'une de ces valeurs, l'équation (10) s'abaissant au premier degré, chacune des sécantes ne rencontre la courbe qu'en un point. Si en outre les coordonnées a et b du point I, par lequel on mène la sécante, vérifient la relation (11), l'équation (10), ayant ses deux premiers coefficients muls, n'admet plus de solution; la droite représentée par l'équation (13) est alors le lieu des points I tels que les parallèles menées par chacun de ses points à la direction donnée ne rencontrent par la courbe; mais, en vertu de la relation (15), la valeur de m' étant égale à m, toutes ces parallèles se confondent avec la droite (13) elle-même. Comme cette droite passe par le centre, c'est l'une des asymptotes.

L'équation (13), si l'on y considère m comme un paramètre arbitraire, représentant toutes les droites qui passent par le centre, on en conclut que toutes ces droites, exepté les deux asymptotes, sont des diamètres.

134 — REMARQUE IV. Dans le cas de la parabole, on a $B^2-4AC=0$, ou $\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}$; il en résulte que la valeur de m' donnée par l'équation (14) est indépendante de m et égale à $-\frac{B}{2C}$, ainsi tous les diamètres de la parabole sont parallèles entre eux.

Le trinôme $A+Bm+Cm^2$ a ses deux racines égales à $-\frac{B}{2C}$, coefficient angulaire des diamètres. Si l'on mène des sécantes parallèles à cette direction, chacune d'elles ne coupera la courbe qu'en un point. D'autre part, quand on attribue à m la valeur $-\frac{B}{2C}$, les coefficients de x et y dans l'équation (13) deviennent nuls et l'équation cesse de représenter une droite.

L'équation (13), dans laquelle on regarde m comme un paramètre arbitraire, représente toutes les droites parallèles à la direction $-\frac{B}{2C}$; on en conclut que toute droite parallèle à cette direction est un diamètre de la parabole.

Lorsqu'on a en même temps $B^2-4AC=0$ et $BE-2CD=0$, ou $\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}=\frac{D}{E}$, le lieu du second degré se compose de deux droites parallèles; si l'on appelle $-m'$ la valeur commune des rapports précédents, on a

$$2Ax+By+D=-m'(Bx+2Cy+E)$$

et l'équation (13) se réduit à:

$$(m-m')(Bx+2Cy+D)=0.$$

Ainsi, dans ce cas, tous les diamètres coïncident.

DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

135—Supposons B^2-4AC différent de zéro. Les deux coefficients m et m' sont liés par la relation

$$(15)\qquad 2Cmm'+B(m+m')+2A=0.$$

Imaginons que l'on mène des sécantes telles que MM'' parallèles au diamètre DD' (fig. 83); soit m'' le coefficient angulaire du diamètre EE', qui divise ces cordes en deux parties égales, on aura de même, entre la direction m' des cordes et la direction m'' du diamètre correspondant EE', la relation

$$2Cm'm''+B(m'+m'')+2A=0;$$

cette équation et la précédente étant du premier degré par rapport à m'' et à m, on voit que l'on a $m''=m$. Les deux diamètres DD' et EE', dont les coefficients angulaires sont m' et m, jouissent de cette propriété que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre; on les a nommés, pour cette raison, *diamètres conjugués*.

L'ellipse et l'hyperbole ont une infinité de systèmes de diamètres conjugués. On peut prendre pour premier diamètre une droite quelconque menée par le centre, pourvu qu'elle ne se confonde pas avec l'une des asymptotes, si la courbe est une hyperbole.

AXES.

136—Dans les courbes du second degré, les diamètres perpendiculaires aux cordes qu'ils divisent en deux parties égales sont des axes de symétrie.

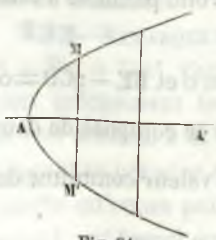


Fig. 84.

La parabole ayant tous ses diamètres parallèles, si l'on imagine une série de cordes MM' (fig. 84) perpendiculaires à la direction commune des diamètres, le diamètre AA' qui divise ces cordes en deux parties égales, sera un axe de la courbe et ce sera le seul. Le coefficient angulaire des diamètres est $-\frac{B}{2C}$; donc, si les axes des coordonnées sont rectangulaires, l'axe de la courbe est le diamètre des cordes ayant pour coefficient angulaire $\frac{2C}{B}$; son équation (nº 131) est

$$B(2Ax+By+D)+2C(Bx+2Cy+E)=0.$$

Lorsque la courbe est une ellipse ou une hyperbole, à tout axe AA′ (fig. 85) en correspond un second BB′ formant avec le premier un système de diamètres conjugués; la question est ainsi ramenée à la recherche des diamètres conjugués perpendiculaires entre eux. Si les coordonnées sont rectangulaires, on obtient les coefficients angulaires des axes en joignant à l'équation (15) la relation $mm'=-1$. On en déduit $m+m'=2\frac{C-A}{B}$; ainsi, m et m' sont les racines de l'équation du second degré

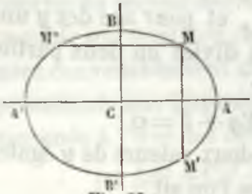


Fig. 85.

(16) $$Bu^2+2(A-C)u-B=0.$$

L'ellipse et l'hyperbole ont deux axes. Si l'on avait $B=0$, et $A=C$, l'équation serait une identité, et la courbe aurait une infinité de systèmes de diamètres conjugués rectangulaires; dans ce cas, le lieu est un cercle.

137 — Nous avons vu (nº 130) que, lorsque la quantité B^2-4AC est positive, l'équation

(8) $$Ax^2+Bxy+Cy^2=0$$

représente deux droites passant par l'origine; d'ailleurs l'équation (16) donne les directions des axes, qui sont ici les bissectrices des angles formés par les deux droites; si dans l'équation (16), on remplace u par $\frac{y}{x}$, on aura l'équation de ces bissectrices

(17) $$Bx^2+2(A-C)xy-By^2=0.$$

Les directions des axes ne dépendant que des coefficients des termes du second degré, on voit par ce qui précède que les axes de l'hyperbole coïncident avec les bissectrices des angles des asymptotes.

On appelle sommets d'une courbe du second degré les points où elle est rencontrée par un axe. La parabole, ayant un seul axe qui ne rencontre la courbe qu'en un point, n'a qu'un sommet; l'ellipse a quatre sommets et l'hyperbole deux.

ELLIPSE ET HYPERBOLE RAPPORTÉES A DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

138 — Supposons que l'on prenne pour axe des x un diamètre d'une courbe du second degré, et pour axe des y une parallèle aux cordes que le diamètre divise en deux parties égales ; l'équation

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

devra donner pour chaque valeur de x deux valeurs de y égales et de signes contraires, ce qui exige que l'on ait

$$Bx+E=0,$$

quelle que soit la valeur de x, et, par suite, $B=0$, $E=0$. L'équation aura donc la forme

$$Ax^2+Cy^2+Dx+F=0. \tag{18}$$

Si la courbe est une ellipse ou une hyperbole, en prenant pour axe des y le diamètre conjugué du premier, on aura par la même raison $D=0$, ce qui réduit l'équation de la courbe à la forme

$$Ax^2+Cy^2+F=0. \tag{19}$$

PARABOLE RAPPORTÉE A UN DIAMÈTRE ET A LA TANGENTE A L'EXTRÉMITÉ DE CE DIAMÈTRE.

139 — La parabole n'admet pas de diamètres conjugués; mais, si l'on prend pour origine le point où le diamètre rencontre la courbe, le terme constant F de l'équation (18) sera nul ; on sait, d'ailleurs, que les droites parallèles au diamètre ne coupent la courbe qu'en un point ; ainsi, à chaque valeur de y correspond une seule valeur de x, ce qui exige que $A=0$. L'équation de la parabole sera donc de la forme

$$Cy^2+Dx=0. \tag{19}$$

On peut remarquer que l'axe des y n'est autre chose que la tangente à l'origine.

Les formes (19) et (20) se rapportent à une infinité de systèmes d'axes obliques et à un seul système d'axes rectangulaires.

CHAPITRE III

Réduction de l'équation du second degré.

140—Pour étudier avec plus de facilité les propriétés d'une courbe du second degré, il importe de simplifier autant que possible son équation, en la rapportant à des axes de coordonnées convenablement choisis. Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que l'équation du second degré peut toujours être ramenée à l'une des deux formes

$$(\alpha)\ Ax^2+Cy^2+F=0, \qquad (\beta)\ Cy^2+Dx=0.$$

Quand la courbe est une ellipse ou une hyperbole, on ramène son équation à la forme (α) en prenant pour axes des coordonnées un système de deux diamètres conjugués quelconques; généralement les coordonnées seront obliques; elles seront rectangulaires si l'on rapporte la courbe à ses deux axes. Quand la courbe est une parabole, on ramène son équation à la forme (β), en prenant pour axe des x un diamètre quelconque, et pour axe des y la tangente à l'extrémité de ce diamètre; si l'on veut que ces coordonnées soient rectangulaires, on prendra pour axe des x l'axe de la courbe.

C'est à l'aide de ces deux formes d'équations, en coordonnées rectangulaires, que nous démontrerons la plupart des propriétés des courbes du second degré. Nous allons expliquer la marche à suivre pour effectuer la réduction de l'équation. Soit

$$(1) \qquad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

une équation du second degré, en coordonnées que l'on pourra toujours rendre rectangulaires par une première transformation.

ELLIPSE ET HYPERBOLE.

141—Examinons d'abord le cas où la quantité B^2-4AC est différente de zéro ; la courbe admet un centre unique, dont les coordonnées a et b vérifient les deux équations (n° 128)

$$2Aa+Bb+D=0, \qquad Ba+2Cb+E=0;$$

transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au centre

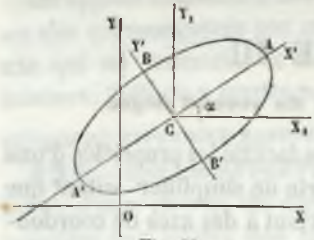


Fig. 86.

C (fig. 86); nous savons que les termes du second degré ne changent pas, que ceux du premier degré disparaissent, et que le terme constant F_1 de la nouvelle équation est donné par la formule $F_1 = \frac{Da+Eb}{2} + F$. L'équation de la courbe, par ce premier changement de coordonnées, se simplifie et devient

$$(2) \qquad Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F_1 = 0.$$

Faisons maintenant tourner les axes des coordonnées, supposés rectangulaires, d'un angle α autour du centre C pour les faire coïncider avec les axes de la courbe, les formules de transformation sont

$$x_1 = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \qquad y_1 = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

En substituant dans l'équation (2), on obtient la nouvelle équation

$$(3) \quad (A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha)x'^2 + (A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha)y'^2$$
$$+ [2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]x'y' + F_1 = 0.$$

On peut disposer de l'angle α de manière à annuler le coefficient du terme en $x'y'$; pour cela, on posera

$$(4) \qquad 2(C-A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0,$$

$$(5) \qquad \text{ou} \qquad B\,\mathrm{tang}^2\alpha + 2(A-C)\,\mathrm{tang}\,\alpha - B = 0.$$

Cette équation du second degré est la même que l'équation (16) du n° 136, par laquelle on détermine les directions des axes de la courbe. Mais on peut résoudre l'équation (4) plus simplement en la mettant sous la forme

$$(C-A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0,$$

d'où

$$(6) \qquad \mathrm{tang}\,2\alpha = \frac{B}{A-C}.$$

Si l'on exclut le cas du cercle où l'on a à la fois $B=0$, et $A=C$, l'équation (6) admet une solution positive ω moindre que π, et les diverses valeurs de l'angle 2α qui satisfont à cette équation sont comprises dans la formule

$$2\alpha = \omega + k\pi,$$

où k désigne un nombre entier quelconque positif ou négatif; on en déduit

$$\alpha = \frac{\omega}{2} + k\frac{\pi}{2}.$$

Les diverses valeurs de α ne donnent que quatre directions différentes pour l'axe CX'; ces quatre directions sont opposées deux à deux et forment deux droites rectangulaires. Nous prendrons pour α la valeur $\frac{\omega}{2}$, qui est toujours positive et inférieure à $\frac{\pi}{2}$. Le terme en $x'y'$ disparaît dans l'équation (3); il reste à calculer les coefficients des termes en x'^2 et en y'^2. Si l'on pose

$$M = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$N = A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha;$$

on a
$$M + N = A + C,$$
$$M - N = (A - C)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2B\sin\alpha\cos\alpha = (A - C)\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha.$$

L'équation (6) donne

$$\sin 2\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{A - C}{\pm\sqrt{B^2 + (A - C)^2}};$$

il en résulte
$$M - N = \pm\sqrt{B^2 + (A - C)^2}.$$

On calculera donc les deux coefficients M et N à l'aide des formules

$$(7) \quad \begin{cases} M + N = A + C, \\ M - N = \pm\sqrt{B^2 + (A - C)^2}. \end{cases}$$

Nous avons choisi la valeur de 2α positive et inférieure à π; $\sin 2\alpha$ ayant une valeur positive, il faudra mettre devant le radical le signe de B. De cette manière l'équation de la courbe est ramenée à la forme simple

$$(8) \quad Mx'^2 + Ny'^2 + F_1 = 0.$$

Si l'on retranche les deux équations (7) membre à membre après les avoir élevées au carré, on obtient la relation

$$4MN = 4AC - B^2.$$

L'équation (8) représente une ellipse ou une hyperbole, suivant que les deux coefficients M et N ont le même signe ou des signes contraires.

PARABOLE.

142 — Quand $B^2-4AC=0$, les termes du second degré dans l'équation proposée forment un carré parfait; on a, en effet, en remplaçant A par sa valeur $\frac{B^2}{4C}$,

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=C\left(y^2+\frac{B}{C}xy+\frac{B^2}{4C^2}x^2\right)=C\left(y+\frac{B}{2C}x\right)^2,$$

et l'équation peut s'écrire

$$C\left(y+\frac{B}{2C}x\right)^2+Dx+Ey+F=0.$$

Faisons d'abord tourner les axes des coordonnées autour de l'origine d'un angle α (fig. 87); à l'aide des formules de transformation

$$x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha,\quad y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha,$$

l'équation proposée devient

$$(9)\qquad C\left[\left(\cos\alpha-\frac{B}{2C}\sin\alpha\right)y_1+\left(\sin\alpha+\frac{B}{2C}\cos\alpha\right)x_1\right]^2$$
$$+(D\cos\alpha+E\sin\alpha)x_1+(E\cos\alpha-D\sin\alpha)y_1+F=0.$$

On peut disposer de l'angle α de manière à annuler le coefficient de x_1 ou de y_1 dans le polynôme qui est élevé au carré; posons, par exemple,

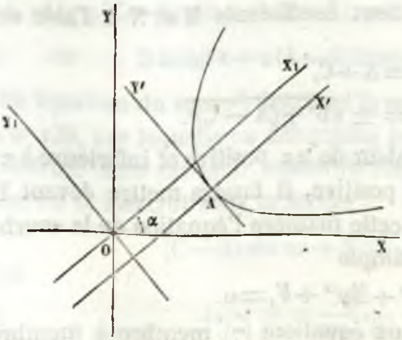


Fig. 87.

$$\sin\alpha+\frac{B}{2C}\cos\alpha=0,$$

d'où

$$(10)\qquad \operatorname{tang}\alpha=-\frac{B}{2C},$$

l'équation (9) se simplifiera et prendra la forme

$$(11)\qquad Ny_1^2+Px_1+Qy_1+F=0.$$

On a

$$N = C\left(\cos\alpha - \frac{B}{2C}\sin\alpha\right)^2 = C\left(\cos\alpha + \tang\alpha\sin\alpha\right)^2 = \frac{C}{\cos^2\alpha},$$

et par suite, $N = \frac{B^2+4C^2}{4C} = A + C$. Quant aux coefficients P et Q, on les obtiendra en remplaçant sin α et cos α par leurs valeurs, ce qui donne

$$P = \frac{2CD - BE}{\pm\sqrt{4C(A+C)}}, \quad Q = \frac{2CE + BD}{\pm\sqrt{4C(A+C)}}.$$

L'une des valeurs de α données par l'équation (10) est positive et inférieure à π; si l'on choisit cette valeur, sin α sera positif, et il faudra prendre le radical avec un signe contraire à celui de B. Si le coefficient P était nul, l'équation (11), ne renfermant plus x_1, ne pourrait représenter que deux droites parallèles à l'axe OX_1. Lorsque ce coefficient est différent de zéro, on déplace les axes parallèlement à eux-mêmes; en posant $x_1 = a + x'$, $y_1 = b + y'$, l'équation (11) devient

$$Ny'^2 + Px' + (2Nb + Q)y' + (Nb^2 + Pa + Qb + F) = 0.$$

On disposera des coordonnées a et b de la nouvelle origine A de manière à annuler le coefficient de y' et le terme constant,

$$2Nb + Q = 0, \quad Nb^2 + Pa + Qb + F = 0,$$

ce qui donne pour a et b des valeurs finies et déterminées, et l'équation sera ramenée à la forme simple

$$(12) \qquad Ny'^2 + Px' = 0.$$

On a fait d'abord tourner les axes des coordonnées autour de l'origine de manière à rendre l'axe OX_1 parallèle à l'axe de la parabole; on a transporté ensuite les axes parallèlement à eux-mêmes au sommet A de la parabole. De cette manière la parabole est rapportée à son axe et à la tangente au sommet.

143 — Remarque. Pour effectuer la réduction de l'équation du second degré, nous avons supposé les axes rectangulaires. Si les axes étaient obliques et faisaient entre eux un angle θ, on pourrait rapporter la courbe à des axes rectangulaires, en conservant l'axe des x et prenant pour axe des y une droite perpendiculaire à l'axe des x. Les formules de transformation sont

$$x = \frac{x' \sin\theta - y' \cos\theta}{\sin\theta}, \quad y = \frac{y'}{\sin\theta};$$

les termes du second degré dans la nouvelle équation ont pour coefficients

$$A' = A,\ B' = \frac{B \sin\theta - 2A \sin\theta \cos\theta}{\sin^2\theta},\quad C' = \frac{C + A\cos^2\theta - B\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Il est bon de remarquer que ces coefficients satisfont aux relations suivantes

$$\frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta} = A' + C', \quad \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta} = B'^2 - 4A'C'.$$

Les quantités $A' + C'$ et $B'^2 - 4A'C'$, qui sont égales à $M + N$ et à $-4MN$, conservant des valeurs invariables pour tous les systèmes d'axes rectangulaires, il en résulte que les quantités

$$\frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta}$$

restent constantes par rapport à tous les systèmes d'axes obliques.

EXERCICES.

I. $$2x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 7y + 1 = 0.$$

La courbe est une ellipse, puisque la quantité $B^2 - 4AC$ est négative. Pour obtenir les coordonnées du centre, on égale à zéro les deux dérivées partielles,

$$4x - 3y + 1 = 0, \quad -3x + 6y - 7 = 0,$$

d'où
$$x = 1, \quad y = \frac{5}{3}, \quad F_1 = -\frac{13}{3}.$$

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au centre C (fig. 86), l'équation devient

$$2x_1^2 - 3x_1y_1 + 3y_1^2 - \frac{13}{3} = 0.$$

Faisons maintenant tourner les axes d'un angle α donné par la formule

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{B}{A - C} = 3.$$

L'équation résolue par les tables donne

$$2\alpha = 71^\circ 33' 54'', \quad \text{ou} \quad \alpha = 35^\circ 46' 57''.$$

On peut aussi obtenir l'angle α par une construction graphique; on porte sur les axes des x et des y, à partir de l'origine C, deux longueurs respectivement égales à 1 et 3 ; la diagonale du rectangle construit sur les deux longueurs fait avec l'axe des x un angle qui a pour tangente 3 ; l'axe CX' est donc la bissectrice de cet angle. On obtient ensuite M et N par les formules

$$M+N=5, \quad M-N=-\sqrt{10},$$

puisque B est négatif. Il en résulte

$$M=\frac{5-\sqrt{10}}{2}, \quad N=\frac{5+\sqrt{10}}{2},$$

et l'équation de la courbe devient

$$(5-\sqrt{10})\,x'^2+(5+\sqrt{10})\,y'^2=\frac{26}{3};$$

la courbe intercepte sur les axes des longueurs

$$CA=\sqrt{\frac{26}{3(5-\sqrt{10})}}, \quad CB=\sqrt{\frac{26}{3(5+\sqrt{10})}}.$$

II. $2x^2-5xy+5y-1=0$.

La courbe est une hyperbole (fig. 88). Les coordonnées du centre données par les équations

$$4x-5y=0,$$
$$-5x+5=0,$$

sont

$$x=1, \quad y=\frac{4}{5}, \quad \text{d'où} \quad F_1=1.$$

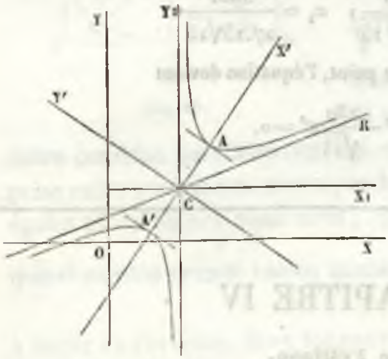


Fig. 88.

Si l'on transporte l'origine au centre, l'équation devient

$$2x_1^2-5x_1y_1+1=0.$$

L'angle α est donné par la formule $\tang 2\alpha=-\frac{5}{2}$, et l'on a $M+N=2$, $M-N=-\sqrt{29}$,

d'où

$$M=\frac{2-\sqrt{29}}{2}, \quad N=\frac{2+\sqrt{29}}{2}.$$

L'équation de la courbe rapportée à ses axes est

$$(2-\sqrt{29})\,x'^2+(2+\sqrt{29})\,y'^2+2=0.$$

L'équation primitive ne contenant pas de terme en y^2, l'une des asymptotes est parallèle à l'axe OY (fig. 80).

III. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 36x + 100 = 0$.

La courbe est une parabole (fig. 87). Les termes du second degré forment un carré parfait, et l'équation peut s'écrire

$$9\left(y - \frac{2}{3}x\right)^2 - 36x + 100 = 0.$$

Faisons tourner les axes des coordonnées de l'angle α donné par la formule $\tan\alpha = -\frac{B}{2C} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, d'où $\alpha = 34^\circ\, 41'\, 25''$, on aura

$$N = 13, \quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$P = -\frac{108}{\sqrt{13}}, \quad Q = \frac{72}{\sqrt{13}}.$$

L'équation de la courbe rapportée aux axes OX_1 et OY_1 est donc

$$13y_1^2 - \frac{108}{\sqrt{13}}x_1 + \frac{72}{\sqrt{13}}y_1 + 100 = 0.$$

On obtient les coordonnées du sommet en joignant à cette équation la suivante $26y_1 + \frac{72}{\sqrt{13}} = 0$. On en déduit

$$y_1 = -\frac{36}{13\sqrt{13}}, \quad x_1 = \frac{3901}{27.13\sqrt{13}}.$$

Si l'on transporte les axes en ce point, l'équation devient

$$13y'^2 - \frac{189}{\sqrt{13}}x' = 0.$$

CHAPITRE IV

De l'ellipse.

144—Proposons-nous de construire la courbe représentée par l'équation

$$Mx^2 + Ny^2 + F_1 = 0,$$

dans laquelle les deux coefficients M et N ont le même signe, par exemple le signe $+$.

Si la constante F_1 a une valeur positive, l'équation, ne pouvant être satisfaite par des valeurs réelles de x et de y, ne représente aucun lieu géométrique.

Si F_1 est égal à zéro, l'équation, n'étant satisfaite que par $x=0$, $y=0$, représente un seul point, l'origine O.

Examinons maintenant le cas où F_1 a une valeur négative, et posons $F_1=-H$, l'équation devient

$$Mx^2+Ny^2=H.$$

Résolue par rapport à y, elle donne

$$y=\pm\sqrt{\frac{H-Mx^2}{N}}.$$

Pour que l'ordonnée soit réelle, il est nécessaire et il suffit que la valeur numérique de l'abscisse soit plus petite que $\sqrt{\frac{H}{M}}$; portons sur l'axe X'X, à partir de l'origine, deux longueurs OA, OA' égales à $\sqrt{\frac{H}{M}}$ et par les points A, A' menons des parallèles à l'axe Y'Y, la courbe est située tout entière entre ces deux parallèles (fig. 89). A chaque abscisse OP, comprise entre ces limites, correspondent deux ordonnées PM, PM' égales et de signes contraires; quand $x=0$, l'ordonnée acquiert sa plus grande valeur numérique $\sqrt{\frac{H}{N}}$; portons sur Y'Y, à partir de l'origine, deux longeurs, OB, OB' égales à $\sqrt{\frac{H}{N}}$, et par les points B, B' menons deux parallèles à l'axe X'X, la courbe est située tout entière entre ces deux nouvelles parallèles, et, par conséquent, elle est renfermée dans le rectangle CDEF formé par les deux couples de parallèles.

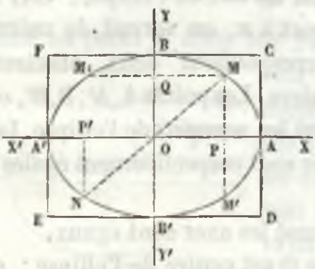


Fig. 89.

Si, pour abréger, on représente par a et b les deux quantités $\sqrt{\frac{H}{M}}$, $\sqrt{\frac{H}{N}}$, l'équation prend la forme

(1)
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$
d'où

(2)
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Quand x croît de o à a, la valeur numérique de y décroît de b à o, ce qui donne un arc de courbe BMA, et, à cause du double signe, l'arc égal B'M'A. Quand x varie de o à $-a$, la valeur numérique de y décroît encore de b à o, ce qui donne deux autres arcs BM_1A', B'NA' égaux aux premiers. Ces quatre arcs égaux forment l'ellipse.

La droite A'A est un *axe* de l'ellipse ; car à chaque abscisse OP correspondent deux ordonnées PM, PM' égales et de signes contraires. La droite B'B est aussi un *axe* de l'ellipse ; car, si on résolvait l'équation par rapport à x, on verrait de même qu'à chaque ordonnée OQ correspondent deux abscisses QM, QM_1 égales et de signes contraires. Les points A, A', B, B', où les axes rencontrent l'ellipse, sont les *sommets* de l'ellipse. Les longueurs A'A, B'B des deux axes sont respectivement égales à $2a$ et à $2b$.

L'ellipse devient un cercle quand les axes sont égaux.

Il est aisé de voir que l'origine O est centre de l'ellipse ; en effet, soient x, y les coordonnées d'un point quelconque M de l'ellipse ; il est évident que l'équation (1) est aussi satisfaite par les valeurs $-x, -y$; il existe, par conséquent, un second point N de l'ellipse qui a ses coordonnées $-$OP', $-$P'N respectivement égales aux coordonnées OP, PM du point M, mais de sens contraires ; les triangles OPM, OP'N sont égaux ; donc OM $=$ ON ; et la ligne MON est droite à cause des angles égaux POM, P'ON. Ainsi, les points M et N de l'ellipse sont deux à deux symétriques par rapport au point O ; donc le point O est centre de l'ellipse.

145 — Pour étudier comment varie la distance du centre aux différents points de l'ellipse, ou le rayon de l'ellipse, cherchons l'équation de l'ellipse, en coordonnées polaires, en prenant le centre O pour pôle et l'axe OA de la courbe pour axe polaire. Si dans l'équation (1) on remplace x et y par $\rho\cos\omega$

et $\rho \sin \omega$, on a

(3) $$\frac{\rho^2\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\omega}{b^2}=1.$$

Supposons $a>b$, et mettons l'équation sous la forme

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{a^2}+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\sin^2\omega.$$

Si l'on fait varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$, la quantité $\frac{1}{\rho^2}$ croît, et par conséquent ρ décroît constamment de a à b. Le maximum de ρ est a, le minimum b.

146 — Désignons par x et y les coordonnées d'un point quelconque du plan et considérons le polynôme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1.$$

Pour un point M situé sur l'ellipse (fig. 90), le polynôme est égal à zéro. Imaginons qu'un point mobile P parte du point M et s'éloigne sur le prolongement du rayon OM; les deux coordonnées x et y augmentant en valeur absolue, le polynôme va en croissant indéfiniment; il prend donc des valeurs positives de plus en plus grandes. Au contraire, si le point mobile se rapproche du centre, le polynôme diminue et prend des valeurs négatives.

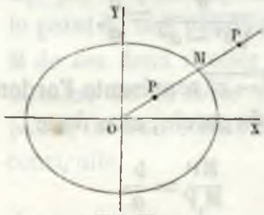


Fig. 90.

Ainsi le polynôme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ reste négatif pour tous les points situés à l'intérieur de l'ellipse, sur l'ellipse il est nul, et il devient positif pour tous les points situés en dehors de l'ellipse.

147 — *Les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'un des axes de l'ellipse sont proportionnels aux produits des segments correspondants formés sur cet axe.*

En effet, si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point quelconque M de l'ellipse (fig. 89), on a, en vertu de l'équation (2),

$$\frac{y^2}{a^2-x^2}=\frac{b}{a^2}, \text{ ou } \frac{y^2}{(a-x)\,(a+x)}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Mais les deux segments AP, A′P de l'axe AA′ sont égaux respectivement à $a-x$ et à $a+x$; on a donc

$$\frac{\overline{MP}^2}{AP \times A'P}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Ainsi le carré de l'ordonnée est au produit des segments formés sur l'axe dans un rapport constant.

148 — *Les ordonnées perpendiculaires au grand axe de l'ellipse sont aux ordonnées correspondantes du cercle décrit sur cet axe comme diamètre dans le rapport constant du petit axe au grand axe.*

Soit AA′ le grand axe de l'ellipse (fig. 91); sur ce grand axe comme diamètre décrivons un cercle; à l'ordonnée MP de l'ellipse correspond l'ordonnée M_1P du cercle. L'équation (2) s'écrit

Fig. 91.

$$\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{a},$$

mais $\sqrt{a^2-x^2}$ représente l'ordonnée M_1P du cercle; on a donc

$$\frac{MP}{M_1P}=\frac{b}{a}.$$

Le petit axe jouit de la même propriété; l'ordonnée MQ, perpendiculaire au petit axe, est à l'ordonnée correspondante M_2Q du cercle décrit sur cet axe comme diamètre dans le rapport constant du grand axe au petit axe.

L'ellipse est la projection orthogonale d'un cercle. Imaginons que l'on fasse tourner le cercle AB_1A' autour de l'axe AA′ d'un angle φ, tel que l'on ait $\cos\varphi=\frac{b}{a}$, l'ordonnée PM_1 du cercle tournera autour du point P, tout en restant perpendiculaire à l'axe AA′; dans cette position, elle se projettera sur la droite PM; pour avoir la longueur de la projection, il suffit de multiplier la longueur PM_1 par $\cos\varphi$ ou par $\frac{b}{a}$, ce qui donne l'ordonnée PM de l'ellipse. Ainsi le point M_1 du cercle a pour projection le point M de l'ellipse; chacun des points du cercle se projetant ainsi au point correspondant de l'ellipse, il s'ensuit que l'ellipse est la projection du cercle.

On peut aussi considérer le cercle comme la projection orthogonale d'une ellipse. Imaginons que l'on fasse tourner l'ellipse autour de l'axe BB' d'un angle φ ayant pour cosinus $\frac{b}{a}$, l'ordonnée QM de l'ellipse aura pour projection l'ordonnée QM_2 du cercle décrit sur BB' comme diamètre, et le petit cercle sera la projection de l'ellipse.

149 — *Construction de l'ellipse par points.* On déduit de ce qui précède un moyen très-simple de construire l'ellipse par points. Sur chacun des deux axes de l'ellipse comme diamètre on décrit un cercle (fig. 91); du centre on trace un rayon quelconque qui coupe les deux cercles en M_1 et M_2; par le point M_1 on mène une parallèle au petit axe, par le point M_2 une parallèle au grand axe; le point d'intersection M de ces deux droites appartient à l'ellipse. Après avoir déterminé de la sorte un nombre suffisant de points, on fait passer un trait continu par tous ces points, et l'ellipse est ainsi construite.

150 — *Construire les points d'intersection d'une ellipse et d'une droite.* Il est utile de savoir déterminer les points où une droite donnée MM' coupe une ellipse définie par ses deux axes AA', BB' (fig. 92), sans que l'ellipse soit tracée. Ainsi que nous l'avons dit, l'ellipse peut être considérée comme la projection orthogonale du cercle AB_1A' décrit sur le grand axe AA' comme diamètre, et que l'on fait tourner autour de AA' d'un angle φ ayant pour cosinus $\frac{b}{a}$. Cherchons dans le plan du cercle la droite M_1M_1', qui a pour projection MM' dans le plan de l'ellipse; soit N un point quelconque de la droite MM';

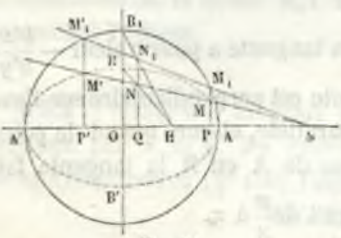


Fig. 92.

prolongeons la droite BN jusqu'à sa rencontre en H avec l'axe AA'; la droite B_1H se projette sur BH; par conséquent, le point N_1, où elle coupe l'ordonnée QN, se projette en N. On obtiendrait de même un autre point quelconque de la droite M_1M_1'; mais il est plus simple de se servir du point S où la droite MM' rencontre l'axe; la droite SN_1 a pour projection la droite donnée sur le plan de l'ellipse. Cette droite SN_1 coupe le cercle en deux points M_1, M_1'; les ordonnées M_1P, $M_1'P'$ détermineront sur la droite donnée les deux points M, M' où cette droite rencontre l'ellipse.

TANGENTE.

151 — Nous avons trouvé (nº 125) l'équation de la tangente à une courbe du second degré; quand l'équation de l'ellipse est mise sous la forme simple

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

l'équation de la tangente au point M, ayant pour coordonnées x et y, devient

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-1=0. \tag{4}$$

Le coefficient angulaire de la tangente a pour valeur $-\frac{b^2x}{a^2y}$. On voit qu'en A et A' la tangente est perpendiculaire sur l'axe A'A, qu'en B et B' elle lui est parallèle, et que, quand le point de contact se meut sur l'ellipse de A en B, la tangente fait avec A'A un angle obtus qui croît de $\frac{\pi}{2}$ à π.

La normale, étant perpendiculaire à la tangente, a pour équation

$$Y-y=\frac{a^2y}{b^2y}(X-x).$$

152 — *Construction de la tangente en un point de l'ellipse.*

Si dans l'équation de la tangente on fait $Y=0$, on obtient l'abscisse $X=\frac{a^2}{x}$ du point T où la tangente rencontre le prolongement du grand axe (fig. 93). Comme cette valeur de OT est indépendante du petit axe $2b$ et de l'ordonnée y du point de contact, il en résulte que, si sur l'axe A′A on construit plusieurs ellipses, les tangentes aux points qui ont même abscisse passent par un même point T situé sur le prolongement de l'axe A′A. Or, parmi ces ellipses, se trouve le cercle AB_1A'; pour construire la tangente à l'ellipse au point M, on mènera une tangente au cercle au point M_1, situé sur la même ordonnée; on joindra le point M au point T, où la tangente au cercle rencontre le prolongement de l'axe A′A; la droite MT, ainsi obtenue, est la tangente à l'ellipse.

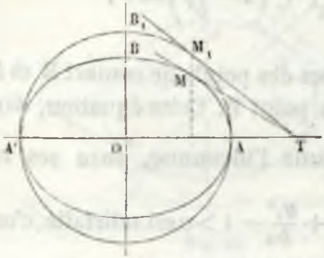


Fig. 93.

Cette construction revient à considérer la tangente à l'ellipse au point M comme la projection de la tangente au cercle au point correspondant M_1. En effet, quand on fait tourner le plan du cercle autour de l'axe AA′ de l'angle φ, le point T où la tangente M_1T rencontre l'axe reste immobile; le point M_1 se projetant en M, la droite M_1T a pour projection MT; c'est la tangente à l'ellipse.

153 — *Mener une tangente par un point extérieur* P. Désignons par x_1 et y_1 les coordonnées du point P (fig. 94). Nous avons trouvé (nº 126) l'équation de la corde des contacts MM′. La détermination des points de contact revient donc à la résolution des deux équations simultanées

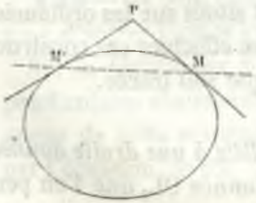


Fig. 94.

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

$$(5) \qquad \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

En éliminant y, on obtient l'équation du second degré

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)-2\frac{xx_1}{a^2}+\left(1-\frac{y_1^2}{b^2}\right)=0,$$

dont les racines sont les abscisses des points de contact M et M′ des deux tangentes menées du point P. Cette équation, dans laquelle on peut regarder $\frac{x}{a}$ comme l'inconnue, aura ses racines réelles si la condition $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1>0$ est satisfaite, c'est-à-dire si le point P est en dehors de l'ellipse.

Il est facile de construire géométriquement les tangentes menées du point P, en considérant l'ellipse comme la projection du cercle AB_1A (fig. 95). Cherchons dans le plan du cercle le point P_1 qui a pour projection le point P dans le plan de l'ellipse. Traçons dans le plan de l'ellipse la droite PB que nous prolongerons jusqu'à sa rencontre avec l'axe en H; la droite HB_1, ayant pour projection HB, passera par le point P_1 et déterminera ce point. Du point P_1 menons au cercle les tangentes P_1M_1, $P_1M'_1$ que nous prolongerons jusqu'à leur rencontre avec l'axe en T et T′; les droites PT, PT′,

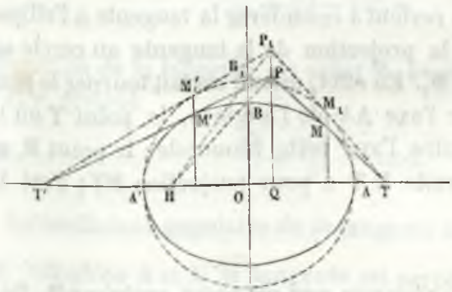


Fig. 95.

projections des tangentes au cercle, seront tangentes à l'ellipse, et les points de contact M et M′ seront situés sur les ordonnées des points M_1, M'_1. Pour que l'on puisse effectuer ces constructions, il n'est pas nécessaire que l'ellipse soit tracée.

154 — *Mener une tangente parallèle à une droite donnée.* Soit $y=mx$ l'équation de la droite donnée OL, que l'on peut supposer menée par le centre (fig. 96). Appelons x et y les coordonnées du point de contact M; ce point étant sur l'ellipse, on a l'équation

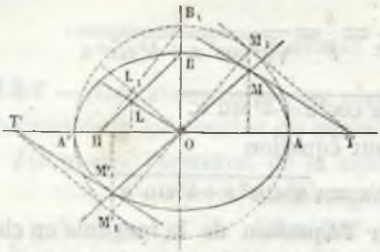


Fig. 96.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

le coefficient angulaire de la tangente devant être égal à m, on a la seconde équation

$$-\frac{b^2x}{a^2y}=m.$$

Ces deux équations simultanées déterminent les deux inconnues x et y; la première représente l'ellipse proposée; la seconde une droite MM′ passant par le centre; les points où cette droite rencontre l'ellipse sont les points de contact.

Il est facile de construire ces tangentes géométriquement. Cherchons d'abord dans le plan du cercle le diamètre OL_1 qui a pour projection OL sur le plan de l'ellipse; il suffit de joindre le point B à un point quelconque L de la droite OL et de prolonger la droite BL jusqu'à sa rencontre avec l'axe en H; puis de tracer B_1H et de prendre le point d'intersection L_1 de cette droite avec l'ordonnée du point L; le point L étant la projection du point L_1, la droite OL est la projection de OL_1. On mène au cercle des tangentes M_1T, $M_1'T'$, parallèles à OL_1, et par les points T et T′ où ces tangentes rencontrent l'axe, des parallèles TM, T′M′ à la droite OL. On a les tangentes demandées; car les projections OL, TM des droites parallèles OL_1, TM_1 sont elles-mêmes parallèles. Les points de contact M et M′ sont déterminés par les ordonnées des points M_1 et M_1'.

155 — On peut obtenir l'équation de la tangente à l'ellipse sous d'autres formes qu'il est bon de connaître.

Si l'on désigne par α l'angle que fait avec l'axe des x la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente et par p la longueur de cette perpendiculaire, la tangente sera représentée par l'équation (nº 83)

$$X\cos\alpha+Y\sin\alpha-p=0;$$

en identifiant avec l'équation (4), on a les relations

$$\frac{\frac{x}{a}}{a\cos\alpha}=\frac{\frac{y}{b}}{b\sin\alpha}=\frac{1}{p}=\frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}},$$

d'où

$$p=\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}.$$

Ainsi la tangente aura pour équation

$$(6)\qquad X\cos\alpha+Y\sin\alpha=\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}.$$

On peut encore trouver l'équation de la tangente en cherchant les points d'intersection de l'ellipse et d'une droite et exprimant que ces deux points coïncident, comme nous l'avons fait pour le cercle (n° 94). On obtient ainsi l'équation de la tangente sous la forme

$$(7)\qquad y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

156—Comme application, proposons-nous de trouver le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à l'ellipse. Supposons que l'on veuille mener par un point extérieur (fig. 97), ayant pour coordonnées x' et y', des tangentes à l'ellipse; la tangente devant passer par le point P, on aura l'équation de condition

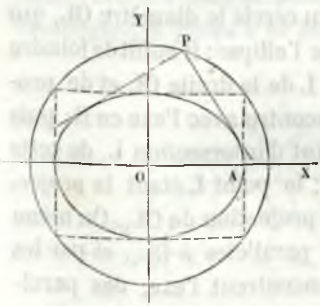


Fig. 97.

$$y'=mx'\pm\sqrt{a^2m^2+b^2},$$

dans laquelle le coefficient angulaire m est l'inconnue. Cette équation, mise sous forme entière,

$$m^2(a^2-x'^2)+2x'y'm+(b^2-y'^2)=0$$

est du second degré; ses deux racines donnent les directions des deux tangentes menées du point P à l'ellipse, et, par conséquent, déterminent ces tangentes. Les deux tangentes menées par le point P seront rectangulaires, si le produit des deux valeurs de m est égal à -1, ce qui exige que les coordonnées du point P vérifient la relation

$$\frac{b^2-y'^2}{a^2-x'^2}=-1,\quad\text{ou}\quad x'^2+y'^2=a^2+b^2.$$

Ainsi le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à l'ellipse est le cercle circonscrit au rectangle construit sur les axes.

DIAMÈTRES.

157 — Nous avons trouvé (nº 131) l'équation générale des diamètres dans les courbes du second degré. En représentant par $f(x,y)=0$ l'équation de la courbe, et par m le coefficient angulaire des cordes parallèles MM′ (fig. 98), nous avons vu que l'équation du diamètre DD′ se met sous la forme

Fig. 98.

$$f'_x + mf'_y = 0.$$

L'ellipse étant rapportée à ses axes, l'équation du diamètre se réduit à

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2my}{b^2} = 0, \quad \text{ou} \quad y = -\frac{b^2}{a^2 m}x.$$

Si l'on désigne par m' le coefficient angulaire du diamètre DD′, on a, entre la direction des cordes et celle du diamètre, la relation

$$(8) \qquad mm' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Nous avons vu aussi que si l'on mène des cordes MM″ parallèles au diamètre DD′, le diamètre EE′ qui divise ces cordes en deux parties égales a pour coefficient angulaire m ; les deux diamètres DD′, EE′ forment un système de diamètres conjugués, et leurs coefficients angulaires m' et m sont liés par la relation (8).

Cette relation fait voir que les deux coefficients angulaires m et m' sont de signes contraires, et, par conséquent, que les deux demi-diamètres conjugués OD et OE, situés d'un même côté du grand axe, sont placés de part et d'autre du petit axe; si le premier part de la position OA et tourne de OA vers OB, le second part de la position OB et tourne de OB vers OA′.

158 — La tangente en un point quelconque D de l'ellipse est parallèle au diamètre EE′ conjugué du diamètre DD′ qui passe au point de contact. En effet, si l'on appelle x et y les coordonnées du point D, le diamètre OD a pour coefficient angulaire $m = \frac{y}{x}$; le coefficient angulaire de la tangente au point D est $m' = -\frac{b^2x}{a^2y}$; on voit que ces deux coefficients vérifient la relation $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$.

On se rend bien compte de cette propriété en imaginant que la sécante MM′ se meuve parallèlement au diamètre EE′, et s'éloigne du centre; les deux points d'intersection M et M′ se rapprochent de plus en plus du milieu de la corde, et finissent par se confondre en D; alors la sécante devient tangente au point D.

159—Les propriétés des diamètres conjugués se montrent immédiatement, quand on considère l'ellipse comme la projection d'un cercle. Deux diamètres rectangulaires OD_1, OE_1 (fig. 99), dans le plan du cercle, forment un système de diamètres conjugués; car chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre; les cordes parallèles se projettent sur le plan de l'ellipse suivant des cordes parallèles; le milieu d'une corde a pour projection le milieu de la projection de la corde; chacun des diamètres OD et OE, projections des premiers, divise donc en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre; ce sont deux diamètres conjugués de l'ellipse.

Fig. 99.

On en déduit facilement la relation qui existe entre les coefficients angulaires m et m' de deux diamètres conjugués. Si l'on appelle m_1 et m'_1 les coefficients angulaires des deux diamètres conjugués OD_1, OE_1 du cercle, on a $m = \frac{b}{a}m_1$, $m' = \frac{b}{a}m'_1$; d'où $mm' = \frac{b^2}{a^2}m_1m'_1$; puisque les diamètres conjugués du cercle sont rectangulaires on a $m_1m'_1 = -1$; il en résulte $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$.

Quand on donne un diamètre OD, on peut trouver le conjugué OE, sans que l'ellipse soit tracée. On construira le diamètre OD_1 qui a pour projection OD ; on mènera le diamètre OE_1 perpendiculaire à OD_1 et on projettera OE_1 ; la projection OE sera le diamètre demandé.

160 — *Ellipse rapportée à deux diamètres conjugués.* Nous avons vu (n° 138) que, lorsqu'on prend pour axes des coordonnées deux diamètres conjugués DD′, EE′ (fig. 100) d'une ellipse, l'équation de la courbe se simplifie et prend la forme

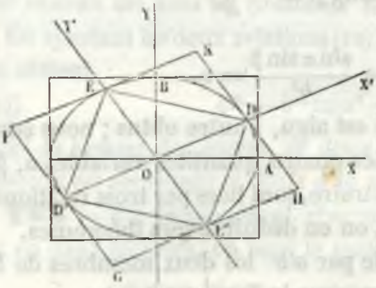


Fig. 100.

$$Mx'^2 + Ny'^2 = H.$$

Désignons par $2a'$ et $2b'$ les longueurs de ces diamètres conjugués; si, dans l'équation précédente, on fait successivement $y = 0$ et $x = 0$, on a $a'^2 = \frac{H}{M}$, $b'^2 = \frac{H}{N}$, ce qui permet d'écrire l'équation de la courbe de la manière suivante

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1. \tag{9}$$

Ainsi l'équation de l'ellipse conserve la même forme, que la courbe soit rapportée à ses axes ou à un système de diamètres conjugués.

Les calculs qui ont été effectués pour démontrer les propriétés de l'ellipse, au moyen de l'équation de la courbe rapportée à ses axes, et dans lesquels on n'a pas supposé les coordonnées orthogonales, pourront être répétés avec l'équation de la courbe rapportée à un système de diamètres conjugués. Ainsi, l'ellipse étant rapportée au système des diamètres conjugués OD et OE, la tangente aura pour équation

$$\frac{xX'}{a'^2} + \frac{y'Y'}{b'^2} = 1.$$

Mais l'équation de la normale ne conserverait pas la forme qui correspond aux axes de coordonnées OA et OB.

161 — Si l'on appelle α et β les angles que font les deux demi-diamètres OD, OE avec le grand axe OA, a' et b' leurs longueurs, on a, d'après l'équation (3) du nº 145,

$$(9)\quad \frac{a'^2\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{a'^2\sin^2\alpha}{b^2}=1,\qquad (10)\quad \frac{b'^2\cos^2\beta}{a^2}+\frac{b'^2\sin^2\beta}{b^2}=1.$$

Les deux diamètres étant conjugués, on a, en outre, la relation

$$\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta=-\frac{b^2}{a^2},$$

ou

$$(11)\qquad \frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2}=0.$$

Des deux angles α et β, l'un est aigu, l'autre obtus ; nous supposerons α aigu, β obtus. Les quatre quantités variables α, β, a', b', dont une seule est arbitraire, sont liées par trois relations; en combinant ces relations, on en déduit divers théorèmes.

162 — Si l'on multiplie par $a'b'$ les deux membres de la relation (11), on peut l'écrire sous la forme suivante

$$\frac{\dfrac{a'\cos\alpha}{a}}{\dfrac{b'\sin\beta}{b}}=\frac{\dfrac{a'\sin\alpha}{b}}{\dfrac{-b'\cos\beta}{a}};$$

chacune de ces fractions est égale à une fraction ayant pour numérateur la racine carrée de la somme des carrés des numérateurs, et pour dénominateur la racine carrée de la somme des carrés des dénominateurs ; en vertu des relations (9) et (10), ces deux sommes sont égales à l'unité ; on a donc

$$\frac{\dfrac{a'\cos\alpha}{a}}{\dfrac{b'\sin\beta}{b}}=\frac{\dfrac{a'\sin\alpha}{b}}{\dfrac{-b'\cos\beta}{a}}=\pm 1;$$

l'angle α étant aigu, il faut prendre le signe plus. On en déduit

$$\frac{a'\cos\alpha}{a}=\frac{b'\sin\beta}{b},\quad \frac{a'\sin\alpha}{b}=-\frac{b'\cos\beta}{a}.$$

Si, dans la relation (9) on remplace $\dfrac{a'\sin\alpha}{b}$ par la quantité égale $-\dfrac{b'\cos\beta}{a}$, il vient

$$(12)\qquad a'^2\cos^2\alpha+b'^2\cos^2\beta=a^2.$$

Si, dans la même relation, on remplace $\frac{a'\cos\alpha}{a}$ par la quantité égale $\frac{b'\sin\beta}{b}$, on a aussi

$$a'^2\sin^2\alpha + b'^2\sin^2\beta = b^2. \tag{13}$$

Les deux relations (12) et (13) signifient que *la somme des carrés des projections de deux diamètres conjugués quelconques sur chacun des axes est constante et égale au carré de cet axe.*

En ajoutant les deux relations (12) et (13) membre à membre, on obtient

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2; \tag{14}$$

ainsi *la somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est constante et égale à la somme des carrés des axes.*

163 — En décomposant chacun des termes de la relation (9) en deux facteurs, on peut la mettre sous la forme

$$\frac{a'\cos\alpha}{a}\cdot\frac{a'\cos\alpha}{a}+\frac{a'\sin\alpha}{b}\cdot\frac{a'\sin\alpha}{b}=1;$$

si l'on remplace les seconds facteurs $\frac{a'\cos\alpha}{a}$, $\frac{a'\sin\alpha}{b}$ par les quantités égales $\frac{b'\sin\beta}{b}$, $-\frac{b'\cos\beta}{a}$, il vient

$$\frac{a'b'(\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta)}{ab}=1,$$

ou

$$a'b'\sin(\beta-\alpha)=ab. \tag{15}$$

Le produit $a'b'\sin(\beta-\alpha)$ est la mesure de l'aire du parallélogramme ODKE (fig. 100); en multipliant par 4, on obtient l'aire du parallélogramme circonscrit FGHK. Ainsi, *l'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques est constante et égale au rectangle construit sur les axes.*

Le parallélogramme inscrit DED'E', qu'on obtient en joignant les extrémités des diamètres conjugués, est la moitié du précédent, et a aussi une aire constante.

164 — On peut démontrer facilement ces théorèmes en considérant l'ellipse comme la projection d'un cercle.

Deux diamètres conjugués OD et OE de l'ellipse sont les projections de deux diamètres rectangulaires OD_1 et OE_1 du cercle (fig. 99). Les angles D_1OP, E_1OQ étant complémentaires, les triangles rectangles D_1OP, E_1OQ sont égaux, et l'on a $OQ = D_1P$; mais $\overline{OP}^2 + \overline{D_1P}^2 = \overline{OD_1}^2 = a^2$; il en résulte

$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = a^2.$$

Les longueurs OP et OQ étant les projections des deux demi-diamètres conjugués OD et OE sur le grand axe de l'ellipse, on voit que la somme des carrés de ces deux projections est constante, et l'on a

$$a'^2 \cos^2\alpha + b'^2 \cos^2\beta = a^2.$$

Il en est de même pour l'autre axe ; les projections des deux demi-diamètres conjugués sur le petit axe sont égales aux ordonnées DP et EQ ; mais $DP = \frac{b}{a} D_1P$, $EQ = \frac{b}{a} E_1Q$, et, par suite, $\overline{DP}^2 + \overline{EQ}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\overline{D_1P}^2 + \overline{E_1Q}^2)$; les longueurs E_1Q et OP étant égales, on a $\overline{D_1P}^2 + \overline{E_1Q}^2 = \overline{D_1P}^2 + \overline{OP}^2 = a^2$, et, par suite,

$$\overline{DP}^2 + \overline{EQ}^2 = b^2,$$

ou

$$a'^2 \sin^2\alpha + b'^2 \sin^2\beta = b^2.$$

En ajoutant membre à membre les deux relations précédentes, on obtient la relation

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

165 — Pour démontrer la propriété relative à l'aire du parallélogramme, nous nous servirons du théorème suivant :

La projection d'une aire plane sur un plan quelconque est égale à l'aire projetée multipliée par le cosinus de l'angle des deux plans.

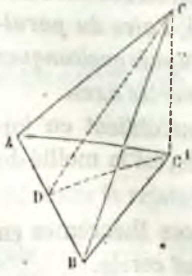


Fig. 101.

Considérons d'abord un triangle ABC (fig. 101) ayant un côté AB parallèle au plan de projection ; nous pouvons supposer que le plan de projection passe par ce côté AB ; du sommet C abaissons sur ce plan une perpendiculaire CC′, et, dans ce plan, menons C′D perpendiculaire à AB ; la droite CD sera aussi perpendiculaire à AB et l'angle CDC′ mesurera l'angle dièdre φ des deux plans. Cela posé, on a

$$C'D = CD \cos\varphi,$$

d'où
$$\frac{AB \times C'D}{2} = \frac{AB \times CD}{2} \cos\varphi,$$

et, par suite,
$$AC'B = ACB \times \cos\varphi.$$

Ainsi l'aire du triangle AC'B est égale à celle du triangle ACB multipliée par $\cos\varphi$.

Supposons maintenant que le triangle ABC (fig. 102) n'ait aucun de ses côtés parallèle au plan de projection; nous pouvons faire passer ce plan par le sommet A, de telle sorte que les deux autres sommets soient d'un même côté; le plan du triangle prolongé coupe le plan de projection suivant une droite AI, et la droite CB perce ce plan au point I; les triangles AIC, AIB se projettent suivant AIC', AIB', et l'on a, d'après ce qui a été dit,

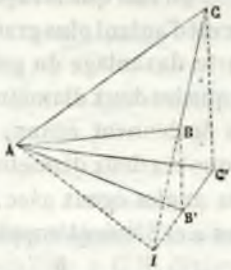


Fig. 102.

$$AIC' = AIC \times \cos\varphi,$$
$$AIB' = AIB \times \cos\varphi;$$

d'où, par soustraction,

$$AB'C' = ABC \times \cos\varphi.$$

Le théorème, étant démontré pour un triangle, s'étend à un polygone plan, que l'on peut toujours décomposer en triangles, et même à une aire plane limitée par une courbe fermée quelconque; car on peut regarder cette aire plane comme la limite de l'aire d'un polygone inscrit, dont on augmente indéfiniment le nombre des côtés de manière que chacun tende vers zéro.

Quand on considère l'ellipse comme la projection d'un cercle, le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est la projection d'un carré circonscrit au cercle; le carré ayant une aire constante égale à $4a^2$, celle du parallélogramme est aussi constante et égale à $4a^2 \cos\varphi$, c'est-à-dire à $4ab$.

AIRE DE L'ELLIPSE.

166 — Le même théorème nous donne immédiatement l'aire de l'ellipse. L'ellipse étant la projection d'un cercle, son aire est égale à celle du cercle πa^2, multipliée par cos φ ou par $\frac{b}{a}$, ce qui donne πab.

DIAMÈTRES CONJUGUÉS ÉGAUX.

167 — Nous avons vu (nº 157) que les deux demi-diamètres conjugués OD et OE sont situés de part et d'autre du petit axe OB (fig. 103). On sait que le rayon de l'ellipse est d'autant plus grand qu'il s'écarte davantage du petit axe; pour que les deux diamètres conjugués deviennent égaux, il faut donc que ces deux diamètres fassent des angles égaux avec le petit axe OB, ce qui exige que les angles α et β soient supplémentaires. On a donc $\tang^2\alpha = \frac{b^2}{a^2}$ et par suite, $\tang \alpha = \frac{b}{a}$; ainsi les diamètres conjugués égaux OG et OH coïncident avec les diagonales du rectangle construit sur les axes.

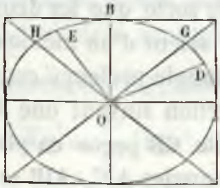


Fig. 103.

De la relation $a'^2 + b'^2 = a^2 + b_2$, on déduit $a'^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$, et l'équation de l'ellipse, rapportée à ses diamètres conjugués égaux, devient

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2+b^2}{2};$$

elle a même forme que l'équation du cercle, seulement les coordonnées sont obliques.

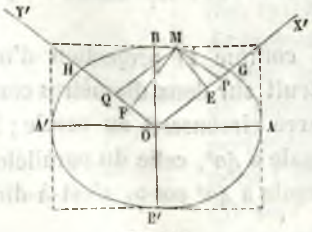


Fig 104.

Cette équation signifie que la somme des carrés des distances de chacun des points de l'ellipse aux deux diamètres conjugués égaux est constante. En effet, soient θ l'angle des deux diamètres conjugués égaux, MP et MQ les coordonnées du point M, ME et MF les perpendiculaires abaissées du point M sur ces diamètres, on a (fig. 104) $ME = y' \sin\theta$, $MF = x' \sin\theta$; d'où

$$\overline{ME}^2 + \overline{MF}^2 = (x'^2 + y'^2) \sin^2\theta = \frac{(a^2+b^2)\sin^2\theta}{2} = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

CORDES SUPPLÉMENTAIRES.

168—On appelle *cordes supplémentaires* dans l'ellipse deux cordes MC, MC', qui, partant d'un même point de d'ellipse, aboutissent aux extrémités d'un diamètre CC' (fig. 105).

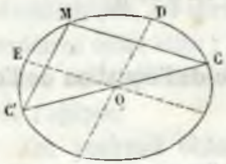


Fig. 105.

Deux cordes supplémentaires sont parallèles à deux diamètres conjugués. Menons, en effet, les diamètres OD et OE parallèles aux cordes supplémentaires MC', MC. Dans le triangle CMC', la droite OD parallèle à C'M divise en parties proportionnelles les deux côtés CC' et CM; le centre O étant le milieu de CC', il en résulte que le diamètre OD divise en deux parties égales la corde CM, et, par suite, toutes les cordes parallèles au diamètre OE. De même, le diamètre OE divise en deux parties égales la corde C'M, et, par suite, toutes les cordes parallèles à OD. Donc les deux diamètres OD et OE, parallèles aux cordes supplémentaires MC', MC, sont conjugués.

Réciproquement, si par les extrémités d'un diamètre CC' on mène des droites parallèles à deux diamètres conjugués OD et OE, ces droites se couperont sur l'ellipse. En effet, soit M le point où la corde CM, parallèle à OE, rencontre l'ellipse; joignons C'M; les cordes supplémentaires MC, MC' étant parallèles à deux diamètres conjugués, la seconde corde C'M sera parallèle à OD.

169—L'étude de la variation de l'angle de deux diamètres conjugués est ainsi ramenée à l'étude de la variation de l'angle de deux cordes supplémentaires, c'est-à-dire de l'angle inscrit dans une demi-ellipse. Pour simplifier le calcul, on supposera les deux cordes supplémentaires menées par les extrémités du grand axe (fig. 106). L'angle AMA′, que nous appellerons θ, est égal à la différence des deux angles MAX, MA′X ; les deux droites AM et A′M ayant pour coefficients angulaires $\frac{y}{x-a}$ et $\frac{y}{x+a}$, on a

Fig. 106.

$$\tang \theta = \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1 + \frac{y^2}{x^2 - a^2}} = \frac{2\,ay}{x^2 + y^2 - a^2},$$

et, en remplaçant x_2 par sa valeur tirée de l'équation de l'ellipse,

$$\tang \theta = -\frac{2\,ab^2}{(a^2 - b^2)\,y}.$$

Si le point M décrit la moitié supérieure AMA′ de l'ellipse, la tangente étant négative, l'angle θ est obtus ; quand le point M est au point A, c'est-à-dire quand $y = 0$, l'angle est droit ; le point M marchant de A vers B, y augmente ; la valeur absolue de tang θ diminuant, l'angle obtus θ augmente aussi et acquiert sa valeur maximum au point B ; alors on a $y = b$ et $\tang\theta = -\frac{2\,ab}{a^2 - b^2}$; quand le point M dépasse le point B et parcourt le quart d'ellipse BA′, l'angle θ diminue de sa valeur maximum jusqu'à un angle droit.

Il résulte de là que l'angle des demi-diamètres conjugués OD et OE, situés d'un même côté du grand axe, est obtus et varie depuis un angle droit jusqu'à la valeur maximum ABA′ ; les diamètres conjugués, qui comprennent l'angle maximum, étant respectivement parallèles aux cordes supplémentaires A′B et AB, et, par suite, également inclinés de part et d'autre du petit axe OB, sont égaux.

Nous avons étudié la variation de l'angle obtus DOE de deux diamètres conjugués, l'angle aigu DOE′ varie en sens inverse.

On obtient directement cet angle en menant les cordes supplémentaires par les extrémités du petit axe BB′ ; quand le point M décrit le quart d'ellipse BA, l'angle inscrit diminue depuis un angle droit jusqu'au minimum BAB′, supplémentaire du maximum obtus ABA′.

170 — Lorsqu'une ellipse est tracée, on peut déterminer graphiquement le centre et les axes. Pour trouver le centre, on mènera deux cordes parallèles suffisamment écartées l'une de l'autre ; on joindra les milieux de ces cordes, ce qui donnera un diamètre dont le milieu sera le centre. Si sur ce diamètre on décrit un demi-cercle, et que l'on joigne aux deux extrémités du diamètre le point où ce demi-cercle coupe la demi-ellipse, on aura deux cordes supplémentaires perpendiculaires entre elles ; les diamètres parallèles, formant un système de diamètres conjugués rectangulaires, seront les axes de l'ellipse.

On pourrait obtenir de la même manière les deux systèmes de diamètres conjugués qui font entre eux un angle donné compris entre le minimum et le maximum ; il suffirait de décrire sur un diamètre un segment capable de l'angle donné.

171 — *Construire une ellipse, étant donnés deux diamètres conjugués.* Soient DD′, EE′ (fig. 107) les deux diamètres conjugués donnés, dont nous désignerons les longueurs par $2a'$ et $2b'$. L'équation de l'ellipse, rapportée à ces deux diamètres conjugués, est

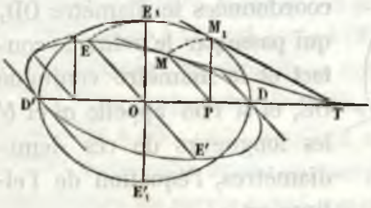


Fig. 107.

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

Par le centre menons la droite $E_1E'_1$ perpendiculaire à DD′ et prenons $OE_1 = OE$; l'ellipse qui a pour axes DD′, $E_1E'_1$, rapportée à ces axes, est représentée par la même équation. Il en résulte que les ordonnées MP, M_1P, qui correspondent à une même abscisse OP, sont égales entre elles. Imaginons que, par le procédé indiqué au nº 149, on ait construit différents points de l'ellipse DE_1D', dont on connaît les axes ; soit M_1 l'un de ces points, M_1P son ordonnée ; si par le point P on mène PM parallèle à OE et égale à PM_1, on aura un point M de l'ellipse demandée. Chaque point de la première ellipse donnera un point correspondant de la seconde. Ceci revient à déformer la première ellipse en faisant tourner chaque ordonnée PM_1 autour de son pied P d'un angle constant.

Le même mode de transformation s'applique à la tangente. La tangente au point M est représentée par l'équation

$$\frac{xX}{a'^2}+\frac{yY}{b'^2}=1$$

en coordonnées obliques ; cette équation représente aussi la tangente au point M_1 en coordonnées rectangulaires. Ces deux tangentes coupent le prolongement du diamètre DD' au même point T, dont on obtient l'abscisse en faisant $Y=0$.

Au lieu de construire l'ellipse par points, comme nous l'avons expliqué, on pourrait déterminer d'abord les axes de l'ellipse, et construire ensuite cette ellipse au moyen de ses axes. La détermination des axes dépend du théorème suivant.

172 — *Deux diamètres conjugués quelconques déterminent sur une tangente fixe* PQ *deux segments* DP, DQ, *dont le produit est constant et égal au carré du demi-diamètre* OE *parallèle à la tangente* (fig. 108).

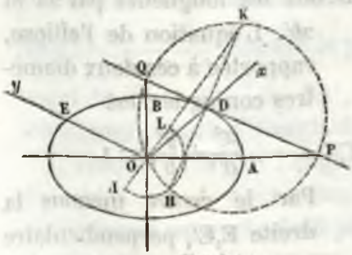


Fig. 108.

Si l'on prend pour axes des coordonnées le diamètre OD, qui passe par le point de contact et le diamètre conjugué OE, et si l'on appelle a' et b' les longueurs de ces demi-diamètres, l'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

Soient $\qquad y=mx, \quad y=m'x$

les équations de deux diamètres conjugués OA, OB ; d'après la remarque faite au n° 160, les coefficients angulaires seront liés par la relation $mm' = -\frac{b'^2}{a'^2}$. Si, dans ces équations, on fait $x = a'$, on trouve $DP = -ma'$, $DQ = m'a'$; d'où

$$DP \times DQ = -mm'a'^2 = b'^2.$$

173 — On démontre facilement ce théorème quand on considère l'ellipse comme la projection d'un cercle. Soient OA_1, OB_1 (fig. 109) deux diamètres rectangulaires du cercle, P_1Q_1 la tangente en un point quelconque M_1 ; menons le rayon OM_1 et le rayon ON_1 parallèle à la tangente ; dans le triangle rectangle P_1OQ_1, on a

$$M_1P_1 \times M_1Q_1 = OM_1^2 = ON_1^2.$$

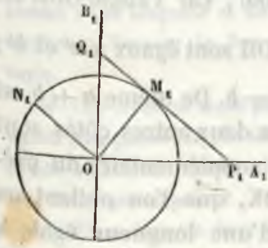


Fig. 109.

Quand on projette la figure, les diamètres OA_1, OB_1 donnent deux diamètres conjugués de l'ellipse, la tangente P_1Q_1 une tangente à l'ellipse et la droite ON_1 une parallèle à cette tangente ; les droites M_1P_1, M_1Q_1, ON_1, étant parallèles, ont des projections MP, MQ, ON qui leur sont proportionnelles ; on a donc aussi entre ces projections la relatio

$$MP \cdot MQ = ON^2.$$

174 — Supposons que les deux diamètres conjugués OA et OB soient les axes de l'ellipse (fig. 108). Le cercle décrit sur PQ comme diamètre passe par le point O, et l'ordonnée DH, perpendiculaire à PQ, est égale à OE. Il en résulte un moyen facile de construire les directions des axes, quand on connaît deux diamètres conjugués OD et OE. Par le point D on mènera une parallèle à OE ; cette parallèle sera tangente au point D ; on élèvera sur cette droite une perpendiculaire DH égale à OE, et on décrira un cercle ayant son centre sur PQ et passant par les points O et H ; les droites OP et OQ qui vont du centre aux deux points P et Q, où le cercle coupe la tangente, donneront les directions des axes.

175 — Il reste à déterminer les grandeurs des axes. Des relations

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2, \quad ab = a'b' \sin\theta,$$

démontrées aux nos 162 et 163, on déduit

$$(a-b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\theta = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

$$(a+b)^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin\theta = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right).$$

Comme on peut supposer que θ désigne l'angle aigu des diamètres conjugués, on voit par ces formules que la longueur $a-b$ est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés sont égaux à a' et à b' et dont l'angle compris est $\frac{\pi}{2}-\theta$. Ce triangle est le triangle ODH (fig. 108) ; car l'angle ODH est égal à $\frac{\pi}{2}-\theta$, et les deux côtés DO et DH sont égaux à a' et b' ; ainsi le troisième côté OH donnera $a-b$. De même $a+b$ est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés sont égaux à a' et à b' et l'angle compris supplémentaire du précédent ; ce triangle est le triangle ODK, que l'on obtient en prolongeant la perpendiculaire DH d'une longueur égale à elle-même ; le troisième côté OK donnera $a+b$. Si du point O comme centre, avec OH pour rayon, on décrit un cercle, la longueur KI sera égale au grand axe $2a$, la longueur KL au petit axe $2b$.

On peut remarquer que le grand axe OA est la bissectrice de l'angle HOK, le petit axe la bissectrice de l'angle supplémentaire.

EXERCICES.

1° Trouver le lieu des sommets des parallélogrammes construits sur les diamètres conjugués d'une ellipse.

2° Trouver le lieu du milieu des cordes menées par un même point dans une ellipse.

3° Une corde d'un cercle se meut parallèlement à elle-même ; par les extrémités on mène des droites parallèles à deux directions données ; trouver le lieu du point de rencontre des parallèles.

4° Parmi tous les parallélogrammes circonscrits à une même ellipse, les parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués ont une aire minimum.

5° Parmi tous les parallélogrammes inscrits dans une même ellipse, ceux dont les diagonales forment un système de diamètres conjugués ont une aire maximum.

6° De toutes les ellipses inscrites dans un même parallélogramme, quelle est la plus grande ?

7° De toutes les ellipses circonscrites à un même parallélogramme, quelle est la plus petite ?

8° Parmi tous les systèmes de diamètres conjugués de l'ellipse, les axes forment une somme minimum et les diamètres conjugués égaux une somme maximum.

9° Inscrire dans l'ellipse une corde de direction donnée telle que la somme de sa longueur et de la distance de son point milieu au centre soit maximum. Trouver le lieu du milieu de cette corde, quand la direction varie.

10° Une droite se meut parallèlement à elle-même dans le plan de deux autres ; on prend sur elle un point tel que la somme des carrés de ses distances aux intersections avec les droites fixes soit constante : quel est le lieu décrit par le point ?

11° Étant données deux ellipses quelconques, on peut déterminer deux directions parallèles à la fois à deux diamètres conjugués de l'une et de l'autre ellipse ; par les points communs aux deux courbes passe une troisième ellipse dans laquelle les diamètres conjugués égaux seront parallèles à ces deux directions.

12° Une ellipse tourne autour de son centre ; aux points où elle coupe une droite fixe on mène des tangentes à la courbe ; trouver le lieu du point d'intersection de ces tangentes.

13° On donne un cercle et une droite fixe passant par son centre ; une droite mobile égale au rayon s'appuie par une de ses extrémités sur le cercle, par l'autre sur la droite ; trouver le lieu décrit par un point de la droite mobile.

14° Trouver l'aire de l'ellipse définie par l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1.$$

15° Un triangle étant inscrit dans une ellipse, si on appelle R le rayon du cercle circonscrit, et d, d', d'' les demi-diamètres parallèles aux côtés, on a $R = \dfrac{d\,d'd''}{ab}$.

16° Un rectangle quelconque étant circonscrit à une ellipse, le parallélogramme qui a pour sommets les points de contact a un périmètre constant, et deux côtés consécutifs font avec la tangente des angles égaux.

17° A partir d'un point quelconque d'une ellipse on porte sur la normale une longueur égale à $\frac{k^2}{p}$, k étant une constante et p la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente ; trouver le lieu de l'extrémité de cette droite.

CHAPITRE V.

De l'Hyperbole.

176—Construisons maintenant le lieu défini par l'équation

$$Mx^2+Ny^2+F_1=0,$$

dans laquelle M et N ont des signes contraires. Nous supposerons M positif, N négatif et égal à $-N'$. Si F_1 est égal à zéro, l'équation

$$Mx-N'y^2=0,$$

résolue par rapport à y, donne

$$y=\pm\sqrt{\frac{M}{N'}}x\,;$$

elle représente deux droites passant à l'origine. Le cas où F_1 est positif se ramène au cas où F_1 est négatif par la permutation des axes, ce qui revient à remplacer dans l'équation y par x et x par y ; nous poserons donc $F_1=-H$; l'équation prend la forme

$$Mx^2-N'y^2=H,$$

M, N' et H étant des constantes positives.

A chaque valeur de x correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires ; l'axe des x est donc un axe de symétrie de la courbe ; il en est de même de l'axe des y. On en conclut que l'origine est centre de la courbe ; on peut démontrer cette dernière propriété en observant que si l'équation est vérifiée par les coordonnées x et y d'un point, elle est vérifiée également par les coordonnées $-x$ et $-y$ du point symétrique.

177 — En résolvant l'équation par rapport à y, on obtient

$$y=\pm\sqrt{\frac{Mx^2-H}{N'}}.$$

Pour que y soit réelle, il faut que la valeur numérique de x soit supérieure à $\sqrt{\frac{H}{M}}$. Portons donc sur l'axe X'X, à partir de l'origine, deux longueurs, OA, OA' égales à $\sqrt{\frac{H}{M}}$, et, par les points A et A', menons des parallèles à OY (fig. 110); la courbe n'a aucun point entre ces deux parallèles. Quand $x = \text{OA}$, l'ordonnée y est nulle, ce qui donne le point A; si l'on fait croître x indéfiniment à partir de OA, la valeur numérique de y croît aussi indéfiniment à partir de zéro; on a ainsi deux arcs infinis AD et AD'.

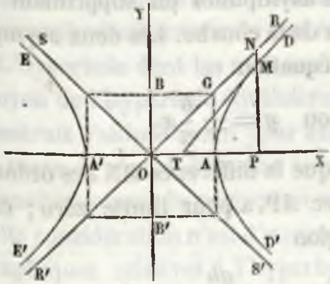


Fig. 110.

En faisant varier x depuis $-\text{OA}'$ à $-\infty$, on obtient deux autres arcs infinis A'E, A'E', symétriques des précédents par rapport à OY. Ces quatre arcs constituent les deux branches de l'hyperbole, qui admettent pour axes de symétrie les deux droites X'X, Y'Y. Le premier de ces axes rencontre seul la courbe, on l'appelle axe *transverse*; le second est l'axe *non transverse* ou *imaginaire*; les points A et A' sont les deux sommets de la courbe. Si l'on pose, pour abréger, $a = \sqrt{\frac{H}{M}}$, $b = \sqrt{\frac{H}{N}}$, l'équation se met sous la forme

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Les dimensions de l'hyperbole dépendent uniquement des deux lignes a et b; on dit que ces deux paramètres sont les longueurs des demi-axes de la courbe, le premier est le demi-axe réel, le second le demi-axe imaginaire.

178 — *Les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'axe transverse sont proportionnels aux produits des segments correspondants formés sur cet axe.*

En effet, de l'équation (1) on déduit

$$\frac{y^2}{x^2 - a^2} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{(x+a)(x-a)} = \frac{b^2}{a^2},$$

donc
$$\frac{\overline{MP}^2}{A'P \times AP} = \frac{b^2}{a^2}.$$

179 — *Asymptotes.* — Nous avons vu (nº 130), que, quand l'origine des coordonnées coïncide avec le centre de l'hyperbole, on obtient l'équation des asymptotes en supprimant le terme constant dans l'équation de la courbe. Les deux asymptotes RR′, SS′ auront ici pour équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \text{ou} \quad y = \pm \frac{b}{a} x.$$

On peut vérifier aisément que la différence MN des ordonnées de la droite OR et de l'arc AP a pour limite zéro ; car cette différence a pour expression

$$\frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

L'arc AD est compris dans l'angle ROX et se rapproche indéfiniment de la droite OR, qui est son asymptote. Les droites OR′, OS, OS′ sont de même les asymptotes des arcs A′E′, A′E, AD′. D'après l'équation (2), on voit que les asymptotes R′R, S′S sont les diagonales du rectangle construit sur les axes.

180 — *Hyperboles conjuguées.* — Deux hyperboles sont dites *conjuguées* lorsque, ayant même centre et mêmes axes, l'axe réel de l'une est axe imaginaire de l'autre. Ainsi l'hyperbole proposée a pour conjuguée une autre hyperbole ayant pour axe transverse b et pour axe imaginaire a (fig. 111). L'équation de cette seconde hyperbole est évidemment

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Deux hyperboles conjuguées ont les mêmes asymptotes, puisque le rectangle construit sur les axes est le même pour les deux courbes. L'une des courbes est comprise dans les deux angles ROS′, R′OS opposés par le sommet, la seconde dans les deux autres angles ROS, R′OS′.

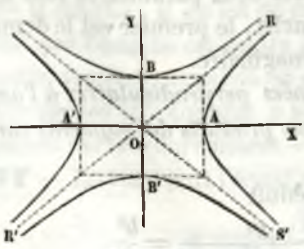


Fig. 111.

181 — *Hyperbole équilatère.* — On dit qu'une hyperbole est équilatère lorsque les axes a et b ont même longueur. Dans ce cas, le rectangle des axes devient un carré, et les asymptotes sont perpendiculaires entre elles ; l'hyperbole conjuguée est égale à la première ; on l'obtient en faisant tourner celle-ci d'un angle droit autour de son centre.

L'hyperbole dont les axes sont a et b peut être construite au moyen de l'hyperbole équilatère dont l'axe est a, comme on a construit l'ellipse ayant pour axes a et b au moyen du cercle de rayon a, c'est-à-dire que la première hyperbole peut être regardée comme la projection orthogonale de la seconde. Mais cette considération n'est d'aucune utilité dans les constructions graphiques relatives à l'hyperbole, parce que le tracé d'une hyperbole équilatère n'est pas plus simple que celui d'une hyperbole quelconque.

182 — Soient x et y les coordonnées d'un point quelconque du plan; considérons le polynôme

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1.$$

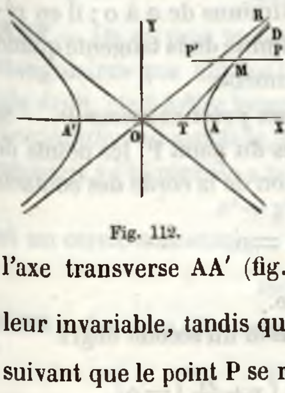


Fig. 112.

Pour un point M appartenant à la courbe, ce polynôme est égal à zéro; si l'on fait marcher un point P à partir de M sur une parallèle à l'axe transverse AA' (fig. 112), le terme $\frac{y^2}{b^2}$ conserve une valeur invariable, tandis que le terme $\frac{x^2}{a^2}$ diminue ou augmente, suivant que le point P se rapproche ou s'éloigne de l'axe des y. Il en résulte que le polynôme a une valeur négative pour tous les points situés entre les deux branches de l'hyperbole, et positive pour tous les autres points du plan.

TANGENTE.

183 — L'équation de la tangente au point M, dont les coordonnées sont x et y, est

$$(3) \qquad \frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}-1=0.$$

Pour construire cette droite, on peut déterminer le point T (fig. 112), où elle coupe l'axe OX. Si, dans l'équation (3), on fait $Y=0$, il vient $X=OT=\frac{a^2}{x}$; on obtient cette longueur OT par une troisième proportionnelle.

184—Le coefficient angulaire de la tangente a pour valeur

$$\frac{b^2x}{ay^2}=\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}.$$

Supposons que le point M décrive l'arc AD; en A le coefficient angulaire est infini, et la tangente perpendiculaire à l'axe transverse; x augmentant, le coefficient angulaire diminue constamment et tend vers la limite $\frac{b}{a}$, coefficient angulaire de l'asymptote OR; l'angle MTX diminue donc de $\frac{\pi}{2}$ à ROX; en même temps la valeur de OT diminue de a à 0; il en résulte que l'asymptote est la position limite de la tangente quand le point de contact s'éloigne indéfiniment.

185 — *Mener une tangente par un point extérieur* P. — Si l'on appelle x_1 et y_1 les coordonnées du point P, les points de contact sont déterminés par l'équation de la corde des contacts

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}-1=0, \tag{4}$$

jointe à l'équation (1) de l'hyperbole.

En éliminant y, on obtient l'équation du second degré

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right)-2\frac{x_1x}{a^2}+\left(1+\frac{y_1^2}{b^2}\right)=0,$$

dont les racines sont les abscisses des points de contact M et M' des deux tangentes menées du point P. La condition de réalité des racines est $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1<0$, c'est-à-dire que le point P doit être placé entre les deux branches de la courbe. Si le point P est placé dans les angles des asymptotes qui comprennent la courbe, le coefficient $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}$ étant positif, le produit des racines est positif; par suite, les deux racines sont de même signe, et les deux points de contact sur une même branche de la courbe. Au contraire, si le point P est dans l'un des angles ROS, R'OS', il y a un point de contact sur chacune des branches.

186 — *Tangente parallèle à une droite donnée.* — En appelant m le coefficient angulaire de la droite donnée, on trouve, par un calcul analogue à celui du nº 155, que l'équation de la tangente est

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}. \qquad (5)$$

Pour que le problème soit possible, il faut que la valeur de m^2 soit plus grande que $\frac{b^2}{a^2}$, c'est-à-dire que, si la droite donnée passe à l'origine, elle soit comprise dans l'angle ROS. Nous avons vu déjà (nº 182) que la valeur numérique du coefficient angulaire d'une tangente est plus grande que $\frac{b}{a}$.

187 — On ne peut mener à une hyperbole deux tangentes rectangulaires que lorsque l'angle ROS' est moindre qu'un angle droit, c'est-à-dire lorsque a est plus grand que b; quand cette condition est satisfaite, le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à l'hyperbole a pour équation

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2;$$

c'est un cercle concentrique à la courbe.

DIAMÈTRES.

188 — Lorsque l'hyperbole est rapportée à ses axes, le diamètre qui divise en deux parties égales les cordes dont le coefficient angulaire est m a pour équation

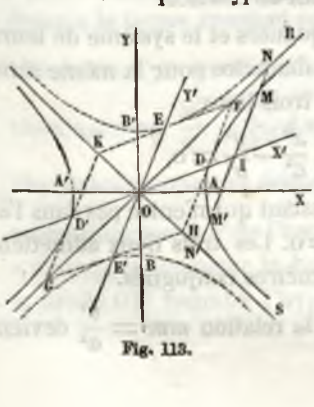


Fig. 113.

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}m = 0,$$

ou

$$y = \frac{b^2}{a^2m}x.$$

Si l'on désigne par m' le coefficient angulaire du diamètre, on a, entre la direction des cordes et celle du diamètre, la relation

$$mm' = \frac{b^2}{a^2}. \tag{6}$$

Cette relation montre que si l'on prend m' pour coefficient angulaire des cordes, on trouvera m pour coefficient angulaire du diamètre; c'est-à-dire que si la droite DD' divise en deux parties égales les cordes parallèles à EE' (fig. 113), réciproquement la droite EE' divise en parties égales les cordes parallèles à DD'. Ainsi les deux diamètres DD', EE' sont tels que chacun divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre; ce sont deux diamètres conjugués.

L'hyperbole a une infinité de systèmes de diamètres conjugués, puisque l'on peut prendre à volonté l'un des diamètres. La relation (6) exige que m et m' aient le même signe; si on les suppose positifs, m variant de o à $\frac{b}{a}$, m' variera de ∞ à $\frac{b}{a}$; le diamètre DD' tourne de OA vers l'asymptote OR, et le diamètre EE' de OB vers la même asymptote. On voit ainsi que, des deux diamètres, l'un rencontre toujours la courbe, et que l'autre ne la rencontre pas. Les axes forment le seul système de diamètres conjugués rectangulaires, et l'angle aigu de deux diamètres conjugués varie de $\frac{\pi}{2}$ à o.

On démontre comme pour l'ellipse que la tangente FH en un point D de l'hyperbole est parallèle au diamètre EE' conjugué du diamètre DD' qui passe au point de contact.

189 — Deux hyperboles conjuguées et le système de leurs asymptotes admettent le même diamètre pour la même série de cordes; car les équations des trois lieux

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

ne diffèrent que par le terme constant qui n'entre pas dans l'équation du diamètre $f'_x + mf'_y = 0$. Les trois lieux admettent aussi les mêmes systèmes de diamètres conjugués.

Si l'hyperbole est équilatère, la relation $mm' = \frac{b^2}{a^2}$ devient

$mm' = 1$, ce qui signifie que les angles DOX, EOX sont complémentaires, et, par suite, que les asymptotes sont bissectrices des angles des diamètres conjugués.

190 — *Hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués.* — Si l'on prend pour axes des coordonnées deux diamètres conjugués d'une hyperbole, nous avons vu que l'équation de la courbe conserve la forme

$$Mx'^2 + Ny'^2 = H.$$

Prenons pour axes des x le diamètre qui rencontre la courbe ; on peut supposer H positive, alors M sera positive et N négative. La longueur du premier demi-diamètre est la distance OD du point O au point de rencontre du diamètre avec la courbe ; cette longueur a pour expression $a' = \sqrt{\frac{H}{M}}$. On appelle longueur du second diamètre la quantité $b' = \sqrt{\frac{H}{-N}}$. Si l'on remplace M par $\frac{H}{a'^2}$ et N par $\frac{-H}{b'^2}$, l'équation précédente devient

$$(7) \qquad \frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} - 1 = 0.$$

On peut arriver à ce même résultat par une transformation de coordonnées ; si l'on remplace dans l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ les variables x et y par les valeurs

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta, \quad y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta,$$

comme le terme constant ne change pas, et qu'on doit arriver à l'équation (7), on en conclut que le polynôme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ devient identiquement $\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2}$. La même transformation appliquée à l'hyperbole conjuguée donnera $\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} + 1 = 0$. Le demi-diamètre imaginaire b' de l'hyperbole proposée dirigé suivant OY' a donc pour longueur la distance OE du point O au point E où la droite OY' recontre l'hyperbole conjuguée.

L'équation des asymptotes deviendra par la même raison

$$\frac{x'^2}{a'^2}-\frac{y'^2}{b'^2}=0, \quad \text{ou} \quad y'=\pm\frac{b'}{a'}x.$$

On en conclut que *les diagonales du parallélogramme* FHGK *construit sur deux diamètres conjugués quelconques coïncident avec les asymptotes de l'hyperbole.*

On peut vérifier directement, comme au n° 179, que les droites $y'=\pm\frac{b'}{a'}x'$ sont les asymptotes.

Les côtés FH, GK du parallélogramme sont tangents à la première hyperbole, et les côtés FK et GH à l'hyperbole conjuguée, de sorte que le parallélogramme est circonscrit au système des deux courbes.

191 — Si l'on appelle α et β les angles que font avec l'axe transverse OX les deux demi-diamètres conjugués OD et OE, a' et b' leurs longueurs, on a entre ces quatre quantités variables les trois relations

$$\frac{a'^2\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{a'^2\sin^2\alpha}{b^2}=1,$$

$$\frac{b'^2\cos^2\beta}{a^2}-\frac{b'^2\sin^2\beta}{b^2}=-1,$$

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2}=0;$$

les deux premières se déduisent des équations des deux hyperboles conjuguées en coordonnées polaires, la troisième exprime que les deux diamètres sont conjugués.

Ces relations sont analogues à celles que nous avons trouvées pour l'ellipse (n° 161); on pourra leur faire subir les mêmes transformations. La troisième relation se mettra sous la forme

$$\frac{\dfrac{a'\cos\alpha}{a}}{\dfrac{b'\sin\beta}{b}}=\frac{\dfrac{a'\sin\alpha}{b}}{\dfrac{b'\cos\beta}{a}}=\frac{\sqrt{\left(\dfrac{a'\cos\alpha}{a}\right)^2-\left(\dfrac{a'\sin\alpha}{b}\right)^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{b'\sin\beta}{b}\right)^2-\left(\dfrac{b'\cos\beta}{a}\right)^2}}=1;$$

en continuant de la même manière, on trouvera

$$a'^2\cos^2\alpha-b'^2\cos^2\beta=a^2, \quad a'^2\sin^2\alpha-b'^2\sin^2\beta=-b^2;$$

Ainsi *la différence des carrés des projections de deux diamètres conjugués quelconques sur chacun des axes est constante.*

En ajoutant ces deux relations membre à membre, on obtient

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2;$$

la différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est constante et égale à la différence des carrés des axes.

On trouve aussi la relation

$$a'b' \sin(\beta - \alpha) = ab;$$

d'où l'on conclut que *l'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante et égale à l'aire du rectangle des axes.*

De la relation $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$, il résulte que si a est différent de b, on ne peut avoir $a' = b'$; l'hyperbole n'a pas de diamètres conjugués égaux. Si, au contraire, l'hyperbole est équilatère, on a toujours $a' = b'$; tous les systèmes de diamètres conjugués sont égaux; ce qui s'accorde avec la remarque du nº 189, puisqu'alors les deux diamètres font avec l'asymptote des angles égaux.

192 — L'hyperbole et ses deux asymptotes ayant le même diamètre pour une même série de cordes, le milieu I de la corde MM′ est aussi le milieu de la corde NN′ (fig. 113). Donc *les portions* MN, M′N′ *d'une sécante comprise entre l'hyperbole et ses asymptotes sont égales.*

Si la sécante devient tangente, on a DF = DH; *les portions d'une tangente comprises entre le point de contact et les asymptotes sont égales.*

193 — Supposons l'hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués DD′, EE′, dont l'un EE′ est parallèle à une sécante donnée MN; la courbe aura pour équation

$$y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(x'^2 - a'^2),$$

et les asymptotes $y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}x'^2$. Dans la figure 113, la sécante MM′ coupant la même branche en deux points, le diamètre parallèle EE′ ne rencontre pas la courbe ; et l'on a

$$\overline{\mathrm{MI}}^2=\frac{b'^2}{a'^2}(\overline{\mathrm{OI}}^2-a'^2),\qquad \overline{\mathrm{NI}}^2=\frac{b'^2}{a'^2}\overline{\mathrm{OI}}^2,$$

et, par suite,

$$\overline{\mathrm{NI}}^2-\overline{\mathrm{MI}}^2=b'^2,\quad \text{ou}\quad (\mathrm{NI}-\mathrm{MI})(\mathrm{MI}+\mathrm{MI})=b'^2;$$

mais $\mathrm{NI}-\mathrm{MI}=\mathrm{MN}$ et $\mathrm{NI}+\mathrm{MI}=\mathrm{MN}'$;

donc $\mathrm{MN}\times\mathrm{MN}'=b'^2.$

Lorsque la sécante coupe les deux branches de l'hyperbole, le diamètre parallèle rencontre la courbe, et l'on arrive à un résultat analogue. Ainsi *le produit des segments d'une sécante, compris entre un point de la courbe et les asymptotes, est égal au carré du demi-diamètre parrallèle à la sécante.*

194 — Connaissant les asymptotes RR′, SS′ et un point M de l'hyperbole, on peut obtenir autant de points de la courbe qu'on le veut (fig. 114). Menons, en effet, par le point M une droite quelconque NMN′ ; cette droite coupe les asymptotes en N et N′ ; si l'on prend sur cette droite une longueur N′M′ égale à NM, on aura un second point M′ de l'hyperbole. On peut aussi déterminer les directions et les grandeurs des axes. La courbe étant comprise dans les angles ROS, R′OS′, la bissectrice OA de ces deux angles sera l'axe transverse, et la perpendiculaire OB l'axe imaginaire. Menons QMQ′ perpendiculaire à OA, l'axe imaginaire b sera moyen proportionnel entre MQ et MQ′. En portant sur OB une longueur OB égale à b, et en menant BC parallèle à OA, BC sera l'axe réel a. Pour construire la tangente en un point M′ de la courbe, on mènera par ce point M′P parallèle à une asymptote, on prendra OG = 2OP ; la droite M′G sera la tangente demandée.

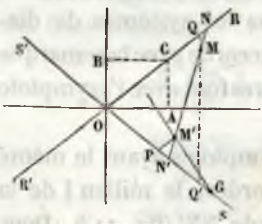


Fig. 114.

195 — Lorsqu'on connaît les positions et les grandeurs de deux diamètres conjugués, on obtient aisément les axes.

Soient, en effet, DD', EE' (fig. 115) les deux diamètres, dont le premier est réel; les diagonales du parallélogramme construit sur les deux diamètres sont les asymptotes; connaissant les asymptotes et un point D, on est ramené à la construction précédente.

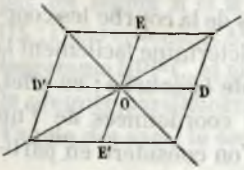


Fig. 115.

196 — *Cordes supplémentaires.* — On appelle cordes supplémentaires deux cordes MC, MC' qui, partant d'un même point de la courbe, aboutissent aux extrémités d'un même diamètre CC' (fig. 116). On démontrera comme nous l'avons fait au nº 168, pour l'ellipse, que *deux cordes supplémentaires sont parallèles à un système de diamètres conjugués*; et que, réciproquement, *si par les extrémités d'un diamètre on mène des droites parallèles à deux diamètres conjugués, ces droites se coupent sur l'hyperbole et forment un système de cordes supplémentaires.*

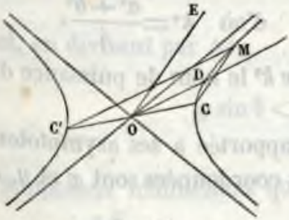


Fig. 116.

HYPERBOLE RAPPORTÉE A SES ASYMPTOTES.

197 — Si l'on prend pour axes des coordonnées les deux asymptotes de la courbe, l'équation ne renfermera pas de termes du premier degré, puisque l'origine est au centre; elle sera donc de la forme

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = H.$$

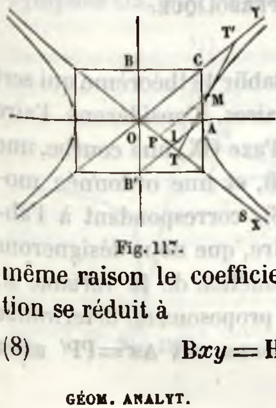


Fig. 117.

Les droites parallèles à OY ne coupent la courbe qu'en un point; donc pour chaque valeur de x, y n'a qu'une valeur, ce qui exige que le coefficient C soit nul; par la même raison le coefficient A doit aussi être nul; ainsi l'équation se réduit à

$$(8) \qquad Bxy = H, \quad \text{ou} \quad xy = \frac{H}{B} = k^2.$$

Les axes étant pris comme l'indique la figure, la constante $\frac{H}{B}$ est positive, puisque pour tous les points de la courbe les coordonnées x et y ont le même signe. On détermine facilement la constante k^2 lorsqu'on connaît les axes de la courbe ; en effet, l'équation (8) doit être vérifiée par les coordonnées de l'un quelconque des points de la courbe ; si l'on considère en particulier le sommet A, on a, pour ce point

$$x=y=\text{OI}=\frac{\text{AB}'}{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2},\quad \text{d'où}\quad k^2=\frac{a^2+b^2}{4}.$$

On donne quelquefois à la constante k^2 le nom de puissance de l'hyperbole.

198 — Quand l'hyperbole est rapportée à ses asymptotes, la tangente TT′ au point M, dont les coordonnées sont x et y, a pour équation

$$(9)\qquad y\text{X}+x\text{Y}=2k^2.$$

On obtient l'abscisse du point de rencontre de la tangente avec l'axe OX en faisant dans cette équation Y=0, d'où

$$\text{X}=\text{OT}=\frac{2k^2}{y}=2x=2\text{OP};$$

on reconnaît de nouveau que le point de contat M divise en deux parties égales la portion TT′ de la tangente comprise entre les asymptotes (n° 192).

AIRE D'UN SEGMENT HYPERBOLIQUE.

199 — Nous commencerons par établir le théorème qui sert ordinairement à l'évaluation des aires. Considérons l'aire

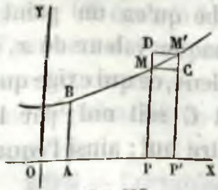


Fig. 118.

comprise entre l'axe OX, une courbe, une ordonnée fixe AB, et une ordonnée mobile MP (fig. 118), correspondant à l'abscisse x; cette aire, que nous désignerons par S, est une fonction de la variable x, dont nous nous proposons de déterminer la dérivée. Donnons à x un accroissement $\Delta x=$PP′ assez petit pour que de M en M′ l'ordonnée varie dans le même sens; par les points M et M′ menons des parallèles MC, M′D à l'axe OX; l'accroissement ΔS de l'aire est plus grand que le parallélogramme MPP′C, et plus petit que le paralélllogramme DPP′M′; le premier parallélogramme a pour mesure $y.\Delta x.\sin\theta$, θ étant l'angle des axes, le second $(y+\Delta y)\Delta x.\sin\theta$; on a donc

$$y.\Delta x.\sin\theta < \Delta S < (y+\Delta y)\Delta x.\sin\theta,$$

et, en divisant par Δx,

$$y\sin\theta < \frac{\Delta S}{\Delta x} < (y+\Delta y)\sin\theta.$$

Supposons maintenant que l'on fasse tendre Δx vers zéro; le rapport $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ est compris entre deux quantités, l'une $y \sin\theta$, l'autre ayant pour limite cette quantité; donc le rapport a aussi pour limite $y\sin\theta$. Ainsi la dérivée de l'aire considérée comme une fonction de l'abscisse est $y\sin\theta$. Réciproquement, l'aire S est une fonction primitive de $y \sin\theta$, considérée comme une fonction de x.

Quand les axes des coordonnées sont rectangulaires, la dérivée de l'aire est égale à y.

200 — Considérons une hyperbole rapportée à ses asymptotes, et proposons-nous d'évaluer l'aire comprise entre l'asymptote OX, l'hyperbole, l'ordonnée fixe AB correspondant à l'abscisse a et l'ordonnée variable MP correspondant à l'abscisse x (fig. 119). De l'équation (8) on déduit $y=\frac{k^2}{x}$, et, par suite,

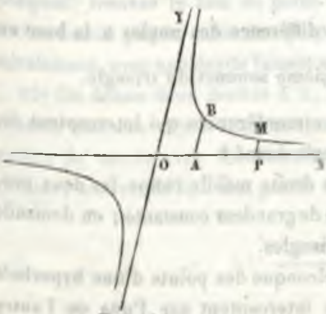


Fig. 119.

$$S' = y\sin\theta = k^2\sin\theta \times \frac{1}{x}.$$

Or $\frac{1}{x}$ est la dérivée de Lx; donc

$k^2 \sin\theta \times \frac{1}{x}$ est la dérivée de $k^2 \sin\theta \mathrm{L}x$; on a, par conséquent

$$S = k^2 \sin\theta \mathrm{L}x + C.$$

On détermine la constante C par la condition que l'aire soit nulle pour $x = a$, ce qui donne $C = -k^2 \sin\theta \mathrm{L}a$. On a ainsi

$$(10) \qquad S = k^2 \sin\theta (\mathrm{L}x - \mathrm{L}a) = k^2 \sin\theta \times \mathrm{L}\left(\frac{x}{a}\right).$$

L'abscisse a restant constante, si l'on fait augmenter x indéfiniment, l'aire S augmente aussi au-delà de toute limite. La même chose a lieu quand on fait tendre a vers zéro, x restant fixe.

Dans le cas particulier où l'hyperbole est équilatère, on a $\sin\theta = 1$; si l'on suppose en outre $k^2 = 1$, et que l'on compte l'aire depuis l'ordonnée qui répond à l'abscisse 1, c'est-à-dire au sommet de la courbe, la formule précédente se réduit à

$$S = \mathrm{L}(x).$$

C'est à cause de cette propriété que l'on appelle aussi les logarithmes népériens logarithmes hyperboliques.

Si l'on suppose $k = 1$ et $a = 1$, la formule (10) devient

$$S = \sin\theta \, \mathrm{L}(x).$$

On pourra prendre l'angle θ de manière que S soit le logarithme de x dans un système quelconque dont la base est plus grande que e.

EXERCICES.

1° La base d'un triangle est fixe, la différence des angles à la base est égale à $\frac{\pi}{2}$; on demande le lieu du troisième sommet du triangle.

2° Quel est le lieu des centres des circonférences qui interceptent des longueurs données sur les côtés d'un angle donné ?

3° On donne deux droites fixes, une droite mobile coupe les deux premières de manière à former un triangle de grandeur constante ; on demande le lieu des centres de gravité de ces triangles.

4° Les sécantes menées de l'un quelconque des points d'une hyperbole à deux points fixes pris sur la courbe interceptent sur l'une ou l'autre asymptote des longueurs constantes.

5° Toute corde d'une hyperbole divise en deux parties égales la portion de l'une ou l'autre asymptote comprise entre les tangentes à ses deux extrémités.

6° Si, sur une corde d'une hyperbole considérée comme diagonale, on construit un parallélogramme dont les côtés soient parallèles respectivement aux asymptotes, l'autre diagonale passera par le centre.

7° On donne un point fixe et une droite fixe; un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet placé au point fixe; trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle formé par les côtés de l'angle et la droite fixe.

8° Un triangle ABC est inscrit dans une hyperbole; deux de ses côtés ont des directions invariables; trouver le lieu du milieu du troisième côté.

9° Sur l'une des diagonales d'un rectangle prise pour corde on décrit un cercle; trouver le lieu des extrémités des diamètres parallèles à la seconde diagonale.

10° Étant donnés un angle et un point fixe, par ce point on mène une sécante quelconque, et par les points où cette sécante rencontre les deux côtés de l'angle, on mène des droites respectivement parallèles à ces côtés; trouver le lieu du point d'intersection de ces parallèles.

11° Trouver le lieu d'un point tel qu'en menant par ce point des parallèles aux asymptotes d'une hyperbole, l'aire du triangle formé par ces parallèles et l'hyperbole soit égale à une constante donnée.

12° Trouver le lieu d'un point tel que l'une des bissectrices des angles formés par les droites qui joignent ce point à deux points fixes A et B, ait une direction donnée.

13° Toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par le point de rencontre des hauteurs.

14° Étant donnée une ellipse, on mène deux diamètres conjugués quelconques; trouver le lieu du point d'intersection de l'un d'eux avec une droite menée par un point fixe perpendiculairement à l'autre, ou, plus généralement, avec une droite faisant un angle donné avec le second diamètre.

15° On donne deux droites A'A, B'B et un point O, du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit un cercle; aux points de rencontre du cercle avec les droites on élève des perpendiculaires à ces droites; trouver le lieu des points d'intersection de ces perpendiculaires.

CHAPITRE VI

De la Parabole.

201 — Le second des types auxquels on réduit l'équation générale du second degré est $Ny^2 + Px = 0$, ou

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Le cas où p est négatif se ramène au cas où p est positif par le changement du sens des x positifs; nous supposerons p positif. On voit immédiatement que la courbe représentée par l'équation (1) est symétrique par rapport à l'axe des x et qu'elle passe à l'origine. L'équation (1), résolue par rapport à y, donne

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Pour que l'ordonnée soit réelle, il est nécessaire que l'abscisse soit positive; si l'on fait croître x de 0 à $+\infty$, la valeur absolue de y croît aussi de 0 à ∞; on a ainsi deux arcs infinis AD et AD′ qui forment la parabole (fig. 120).

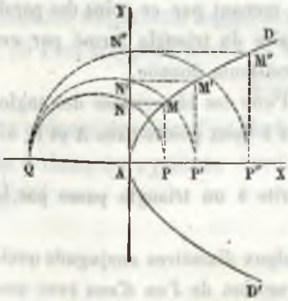


Fig. 120.

La droite AX est l'axe de la parabole; le point A en est le sommet; la longueur p, qui détermine la courbe, s'appelle le paramètre de la parabole.

202 — *Construction de la courbe par points.* — L'ordonnée MP du point M est moyenne proportionnelle entre la longueur constante $2p$ et l'abscisse AP. Portons sur AX et dans le sens des x négatifs une longueur AQ égale à $2p$; puis décrivons diverses circonférences ayant leurs centres sur QX et passant au point Q; ces circonférences coupent de nouveau l'axe AX aux points P, P′,... et la droite AY aux points N, N′,... Par les points P, P′... menons des perpendiculaires à l'axe AX; par les points N, N′,... des perpendiculaires à AY; les points de rencontre M, M′... appartiennent à la parabole.

203 — Des relations

$$\overline{MP}^2 = 2p \times AP, \qquad \overline{M'P'}^2 = 2p \times AP',$$

on déduit
$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{M'P'}^2} = \frac{AP}{AP'}.$$

Les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'axe de la parabole sont proportionnels aux segments de l'axe compris entre le sommet et les ordonnées.

204—Par le point M de la courbe menons une parallèle à l'axe, et imaginons qu'un point mobile parcoure cette parallèle. Si dans la fonction

$$y^2 - 2px$$

on remplace x et y par les coordonnées du point mobile, cette fonction se réduira à zéro, lorsque le mobile sera en M, elle aura une valeur positive pour une position du mobile extérieure à la courbe et une valeur négative pour une position intérieure.

205—Nous avons vu que les branches infinies de l'hyperbole ont des asymptotes ; il n'en est pas de même de la parabole. Et, d'abord, puisque y augmente indéfiniment avec x, il n'y a pas d'asymptote parallèle à l'axe de la parabole. En second lieu, soit $y_1 = ax + b$ l'équation d'une droite quelconque oblique à l'axe, la différence des ordonnées des points de la droite et de la courbe qui correspondent à une même abscisse est égale à

$$ax + b - \sqrt{2px}$$

et peut se mettre sous la forme

$$x\left(a + \frac{b}{x} - \sqrt{\frac{2p}{x}}\right).$$

Quand x augmente indéfiniment, le premier facteur augmentant indéfiniment, et le second tendant vers la valeur a différente de zéro, le produit augmente indéfiniment. Donc il n'y a pas non plus d'asymptote oblique à l'axe.

TANGENTE.

206—La tangente au point M, dont les coordonnées sont x

et y, a pour équation

(2) $$yY = p(X + x).$$

Soit T le point où la tangente rencontre l'axe de la parabole (fig. 121); si dans l'équation (2) on fait $Y = 0$, on trouve $X = -x$; donc $AT = AP$. Ceci donne un moyen facile de construire la tangente à la parabole en un point donné M; on abaissera la perpendiculaire MP sur l'axe, on prendra $AT = AP$ et l'on joindra les points M et T.

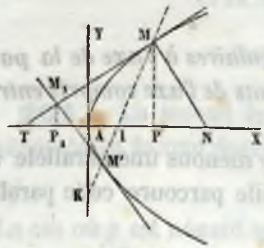


Fig. 121.

207 — *Mener une tangente par un point extérieur* M_1. — Soient x_1 et y_1 les coordonnées du point M_1; les points de contact seront déterminés par l'équation de la corde des contacts

(3) $$y_1 y = p(x + x_1),$$

jointe à celle de la courbe (1); on en déduit

$$y = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1}, \quad x = \frac{y^2}{2p};$$

ces valeurs sont réelles toutes les fois que le point M_1 est extérieur à la courbe.

Pour construire la droite MM', on cherche les points où elle coupe les axes des coordonnées; si, dans l'équation (3), on fait $y = 0$, on trouve $x = -x_1$, c'est-à-dire que AI est égal à AP_1; si l'on fait $x = 0$, on trouve $y = \frac{px_1}{y_1}$; on obtiendra le point K par une quatrième proportionnelle.

208 — *Tangente parallèle à une droite donnée.* — Si l'on désigne par m le coefficient angulaire de la droite donnée, l'équation $\frac{p}{y} = m$, jointe à celle de la courbe, détermine les coordonnées du point de contact $y = \frac{p}{m}$, $x = \frac{p}{2m^2}$. On en déduit l'équation de la tangente

(4) $$Y = mX + \frac{p}{2m}.$$

209 — *Normale.* — La normale MN en un point M de la parabole, dont les coordonnées sont x et y, a pour équation

$$(5) \qquad Y-y=-\frac{y}{p}(X-x).$$

En y faisant $Y=0$, on obtient l'abscisse du point N où elle rencontre l'axe; on trouve

$$PN=X-x=p.$$

Ainsi, *dans la parabole la sous-normale* PN *est constante et égale au paramètre* p.

DIAMÈTRES.

210 — En appliquant l'équation générale des diamètres des courbes du second degré à la parabole dont l'équation est $y^2-2px=0$, on obtient l'équation

$$(6) \qquad my-p=0, \quad \text{ou} \quad y=\frac{p}{m}.$$

On retrouve cette propriété déjà démontrée au nº 134, savoir que *tous les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe.*

Comme on peut prendre le coefficient angulaire m des cordes de manière que $\frac{p}{m}$ ait telle valeur que l'on voudra, il en résulte que, réciproquement, *toute parallèle à l'axe est un diamètre.*

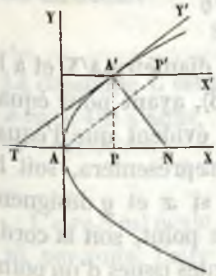


Fig. 122.

Soit A′ le point de rencontre du diamètre et de la courbe (fig. 122); l'ordonnée du point A′ étant égale à $\frac{p}{m}$ et le coefficient angulaire de la tangente en ce point ayant pour valeur $\frac{p}{y}$, c'est-à-dire m, on en conclut que *la tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en deux parties égales.*

211 — *Parabole rapportée à l'un de ses diamètres et à la tangente à son extrémité.* — Nous avons vu (nº 139) que, lorsqu'on prend pour axes des coordonnées un diamètre A′X′ et la tangente $A'Y'$ à son extrémité, l'équation de la parabole prend la forme

$$(7) \qquad y^2 = 2p'x.$$

Si l'on appelle a et b les coordonnées du point A' par rapport aux axes primitifs, et que l'on mène AP' parallèle à A'T, on sait que l'on a $A'P' = AT = AP$; les coordonnées du sommet A par rapport aux nouveaux axes sont donc a et $-\sqrt{4a^2+b^2}$; comme elles doivent vérifier l'équation (7), on en déduit

$$2p' = \frac{4a^2+b^2}{a} = \frac{4a^2+2pa}{a} = 2p+4a.$$

On a ausi

$$p' = \frac{\overline{A'T}^2}{2AT} = \frac{\overline{A'T}^2}{TP} = TN.$$

Si l'on désigne par θ l'angle $Y'A'X'$ des nouveaux axes, dans les triangles rectangles $NA'T$, $NA'P$, on a

$$TN = \frac{A'N}{\sin\theta}, \quad A'N = \frac{PN}{\sin\theta},$$

d'où
$$p' = TN = \frac{PN}{\sin^2\theta} = \frac{p}{\sin^2\theta}.$$

212 — La parabole, rapportée à un diamètre A'X et à la tangente A'Y (fig. 123), ayant pour équation $y^2 = 2p'x$, il est évident que l'équation $yY = p'(X+x)$ représentera, soit la tangente au point M, si x et y désignent les coordonnées de ce point, soit la corde des contacts des tangentes issues d'un point extérieur, si x et y désignent les coordonnées de ce point extérieur.

Fig. 123.

Les tangentes aux deux extrémités M et M' d'une corde coupent le diamètre en un même point T, tel que $A'T = AI$. Il en résulte que la droite des contacts MM', relative à un point extérieur T, est divisée en deux parties égales par le diamètre TX qui passe en ce point, et que, de plus, on a A'I = A'T.

Ceci donne le moyen de construire un parabole par points, lorsqu'on connaît deux tangentes TM, TM', et les points de contact M et M'. On mène la corde MM', on joint le milieu I au point T, le milieu A' de la droite TI est un point de la courbe, et la tangente en ce point est parallèle à MM'. A l'aide de la tangente A'T', qui touche la courbe en A', et de chacune des tangentes données, on déterminera deux nouvelles tangentes avec leurs points de contact ; et ainsi de suite. Cette méthode est fréquemment employée pour raccorder deux droites par un arc de parabole, lorsqu'on ne peut se servir d'un arc de cercle, c'est-à-dire lorsque les distances TM et TM' ne sont pas égales.

AIRE D'UN SEGMENT PARABOLIQUE.

213 — Proposons-nous d'évaluer l'aire S du triangle mixtiligne A'IM (fig. 123). Si l'on considère cette aire comme une fonction de l'abscisse du point M, la dérivée S' est donnée par la formule

$$S' = y\sin\theta = \sqrt{2p'x}\,.\sin\theta = \sqrt{2p'}\,.\sin\theta\,.x^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit

$$S = \frac{2}{3}\sqrt{2p'}\,.\sin\theta\,.x^{\frac{3}{2}} + C.$$

La constante C est nulle puisque l'aire se réduit à zéro pour $x = 0$. On a ainsi

$$S = \frac{2}{3}\,x\sqrt{2p'x} - \sin\theta = \frac{2}{3}\,xy\sin\theta.$$

L'aire S est égale aux deux tiers du parallélogramme A'IMN ; et, par suite, l'aire du triangle mixtiligne A'NM est le tiers du même parallélogramme.

EXERCICES.

1° Lieu du sommet d'un angle circonscrit à la parabole, et tel que le triangle formé par les côtés de l'angle et l'arc de parabole ait une aire constante.

2° Lieu des points desquels on peut mener à une parabole deux normales rectangulaires.

3° Une sécante tourne autour d'un point fixe pris sur l'axe d'une parabole; par les points où elle coupe la parabole on mène des normales; trouver le lieu du point de concours de ces normales.

4° Une parabole se meut parallèlement à elle-même, de manière que son sommet décrive la parabole dans sa position initiale; du sommet de la parabole fixe on mène des tangentes à la parabole mobile; trouver le lieu des points de contact.

5° Lieu du point tel que la somme des carrés des normales menées de ce point à une parabole donnée soit constante.

6° Étant donnée une courbe du second degré inscrite dans un angle, on mène une tangente quelconque à cette courbe; trouver le lieu du point de concours des médianes ou des hauteurs du triangle formé par la tangente mobile et les côtés du triangle; trouver aussi le lieu du centre du cercle circonscrit au même triangle.

7° Étant donnée une ellipse, par un point fixe on mène deux droites rectangulaires quelconques, et au point où ces droites rencontrent l'ellipse on mène des tangentes à cette ellipse; trouver le lieu des points de rencontre de ces tangentes.

8° Même problème, quand on remplace les droites rectangulaires par des droites parallèles à deux diamètres conjugués d'une autre ellipse donnée.

9° Un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet placé sur une courbe du second degré donnée; aux points où les côtés de l'angle rencontrent la courbe on mène des tangentes à cette courbe. Trouver le lieu des points de rencontre de ces tangentes.

10° Trouver le lieu du centre d'un triangle équilatéral formé par trois tangentes ou par trois normales à une parabole.

11° L'aire d'un triangle qui a pour sommets les points de contact de trois tangentes à une parabole est le double de l'aire du triangle formé par ces tangentes et a pour expression $\pm\frac{1}{4p}(y'-y'')(y''-y''')(y'''-y')$, en désignant par y', y'', y''' les perpendiculaires abaissées des sommets du triangle sur l'axe.

12° On mène une tangente quelconque à une hyperbole, on joint les points où elle coupe les asymptotes respectivement à deux points fixes; trouver le lieu du point de concours des deux droites.

13° Mener à une parabole une normale telle que l'aire comprise entre cette normale et la courbe ait une valeur minimum.

CHAPITRE VII

Foyers et directrices.

214 — Proposons-nous d'abord la question suivante : Étant donnés un point F et une droite DE (fig. 124), trouver le lieu du point dont les distances au point et à la droite donnés sont entre elles dans un rapport constant.

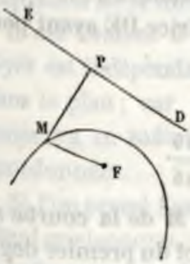


Fig. 124.

Traçons dans le plan des axes rectangulaires quelconques; appelons α et β les coordonnées du point F, et soit $mx+ny+h=0$ l'équation de la droite DE; les distances d'un point quelconque M du plan au point F et à la droite DE sont données par les formules

$$\mathrm{MF}=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}, \qquad \mathrm{MP}=\frac{\pm(mx+ny+h)}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

si l'on désigne par k le rapport constant $\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MP}}$, le lieu aura pour équation

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\pm\frac{k(mx+ny+h)}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

ou

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{k^2(mx+ny+h)^2}{m^2+n^2}.$$

Ce lieu est une courbe du second degré. La quantité B^2-4AC qui sert à distinguer l'espèce de la courbe, étant égale à $4(k^2-1)$, la courbe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que le rapport k est inférieur, égal, ou supérieur à l'unité.

215 — Réciproquement, étant donnée une courbe du second degré, nous nous proposerons de chercher s'il existe dans le plan de la courbe un point fixe F et une droite fixe DE, tels que le rapport des distances de chacun des points de la courbe au point F et à la droite DE soit constant. Si l'on trouve un point et une droite jouissant de cette propriété, le point s'appellera *foyer* de la courbe, et la droite *directrice*.

On peut énoncer la question d'une autre manière : les axes des coordonnées étant quelconques et faisant entre eux un angle θ, supposons qu'on ait trouvé un point F ayant pour coordonnées α et β et une droite DE ayant pour équation $mx+ny+h=0$, tels que le rapport $\frac{MF}{MP}$ soit égal à une quantité constante k ; la distance MP d'un point M de la courbe dont les coordonnées sont x et y à la directrice DE ayant pour expression $\frac{\pm(mx+ny+h)\sin\theta}{\sqrt{m^2+n^2-2mm\cos\theta}}$, on aura

$$MF=\pm\frac{k(mx+ny+h)\sin\theta}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\theta}}.$$

Ainsi la distance d'un point quelconque M de la courbe au foyer F s'exprime par une fonction entière et du premier degré des coordonnées x et y du point M.

216 — Inversement, si un point fixe F jouit de cette propriété que sa distance à un point quelconque M de la courbe s'exprime par une fonction entière et du premier degré des coordonnées x et y du point M, ce point F est un foyer, c'est-à-dire qu'il existe une droite DE telle que le rapport des distances de chacun des points de la courbe au point F et à la droite DE soit constant. En effet, supposons que l'on ait

$$FM=\pm(mx+ny+h),$$

en désignant par $mx+ny+h$ une fonction entière et du premier degré des coordonnées x et y du point M. Considérons la droite DE qui a pour équation

$$mx+ny+h=0;$$

la distance du point M à cette droite est donnée par la formule

$$MP=\frac{\pm(mx+ny+h)\sin\theta}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\theta}};$$

on a donc $$\frac{MF}{MP}=\frac{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\theta}}{\sin\theta}.$$

Ainsi le rapport des distances de chacun des points de la courbe au point fixe F et à la droite fixe DE est constant; le point F est donc un foyer de la courbe, et la droite DE la directrice correspondante. En désignant par k la valeur du rapport constant, on a $k\sin\theta=\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\theta}$.

Voilà pourquoi on définit souvent le foyer d'une courbe du second degré un point fixe F, tel que sa distance à un point quelconque M de la courbe s'exprime par une fonction entière et du premier degré des coordonnées du point M. On obtient l'équation de la directrice en égalant cette fonction à zéro.

Il est évident *à priori* que cette propriété algébrique du foyer est indépendante de la position des axes des coordonnées dans le plan; car une fonction entière et du premier degré conserve ce même caractère quand on change les axes des coordonnées.

Si l'on prend l'axe des y parallèle à la directrice, l'axe des x étant quelconque, l'équation de la directrice devant se réduire à la forme $mx+h=0$, le coefficient n sera nul et la distance du foyer à un point quelconque M de la courbe s'exprimera par une fonction entière et du premier degré $\pm(mx+h)$ de l'abscisse x du point M.

On voit par là que la recherche du foyer et de la directrice dans les courbes du second degré revient à la détermination d'un point F, tel que sa distance à un point quelconque M de la courbe s'exprime par une fonction entière et du premier degré des coordonnées x et y du point M. Supposons les axes rectangulaires, et soit

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1}$$

l'équation d'une courbe du second degré donnée. Appelons α et β les coordonnées du foyer cherché, les coordonnées de chacun des points de la courbe devront vérifier l'équation

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\pm(mx+ny+h),$$

$$\text{ou}\quad (x-\alpha)^2+(y-\beta^2-(mx+ny+h)^2=0. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2), représentant toutes les deux la même courbe, sont identiques, c'est-à-dire que les coefficients des termes correspondants doivent être proportionnels; on aura donc pour déterminer les cinq inconnues α, β, m, n, h, les cinq équations

$$(3)\qquad \frac{1-m^2}{A}=\frac{-2mn}{B}=\frac{1-n^2}{C}=\frac{-2(\alpha+mh)}{D}=\frac{-2(\beta+nh)}{E}=\frac{\alpha^2+\beta^2-h^2}{F}.$$

Afin de faciliter le calcul, nous considérons séparément les trois courbes du second degré rapportées aux systèmes d'axes rectangulaires qui ont servi à simplifier leurs équations.

FOYERS ET DIRECTRICES DE L'ELLIPSE.

217 — Soit

$$(4)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

l'équation d'une ellipse donnée rapportée à ses axes. Cette équation ne contenant pas de terme en xy, il faut que le coefficient $-2mn$ de ce terme dans l'équation (2) soit nul, ce qui exige que l'on ait soit $n=0$, soit $m=0$. Supposons d'abord $n=0$; les coefficients des termes du premier degré devant être aussi nuls, on aura, $\alpha+mh=0$, $\beta=0$, et les équations (3) se réduiront à

$$a^2(1-m^2)=b^2=h^2-\alpha^2.$$

On en déduit $m^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$; comme on peut toujours supposer m positif, sans quoi on changerait les signes des coefficients m, n, h dans l'équation (2), on prendra $m=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. Si, dans l'équation $a^2(1-m^2)=h^2-\alpha^2$, on remplace h par sa valeur tirée de l'équation $\alpha+mh=0$, on trouve $\alpha^2=a^2-b^2$, d'où $\alpha=\pm\sqrt{a^2-b^2}$, $h=\mp a$.

On obtient ainsi deux foyers F et F′ (fig. 125) situés sur le grand axe et à égale distance de part et d'autre du centre. Pour les déterminer, de l'extrémité B du petit axe comme centre, avec un rayon égal à a, on décrira un cercle; les points F et F′ où ce cercle

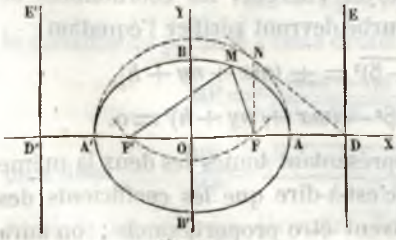


Fig. 125.

coupe le grand axe, sont les foyers. Si, pour abréger, on pose $a^2-b^2=c^2$, on a $\alpha=\pm c$, $m=\frac{c}{a}$, $h=\mp a$; les signes supérieurs se rapportent au foyer F, les signes inférieurs au foyer F'. On sait que l'on a l'équation de la directrice en égalant à zéro le polynôme $mx+ny+h$; cette équation se réduit à $\frac{c}{a}x\mp a=0$, ou $x=\pm\frac{a^2}{c}$. On obtient ainsi deux directrices; au foyer F correspond la directrice DE qui a pour équation $x=\frac{a^2}{c}$; au foyer F' la directrice D'E' qui a pour équation $x=-\frac{a^2}{c}$. Ces directrices sont perpendiculaires au grand axe et à égale distance du centre; la détermination du point D dépend d'une troisième proportionnelle; on la construit de la manière suivante : sur le grand axe comme diamètre décrivons un cercle, par le foyer F élevons une perpendiculaire à cet axe, et au point N où la perpendiculaire coupe le cercle, menons une tangente au cercle; le point où cette tangente rencontre le grand axe est le point D.

Nous avons vu aussi que le rapport constant des distances de chacun des points de la courbe au foyer et à la directrice correspondante est égal à $\sqrt{m^2+n^2}$, en coordonnées rectangulaires; on a donc $k=m=\frac{c}{a}$. Le rapport $\frac{c}{a}$ est ce qu'on appelle *excentricité* de l'ellipse.

218 — Supposons maintenant $m=0$; les coefficients des termes du premier degré devant être nuls, on aura $\alpha=0$, $\beta+nh=0$, et les équations (3) se réduisent à

$$a^2=b^2(1-n^2)=h^2-\beta^2.$$

On en déduit

$$n=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b},\quad \beta=\pm\sqrt{b^2-a^2},\quad h=\mp b.$$

Pour obtenir ces nouvelles solutions, il suffit de permuter dans les premières les lettres a et b, m et n, α et β. Comme nous avons supposé a plus grand que b, ces deux solutions sont imaginaires. Ainsi on peut attribuer aux constantes quatre systèmes de valeurs qui rendent identiques les équations (2) et (4); mais il n'y a que deux de ces systèmes qui donnent des foyers et des directrices réels.

THÉORÈME I.

219 — *La somme des distances de chacun des points de l'ellipse aux deux foyers est constante.*

La distance d'un foyer à un point quelconque M de la courbe a pour expression $\pm(mx+ny+h)$, c'est-à-dire $\pm\left(\frac{cx}{a}\mp a\right)$. Le signe — dans la parenthèse se rapporte au foyer F, le signe + au foyer F'; on choisira le signe placé en avant de la parenthèse de manière à avoir une quantité positive.

Dans l'ellipse, le rapport $\frac{c}{a}$ étant moindre que l'unité et l'abscisse x moindre que a en valeur absolue, le terme $\frac{cx}{a}$ est plus petit que a en valeur absolue, et, par conséquent, la parenthèse a le signe du second terme. On prendra devant la parenthèse le signe — pour le foyer F et le signe + pour le foyer F'; on a ainsi

$$MF = a - \frac{cx}{a}, \qquad MF' = a + \frac{cx}{a},$$

d'où l'on déduit

$$MF + MF' = 2a.$$

220 — Corollaire I. *La somme des distances d'un point intérieur à l'ellipse aux deux foyers est plus petite que le grand axe; la somme des distances d'un point extérieur est plus grande que le grand axe.*

Considérons d'abord un point N (fig. 126) situé à l'intérieur de l'ellipse. Joignons ce point aux deux foyers et prolongeons la droite F'N jusqu'à sa rencontre avec l'ellipse en M. Le point M appartenant à l'ellipse, la somme des deux rayons vecteurs MF+MF' est égale au grand axe AA'; mais la ligne droite NF est plus petite que la ligne brisée

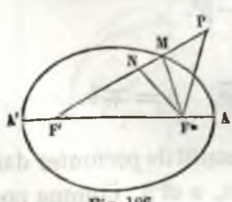


Fig. 126.

NM+MF; en ajoutant de part et d'autre la même longueur F'N, on voit que le chemin F'N+NF est plus petit que F'M+MF, c'est-à-dire plus petit que AA'.

Considérons maintenant un point P situé hors de l'ellipse; la droite PF' rencontre l'ellipse en un point M. La ligne brisée MP+PF est plus grande que la ligne droite MF; en ajoutant de part et d'autre la même longueur F'M, on voit que le chemin F'P+PF est plus grand que F'M+MF, c'est-à-dire plus grand que AA'.

Il est clair que les réciproques sont vraies. Si la somme des distances d'un point du plan aux deux foyers est plus petite que le grand axe, ce point est intérieur à l'ellipse. Si la somme est plus grande que le grand axe, le point est extérieur.

Il résulte de là que l'on peut considérer l'ellipse comme le lieu des points dont la somme des distances aux deux foyers est égale à $2a$. C'est ainsi qu'on définit l'ellipse en Géométrie élémentaire, et c'est sur cette propriété que repose la construction de l'ellipse par points, ou d'un mouvement continu, dont nous avons parlé au commencement (nº 11).

221 — COROLLAIRE II. *L'ellipse est le lieu des points également distants d'un foyer* F *et du cercle décrit de l'autre foyer* F' *comme centre avec un rayon égal au grand axe.* Si l'on joint les foyers à un point quelconque M de l'ellipse et si l'on prolonge le rayon vecteur F'M d'une longueur MH égale à MF, on obtient une longueur F'H constante et égale au grand axe; le lieu du point H est donc la circonférence décrite du foyer F' comme centre avec le grand axe pour rayon. La portion MH du rayon étant le plus

Fig. 127.

court chemin du point M à cette circonférence, le point M de l'ellipse est également distant du foyer F et de la circonférence. On a donné à ce cercle le nom de *cercle directeur*.

THÉORÈME II.

222 — *La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs, qui vont du point de contact aux deux foyers.*

Prenons deux points voisins M et M′ (fig. 128) sur l'ellipse; du foyer F comme centre, avec FM′ pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupera en C le rayon vecteur FM, la longueur MC représente la différence des deux rayons vecteurs FM et FM′, ou la diminution qu'éprouve le rayon vecteur FM quand on passe du point M au point voisin M′. De même, si du foyer F′ comme centre, avec F′M′ pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupera en D le rayon vecteur F′M prolongé, la longueur MD représentera la différence des deux rayons vecteurs F′M et F′M′, ou l'accroissement qu'éprouve le rayon vecteur F′M quand on passe du point M au point M′. Ainsi, quand on passe du point M au point M′, le rayon vecteur FM éprouve une diminution MC, tandis que l'autre rayon vecteur F′M éprouve un accroissement MD. Puisque la somme des deux rayons vecteurs FM + F′M reste constante, l'augmentation de l'un est égale à la diminution de l'autre, et, par conséquent, les deux longueurs MC et MD sont égales.

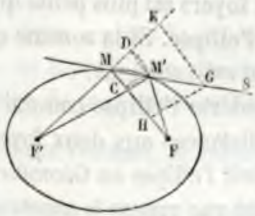


Fig. 128.

Par les deux points M et M′ menons la sécante MS; dans les deux cercles considérés précédemment, traçons les cordes M′C et M′D. Sur la sécante MS portons une longueur MG, arbitraire, mais invariable, et par le point G menons GH parallèle à M′C, GK parallèle à M′D; à cause des parallèles, on a les rapports égaux

$$\frac{MC}{MH} = \frac{MM'}{MG} = \frac{MD}{MK};$$

puisque les deux longueurs MC et MD sont égales, il en résulte que les deux longueurs MH et MK sont aussi égales.

Supposons maintenant que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M; la sécante MS tend vers une position limite MT (fig. 129), qui est la tangente à l'ellipse. En même temps, les points C et D se rapprochant du point M, les cordes M′C et M′D, prolongées, tendent vers les tangentes aux cercles décrits des points F et F′ comme centres avec FM et F′M pour rayons, et, par conséquent, deviennent perpendiculaires aux rayons FM et F′M; leurs parallèles GH et GK prennent aussi des directions perpendiculaires à ces mêmes rayons, et, par conséquent, les angles H et K deviennent droits.

Les limites des deux triangles MGH, MGK (fig. 128) sont deux triangles rectangles MGH, MGK (fig. 129); ces deux triangles, ayant l'hypoténuse MG commune et les côtés MH et MK égaux entre eux, comme limites de longueurs égales, sont égaux; d'où l'on conclut l'égalité des deux angles GMH, GMK. Il en résulte que la tangente MT à l'ellipse divise en deux parties égales l'angle FMK formé par l'un des rayons vecteurs MF et le prolongement de l'autre F′M.

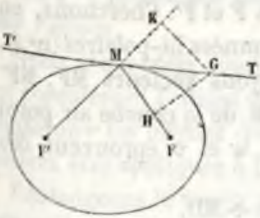


Fig. 129.

L'angle F′MT′ étant égal à son opposé par le sommet GMK, on voit que la tangente TT′ fait, avec les deux rayons vecteurs qui vont au point de contact, des angles égaux FMT, F′MT′.

223 — Corollaire I. Menons au point M (fig. 130) une perpendiculaire MN à la tangente TT′, nous aurons la normale à l'ellipse. Les deux angles FMN, F′MN sont égaux comme complémentaires des angles égaux FMT, F′MT′; ainsi *la normale à l'ellipse au point* M *est bissectrice de l'angle* FMF′ *des rayons vecteurs qui vont de ce point aux deux foyers.*

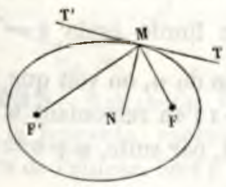


Fig. 130.

224 — Corollaire II. Supposons qu'une lumière soit placée au foyer F (fig. 131) d'une ellipse, les rayons lumineux, partant du point F, se réfléchissent sur l'ellipse en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Soit FM l'un de

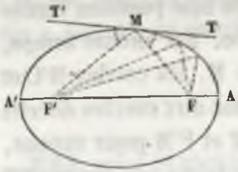


Fig. 131.

ces rayons; menons la tangente TT′ à l'ellipse en ce point; le rayon réfléchi, devant faire avec MT′ un angle égal à FMT, sera dirigé suivant MF′. Ainsi les rayons réfléchis viennent tous concourir au second foyer F′, où ils forment une image très-brillante de la flamme placée au premier foyer F. C'est de là que vient la dénomination de *foyer*.

225 — Corollaire III. Réciproquement, l'ellipse est la seule courbe qui jouisse de la propriété que sa tangente fasse extérieurement des angles égaux avec les rayons vecteurs qui vont du point de contact à deux points fixes F et F′. Cherchons, en effet, l'équation de la courbe en coordonnées bi-polaires (nº 4), et désignons par u et v les deux rayons vecteurs MF, MF′ (fig. 128). Quand on passe d'un point M de la courbe au point voisin M′, les deux rayons vecteurs u et v éprouvent des variations

$$\Delta u = -\mathrm{MC}, \qquad \Delta v = +\mathrm{MD},$$

et l'on a

$$\frac{\Delta v}{\Delta u} = -\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MC}} = -\frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{MH}}.$$

Quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, la droite MM′ devient tangente et les deux angles H et K, comme nous l'avons dit, deviennent droits. Nous supposons d'ailleurs les deux angles GMH, GMK (fig. 129) égaux entre eux; les deux triangles rectangles GMH, GMK sont donc égaux, et l'on a MH=MK, le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta u}$ tend vers une limite égale à -1. Si l'on considère v comme une fonction de u, on voit que la dérivée de cette fonction est égale à -1; en remontant à la fonction primitive, on a $v = -u + C$; et, par suite, $u + v = C$. Donc la courbe est une ellipse.

226 — Corollaire IV. *Le lieu des projections des foyers sur les tangentes à l'ellipse est le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.* Prolongeons le rayon vecteur F′M d'une longueur MH égale à MF; la tangente divisant en deux parties égales l'angle FMH, est perpendiculaire sur le milieu I de la droite FH (fig. 132); joignons ce point au centre O de l'ellipse. La droite OI, qui divise en deux parties égales les côtés F′F, FH du triangle F′FH, est parallèle au troisième côté F′H, et en est la moitié; la longueur F′H étant égale au grand axe AA′, la distance OI est constante et égale à OA. Donc le lieu du point I est la circonférence de cercle décrite du point O comme centre, avec OA pour rayon.

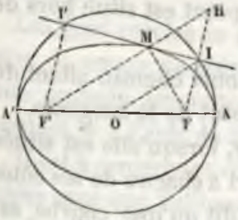


Fig. 132.

PROBLÈME I.

227 — *Mener une tangente à l'ellipse en un point* M *donné sur l'ellipse.*

Nous avons déjà résolu ce problème, ainsi que les suivants, en considérant l'ellipse comme la projection d'un cercle. Nous traiterons les mêmes questions par une autre méthode qui pourra être appliquée à l'hyperbole et à la parabole.

Prolongeons le rayon vecteur F′M (fig. 133) d'une longueur MH égale à l'autre rayon vecteur MF, et par le point M menons une droite TT′ perpendiculaire à FH; nous aurons la tangente demandée. Car, dans le triangle isocèle FMH, la droite MT, perpendiculaire abaisssée du sommet sur la base FH, divise l'angle au sommet en deux parties égales. Cette droite, étant bissectrice de l'angle FMH formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre, coïncide avec la tangente à l'ellipse.

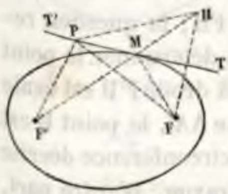


Fig. 133.

228 — Remarque. Il est bon d'observer que tous les points de la tangente, excepté le point de contact M, sont situés hors de l'ellipse. Soit P un point quelconque de la tangente, joignons ce point aux deux foyers et au point H. La tangente, étant perpendiculaire sur le milieu de FH, la distance PF égale PH et, par conséquent, la ligne brisée F′P + PF égale la ligne brisée F′P + PH; mais cette dernière est plus grande que la ligne droite F′H qui est égale au grand axe de l'ellipse, puisqu'on a prolongé le rayon vecteur F'M d'une longueur MH égale à MF. La somme des distances du point P aux deux foyers étant plus grande que le grand axe, ce point est situé hors de l'ellipse.

La ligne brisée F'M + MF est le plus court chemin allant du point F' au point F en passant par un point de la tangente.

On dit qu'une ligne brisée est *convexe*, lorsqu'elle est située tout entière d'un même côté par rapport à chacun de ses côtés indéfiniment prolongés. De même, on dit qu'une courbe est convexe lorsqu'elle est située tout entière d'un même côté par rapport à chacune de ses tangentes indéfiniment prolongées. Il résulte de ce qui précède que l'ellipse est une courbe fermée convexe.

PROBLÈME II.

229 — *Mener une tangente à l'ellipse par un point extérieur* P.

Supposons le problème résolu, et soit PM (fig. 134) une tangente passant par le point P. Si l'on prolonge le rayon vecteur F'M d'une longueur MH égale à FM, on sait que la tangente PM est perpendiculaire sur le milieu de la droite FH; la question revient donc à déterminer le point H. Puisque la droite F'H est égale au grand axe AA', le point H est situé sur la circonférence décrite du foyer F' comme centre avec AA' pour rayon. D'autre part, la distance PH étant égale à PF, le point H est sur la circonférence décrite du point P comme centre avec PF pour rayon; le point H est donc à l'intersection de ces deux circonférences. On déduit de là la construction suivante :

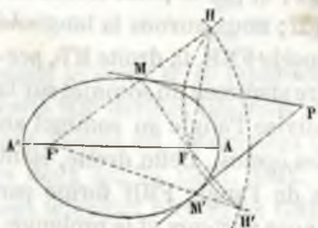


Fig. 134.

Du foyer F' comme centre, avec un rayon égal au grand axe, décrivons un cercle. Du point P comme centre, avec un rayon égal à la distance PF de ce point à l'autre foyer, décrivons un second cercle, qui coupera le premier au point H. Joignons FH, et du point P menons une perpendiculaire à la droite FH, nous aurons la tangente demandée. Le point de contact M sera déterminé par l'intersection de la tangente avec la droite F'H.

Les deux cercles se coupent en un second point H'; en menant de même du point P une perpendiculaire à FH', on aura une seconde tangente PM', dont on déterminera le point de contact M' à l'aide de la droite F'H'.

Il est à remarquer que ces constructions peuvent être effectuées sans que l'ellipse soit tracée. Il suffit que l'on connaisse les foyers et le grand axe.

PROBLÈME III.

230 — *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée* KL.

Supposons le problème résolu, et soit ST une tangente parallèle à KL (fig. 135). Si l'on prolonge F'M d'une longueur MH égale à MF, on sait que la tangente est perpendiculaire sur le milieu de FH. On en déduit la construction suivante :

Fig. 135.

Du foyer F' comme centre, avec un rayon égal au grand axe, décrivons un cercle; par l'autre foyer F menons une droite FH perpendiculaire à la droite donnée KL; cette droite coupera la circonférence en un point H; sur le milieu de FH, élevons une perpendiculaire ST, nous aurons la tangente demandée. Le point de contact sera déterminé par l'intersection de la tangente avec la droite F'H.

La droite FH prolongée rencontre la circonférence en un second point H'; en élevant une perpendiculaire sur le milieu de FH', on obtiendra une seconde tangente S'T', dont on déterminera le point de contact M' par la droite F'H'.

PROBLÈME IV.

231 — *Une ellipse étant définie par ses foyers et son grand* *axe, déterminer les points où elle est coupée par une droite donnée* MM'.

Soit M l'un des points où la droite donnée coupe l'ellipse (fig. 136); joignons ce point aux deux foyers et prolongeons le rayon vecteur F'M d'une longueur MH égale à MF; le point H appartient au cercle directeur décrit du foyer F' comme centre; si du point M comme centre, avec un rayon égal à MF, on décrit un cercle, ce cercle sera tangent en H au cercle directeur; en abaissant du foyer F une perpendiculaire sur la droite donnée et prolongeant cette perpendiculaire d'une longueur égale à elle-même, on obtient un second point F_1 appartenant à ce même cercle. La question revient donc à trouver le centre M d'un cercle passant par les deux points donnés F et F_1 et tangent au cercle directeur. Pour cela, par les deux points F et F_1 on fait passer un cercle quelconque qui coupe le cercle directeur en deux points K et K'; du point I, intersection des deux droites FF_1 et KK', on mène une tangente IH au cercle directeur; le point M, où la droite F'H coupe la droite donnée, sera le point cherché.

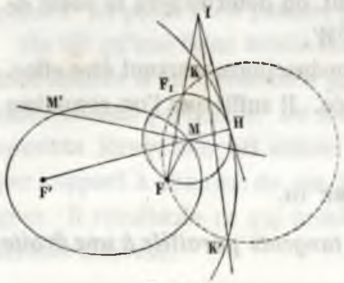


Fig. 136.

On a, en effet,

$$\overline{IH}^2 = IK \times IK' = IF \times IF_1;$$

donc le cercle qui passe par les trois points F, F_1, H, est tangent en H au cercle directeur. Comme on peut mener du point I deux tangentes au cercle directeur, on aura deux points M et M'.

Lorsque le point F_1, symétrique du foyer F par rapport à la droite donnée, est situé à l'intérieur du cercle directeur, il y a effectivement deux solutions. Lorsque le point F_1 est situé sur le cercle, la droite est tangente à l'ellipse. Enfin, quand le point F_1 est situé hors du cercle, la droite ne rencontre pas l'ellipse.

FOYERS ET DIRECTRICES DE L'HYPERBOLE.

232 — Soit

$$(5)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

l'équation d'une hyperbole donnée rapportée à ses axes. Le calcul est le même que pour l'ellipse; il suffit de remplacer b^2 par $-b^2$. On a ainsi les deux solutions réelles (nº 217)

$$\beta=0,\quad \alpha=\pm\sqrt{a^2+b^2},\quad m=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},\quad n=0,\quad h=\mp a,$$

et les deux solutions imaginaires

$$\alpha=0,\quad \beta=\pm\sqrt{-a^2-b^2},\quad m=0,\quad n=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b},\quad h=\mp bi.$$

Les deux premières solutions donnent deux foyers réels F et F′ situés sur l'axe transverse à égale distance du centre (fig. 137). On les obtient en menant par le sommet A une perpendiculaire AG à l'axe transverse jusqu'à l'asymptote, et prenant sur l'axe transverse des longueurs OF et OF′ égales à OG. Si, pour abréger, on pose $a^2+b^2=c^2$, on a

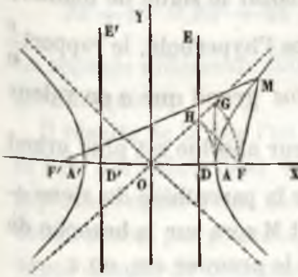


Fig. 137.

$$\alpha=\pm c,\quad m=\frac{c}{a}.$$

Les directrices sont représentées par les équations

$$\frac{c}{a}x\mp a=0,\quad \text{ou}\quad x=\pm\frac{a^2}{c}.$$

Au foyer F correspond la directrice DE, au foyer F′ la directrice D′E′. Du point O comme centre, avec OA pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupe l'asymptote au point H, ce point appartient à la directrice. En effet, les deux triangles OAG, OHF, qui ont un angle commun O, les côtés OA = OH et OF = OG, sont égaux, et l'angle OHF est droit; si, du point H, on abaisse une perpendiculaire HD sur l'axe transverse OA, on a $\overline{OH}^2 = OF \times OD$, et, par suite, $OD = \frac{a^2}{c}$. Ainsi la droite DH est la directrice.

Le rapport constant $k = \sqrt{m^2 + n^2}$ est égal à m ou au rapport $\frac{c}{a}$, qu'on appelle *excentricité* de l'hyperbole.

THÉORÈME III.

233 — *La différence des distances de chacun des points de l'hyperbole aux deux foyers est constante et égale à l'axe transverse.*

La distance d'un foyer à un point quelconque M de la courbe a pour expression $\pm\left(\frac{cx}{a} \mp a\right)$; le sige supérieur dans la parenthèse se rapporte au foyer F, le signe inférieur au foyer F'. Il faut, en avant de la parenthèse, choisir le signe de manière à avoir des longueurs positives. Dans l'hyperbole, le rapport $\frac{c}{a}$ étant plus grand que l'unité et x plus grand que a en valeur absolue, le premier terme $\frac{cx}{a}$ en valeur absolue est plus grand que a. Il faudra donc faire précéder la parenthèse du signe + ou du signe —, suivant que le point M sera sur la branche de droite ou sur celle de gauche. Dans le premier cas, on a

$$MF = \frac{cx}{a} - a, \quad MF' = \frac{cx}{a} + a.$$

d'où

$$MF' - MF = 2a.$$

Dans le second cas, on a

$$MF = -\left(\frac{cx}{a} - a\right), \quad MF' = -\left(\frac{cx}{a} + a\right);$$

d'où

$$MF - MF' = 2a.$$

234 — Corollaire I. *La différence des distances d'un point situé entre les deux branches de l'hyperbole aux deux foyers est plus petite que l'axe transverse; lorsque le point est situé dans les deux autres parties du plan, la différence est plus grande que l'axe transverse.*

Soit P un point situé entre les deux branches de la courbe (fig. 138); la droite PF rencontre l'hyperbole au point M. On a

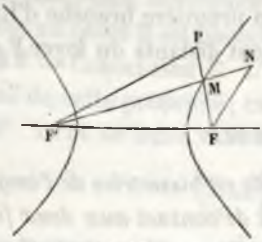


Fig. 138.

$$PF' - PM < MF\,;$$

si l'on retranche MF de part et d'autre, il vient

$$PF' - PF < MF' - MF\,;$$

cette dernière différence étant égale à $2a$, la première est plus petite que $2a$.

Considérons maintenant un point N situé à droite de la première branche d'hyperbole; la droite NF' rencontre cette branche en M; on a

$$NF < NM + MF,$$

et, en ajoutant de part et d'autre MF',

$$NF + MF' < NF' + MF\,; \quad \text{d'où} \quad NF' - NF > MF' - MF.$$

La seconde différence étant égale à $2a$, la première est plus grande que $2a$.

Il résulte de là que l'on peut considérer l'hyperbole comme le lieu des points dont la différence des distances aux deux foyers est égale à $2a$. C'est sur cette propriété que repose la construction par points ou d'un mouvement continu que nous avons donnée au commencement (nos 16 et 17).

235—Corollaire II. *La distance d'un point quelconque de l'hyperbole au foyer F est égale à l'une des normales menées de ce point au cercle décrit de l'autre foyer F' comme centre avec un rayon égal à l'axe transverse.* Pour un point M de la première branche (fig. 139), on a

$$MF' - MF = 2a = F'N,$$

et par suite,

$$MF = MF' - F'N = MN.$$

Pour un point M' de la seconde branche, on a

$$MF - MF' = 2a = F'N',$$

et, par suite,

$$M'F = M'F' + F'N' = M'N'.$$

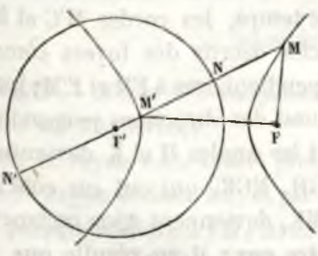


Fig. 139.

Dans le premier cas, la portion MN de la normale mesure la distance du point M au cercle et la première branche d'hyperbole est le lieu des points également distants du foyer F et du cercle directeur.

THÉORÈME IV.

236—*La tangente à l'hyperbole est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs qui vont du point de contact aux deux foyers.*

Prenons deux points voisins M et M′ sur l'hyperbole (fig. 140). Du foyer F comme centre, avec un rayon égal à FM′, décrivons un arc de cercle qui coupera en C le rayon vecteur FM; du foyer F′ comme centre, avec un rayon égal à F′M′, décrivons un arc de cercle qui coupera en D le rayon vecteur F′M; quand on passe du point M au point M′, les deux rayons vecteurs FM, F′M éprouvent des diminutions égales à MC et à MD; puisque la différence est constante, ces deux variations sont égales entre elles.

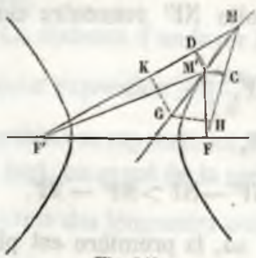


Fig. 140.

Sur la sécante MM′ prenons une longueur arbitraire MG, et par le point G menons GH parallèle à la corde MC et GK parallèle à la corde MD. A cause des parallèles, on a

$$\frac{MC}{MH}=\frac{MM'}{MG}=\frac{MD}{MK};$$

puisque les deux longueurs MC et MD sont égales, il en résulte que les deux longueurs MH et MK sont aussi égales. Lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, la sécante MM′ tend vers une position limite qui est la tangente à l'hyperbole au point M; en même temps, les cordes M′C et M′D deviennent tangentes aux cercles décrits des foyers comme centres et, par conséquent, perpendiculaires à FM et F′M; leurs parallèles GH, GK prennent aussi des directions perpendiculaires à ces mêmes rayons, et les angles H et K deviennent droits. Les deux triangles MGH, MGK, qui ont un côté MG commun et un côté MH égal à MK, deviennent donc rectangles et, par conséquent, égaux entre eux; il en résulte que les angles GMH, GMK deviennent égaux; ainsi la tangente à l'hyperbole au point M est bissectrice de l'angle FMF'.

237 — Corollaire I. L'hyperbole est la seule courbe qui jouisse de cette propriété; car en appelant u et v les rayons MF et MF', Δu et Δv leurs variations, on a

$$\frac{\Delta v}{\Delta u}=\frac{MD}{MC}=\frac{MK}{MH}.$$

Si l'on suppose que les angles GMH, GMK deviennent égaux, quand le point M' se rapproche indéfiniment du point M, les deux triangles MGH, MGK deviennent aussi égaux, ainsi que les côtés MH et MK; il en résulte

$$\lim \frac{\Delta v}{\Delta u}=1.$$

En remontant à la fonction primitive, on a

$$v=u+C, \quad \text{d'où} \quad v-u=C.$$

238 — Corollaire II. *Une ellipse et une hyperbole homofocales se coupent à angle droit.* On dit que deux courbes du second degré sont homofocales lorsque leurs foyers coïncident; on appelle angle de deux courbes l'angle de leurs tangentes au point d'intersection. Soit M le point d'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole qui ont mêmes foyers F, F' (fig. 141); la bissectrice MF de l'angle FMF' est d'une part normale à l'ellipse, d'autre part tangente à l'hyperbole; donc les tangentes MT, MN aux deux courbes sont perpendiculaires entre elles.

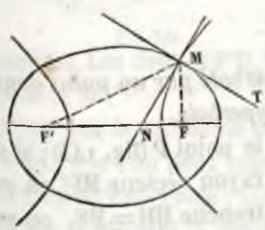


Fig. 141.

PROBLÈME V.

239 — *Mener une tangente à l'hyperbole par un point M donné sur l'hyperbole.*

Sur le rayon vecteur MF' prenons une longueur MH égale à l'autre rayon vecteur MF, et par le point M menons une droite MP perpendiculaire à FH; nous aurons la tangente demandée (fig. 142).

REMARQUE. Il est bon d'observer que la tangente est tout entière située entre les deux branches de l'hyperbole. Soit P un point quelconque de cette tangente, on a

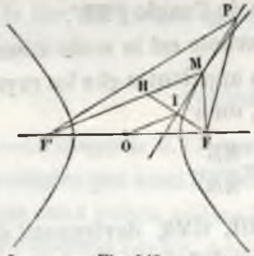


Fig. 142.

$$PF' - PH < F'H,$$

et, par suite,

$$PF' - PF < 2a;$$

donc le point P est situé entre les deux branches de l'hyperbole. Une branche de l'hyperbole, étant située d'un même côté de chacune de ses tangentes, est une courbe convexe.

La tangente étant perpendiculaire sur le milieu I de FH, le point I est la projection du foyer F sur la tangente. La droite OI, qui est parallèle à F'H et égale à la moitié de F'H, est constante; il en résulte que *le lieu des projections des foyers sur les tangentes est le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre.*

PROBLÈME VI.

240—*Mener une tangente à l'hyperbole par un point donné* P *situé entre les deux branches de l'hyperbole.*

Soit PM une tangente passant par le point P (fig. 143); si du rayon vecteur MF' on retranche MH = MF, on sait que la tangente PM est perpendiculaire sur le milieu de FH. La question revient à déterminer le point H; ce point se trouve à l'intersection du cercle décrit du foyer F' comme centre, avec un rayon égal à $2a$, et du cercle décrit du point

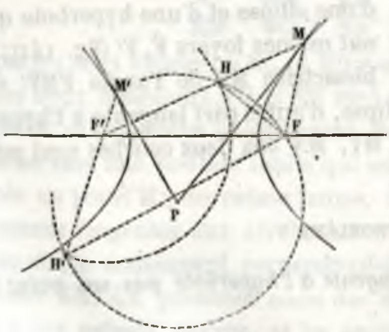


Fig. 143.

P comme centre avec un rayon égal à PF. On obtiendra la tangente en élevant une perpendiculaire sur le milieu de FH, et on déterminera le point de contact M par le rayon vecteur F'H.

Les deux cercles se coupent en un second point H′; en menant du point P une perpendiculaire sur FH′, on aura une seconde tangente PM′, dont on déterminera le point de contact à l'aide de la droite F′H′.

Lorsque le point P est situé sur l'une des asymptotes, l'une des tangentes menées par le point P coïncide avec cette asymptote, et le point de contact s'éloigne à l'infini.

PROBLÈME VII.

241 — *Mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une droite donnée* OL.

Du foyer F′ comme centre, avec un rayon égal à $2a$, on décrira le cercle directeur; du foyer F, on mènera une droite perpendiculaire à OL (fig. 144); cette droite coupera le cercle en deux points H et H′ : par les milieux des droites FH et FH′, on mènera des parallèles à OL; ces parallèles seront les tangentes demandées. Les droites F′H, F′H′ détermineront les points de contact M et M′.

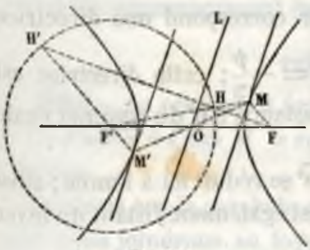


Fig. 144.

Pour que le problème soit possible, il faut que la droite donnée OL, que l'on peut supposer menée par le centre, ne rencontre pas l'hyperbole; alors la perpendiculaire FH′ menée par le foyer F coupera le cercle directeur en deux points.

PROBLÈME VIII.

4 — *Trouver les points de rencontre d'une droite et d'une hyperbole définie par ses foyers et son axe transverse.*

La construction est exactement la même que pour l'ellipse.

FOYER ET DIRECTRICE DE LA PARABOLE.

43 — Soit

$$y^2 - 2px = 0 \tag{6}$$

l'équation d'une parabole donnée rapportée à son axe et à la tangente au sommet. Cette équation ne contenant pas le terme en xy ni le terme en x^2, on doit avoir $mn = 0$, $1 - m^2 = 0$, d'où

$n=0$, $m=1$. Le coefficient du terme en y et le terme constant devant être aussi nuls, on a $\beta=0$, $\alpha^2-h^2=0$. D'ailleurs les équations (3) du nº 216 se réduisent à $1=\frac{\alpha+h}{p}$; on en déduit $\alpha+h=p$. L'équation $\alpha^2-h^2=0$ ou $(\alpha+h)(\alpha-h)=0$ devient $p(\alpha-h)=0$, c'est-à-dire $\alpha-h=0$; il en résulte $\alpha=h=\frac{p}{2}$. On n'a ici qu'une solution. Ainsi la parabole admet un seul foyer F situé sur son axe à une distance du sommet A égale à la moitié du paramètre (fig. 145). La distance FM ayant pour expression $x+\frac{p}{2}$, à ce foyer correspond une directrice DE, représentée par l'équation $x=-\frac{p}{2}$; cette directrice est perpendiculaire à l'axe et à une distance AD du sommet égale à AF.

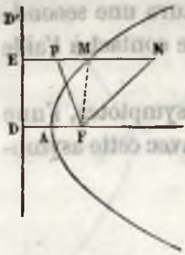


Fig. 145.

Le rapport constant $k=\sqrt{m^2+n^2}$ se réduit ici à l'unité; ainsi chacun des points de la parabole est également distant du foyer et de la directrice.

THÉORÈME V.

244 — *Tout point intérieur à la parabole est plus rapproché du foyer que de la directrice; tout point extérieur est, au contraire, plus rapproché de la directrice que du foyer.*

Considérons d'abord un point N situé à l'intérieur de la parabole; joignons-le au foyer et abaissons de ce point une perpendiculaire NE sur la directrice. Cette perpendiculaire rencontre la courbe en un point M que nous joignons au foyer. Le point M appartenant à la parabole, les distances MF et ME sont égales. Mais la ligne droite NF est plus courte que la ligne brisée NM + MF; si l'on remplace MF par son égale ME, on voit que la distance NF est plus petite que NE. Ainsi le point intérieur N est plus près du foyer que de la directrice.

Considérons maintenant un point extérieur P situé entre la courbe et la directrice. Joignons-le au foyer et abaissons sur la directrice une perpendiculaire PE que nous prolongerons jusqu'à sa rencontre en M avec la courbe. Le point M appartenant à la parabole, les distances MF et ME sont égales; la ligne droite MF ou son égale ME est plus courte que la ligne brisée MP + PF, si l'on retranche MP de part et d'autre, on voit que PE est plus courte que PF. Ainsi le point éxtérieur P est plus près de la directrice que du foyer. Lorsque le point P est situé à gauche de la directrice, il est évidemment plus près de la directrice que du foyer.

Il résulte de là que la parabole peut être considérée comme le lieu des points également distants du foyer et de la directrice. C'est ainsi qu'on définit la parabole en Géométrie élémentaire, et c'est sur cette propriété que repose la construction de la parabole par points ou d'un mouvement continu, dont nous avons parlé au commencement (n°s 20 et 21).

THÉORÈME VI.

245—*La tangente à la parabole fait des angles égaux avec la parallèle à l'axe et le rayon vecteur menés par le point de contact.*

Prenons sur la parabole deux points voisins M et M′ (fig. 146), que nous joindrons au foyer et desquels nous abaisserons des perpendiculaires ME, M′E′ sur la directrice. Du foyer F comme centre, avec FM′ pour rayon, décrivons un arc de cercle M′C, et par le point M′ menons une parallèle M′C′ à la directrice. La longueur MC est la différence des deux rayons vecteurs FM et FM′; c'est la diminution qu'éprouve le rayon vecteur FM quand on passe du point M au point M′. De même la longueur MC′ est la différence des deux perpendiculaires ME et M′E′; c'est la diminution qu'éprouve la perpendiculaire ME quand on passe du point M au point M′. Comme le rayon vecteur MF reste constamment égal à la perpendiculaire ME, il en résulte que les deux variations MC et MC′ sont égales entre elles.

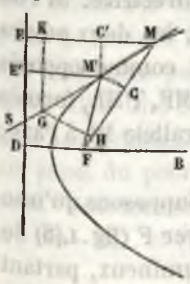


Fig. 146.

Menons la sécante MS par les deux points M et M′ et traçons la corde M′C dans le cercle décrit du foyer comme centre. Sur la sécante portons une longueur arbitraire MG, et par le point

G menons GH parallèle à M′C et GK parallèle à M′C′. A cause des parallèles, on a les rapports égaux $\frac{MC}{MH}=\frac{MM'}{MG}=\frac{MC'}{MK}$; puisque les deux longueurs MC et MC′ sont égales, les deux longueurs MH et MK, qui leur sont proportionnelles, sont aussi égales.

Supposons maintenant que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M; la sécante MS tendra vers la tangente MT à la parabole; la corde M′C prolongée tendra de même vers la tangente au cercle, et, par conséquent, deviendra perpendiculaire au rayon FM; la parallèle GH prendra aussi une direction perpendiculaire à FM. On voit par là que les deux triangles MGH, MGK ont pour limites deux triangles rectangles MGH, MGK (fig. 147); ces deux triangles rectangles, ayant l'hypoténuse MG commune, et les côtés MH et MK égaux entre eux comme limites de longueurs égales, sont égaux; d'où l'on conclut l'égalité des deux angles GMH, GMK. Ainsi la tangente MT à la parabole est bissectrice de l'angle FME, formé par le rayon MF et la perpendiculaire ME abaissée du point de contact sur la directrice. Si l'on prolonge EM suivant ML, les deux angles GMK, T′ML étant égaux comme opposés par le sommet, on voit que les deux angles TMF, T′ML, formés par la tangente avec le rayon vecteur et la parallèle ML à l'axe, sont égaux.

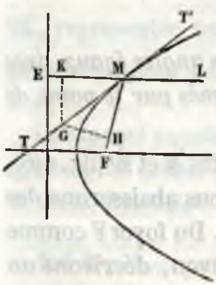


Fig. 147.

246—Corollaire I. Supposons qu'une lumière soit placée au foyer F (fig. 148) de la parabole; les rayons lumineux, partant du foyer F, se réfléchissent sur la parabole en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Soit FM l'un de ces rayons; menons la tangente TT′ à la parabole en ce point, le rayon réfléchi, devant faire un angle LMT′ égal à FMT, sera parallèle à l'axe AB de la parabole. Ainsi tous les rayons réfléchis seront parallèles à l'axe.

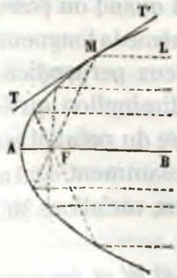


Fig. 148.

C'est d'après ce principe que l'on construit les réflecteurs employés dans les réverbères et les lanternes des voitures. La surface intérieure, en métal bien poli, est engendrée par une parabole tournant autour de son axe; la lumière est placée au foyer; les rayons lumineux, après leur réflexion, devenant tous parallèles à l'axe, le réflecteur projette un faisceau de rayons parallèles qui se propagent sans se disperser et qui éclairent à une grande distance.

Corollaire II. Supposons au contraire que des rayons lumineux, parallèles à l'axe, tombent sur un miroir parabolique; après leur réflexion, ils iront tous converger au foyer.

On emploie les miroirs paraboliques dans la construction des télescopes; l'axe est dirigé vers l'astre; les rayons lumineux venant de l'astre se réfléchissent sur le miroir, et forment au foyer une image très-brillante de l'astre.

On emploie aussi la forme parabolique dans la construction des porte-voix et des cornets acoustiques.

247 — Corollaire III. Réciproquement, la parabole est la seule courbe qui jouisse de cette propriété que la tangente en chacun de ses points fasse des angles égaux avec la parallèle à une droite fixe et le rayon vecteur mené d'un point fixe au point de contact. Imaginons que chacun des points M du plan soit déterminé par sa distance MF au point fixe F, et sa distance ME à une droite DE perpendiculaire à la droite fixe FB (fig. 146); désignons par u et v ces deux coordonnées. Quand on passe du point M de la courbe au point voisin M', ces deux coordonnées éprouvent des variations $\Delta u = -\mathrm{MC}$, $\Delta v = -\mathrm{MC'}$, et l'on a

$$\frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{\mathrm{MC'}}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{MH}}.$$

Quand le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la droite M'M devient tangente et l'angle H devient droit. Les deux triangles rectangles limites GMH, GMK (fig. 147) sont égaux, comme ayant l'hypoténuse commune et l'angle GMH égal à GMK par hypothèse. On a donc

$$\lim \frac{\Delta v}{\Delta u} = 1,$$

et en remontant à la fonction primitive $v=u+C$. En déplaçant la droite DE d'une quantité égale à la constante C, on aura $v=u$.

PROBLÈME IX.

248 — *Mener une tangente par un point* M *donné sur la parabole.*

Première méthode. Soit T (fig. 149) le point où la tangente rencontre le prolongement de l'axe, ME la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice. On sait que la tangente est bissectrice de l'angle FME; l'angle FTM étant égal à l'angle alterne-interne TME et, par suite, à l'angle FMT, il en résulte que le triangle TFM est isocèle, et les deux côtés FM et FT égaux entre eux.

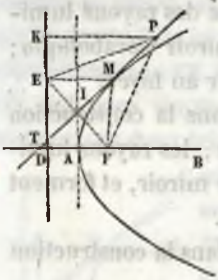


Fig. 149.

Ainsi, pour construire la tangente au point M, il suffit de porter sur l'axe une longueur FT égale au rayon vecteur FM et de joindre TM.

Cette méthode ne convient pas quand le point M est très-voisin du sommet A de la parabole, parce que les deux points M et T, étant alors très-rapprochés l'un de l'autre, ne déterminent pas la tangente avec une assez grande précision. Dans ce cas, on emploiera de préférence la méthode suivante.

Deuxième méthode. La tangente MT, divisant en deux parties égales l'angle au sommet M du triangle isocèle FME, est perpendiculaire sur le milieu de la base FE.

Ainsi, pour construire la tangente, il suffit d'abaisser du point M une perpendiculaire ME sur la directrice, et de mener du point M une perpendiculaire sur la droite FE.

Il résulte de cette construction que la tangente au sommet A de la parabole est perpendiculaire à l'axe de la parabole.

Remarque. Il est bon d'observer que tous les points de la tangente, excepté le point de contact M, sont situés à l'extérieur de la parabole. Soit P un point quelconque de la tangente; la tangente étant perpendiculaire sur le milieu de FE, les distances PE, PF sont égales; mais l'oblique PE est plus grande que la perpendiculaire PK ; donc la distance PF est plus grande que PK, et, par suite, le point P est à l'extérieur de la parabole. Il en résulte que la parabole est une courbe convexe.

249 — Corollaire. *Le lieu des projections du foyer sur la tangente à la parabole est la tangente au sommet.* On voit, en effet, que le point I milieu de FE et projection du foyer sur la tangente, se trouve sur la parallèle à la directrice menée par le point A, milieu de FD, c'est-à-dire sur la tangente au sommet A.

PROBLÈME X.

250 — *Mener une tangente à la parabole par un point extérieur* P.

Supposons le problème résolu et soit PM (fig. 150) une tangente passant par le point P. Si l'on abaisse du point M une perpendiculaire ME sur la directrice et si l'on joint FE, on sait que la tangente PM est perpendiculaire sur le milieu de FE ; il en résulte que la distance PE est égale à PF, et l'on en déduit la construction suivante.

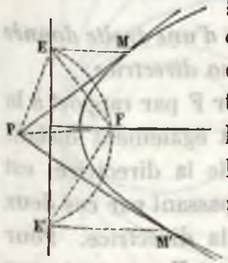


Fig. 150.

Du point P comme centre, avec un rayon égal à la distance PF de ce point au foyer, décrivons un cercle qui coupera la directrice au point E. Joignons FE, et du point P menons une perpendiculaire sur la droite FE, nous aurons la tangente demandée. Le point de contact M sera déterminé par l'intersection de la tangente avec une parallèle à l'axe menée par le point E.

Le cercle coupe la directrice en un second point E'. On mènera de même du point P une perpendiculaire sur FE' et l'on aura une seconde tangente PM'.

Ces constructions peuvent être effectuées sans que la parabole soit tracée. Il suffit que l'on connaisse le foyer et la directrice.

PROBLÈME XI.

251 — *Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée* KL.

Supposons le problème résolu et soit MT la tangente demandée (fig. 151). Si du point de contact M on abaisse une perpendiculaire ME sur la directrice et que l'on joigne FE, on sait que la tangente est perpendiculaire sur le milieu de FE. On en déduit la construction suivante :

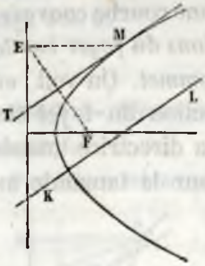


Fig. 151.

Du foyer F abaissons une perpendiculaire sur la droite donnée KL jusqu'à sa rencontre avec la directrice en E, et sur le milieu de FE élevons une perpendiculaire MT, nous aurons la tangente demandée. On déterminera le point de contact M en menant par le point E une parallèle EM à l'axe.

PROBLÈME XII.

252 — *Trouver les points de rencontre d'une droite donnée et d'une parabole définie par son foyer et sa directrice.*

Prenons le point F_1, symétrique du foyer F par rapport à la droite donnée (fig. 152). Le point M étant également distant des points F, F_1, et de la directrice, est le centre d'un cercle passant par ces deux points et tangent à la directrice. Pour avoir le point de contact E, on porte sur la directrice, à partir du point I, où la droite FF_1 rencontre la directrice, et de part et d'autre, une longueur IE moyenne proportionnelle entre les deux longueurs IF, IF_1 ; on en déduit les deux points d'intersection M et M'.

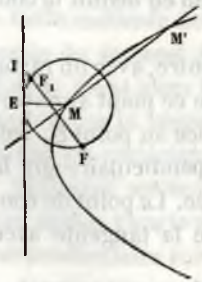


Fig. 152.

Lorsque le point F_1, symétrique du foyer par rapport à la droite donnée, est situé à droite de la directrice, il y a effectivement deux solutions. Lorsque le point F_1 est sur la directrice, la droite est tangente à la parabole. Enfin, quand le point F_1 est à gauche de la directrice, la droite ne rencontre pas la parabole.

THÉORÈME VII.

253 — *La limite d'une ellipse ou d'une hyperbole dont le* *paramètre conserve une valeur finie, tandis que le grand axe ou l'axe transverse augmente indéfiniment, est une parabole.*

Dans la parabole l'ordonnée du foyer est égale au paramètre p ; par analogie, on appelle *paramètre* d'une ellipse ou d'une hyperbole l'ordonnée du foyer qui est égale à $\frac{b^2}{a}$, et on désigne ce paramètre par p. L'ellipse, rapportée à son grand axe et à la tangente au sommet (fig. 153), a une équation de la forme

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2, \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Supposons maintenant que le sommet A restant fixe, et le paramètre p conservant une valeur finie, on fasse augmenter le grand axe $2a$ indéfiniment, l'équation de l'ellipse se réduit à l'équation $y^2 = 2px$, qui représente une parabole. Si l'on considère les points qui correspondent à une même valeur de x, on voit que chaque point de la parabole est la position limite vers laquelle tend le point correspondant de l'ellipse, quand on fait augmenter a indéfiniment; ce qu'on énonce en disant que la parabole est la limite de l'ellipse.

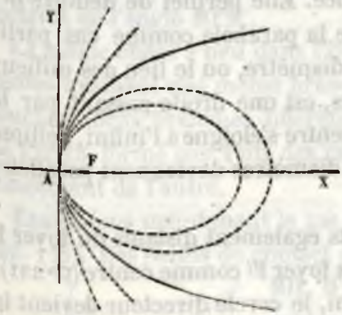


Fig. 153.

L'hyperbole, rapportée à son axe transverse et à la tangente au sommet A, a de même pour équation

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2;$$

si l'on fait augmenter a indéfiniment, le paramètre p, conservant une valeur finie, cette équation se réduit aussi à

$$y^2 = 2px.$$

La parabole est la limite de la branche d'hyperbole à laquelle appartient le sommet A; l'autre branche s'est éloignée indéfiniment vers la gauche.

Dans ce qui précède nous avons supposé que le paramètre de l'ellipse ou de l'hyperbole conserve une valeur finie. On arrive à la même conclusion, en supposant que la distance AF du sommet A au foyer voisin F conserve une valeur finie. En effet, en appelant α cette distance, on a, dans l'ellipse, $c = a - \alpha$ et, par suite,

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{(a-c)(a+c)}{a} = \alpha\left(2 - \frac{\alpha}{a}\right);$$

le paramètre p ayant pour limite la quantité finie 2α, l'équation de l'ellipse se réduit à $y^2 = 4\alpha x$. Il en est de même pour l'hyperbole.

254 — Remarque. Cette transformation de l'ellipse en parabole a une grande importance. Elle permet de déduire des propriétés de l'ellipse celles de la parabole comme cas particuliers. Ainsi dans l'ellipse le diamètre, ou le lieu des milieux d'une série de cordes parallèles, est une droite passant par le centre; si l'on suppose que le centre s'éloigne à l'infini, l'ellipse se change en parabole, et les diamètres deviennent parallèles à l'axe.

L'ellipse est le lieu des points également distants du foyer F et du cercle directeur décrit du foyer F′ comme centre (nº 221). Le foyer F′ s'éloignant à l'infini, le cercle directeur devient la directrice de la parabole.

La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs qui vont du point de contact M aux deux foyers (nº 222); le foyer F′ s'éloignant à l'infini, le rayon vecteur MF′ devient parallèle à l'axe.

THÉORÈME VIII.

255 — *Si l'on mène deux tangentes à une courbe du second degré, la droite* FP, *qui va du foyer* F *au point de concours* P *des deux tangentes, est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs* FM, FM′, *qui vont de ce foyer aux points de contact des deux tangentes, ou de l'angle extérieur, suivant que les deux tangentes touchent une même branche de courbe, ou deux branches différentes.*

Considérons deux tangentes PM, PM′ à une ellipse (fig. 154);

prolongeons le rayon F'M d'une longeur MH égale à MF, et de même FM' d'une longueur M'H' égale à M'F'; les tangentes étant perpendiculaires sur les milieux de FH et de F'H', on a

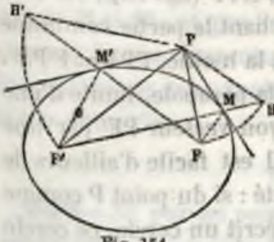


Fig. 154.

$$PH = PF \quad \text{et} \quad PH' = PF',$$

et les deux triangles F'PH, H'PF sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir $F'H = FH' = 2a$, $PH = PF$, $PF' = PH'$; on en conclut que les angles PHM, PFM' sont égaux; mais l'angle PHM est égal à PFM; donc les angles PFM, PFM' sont égaux et la droite FP est bissectrice de l'angle MFM'.

La même chose a lieu dans l'hyperbole, quand les deux tangentes touchent une même branche; mais quand les tangentes touchent deux branches différentes, la droite FP est bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs FM, et le prolongement de l'autre.

Examinons maintenant le cas où la courbe est une parabole (fig. 155). Des points de contact abaissons des perpendiculaires MH, M'H' sur la directrice; les tangentes étant perpendiculaires sur les milieux des droites FH, FH', les angles PFM, PFM' sont égaux respectivement aux angles PHM, PH'M'. Les droites PH et PH', égales à la droite PF, sont égales entre elles, et le triangle HPH' est isocèle. Les angles PHM, PH'M', complémentaires des angles égaux du triangle isocèle, sont égaux entre eux; donc les angles PFM, PFM' sont égaux. C'est ce que l'on peut d'ailleurs conclure immédiatement en regardant la parabole comme la limite d'une ellipse.

Fig. 155.

THÉORÈME IX.

256 — *Les tangentes menées d'un point extérieur* P *à une* *ellipse ou à une hyperbole, font des angles égaux avec les droites qui joignent ce point aux deux foyers.*

Dans les deux triangles égaux F′PH, H′PF (fig. 154), on a les angles égaux F′PH, H′PF ; en retranchant la partie commune F′PF, on a FPH$=$F′PH′, et, en prenant la moitié, FPM$=$F′PM′.

La même propriété subsiste dans la parabole, limite d'une ellipse ; il suffit de remplacer le rayon vecteur PF′ par une droite PI parallèle à l'axe (fig. 155). Il est facile d'ailleurs de démontrer directement cette propriété : si du point P comme centre, avec un rayon égal à PF, on décrit un cercle, ce cercle passera par les points H et H′ ; les angles MPI, FHH′ sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires ; mais l'angle inscrit FHH′ est moitié de l'angle au centre FPH′ et, par conséquent, égal à l'angle FPM′ ; donc les angles MPI, M′PF sont égaux.

THÉORÈME X.

257 — *La droite* FK, *qui joint le foyer d'une courbe du second degré au point où une sécante quelconque rencontre la directrice, est bissectrice de l'angle extérieur des rayons vecteurs allant du foyer aux points où la sécante coupe la courbe, ou bissectrice de l'angle même des rayons vecteurs, suivant que les deux points d'intersection* M *et* M′ *sont situés sur la même branche de la courbe ou sur deux branches différentes.*

Des points M et M′ abaissons des perpendiculaires sur la directrice (fig. 156) ; on a

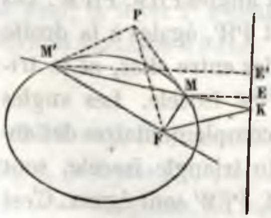


Fig. 156.

$$\frac{MF}{ME}=\frac{M'F}{M'E'},$$

et, par suite,

$$\frac{MF}{M'F}=\frac{ME}{M'E'}=\frac{MK}{M'K}.$$

Lorsque les deux points M et M′ appartiennent à une même branche de la courbe, le point K étant situé sur le prolongement de la corde MM′, la droite FK est bissectrice de l'angle extérieur au triangle MFM′. Lorsque les points M et M′ appartiennent à deux branches différentes, le point K étant situé entre les points M et M′, la droite FK est bissectrice de l'angle MFM′.

Corollaire. Si l'on mène des tangentes à la courbe aux points M et M′, et que l'on joigne le foyer F au point de concours P de ces tangentes, les deux droites FK, FP, étant les bissectrices de deux angles supplémentaires, sont perpendiculaires entre elles.

THÉORÈME XI.

258—*Si, par un point* P *pris sur la directrice, on mène des tangentes à une courbe du second degré, la droite des contacts* MM′ *passe par le foyer correspondant* F *et est perpendiculaire à la droite* FP *qui joint le point* P *au foyer* (fig. 157).

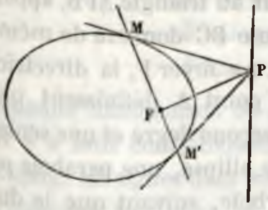


Fig. 157.

Imaginons que la tangente PM soit la limite d'une sécante dont les deux points d'intersection se sont réunis en un seul ; en vertu du théorème précédent, la droite FP est perpendiculaire à FM ; elle est de même perpendiculaire à FM′ ; donc la ligne MFM′ est droite et perpendiculaire à FP.

THÉORÈME XII.

259 — *Le produit des distances des deux foyers à une tangente quelconque de l'ellipse ou de l'hyperbole est constant.*

Soient FH, F′H′ les perpendiculaires abaissées des foyers sur une première tangente (fig. 158), FK, F′K′ les perpendiculaires abaissées sur une seconde tangente, P le point de rencontre des deux tangentes. En vertu du théorème IX, les triangles rectangles FPH, F′PK′ sont semblables, ainsi que les triangles FPK, F′PH′, et l'on a

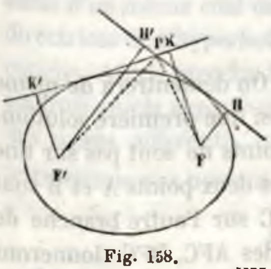


Fig. 158.

$$\frac{FH}{F'K'} = \frac{FP}{F'P} = \frac{FK}{F'H'},$$

d'où

$$FH \times F'H' = FK \times F'K'.$$

Si la courbe est une ellipse, en menant la tangente parallèle au grand axe, on reconnaît que le produit constant est égal à b^2. Quand la courbe est une hyperbole, si l'on considère l'asymptote comme la limite d'une tangente, on voit aussi que le produit est égal à b^2.

PROBLÈME XIII.

260 — *Construire une courbe du second degré, connaissant le foyer* F *et trois points* A, B, C.

Supposons le problème résolu et les trois points appartenant à une même branche ; le point D, où la sécante AB est coupée par la bissectrice de l'angle extérieur au triangle AFB, appartient à la directrice (n° 257) ; la sécante BC donnera de même un second point D′ de la directrice. Le foyer F, la directrice DD′ et le point A définissent une courbe du second degré et une seule ; ce sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que la distance AF sera inférieure, égale ou supérieure à la distance AE du point A à la directrice. Il est facile de voir que cette courbe passera par les deux points B et C ; en effet, à cause de la bissectrice FD, on a

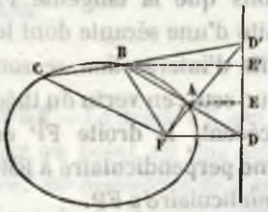


Fig. 159.

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE'},$$

et, par suite,

$$\frac{AF}{AE} = \frac{BF}{BE'};$$

donc la courbe passe par le point B. On démontrera de même qu'elle passe par le point C. On a ainsi une première solution.

On peut supposer que les trois points ne sont pas sur une même branche ; si, par exemple, les deux points A et B sont sur une même branche et le point C sur l'autre branche de l'hyperbole, les bissectrices des angles AFC, BFC donneront deux points de la directrice. Les trois solutions obtenues de cette manière sont des hyperboles. On a donc en tout quatre solutions ; des quatre courbes du second degré qui admettent le foyer donné et passent par les trois points donnés, trois sont toujours des hyperboles, la quatrième est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant la disposition des points.

261 — Le calcul conduit à la même conséquence; soient α et β les coordonnees du foyer, x' et y', x'' et y'', x''' et y''' les coordonnées des trois points donnés, δ', δ'', δ''', leurs distances au foyer; l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(mx+ny+h)^2=0,$$

et alors la directrice aura pour équation $mx+ny+h=0$. On déterminera les trois constantes m, n, h à l'aide des trois équations du premier degré

$$\begin{aligned}\delta' &= \pm(mx'+ny'+h),\\ \delta'' &= \pm(mx''+ny''+h),\\ \delta''' &= \pm(mx'''+ny'''+h).\end{aligned}$$

Chaque combinaison de signes donne un système d'équations; il y a huit combinaisons: mais on remarque que, si l'on change les signes dans les trois équations, les valeurs de m, n, h changent de signes, et la courbe reste la même; on a donc quatre solutions.

La distance d'un point à une droite est exprimée par une formule renfermant un double signe; on doit prendre le même signe pour tous les points situés d'un même côté de la droite, et l'autre signe pour tous les points situés de l'autre côté. On sait que l'ellipse est située tout entière d'un même côté par rapport à chacune de ses directrices; la parabole est située aussi d'un même côté de sa directrice, tandis que chacune des directrices de l'hyperbole passe entre les deux branches de la courbe. Ainsi, prendre le même signe revient à supposer que les trois points appartiennent à une même branche; prendre des signes différents, que deux points sont sur une branche, le troisième sur une autre branche.

PROBLÈME XIV.

262 — *Construire une courbe du second degré, connaissant un foyer et trois tangentes.*

Supposons le problème résolu; si du foyer F on abaisse des perpendiculaires sur les trois tangentes, et qu'on prolonge chacune d'elles d'une longueur égale à elle-même, on obtient trois points H, H′, H″, appartenant au cercle directeur (fig. 160 qui a pour centre le second foyer F′; le rayon F′H de ce cercle est égal à l'axe $2a$ qui passe par les deux foyers. Les deux foyers F, F′, avec la longueur $2a$ définissent une courbe du second degré et une seule. Il est aisé de voir que cette courbe est tangente aux trois droites données; en effet, soit M le point où le rayon F′H coupe la droite MT, la somme ou la différence des rayons vecteurs MF′ et MF étant égale à F′H ou à $2a$, le point M appartient à la courbe; en outre, la droite MT, étant perpendiculaire sur le milieu de FH, est tangente à la courbe au point M; le problème admet ainsi une solution et une seule.

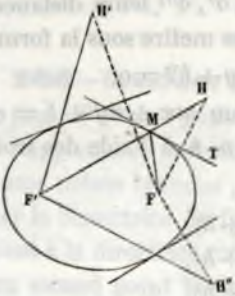
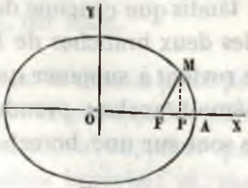


Fig. 160.

Si les trois points H, H′, H″ étaient en ligne droite, la courbe cherchée serait une parabole ayant pour directrice cette droite.

ÉQUATION DES COURBES DU SECOND DEGRÉ EN COORDONNÉES POLAIRES.

263 — Nous prendrons pour pôle un foyer F, et pour axe polaire la droite qui va de ce foyer au sommet voisin A de la courbe.



Figr 161.

Considérons d'abord l'ellipse; prenons pour pôle le foyer F et pour axe polaire la direction FA (fig. 161). Nous avons trouvé (n° 219) pour expression de la distance du foyer à un point quelconque M de la courbe

$$\rho = a - \frac{c}{a}x,$$

la courbe étant rapportée à ses axes; si l'on projette la ligne brisée OFM sur le grand axe, il vient $x = c + \rho \cos \omega$; en remplaçant x par cette valeur dans l'équation précédente, et désignant par e l'excentricité $\frac{c}{a}$, on en déduit

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \omega}. \tag{1}$$

Supposons maintenant que la courbe soit une hyperbole.

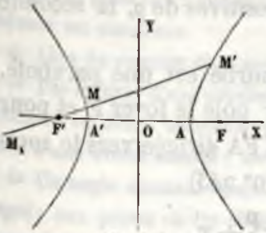


Fig. 162.

Prenons pour foyer le pôle F′ et pour axe polaire la direction F′A′ de l'axe transverse (fig. 162). Nous avons vu (n° 233) que la distance du foyer F′ à un point quelconque de la courbe est exprimée par la formule

$$\rho = \pm \left(\frac{cx}{a} + a \right),$$

le signe — s'appliquant à la branche de gauche, le signe + à la branche de droite. Projetons sur l'axe transverse OX la ligne brisée O′FM, on a $x = -c + \rho \cos \omega$. Il en résulte que la première branche de l'hyperbole est représentée par l'équation

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \omega}, \tag{1}$$

la seconde par l'équation

$$\rho = \frac{-p}{1 - e \cos \omega}. \tag{2}$$

Mais si l'on convient de porter les rayons vecteurs négatifs en sens contraire de la direction indiquée par l'angle ω, il est facile de voir que l'équation (1) représente à elle seule les deux branches de l'hyperbole. Soit M′ un point quelconque de la seconde branche, ω' l'angle correspondant A′F′M′, ρ' le rayon vecteur F′M′; en vertu de l'équation (2), on a $\rho' = \frac{-p}{1 - e \cos \omega'}$. Dans l'équation (1), donnons à l'angle ω la valeur $\omega' + \pi$, il viendra

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \omega'} = -\rho';$$

on obtient ainsi pour ρ une valeur négative $-\rho'$; mais la valeur $\omega' + \pi$ attribuée à ω indique la direction $F'M_1$ opposée de $F'M'$. Si ρ avait une valeur positive, il faudrait la porter dans la direction $F'M_1$; ρ ayant une valeur négative $-\rho'$, on convient de porter la valeur absolue ρ' en sens inverse, c'est-à-dire dans la direction $F'M'$, ce qui donne le point M'. Il résulte de là que l'équation (1) suffit pour représenter les deux branches de l'hyperbole, la première par les valeurs positives de ρ, la seconde par les valeurs négatives.

Considérons enfin le cas où la courbe est une parabole.

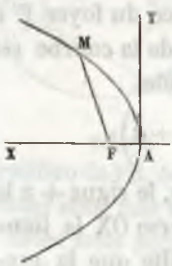


Fig. 163.

Prenons encore pour pôle le foyer F et pour axe polaire la droite FA dirigée vers le sommet (fig. 163). On a (n° 243)

$$\rho = \frac{p}{2} + x.$$

En projetant sur l'axe AX la ligne brisée AFM, on a comme précédemment

$$x = \frac{p}{2} + \rho\cos(\pi - \omega) = \frac{p}{2} - \rho\cos\omega;$$

d'où l'on déduit

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos\omega}. \tag{3}$$

Il résulte de ce qui précède que l'équation (1) représente les trois courbes du second degré; la courbe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que l'excentricité e est inférieure, égale ou supérieure à l'unité.

EXERCICES.

1° M et M' étant deux points d'une parabole, P le point de concours des tangentes en ces deux points et F le foyer; démontrer que l'on a $\frac{\overline{PM}^2}{MF} = \frac{\overline{PM'}^2}{M'F}$.

2° Dans une courbe du second degré, la perpendiculaire abaissée du foyer sur une courbe et le diamètre conjugué de la corde se coupent sur la directrice.

3° Un demi-diamètre d'une ellipse ou d'une hyperbole est moyen proportionnel entre les droites qui joignent les foyers à l'extrémité du diamètre conjugué du premier.

4° Dans l'hyperbole équilatère la distance d'un point quelconque de la courbe au centre est moyenne proportionnelle entre les distances de ce point aux foyers.

5° Trouver dans le plan d'une ellipse un cercle tel que la longueur de la tangente menée au cercle de chacun des points de l'ellipse soit une fonction rationnelle, entière et du premier degré des coordonnées de ce point.

Démontrer que la somme ou la différence des tangentes menées de chacun des points de l'ellipse à deux cercles jouissant de la propriété précédente est constante.

6° Lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à une parabole.

7° Par le foyer d'une parabole on mène une corde, et sur la corde comme diamètre on décrit un cercle, puis on mène au cercle des tangentes parallèles à une droite donnée ; trouver le lieu des points de contact.

8° Un angle constant tourne autour du foyer d'une courbe du second degré ; aux points où les côtés de l'angle rencontrent la courbe, on mène des tangentes à cette courbe ; trouver le lieu du point d'intersection de ces tangentes.

9° Étant donnée une ellipse, en un point quelconque M, on mène la tangente que l'on prolonge jusqu'aux points P et Q, où elle rencontre les tangentes aux extrémités du grand axe; trouver le lieu du point de rencontre N des droites F'P et FQ, et du point de rencontre N' des droites FP et F'Q. Démontrer que les deux points N et N' sont situés sur la normale au point M.

10° Étant donnée une courbe du second degré, une sécante tourne autour d'un point fixe P ; on joint au foyer F les points M et M' où elle coupe la courbe ; démontrer que le produit $\operatorname{tang} \frac{PFM}{2} \operatorname{tang} \frac{PFM'}{2}$ est constant.

11° L'angle sous lequel du foyer d'une courbe du second degré on voit la portion d'une tangente mobile comprise entre deux tangentes fixes est constant.

12° Un triangle étant circonscrit à une parabole, le point de concours des hauteurs est sur la directrice, et le cercle circonscrit au triangle passe par le foyer.

13° Si, en un point quelconque M d'une ellipse, on mène une normale, la portion de cette normale comprise entre le point M et le petit axe a pour projection sur les rayons vecteurs menés du point M aux deux foyers une longueur égale au demi-grand axe.

14° La portion de la normale comprise entre le point M et le grand axe a pour projection sur les rayons vecteurs une longueur égale au paramètre de l'ellipse.

15° Deux courbes du second degré ont un foyer commun ; si l'on mène de ce foyer des rayons vecteurs aux extrémités d'un diamètre quelconque de l'une des courbes, la somme ou la différence des rapports de ces rayons aux rayons de la seconde courbe qui ont la même direction est constante.

16° On prolonge les rayons vecteurs qui vont d'un point quelconque M de l'ellipse aux deux foyers F et F' jusqu'à leur rencontre en P et Q avec a courbe; démontrer que la somme $\frac{MF}{FP}+\frac{MF'}{F'Q}$ est constante.

17° Une rose des vents formée de m rayons tourne autour de son centre placé au foyer d'une ellipse; démontrer que la somme des inverses des longueurs comptées sur chaque rayon depuis le foyer jusqu'au point où il coupe l'ellipse, est constante.

18° D'un point quelconque P situé dans le plan d'une ellipse, on mène des tangentes à cette ellipse; on abaisse du point P une perpendiculaire PC sur la corde des contacts AB; les droites PC et AB coupent le petit axe en D et E; démontrer que le cercle décrit sur DE comme diamètre passe par les deux foyers.

19° Étant données deux ellipses homofocales, par un point P on mène à l'une d'elles des tangentes qui rencontrent la seconde, l'une en A et B, l'autre en C et D; démontrer que l'on a

$$\frac{1}{PA}\pm\frac{1}{PB}=\frac{1}{PC}\pm\frac{1}{PD}.$$

20° On décrit un cercle sur le grand axe d'une ellipse comme diamètre l'ordonnée d'un point quelconque M de l'ellipse rencontre le cercle en un point N; si l'on appelle ω l'angle que fait avec le grand axe le rayon vecteur FM, et u l'angle que fait avec le grand axe le rayon ON du cercle, on a les relations

$$\rho=a(1-e\cos u),\qquad \tan\frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}.$$

En désignant par S l'aire du secteur elliptique AFM, on a aussi

$$S=\frac{ab}{2}(u-e\sin u).$$

21° Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales.

22° Un triangle étant inscrit dans une parabole, si l'on appelle R le rayon du cercle circonscrit au triangle, c, c', c'', les cordes menées par le foyer parallèlement aux côtés θ, θ', θ'' des angles que font les côtés avec l'axe, on a

$$R\sin\theta.\sin\theta'.\sin\theta''=p,\qquad 8pR^2=cc'c''.$$

23° Soient A le sommet, F le foyer d'une parabole (ρ, ω), (ρ', ω') les coordonnées de deux points M et M′ de la courbe, θ l'angle MFM′, S l'aire du secteur AFM, A celle du secteur MFM′, l la longueur de la corde MM′; démontrer les formules suivantes employées en astronomie:

$$p=\frac{2\rho\rho'\sin^2\frac{\theta}{2}}{\rho+\rho'-2\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2}},\qquad 2\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{(\rho+\rho')^2-l^2},$$

$$S=\frac{1}{6}(p+\rho)\sqrt{p(2\rho-p)}=\frac{p^2}{12}\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\left(3+\operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2}\right),$$

$$A=\frac{1}{3}\sqrt{\rho\rho'}\sin\frac{\theta}{2}\left(\rho+\rho'+\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\rho+\rho'+\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{2p\left(\rho+\rho'-2\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2p}}{6}\left[\left(\frac{\rho+\rho'+l}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{\rho+\rho'-l}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

CHAPITRE VIII

Sections coniques.

THÉORÈME I.

264—*La section d'un cylindre circulaire droit par un plan quelconque oblique à la base est une ellipse.*

Par l'axe CC′ du cylindre (fig. 164) menons un plan perpendiculaire au plan sécant; nous prendrons ce plan pour plan de la figure. Ce plan coupe le cylindre suivant deux génératrices opposées GG′, HH′, et le plan sécant suivant la droite AA′. Dans le plan de la figure, décrivons deux cercles C et C′ tangents à la droite AA′ et aux deux génératrices GG′, HH′ du cylindre; il suffit pour cela de mener

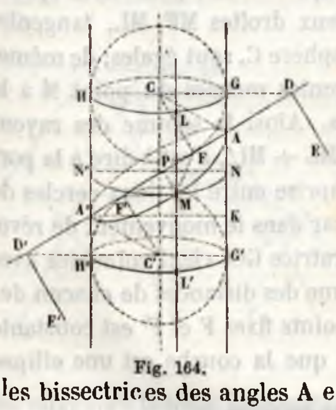


Fig. 164.

les bissectrices des angles A et A′ jusqu'à leur rencontre en C et C′ avec l'axe du cylindre; si, du point C comme centre, avec le rayon du cylindre, on décrit un cercle, ce cercle touchera les génératrices en G et H, et la droite AA′ au point F; le cercle décrit du point C′ comme centre touchera de même les génératrices en G′ et H′, et la droite AA′ au point F′. Imaginons maintenant que la figure tourne autour de l'axe CC′; la génératrice GG′ engendrera la surface du cylindre, tandis que les deux cercles engendreront deux sphères inscrites dans le cylindre et le touchant intérieurement, la première suivant la circonférence de grand cercle GLH, la seconde suivant la circonférence de grand cercle G′L′H′. En outre, les deux sphères sont tangentes au plan proposé, la première au point F, la seconde au point F′. En effet, le plan de la figure et le plan proposé sont perpendiculaires entre eux; la droite CF, qui est tracée dans le premier plan perpendiculairement à leur intersection AA′, est perpendiculaire au second plan; le plan AMA′, étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon CF, est tangent à la sphère C au point F. On verrait de même que ce plan est tangent à la sphère C′ au point F′.

Cela posé, soit AMA′ la courbe suivant laquelle le plan sécant coupe le cylindre; nous allons démontrer que cette courbe est une ellipse ayant pour foyers les points F et F′. Joignons un point quelconque M de cette courbe aux deux points F et F′; par le point M passe une génératrice LL′ du cylindre; cette génératrice touche la sphère supérieure au point L, la sphère inférieure au point L′. Les deux droites MF, ML, tangentes menées du même point M à la sphère C, sont égales; de même, les deux droites MF′, ML′, tangentes menées du point M à la sphère inférieure, sont égales. Ainsi la somme des rayons vecteurs MF + MF′ est égale à ML + ML′, c'est-à-dire à la portion LL′ de la génératrice comprise entre les deux cercles de contact; longueur constante, car dans le mouvement de révolution autour de CC′ la génératrice GG′ vient coïncider avec LL′. On voit par là que la somme des distances de chacun des points de la courbe aux deux points fixes F et F′ est constante et égale à GG′; on en conclut que la courbe est une ellipse ayant pour foyers F et F′.

265 — Corollaire. Les droites DE, D′E′, intersections du plan sécant et des plans des cercles GH, GH′, suivant lesquels les sphères inscrites touchent le cylindre, sont les directrices de l'ellipse. En effet, par le point M menons un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre; ce plan coupera le cylindre suivant un cercle NMN′. La droite DE, intersection de deux plans perpendiculaires au plan de la figure, est elle-même perpendiculaire à ce plan et, par suite, à la droite AA′; il en est de même de la droite MP, intersection du plan du cercle et du plan sécant. Le rayon vecteur MF étant égal à ML ou à NG, et la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice DE étant égale à PD, le rapport des distances du point M au foyer et à la directrice est $\frac{NG}{PD}$; mais, à cause des parallèles PN et GD, ce rapport est égal à celui de AG à AD, ou de AK à AA′, rapport constant, puisque ces deux dernières longueurs sont constantes.

Au foyer F correspond la directrice DE; au foyer F′ la directrice D′E′.

THÉORÈME II.

266 — *La section d'un cône circulaire droit par un plan est une courbe du second degré.*

Menons par l'axe du cône un plan perpendiculaire au plan sécant; ce plan coupe le cône suivant deux génératrices SG, SH, et le plan sécant suivant la droite AA′.

1° Considérons d'abord le cas où la droite AA′ rencontre les deux génératrices SG, SH d'un même côté du sommet S (fig. 165). Décrivons deux cercles O et O′ tangents à la droite AA′ et aux deux arêtes SG′, SH′. Si l'on fait tourner la figure autour de l'axe SO′, pendant que l'arête

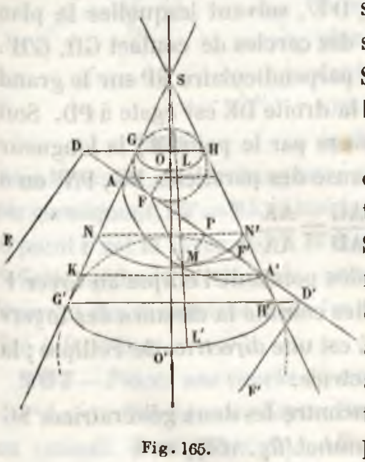


Fig. 165.

SG′ engendre le cône, les deux cercles engendrent deux sphères tangentes au cône suivant les cercles de contact GH, G'H'. Le plan sécant est tangent à l'une des sphères au point F, comme perpendiculaire à l'extrémité du rayon OF ; il est aussi tangent à l'autre sphère au point F'.

Cela posé, soit M un point quelconque de la courbe d'intersection ; la génératrice SM qui passe en ce point touche les sphères aux points L et L'; joignons MF, MF'. Les droites MF et ML sont égales comme tangentes menées du même point M à la sphère O ; les droites MF' et ML' sont égales comme tangentes menées du point M à la sphère O'; on a donc

$$MF+MF'=ML+ML'=LL'.$$

Or la portion LL' de la génératrice comprise entre les cercles parallèles GH, G'H' est contante et égale à GG'; donc la somme des distances de chacun des points de la courbe aux deux points fixes F et F' est constante, et, par conséquent, cette courbe est une ellipse dont les points F et F' sont les foyers.

La somme constante GG' est égale au grand axe AA'. Si par le point A' on mène A'K parallèle à GH, on détermine sur la génératrice une portion AK égale à la distance focale FF'; car, si des longueurs égales GG', AA' on retranche, d'une part AG et KG', d'autre part les longueurs égales AF et A'F', il reste deux longueurs égales AK, FF'.

Considérons les droites DE, D'E', suivant lesquelles le plan sécant est coupé par les plans des cercles de contact GH, G'H'. Si, du point M on abaisse une perpendiculaire MP sur le grand axe, la distance du point M à la droite DE est égale à PD. Soit NMN' le cercle parallèle qui passe par le point M; la longueur MF ou ML est égale à GN. A cause des parallèles DG, PN, on a

$$\frac{GN}{DP}=\frac{AG}{AD}=\frac{AK}{AA'}.$$

Ainsi les distances de chacun des points de l'ellipse au foyer F et à la droite DE sont entre elles comme la distance des foyers au grand axe. Cette droite DE est une *directrice* de l'ellipse ; la droite D'E' est la seconde directrice.

2° Lorsque la droite AA' rencontre les deux génératrices SG et SH de part et d'autre du sommet (fig. 166), on a

$$MF'-MF=ML'-ML=LL'=GG'.$$

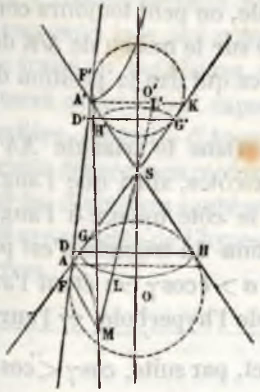


Fig. 166.

La différence des distances de chacun des points de la courbe aux deux points F et F′ est constante; cette courbe est une hyperbole qui a pour foyers les deux points F et F′. Les droites d'intersection du plan sécant et des plans de contact sont de même les directrices de l'hyperbole.

3° Supposons enfin que la droite AA′ soit parallèle à l'arête SH (fig. 167); décrivons une sphère tangente au cône suivant le cercle GH et au plan sécant en F. Soit DE l'intersection du plan sécant avec le plan du cercle de contact GH. Par le point M de la section menons la droite ME perpendiculaire à DE, et la génératrice SM, qui rencontre en L la courbe de contact; la droite ME sera parallèle à AA′ et à SH; donc les trois droites ME, SM, SH sont dans un même plan, et les trois points H, L, E, sur la droite d'intersection du plan de contact et du plan précédent. Les deux triangles MLE, HSL sont semblables, et puisque SL est égale à SH, on a aussi ML = ME; mais ML = MF, comme tangentes menées du point M à la sphère; par conséquent, MF = ME. Ainsi la courbe est une parabole dont le point F est le foyer et DE la directrice.

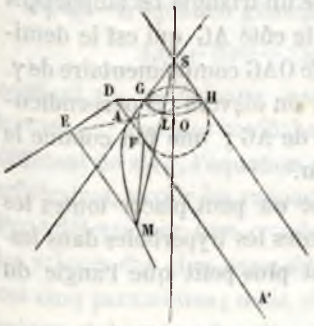


Fig. 167.

Cette méthode si élégante, pour trouver les propriétés des foyers et des directrices dans les courbes du second degré, est due à Dandelin.

267 — *Placer une courbe du second degré sur un cône donné.* — 1° La courbe est une ellipse. Dans le triangle AA′K (fig. 165), on connaît deux côtés AA′, AK, qui sont le grand axe et la distance des foyers, ainsi que l'angle opposé à AA′ qui est le complément de la moitié de l'angle au sommet du cône. Comme le grand axe surpasse la distance focale, on peut toujours construire ce triangle; la perpendiculaire sur le milieu de A'K détermine le point S, et par suite tout ce qui fixe la position du plan sécant.

2° La courbe est une hyperbole. Dans le triangle AA'K (fig. 166), on connaît également deux côtés, ainsi que l'angle opposé à l'un d'eux; mais comme le côté opposé à l'angle donné est le plus petit, la construction du triangle n'est pas toujours possible. Il faut que l'on ait $a > c\cos\gamma$ ($2a$ étant l'axe transverse, $2c$ la distance des foyers de l'hyperbole, 2γ l'angle au sommet du cône); d'où $\cos\gamma < \frac{a}{c}$, et, par suite, $\cos\gamma < \cos\theta$, en appelant θ l'angle de l'asymptote avec le grand axe; donc l'angle des asymptotes doit être plus petit que l'angle du cône.

3° La courbe donnée est une parabole. En joignant le centre O de la sphère au point G, on forme un triangle rectangle OGA (fig. 167), dans lequel on connaît le côté AG qui est le demi-paramètre de la parabole, et l'angle OAG complémentaire de γ. Après avoir construit ce triangle, on élèvera OS perpendiculaire sur OA jusqu'à la rencontre de AG; une fois connue la distance SA, le problème est résolu.

En résumé, sur un cône donné on peut placer toutes les ellipses, toutes les paraboles, et toutes les hyperboles dans lesquelles l'angle des asymptotes est plus petit que l'angle du cône.

268 — Remarque. Supposons que les sphères employées précédemment soient toujours inscrites dans le cône, mais coupent le plan sécant; il suffit pour cela que les cercles générateurs soient tangents aux deux lignes SA, SA' et coupent AA'; les intersections des sphères par le plan sécant sont des cercles, et l'on verra que, dans le cas de l'ellipse ou de l'hyperbole, la somme ou la différence des tangentes menées à ces cercles d'un point quelconque de la courbe est constante; que, dans le cas de la parabole, la tangente menée au cercle d'un point quelconque de la courbe est égale à la distance de ce point à une certaine droite.

Les géomètres grecs connaissaient les courbes du second degré comme sections d'un cône à base circulaire par un plan. APOLLONIUS (247 ans avant J.-C.) a fait sur les sections coniques un traité en huit livres, dans lequel il rapporte ce qui a été trouvé avant lui, et expose ses propres découvertes sur cette matière. Le traité d'APOLLONIUS contient les principales propriétés des sections coniques; nous citerons les deux théorèmes sur les diamètres conjugués (nos 162, 163 et 191), les propriétés des asymptotes de l'hyperbole, les propriétés élémentaires des foyers.

CHAPITRE IX

Détermination des sections coniques.

269 — L'équation générale du second degré

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

contient six coefficients; mais comme on peut diviser tous les termes par l'un des coefficients, pourvu que ce coefficient soit différent de zéro, l'équation ne renferme que cinq paramètres arbitraires, savoir les rapports de cinq coefficients au sixième. Pour déterminer une courbe du second degré, il faut donner les valeurs des cinq paramètres, ou bien cinq relations entre ces cinq paramètres; mais, dans ce cas, il est nécessaire d'examiner si les cinq équations de conditions admettent un système de solutions réelles, et si, en outre, l'équation du second degré correspondante représente bien une courbe; autant les cinq équations de conditions admettront de systèmes de solutions réelles jouissant de cette propriété, autant il y aura de courbes du second degré satisfaisant aux conditions proposées.

En général, les relations entre les paramètres proviennent de conditions géométriques auxquelles doit satisfaire la courbe. Ainsi on peut assujettir la courbe à passer par des points donnés, à être tangente à des droites données, etc. On exprimera que la courbe passe par un point donné, en écrivant que les coordonnées du point vérifient l'équation de la courbe, ce qui donne une relation entre les coefficients. On exprimera que la courbe est tangente à une droite donnée, en écrivant que l'équation qui fournit les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite a deux racines égales, ce qui donne aussi une relation entre les coefficients. Une condition géométrique qui se traduit par une relation entre les coefficients est regardée comme une condition simple. Une condition géométrique qui se traduirait par deux relations serait regardée comme double; si, par exemple, on assujettissait la courbe à toucher une droite donnée en un point donné, l'équation qui donnerait les abscisses des points d'intersection devant admettre une racine double donnée, il en résulterait deux relations entre les coefficients; la condition géométrique énoncée devrait donc compter comme deux conditions simples. D'après cela, on dira qu'il faut *cinq* conditions géométriques pour déterminer une courbe du second degré.

Si l'on veut que la courbe soit une parabole, les coefficients devant vérifier la relation $B^2 - 4AC = 0$, l'équation ne contiendra plus que quatre paramètres arbitraires et la parabole sera définie par quatre conditions.

De même, si l'on veut que la courbe soit une hyperbole équilatère, il faudra que les deux droites représentées par l'équation $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$, droites parallèles aux asymptotes (nº 130), soient perpendiculaires entre elles, ce qui donne une relation entre les coefficients; lorsque les axes des coordonnées sont rectangulaires, cette relation est $A + C = 0$. Quatre conditions suffisent donc pour déterminer une hyperbole équilatère.

Avant d'aller plus loin, il est bon de généraliser les définitions, afin d'éviter les restrictions qu'apporteraient les solutions imaginaires dans les énoncés des théorèmes.

POINTS ET DROITES IMAGINAIRES.

270—Un système de valeurs réelles de x et de y détermine un point du plan; par analogie, nous appellerons *point imaginaire* un système de valeurs imaginaires attribuées à x et y. Si deux systèmes de valeurs imaginaires sont de la forme

$x = a + bi$, $y = c + di$ et $x = a - bi$, $y = c - di$, nous dirons que les deux points imaginaires sont conjugués.

Une équation du premier dégré $Ax + By + C = 0$ à coefficients réels est vérifiée par les coordonnées d'une infinité de points réels, dont le lieu est une ligne droite; mais elle est vérifiée aussi par une infinité de systèmes de valeurs imaginaires attribuées à x et à y; car, si l'on attribue à x une valeur imaginaire quelconque, on en déduira pour y une valeur imaginaire correspondante; si l'on donne à x deux valeurs imaginaires conjuguées, les deux valeurs correspondantes de y seront aussi conjuguées.

Par analogie, nous appellerons *droite imaginaire* l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré à coefficients imaginaires. Il est à remarquer qu'une droite imaginaire passe par un point réel. Soit, en effet,

$$(A' + A''i)x + (B' + B''i)y + (C' + C''i) = 0,$$

ou

$$(A'x + B'y + C') + i(A''x + B''y + C'') = 0,$$

une droite imaginaire. Cette équation sera vérifiée par les coordonnées du point d'intersection des deux droites réelles

$$A'x + B'y + C' = 0, \qquad A''x + B''y + C'' = 0.$$

L'équation générale du premier degré, renfermant trois coefficients et par suite deux paramètres arbitraires, deux points, réels ou imaginaires, détermineront la droite. Si l'on appelle x', y', x'', y'' les coordonnées des deux points donnés, la droite qui passe par ces deux points aura pour équation

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'}.$$

La droite qui passe par deux points imaginaires conjugués est réelle. Soient, en effet, $x' = a + bi$, $y' = c + di$, $x'' = a - bi$, $y'' = c - di$; l'équation de la droite se réduit à

$$\frac{x - a}{b} = \frac{y - c}{d}.$$

Le point qui a pour coordonnées

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2}, \quad y_1 = \frac{y' + y''}{2},$$

sera dit le milieu de la droite qui joint les deux points donnés;

si les deux points sont imaginaires conjugués, le milieu sera un point réel.

Une équation algébrique $f(x, y) = 0$ à coefficients réels est vérifiée en général par les coordonnées d'une infinité de points réels formant une courbe ; elle est vérifiée aussi par les coordonnées d'une infinité de points imaginaires, conjugués deux à deux. Si les coefficients sont imaginaires, l'équation admet toujours une infinité de solutions imaginaires, mais seulement un nombre limité de solutions réelles ; l'ensemble de ces solutions formera ce que nous appellerons une courbe imaginaire.

Deux équations, l'une du premier degré, l'autre du second degré en x et y, admettent deux systèmes de solutions. On dira donc qu'une droite rencontre une courbe du second degré en deux points, réels ou imaginaires. Une droite réelle rencontre une courbe du second degré réelle en deux points, qui sont réels ou imaginaires conjugués. Ceci permet d'expliquer un fait qui s'est présenté déjà plusieurs fois ; quand on cherche, par exemple, le lieu des milieux d'une série de cordes parallèles dans l'ellipse, on trouve par le calcul une droite indéfinie, et cependant le lieu, tel qu'il est défini géométriquement, ne se compose que de la partie du diamètre intérieure à l'ellipse ; les sécantes extérieures rencontrent l'ellipse en deux points imaginaires conjugués, le milieu de la corde est encore un point réel, et le diamètre se prolonge ainsi en dehors de la courbe.

INTERSECTION DE DEUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

271 — Nous remarquerons d'abord que si les deux courbes coïncident, c'est-à-dire si les deux équations sont vérifiées par les mêmes systèmes de valeurs des variables x et y, les coefficients sont proportionnels. En effet, les équations

(1) $$Cy^2 + (Bx + E)y + (Ax^2 + Dx + F) = 0,$$

(2) $$C'y^2 + (B'x + E')y + (A'x^2 + D'x + F') = 0,$$

admettant les mêmes racines pour une même valeur de x, on a

$$\frac{C}{C'} = \frac{Bx + E}{B'x + E'} = \frac{Ax^2 + Dx + F}{A'x^2 + D'x + F'};$$

et, comme ceci doit avoir lieu quelle que soit x, on en conclut

$$\frac{C}{C'}=\frac{B}{B'}=\frac{E}{E'}=\frac{A}{A'}=\frac{D}{D'}+\frac{F}{F'}.$$

La réciproque est vraie : lorsque les coefficients sont proportionnels, les deux équations sont évidemment identiques, et les deux courbes coïncident.

Nous supposerons dans ce qui suit les courbes différentes, c'est-à-dire les coefficients non proportionnels. Considérons d'abord le cas où les coefficients C et C′ sont différents de zéro; si l'on retranche les équations membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par C′ et C, on élimine y^2 et l'on obtient une équation de la forme

$$(3)\qquad (B_1x+E_1)y+(A_1x^2+D_1x+F_1)=0,$$

qui, avec l'équation (1), forme un système équivalant au système des deux équations proposées (1) et (2). Les cinq coefficients B_1, E_1, A_1, D_1, F_1 ne peuvent être nuls à la fois; car si cela avait lieu, les coefficients des deux équations (1) et (2) seraient proportionnels. Si les deux coefficients B_1 et E_1 étaient nuls, l'équation (3) deviendrait $A_1x^2+D_1x+F_1=0$; elle donnerait pour x deux valeurs; à chacune d'elles, d'après l'équation (1), correspondraient deux valeurs de y; en tout quatre solutions. Supposons que les deux coefficients B_1 et E_1 ne soient pas nuls à la fois; en général, la valeur $x=-\frac{E_1}{B_1}$ qui annule le coefficient de y dans l'équation (3) n'annule pas le polynôme $A_1x^2+D_1x+F_1$; dans ce cas, la quantité B_1x+E_1 étant différente de zéro pour toutes les solutions de l'équation (3), on peut mettre cette équation sous la forme

$$y=-\frac{A_1x^2+D_1x+F_1}{B_1x+E_1};$$

en portant cette valeur de y dans l'équation (1), on obtient une équation du quatrième degré

$$(4)\qquad a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0,$$

qui, jointe à l'équation (3), forme un système équivalant au système des deux équations (1) et (3), et, par conséquent, au système proposé. Les cinq coefficients de l'équation (4) ne peuvent être nuls à la fois; car, si cela avait lieu, l'équation (4) devenant une identité, les deux équations proposées admettraient les mêmes solutions. L'équation (4) donne quatre valeurs de x; à chacune d'elle correspond, d'après l'équation (3), une valeur de y, ce qui fait *quatre* solutions du système proposé.

Si la valeur $x=-\frac{E_1}{B_1}$ annulait le polynôme $A_1x^2+D_1x+F_1$, l'équation (3) se mettrait sous la forme

$$(B_1x+E_1)(y+mx+n)=0,$$

et se décomposerait en deux équations distinctes, $B_1x+E_1=0$, $y+mx+n=0$; la première donne la valeur $x=-\frac{E_1}{B_1}$, à laquelle, d'après l'équation (1), correspondent deux valeurs de y; de la seconde on déduit $y=-mx-n$, et, remplaçant y par cette valeur dans l'équation (1), on obtient une équation du second degré en x, qui fournit deux nouvelles solutions; en tout quatre solutions. Cependant il peut arriver que cette dernière équation du second degré en x se réduise à une identité; dans ce cas, les coordonnées de tous les points de la droite $y+mx+n=0$ vérifient les deux équations proposées, qui représentent alors des couples de droites, dont deux coïncident.

Si un seul des coefficients C ou C′ était nul, l'une des équations proposées serait de la forme (3), et on répéterait ce qui vient d'être dit.

Considérons maintenant le cas où les deux coefficients C et C′ sont nuls à la fois. Si la valeur $x=-\frac{E'}{B'}$ qui annule le coefficient de y dans l'équation (2) n'annule pas le polynôme $A'x^2+D'x+F'$, on déduira de cette équation

$$y=-\frac{A'x^2+D'x F'}{B'x+E'},$$

et, substituant dans l'équation (1), on arrivera à une équation du troisième degré en x, ce qui donne *trois* solutions. Si la valeur $x=-\frac{E'}{B'}$ annule le polynôme $A'x^2+D'x+F'$, l'équation (2) se met sous la forme

$$(B'x+E')(y+mx+n)=0,$$

et représente deux droites $B'x+E'=0$, $y+mx+n=0$, qui coupent la courbe (1), la première en un point, la seconde en deux points. Il peut arriver que l'une de ces droites appartienne à la ligne (1); dans ce cas, les équations proposées représentent des couples de droites, dont deux coïncident.

On conclut de ce qui précède, que *deux lignes du second degré ne peuvent avoir plus de quatre points communs, à moins que ces lignes ne soient des couples de droites, dont deux coïncident.* Lorsque les deux équations proposées ont leurs coefficients réels, les quatre points communs sont réels ou imaginaires conjugués.

272 — Il est facile de former l'équation (4) qui donne les abscisses des quatre points communs à deux courbes du second degré. Soient $A_0y^2+A_1y+A_2=0$, $A'_0y^2+A'_1y+A'_2=0$, les deux équations proposées, dans lesquelles A_0 et A'_0 désignent des constantes, A_1 et A'_1 des polynômes du premier degré en x, A_2 et A'_2 des polynômes du second degré. En retranchant ces équations membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par A'_0 et A_0, on a

$$(A_0A'_1-A'_0A_1)y+(A_0A'_2-A'_0A_2)=0.$$

En multipliant par A_2 et A'_2, retranchant et supprimant le facteur y, on a de même

$$(A_0A'_2-A'_0A_2)y+(A_1A'_2-A'_1A_2)=0.$$

L'élimination de y entre ces deux dernières équations conduit à l'équation du quatrième degré

$$(A_0A'_1-A'_0A_1)(A_1A'_2-A'_1A_2)-(A_0A'_2-A'_0A_2)^2=0.$$

273 — Corollaire. Une équation du second degré à coefficients imaginaires ne peut admettre plus de quatre solutions réelles. En effet, le premier membre de l'équation est de la forme $S+iS_1$, S et S_1 désignant des polynômes réels du second degré; si l'équation est vérifiée par des valeurs réelles attribuées à x et à y, on aura séparément $S=0$, $S_1=0$; les points réels du lieu sont les points communs aux deux courbes réelles $S=0$, $S_1=0$, qui sont en général au nombre de quatre.

Il n'y a exception que lorsque ces lignes sont des couples de droites dont deux coïncident; dans ce cas, l'équation du second degré représente elle-même deux droites, dont une est réelle. Enfin, si les deux lignes $S=0$, $S'=0$ coïncidaient, le premier membre de l'équation proposée serait divisible par un facteur constant imaginaire, et les coefficients de l'équation deviendraient réels.

THÉORÈME I.

274 — *Par cinq points donnés, on peut faire passer une courbe du second degré, et on n'en peut faire passer qu'une.*

Soit $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ l'équation générale des courbes du second degré; si l'on désigne par x' et y' les coordonnées de l'un des points, on aura cinq relations de la forme

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+Dx'+Ey'+F=0,$$

entre les rapports de cinq coefficients au sixième. Les équations, étant du premier degré, admettent en général une solution et une seule; cependant il faudrait examiner s'il n'y a pas des cas d'impossibilité. La méthode que nous suivrons nous permettra d'éviter cette discussion compliquée.

Supposons d'abord que, parmi les cinq points donnés a, b, c, d, e, trois ne soient pas en ligne droite (fig. 168). Les quatre premiers points sont les sommets d'un quadrilatère $abcd$. Désignons, pour abréger, par $\alpha=0$, $\beta=0$ les équations de deux côtés opposés ab et cd; par $\gamma=0$, $\delta=0$ celles des deux autres côtés bc et da et considérons l'équation

$$\alpha\beta-k\gamma\delta=0, \tag{5}$$

qui renferme un paramètre arbitraire k. Les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des polynômes du premier degré en x et y, l'équation est du second degré; les coordonnées du point a, intersection des droites ab et ad, annulent les deux polynômes α

et δ, et, par conséquent, vérifient l'équation (5); il en est de même des trois autres points b, c, d. Ainsi la courbe représentée par l'équation (5) passe par les quatre points a, b, c, d. On peut déterminer le paramètre k de manière que la courbe passe par le cinquième point e. Appelons en effet α', β', γ', δ' les valeurs des polynômes α, β, γ, δ, quand on y remplace x et y par les coordonnées x' et y' du point e; on devra avoir $\alpha'\beta'-k\gamma'\delta'=0$; d'où $k=\frac{\alpha'\beta'}{\gamma'\delta'}$.

Fig. 168.

En attribuant à k cette valeur, on obtient une courbe du second degré passant par les cinq points donnés.

Nous avons trouvé une courbe du second degré passant par les cinq points donnés. Il n'en existe pas d'autre ; en effet, des cinq points donnés, trois n'étant pas en ligne droite, une ligne du second degré passant par ces cinq points ne pourra se réduire à deux droites; mais nous avons vu que deux courbes du second degré non formées de lignes droites ont au plus quatre points communs.

Si les cinq points donnés sont réels, l'équation (5) a tous ses coefficients réels ; d'autre part on sait, d'après la discussion faite au chapitre I du livre III, que si une équation du second degré à coefficients réels admet plus d'une solution réelle, elle en admet une infinité formant une ligne continue ; donc par les cinq points passe une courbe réelle du second degré.

Supposons que, parmi les cinq points donnés, trois c, d, e soient en ligne droite; la droite cde, ayant trois points communs avec le lieu, appartiendra au lieu qui se composera alors de la droite cde et d'une seconde droite passant par les deux autres points a et b. L'équation du lieu sera $\alpha\beta=0$; on l'obtient en faisant $k=0$ dans l'équation précédente.

Lorsque, parmi les cinq points donnés, quatre sont situés sur une même droite, il y a indétermination. Le lieu se composera de cette droite, et d'une droite quelconque passant par le cinquième point.

275 — Corollaire I. L'équation $\alpha\beta - k\gamma\delta = 0$, dans laquelle k désigne un paramètre arbitraire, représente toutes les courbes du second degré qui passent par les quatre points a, b, c, d; car un cinquième point déterminerait la courbe, et on peut toujours donner au paramètre k une valeur telle que la courbe passe par ce cinquième point.

Considérons une courbe réelle passant par quatre points réels donnés; comme on peut supposer que les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignent les distances d'un point quelconque réel ayant pour coordonnées x et y aux côtés du quadrilatère, l'équation $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} = k$ signifie que *le produit des distances d'un point quelconque d'une section conique à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit est au produit des distances de ce même point aux deux autres côtés dans un rapport constant.*

En général, si l'on désigne par $S = 0$ et $S_1 = 0$ les équations de deux courbes du second degré, l'équation $S - kS_1 = 0$, dans laquelle k est un paramètre arbitraire, représentera toutes les courbes du second degré passant par les quatre points communs aux deux premières.

276—Corollaire II. Proposons-nous maintenant de déterminer une parabole passant par quatre points réels donnés a, b, c, d. Si l'on joint ces points deux à deux par deux droites ab, cd qui se coupent et que l'on prenne ces droites pour axes des coordonnées, l'équation générale des courbes du second degré qui passent par les quatre points est

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{c} - 1\right)\left(\frac{x}{b} + \frac{y}{d} - 1\right) - kxy = 0;$$

a et b étant les abscisses des points a et b, c et d les ordonnées des points c et d. Pour que le lieu soit une parabole, il faut que le paramètre k satisfasse à la condition

$$\left(k - \frac{1}{ad} - \frac{1}{bc}\right)^2 - \frac{4}{abcd} = 0.$$

Lorsque le produit $abcd$ est négatif, on trouve pour k deux valeurs imaginaires, et il est impossible de faire passer une parabole réelle par les quatre points. Lorsque le produit est positif, ce qui revient à dire que l'on peut former un quadrilatère convexe ayant pour sommets les quatre points, on obtient pour k deux valeurs réelles différentes, et, par conséquent, deux lignes réelles du genre parabole passant par les quatre points. Si l'on pouvait réunir les points deux à deux par des droites parallèles, chaque couple de droites parallèles constituerait une solution.

277 — Corollaire III. Il est facile de former l'équation générale des courbes du second degré qui passent par trois points donnés a, b, c. Si l'on désigne par $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations des trois droites bc, ca, ab, on voit que l'équation

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0 \tag{6}$$

représente une courbe du second degré passant par les trois points donnés. Cette équation renferme deux paramètres arbitraires, les rapports de deux des coefficients a, b, c au troisième, et l'on pourra disposer de ces deux paramètres de manière à faire passer la courbe par deux autres points pris à volonté dans le plan.

THÉORÈME II.

278 — *On peut mener une courbe du second degré tangente à deux droites données en deux points donnés et passant par un autre point donné.*

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$ les équations des deux tangentes pa, pb, $\gamma = 0$ celle de la droite qui passe par les deux points de contact a et b (fig. 169). Considérons l'équation

$$\alpha\beta - k\gamma^2 = 0, \tag{7}$$

dans laquelle le paramètre k est arbitraire. Si l'on y fait $\alpha = 0$, on a $\gamma^2 = 0$, d'où l'on conclut que la droite pa rencontre la courbe en deux points qui coïncident, et, par conséquent, est tangente en a. De même, la droite pb est tangente en b. On déterminera ensuite le paramètre k de manière que la courbe passe par un autre point donné. Il

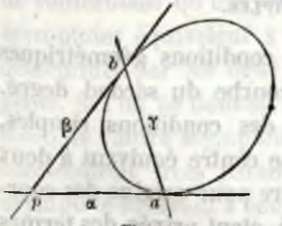


Fig. 169.

n'existe qu'une courbe du second degré satisfaisant à ces conditions; car, si deux courbes du second degré ont les mêmes tangentes en deux points a et b, l'équation (4), qui donne les abscisses des points communs, aura deux racines doubles; les deux courbes ne peuvent donc avoir un autre point commun.

279 — Corollaire. L'équation (7) est l'équation générale des courbes du second degré tangentes à deux droites données en deux points donnés; elle signifie que *le produit des distances d'un point quelconque d'une section conique à deux tangentes est au carré de la distance de ce point à la corde des contacts dans un rapport constant*.

En général, si l'on désigne par $S=0$ l'équation d'une courbe du second degré, l'équation $S-k\gamma^2=0$ représentera toutes les courbes du second degré tangentes à la première en deux points situés sur la droite $\gamma=0$.

280 — On peut déterminer le paramètre k par la condition que la courbe soit une parabole. Si l'on prend les deux tangentes pour axes des coordonnées, l'équation (7) devient

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2-2kxy=0.$$

Pour que la courbe soit une parabole, il faut que la condition $\left(k-\frac{1}{ab}\right)^2-\frac{1}{a^2b^2}=0$ soit vérifiée; ce qui donne les deux solutions $k=0$, $k=\frac{2}{ab}$; à la première correspond la droite ab, à la seconde une parabole dont l'équation peut être mise sous la forme $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}-1=0$.

CONDITIONS MULTIPLES.

281 — Reprenons l'examen des conditions géométriques par lesquelles on peut définir une courbe du second degré. Jusqu'ici nous n'avons parlé que des conditions simples, comme les points et les tangentes. Le centre équivaut à deux conditions; car si l'on prend le centre pour origine des coordonnées, l'équation du second degré, étant privée des termes du premier degré, ne contient plus que trois paramètres arbitraires; ainsi la courbe est définie par son centre et trois points.

Un diamètre avec la direction des cordes équivaut à deux conditions; car si l'on prend le diamètre pour axe des x et une parallèle aux cordes pour axe des y, l'équation, étant privée des deux termes du premier degré en y, ne contient plus que trois paramètres arbitraires.

Un système de diamètres conjugués équivaut à trois conditions; car si on les prend pour axes des coordonnées, l'équation, devant se réduire à la forme $ax^2+by^2+c=0$, ne contient plus que deux paramètres arbitraires. En général, soient $\alpha=0$, $\beta=0$, les équations de deux diamètres conjugués, les distances α et β de chaque point aux deux diamètres conjugués étant proportionnelles aux coordonnées de ce point relatives à ces diamètres, la courbe sera représentée par l'équation

$$a\alpha^2+b\beta^2+c=0, \tag{8}$$

avec deux paramètres arbitraires.

L'équation

$$\alpha^2+a\beta=0 \tag{9}$$

est l'équation générale des paraboles dont la droite $\alpha=0$ est un diamètre, et la droite $\beta=0$ la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

On sait que l'équation de l'hyperbole, rapportée à ses deux asymptotes, est $xy=k$. En général, soient $\alpha=0$, $\beta=0$, les équations des deux asymptotes, l'hyperbole sera représentée par une équation de la forme

$$\alpha\beta-k=0 \tag{10}$$

ne renfermant qu'un paramètre arbitraire k. Ainsi les deux asymptotes équivalent à quatre conditions, et la courbe est déterminée par les deux asymptotes et un point ou une tangente. Si l'on ne donnait qu'une asymptote $\alpha=0$, l'équation $\beta=0$ de l'autre asymptote étant indéterminée, l'équation (10) contiendrait trois paramètres arbitraires, de sorte qu'une asymptote équivaut à deux conditions.

Nous avons vu que toute courbe du second degré a un foyer et une directrice ; il en résulte que l'équation

$$(11) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2-(mx+ny+h)^2=0,$$

par laquelle on exprime la propriété du foyer, et qui renferme les cinq paramètres arbitraires a, b, m, n, h, représente toutes les courbes du second degré. Un foyer équivaut à deux conditions; car, si l'on donne un foyer, ses coordonnées a et b étant connues, l'équation (11) ne contient plus que trois paramètres arbitraires. De même, une directrice équivaut à deux conditions; car, en donnant l'équation de la directrice, on détermine les rapports de deux des paramètres m, n, h au troisième.

On peut se rendre compte d'une autre manière des résultats que nous venons d'obtenir. Il est clair que les deux coordonnées d'un point remarquable d'une courbe du second degré, comme le centre, un foyer, un sommet, etc., sont déterminées lorsqu'on connaît les coefficients de l'équation du second degré et, par conséquent, qu'il existe deux équations entre ces coordonnées et les coefficients; si donc on donne un pareil point, on aura deux relations entre les coefficients. Il en est de même des deux paramètres d'une droite remarquable, comme la directrice ou un axe, etc.; si cette droite est donnée, on aura encore deux relations entre les coefficients.

Ainsi, par exemple, si $f(x,y)=0$ est l'équation de la courbe, on exprimera qu'un point donné est centre en écrivant que ses coordonnées vérifient les deux équations $f'_x=0$, $f'_y=0$. Pour exprimer qu'un point donné est un sommet, il suffit d'écrire que ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe et que la normale en ce point passe par le centre.

282 — Il est à remarquer que les formes précédentes, sous lesquelles nous avons mis l'équation du second degré, rentrent dans la forme $\alpha\beta-k\gamma^2=0$, composée de trois polynômes du premier degré α, β, γ qui se rapportent, les deux premiers aux tangentes menées d'un point arbitraire p du plan, le troisième à la corde des contacts. Lorsque le point p coïncide avec le centre de l'hyperbole, les tangentes α et β sont les asymptotes; la droite des contacts s'éloignant à l'infini, le polynôme γ se réduit à une constante, et l'équation $\alpha\beta-k\gamma^2=0$ devient

$\alpha\beta - k = 0$. L'équation (8), mise sous la forme

$$(\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{-b})(\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{-b}) + c = 0,$$

se ramène à l'équation (10). L'équation (11), mise sous la forme

$$[(y-b) - i(x-a)][(y-b) + i(x-a)] - (mx + ny + h)^2 = 0,$$

rentre aussi dans l'équation $\alpha\beta - k\gamma^2 = 0$; les tangentes imaginaires menées du foyer ont pour coefficients angulaires $\pm i$; la directrice est la corde des contacts. Les deux foyers imaginaires de l'ellipse ou de l'hyperbole jouissent de cette propriété, comme les deux foyers réels.

RECHERCHE DES SÉCANTES COMMUNES A DEUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

283 — Nous avons vu que deux courbes du second degré, $S = 0$, $S_1 = 0$, ont en général quatre points communs; par ces quatre points, on peut faire passer trois couples de droites. Lorsque les courbes sont réelles, les points communs sont réels ou imaginaires conjugués deux à deux. Il y a trois cas à considérer : 1° si les quatre points communs a, b, c, d sont réels, les trois couples de sécantes communes sont évidemment réelles; 2° si deux points a et b sont réels, les deux autres c et d imaginaires conjugués, la droite ab est réelle, ainsi que la droite cd qui passe par les deux points imaginaires conjugués; on a donc une couple de sécantes communes réelles ab et cd. Les quatre autres sécantes communes sont imaginaires; car, si la sécante ac, par exemple, était réelle, le point d'intersection c des droites réelles ac et cd serait réel; 3° lorsque les deux points a et b sont imaginaires conjugués, ainsi que les points c et d, les droites ab et cd sont réelles, les quatre autres imaginaires. On conclut de là que *deux courbes réelles du second degré admettent au moins deux sécantes communes réelles.*

On peut distinguer les deux derniers cas de la manière suivante : dans le troisième cas, les deux droites ac et bd, étant imaginaires conjuguées, se coupent en un point réel, et de même les deux droites ad et bc; les centres des trois couples de sécantes communes sont donc réels. Dans le second cas, le point d'intersection des droites ac et bd est imaginaire ; car, si ce point était réel, chacune des droites ac et bd, passant par deux points réels (le point a ou b et ce point d'intersection), serait réelle ; des trois centres, un seul est donc réel.

284 — Pour montrer une application de ce qui précède, considérons deux ellipses ayant un foyer commun. Ces deux ellipses ne peuvent se couper en plus de deux points réels ; car, d'après ce que nous avons dit au nº 260, deux ellipses qui ont un foyer commun et trois points communs coïncident ; elles admettent donc seulement deux sécantes communes réelles.

Soient
$$(x-a)^2+(y-b)^2-k^2\gamma^2=0,$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2-k'^2\gamma'^2=0,$$

les équations des deux ellipses ; les deux sécantes communes réelles $k\gamma=\pm k'\gamma'$ passent par le point d'intersection I des directrices DI, D'I (fig. 170), et il est facile de les déterminer géométriquement. Supposons que les deux ellipses se coupent en deux points réels A et B ; l'une des sécantes communes réelles est la droite AB qui passe par ces deux points : l'autre IL ne rencontre pas les courbes. Pour déterminer cette seconde droite, joignons le point A au foyer F et abaissons de ce point des perpendiculaires AE, AE' sur les directrices ; on a $k=\frac{AF}{AE}$, $k'=\frac{AF}{AE'}$, et, par suite, $\frac{k'}{k}=\frac{AE}{AE'}$. Prolongeons la perpendiculaire AE d'une longueur EH égale à elle-même ; par le point H menons une parallèle HL à la première directrice, et par le point A une parallèle AL à la seconde directrice ; le point d'intersection L de ces deux parallèles appartiendra à la seconde sécante commune réelle IL.

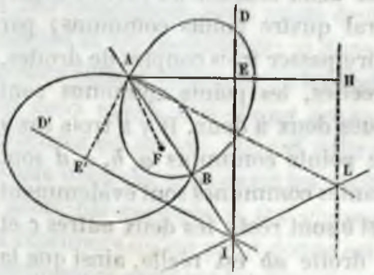


Fig. 170.

285 — La recherche des points d'intersection de deux courbes du second degré dépend en général de la résolution d'une équation du quatrième degré; mais on peut ramener la question à la résolution d'une équation du troisième degré. L'équation $S - kS_1 = o$, dans laquelle le paramètre k est arbitraire, représentant toutes les lignes du second degré qui passent par les points communs aux deux premières, on peut déterminer le paramètre k de manière que cette équation représente deux droites; les deux courbes admettant trois couples de sécantes communes, la valeur de k sera donnée par une équation du troisième degré.

Soient
$$\mathrm{A}\,x^2 + \mathrm{B}\,xy + \mathrm{C}\,y^2 + \mathrm{D}\,x + \mathrm{E}\,y + \mathrm{F} = o,$$
$$\mathrm{A}'x^2 + \mathrm{B}'xy + \mathrm{C}'y^2 + \mathrm{D}'x + \mathrm{E}'y + \mathrm{F}' = o,$$

les équations des deux courbes proposées. L'équation nouvelle sera
$$(\mathrm{A} - k\mathrm{A}')x^2 + (\mathrm{B} - k\mathrm{B}')xy + \ldots = o;$$
pour abréger, nous la représenterons par
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = o.$$
Cette équation, résolue par rapport à y, devient
$$y = -\frac{bx + e}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{(b^2 - 4ac)x^2 + 2(be - 2cd)x + (e^2 - 4cf)}.$$

Pour que cette équation représente deux droites, réelles ou imaginaires, il est nécessaire que le polynôme placé sous le radical soit un carré parfait, ce qui exige que la condition
$$(be - 2cd)^2 - (b^2 - 4ac)(e^2 - 4cf) = o$$
soit remplie. Cette relation, après la suppression du facteur $4c$, s'écrit
$$ae^2 + cd^2 - bde + (b^2 - 4ac)f = o;$$

si l'on remplace les lettres $a, b, \ldots$ par leurs valeurs $\mathrm{A} - k\mathrm{A}'$, $\mathrm{B} - k\mathrm{B}'$, ... on arrive à une équation du troisième degré en k. Il suffira de calculer l'une des racines de cette équation avec une certaine approximation, pour avoir une couple de sécantes communes; cherchant ensuite les points d'intersection de chacune de ces droites et de l'une des courbes proposées, à l'aide d'une équation du second degré, on obtiendra les coordonnées des quatre points d'intersection. On pourrait aussi calculer deux racines de l'équation en k, afin d'avoir deux couples de droites dont on chercherait ensuite les points d'intersection.

286 — Une racine réelle donnera deux droites réelles, si elle rend positive la quantité b^2-4ac, et deux droites imaginaires conjuguées, si elle rend négative cette quantité. Une racine imaginaire donne toujours deux droites imaginaires; car si l'équation $S-kS_1=0$, dans laquelle k est imaginaire et les polynômes S et S_1 réels, représentait deux droites réelles, les coordonnées de chacun des points de ces droites vérifieraient séparément les deux équations $S=0$, $S_1=0$, qui représenteraient ainsi le même système de droites; mais alors l'équation du troisième degré en k a une racine triple qui annule les divers coefficients de l'équation $S-kS_1=0$. Cela posé, il y a plusieurs cas à considérer : 1° Si l'équation du troisième degré en k a ses trois racines réelles, et si deux racines rendent positive la quantité b^2-4ac, ces deux racines donneront deux couples de droites réelles, d'où l'on déduira quatre solutions réelles; les deux courbes se coupant en quatre points réels et admettant trois couples de sécantes réelles, la troisième racine rendra aussi positive la quantité b^2-4ac. 2° Si l'équation du troisième degré a ses trois racines réelles, et qu'une seule rende positive la quantité b^2-4ac, les deux courbes n'admettent qu'une couple de sécantes réelles. Les deux sécantes données par une valeur de k sont représentées par les équations

$$y=-\frac{bx+e}{2c}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2c}\left(x+\frac{be-2cd}{b^2-4ac}\right);$$

leur point d'intersection a pour coordonnées

$$x=-\frac{be-2cd}{b^2-4ac},\quad y=-\frac{bx+e}{2c};$$

puisque les trois valeurs de k sont réelles, les trois centres sont réels; on en conclut que les deux courbes se coupent en quatre points imaginaires. 3° Si l'équation du troisième degré n'a qu'une racine réelle, cette racine rendra nécessairement positive la quantité b^2-4ac et donnera deux droites réelles; les deux racines imaginaires conjuguées donneront deux couples de droites imaginaires telles que les deux droites de l'un des systèmes seront respectivement conjuguées des droites de l'autre système; des quatre points où les droites de l'un des systèmes couperont celles de l'autre, deux seront réels; on en conclut que les deux courbes se coupent en deux points réels et en deux points imaginaires conjugués.

287 — Lorsque deux hyperboles ont une asymptote parallèle, l'un des points d'intersection s'éloigne à l'infini, et l'équation résultant de l'élimination de l'une des coordonnées entre les deux équations se réduit au troisième degré. Soient, par exemple, les deux hyperboles

$$xy - y^2 - x = 0, \quad y^2 - x^2 - 1 = 0,$$

qui ont chacune une asymptote parallèle à la droite $y = x$; si, dans la seconde, on substitue la valeur de x, tirée de la première, on obtient l'équation du troisième degré $y^3 - y + \frac{1}{2} = 0$, qui a une racine réelle et deux imaginaires. Les deux hyperboles ne se coupent qu'en un point réel; elles admettent deux sécantes communes réelles; l'une, passant par ce point et le point situé à l'infini, est parallèle à la droite $y = x$; l'autre passe par les deux points imaginaires conjugués.

288 — Supposons que, dans les deux équations, les coefficients des termes du second degré soient proportionnels, et rien n'empêche alors de les supposer égaux; si l'on retranche ces deux équations

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D\,x + E\,y + F = 0,$$
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

membre à membre, on obtient l'équation du premier degré

$$(D - D')x + (E - E')y + F - F' = 0,$$

et l'élimination de y conduit à une équation du second degré en x. Les deux courbes ne se coupent plus qu'en deux points réels ou imaginaires conjugués; les deux autres points se sont éloignés à l'infini. L'une des sécantes communes réelles passe par les deux points d'intersection; l'autre s'est éloignée à l'infini. Cette circonstance se présente lorsque les courbes sont des hyperboles ayant leurs asymptotes respectivement parallèles; et en général, comme nous le verrons plus tard, lorsque les deux courbes sont semblables et semblablement placées.

289 — Lorsqu'un même diamètre divise en deux parties égales les cordes parallèles dans les deux courbes, si, par une transformation de coordonnées, on rapporte les courbes à ce diamètre commun pris pour axe des x et à une parallèle aux cordes pour axe des y, les deux équations ne contiendront plus l'inconnue y qu'à la seconde puissance; l'élimination de y^2 donnera une équation du second degré en x.

Si les deux courbes sont des hyperboles ayant une asymptote commune, en les rapportant à cette asymptote prise pour axe des x et à une droite quelconque pour axe des y, on a des équations dans lesquelles le terme en xy contient seul la lettre x; en éliminant ce terme, on obtient une équation du second degré en y.

Lorsque les deux courbes ont le même centre, si on les rapporte à ce centre commun pris pour origine des coordonnées, les deux équations ne contenant plus de termes du premier degré, l'élimination de y donnera une équation bicarrée en x.

290 — Un cercle coupe en quatre points réels ou imaginaires une courbe du second degré; soit

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$$

l'équation du cercle, $\alpha=0$, et $\beta=0$ celles d'une couple de sécantes communes réelles, l'équation de la courbe du second degré pourra toujours être mise sous la forme

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=k\alpha\beta.$$

Le premier membre représente le carré de la longueur de la tangente menée d'un point quelconque de la courbe au cercle; il en résulte ce théorème : *un cercle étant placé d'une manière quelconque dans le plan d'une courbe du second degré, la tangente menée de tout point de la courbe au cercle est à la moyenne proportionnelle entre les distances de ce point à deux sécantes communes réelles dans un rapport constant.*

Supposons que le cercle soit tangent à la courbe en deux points réels ou imaginaires conjugués, la droite des contacts sera réelle, et l'équation de la courbe prendra la forme

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=k\alpha^2.$$

Ainsi, *lorsqu'un cercle est doublement tangent à une courbe du second degré, la tangente menée d'un point quelconque de la courbe au cercle est à la distance de ce point à la corde des contacts dans un rapport constant.*

Le foyer d'une courbe du second degré peut être considéré comme un cercle d'un rayon nul ayant avec la courbe un double contact imaginaire; la directrice est la corde des contacts.

291 — A l'aide de la théorie précédente on détermine d'une manière très-simple le nombre des normales que l'on peut mener d'un point donné à une courbe du second degré. Soit, par exemple, l'ellipse définie par l'équation

$$(1) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

et P un point dont les coordonnées sont x_1 et y_1 (fig. 171). Désignons par x et y les coordonnées du pied M de l'une des normales; ces inconnues devront vérifier l'équation (1) et aussi l'équation

$$(2) \qquad y_1 - y = \frac{a^2y}{b^2x}(x_1 - x) \quad \text{ou} \quad c^2xy + b^2y_1x - a^2x_1y = 0,$$

qui exprime que la normale au point M passe par le point P. Il résulte de là que le point M est déterminé par la rencontre de l'ellipse (1) et de l'hyperbole équilatère définie par l'équation (2); l'une des branches de l'hyperbole passant au centre de l'ellipse, les deux courbes ont au moins deux points réels communs. L'équation du troisième degré, de laquelle dépend la recherche des sécantes communes aux deux courbes, est

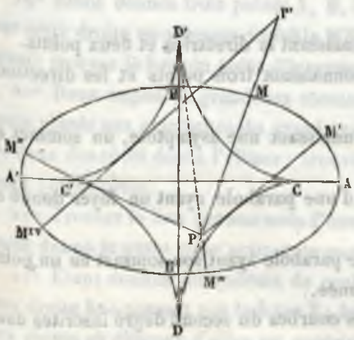


Fig. 171.

$$(3) \qquad 4a^2b^2k^3 + (a^2x_1^2 + b^2y_1^2 - c^4)k + c^2x_1y_1 = 0.$$

Si l'équation (3) n'admet qu'une racine réelle, nous avons vu (nº 286) que les courbes (1) et (2) n'ont que deux points réels communs; si l'équation (3) a ses trois racines réelles, les courbes (1) et (2), ayant au moins deux points réels communs, se coupent en quatre points réels. On doit avoir, dans le premier cas,

$$(4) \qquad (a^2x_1^2 + b^2y_1^2 - c^4)^3 + 27\,a^2b^2c^4x_1^2y_1^2 > 0,$$

et dans le second cas,

(5) $$(a^2x_1^2+b^2y_1^2-c^4)^3+27a^2b^2c^4x_1^2y_1^2<0.$$

Si les coordonnées x_1, y_1 vérifient la relation

(6) $$(a^2x_1^2+b^2y_1^2-c^4)^3+27a^2b^2c^4x_1^2y_1^2=0,$$

les racines de l'équation (3) sont encore réelles, mais il y a une racine double, et l'on ne peut mener du point P que trois normales distinctes. Les points P qui satisfont à cette condition forment une courbe CDC'D' qui présente quatre points de rebroussement en C, C', D, D'. L'équation (6) prend la forme plus simple

$$a^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}};$$

on voit aisément que pour tout point intérieur à cette courbe la relation (5) est vérifiée, c'est-à-dire que par ce point on peut mener quatre normales réelles, tandis que l'on ne peut mener que deux normales réelles par tout point extérieur à la même courbe.

EXERCICES.

1° Construire une courbe du second degré, connaissant la directrice et trois points.

2° Construire une parabole, connaissant le foyer et deux points, ou un point et une tangente.

3° Construire une parabole, connaissant la directrice et deux points.

4° Construire une hyperbole, connaissant trois points et les directions des asymptotes.

5° Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, un sommet et un point.

6° Trouver le lieu du sommet d'une parabole ayant un foyer donné et tangente à une droite donnée.

7° Trouver le lieu du foyer d'une parabole ayant son sommet en un point donné et tangente à une droite donnée.

8° Trouver le lieu des foyers des courbes du second degré inscrites dans un parallélogramme donné.

9° Une corde tourne autour de l'un des foyers d'une courbe du second degré; trouver le lieu du point de rencontre des normales menées à la courbe par ses deux extrémités.

10° Deux courbes du second degré ayant un foyer commun, un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet situé au foyer commun; trouver le lieu du point de rencontre des tangentes menées respectivement aux deux courbes aux points où elles sont coupées par les côtés de l'angle.

11° Trouver le lieu du point de rencontre des droites menées parallèlement à deux directions fixées par les extrémités d'une corde de lougueur donnée inscrite dans une circonférence donnée.

12° Trouver le lieu du centre d'une hyperbole équilatère circonscrite à un triangle donné.

13° Trouver le lieu des foyers ou des sommets d'une hyperbole, ayant une asymptote et une directrice données.

14° Trouver le lieu des centres des courbes du second degré qui passent par les quatre points d'intersection de deux coniques données. Ce lieu ne change pas quand chacune des coniques varie en restant semblable et concentrique à elle-même.

15° Un cercle variable touche une ellipse donnée en un point donné; trouver le lieu du point de rencontre des tangentes communes aux deux courbes.

16° Trouver le lieu du centre d'une hyperbole qui a un foyer donné et qui coupe en un point donné une droite donnée parallèle à l'une des asymptotes.

17° Trouver le lieu du foyer d'une parabole qui touche deux droites données, l'une en un point fixe, l'autre en un point variable.

18° Trouver le lieu du point de rencontre de deux paraboles, qui admettent pour foyer un point donné, qui touchent une droite donnée et qui se coupent sous un angle donné.

19° Étant donnés trois points A, B, C et une droite indéfinie, on prend sur cette droite un segment variable MN, vu du point A sous un angle constant; trouver le lieu du point d'intersection des deux droites BM et CN.

20° Deux angles de grandeurs constantes tournent autour de leurs sommets placés aux extrémités du grand axe d'une ellipse, le point de rencontre de deux des côtés décrit l'ellipse; trouver le lieu du point de rencontre des deux autres côtés.

21° Trouver le lieu des sommets d'une hyperbole équilatère passant en un point donné et ayant pour asymptote une droite donnée.

22° Étant donnés un système de coniques ayant pour foyers F et F', et une droite fixe passant par le foyer F; les tangentes à ces diverses coniques, aux points où chacune d'elles est coupée par cette droite, sont tangentes à une même parabole, qui a pour foyer le point F', et pour directrice la sécante.

La partie de chaque tangente comprise entre la conique et la parabole est vue du foyer F' sous un angle droit.

CHAPITRE X

Théorie des pôles et des polaires.

TANGENTES AUX COURBES ALGÉBRIQUES.

292 — Considérons une équation algébrique du degré m,

(1) $$f(x, y) = 0,$$

mise sous forme entière. La tangente, au point dont les coordonnées sont x et y, est représentée par l'équation

$$(X - x) f'_x + (Y - y) f'_y = 0,$$

ou

$$X f'_x + Y f'_y - (x f'_x + y f'_y) = 0.$$

Cette équation renferme aussi les coordonnées du point de contact au degré m; mais on peut, au moyen de la relation (1), faire disparaître les termes du degré m. On opère aisément cette réduction à l'aide d'une notation particulière, que nous ferons connaître. Concevons que dans l'équation (1) on remplace x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et que l'on multiplie tous les termes par z^m, le polynôme $f(x, y)$ se transforme en un polynôme homogène et du degré m entre les trois lettres x, y, z, polynôme que nous représenterons par $f(x, y, z)$. Il est évident que, si dans ce dernier polynôme on fait $z = 1$, on reproduit le polynôme proposé $f(x, y)$. On sait que si une fonction $f(x, y, z)$ est homogène et du degré m par rapport aux trois lettres x, y, z, on a identiquement

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = m f(x, y, z).$$

On en déduit

$$x f'_x + y f'_y = m f(x, y, z) - z f'_z.$$

La valeur du second membre, quand on y fait $z = 1$, est égale à la quantité $x f'_x + y f'_y$, telle qu'elle entre dans l'équation de la tangente: mais le point de contact étant sur la courbe, le premier terme se réduit à zéro; l'expression $x f'_x + y f'_y$ est donc égale à la valeur que prend $-z f'_z$, quand on fait $z = 1$. On peut ainsi mettre l'équation de la tangente sous la forme

$$X f'_x + Y f'_y + z f'_z = 0.$$

Pour plus de symétrie, on écrira

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0. \tag{2}$$

Quand on aura pris les trois dérivées partielles de la fonction homogène $f(x, y, z)$, on remplacera z et Z par l'unité dans l'équation (2).

293 — Proposons-nous maintenant de mener par un point donné p, ayant pour coordonnées x_1 et y_1, des tangentes à la courbe donnée. Appelons x et y les coordonnées de l'un des points de contact; la tangente en ce point devant passer par le point p, l'équation (2) sera vérifiée par les coordonnées x_1 et y_1 du point p, ce qui donne la relation

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y + Zf'_z = 0,$$

que, pour plus de symétrie, on mettra sous la forme

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0, \tag{3}$$

en convenant de remplacer z et z_1 par l'unité. Les points de contact seront déterminés par les deux équations simultanées (1) et (3). Ces deux équations étant, l'une du degré m, l'autre du degré $m-1$, le nombre des solutions sera au plus $m(m-1)$. Ainsi par un point p on peut au plus mener $m(m-1)$ tangentes, réelles ou imaginaires, à une courbe du degré m.

Lorsque la courbe est du second degré, l'équation (3) est du premier degré, et l'on a deux solutions, réelles ou imaginaires conjuguées. Quand les deux solutions sont réelles, on peut mener du point p à la courbe deux tangentes réelles. Quand les deux solutions sont imaginaires conjuguées, les deux tangentes sont imaginaires conjuguées, mais la droite des contacts (3) reste réelle.

PROPORTION HARMONIQUE.

294 — Étant donnés deux points A et B, on sait qu'il existe sur la droite AB deux points C et D tels que le

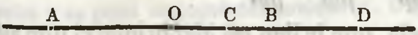


Fig. 172.

rapport de leurs distances aux deux points A et B est égal à un rapport donné (fig. 172). Ces deux points C et D sont dits *conjugués harmoniques* par rapport aux deux points A et B. D'après cela, il y a une infinité de systèmes de points conjugués harmoniques de deux points donnés; on peut prendre l'un des points à volonté. Lorsque le point C se rapproche du milieu O de la droite AB, le point conjugué D s'éloigne à l'infini, et réciproquement.

Si l'on regarde comme positives les longueurs parcourues sur la droite dans un sens, et comme négatives les longueurs parcourues en sens contraires, on a la relation

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}. \tag{4}$$

Cette relation pouvant être mise sous la forme

$$\frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB},$$

on voit que, réciproquement, les deux points A et B sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points C et D.

Si l'on détermine les positions relatives des quatre points par les distances de l'un d'eux A aux trois autres, la relation précédente devient

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}. \tag{5}$$

En comptant les distances à partir du point O, milieu de AB, on a

$$OC . OD = \overline{OB}^2. \tag{6}$$

THÉORÈME I.

295—*Étant donnée une section conique, si par un point* p *du plan on mène une sécante quelconque* mm' (fig. 173), *le lieu du point* p' *conjugué harmonique du point* p *par rapport aux deux points d'intersection* m *et* m' *de la sécante et de la courbe est une ligne droite.*

Le point p', sur chaque sécante, est déterminé par la relation

$$\frac{2}{pp'} = \frac{1}{pm} + \frac{1}{pm'}.$$

Il est évident, d'après cela, que le lieu est algébrique et que sur chaque sécante se trouve un seul point du lieu ; d'ailleurs le point p n'appartient pas au lieu, le lieu cherché est donc une ligne algébrique qui n'est coupée qu'en un seul point par chacune des droites menées par le point p ; c'est donc une ligne du premier degré, c'est-à-dire une ligne droite P. Il est facile de déterminer cette droite par deux de ses points ; par le point p on peut mener deux tangentes pa et pb ; lorsque la sécante coïncide avec la tangente pa, les deux points d'intersection m et m' se confondent avec le point de contact a et l'on a $\frac{2}{pp'}=\frac{2}{pa}$, d'où $pp'=pa$, et par conséquent le point p' se confond lui-même avec le point a ; ainsi les deux points de contact a et b appartiennent au lieu. On en conclut que la droite P n'est autre chose que la droite des contacts relative au point p. Cette droite P s'appelle la *polaire* du point p, et réciproquement le point p est le *pôle* de la droite P.

Il est bon de chercher directement par l'analyse l'équation du lieu. Soit

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

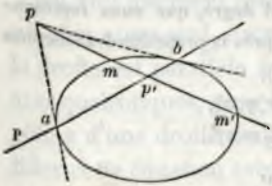


Fig. 173.

l'équation de la courbe, x_1 et y_1 les coordonnées du point p ; une sécante quelconque menée par le point p pourra être représentée par les équations

$$(7) \qquad \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\rho,$$

dans lesquelles a et b désignent deux constantes, et ρ la distance du point p à un point quelconque de la droite ; on en déduit $x=x_1+a\rho$, $y=y_1+b\rho$. En portant ces valeurs dans l'équation de la courbe, on obtient une équation du second degré en ρ,

$$f(x_1+a\rho,\ y_1+b\rho)=0,$$

qui donne les distances du point p aux deux points m et m'. L'équation développée devient

$$(Aa^2+Bab+Cb^2)\rho^2+(af'_{x_1}+bf'_{y_1})\rho+f(x_1, y_1)=0,$$

ou, si l'on prend pour inconnue $\frac{1}{\rho}$,

$$f(x_1, y_1)\frac{1}{\rho^2}+(af'_{x_1}+bf'_{y_1})\frac{1}{\rho}+(Aa^2+Bab+Cb^2)=0.$$

Appelons ρ' et ρ'' les deux racines de cette équation, et ρ_1 la distance du point p au point conjugué harmonique p'. D'après la relation (5), on doit avoir $\frac{2}{\rho_1}=\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''}$. Mais on a

$$\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''}=-\frac{af'_{x_1}+bf'_{y_1}}{f(x_1, y_1)};$$

on en déduit

$$\frac{2}{\rho_1}=-\frac{af'_{x_1}+bf'_{y_1}}{f(x_1, y_1)},$$

ou

$$a\rho_1 f'_{x_1}+b\rho_1 f'_{y_1}+2f'_y(x_1, y_1)=0.$$

Le point p' appartenant à la droite pmm', ses coordonnées x et y vérifient les équations (7) de cette droite, c'est-à-dire que l'on a $x - x_1 = a\rho_1$, $y - y_1 = b\rho_1$; en remplaçant $a\rho_1$ et $b\rho_1$ par ces valeurs dans l'équation précédente, on élimine les paramètres variables a et b et on obtient l'équation du lieu

$$(8) \qquad (x - x_1) f'_{x_1} + (y - y_1) f'_{y_1} + 2 f(x_1, y_1) = 0,$$

qui est du premier degré. Si l'on effectue les calculs, on voit que le terme constant $2 f(x_1, y_1) - x_1 f'_{x_1} - y_1 f'_{y_1}$ se réduit à $Dx_1 + Ey_1 + 2F$, et l'équation précédente devient

$$x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + (Dx_1 + Ey_1 + 2F) = 0.$$

Mais on peut effectuer cette réduction d'une autre manière ; imaginons, comme précédemment, que dans le polynôme $f(x, y)$ on remplace x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et que l'on multiplie tous les termes par z^2, ce polynôme se changera en un polynôme homogène et du second degré, que nous représenterons par $f(x, y, z)$. On a identiquement, d'après la propriété des fonctions homogènes que nous avons rappelée (n° 292),

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = 2 f(x, y, z);$$

on en déduit
$$2 f(x, y, z) - x f'_x - y f'_y = z f'_z,$$

ou bien, en remplaçant x, y, z par x_1, y_1, z_1,

$$2 f(x_1, y_1, z_1) - x_1 f'_{x_1} - y_1 f'_{y_1} = z_1 f'_{z_1}.$$

On peut donc écrire l'équation (8) sous la forme

$$x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z_1 f'_{z_1} = 0,$$

ou, pour plus de symétrie,

$$(9) \qquad x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = 0,$$

en convenant de remplacer, après les dérivations, z et z_1 par l'unité.

Si l'on développe cette équation, on voit qu'elle ne change pas quand on y permute les lettres x et x_1, y et y_1, z et z_1, et on obtient ainsi l'équation (3) de la corde des contacts.

296—Examinons les positions relatives du pôle et de la polaire. Par le point p menons une sécante mm' (fig. 174) parallèle aux cordes que le diamètre passant par le point p divise en deux parties égales; le point p étant au milieu de mm', le point conjugué harmonique est à l'infini sur cette sécante, on en conclut que la polaire P est parallèle à

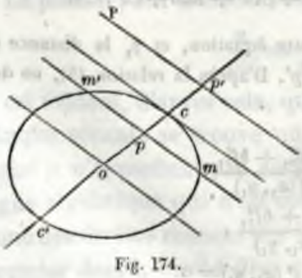


Fig. 174.

la corde mm', c'est-à-dire à la direction conjuguée du diamètre passant par le point p.

Soit o le centre de la courbe et p' le point de la polaire situé sur le diamètre op, c'est-à-dire le point conjugué harmonique du point p par rapport aux deux extrémités c et c' du diamètre, on a $op.op' = \overline{oc}^2$. Si l'on fait mouvoir le pôle p sur le diamètre oc, la polaire P se meut parallèlement à elle-même. Quand le pôle va de o en c, la polaire, d'abord située à l'infini, se rapproche de plus en plus de la courbe et devient tangente en c. Si le pôle sort de la courbe et s'éloigne indéfiniment, la polaire coupe la courbe en deux points réels et se rapproche du centre de plus en plus.

Lorsque la courbe est une parabole, le point c' étant situé à l'infini, le point c est le milieu de pp'.

On voit aisément que, réciproquement, toute droite admet un pôle et un seul, excepté dans le cas de la parabole, lorsque la droite est parallèle à l'axe. La courbe étant rapportée à des axes quelconques, pour déterminer les coordonnées x_1 et y_1 du pôle p d'une droite donnée $mx+ny+p=0$, il suffira d'identifier cette équation avec l'équation (9) qui représente la polaire du point p, ce qui donne les deux relations

$$\frac{f'_{x_1}}{m} = \frac{f'_{y_1}}{n} = \frac{f'_{z_1}}{p}. \qquad (10)$$

THÉORÈME II.

297 — *Les polaires de tous les points d'une droite passent par le pôle de cette droite, et, réciproquement, les pôles de toutes les droites qui passent par un même point sont situés sur la polaire de ce point.*

Fig. 175.

Sur la droite P, dont le pôle est p, prenons un point quelconque q (fig. 175); la droite pq coupe la conique en deux points m et m'; les deux points p et q étant conjugués harmoniques par rapport aux deux points m et m', la polaire du point q passe par le point p.

Réciproquement, soit q le pôle d'une droite quelconque Q passant par le point p; les deux points q et p étant conjugués harmoniques par rapport aux deux points m et m' où la droite pq coupe la conique, le point q appartient à la polaire P du point p.

THÉORÈME III.

298—*Étant donnée une section conique, si par un point* p *on mène deux sécantes quelconques* pmm′, pnn′, *qui coupent la courbe en* m, m′, n, n′ (fig. 176), *les points d'intersection* q *et* q′ *des droites* mn, m′n′ *ou* mn′, m′n *appartiennent à la polaire du point* p.

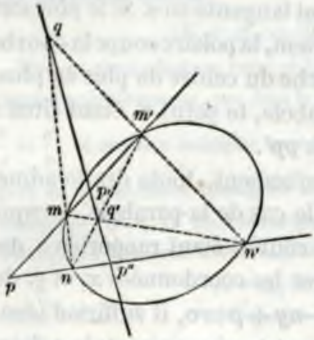


Fig. 176.

Nous remarquons d'abord que le théorème I subsiste lorsque le lieu du second degré se réduit au système de deux droites, mais alors la polaire du point p passe par le sommet de l'angle; car, si l'on considère la sécante qui passe par le sommet, les deux points m et m' coïncident avec ce point, de même que le point p' conjugué harmonique du point p.

Cela posé, considérons le système des deux droites mn, $m'n'$ qui se coupent en q. La droite pmm' coupe la section conique et les deux côtés de l'angle mqm' aux mêmes points m et m'; le point p', conjugué harmonique du point p, est le même sur la sécante pmm', lorsqu'on regarde cette sécante comme appartenant à la section conique ou à l'angle. Le point p'', conjugué harmonique du point p, sera aussi le même, dans les deux cas, sur la sécante pnn'. Les polaires du point p, par rapport à la section conique et à l'angle, ayant deux points communs p' et p'', coïncident; mais on sait que la polaire relative à l'angle passe par le sommet q; donc le point q appartient à la polaire du point p par rapport à la courbe. Par la même raison, le point q' appartient à cette même polaire.

Corollaire. La courbe étant tracée, on déduit de ce théorème le moyen de construire la polaire du point p. On mènera par le point p deux sécantes pmm', pnn' à l'aide desquelles on déterminera deux points q et q' de la polaire.

Si le point p est extérieur, la polaire coupe la courbe en deux points qui sont les points de contact des tangentes menées du point p.

FIGURES POLAIRES RÉCIPROQUES.

299 — Étant donnée dans un plan une figure composée de points $a, b, c,\ldots$ et de droites A, B, C,... si l'on prend les polaires A′, B′, C′,... des points, et les pôles a', b', c',... des droites par rapport à une section conique déterminée, on formera une seconde figure composée comme la première de droites et de points. En opérant de la même manière sur la seconde figure, c'est-à-dire en prenant les pôles des droites et les polaires des points, on retrouve la première. Ces deux figures ont été nommées pour cette raison figures *polaires réciproques* (fig. 177).

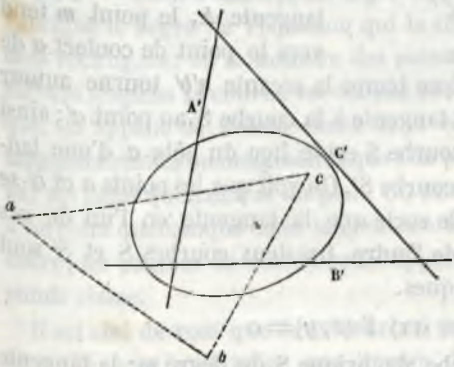


Fig. 177.

La droite ab, qui joint deux points a et b de l'une des figures, a pour pôle le point d'intersection des droites A′ et B′ de l'autre figure; et réciproquement le point d'intersection de deux droites A′ et B′ de l'une des figures a pour *polaire* la droite ab de l'autre figure. Si plusieurs points $a, b, c,\ldots$ sont en ligne droite dans l'une des figures, les droites A′, B′, C′... de l'autre figure passent par un même point qui est le pôle de la droite. Réciproquement, si plusieurs droites A, B, C,... passent par un même point dans l'une des figures, les points a', b', c',... de l'autre figure sont en ligne droite.

Étant donnée une courbe plane S, menons une tangente A à cette courbe et prenons le pôle a' de cette tangente (fig. 178).

Si l'on fait rouler la tangente A sur la courbe S, le pôle a' décrira une autre courbe S'. Soient A et B deux tangentes voisines à la courbe S, a' et b' leurs pôles ; le point d'intersection m des deux droites A et B est le pôle de la droite $a'b'$; si la tangente B se rapproche indéfiniment de la tangente A, le point m tend vers le point de contact a de la tangente A ; en même temps la sécante $a'b'$ tourne autour du point a' et devient tangente à la courbe S' au point a' ; ainsi réciproquement la courbe S est le lieu du pôle a d'une tangente mobile A' à la courbe S'. On voit que les points a et a' se correspondent de telle sorte que la tangente en l'un de ces points est la polaire de l'autre. Les deux courbes S et S' sont dites polaires réciproques.

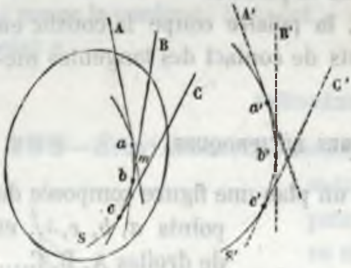


Fig. 178.

Soit (11) $F(x, y) = 0$

l'équation d'une courbe algébrique S du degré m ; la tangente A au point a dont les coordonnées sont x et y est représentée par l'équation

$$(12)\quad XF'_x + YF'_y + ZF'_z = 0.$$

Appelons x_1 et y_1 les coordonnées du pôle a' de la droite A par rapport à une courbe directrice du second degré $f(x, y) = 0$, l'équation de la polaire du point a' est

$$(13)\quad Xf'_{x_1} + Yf'_{y_1} + Zf'_{z_1} = 0.$$

Les deux équations (12) et (13), qui représentent la même droite, doivent être identiques, et l'on a les relations

$$(14)\quad \frac{f'_{x_1}}{F'_x} = \frac{f'_{y_1}}{F'_y} = \frac{f'_{z_1}}{F'_z}.$$

Si, entre les trois équations (11) et (14), on élimine x et y, on obtient l'équation de la courbe S', lieu du point a'.

Cherchons, par exemple, la courbe polaire réciproque de la section conique $Ax^2 + By^2 - 1 = 0$, par rapport au cercle directeur $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Si l'on remplace x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, ces deux équations prennent la forme homogène $Ax^2+By^2-z^2=0$, $x^2+y^2-z^2=0$, et les équations (14) deviennent $\frac{x_1}{Ax}=\frac{y_1}{By}=\frac{z_1}{z}$; on en déduit, en faisant $z=z_1=1$, $x=\frac{x_1}{A}$, $y=\frac{y_1}{B}$; en portant ces valeurs dans l'équation de la courbe proposée, on obtient l'équation $\frac{x_1^2}{A}+\frac{y_1^2}{B}-1=0$. La courbe polaire réciproque est une nouvelle section conique.

300 — Nous avons appelé *degré* ou *ordre* d'une courbe algébrique le degré de l'équation qui la représente en coordonnées rectilignes, ou le nombre des points réels ou imaginaires suivant lesquels la courbe est coupée par une droite quelconque. On appelle de même *classe* de la courbe le nombre des tangentes réelles ou imaginaires que l'on peut mener à la courbe par un point quelconque du plan. On sait que l'on peut mener d'un point quelconque deux tangentes à une courbe du second ordre; les courbes du second ordre appartiennent donc à la seconde classe.

Il est aisé de voir que deux courbes polaires réciproques S et S′ (fig. 179) sont telles que l'ordre de l'une est égal à la classe de l'autre. Une droite quelconque P coupe la courbe S en m points a, b, c,.... ; à ces m points correspondent m droites A′, B′, C′, ... tangentes à la courbe S′ et passant par le point p', pôle de la droite P, et réciproquement, à chaque tangente A′ menée du point p' à la courbe S′ correspond un point a appartenant à la courbe S et situé sur la droite P; ainsi le nombre des tangentes que l'on peut mener du point p' à la courbe S′ est égal au nombre des points d'intersection de la courbe S par la droite P, et, par conséquent, la classe de la courbe S′ est égale à l'ordre de la

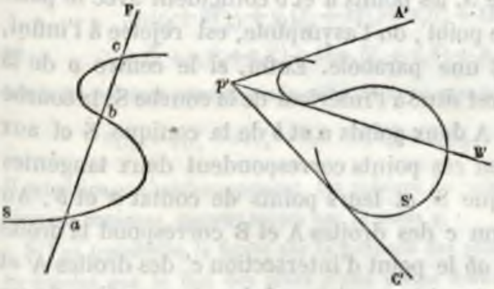


Fig. 179.

courbe S. De même, l'ordre de la courbe S' est égal à la classe de la courbe S.

Une courbe du second ordre étant de la seconde classe, il en résulte que la courbe polaire réciproque d'une courbe du second ordre est aussi du second ordre.

Il est même facile dans ce cas de déterminer l'espèce de la courbe. Si le centre *o* de la courbe directrice est situé en dehors de la courbe S, on peut de ce point mener deux tangentes réelles A et B à la courbe S (fig. 180); les pôles de ces tangentes s'éloignant à l'infini, on en conclut que la courbe S' a des branches infinies dans deux directions différentes; c'est donc une hyperbole.

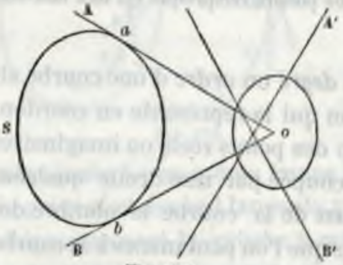


Fig. 180.

Soient *a* et *b* les points de contact des tangentes A et B; les polaires A' et B' de ces deux points sont les tangentes à la courbe S' aux points situés à l'infini; ce sont, par conséquent, les asymptotes. Lorsque le centre *o* de la courbe directrice est situé sur la courbe S, les points *a* et *b* coïncident avec le point *o*, la polaire de ce point, ou l'asymptote, est rejetée à l'infini, et la courbe S' est une parabole. Enfin, si le centre *o* de la courbe directrice est situé à l'intérieur de la courbe S, la courbe S' est une ellipse. A deux points *a* et *b* de la conique S et aux tangentes A et B en ces points correspondent deux tangentes A' et B' à la conique S' et leurs points de contat *a'* et *b'*. Au point d'intersection *c* des droites A et B correspond la droite *a' b'* et à la droite *ab* le point d'intersection *c'* des droites A' et B'. Ainsi à un point *c* et à sa polaire *ab* dans la première figure correspondent dans la seconde figure une droite *a'b'* et son pôle *c'*.

301 — La méthode des polaires réciproques a une grande importance dans l'étude des sections coniques; elle permet, quand on a trouvé une propriété de ces courbes, d'en déduire immédiatement une propriété corrélative. Nous avons démontré, par exemple, au n° 274, que par cinq points donnés on peut faire passer une section conique et qu'on n'en peut faire passer qu'une; on en déduit que *l'on peut mener une section conique tangente à cinq droites données* et *qu'on n'en peut mener qu'une.* Concevons, en effet, que l'on ait tracé dans le plan une section conique quelconque pour servir de courbe directrice, et que, par rapport à cette section conique, on ait marqué les pôles a', b', c', d', e' des cinq droites données A, B, C, D, E; par les cinq points a', b', c', d', e' on peut faire passer une section conique S'; la courbe polaire réciproque de la courbe S' sera une section conique S tangente aux cinq droites données. Réciproquement, à toute section conique tangente aux cinq droites correspond une section conique passant par les cinq points; comme on ne peut faire passer qu'une section conique par les cinq points, il n'existe qu'une section conique tangente aux cinq droites.

Considérons les polaires d'un même point p par rapport aux diverses coniques qui passent par quatre points donnés; si $f(x,y)=0$, et $F(x,y)=0$ sont les équations de deux d'entre elles, l'équation $f+kF=0$, dans laquelle k désigne un paramètre arbitraire, représentera l'ensemble de ces coniques. La polaire du point p, dont les coordonnées sont x_1 et y_1, a pour équation

$$x_1(f'_x+kF'_x)+y_1(f'_y+kF'_y)+z_1(f'_z+kF'_z)=0,$$

ou
$$(x_1f'_x+y_1f'_y+z_1f'_z)+k(x_1F'_x+y_1F'_y+z_1F'_z)=0;$$

toutes les polaires passent par le point de rencontre p' des deux droites,

$$x_1f'_x+y_1f'_y+z_1f'_z=0, \quad x_1F'_x+y_1F'_y+z_1F'_z=0.$$

Il est claire que, réciproquement, les polaires du point p' par rapport aux diverses coniques, passent toutes par le point p.

Si l'on transforme la figure par la méthode des polaires réciproques, on en conclut que le lieu des pôles d'une même droite P par rapport aux diverses coniques tangentes à quatre droites données est une droite. Si la droite P s'éloigne à l'infini dans une direction arbitraire, son pôle par rapport à chacune des coniques est le centre de cette conique; ainsi le lieu des centres des coniques tangentes à quatre droites données est une droite. Chacune des diagonales du quadrilatère formé par les quatre droites, pouvant être regardée comme une ellipse ou une hyperbole infiniment aplatie tangente aux quatre droites, les milieux des trois diagonales appartiennent au lieu et déterminent cette droite (n° 73).

THÉORÈME IV.

302 — *Étant données deux coniques dans un plan : 1° les points d'intersection des trois couples de sécantes déterminent un triangle dont chaque sommet a pour polaire, par rapport à chacune des coniques, le côté opposé ; 2° les points d'intersection des quatre tangentes communes aux deux coniques sont situés deux à deux sur les côtés de ce triangle.*

Soient a, b, c, d (fig. 181) les quatre points communs aux deux coniques ; les points de concours m, n, p des trois couples

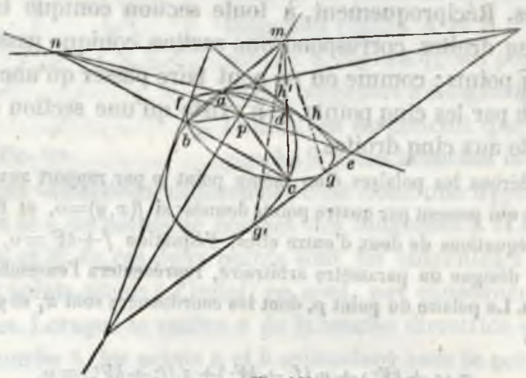


Fig. 181.

de sécantes communes forment un triangle mnp, dont chaque sommet, d'après le théorème III, a pour polaire, par rapport à chacune des deux coniques, le côté opposé. Remarquons que ces trois points sont les seuls qui jouissent de la propriété d'avoir même polaire par rapport aux deux coniques. Soit, en effet, m' un point ayant même polaire par rapport aux deux coniques; la droite $m'a$ coupe cette polaire en un certain point q, et chacune des coniques en un nouveau point qui est le conjugué harmonique de a par rapport aux deux points m' et q; ces deux nouveaux points devant coïncider, la droite $m'a$ passe par l'un des points communs b, c, d, par exemple par le point b. Alors la droite $m'c$ passera par le point d, et le point m' coïncidera avec le point m.

Imaginons maintenant que l'on transforme la figure précédente par la méthode des polaires réciproques. Aux deux coniques correspondent deux autres coniques; aux points a, b, c, d communs aux deux premières des tangentes A′, B′, C′, D′ communs aux deux autres, ce qui montre que deux coniques admettent quatre tangentes communes.

Considérons l'une de ces tangentes communes qui touche les coniques en g et g', et qui rencontre la droite np au point e; les droites mg, mg' coupent les coniques en deux autres points h et h'; le point m, ayant même polaire np par rapport aux deux coniques, les tangentes en h et h' passent par le point e; la droite np étant aussi la polaire du point m par rapport aux deux angles geh, $g'eh'$, les deux droites eh, eh' coïncident, et la droite ehh' est une seconde tangente commune. Par la même raison, le point de rencontre f de l'une des autres tangentes communes avec la droite np appartient à la quatrième tangente. Ainsi les six points d'intersection des quatre tangentes communes sont situés deux à deux sur les côtés du triangle mnp.

Il résulte en outre de ce qui précède que les cordes de contact passent quatre à quatre par les points m, n, p.

303 — Examinons en particulier le cas où la courbe directrice est un cercle de rayon r; la polaire A′ d'un point a est perpendiculaire à oa et à une distance du centre égale à $\frac{r^2}{oa}$. Les droites qui joignent le centre à deux points a et b font entre elles un angle aob égal à celui des polaires A′ et B′ de ces points (fig. 182).

Fig. 182.

Par le centre o menons des parallèles aux droites A′ et B′; des points a et b abaissons des perpendiculaires sur ces droites; les triangles rectangles oae, obf sont semblables et donnent la proportion

$$\frac{oa}{ob}=\frac{ae}{bf}=\frac{ac+ce}{bd+df}=\frac{ac+og}{bd+oh};$$

on en déduit $oa\,(bd+oh)=ob\,(ac+og)$; mais on a $oa.oh=ob.og=r^2$ il en résulte $oa.bd=ob.ac$, ou $\frac{oa}{ob}=\frac{ac}{bd}$.

Ainsi les distances de deux points au centre sont proportionnelles aux distances de chacun d'eux à la polaire de l'autre.

Cherchons la courbe polaire réciproque d'un cercle de rayon r' par rapport au cercle o. Soit C' la polaire du centre c du cercle proposé (fig. 183); menons à ce cercle une tangente quelconque A et prenons le pôle a' de cette droite; d'après la propriété précédente, on a $\frac{oa'}{oc} = \frac{a'd}{r'}$, ou $\frac{oa'}{a'd} = \frac{oc}{r'}$; le rapport des distances de chacun des points a' du lieu au point o et à la droite fixe C' est constant; donc ce lieu est une courbe du second degré dont le point o est l'un des foyers et la droite C' la directrice correspondante.

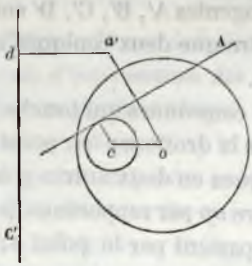


Fig. 183.

A l'aide de cette transformation, on peut déduire immédiatement des propriétés du cercle la plupart des propriétés focales des courbes du second degré. Ainsi, par exemple, deux tangentes A et B au cercle c font des angles égaux avec la corde des contacts ab; aux droites A et B correspondent deux points a' et b' de la section conique; aux deux points a et b du cercle les tangentes A' et B' à cette section conique en a' et b'; à la droite ab ou M le point d'intersection m' des droites A' et B'. Les rayons menés du foyer o aux points a', b', m' faisant entre eux des angles égaux à ceux de leurs polaires A, B, M, on en conclut que la droite om' est bissectrice de l'angle $a'ob'$ (nº 255).

Le lieu du sommet m d'un angle constant circonscrit au cercle c est un cercle concentrique. Aux deux tangentes A et B menées du point m au cercle c correspondent deux points a' et b' de la conique, et au point m la droite $a'b'$; l'angle $a'ob'$, étant égal à celui des droites A et B, est aussi constant; le point m décrivant un cercle dont le centre est c, sa polaire $a'b'$ enveloppe une section conique, donc le point o est l'un des foyers et la polaire du centre c la directrice. Ainsi *la corde vue du foyer d'une section conique sous un angle constant enveloppe une section conique qui a même foyer et même directrice.* La corde ab du cercle enveloppe un cercle concentrique; donc le point de concours des tangentes à la section conique en a' et b' décrit une section conique qui a aussi même foyer et même directrice.

COURBES ENVELOPPES.

304 — Dans ce qui précède, nous avons été amenés à considérer les courbes tangentes à des séries de droites; lorsqu'un point décrit une courbe, sa polaire reste tangente à une autre courbe. On appelle, en général, *enveloppe* d'une ligne mobile une courbe à laquelle cette ligne reste constamment tangente.

Soit

(1) $$f(x,y,a)=0$$

une équation renfermant un paramètre variable a. A chaque valeur de a correspond une ligne déterminée. Donnons au paramètre deux valeurs voisines a et $a+h$; la ligne (1) et la ligne

(2) $$f(x,y,a+h)=0$$

se coupent en un point M′ (fig. 184) dont les coordonnées vérifient à la fois les équations (1) et (2). Le système de ces deux équations peut être remplacé par le suivant

$$f(x\quad,a)=0,\quad \frac{f(x,y,a+h)-f(x,y,a)}{h}=0,$$

qui, lorsque h tend vers zéro, se réduit à

(3) $$f(x,y,a)=0,\quad f'_a(x,y,a)=0.$$

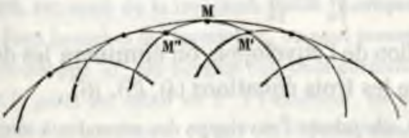


Fig. 184.

Or, quand h tend vers zéro, le point M′ se déplace sur la ligne (1) et tend vers une position limite M; c'est ce point limite qui est représenté par le système (3). Chacune des lignes (1) contient un point limite; on obtient le lieu de ces points, c'est-à-dire le lieu des *intersections successives* des lignes représentées par l'équation (1), en éliminant a entre les équations (3).

Considérons de nouveau le système des équations (1) et (2), dans lesquelles nous regardons a comme une variable et h comme une constante; ce système représente le lieu des points suivant lesquels chaque ligne (a) est coupée par la ligne ($a+h$). Deux de ces points se trouvent sur la ligne (a), savoir : le point d'intersection M′ des lignes (a) et ($a+h$), le point d'intersection M″ des lignes ($a-h$) et (a). Quand h tend vers zéro, les deux points M′ et M″ tendent vers la même position limite M, et le lieu devient tangent à la ligne (a) au point M. Ainsi *le lieu des* *intersections successives des lignes représentées par l'équation* (1) *est tangent à chacune de ces lignes.* A cause de cette propriété, on dit que le lieu est l'*enveloppe* des lignes (1) qui portent le nom d'*enveloppées.*

305 — Supposons maintenant que la ligne mobile soit représentée par une équation

$$f(x, y, a, b) = 0, \tag{4}$$

contenant deux paramètres variables a et b liés par la relation

$$\varphi(a, b) = 0. \tag{5}$$

Si l'on appelle b' la dérivée de b considérée comme une fonction de a donnée par l'équation (5), on a $\varphi'_a + \varphi'_b b' = 0$; d'où $b' = -\frac{\varphi'_a}{\varphi'_b}$. Mais si l'on égale à zéro la dérivée de la fonction $f(x, y, a, b)$ par rapport à a, en y regardant b comme une fonction de a, on a $f'_a + f'_b b' = 0$; on en déduit la relation

$$\frac{\varphi'_a}{f'_a} = \frac{\varphi'_b}{f'_b}, \tag{6}$$

et pour trouver l'équation de l'enveloppe, on éliminera les deux paramètres a et b entre les trois équations (4), (5), (6).

306—Comme exemple, cherchons l'enveloppe des normales à une parabole. La normale à la parabole $y^2 - 2px = 0$, au point M (fig. 185) dont les coordonnées sont x et y, a pour équation $p(Y - y) + y(X - x) = 0$; si l'on remplace x par sa valeur $\frac{y^2}{2p}$, cette équation devient

$$pY + y(X - p) - \frac{y^3}{2p} = 0; \tag{7}$$

elle renferme un paramètre arbitraire y; il faut prendre la dérivée par rapport à y,

$$X - p - \frac{3y^2}{2p} = 0, \tag{8}$$

et éliminer y entre les équations (7) et (8). En remplaçant dans l'équation (7) y^2 par sa valeur tirée de l'équation (8), on a $y = -\frac{3pY}{2(X-p)}$; portant cette valeur de y dans l'équation (8), on obtient l'équation de l'enveloppe

$$Y^2 = \frac{8(X-p)^3}{27p}.$$

Cette courbe a la forme indiquée dans la figure; elle présente un rebroussement en C; car la tangente en ce point, étant normale à la parabole au sommet A, coïncide avec l'axe AX. Quand le point M décrit la branche AB de la parabole, la normale roule sur la branche CD de l'enveloppe; et de même, quand le point M décrit la branche AB' de la parabole, la normale roule sur la branche CD' de l'enveloppe.

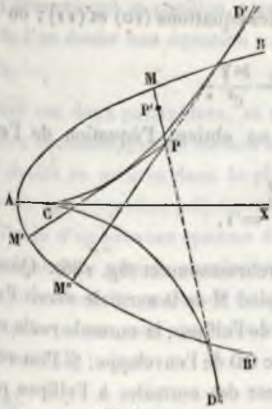


Fig. 185.

Si l'on veut mener des normales à la parabole par un point donné P, il suffira de regarder dans l'équation (7) X et Y comme les coordonnées du point P et l'ordonnée y du pied M de la normale comme l'inconnue; on peut mener du point P trois normales à la parabole ou une seule suivant que cette équation du troisième degré en y admet trois racines réelles ou une seule. Cette question revient évidemment à mener des tangentes à l'enveloppe par le point P; ainsi l'enveloppe, qui est du troisième degré, est aussi de la troisième classe. Lorsque le point P est situé entre les deux branches de l'enveloppe, on peut mener de ce point trois tangentes à l'enveloppe, et, par conséquent, trois normales à la parabole; mais, lorsque le point est situé en P' à l'extérieur, on ne peut mener qu'une seule tangente à l'enveloppe, et, par conséquent, une seule normale à la parabole.

307—Cherchons encore l'enveloppe des normales à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

l'équation de la normale au point (x, y)

$$\frac{a^2X}{x}-\frac{b^2Y}{y}-(a^2-b^2)=0, \tag{10}$$

renferme deux paramètres variables x et y liés par la relation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{11}$$

D'après la formule (6) du nº 305, on a

$$\frac{\dfrac{x}{a^2}}{\dfrac{a^2X}{x^2}}=\frac{\dfrac{y}{b^2}}{-\dfrac{b^2Y}{y^2}}=\frac{1}{a^2-b^2},$$

on a obtenu le troisième rapport en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs, après avoir multiplié les deux termes du premier par x, les deux termes du second par y, et tenant compte des équations (10) et (11); on en déduit

$$x^3 = \frac{a^4 X}{c^2}, \quad y^3 = -\frac{b^4 Y}{c^2};$$

portant ces valeurs dans l'équation (11), on obtient l'équation de l'enveloppe

$$(12) \qquad \left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Cette courbe présente quatre points de rebroussement (fig. 186). Quand le pied M de la normale décrit l'arc AB de l'ellipse, la normale roule sur l'arc CD de l'enveloppe. Si l'on veut mener des normales à l'ellipse par un point donné P, ayant pour coordonnées X et Y, les deux équations simultanées (10) et (11) donneront les coordonnées x et y du pied de chacune des normales; les pieds des normales sont les points d'intersection de l'ellipse proposée (11) et d'une hyperbole (10); il y a quatre solutions. Mais cette question revient à mener des tangentes à l'enveloppe par le point P; on en conclut que l'enveloppe, qui est du sixième degré, est de la quatrième classe. Lorsque le point P est situé à l'intérieur de l'enveloppe, on peut mener de ce point quatre tangentes à l'enveloppe, et, par conséquent, quatre normales réelles à l'ellipse; mais lorsque le point est situé à l'extérieur, par exemple en P', on ne peut plus mener que deux tangentes réelles à l'enveloppe, et, par conséquent, deux normales à l'ellipse; on retrouve ainsi les résultats obtenus au n° 291.

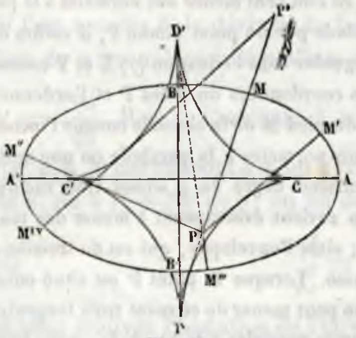


Fig. 186.

L'enveloppe des normales à l'hyperbole a pour équation

$$(13) \qquad \left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

COORDONNÉES TANGENTIELLES.

308. — On peut regarder une courbe, soit comme le lieu d'un point, soit comme l'enveloppe d'une droite mobile. A ce dernier point de vue, nous représenterons la droite par une équation de la forme

$$(14) \qquad px + qy - 1 = 0,$$

et nous dirons, par analogie, que les valeurs des deux paramètres p et q, qui déterminent sa position, sont les coordonnées de la droite.

Si l'on donne une équation

$$\varphi(p, q) = 0 \tag{15}$$

entre ces deux paramètres, et que l'on fasse varier l'un d'eux d'une manière continue, l'autre variera aussi en général d'une manière continue, et la droite se mouvra dans le plan, enveloppant une courbe. On peut concevoir que l'équation (15) représente la courbe par la suite de ses tangentes, à l'aide d'un nouveau système de coordonnées p et q, auxquelles il convient de donner le nom de coordonnées tangentielles.

Pour avoir l'équation de cette courbe en coordonnées linéaires, il suffit, d'après ce que nous avons dit au n° 305, d'éliminer p et q entre les équations (14), (15) et

$$\frac{x}{\varphi'_p} = \frac{y}{\varphi'_q}. \tag{16}$$

Si l'équation (15) est algébrique, l'équation en x et y, à laquelle on arrivera, sera aussi algébrique. Le degré de l'équation (15), mise sous forme entière, indique la classe de la courbe. En effet, si x_0 et y_0 sont les coordonnées d'un point quelconque du plan, chaque système de valeurs de p et q, vérifiant les deux équations

$$px_0 + qy_0 - 1 = 0, \quad \varphi(p, q) = 0,$$

donnera une tangente, réelle ou imaginaire, passant par le point considéré. Lorsque l'équation (15) est du second degré, la courbe étant de la seconde classe, est aussi du second ordre.

Une équation du premier degré

$$Ap + Bq + C = 0, \tag{17}$$

en coordonnées tangentielles, représente un point, le point qui admet les coordonnées linéaires $x_0 = -\frac{A}{C}$, $y_0 = -\frac{B}{C}$; car cette équation, mise sous la forme

$$px_0 + qy_0 - 1 = 0,$$

indique que la droite mobile passe constamment par le point fixe (x_0, y_0); l'enveloppe se réduit donc à un point.

Les propriétés de l'équation du premier degré en coordonnées linéaires, que nous avons étudiées dans le livre II, se reproduisent ici, avec cette modification que les points sont remplacés par des droites et les droites par des points. Ainsi l'équation

$$q - q' = a(p - p'),$$

dans laquelle le paramètre a est arbitraire (n° 64), est l'équation générale des points situés sur la droite (p', q'). L'équation (nº 66)

$$(18) \qquad q-q' = \frac{q''-q'}{p''-p'}(p-p')$$

représente le point d'intersection des deux droites (p', q'), (p'', q'').

Considérons deux tangentes voisines de la courbe (15), et supposons que la seconde se rapproche de plus en plus de la première, leur point d'intersection, représenté par l'équation (18), aura pour limite le point de contact de cette première tangente ; le point de contact est donc représenté par l'équation (nº 89)

$$q-q' = -\frac{\varphi'_{p'}}{\varphi'_{q'}}(p-p'),$$

ou

$$(19) \qquad (p-p')\varphi'_{p'} + (q-q')\varphi'_{q'} = 0.$$

Et remplaçant p et q par $\frac{p}{r}$ et $\frac{q}{r}$, afin de rendre l'équation homogène (nº 292), on réduit cette équation et on la met sous la forme

$$(20) \qquad p\varphi'_{p'} + q\varphi'_{q'} + r\varphi'_{r'} = 0.$$

309 — Il est bon de remarquer que la recherche de l'enveloppe d'une droite mobile peut être ramenée à la théorie des polaires réciproques. Car cette courbe enveloppe S est la courbe polaire réciproque de la courbe S' décrite par le pôle de la droite, relativement à une conique donnée. Si l'on prend comme courbe directrice le cercle $x^2+y^2-1=0$, la droite $xx_1+y_1y-1=0$, polaire du point (x_1, y_1), coïncidera avec la droite mobile (14), si l'on fait $x_1=p$, $y_1=q$; ainsi la courbe S' a pour équation, en coordonnées linéaires, $\varphi(x_1, y_1)=0$.

Exemple I. Trouver l'enveloppe d'une droite telle que le produit de ses distances à deux points fixes F et F' soit égal à une quantité donnée. En prenant pour axes des x la droite FF' et pour axe des y une perpendiculaire sur le milieu de cette droite, appelant $2c$ la distance FF', b^2 le produit constant, et représentant la droite mobile par une équation de la forme $px+qy-1=0$, on a entre les deux paramètres variables p et q, la relation

$$(c^2 \pm b^2)p^2 \pm b^2q^2 - 1 = 0\,;$$

il faut prendre le signe + ou le signe — suivant que la droite laisse les deux points d'un même côté ou passe entre les deux. La courbe S' ayant pour équation

$$(c^2 \pm b^2)x_1^2 \pm b^2y_1^2 - 1 = 0,$$

l'équation de la courbe cherchée S, ou de la polaire réciproque (nº 299), est

$$\frac{x^2}{c^2 \pm b^2} + \frac{y^2}{\pm b^2} - 1 = 0.$$

C'est une ellipse ou une hyperbole dont les points F et F' sont les foyers. Ce théorème est la réciproque d'un théorème démontré nº 259.

Exemple II. Étant donné un quadrilatère *abcd*, trouver l'enveloppe d'une droite telle que le produit de ses distances à deux sommets opposés soit au produit de ses distances aux deux autres sommets dans un rapport constant. Appelons x_1 et y_1, x_2 et y_2, x_3 et y_3, x_4 et y_4 les coordonnées des quatre sommets, et représentons la droite mobile par l'équation $px+qy-1=0$; on aura entre les deux paramètres p et q la relation

$$(px_1+qy_1-1)(px_3+qy_3-1)-k^2(px_2+qy_2-1)(px_4+qy_4-1)=0\,;$$

cette relation étant du second degré, on en conclut que l'enveloppe est une courbe de la seconde classe ou du second ordre. L'équation précédente est vérifiée quand la droite mobile coïncide avec l'un des côtés du quadrilatère, puisque dans chaque terme un facteur s'annule. Ainsi la courbe est inscrite dans le quadrilatère et on peut donner au rapport k une valeur telle que la courbe soit tangente à une cinquième droite quelconque. Il en résulte cette propriété générale des sections coniques : *un quadrilatère étant circonscrit à une section conique, le produit des distances d'une tangente quelconque à deux sommets opposés du quadrilatère est au produit des distances de cette même tangente aux deux autres sommets dans un rapport constant.*

CHAPITRE XI

Propriétés générales des sections coniques.

SYSTÈMES HOMOGRAPHIQUES.

310—Lorsqu'on a sur deux droites deux systèmes de points tels qu'à un point de chaque système corresponde un point et un seul de l'autre, et que les positions des points correspondants soient déterminées par une équation algébrique, on dit que les deux systèmes de points sont *homographiques*.

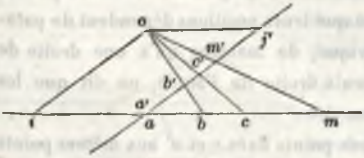


Fig. 187.

Si l'on appelle x et x' les distances de deux points fixes pris sur les droites à deux points correspondants ou *homologues*, la relation algébrique, que l'on suppose exister entre x et x', devant être du premier degré par rapport à chacune de ces deux variables, sera nécessairement de la forme

$$x'x + Ax + A'x' + B = 0. \tag{1}$$

Elle renferme trois coefficients arbitraires A, A′, B ; à trois points pris à volonté sur la première droite, on peut donc faire correspondre trois points pris à volonté sur la seconde, et le mode de division homographique se trouve ainsi déterminé.

Lorsque le point m' de la seconde droite s'éloigne à l'infini, le point homologue m de la première tend vers une position limite i donnée par la formule $x = -A'$. De même, lorsque le point m de la première droite s'éloigne à l'infini, le point homologue m' de la seconde tend vers une position limite j' donnée par la formule $x' = -A$.

Si l'on compte les distances sur les deux droites, à partir des points i et j', la relation (1) se simplifie et devient

$$xx' + B = 0. \tag{2}$$

Il est évident qu'un faisceau de droites, passant par un même point, détermine sur deux sécantes quelconques deux systèmes de points homographiques ; car, d'après la nature de la question, la relation entre les longueurs qui déterminent les points homologues est algébrique, et à un point de l'une des sécantes correspond un seul point de l'autre.

On peut se servir de cette propriété pour construire les points homologues, lorsque le mode de division homographique sur deux droites est défini par trois couples de points homologues (a, a'), (b, b'), (c, c'). On déplacera la seconde droite de manière à faire coïncider les points a et a' (fig. 187) ; les droites bb', cc', se coupent en un point o ; la droite qui joint le point o à un point quelconque m de la première droite déterminera le point homologue m' sur la seconde droite. Une parallèle oj' à la première droite donnera le point j' de la seconde droite homologue de l'infini sur la première, et de même, une parallèle oi à la seconde droite donnera le point i de la première droite homologue de l'infini sur la seconde.

311. — Lorsqu'on a deux faisceaux de droites passant les unes par un point o, les autres par un point o', et que leurs positions dépendent de paramètres liés par une équation algébrique, de manière qu'à une droite de chaque faisceau corresponde une seule droite de l'autre, on dit que les deux faisceaux sont *homographiques*.

Il est évident que si l'on joint deux points fixes o et o' aux mêmes points d'une droite, ou aux points homologues de deux divisions homographiques sur deux droites différentes, on formera deux faisceaux homographiques ; car, d'après la nature de la question, la relation entre les paramètres est algébrique, et à une droite correspond une seule droite.

Inversement, deux faisceaux homographiques déterminent sur deux droites quelconques deux systèmes de points homographiques.

312 — Quand on a sur deux droites différentes deux systèmes de points homographiques, et qu'on applique ces deux droites l'une sur l'autre, on obtient sur une même droite deux systèmes de points homographiques. Si le mode de division est défini par trois couples de points homologues (a, a'), (b, b'), (c, c'), pour construire deux points homologues quelconques, on imaginera la droite dédoublée, on amènera le point a' au point a en faisant faire à la seconde droite un certain angle avec la première, et on achèvera la construction indiquée dans la figure 187.

Lorsqu'on a sur une même droite deux systèmes de points homographiques, il existe sur la droite deux points doubles, c'est-à-dire deux points tels que chacun d'eux, considéré comme appartenant à l'un des systèmes, coïncide avec son homologue dans l'autre système. En effet, si l'on compte les distances sur la droite, à partir d'un même point, et qu'on fasse $x'=x$, on a, en vertu de la relation (1), une équation du second degré

$$x^2+(A+A')x+B=0, \tag{3}$$

dont chaque racine donne un point double. Les deux points doubles sont réels ou imaginaires.

Supposons que l'on ait construit, comme nous l'avons expliqué, les deux points i et j' homologues de l'infini ; si l'on compte les distances à partir du point c, milieu de ij', l'équation (1) devient

$$xx'+A(x-x')+B=0. \tag{4}$$

L'équation (3), qui donne les points doubles, se réduit à

$$x^2+B=0. \tag{5}$$

Appelons c' le point du second système homologue du point o du premier, l'équation (4) devant être vérifiée pour $x=0$ et $x'=cc'$, on a $B=A\times cc'=-cj'\times cc'$, et l'équation (5) prend la forme

$$x^2=cj'\times cc'. \tag{6}$$

Les points doubles sont réels quand les deux longueurs cj' et cc' sont portées dans le même sens ; pour les construire dans ce cas, on décrira un cercle sur $c'j'$ comme diamètre (fig. 188) ; on mènera du point c une tangente à ce cercle ; rabattant la tangente sur la droite, on obtiendra les deux points doubles e et f, qui sont situés à égale distance de part et d'autre du point c.

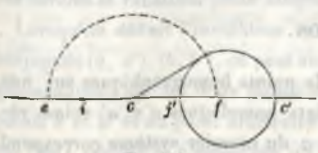


Fig. 188.

313 — Deux faisceaux homographiques ayant même sommet admettent de même deux droites doubles, réelles ou imaginaires ; on les obtiendra en joignant le sommet aux deux points doubles de la division homographique déterminée par le faisceau sur une sécante quelconque.

Lorsqu'on fait tourner un angle constant autour de son sommet, les deux côtés forment deux faisceaux homographiques autour du même point ; les diverses positions de l'un des côtés constituent le premier faisceau, celles de l'autre côté le second faisceau. Il est évident que les deux droites doubles sont imaginaires, et ce qu'il y a de remarquable, c'est que leurs équations sont indépendantes de la grandeur de l'angle. Menons en effet une sécante quelconque, et du sommet abaissons une perpendiculaire oc sur la sécante (fig. 189); les deux positions $a'oi$, $j'oa$, où l'un des côtés est parallèle à la sécante, donnent les points i et j'; la position $c'oc$ donne le point c' homologue du point c. Les angles $c'oc$, $j'oa$ étant égaux, l'angle $c'oj'$ est droit, on a $cj' \times cc' = -\overline{oc}^2$, et l'équation (6) devient $x^2 = -\overline{oc}^2$; d'où $x = \pm oc.i$. Ainsi la position des points doubles sur la sécante, et par conséquent celle des droites doubles, est indépendante de la grandeur de l'angle. Si l'on prend pour origine des coordonnées le point o, pour axe des x la droite oc, pour axe des y la droite oa, les droites doubles ont pour équation $\frac{y}{x} = \pm i$; l'ensemble est représenté par l'équation $x^2 + y^2 = 0$; ce sont les asymptotes d'un cercle $x^2 + y^2 = r^2$, décrit du point o comme centre.

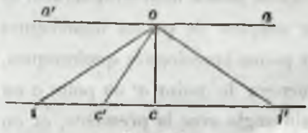


Fig. 189.

Réciproquement, lorsque les points doubles de deux systèmes de points homographiques sur une même droite sont imaginaires, on peut obtenir ces deux systèmes de points par la rotation d'un angle constant autour de son sommet. Le mode de division est défini par les trois couples de points (c, c'), (i, ∞), (∞, j'), le point c étant le milieu de ij' ; la perpendiculaire co à la droite rencontre le cercle décrit sur $c'j'$ comme diamètre en un point o; l'angle $c'oc$, en tournant autour du point o, donnera la division homographique proposée.

INVOLUTION.

314 — Considérons deux systèmes de points homographiques sur une même droite et supposons que deux points homologues a et a' soient réciproques, c'est-à-dire que, si au point a du premier système correspond le point a' dans le second, réciproquement au point a' considéré comme appartenant au premier système correspond le point a dans le second. Il faudra que l'équation (1) reste vérifiée quand on permute les valeurs particulières de x et de x' qui se rapportent à ces deux points, ce qui exige que l'on ait $A = A'$; mais alors tous les points homologues sont réciproques deux à deux, et l'on dit dans ce cas que les points sont en *involution*.

L'équation

$$xx' + A(x + x') + B = 0 \tag{7}$$

ne contenant que deux coefficients arbitraires A et B, il suffit de deux couples de points *conjugués* (a, a'), (b, b'), pour définir l'involution. Les deux points i et j' coïncident, et si l'on compte les distances à partir de ce point i, l'équation (7) se réduit à

$$xx' + B = 0; \tag{8}$$

on appelle ce point le *centre* de l'involution. Il y a deux points doubles e et f, réels ou imaginaires, donnés par l'équation $x^2 + B = 0$.

L'équation (8) devient ainsi $xx' = \overline{ie}^2$; on en conclut que les deux points doubles e et f sont conjugués harmoniques par rapport à deux points conjugués quelconques.

Les cercles menés par deux points fixes p et q déterminent sur une droite une involution (fig. 190). Prenons sur la droite un point quelconque a; par ce point et les deux points p et q passe une seule circonférence de cercle. Cette circonférence coupe la droite en un second point a'; de cette manière on fait correspondre au point a un seul point a';

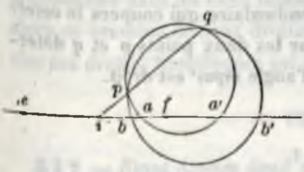


Fig. 190.

d'ailleurs, la relation est algébrique et il y a réciprocité; donc ces couples de points forment une involution. Le point i, où la droite pq coupe la droite donnée, est le centre d'involution et les points doubles sont les points de contact des cercles tangents.

Les points doubles sont réels ou imaginaires, suivant que le point i est situé en dehors des points a et a' ou entre ces deux points. Dans le premier cas, on obtient les points doubles en menant du point i une tangente à l'un des cercles et rabattant cette tangente.

Lorsqu'on définit l'involution sur une droite par deux couples de points conjugués (a, a'), (b, b'), on peut aisément construire deux points conjugués quelconques; par les deux points a et a' menons un cercle, par les deux points b et b' et un point arbitraire p du premier menons un second cercle; ces deux cercles se coupent en un second point q; le cercle qui passe par les deux points p et q et un point m de la droite déterminera le point conjugué m'.

315 — Considérons de même deux faisceaux homographiques ayant même sommet et tels que deux droites homologues soient réciproques; ces droites déterminent sur une sécante quelconque des points en involution; toutes les droites homologues sont donc réciproques deux à deux, et l'on dit que les droites sont en involution. Il y a deux droites doubles réelles ou imaginaires; mais il n'existe rien d'analogue au centre d'involution.

Nous avons dit (nº 313) que, lorsqu'un angle constant tourne autour de son sommet, les deux côtés forment deux faisceaux homographiques. Quand l'angle est droit, il y a réciprocité, et par conséquent involution; les droites doubles, comme nous l'avons remarqué, sont les asymptotes d'un cercle.

Réciproquement, lorsque sur une droite les points doubles d'une involution sont imaginaires, on peut obtenir les couples de points conjugués par la rotation d'un angle droit autour de son sommet. L'involution est définie par les deux couples de points conjugués (i, ∞), (a, a'); sur aa' comme diamètre décrivons un cercle (fig. 191) et au point i élevons sur la droite une perpendiculaire qui coupera le cercle en deux points p et q; un cercle passant par les deux points p et q déterminera deux points conjugués m et m', et l'angle mpm' est droit.

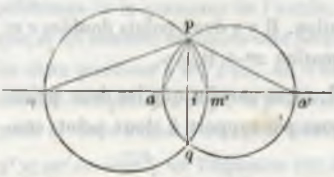


Fig. 191.

THÉORÈME I.

316 — *Étant donnés deux faisceaux homographiques, le lieu du point d'intersection de deux droites homologues est une conique passant par les sommets des deux faisceaux.*

Cherchons combien de points du lieu sont situés sur une droite quelconque D; les deux faisceaux homographiques o et o' (fig. 192) déterminent sur cette droite deux systèmes de points homographiques (α, α'), (β, β'), (γ, γ'), ...; deux droites homologues oe, $o'e$, qui se coupent sur la droite D, donnent un point double e; comme il n'existe sur la droite D que deux points doubles e et f, on en conclut que cette droite ne rencontre le lieu qu'en deux points réels ou imaginaires; ainsi le lieu est du second ordre.

Fig. 192.

A la droite $o'o$ du second faisceau correspond une certaine droite op dans le premier; le point d'intersection vient en o, et la droite op est tangente en ce point. De même, la courbe passe par le point o' et elle est tangente en ce point à la droite $o'q'$ du second faisceau homologue de la droite oo' du premier.

Corollaire. Ceci nous permet de trouver les points où une droite donnée D coupe une conique définie par cinq points o, o', a, b, c; si l'on joint deux des points o et o' aux trois autres, on a trois couples de droites (oa, $o'a$), (ob, $o'b$), (oc, $o'c$) déterminant deux faisceaux homographiques o et o'; le lieu du point d'intersection des droites homologues est la conique passant par les cinq points donnés; les trois couples de points (α, α'), (β, β'), (γ, γ') définissent la division homographique sur la droite D; on trouvera les deux points doubles e et f par le procédé indiqué au n° 312.

Si la droite passe par l'un des points donnés, o par exemple, il suffit de construire la droite homologue dans le second faisceau. De même, comme nous l'avons dit déjà, on obtiendra la tangente en o, en menant la droite op du premier faisceau homologue de la droite $o'o$ du second. On déterminera ainsi autant de points que l'on voudra de la conique cherchée et autant de tangentes.

Remarque. Lorsque la droite oo' qui passe par les sommets se correspond à elle-même dans les deux faisceaux, elle fait évidemment partie du lieu qui alors se compose de deux droites; dans ce cas, le lieu du point d'intersection des droites homologues est, à proprement parler, une ligne droite.

THÉORÈME II.

317 — *Étant donnés deux systèmes de points homographiques sur deux droites fixes* A *et* A', *la droite* aa' *qui joint deux points homologues quelconques enveloppe une conique tangente aux deux droites fixes.*

Cherchons combien de tangentes à l'enveloppe passent par un point arbi-

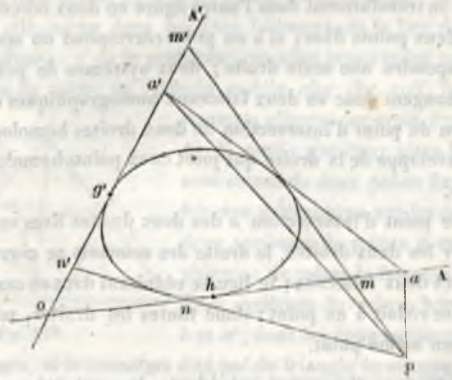


Fig. 193.

traire p du plan (fig. 193); les droites pa, pa', qui joignent le point p à deux points homologues, forment autour du point p deux faisceaux homographiques : lorsque la droite mobile aa', dans une de ses positions mm', passe par le point p, elle devient une droite double des deux faisceaux ; comme il n'existe que deux droites doubles pm, pn, on en conclut que par le point p on ne peut mener que deux tangentes réelles ou imaginaires à la courbe enveloppe ; cette courbe est donc de la seconde classe, et par conséquent du second ordre.

Au point d'intersection o des deux droites fixes A et A', considéré comme appartenant à la seconde droite, correspond sur la première un point h ; la droite mobile vient en oh et la courbe est tangente à la droite A au point h. De même, la courbe est tangente à la droite A' au point g' de cette droite homologue du point o de la droite A.

Corollaire. Ceci nous permet de mener par un point donné p des tangentes à la conique définie par cinq tangentes ; si l'on joint au point p les points où deux des tangentes A et A' sont coupées par les trois autres B, C, D, on a trois couples de droites déterminant deux faisceaux homographiques, dont les droites doubles sont les tangentes demandées.

Si le point p est situé sur l'une des tangentes données, A par exemple, les points où les tangentes A et A' sont coupées par les trois autres B, C, D, définissent sur ces deux premières tangentes deux systèmes de points homographiques ; on cherchera sur la droite A' le point p' homologue du point p sur A ; la droite pp' sera tangente à la conique.

Le point de contact de la tangente A est, comme nous l'avons dit, le point de cette droite homologue du point o de A.

Remarque. Ce théorème pourrait être déduit du précédent par la méthode des polaires réciproques ; deux systèmes de points situés sur deux droites fixes se transforment dans l'autre figure en deux faisceaux de droites passant par deux points fixes ; si à un point correspond un seul point, à une droite correspondra une seule droite ; deux systèmes de points homographiques se changent donc en deux faisceaux homographiques et réciproquement. Le lieu du point d'intersection de deux droites homologues étant une conique, l'enveloppe de la droite qui joint deux points homologues est aussi une conique.

Lorsque le point d'intersection o des deux droites fixes se correspond à lui-même sur les deux droites, la droite des sommets se correspond à elle-même dans les deux faisceaux ; le lieu se réduisant dans ce cas à une droite, l'enveloppe se réduit à un point ; donc toutes les droites, telles que aa, passent par un même point.

318 — Les deux théorèmes précédents donnent naissance à un grand nombre de propriétés remarquables. Nous en indiquerons quelques-unes.

Par exemple, si deux angles constants tournent autour de leurs sommets, de manière que le point d'intersection de deux côtés décrive une droite fixe, il est clair, d'après la construction même, que les deux autres côtés formerout deux faisceaux homographiques, et, par conséquent, que le lieu de leur point d'intersection sera une conique passant par les deux sommets fixes.

De même si, sur deux droites fixes, à partir des points où elles sont rencontrées par une sécante mobile menée par un point fixe, on porte, dans un sens déterminé, deux longueurs constantes, il est évident que les extrémités de ces longueurs formeront deux systèmes de points homographiques, et par conséquent que la droite qui les joint enveloppera une conique tangente aux deux droites fixes.

Considérons un triangle *maa'*, dont les trois côtés tournent autour de trois points fixes *o*, *o'*, *p* (fig. 194), tandis que deux sommets *a* et *a'* glissent sur deux droites fixes A et A'; les faisceaux *o* et *p* sont homographiques, de même *p* et *o'*; donc les faisceaux *o* et *o'* sont homographiques, et le point *m*, troisième sommet du triangle, décrit une conique passant par les deux points *o* et *o'*. Il est aisé de voir que le point d'intersection *c* des droites A et A' et les deux points *d* et *e*, où ces droites sont coupées par les droites *po'* et *po*, appartiennent au lieu; de cette manière, la conique est définie par cinq points.

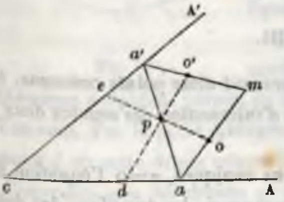


Fig. 194.

Lorsque les trois points fixes *o*, *o'*, *p* sont en ligne droite, la droite *oo'* se correspond à elle-même dans les deux faisceaux, et le lieu du sommet *m* est une ligne droite; c'est le problème que nous avons traité au n° 104.

Considérons de même un triangle mobile *aba'* (fig. 195) dont les trois sommets glissent sur trois droites fixes A, A', B, tandis que deux côtés *ba*, *ba'* tournent autour de deux points fixes *o* et *o'*; le faisceau *o* détermine sur les droites A et B deux systèmes de points *a* et *b* homographiques; de même le faisceau *o'* détermine deux systèmes de points homographiques *b* et *a'*; donc les deux systèmes *a* et *a'* sont homographiques, et le troisième côté *aa'* du triangle enveloppe une conique tangente aux deux droites A et A'. On verra aisément que la droite *oo'* et les deux droites *o'c* et *od*, qui joignent les points *o* et *o'* aux points où la

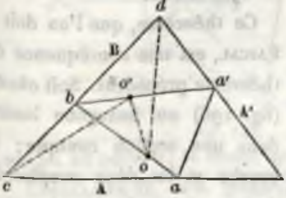


Fig. 195.

droite B coupe les droites A et A', touchent la conique; de cette manière la conique sera définie par cinq tangentes.

Lorsque les trois droites A, A', B passent par un même point, le poin d'intersection des droites A et A' se correspond à lui-même, et l'enveloppe se réduit à un point; donc la droite aa' passe par un point fixe.

Ce mode de démonstration s'applique à des polygones d'un nombre quelconque de côtés. Ainsi lorsque les n côtés d'un polygone tournent autour de n points fixes et que $n-1$ sommets décrivent des droites, le dernier sommet décrit une conique. Lorsque les n sommets d'un polygone décrivent des droites, et que $n-1$ côtés tournent autour de points fixes, le dernier côté enveloppe une conique.

Les théorèmes I et II permettent, comme nous l'avons vu, de construire une conique définie par cinq points ou par cinq tangentes; mais les théorèmes suivants donneront des constructions plus simples.

THÉORÈME III.

319 — *Lorsque trois sections coniques ont deux points communs, les trois droites qui joignent les autres points d'intersection des courbes deux à deux passent par un même point.*

Soit $S=0$ l'équation de l'une des sections coniques, $\alpha=0$ l'équation de la droite qui passe par les deux points communs, les équations des deux autres sections coniques seront de la forme $S-k\alpha\beta=0$, $S-k'\alpha\gamma=0$. Les trois droites qui passent par les deux autres points d'intersection des courbes considérées deux à deux sont $\beta=0$, $\gamma=0$, $k\beta-k'\gamma=0$; on voit que la troisième passe par le point d'intersection des deux premières.

THÉORÈME IV.

320 — *Un hexagone étant inscrit dans une section conique, les points de rencontre des côtés opposés sont en ligne droite.*

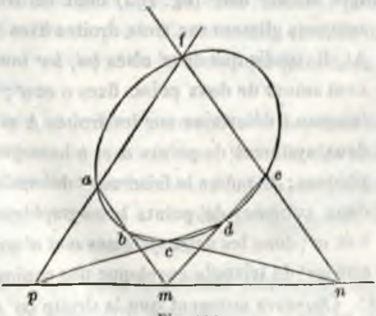


Fig. 196.

Ce théorème, que l'on doit à Pascal, est une conséquence du théorème précédent. Soit $abcdef$ (fig. 196) un hexagone inscrit dans une section conique; la courbe et les deux couples de droites ab et cd, af et de, peuvent être regardées comme trois sections coniques ayant deux points communs a et d. La droite

bc joint les deux autres points d'intersection b et c de la courbe et des deux droites ab et cd ; la droite ef joint les deux autres points d'intersection e et f de la courbe et des deux droites af et de; d'ailleurs les deux couples de droites se coupent en m et p; les trois droites bc, ef, mp passent par un même point n; donc les trois points d'intersection m, n, p des côtés opposés de l'hexagone inscrit sont en ligne droite.

Ce théorème ne s'applique pas seulement à un hexagone convexe, mais encore à un hexagone fermé quelconque. On forme un hexagone inscrit en traçant six cordes consécutives dans un sens ou dans l'autre, de manière à revenir finalement au point de départ. Si l'on numérote les côtés dans l'ordre suivant lequel on les a obtenus, les trois points d'intersection des côtés (1, 4), (2, 5), (3, 6) sont en ligne droite (fig. 197).

Fig. 197.

321 — Corollaire I. Lorsqu'on définit une section conique par cinq points a, b, c, d, e, le théorème précédent permet de construire autant de points de la courbe que l'on veut. Par le point a traçons une droite quelconque af et cherchons le point f où cette droite coupe la courbe (fig. 196) ; on marquera le point d'intersection m des droites ab et de, le point d'intersection p des droites cd et af; la droite bc ira rencontrer la droite mp en un point n; le point f, où la droite ne rencontre af, appartient à la courbe.

On peut aussi construire la tangente en l'un des points. Quand deux sommets de l'hexagone inscrit, par exemple a et f, se confondent, le côté intermédiaire af devient la tangente à la courbe au point a; si l'on applique le théorème de l'hexagone inscrit, en comptant cette tangente comme un côté, on a encore trois points en ligne droite. On marquera donc le point d'intersection m des côtés ab et de (fig. 198), le point d'intersection n des côtés bc et ae ; la droite cd rencontrera la droite mn en un point p; la droite ap sera la tangente en a.

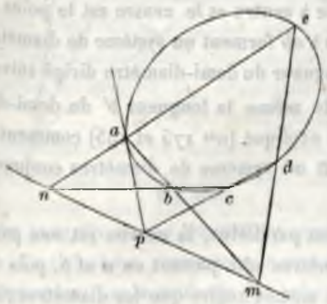


Fig. 198.

Corollaire II. *Un quadrilatère* abcd *étant inscrit dans une section conique, les points de rencontre des côtés opposés, et les points de rencontre des tangentes aux sommets opposés, sont en ligne droite.* Si, avec les tangentes en a et c, on complète l'hexagone inscrit, on aura trois points m, n,

p en ligne droite (fig. 199). En complétant l'hexagone avec les tangentes en b et d, on aura de même trois points m, n, q en ligne droite. Donc les quatre points m, n, p, q sont en ligne droite.

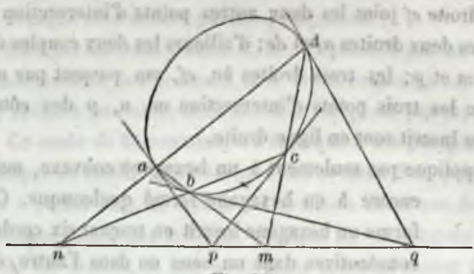


Fig. 199.

Corollaire III. *Un triangle étant inscrit dans une section conique, les points d'intersection des côtés et des tangentes aux sommets opposés sont en ligne droite.* Car les trois tangentes complètent l'hexagone inscrit.

322 — Remarques. Nous avons vu que par cinq points a, b, c, d, e, tels que trois d'entre eux ne soient pas en ligne droite, passe une section conique et une seule. On peut obtenir les éléments de cette courbe de la manière suivante : on commence par déterminer les tangentes A, B, C en trois des points donnés a, b, c. Dans toute courbe du second degré les tangentes aux extrémités d'une corde se coupent sur le diamètre conjugué à cette corde; par conséquent, la ligne qui joint le point de rencontre p des droites A et B au point milieu g de la droite ab est le diamètre des cordes parallèles à ab; de même la ligne qui joint le point de rencontre q des droites B et C au milieu h de bc est le diamètre des cordes parallèles à bc. Supposons d'abord que les deux diamètres pg, qh se coupent en un point o; dans ce cas, la courbe est une courbe à centre et le centre est le point o. La droite op et la droite ok parallèle à ab forment un système de diamètres conjugués. Si l'on appelle a' la longueur du demi-diamètre dirigé suivant op, on a $a' = \sqrt{op.og}$; on obtient de même la longueur b' du demi-diamètre dirigé suivant ok. Nous avons expliqué (nos 175 et 195) comment on détermine les axes, quand on connaît un système de diamètres conjugués a' et b'.

323 — Si les deux diamètres sont parallèles, la courbe est une parabole. Dans ce cas, on mène les diamètres qui passent en a et b, puis des droites faisant avec les tangentes les mêmes angles que les diamètres ; ces deux droites se coupent au foyer de la parabole. En abaissant du foyer des perpendiculaires sur les tangentes A et B, et prolongeant chacune des perpendiculaires d'une longueur égale à elle-même, on a deux points de la directrice.

Lorsque l'on donne trois points et les tangentes en deux de ces points, on détermine la tangente au troisième point à l'aide de la propriété du triangle inscrit, puis on opère comme précédemment. La construction relative à la parabole peut évidemment être employée quand on connaît deux tangentes à la courbe et les points de contact.

Supposons enfin que l'on veuille trouver les éléments d'une parabole déterminée par quatre points a, b, c, d. Si l'on prend pour axes des coordonnées les deux droites ab, cd, les équations des paraboles passant par les points donnés sont (nº 276)

$$\frac{x^2}{ab} \pm \frac{2xy}{\sqrt{abcd}} + \frac{y^2}{cd} + \ldots = 0.$$

Les coefficients angulaires des axes des paraboles étant $\pm\sqrt{\frac{cd}{ab}}$, on en conclut que ces axes sont parallèles aux diagonales d'un parallélogramme formé sur les axes des coordonnées et dont les côtés auraient pour longueurs les moyennes proportionnelles entre a et b, c et d. Connaissant la direction de l'axe, le théorème sur le pentagone inscrit donnera, en supposant que le point e s'éloigne indéfiniment, c'est-à-dire que les droites ae et de, par exemple, deviennent parallèles à l'axe (fig. 198), la tangente en l'un des points. Lorsque l'on aura déterminé deux tangentes, on sera ramené au cas précédent.

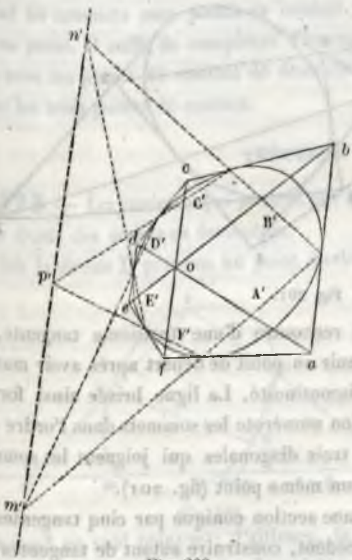


Fig. 200.

THÉORÈME V.

324 — *Un hexagone étant circonscrit à une section conique, les trois droites qui joignent les sommets opposés passent par un même point.*

Ce théorème, connu sous le nom de théorème de Brianchon, se déduit du précédent par la méthode des polaires réciproques. Soit $abcdef$ (fig. 200), un hexagone circonscrit à une section conique; l'hexagone inscrit, qui a pour sommets les points de contact, est la figure corrélative de l'hexagone circonscrit par rapport à la section conique proposée; car les sommets a, b, c,... de l'hexagone circonscrit sont les pôles des côtés A', B', C',... de l'hexagone inscrit. La diagonale ad de l'hexagone circonscrit est la polaire du point d'intersection m' des côtés opposés A' et D' de l'hexagone inscrit;

de même la diagonale *be* est la polaire du point d'intersection n' des côtés B′ et E′ et la diagonale *cf* la polaire du point d'intersection p' des côtés C′ et F′. Puisque les trois points m', n', p' sont en ligne droite, les trois droites *ad*, *be*, *ef* passent par un même point *o*, pôle de cette droite.

Nous ferons ici une remarque analogue à celle qui a été faite à propos du théorème de Pascal. Il n'est pas nécessaire que l'hexagone circonscrit soit convexe, il suffit qu'il soit fermé. Supposons qu'on ait tracé six tangentes à une section conique; pour former l'hexagone, partant du point d'intersection de deux tangentes, on s'avancera sur l'une d'elles jusqu'à la rencontre d'une autre tangente; puis sur cette seconde tangente, dans un

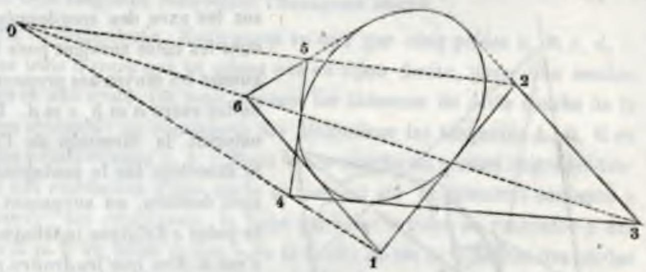


Fig. 201.

sens ou dans l'autre, jusqu'à la rencontre d'une troisième tangente, et ainsi de suite, de manière à revenir au point de départ après avoir marché sur toutes les tangentes sans discontinuité. La ligne brisée ainsi formée est un hexagone circonscrit. Si l'on numérote les sommets dans l'ordre suivant lequel on les a obtenus, les trois diagonales qui joignent les sommets (1, 4), (2, 5), (3, 6) passent par un même point (fig. 201).

Corollaire. Quand on définit une section conique par cinq tangentes, on peut, à l'aide du théorème précédent, construire autant de tangentes que l'on veut. Soient les cinq tangentes *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef* (fig. 200); cherchons la seconde tangente qui passe par un point *a* pris arbitrairement sur l'une des tangentes données; on prendra le point d'intersection *o* des diagonales *ad* et *be*; on mènera la droite *co* et on joindra le point *a* au point *f* où la droite *co* rencontre la tangente *ef*.

On peut aussi déterminer le point de contact de chacune des tangentes. Quand deux côtés de l'hexagone circonscrit, par exemple les côtés *ab* et *bc*, coïncident, le sommet intermédiaire *b* devient le point de contact; pour trouver ce point de contact, on joindra le sommet *e* au point d'intersection *o* des diagonales *ad* et *cf* (fig. 202).

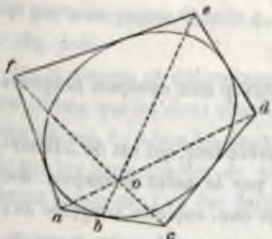


Fig. 202.

Lorsqu'on a déterminé les points de contact de trois tangentes, on obtient les éléments de la courbe par le procédé que nous avons indiqué au n° 322.

On pourrait aussi obtenir immédiatement le centre à l'aide d'un théorème démontré au n° 301.

Du théorème de BRIANCHON, on déduit les corollaires suivants : *un quadrilatère étant circonscrit à une section conique, les deux diagonales et les deux droites qui joignent les points de contact des côtés opposés passent par un même point.*

Un triangle étant circonscrit à une section conique, les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés passent par un même point. Il suffit de compléter l'hexagone circonscrit, dans le premier cas avec les points de contact de deux côtés opposés, dans le second cas avec les trois points de contact.

THÉORÈME VI.

325 — *Les coniques qui passent par quatre points fixes déterminent sur une droite des points en involution.*

Sur la droite D prenons un point quelconque m (fig. 203), par ce point et les quatre points donnés a, b, c, d, on peut faire passer une conique et une seule; cette conique coupe la droite D en un second point m' ; de cette manière au point m correspond un seul point m'; d'ailleurs, la relation est algébrique et il y a réciprocité ; donc les couples de points (m, m') forment une involution.

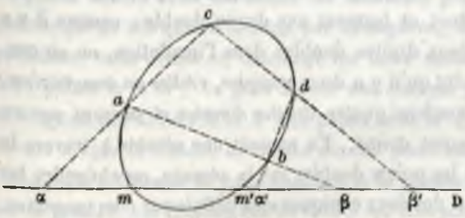


Fig. 203.

COROLLAIRE. Les deux systèmes de droites (ac, bd) et (ab, cd), passant par les quatre points, donneront deux couples de points conjugués (α, α'), (β, β'), définissant l'involution.

Les points doubles sont les points de contact des coniques passant par les quatre points a, b, c, d et tangentes à la droite D; comme il y a deux points doubles, on en conclut qu'*il y a deux coniques, réelles ou imaginaires, passant par quatre points donnés et tangentes à une droite donnée.* On déterminera ces points doubles comme nous l'avons dit au n° 314, et alors chacune des deux coniques sera définie par cinq points.

THÉORÈME VII.

326 — *Les tangentes menées d'un point fixe* p *aux coniques tangentes à quatre droites données sont en involution.*

Ce théorème est le corrélatif du théorème précédent, qui est dû à Desargues. On le démontre de la même manière : par le point p traçons une droite quelconque pm (fig. 204) ; il n'existe qu'une conique tangente aux quatre droites données et à la droite pm ; menons par le point p une seconde tangente pm' à cette conique ; de cette manière, à la droite pm correspond une seule droite pm' ; d'ailleurs, la relation est algébrique et il y a réciprocité ; donc ces tangentes forment une involution.

Fig. 204.

Corollaire. Les quatre droites données forment un quadrilatère ; la diagonale aa' peut être considérée comme la limite d'une ellipse tangente aux quatre droites et dont le petit axe devient nul ; les tangentes menées du point p à cette ellipse réduite à son grand axe aa' sont pa et pa'. Il en est de même de la diagonale bb'. On a ainsi deux couples de droites conjuguées (pa, pa'), (pb, pb') définissant l'involution. Lorsque la conique passe par le point p, les deux tangentes pm, pm' coïncident et forment une droite double ; comme il y a deux droites doubles dans l'involution, on en conclut qu'*il y a deux coniques, réelles ou imaginaires, touchant quatre droites données et passant par un point donné.* En menant une sécante à travers le faisceau, et déterminant les points doubles sur la sécante, on obtiendra les droites doubles et chacune des deux coniques sera définie par cinq tangentes.

THÉORÈME VIII.

327 — *Les coniques tangentes à deux droites données en deux points donnés déterminent sur une sécante quelconque une involution, dont l'un des points doubles est situé sur la corde des contacts.*

Ce théorème est un cas particulier du théorème de Desargues (n° 325). Supposons que les points a et c coïncident, ainsi que les points b et d (fig. 203) ; les deux droites ac et bd seront tangentes en a et en b ; les deux droites ab et cd se confondant, les deux points conjugués β et β' se réunissent en l'un des points doubles de l'involution à laquelle appartiennent les couples de points (m, m'), (α, α').

Corollaire. Ceci nous donne le moyen de construire une conique passant par trois points donnés a, b, c, et touchant deux droites données A et A′ (fig. 205).

Sur la sécante ab déterminons les deux points doubles e et f de l'involution définie par les deux couples de points (a, b), (α, α'). Sur la sécante ac déterminons de même les deux points doubles e_1 et f_1 de l'involution définie par les deux couples de points (a, c), (α_1, α_1'). La corde des contacts, devant passer par l'un des deux points e et f et par l'un des deux points e_1

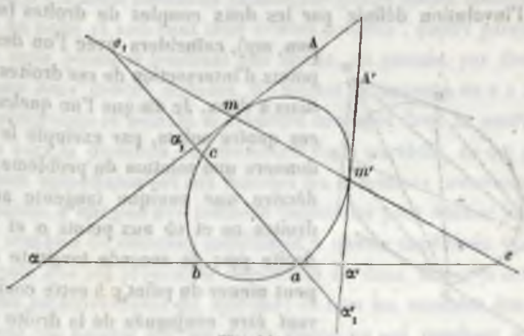


Fig. 205.

et f_1, coïncidera avec l'une des quatre droites que l'on obtient en joignant ces points deux à deux de toutes les manières possibles. Je dis que l'une quelconque de ces quatre droites, par exemple ee_1, donnera une solution du problème : cette droite ee_1 rencontre les deux droites données A et A′ en deux points m et m' ; on peut mener *une* conique passant par le point a, et tangente aux droites A et A′ aux points m et m' (nº 278); cette conique, devant couper la sécante $\alpha\alpha'$ en un second point conjugué du point a dans l'involution définie par le point double e et le couple de points (α, α') passera par le point b; on démontrera de même qu'elle passe par le point c. Ainsi il y a *quatre* coniques, réelles ou imaginaires, passant par trois points donnés et touchant deux droites données.

THÉOREME IX.

328 — *Les tangentes menées d'un point fixe aux diverses coniques qui ouchent deux droites données en deux points donnés, forment une involution dont une droite double passe par le point de rencontre des deux droites données.*

Ce théorème est un cas particulier du théorème VII. Supposons que les deux tangentes ab et ab' coïncident (fig. 204), ainsi que $a'b$ et $a'b'$; les deux points b et b' se confondant, les deux droites pb et pb' se réunissent sur l'une des droites doubles de l'involution à laquelle appartiennent les deux couples de droites (pm, pm'), (pa, pa').

Corollaire. On en déduit le moyen de construire une conique passant par deux points donnés a et b et touchant trois droites données mn, pm et pn (fig. 206). Le point de rencontre o des tangentes en a et b, devant être situé sur l'une des deux droites doubles de l'involution définie par les deux couples de droites (pa, pb), (pm, pn), et sur l'une des deux droites doubles de l'involution définie par les deux couples de droites (ma, mb), (mn, mp), coïncidera avec l'un des quatre points d'intersection de ces droites doubles deux à deux. Je dis que l'un quelconque de ces quatre points, par exemple le point o, donnera une solution du problème; on peut décrire *une* conique tangente aux deux droites oa et ob aux points a et b et à la droite pm; la seconde tangente que l'on peut mener du point p à cette conique, devant être conjuguée de la droite pm dans l'involution définie par la droite double po et le couple de droites (pa, pb), coïncidera avec pn; on démontrera de même que la droite mn est tangente à la conique. Ainsi, il y a *quatre* coniques, réelles ou imaginaires, passant par deux points donnés et touchant trois droites données.

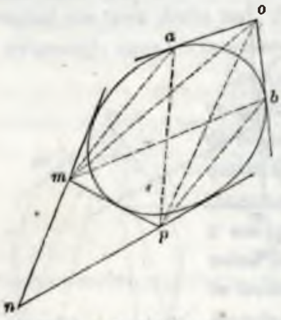


Fig. 206.

329 — **Remarque.** Nous avons dit (n° 282) que l'on peut regarder un foyer comme le point d'intersection de deux tangentes parallèles aux directions $+i$ et $-i$, c'est-à-dire parallèles aux asymptotes d'un cercle; donner un foyer, c'est donc donner deux tangentes à la conique ; ainsi, parmi les coniques qui ont un foyer donné , il y en a *une* tangente à trois données (n° 262), *deux* tangentes à deux droites données et passant par un point donné, *quatre* (dont deux réelles et deux imaginaires) tangentes à une droite donnée et passant par deux points donnés, et enfin *quatre* passant par trois points donnés (n° 260).

Nous avons appris à construire une conique satisfaisant à cinq conditions élémentaires, points de la courbe ou tangentes ; quatre conditions suffisent pour la détermination d'une parabole, et l'on peut ramener la question à l'une des précédentes par une transformation à l'aide de la méthode des polaires réciproques. Nous savons, en effet (n° 300), que , lorsque le centre o de la courbe directrice est situé sur une conique, la courbe polaire réciproque est une parabole, et que, réciproquement, la courbe polaire réciproque d'une parabole est une conique passant par le centre o de la courbe directrice. Dans la transformation, la condition que la courbe cherchée est une parabole est donc remplacée par le point o, les points par des droites, les droites par des points. La construction d'une parabole tangente à quatre droites données est ainsi ramenée à la construction d'une conique passant par cinq points donnés ; il y a *une* solution et une seule. De même, il y a *deux* paraboles passant par quatre points donnés, ou passant par un point et touchant trois droites données ; *quatre* paraboles passant par trois points et touchant une droite, ou passant par deux points et touchant deux droites données. En traçant la tangente en o à la courbe polaire réciproque et menant le diamètre conjugué dans la courbe directrice, on aura la direction des diamètres de la parabole, ce qui permettra d'appliquer immédiatement aux données les théorèmes précédents.

M. Chasles a imaginé une méthode ingénieuse pour étudier les propriétés d'un système de coniques satisfaisant à quatre conditions données, et il a fait voir que ces propriétés dépendent de deux nombres entiers qu'il appelle les *caractéristiques* du système ; ce sont les nombres des coniques du système qui passent par un point donné ou qui touchent une droite donnée. Par exemple, les deux caractéristiques du système des coniques qui passent par quatre points donnés sont 1 et 2 ; celles du système des coniques qui touchent quatre droites données sont 2 et 1 ; celles du système des coniques qui passent par trois points et qui touchent une droite sont 2 et 4, celles du système des coniques qui passent par un point et qui touchent trois droites, sont 4 et 2 ; enfin celles du système des coniques qui passent par deux points et qui touchent deux droites sont 4 et 4.

NOUVELLES COORDONNÉES.

330—Traçons dans le plan trois droites fixes formant un triangle ABC (fig. 207), et, pour abréger, représentons ces droites par $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, α, β, γ étant des polynômes du premier degré en x et y. On peut déterminer la position d'un point quelconque M du plan par l'intersection de deux droites AM et BM passant par deux des sommets du triangle ABC ; ces deux droites ont des équations de la forme

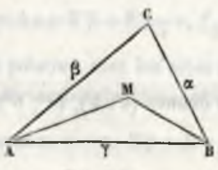


Fig. 207.

$$\alpha = a\gamma, \quad \beta = b\gamma ; \tag{1}$$

elles dépendent des valeurs attribuées aux deux paramètres a et b, que l'on regardera comme constituant un nouveau mode de coordonnées du point M.

Puisqu'on a $a=\frac{\alpha}{\gamma}$, $b=\frac{\beta}{\gamma}$, les nouvelles coordonnées a et b sont des fractions rationnelles du premier degré en x et y, ayant même dénominateur ; en résolvant les équations (1) par rapport à x et y, on verra que réciproquement les coordonnées primitives x et y sont des fractions de la même forme en a et b. Il en résulte que toute équation algébrique et entière par rapport à l'un des systèmes de coordonnées se transforme en une équation entière du même degré dans l'autre système.

Quoique deux coordonnées a et b suffisent, il convient cependant, pour rendre homogènes les équations, de conserver les trois lettres α, β, γ. Si dans l'équation $f(a,\ b)=0$ nous remplaçons a et b par $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$, nous obtiendrons, en effet, une équation homogène $f(\alpha,\beta,\gamma)=0$ du même degré. Ainsi toute droite est représentée par une équation homogène du premier degré $A\alpha+B\beta+C\gamma=0$, et de même toute section conique par une équation homogène du second degré

$$A\alpha^2+A'\beta^2+A''\gamma^2+2B\beta\gamma+2B'\gamma\alpha+2B''\alpha\beta=0.$$

Ces nouvelles coordonnées ont une signification géométrique très-simple. Les lettres α, β, γ représentant, à des facteurs constants près, les distances du point M aux trois côtés du triangle ABC, les deux coordonnées a et b désignent les rapports de deux de ces distances à la troisième. On pourrait même, si l'on voulait, supposer que α, β, γ sont les distances du point M aux trois côtés du triangle, distances affectées de signes convenables.

331—L'équation générale des droites qui passent par un point donné $(a',\ b')$ est

$$b-b'=m(a-a'),$$

m étant un paramètre arbitraire.

De même la droite qui passe par deux points donnés $(a',\ b')$, $(a'',\ b'')$ a pour équation

$$b-b'=\frac{b''-b'}{a''-a'}(a-a').$$

Si l'on suppose que ces deux points soient deux points voisins d'une courbe $f(a,\ b)=0$, et que le second point se rapproche indéfiniment du premier, on voit que la tangente en ce point est représentée par l'équation

$$b - b' = -\frac{f'_{a'}}{f'_{b'}}(a - a'),$$

ou

$$af'_{a'} + bf'_{b'} - (a'f'_{a'} + b'f'_{b'}) = 0.$$

Si l'on remplace a et b par $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$, a' et b' par $\frac{\alpha'}{\gamma'}$ et $\frac{\beta'}{\gamma'}$, afin de rendre l'équation homogène, l'équation de la tangente devient (n° 292)

$$\alpha f'_{\alpha'} + \beta f'_{\beta'} + \gamma f'_{\gamma'} = 0.$$

Lorsque la courbe est du second degré, l'équation précédente ne change pas quand on y permute les lettres α et α', β et β', γ et γ'. Si α', β', γ' désignent les coordonnées d'un point quelconque du plan, la corde des contacts des tangentes menées de ce point, c'est-à-dire la polaire de ce point par rapport à la conique, a pour équation

$$\alpha' f'_{\alpha} + \beta' f'_{\beta} + \gamma' f'_{\gamma} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha f'_{\alpha'} + \beta f'_{\beta'} + \gamma f'_{\gamma'} = 0.$$

Nous avons déjà employé plusieurs fois le système de coordonnées dont nous venons de parler. En voici de nouvelles applications.

332—Exemple I. Considérons deux triangles polaires réciproques par rapport à une conique donnée ; afin de simplifier, prenons les côtés de l'un des triangles comme lignes de repère servant à la définition des nouvelles coordonnées, et soit

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}(A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2B''\alpha\beta) = 0$$

l'équation de la conique. La polaire d'un point quelconque $(\alpha', \beta', \gamma')$ a pour équation $\alpha' f'_{\alpha} + \beta' f'_{\beta} + \gamma' f'_{\gamma} = 0$. En particulier, les polaires des trois sommets $(\beta' = 0,\ \gamma' = 0)$, $(\gamma' = 0,\ \alpha' = 0)$, $(\alpha' = 0,\ \beta' = 0)$ du triangle sont représentées par les équations

$$f'_{\alpha} = A\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0,\quad f'_{\beta} = A'\beta + B\gamma + B''\alpha = 0,\quad f'_{\gamma} = A''\gamma + B'\alpha + B\beta = 0.$$

Ces polaires sont les côtés du second triangle. Les coordonnées du point d'intersection des deux côtés correspondants $\alpha = 0$, $f'_{\alpha} = 0$ vérifient les équations $\alpha = 0$, $B''\beta + B'\gamma = 0$, ou $\alpha = 0$, $\frac{\beta}{B'} + \frac{\gamma}{B''} = 0$; ce point est donc situé sur la droite $\frac{\alpha}{B} + \frac{\beta}{B'} + \frac{\gamma}{B''} = 0$, et il en est de même des deux autres. Ainsi *les trois points de rencontre des côtés correspondants de deux triangles polaires réciproques sont en ligne droite.*

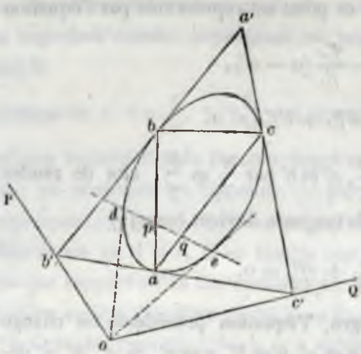


Fig. 208.

Un sommet du second triangle est donné par les deux équations $f'_\alpha = o$, $f'_\beta = o$, la droite $Bf'_\alpha = Bf'_\beta$ passe par ce point; comme l'équation ne contient plus la lettre γ, cette droite passe évidemment par le sommet ($\alpha = o$, $\beta = o$) du premier triangle. Les droites qui joignent les sommets correspondants étant représentées par les équations $Bf'_\alpha = B'f'_\beta = B''f'_\gamma$, on en conclut que *ces trois droites passent par un même point.*

333 — Exemple II. Un triangle abc est inscrit dans une conique; deux de ses côtés ab et ac tournent autour de deux points fixes p et q (fig. 208), trouver l'enveloppe du troisième côté bc. Soient $\gamma = o$ l'équation de la droite pq, $\alpha = o$ et $\beta = o$ celles des tangentes aux points d et e où cette droite rencontre la courbe; l'équation de la conique sera de la forme $\alpha\beta - \gamma^2 = o$. On peut regarder les points p et q comme les points où la droite $\gamma = o$ est coupée par deux droites $\alpha + p\beta = o$, $\alpha + q\beta = o$, qui passent par le point d'intersection o des tangentes en d et e. Un point quelconque a de la courbe peut être déterminé par l'intersection de deux droites $\alpha - a\gamma = o$, $\beta - \frac{\gamma}{a} = o$ passant par les points d et e, a étant un paramètre arbitraire qui définit la position du point sur la courbe. En attribuant à ce paramètre une autre valeur b, on obtient un autre point b. Une droite quelconque passant par le point a a une équation de la forme $\alpha - a\gamma + k\left(\beta - \frac{\gamma}{a}\right) = o$; pour qu'elle passe par le point b qui est représenté par les deux équations $\alpha - b\gamma = o$, $\beta - \frac{\gamma}{b} = o$, il faut faire $k = ab$; ainsi la droite qui joint deux points quelconques a et b de la courbe a pour équation $\alpha + ab\beta - (a + b)\gamma = o$.

Cela posé, soient a, b, c les valeurs du paramètre pour les trois sommets a, b, c du triangle; le côté ab passant par le point p, on a $ab = p$; le côté ac passant par le point q, on a de même $ac = q$; le côté bc a pour équation $\alpha + bc\beta - (b + c)\gamma = o$; si l'on remplace b et c par leurs valeurs $\frac{p}{a}$ et $\frac{q}{a}$, l'équation devient

$$a^2\alpha + pq\beta - (p + q)\,a\gamma = o.$$

Si, entre cette équation et l'équation

$$2a\alpha-(p+q)\gamma=0,$$

que l'on obtient en égalant à zéro la dérivée par rapport à a, on élimine le paramètre variable a, on obtient l'équation de l'enveloppe de la droite bc

$$\alpha\beta+\frac{(p+q)^2}{4pq}\gamma^2=0.$$

Cette enveloppe est une conique qui touche la première aux points d et e.

Si l'on mène des tangentes à la conique proposée aux points a, b, c, on forme un triangle circonscrit $a'b'c'$, dont les deux sommets b' et c' glissent sur deux droites fixes P et Q, polaires des points p et q ; la courbe décrite par le sommet a', pôle de la droite bc, est la polaire réciproque de l'enveloppe ; c'est donc aussi une conique doublement tangente à la première suivant la ligne de.

EXERCICES.

1° Les huit points de contact des tangentes communs à deux coniques données sont situés sur une même conique.

2° Un triangle est inscrit dans une conique, deux côtés passent par deux points fixes ou roulent sur deux coniques doublement tangentes à la première, l'enveloppe du troisième côté est une conique. — Théorème corrélatif.

3° Un polygone de n côtés est inscrit dans une conique ; $n-1$ côtés roulent sur des coniques doublement tangentes à la première ; l'enveloppe du n^e côté est une conique. — Théorème corrélatif.

4° Étant données deux coniques S et S', et deux tangentes à la conique S', les six droites qui joignent deux à deux les quatre points où ces tangentes coupent la conique S, sont deux à deux tangentes à une même conique passant par les points d'intersection des coniques S et S'. — Théorème corrélatif.

5° Étant données trois coniques ayant quatre points communs, un triangle inscrit dans l'une d'elles a deux de ses côtés tangents respectivement aux deux autres, le troisième côté enveloppe une conique. — Théorème corrélatif.

6° Étant données n coniques ayant quatre points communs, un polygone de n côtés inscrit dans l'une d'elles a $n-1$ de ses côtés tangents respectivement aux autres, le n^e côté enveloppe une conique. — Théorème corrélatif.

7° Un polygone, dans une de ses positions, est inscrit à une conique et circonscrit à une autre conique ; si l'on fait mouvoir les sommets sur la première conique, de manière que $n - 1$ côtés restent tangents à la seconde, le n^e côté restera constamment tangent à cette seconde conique.

Dans les théorèmes 4, 5, 6 et 7, on peut remplacer les coniques qui ont quatre points communs par des coniques homothétiques ayant deux points communs, et en particulier par des cercles ayant deux à deux le même axe radical.

8° L'enveloppe des droites qui coupent deux coniques données suivant quatre points en proportion harmonique est une conique.

9° On sait que les polaires d'un point p par rapport à toutes les coniques ayant quatre points communs passent par un même point q ; si le point p décrit une droite, le point q décrit une conique. — Théorème corrélatif.

10° Lorsque deux côtés d'un triangle inscrit dans une conique roulent sur deux courbes quelconques données, le troisième côté enveloppe une troisième courbe ; démontrer que les droites qui joignent les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés passent par un même point. — Théorème corrélatif.

11° Étant donné un hexagone inscrit dans une conique, on prend les points d'intersection des côtés opposés, puis les points d'intersection de chacune des trois diagonales avec les deux côtés opposés, les neuf points ainsi obtenus sont situés sur trois droites passant par un même point.

12° Étant donnée une conique S, on mène une conique variable S′ qui coupe la première en deux points fixes et qui touche deux droites fixes dont le point de rencontre est situé sur la conique S ; l'enveloppe de la droite qui passe par les deux autres points d'intersection des coniques S et S′ est une conique. — Théorème corrélatif.

13° Un quadrilatère étant circonscrit à une conique, si on mène une tangente quelconque à la conique, on sait que le rapport du produit des distances de cette tangente à deux sommets opposés du quadrilatère au produit des distances de cette même tangente à deux autres sommets opposés est constant ; démontrer que ce rapport est égal au produit des distances des deux premiers sommets à l'un des foyers divisé par le produit des distances des deux autres sommets au même foyer.

14° Les six côtés de deux triangles quelconques inscrits dans une même conique sont tangents à une autre conique. — Théorème corrélatif.

15° Trois points sont dits conjugués par rapport à une conique, lorsque la polaire de l'un d'eux est la droite qui joint les deux autres. Démontrer que deux systèmes de trois points conjugués par rapport à une conique sont situés sur une autre conique. — Théorème corrélatif.

LIVRE IV

THÉORIE GÉNÉRALE DES COURBES.

CHAPITRE I.

Construction des courbes en coordonnées rectilignes.

334 — La construction d'une courbe n'est autre chose que la représentation graphique de la marche d'une fonction réelle d'une seule variable, lorsqu'on fait varier d'une manière continue cette variable. Si l'on a calculé les valeurs de y qui répondent à diverses valeurs de x, on connaît un certain nombre de points de la courbe à construire. Mais ces points ne peuvent suffire, même pour un tracé grossier de la courbe, car on peut les réunir de bien des manières différentes; et, d'ailleurs, il peut arriver qu'entre deux ordonnées, même très-rapprochées, la courbe ait des branches infinies. Il est donc indispensable de connaître préalablement, d'une manière générale, la marche de la fonction dont la courbe doit représenter les variations.

Lorsque l'équation est résolue par rapport à l'une des variables, y par exemple, on considère chacune des déterminations de y en particulier, et on examine entre quelles limites doit varier x pour que y reste réelle; soient a et d deux limites. Si la valeur de y reste finie dans cet intervalle, elle donne une branche finie de courbe; si la valeur de y devient infinie pour une ou plusieurs valeurs intermédiaires b, c,... de la variable, on a diverses branches infinies asymptotes aux droites qui correspondent aux valeurs de x qui rendent y infinie; on subdivise alors l'intervalle de a à d en plusieurs autres: un premier de a à b, etc., de manière que dans chacun d'eux l'ordonnée ne devienne pas infinie. On examinera ensuite comment varie y dans chacun des intervalles, par exemple quand x croît de a à b. Quelquefois, on aperçoit immédiatement, d'après l'expression de y, comment varie cette quantité ; mais le plus souvent il n'en est pas ainsi ; dans ce cas, on a recours à la dérivée. On sait, en effet, que la variable x croissant à partir d'une certaine valeur, si la fonction reste finie, elle varie dans le même sens, tant que la dérivée conserve le même signe ; elle croît, si la dérivée est positive ; elle décroît, si la dérivée est négative. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les valeurs successives de x comprises entre a et b, pour lesquelles la dérivée change de signe. La variable x croissant de a à α, la dérivée conserve le même signe, par exemple le signe $+$, la fonction croît ; de α à β, la dérivée est négative et la fonction décroît, etc. Nous avons démontré que le coefficient angulaire de la tangente en un point quelconque de la courbe est égal à la valeur de la dérivée en ce point. Ainsi le sens dans lequel varie l'ordonnée de la courbe est indiqué par le coefficient angulaire de la tangente.

Lorsque la dérivée change de signe, de positive devenant négative, l'ordonnée cesse de croître pour décroître ensuite ; elle passe donc par une valeur *maximum*. Si, au contraire, la dérivée de négative devient positive, l'ordonnée cesse de décroître pour croître ensuite ; elle passe donc par une valeur *minimum*. Il faut remarquer que ces mots *maximum* et *minimum* ne doivent pas être pris avec leur sens absolu ; ils indiquent seulement la comparaison d'une valeur particulière de l'ordonnée avec les ordonnées voisines.

En général, la dérivée, restant finie et continue, change de signe en passant par zéro, et, par conséquent, les tangentes aux points dont les ordonnées ont des valeurs *maxima* et *minima* sont parallèles à l'axe OX. Il faut remarquer que toute valeur de x qui annule la dérivée ne donne pas nécessairement un maximum ou un minimum de l'ordonnée ; on devra examiner si la dérivée change effectivement de signe : mais, dans tous les cas, la tangente est parallèle à l'axe OX.

335—Exemple I. La strophoïde définie au n° 31 a pour équation

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Quand x varie de 0 à $-a$, la valeur numérique de y augmente constamment de 0 à l'infini ; on obtient de la sorte les deux branches infinies ON, ON' asymptotes à la droite HH' (fig. 23). Quand x varie de o à a, l'ordonnée y part de o pour revenir à o, en conservant des valeurs finies ; elle commence donc par croître pour décroître ensuite, et, par conséquent, elle passe par un maximum ; mais on ne voit pas si dans l'intervalle la fonction n'éprouve pas plusieurs alternatives de croissance et de décroissance. La valeur positive de y a pour dérivée

$$y' = \frac{-x^2 - ax + a^2}{\sqrt{(a+x)(a-x)}}.$$

Le numérateur s'annule pour deux valeurs de x, l'une positive x_1, l'autre négative x_2. Quand x varie de o à x_1, la dérivée est positive, la fonction croît ; de x_1 à a la dérivée est négative, la fonction décroît ; l'ordonnée est maximum pour la valeur $x_1 = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, égale au plus grand segment de la ligne a divisée en moyenne et extrême raison.

336 — On détermine souvent la tangente en certains points de la courbe, ou, ce qui est la même chose, certaines valeurs particulières de la dérivée, sans avoir recours à l'expression générale de cette dérivée. Considérons, par exemple, le point O de la strophoïde; joignons ce point à un point voisin M, ayant pour coordonnées x et y; le coefficient angulaire de la sécante OM est égal au rapport $\frac{y}{x}$; on aura le coefficient angulaire de la tangente au point O, en cherchant la limite de ce rapport lorsqu'on fait tendre x vers zéro. Or, on a

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{a-x}{a+x}};$$

quand x tend vers zéro, ce rapport a pour limite ± 1. Les deux branches qui passent au point O ont pour tangentes en ce point les bissectrices des angles des axes. On obtiendrait la tangente au point A en considérant le rapport $\frac{y}{a-x}$; ce rapport augmentant indéfiniment lorsque x tend vers a, la tangente au point A est parallèle à l'axe OY.

337 — Exemple II. Proposons-nous d'étudier les courbes représentées par l'équation $y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$; on démontre que ces courbes peuvent reproduire par la perspective toutes les courbes du troisième degré. On supposera le coefficient A positif, sans quoi on changerait le sens de l'axe des x. Il y a plusieurs cas à considérer : 1° le polynôme du troisième degré a ses trois racines réelles et inégales ; appelons a, b, c, ces racines rangées par ordre de grandenr croissante ; on a

$$y^2 = A(x-a)(x-b)(x-c).$$

L'ordonnée est imaginaire quand x varie de $-\infty$ à a ; réelle quand x varie de a à b ; imaginaire quand x varie de b à c ; réelle quand x varie de c à $+\infty$. La courbe se compose d'une boucle fermée et d'une branche infinie (fig. 209). 2° Lorsque les deux racines a et b deviennent égales, la

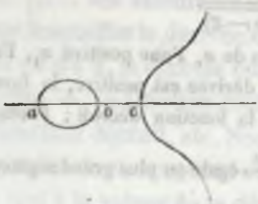


Fig. 209.

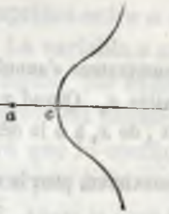


Fig. 210.

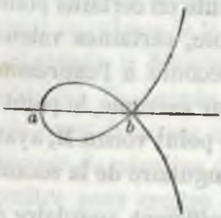


Fig. 211.

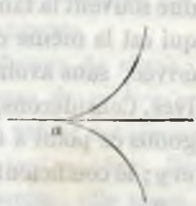


Fig. 212.

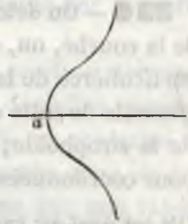


Fig. 213.

boucle se réduit à un point a (fig. 210). 3° Lorsque les deux racines b et c sont égales, la boucle se joint à la branche infinie en b (fig. 211). 4° Lorsque les trois racines a, b, c, sont égales, la courbe présente un point de rebroussement en a (fig. 212). 5° Enfin, si le polynôme du troisième degré n'a qu'une racine réelle a, la courbe a la forme indiquée dans la figure 213.

Le coefficient angulaire de la tangente est donné par la formule

$$y' = \frac{3Ax^2 + 2Bx + C}{2\sqrt{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}} = \frac{3Ax^2 + 2Bx + C}{2y}.$$

Dans le premier cas, le numérateur, qui est la dérivée du polynôme du troisième degré, s'annule pour une valeur a' comprise entre a et b, et pour une valeur b' comprise entre b et c ; à la première correspond le maximum de l'ordonnée sur la boucle. Dans le troisième cas, le numérateur s'annule pour la racine double b ; le dénominateur s'annulant aussi, la formule se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ et ne détermine plus les tangentes au point double b ; on les obtiendra en cherchant la limite $\sqrt{A(b-a)}$ du rapport $\frac{y}{x-b}$, quand x tend vers b.

338— Lorsque l'équation supposée algébrique n'est pas résolue, soit parce que cette résolution n'est pas possible, soit parce que l'on juge inutile de l'effectuer, on peut quelquefois, en s'appuyant sur les théorèmes concernant les racines des équations, construire la courbe.

On aperçoit immédiatement certaines propriétés de la courbe à l'inspection de l'équation; lorsque l'équation ne renferme que des termes qui sont tous de degrés pairs, ou tous de degrés impairs, il est clair que, si elle est vérifiée par $x=\alpha$, $y=\beta$, elle sera aussi vérifiée par $x=-\alpha$, $y=-\beta$; or, les deux points (α, β), $(-\alpha, -\beta)$ sont placés symétriquement par rapport à l'origine; donc ce point est centre de la courbe. Si l'équation ne contient que des puissances paires de l'une des variables, y par exemple, les valeurs réelles de y, qui correspondent à une même valeur de x, sont deux à deux égales et de signes contraires; lorsque les axes sont rectangulaires, on en conclut que les points du lieu sont placés symétriquement par rapport à la droite OX, qui est un axe de la courbe.

Lorsque l'équation de la courbe ne change pas par le changement de x en y et de y en x, si l'équation est vérifiée par $x=\alpha$, $y=\beta$, elle sera vérifiée également par $x=\beta$, $y=\alpha$; les deux points correspondants sont placés symétriquement par rapport à la bissectrice de l'angle YOX, qui est, dans ce cas, un axe de la courbe. On voit de même que, si l'équation ne change pas par le changement de x en $-y$ et de y en $-x$, la bissectrice de l'angle YOX′ est un axe.

Soit $f(x, y)=0$ l'équation de la courbe; on sait que la dérivée y' est donnée par la formule $y'=-\dfrac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}$. L'expression de y' contient à la fois les deux variables x et y, elle donne le coefficient angulaire de la tangente en tout point dont on connaît les deux coordonnées, excepté aux points où les deux dérivées partielles s'annulent à la fois.

339— Exemple III. *Construire le lieu des points tels que le produit de leurs distances à deux points fixes* F, F′, *soit égal à un nombre donné.*

Prenons pour origine le milieu O de la droite FF′, cette droite pour axe des x, une perpendiculaire pour axe des y; appelons $2c$ la distance FF′,

a^2 le produit constant, l'équation du lieu est

$$(1) \qquad y^4 + 2(x^2 + c^2)\, y^2 + (x^2 - c^2)^2 - a^4 = 0.$$

Cette équation, ne renfermant que des puissances paires de chacune des variables, chacun des axes est un axe de symétrie de la courbe, et l'origine est un centre. En considérant y^2 comme l'inconnue, l'équation (1) est du second degré, le binôme $B^2 - 4AC$ se réduit ici à $4(4c^2x^2 + a^4)$, quantité essentiellement positive, les racines sont donc toujours réelles. Lorsque le dernier terme $(x^2 - c^2)^2 - a^4$ est positif, les valeurs de y^2 ont le même signe, et comme leur somme $-2(x^2 + c^2)$ est toujours négative, les deux valeurs de y^2 sont négatives et les quatre valeurs de y imaginaires. Pour que l'équation (1) ait des racines réelles, il faut donc que l'on ait

$$(x^2 - c^2)^2 - a^4 < 0, \quad \text{ou} \quad (x^2 - c^2 - a^2)(x^2 - c^2 + a^2) < 0,$$

et, par conséquent,

$$x^2 < a^2 + c^2 \quad \text{et} \quad x^2 > c^2 - a^2.$$

Alors une des valeurs de y^2 est positive, l'autre négative.

Prenons $OA = OA' = \sqrt{a^2 + c^2}$; la courbe est comprise entre les parallèles à l'axe des y menées par les points A et A'. La seconde condition exige que l'on distingue plusieurs cas.

1° $a < c$. Prenons $OB = OB' = \sqrt{c^2 - a^2}$, et par les points B et B' menons des parallèles à OY (fig. 214), la courbe se compose de deux parties comprises, l'une entre les parallèles menées par les points B et A, l'autre entre les parallèles menées par les points B' et A'. Quand on donne à x l'une des valeurs OB ou OA, l'une des valeurs de y^2 est nulle, l'autre négative; x croissant de OB à OA, la valeur de y^2, qui d'abord est nulle, devient positive et s'annule de nouveau; on obtient ainsi une courbe fermée BCAD. Les valeurs négatives de x donnent une seconde courbe B'C'A'D', égale à la précédente.

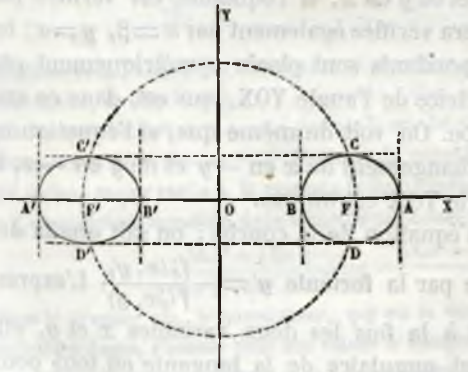


Fig. 214.

Le coefficient angulaire de la tangente est déterminé par la formule

$$(2) \qquad y' = -\frac{x(x^2 + y^2 - c^2)}{y(x^2 + y^2 + c^2)}.$$

Aux points A et B, y est nulle et y' infinie, la tangente est parallèle à l'axe OY. Le numérateur de y' devient nul, quand on a $x^2+y^2=c^2$. Du point O comme centre, avec OF pour rayon, décrivons un cercle. Ce cercle coupe la courbe en quatre points C, D, C′, D′, donnés par les formules

$$x^2=\frac{4c^4-a^4}{4c^2}, \quad y^2=\frac{a^4}{4c^2}.$$

Comme l'arc BC est intérieur au cercle, en l'un quelconque des points de cet arc, la fonction $x^2+y^2-c^2$ a une valeur négative et y' est positive. Pour les points de l'arc CA, le facteur $x^2+y^2-c^2$ est positif et y' négative. Ainsi, de B en C, l'ordonnée croît, et de C en A elle décroît; l'ordonnée du point C est maximum.

2° $a=c$. La seconde condition est satisfaite, quelle que soit x; x peut varier de $-c\sqrt{2}$ à $c\sqrt{2}$. Quand x varie de 0 à $c\sqrt{2}$, la valeur positive de y^2 part de zéro et redevient nulle; on a une courbe fermée OCADO (fig. 215) qui passe à l'origine: les valeurs négatives de x donnent une courbe symétrique de la précédente par rapport à OY. Le cercle de rayon OF coupe la courbe en quatre points, dont les ordonnées ont une valeur numérique $\frac{c}{2}$ maximum, l'abscisse de ces points a pour valeur absolue $\frac{c\sqrt{2}}{2}$. Cette courbe se nomme lemniscate.

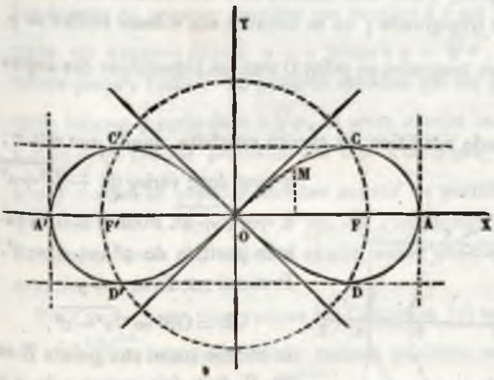


Fig. 215.

A l'origine, la valeur de y' se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; il est facile de concevoir qu'il en est ainsi aux points multiples d'une courbe algébrique quelconque. En effet, la valeur de y' est donnée par la formule

$$y'=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}.$$

Or, $f(x,y)$ étant un polynôme entier par rapport aux variables x et y, les dérivées partielles $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ sont aussi des polynômes entiers par rapport aux mêmes variables. Si ces polynômes ne devenaient pas nuls, lorsqu'on y remplace x et y par les coordonnées du point multiple, y' aurait en ce point une valeur unique, tandis qu'elle doit avoir autant de valeurs différentes qu'il y a de branches qui passent au point multiple. Dans le cas actuel, l'équation étant bicarrée peut être résolue par rapport à y; à chaque valeur de y correspond une dérivée qui a une valeur déterminée, quand on y remplace x par zéro. Cette valeur de la dérivée est, ainsi que nous l'avons remarqué au n° 336, la limite du rapport $\frac{y}{x}$, lorsque x tend vers zéro. On peut obtenir plus simplement la limite de ce rapport sans résoudre l'équation. Posons $\frac{y}{x}=t$, ou $y=tx$; en substituant dans l'équation (1), il vient

$$x^2t^4+2(x^2+c^2)t^2+x^2-2c^2=0.$$

Lorsque x est très-petit, l'une des valeurs de t^2 est voisine de l'unité, l'autre est négative et très-grande; en se bornant aux valeurs réelles de y, on a $\lim \frac{y}{x}=\pm 1$. Les tangentes au point O sont les bissectrices des angles des axes.

3° $a>c$. La seconde condition est encore satisfaite, quelle que soit x; x peut donc varier de $-\sqrt{c^2+a^2}$ à $+\sqrt{c^2+a^2}$. Pour $x=0$, la valeur positive de y^2 est a^2-c^2. Prenons sur l'axe des y

$$OB=OB'=\sqrt{a^2-c^2},$$

la courbe passe aux points B et B'. Si l'on fait varier x de 0 à $\sqrt{c^2+a^2}$, y^2 part de a^2-c^2 et devient nul; le lieu est une courbe fermée qui a pour sommets les points A, A', B, B'. Pour que le cercle coupe la courbe, il faut que l'on ait $a<c\sqrt{2}$. Lorsque cette condition est satisfaite, l'ordonnée croît de B en C et diminue de C en A; l'ordonnée du point B est minimum, celle du point C maximum (fig. 216). Si, au contraire, on a $a>c\sqrt{2}$,

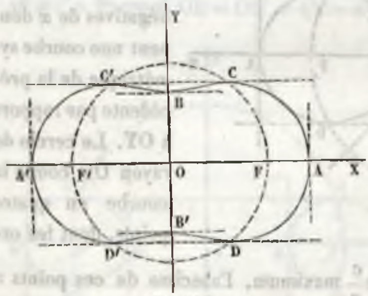


Fig. 216.

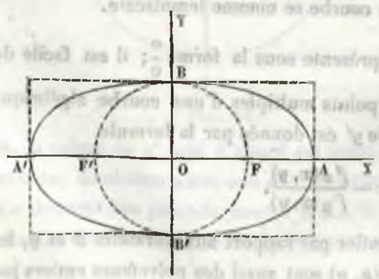


Fig. 217.

le cercle est intérieur à la courbe, dont l'ordonnée diminue de B en A; l'ordonnée du point B est maximum. Dans ce cas on donne à la courbe le nom d'*ovale de Cassini*. La figure 217 suppose que a est égal à $c\sqrt{2}$.

340. — Exemple IV. *Construire la courbe*

(1) $$2y^5 - 5xy^2 + x^5 = 0.$$

Cette équation, étant du cinquième degré par rapport à chacune des variables, ne peut être résolue par rapport à aucune d'elles; elle ne renferme que des termes de degrés impairs; donc l'origine est centre de la courbe. Examinons combien l'équation, dans laquelle on considère y comme l'inconnue, a de racines réelles pour les diverses valeurs attribuées à x.

Supposons d'abord x positive, l'équation (1) aura au plus deux racines réelles positives, puisque son premier membre n'a que deux variations. La dérivée du premier membre par rapport à y est $10y(y^3-x)$. Cette dérivée est négative depuis $y=0$ jusqu'à $y=\sqrt[3]{x}$, positive depuis cette valeur jusqu'à l'infini. Le premier membre qui est positif pour $y=0$, décroît, lorsque y varie de 0 à $\sqrt[3]{x}$, et croît ensuite indéfiniment. L'équation a donc deux racines positives, ou elle n'en a pas, suivant que la valeur $y=\sqrt[3]{x}$ rend le premier membre négatif ou positif, c'est-à-dire suivant que l'on a $x^{10}<27$, ou $x^{10}>27$. Si l'on change y en $-y$, le premier membre présente une variation et une seule; donc l'équation a une racine négative et une seule.

Pour $x=0$, les cinq racines de l'équation (1) sont nulles; x croissant de 0 à $\sqrt[10]{27}$, l'équation a deux racines positives et une racine négative; lorsque x atteint la valeur $\sqrt[10]{27}$, les deux racines positives deviennent égales, puisqu'elles annulent la dérivée. Quand x dépasse $\sqrt[10]{27}$, l'équation n'a plus qu'une racine réelle qui est négative. Les deux racines positives donnent une boucle OABO (fig. 218), comprise dans l'angle YOX, et la racine négative une branche infinie OC placée dans l'angle Y'OX. Aux valeurs négatives de x correspondent une boucle OA'B'O' et une branche infinie OC', symétriques des précédentes par rapport au centre. La valeur maximum de l'abscisse pour la boucle OABO est $\sqrt[10]{27}$, elle correspond à un point A pour lequel la tangente est parallèle à OY, puisque les coordonnées de ce point annulent $f'_y(x, y)$. En considé-

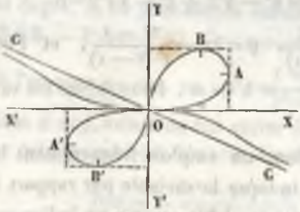


Fig. 218.

rant y comme variable arbitraire, on trouve que le maximum de y pour la même boucle est $\sqrt[3]{4}$; ce maximum donne un point B, pour lequel la tangente est parallèle à OX.

La méthode précédente de discussion est applicable toutes les fois que l'équation ne contient que trois termes; car on sait toujours déterminer le nombre des racines réelles d'une équation trinôme à une seule inconnue.

EMPLOI D'UNE VARIABLE AUXILIAIRE.

341 — Lorsqu'il est impossible de résoudre l'équation par rapport à l'une des variables x ou y, on peut dans certains cas exprimer les deux coordonnées à l'aide d'une variable auxiliaire t; et, en suivant les variations simultanées de x et y, lorsque t varie entre les limites qui rendent ces quantités réelles, tracer la courbe.

Si l'on considère y comme une fonction de x, et x comme une fonction de t, on a, en prenant la dérivée de y par rapport à t, d'après le théorème des fonctions de fonctions [1],

$$D_t y = D_x y \times D_t x\,;$$

on en déduit la formule

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x},$$

qui donne le coefficient angulaire de la tangente au point qui correspond à une valeur quelconque de t. Les valeurs de t qui annulent $D_t y$ donnent les points pour lesquels la tangente est parallèle à OX, et les valeurs qui annulent $D_t x$, les points pour lesquels la tangente est parallèle à OY.

342—Exemple V. *Construire la courbe* $y^4 - y^3x + x^3 - 2x^2y = 0$.

Si l'on pose $y = tx$, on a $x = \dfrac{2t-1}{t^3(t-1)}$, $y = tx = \dfrac{2t-1}{t^2(t-1)}$, et l'on construit la courbe en faisant varier t de $-\infty$ à $+\infty$. Pour suivre les va-

[1] Pour désigner la dérivée d'une fonction, on emploie fréquemment la lettre D, initiale du mot *dérivée*, et on indique la variable par rapport à laquelle on prend la dérivée en écrivant cette variable comme un indice au-dessous de la lettre D et un peu à droite. Ainsi $D_t x$, et $D_t y$ indiquent les dérivées des fonctions x et y par rapport à la variable t, $D_x y$ la dérivée de y par rapport à x.

riations de x et de y, prenons les dérivées

$$D_t x = -\frac{6t^2 - 8t + 3}{t^4(t-1)^3}, \quad D_t y = -\frac{4t^2 - 5t + 2}{t^3(t-1)^2}.$$

Les numérateurs, ne s'annulant pour aucune valeur réelle de t, ne changent pas de signe. Les valeurs de x et de y deviennent nulles pour $t = \frac{1}{2}$, infinies pour $t = 0$, ou $t = 1$. Si l'on fait varier t de $-\infty$ à 0, x est négatif et décroît de 0 à $-\infty$, y est positif et croît de 0 à l'infini ; on obtient ainsi la branche infinie OA (fig. 219). La variable t allant de 0 à $\frac{1}{2}$, x et y deviennent positifs et décroissent de ∞ à 0, ce qui

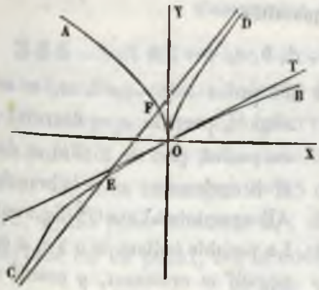


Fig. 219.

donne la branche infinie BO. La variable t allant de $\frac{1}{2}$ à 1, x et y sont négatifs et décroissent de 0 à $-\infty$, on a la branche infinie OC. Le coefficient angulaire de la tangente en O à la branche BOC est $\frac{1}{2}$. Enfin, si t varie de 1 à ∞, x et y deviennent positifs et décroissent de ∞ à 0, on obtient la branche infinie DO.

Lorsque l'équation entre x et y ne renferme que deux groupes de termes, l'un du degré m, l'autre du degré $m-1$, si l'on prend, comme nous venons de le faire, pour variable auxiliaire le rapport $\frac{y}{x} = t$, les coordonnées x et y sont des fonctions rationnelles de cette variable. Lorsque l'équation contient trois groupes de termes, le premier du degré m, le second du degré $m-1$, le troisième du degré $m-2$, en conservant la même variable auxiliaire, les coordonnées s'obtiennent par la résolution d'une équation du second degré, et on peut encore suivre leurs variations simultanées.

343 — Exemple VI. *Construire la courbe* $x^5y^4 - xy - x - 2 = 0$.

Si l'on pose $xy = t$, on a $x = \frac{t+2}{t^4-1}$, $y = \frac{t^5 - t}{t+2}$. Examinons comment varient x et y, lorsqu'on fait varier la variable auxiliaire t de $-\infty$ à $+\infty$. Pour cela prenons les dérivées des deux fonctions, on a

$$D_t x = -\frac{3t^4 + 8t^3 + 1}{(t^4-1)^2}, \quad D_t y = \frac{4t^5 + 10t^4 - 2}{(t+2)^2}.$$

La valeur de $D_t x$ s'annule pour deux valeurs a et b de t comprises, la première entre $-\frac{8}{3}$ et -2, la seconde entre -1 et 0. La valeur $D_t y$

s'annule pour trois valeurs c, d, e de t, comprises, la première entre $-\frac{5}{2}$ et -2, la seconde entre -2 et 0 et la troisième entre 0 et 1. On reconnaît facilement, en outre, que l'on a $a < c$, $d < b$.

Cela posé, considérons la suite des quantités

$$-\infty,\ a,\ c,\ -2,\ -1,\ d,\ b,\ e,\ +1,\ \infty,$$

rangées par ordre de grandeur. Si l'on fait varier t de $-\infty$ à a, x est négatif, part de 0 et décroît ; y est positif, part de l'infini et décroît également ; on a la branche AB asymptote à l'axe OY (fig. 220). La variable t allant de a à c, x est négatif et croissant, y positif et décroissant ; branche BC. La valeur t allant de c à -2, x est négatif et croît jusqu'à 0, y est positif et croît jusqu'à l'infini ; branche CI. La variable t allant de -2 à -1, x croît de 0 à ∞, y croît de $-\infty$ à 0 ; double branche infinie DE, asymptote à OY' et à OX.

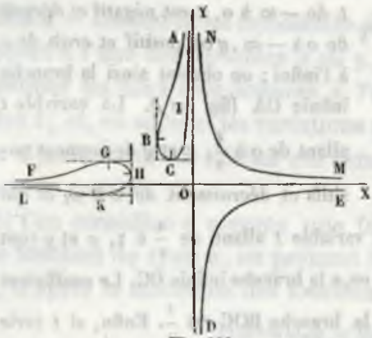


Fig. 220.

La variable t allant de -1 à d, x part de $-\infty$ et croît, y part de 0 et croît ; branche infinie FG, asymptote à OX. La variable t allant de d à b, x continue à croître, et y décroît en restant positif ; branche GH. La variable t allant de b à e, x et y décroissent ; branche HK, qui coupe OX' en un point dont l'abscisse -2 correspond à $t = 0$. La variable t allant de e à $+1$, x décroît, y augmente ; branche infinie KL, asymptote à OX'. Enfin, t variant de $+1$ à $+\infty$, x décroît de ∞ à 0, et y croît de 0 à ∞ ; double branche infinie MN, asymptote à OX et OY.

Les tangentes aux points C, G, K, qui correspondent aux valeurs c, d, e de t qui annulent $D_t y$, sont parallèles à OX ; les tangentes aux points B et H sont parallèles à l'axe OY.

CHAPITRE II

Convexité et Concavité.

344—Soit AB un arc de courbe correspondant à une détermination de y, et aux valeurs de x comprises entre a et b; nous supposons que dans cet intervalle la dérivée seconde y'' de y par rapport à x conserve le même signe, par exemple, reste positive. Menons la tangente RS en un point quelconque M de cet arc, ayant pour abscisse x_0; désignons par y'_0 la valeur de la dérivée en ce point, ou le coefficient angulaire de la tangente, et par Y l'ordonnée d'un point quelconque de cette droite; la différence $y - Y$ s'annule pour $x = x_0$, et il en est de même de sa dérivée $y' - Y'$ ou $y' - y'_0$ (fig. 221). L'abscisse x croissant de a en b, et la dérivée y'' de la différence $y' - y'_0$ étant positive, la fonction $y' - y'_0$ va en croissant; comme elle s'annule pour $x = x_0$, elle est négative de a à x_0, et positive de x_0 à b. Considérons maintenant la fonction $y - Y$, qui admet pour dérivée $y' - y'_0$; quand x varie de a à x_0, la dérivée étant négative, la fonction décroît; comme elle s'annule pour $x = x_0$, elle était positive auparavant; x variant de x_0 à b, la dérivée est positive et la fonction croît; comme elle s'annule pour $x = x_0$, elle est aussi positive de x_0 à b. Il en résulte que la différence $y - Y$ reste positive dans l'intervalle de a à b. On conclut de là que l'arc de courbe AB est situé tout entier d'un même côté de chacune de ses tangentes; c'est un arc *convexe*. Il en serait de même si la dérivée seconde restait négative; mais la différence $y - Y$ étant négative, l'arc serait situé tout entier de l'autre côté de la tangente. Il est facile de distinguer ces deux côtés; par le point M menons une parallèle MY_1 à l'axe OY, et dans la direction des y positifs; dans le premier cas, l'arc est situé du même côté de la tangente que la demi-droite MY_1; dans le second cas, il est de l'autre côté. Dans le premier cas, on dit que l'arc AB tourne

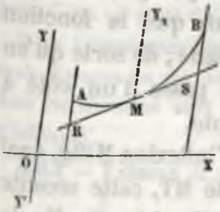


Fig. 221.

sa *concavité* dans la direction MY_1 ; dans le second cas, dans la direction opposée.

On sait que le signe de y'' indique le sens de la variation de y' quand x croît. Si donc on imagine que le point M parcoure l'arc AB, le coefficient angulaire ira en croissant, si y'' est positive, et, au contraire, en décroissant, si y'' est négative.

345—On appelle points d'*inflexion* les points où la concavité change de sens, c'est-à-dire les points où la dérivée seconde change de signe. En général, la quantité y'', étant finie et continue, change de signe en passant par zéro. Supposons que y'' change de signe pour $x = x_0$ en passant par zéro, on verra facilement que la dérivée première $y' - y_0$ ne change pas de signe, mais que la fonction $y - Y$ change de signe ; de sorte qu'en ce point la courbe passe d'un côté à l'autre de la tangente.

Fig. 222.

Si par le point d'inflexion M (fig. 222) on mène une sécante voisine de la tangente MT, cette sécante coupera la courbe en deux points M' et M" voisins de M ; la tangente MT et la limite d'une sécante passant par trois points voisins M", M, M', quand les deux points M" et M' tendent vers le point M.

346—Exemple I. *Sinussoïde.* Construire la courbe $y = \sin x$. Quand x croît de o à π, l'ordonnée est positive ; elle part de o pour revenir à o,

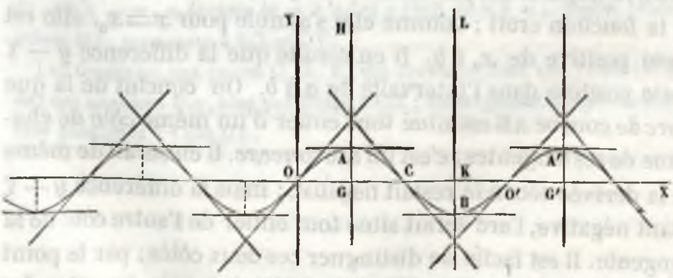


Fig. 223.

ce qui donne l'arc OAC (fig. 223) symétrique par rapport à l'ordonnée qui correspond à $x = \frac{\pi}{2}$. Quand x croît de π à 2π, y devient négatif, et l'on obtient l'arc CBO′, égal au premier. De 2π à 4π, l'ordonnée reprend les mêmes valeurs que de o à 2π, de même de 4π à 6π, etc. Ainsi la courbe se compose d'une infinité d'ondulations égales.

Le coefficient angulaire de la tangente est $y'=\cos x$; à l'origine, $y'=1$, la tangente est la bissectrice de l'angle YOX. Au point C, $y' = -1$, la tangente est parallèle à l'autre bissectrice. Pour $x=\frac{\pi}{2}$, la dérivée s'annule et de positive devient négative ; l'ordonnée du point A est maximum. Pour $x = 3\frac{\pi}{2}$, la dérivée s'annule également, de négative devenant positive ; l'ordonnée du point B est minimum.

Quand x varie de o à π, la dérivée seconde $y'' = -\sin x$ est négative et la courbe tourne sa concavité vers les y négatifs ; de π à 2π, la dérivée seconde est positive et la courbe tourne sa concavité vers les y positifs ; le point C est un point d'inflexion.

Il est à remarquer que cette courbe a une infinité de centres, situés à égale distance les uns des autres sur l'axe X′X, les points O, C, O′,.... dont les abscisses sont les multiples de π. Chacun d'eux est un point d'inflexion.

347 — Exemple II. *Construire la courbe* $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$, ou $y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$.

Les valeurs de y ne sont réelles que lorsque x est positif. Prenons d'abord le signe + devant le radical ; la fonction $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}}$ augmente de o à l'infini, quand x varie de o à ∞. La dérivée $y' = 2x + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ part de zéro et augmente aussi constamment ; on a donc une branche infinie OD tangente en O à l'axe OX et qui tourne sa concavité vers les y positifs (fig. 224). Prenons maintenant le signe — devant le radical ; la valeur de y est positive de o à 1, et négative au delà. Portons sur OX une longueur OA égale à l'unité, la courbe passe en A. La dérivée $y' = 2x - \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$, nulle au point O, est positive tant que x reste moindre que $\frac{16}{25}$, et négative quand x dépasse ce nombre ; l'ordonnée MP qui correspond à $\frac{16}{25}$ est maximum, et la tangente en M est parallèle à OX. La dérivée seconde $2 - \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}$ reste positive depuis o jusqu'à

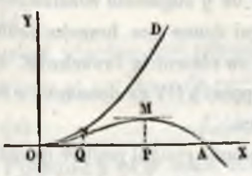


Fig. 224.

$\frac{64}{225}$, elle est négative au delà ; le point N, qui correspond à l'abscisse $\frac{64}{225}$, est un point d'inflexion ; de O en N, la concavité est tournée vers les y positifs ; au delà, elle est tournée vers les y négatifs.

Deux branches de la courbe sont tangentes au point O à la droite OX, sans être la continuation l'une de l'autre ; les points qui offrent cette particularité se nomment *points de rebroussement*. Dans cette courbe, les deux branches sont du même côté de la tangente. En considérant la courbe $(y-x^2)^2-x^3=0$, on aurait deux branches situées de part et d'autre de la tangente ; la cissoïde présente à son sommet A (fig. 21) un rebroussement de cette sorte.

348 — Exemple III. Soit la courbe $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$. On suppose que a désigne une longueur donnée ; alors l'équation est homogène et définit une courbe, à laquelle on a donné le nom de *chaînette*, parce que c'est la courbe que forme un fil flexible pesant, dont les extrémités sont attachées à deux points fixes.

L'équation donne des valeurs de y égales pour deux valeurs de x égales et de signes contraires, la droite OY est un axe de la courbe. Quand x varie de o à ∞, le terme $e^{\frac{x}{a}}$ augmente, mais le terme $e^{-\frac{x}{a}}$ diminue ; pour savoir comment varie y, prenons la dérivée. On a

$$y'=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

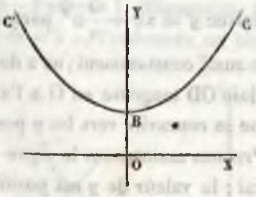


Fig. 225.

Cette dérivée est positive pour toutes les valeurs positives de x ; donc quand x croît de o à ∞, la valeur de y augmente constamment de a à ∞, ce qui donne une branche infinie BC (fig. 225) ; on obtient la branche BC' symétrique par rapport à OY en donnant à x des valeurs négatives.

La dérivée seconde restant positive quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, la courbe tourne sa *concavité* vers les y positifs.

349 — Exemple IV. *Construire la courbe* $y=e^{\frac{1}{x}}$. Donnons à x une valeur positive très-petite, y est positif et très-grand ; x croissant de o à $+\infty$, y décroît constamment de ∞ à 1, ce qui donne une branche AC (fig. 226) asymptote d'une part à OY, d'autre part à la droite G'G menée parallèlement à OX et à une distance de cette droite égale à l'unité. Quand on donne à x une valeur négative très-petite numériquement, y est positif et très-petit; x variant de 0 à $-\infty$, y croît constamment de 0 à 1; on a ainsi une branche OD partant de l'origine et asymptote à la droite GG'.

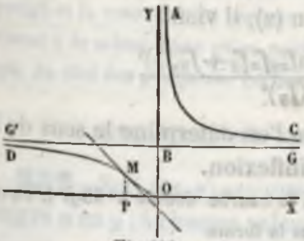


Fig. 226.

Cette courbe présente une particularité que nous n'avons pas encore rencontrée; la branche DO s'arrête brusquement au point O; on donne aux points de cette espèce le nom de *points d'arrêt*.

Pour avoir le sens de la concavité, prenons d'abord la dérivée première; on a $y' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. Lorsque x varie de 0 à ∞, les deux facteurs $\frac{1}{x^2}$ et $e^{\frac{1}{x}}$ diminuent; à cause du signe $-$, y' augmente; la concavité de la branche AC est tournée vers les y positifs; x variant de $-\infty$ à 0, le facteur $\frac{1}{x^2}$ augmente, le facteur $e^{\frac{1}{x}}$ diminue; on ne voit pas immédiatement comment varie y'; la dérivée seconde va nous l'apprendre. On a $y'' = \frac{2x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$. Quand x varie de $-\infty$ à $-\frac{1}{2}$, la dérivée seconde est négative; prenons OP égale à $\frac{1}{2}$ et soit M le point correspondant de la courbe; l'arc DM a sa concavité dirigée vers les y négatifs; x croissant de $-\frac{1}{2}$ à 0, y'' est positive, l'arc MO tourne sa concavité vers les y positifs et le point M est un point d'inflexion.

350—Considérons les cas où l'équation de la courbe

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

n'est résolue par rapport à aucune des variables x et y; la dérivée y' est donnée par l'équation

$$(2) \qquad f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\, y' = 0.$$

Puisque y et y' sont deux fonctions de x, le premier membre de l'équation (2) est une fonction *composée* de la variable indépendante de x; cette fonction a pour dérivée

$$f''_{x^2} + 2f''_{xy}y' + f''_{y^2}y'^2 + f'_y y'';$$

comme elle est constamment nulle, sa dérivée est aussi nulle, et l'on a l'équation

$$(3) \qquad f''_{x^2} + 2f''_{xy}y' + f''_{y^2}y'^2 + f'_y y'' = 0,$$

qui donne la valeur de y''. Si l'on remplace dans cette équation y' par sa valeur tirée de l'équation (2), il vient

$$y'' = -\frac{f''_{x^2}(f'_y)^2 - 2f''_{xy}f'_xf'_y + f''_{y^2}(f'_x)^2}{(f'_y)^3}.$$

C'est à l'aide de cette formule que l'on détermine le sens de la concavité, ainsi que les points d'inflexion.

351 — Appliquons cette formule à la courbe définie n° 339. L'équation de cette courbe peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad f(x,y) = \frac{1}{4}[(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2 - a^4] = 0.$$

On en déduit $f'_x = x(x^2+y^2-c^2)$, $f'_y = y(x^2+y^2+c^2)$,

$$f''_{x^2} = (x^2+y^2-c^2)+2x^2, \quad f''_{xy} = 2x^2, \quad f''_{y^2} = (x^2+y^2+c^2)+2y^2.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la formule précédente, on obtient, après avoir réduit en tenant compte de l'équation (1),

$$y'' = \frac{a^4[3c^2(y^2-x^2)-(a^4-c^4)]}{y^3(x^2+y^2+c^2)^2}.$$

Pour chaque portion de la courbe comprise dans l'un des angles des axes des coordonnées, le dénominateur conserve le même signe ; la valeur de y'' ne peut donc changer de signe que lorsque le numérateur passe par zéro. Les coordonnées des points d'inflexion doivent donc vérifier à la fois l'équation (1) et l'équation

$$(2) \qquad y^2 - x^2 - \frac{a^4-c^4}{3c^2} = 0;$$

on en déduit

$$(3) \qquad y^2 + x^2 = \sqrt{\frac{a^4-c^4}{3}}.$$

Dans le premier cas, lorsque a est plus petit que c, les valeurs de x et de y données par les équations (1) et (3) étant imaginaires, le numérateur de y'' a le même signe pour tous les points de l'arc BA ; on vérifie aisément qu'il est négatif près des points B et A ; la concavité de cet arc est dirigée vers les y négatifs (fig. 214). Dans le second cas, $a=c$, le numérateur devient nul au point O seulement ; il est positif de O en A, et la concavité de l'arc OA est dirigée vers les y négatifs (fig. 215) ; l'arc A'D'OCA présente au point O un point d'inflexion. Dans le troisième cas, on a $a>c$; pour que les valeurs de x et de y soient réelles, on doit avoir en même temps $a<c\sqrt{2}$. Lorsque a est plus grand que $c\sqrt{2}$, le numérateur est négatif en tous les points de l'arc BA, et la concavité tournée vers les y négatifs (fig. 217) ; si a est plus petit que $c\sqrt{2}$, le numérateur s'annule pour un certain point G (fig. 216)

situé entre B et C ; de B en G, il a le même signe qu'au point B, il est positif et la concavité est tournée vers les y positifs ; de G en A le numérateur a le même signe qu'au point A ; il est négatif, et la concavité dirigée du côté des y-négatifs. Le point G est un point d'inflexion.

REMARQUES SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES.

352—Soit $f(x,y)=0$ une équation algébrique et entière du degré n en y ; à chaque valeur de x correspondent n valeurs de y qui, en général, sont différentes les unes des autres ; on démontre que, quand x varie d'une manière continue, chacune de ces valeurs varie aussi d'une manière continue ; nous admettrons ce théorème comme nous l'avons fait jusqu'à présent. Lorsque l'équation est irréductible, elle n'admet de racines multiples que pour un nombre limité de valeurs de x ; parmi ces valeurs de x, considérons seulement celles qui sont réelles et supposons-les rangées par ordre de grandeur. Soient a et b deux valeurs consécutives ; quand x variera de a à b, le nombre des valeurs réelles de y restera le même ; car si une racine imaginaire devenait réelle, la racine conjuguée deviendrait aussi réelle, et, au moment de la transition, les deux racines seraient égales ; on obtient ainsi, dans l'intervalle considéré, un certain nombre de branches réelles distinctes et n'ayant aucun point commun. Quand x passe par la valeur a, il peut arriver qu'une couple de racines, de réelles, deviennent imaginaires ou inversement ; au point qui correspond à la valeur a et à la racine double réelle, commencent ou finissent dans ce cas deux branches de courbes.

Parmi les valeurs réelles de y qui correspondent à une même valeur x_1 de x, considérons-en une y_1 qui soit racine simple ; si l'on fait varier x de x_1-h à x_1+h, h étant suffisamment petit, cette valeur de y restera réelle sans devenir égale à une autre et donnera naissance à une branche réelle. Ainsi, *lorsque pour une valeur* x_1 *attribuée à* x, *l'équation admet une racine simple* y_1 *par le point dont les coordonnées sont* x_1 *et* y_1 *passe une branche réelle, et une seule.*

Considérons maintenant une valeur $x=b$ à laquelle corresponde une valeur multiple y_1 d'ordre p ; marquons le point M dont les coordonnées sont $x=b$, $y=y_1$; parmi les p valeurs de y qui deviennent égales à y_1 pour $x=b$, il y en a un certain nombre qui restent réelles, quand x varie de a et b, et un certain nombre qui restent imaginaires; le nombre de ces dernières étant pair, le nombre des racines réelles est $p-2q$ (q pouvant être nul). De même, quand x varie de b à c, le nombre des valeurs réelles de y qui partent de la valeur y_1 pour $x=b$ est $p-2q'$; de sorte que le nombre total des branches de courbe qui partent du point M dans un sens ou dans l'autre est le nombre pair $2p-2q-2q'$.

353—Déterminons actuellement les tangentes au point M; transportons en ce point l'origine des coordonnées, et posons ensuite $y=tx$; nous aurons une équation $\varphi(x, t)=0$, qui donnera les coefficients angulaires des sécantes menées du point M aux points où la courbe est coupée par une parallèle à l'axe des y. Supposons que pour $x=0$ on ait une racine réelle $t=t_1$; cette racine déterminera une droite, et, en répétant les mêmes raisonnements que dans le paragraphe précédent, on reconnaît que le nombre total des branches réelles partant du point M et tangentes aux deux directions de la droite est pair.

Il résulte de ce qui précède qu'une courbe algébrique ne peut pas présenter de point d'arrêt (nº 349). Elle ne peut pas présenter non plus de point saillant ou anguleux ; on nomme point anguleux un point d'où partent deux branches tangentes à deux droites différentes.

354 — Lorsqu'on transporte l'origine des coordonnées en un point M d'une courbe algébrique, l'équation prend la forme

$$(1)\qquad (Ax+By)+(Cx^2+Dxy+Ey^2)+\ldots=0,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$(2)\quad (A\cos\omega+C\sin\omega)\rho+(C\cos^2\omega+D\sin\omega\cos\omega+E\sin^2\omega)\rho^2+\ldots=0.$$

Supposons d'abord que l'un au moins des deux coefficients A et B soit différent de zéro ; si par le point M on mène une sécante quelconque, l'équation (2) donnera les points où cette sécante rencontre la courbe ; une seule valeur de ρ étant nulle, quelle que soit ω, on dit que le point M est un *point simple*. Pour la valeur de ω donnée par l'équation $A\cos\omega + B\sin\omega = 0$, une seconde racine est nulle, et la sécante devient tangente.

Lorsque les deux coefficients A et B sont nuls, sans que les trois suivants le soient, deux valeurs de ρ sont nulles, et l'on dit que le point M est un *point double*. Il y a plusieurs sortes de points doubles : 1° Si les deux valeurs de $\tang\omega$ déduites de l'équation $C\cos^2\omega + D\sin\omega\cos\omega + E\sin^2\omega = 0$ sont réelles et inégales, on a deux branches qui se croisent au point double et qui sont tangentes à des droites différentes (fig. 211) ; 2° si cette équation a ses deux racines imaginaires, le point M est un point isolé (fig. 210).

Remarquons que l'on obtient l'équation qui définit les diverses tangentes au point multiple, en égalant à zéro le groupe des termes du degré le moins élevé dans l'équation (1).

CHAPITRE III

Asymptotes.

355— Lorsqu'une courbe a une branche infinie MN (fig. 227), il peut arriver que la distance MH d'un point M de cette courbe à une droite CD tende vers zéro, lorsque le point M s'éloigne indéfiniment ; dans ce cas, la droite CD est dite *asymptote* de la branche de courbe.

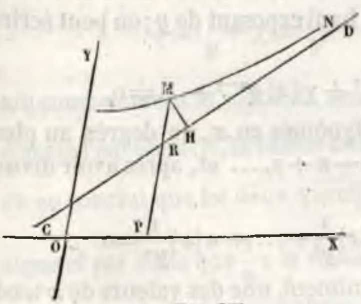


Fig. 227.

Considérons la différence MR entre les ordonnées de la courbe et de la droite, qui correspondent à une même abscisse, et désignons par β l'angle de la droite CD avec l'axe des y, on a $MR = \frac{MH}{\sin\beta}$; on voit que, si l'une des quantités MH et MR tend vers zéro, il en est de même de la seconde. On peut donc définir l'asymptote *une droite telle que la différence des ordonnées de la courbe et de la droite ait pour limite zéro quand* x *augmente indéfiniment.*

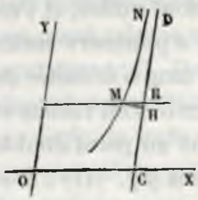


Fig. 228.

On ne peut pas transformer ainsi la définition lorsque l'angle β est nul, c'est-à-dire quand l'asymptote est parallèle à l'axe des y. Dans ce cas, si l'on mène la droite MR (fig. 228) parallèle à l'axe OX, la droite MR tend vers zéro, quand l'ordonnée croît indéfiniment. Si l'on appelle a l'abscisse de la droite CD, l'abscisse d'un point M de la branche MN tend vers a quand y augmente indéfiniment, ou inversement y croît au-delà de toute limite, lorsque x tend vers a.

ASYMPTOTES PARALLÈLES A L'AXE DES y.

356 — D'après ce qui précède, on obtiendra les asymptotes de cette espèce en cherchant les valeurs finies de x qui rendent y infinie. Lorsque l'équation de la courbe est résolue par rapport à y, on aperçoit en général immédiatement ces valeurs à l'inspection de la valeur de y; nous pouvons citer comme exemples la cissoïde et la strophoïde, construites aux n^{os} 24 et 27. Quand l'équation de la courbe est algébrique, mais non résolue par rapport à y, on procède de la manière suivante. Soit m le degré de l'équation, n le plus haut exposant de y; on peut écrire l'équation sous la forme

$$\varphi(x)\,y^n + \psi(x)\,y^{n-1} + \chi(x)\,y^{n-2} + \ldots = 0,$$

$\varphi, \psi, \chi, \ldots$ désignant des polynômes en x, de degrés au plus égaux à $m-n$, $m-n+1$, $m-n+2, \ldots$ et, après avoir divisé par y^n,

$$(1) \qquad \varphi(x) + \psi(x)\frac{1}{y} + \chi(x)\frac{1}{y^2} + \ldots + \pi(x)\frac{1}{y^n} = 0.$$

Si, lorsque y augmente indéfiniment, une des valeurs de x tend vers une limite finie a, pour une couple de valeurs dans laquelle y est très-grand et x voisin de a, tous les termes, à partir du second, étant très-petits, on en conclut que l'abscisse a doit annuler le premier terme. Ainsi, *les asymptotes parallèles à l'axe des* y *sont données par les racines réelles de l'équation* $\varphi(x) = 0$.

357—Appelons a l'une de ces racines; pour $x=a$, l'une au moins des n valeurs de $\frac{1}{y}$ données par l'équation (1) est nulle; en vertu de la continuité, quand x tend vers a en croissant ou en décroissant, l'une au moins des n valeurs de $\frac{1}{y}$ tend vers o.

Si la quantité a n'annule pas $\psi(x)$, une seule des valeurs de $\frac{1}{y}$ tend vers zéro, et cette valeur est nécessairement réelle; car les racines imaginaires étant conjuguées deux à deux, quand l'une d'elles tend vers zéro, la racine conjuguée tend aussi vers zéro. On a ainsi deux branches infinies réelles, asymptotes à la même droite $x=a$, et données, l'une par les valeurs de x plus petites que a, l'autre par les valeurs plus grandes; ces deux branches sont donc situées de part et d'autre de l'asymptote. Pour achever de déterminer leur position, faisons varier x de $a-h$ à $a+h$, h étant assez petit pour que, dans cet intervalle, l'équation $\varphi(x)=0$ n'ait que la racine a et que le polynôme $\psi(x)$ ne s'annule pas; on peut supposer en outre h et par suite $\frac{1}{y}$ assez petits en valeur absolue, pour que, quand on attribue à x et à y les valeurs simultanées qui correspondent à un point de l'une des branches infinies, la valeur du polynôme

$$\psi(x)\frac{1}{y}+\chi(x)\frac{1}{y^2}+\ldots+\pi(x)\frac{1}{y^n}$$

ait constamment le signe de son premier terme $\psi(x)\frac{1}{y}$. Mais, d'après l'équation (1), la valeur de ce polynôme est égale à $-\varphi(x)$; on en conclut que les deux quantités $\psi(x)\frac{1}{y}$ et $-\varphi(x)$ ont le même signe et par suite que $\frac{1}{y}$ a le signe de $\frac{-\varphi(x)}{\psi(x)}$. Quand x varie de $a-h$ à $a+h$, le dénominateur $\psi(x)$ conserve le même signe; si a est racine simple, ou plus généralement racine d'ordre impair, de l'équation $\varphi(x)=0$, le numérateur $\varphi(x)$ change de signe pour $x=a$; la valeur de y change elle-même de signe et les deux branches sont dirigées, l'une vers une extrémité de l'asymptote, l'autre vers l'autre extrémité (fig. 229), comme cela a lieu dans l'hyperbole. Lorsque a est racine d'ordre pair, le nu-

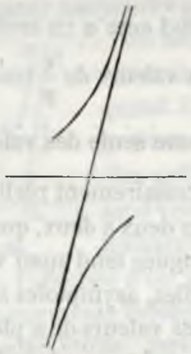


Fig. 229.

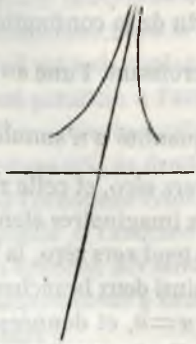


Fig. 230.

mérateur conserve le même signe ainsi que y ; les deux branches sont dirigées vers la même extrémité de l'asymptote (fig. 230).

Nous avons supposé jusqu'à présent que la quantité a n'annule pas $\psi(x)$. Quand on a $\psi(a)=0$, plusieurs valeurs de $\frac{1}{y}$ tendent vers zéro ; si leur nombre est pair, il peut arriver qu'elles soient toutes imaginaires, et alors aucune branche réelle n'est asymptote à la droite $x=a$. Mais, lorsque a est racine simple de l'équation $\varphi(x)=0$, il existe toujours deux branches réelles infinies, asymptotes à cette droite ; en effet, quand $\frac{1}{y}$ tend vers zéro par des valeurs positives ou des valeurs négatives, une seule des valeurs correspondantes de x, données par l'équation (1), tend vers a ; cette valeur est donc réelle, et l'on a deux branches infinies dirigées vers les deux extrémités de l'asymptote. Si la valeur de $x-a$ change de signe avec y, les deux branches sont situées de part et d'autre de l'asymptote, comme dans la figure 229 ; mais si la valeur de $x-a$ ne change pas de signe avec y, les deux branches sont placées d'un même côté de l'asymptote, comme cela a lieu dans la cissoïde (n° 24) et la strophoïde (n° 27).

358. — Exemple I. Soit la courbe définie par l'équation

$$x^4y^4+(x^2-4)(y-x)^4=0,$$

qui, ordonnée, s'écrit

$$(x^4+x^2-4)y^4-4x(x^2-4)y^3+6x^2(x^2-4)y^2-4x^3(x^2-4)y+x^4(x^2-4)=0,$$

L'équation bicarrée

$$\varphi(x)=x^4+x^2-4=0$$

a deux racines réelles simples et de signes contraires,

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}=\pm a.$$

Comme ces valeurs de x n'annulent pas $\psi(x)$, chacune des droites $x=\pm a$ est asymptote à deux branches réelles, situées de part et d'autre de la droite et dirigées vers les deux extrémités.

Exemple II. Soit la courbe $(x-1)^2y^2+4-x^2=0$. L'équation $\varphi(x)=0$ devient $(x-1)^2=0$. Cette équation admet la racine double $x=1$; or, quand x s'approche de l'unité, les deux valeurs de y sont imaginaires; la droite $x=1$ n'est donc asymptote à aucune branche réelle.

ASYMPTOTES NON PARALLÈLES A L'AXE DES y.

359—Considérons une branche de courbe infinie ayant une asymptote non parallèle à l'axe des y; une pareille asymptote a pour équation

$$y_1=cx+d,$$

c et d étant deux constantes inconnues qu'il s'agit de déterminer. Représentons par y et y_1 les ordonnées de la branche de courbe et de la droite qui correspondent à une même abscisse, par δ la différence $y-y_1$; d'après la définition, δ est une fonction de x qui a pour limite zéro quand x augmente indéfiniment. La branche de courbe infinie que nous considérons est donc représentée par l'équation

$$(2)\qquad x=y_1+\delta=cx+d+\delta.$$

Quelquefois on peut mettre facilement l'équation de la branche de courbe sous la forme précédente, et alors on a de suite l'asymptote. Soit, par exemple, l'équation $y=\frac{F(x)}{f(x)}$, dans laquelle $f(x)$ et $F(x)$ représentent deux polynômes entiers en x, le premier du degré m, le second au plus du degré $m+1$. A chaque racine de l'équation $f(x)=0$ correspondent deux branches réelles infinies, asymptotes à une même droite parallèle à l'axe des y, situées de part et d'autre de la droite, et dirigées vers les deux extrémités opposées ou vers la même extrémité, suivant que la racine a est d'ordre impair ou pair. Il y a, en outre, deux autres branches infinies que l'on obtient en donnant à x des valeurs très-grandes, positives ou négatives. Si l'on effectue la division en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, on obtient un quotient entier $cx+d$, qui est au plus du premier degré, et l'on a

$$y = cx + d + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier d'un degré inférieur à m; cette dernière fraction tendant vers zéro, quand x augmente indéfiniment, on voit que la droite $y_1 = cx + d$ est asymptote aux deux branches que nous considérons.

Nous citerons encore, comme exemple, la courbe transcendante

$$y = x + \frac{1}{e^x},$$

qui a une branche infinie dans l'angle YOX asymptote à la droite $y = x$.

360— En général, on n'obtient pas aussi facilement les asymptotes. Revenons à l'équation (2). On en déduit

$$c = \frac{y}{x} - \frac{d+\delta}{x}.$$

Puisque d a une valeur finie et que δ tend vers zéro quand x augmente indéfiniment, on a

$$c = \text{limite de } \frac{y}{x}. \tag{3}$$

Le coefficient angulaire de l'asymptote est égal à la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{y}{x}$, *quand* x *augmente indéfiniment.*

La même équation (2) donne $d = y - cx - \delta$, d'où

$$d = \text{lim de } (y - cx). \tag{4}$$

L'ordonnée à l'origine de l'asymptote est égale à la limite de la différence y—cx, *quand* x *augmente indéfiniment.*

Ces deux propriétés servent à déterminer les asymptotes non parallèles à l'axe des y.

Supposons d'abord l'équation résolue par rapport à y, et considérons une détermination de y qui donne une branche réelle infinie. Quand x augmente indéfiniment, on prend, pour cette branche, le rapport $\frac{y}{x}$. Si ce rapport ne tend pas vers une limite finie, la branche n'a pas d'asymptote. Si le rapport tend vers une limite finie c, on considère la différence $y-cx$; lorsque cette différence ne tend pas vers une limite finie, la branche n'a pas d'asymptote; si, au contraire, elle tend vers une limite d, on aura $y-cx=d+\delta$, δ tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment; donc la droite $y_1=cx+d$ sera asymptote de la branche que l'on étudie.

361 — Exemple I. *Construire la courbe*

$$y=\pm x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}},$$

rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires. L'axe OX est axe de la courbe. Lorsque x varie de o à l'unité, y reste finie; elle est d'abord nulle et redevient égale à zéro; on a ainsi la boucle OAO (fig. 231). Pour les valeurs de x comprises entre 1 et 2, y est imaginaire. Quand x dépasse 2 d'une petite quantité, y est réelle et très-grande; si donc on prend OB égale à 2 et que l'on mène G'G parallèle à OY, cette droite sera asymptote de deux branches de la courbe.

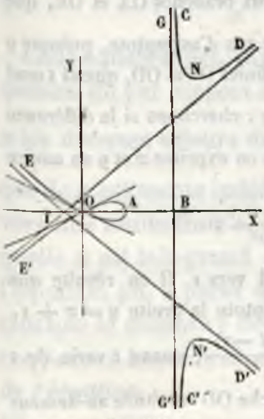


Fig. 231.

Si l'on fait croître x à partir de 2, y commence par diminuer et redevient très-grande quand x est grande; on obtient ainsi les deux branches CND, C'N'D'. Lorsque x est négative, y est toujours réelle; x variant de o à $-\infty$, la valeur numérique de y varie également de o à ∞, et l'on a les deux branches OE, OE'.

Considérons l'une des branches infinies, ND par exemple; on l'obtient en prenant le signe + dans l'équation et en supposant x positive et très-grande. On a

$$\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}};$$

la limite de $\frac{y}{x}$ est l'unité. On a ensuite

$$y-x=x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}-1\right)=x\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}},$$

et, en multipliant les deux termes par la somme des radicaux,

$$y-x=\frac{x}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right)}$$

la limite est $\frac{1}{2}$; donc la droite $y=x+\frac{1}{2}$ est asymptote de la branche considérée. En divisant par x les deux termes de la fraction, on voit que la différence $y-x$ est plus grande que $\frac{1}{2}$, et, par conséquent, que l'ordonnée de la courbe est plus grande que celle de l'asymptote; on en conclut que la branche ND est située au-dessus de l'asymptote. On verrait de même que la branche OE′ a pour asymptote la même droite et qu'elle est placée au dessous. Les deux branches N′D′ et OE admettent pour asymptote une droite symétrique de la précédente.

362 — Exemple. Considérons la courbe $y^4-y^3x+x^3-2x^2y=0$, construite au n° 342. Nous avons exprimé les deux coordonnées x et y à l'aide de la variable auxiliaire $t=\frac{y}{x}$. Les deux branches OA et OB, que l'on obtient en faisant tendre t vers zéro, n'ont pas d'asymptote, puisque y devient infinie. On obtient les deux branches infinies OC et OD, quand t tend vers l'unité. Pour ces branches, on a $\lim\frac{y}{x}=1$; cherchons si la différence $y-x$ a une limite. Les formules, par lesquelles on exprime x et y au moyen de t, donnent

$$y-x=(t-1)\,x=\frac{2t-1}{t^3};$$

cette différence tend vers l'unité, quand t tend vers 1. Il en résulte que les deux branches considérées ont pour asymptote la droite $y=x+1$. La différence δ a pour valeur $\delta=\frac{(1-t)(t^2+t-1)}{t^3}$; quand t varie de 1 à $+\infty$, la différence δ est négative et la branche OD est située au-dessous de l'asymptote. Le polynôme t^2+t-1 admet pour racines $t'=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $t''=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; quand t varie de $\frac{1}{2}$ à t', δ est négative et l'arc OE est au-dessous de l'asymptote; t variant de t' à 1, δ devient positive, et l'arc EC passe de l'autre côté de l'asymptote. L'autre racine t'' donne le point F où la branche OA coupe l'asymptote.

363 — Considérons maintenant le cas où l'équation, supposée algébrique et entière, n'est pas résolue par rapport à la variable y. Réunissons les termes du même degré ; représentons par $\varphi(x, y)$ l'ensemble des termes du degré le plus élevé m, par $\psi(x, y)$ l'ensemble des termes du degré $m-1$, par $\chi(x, y)$ les termes du degré $m-2$, ..., l'équation s'écrira

$$(5) \qquad f(x, y)=\varphi(x, y)+\psi(x, y)+\chi(x, y)+\ldots=0.$$

Désignons par u le rapport $\frac{y}{x}$, et dans l'équation (5) remplaçons y par ux; le polynôme $\varphi(x, y)$, homogène et du degré m en x et y, renfermera le facteur x^m commun à tous ses termes, et l'on aura $\varphi(x, y)=x^m\varphi(1, u)$, ou, pour abréger, $\varphi(x, y)=x^m\varphi(u)$. De même, les polynômes $\psi(x, y)$, $\chi(x, y)$, ... deviendront $x^{m-1}\psi(u)$, $x^{m-2}\chi(u)$,... L'équation entre x et u sera donc

$$x^m\varphi(u)+x^{m-1}\psi(u)+x^{m-2}\chi(u)+\ldots=0;$$

et, si l'on divise par x^m,

$$(6) \qquad \varphi(u)+\frac{1}{x}\psi(u)+\frac{1}{x^2}\chi(u)+\ldots=0.$$

Cette équation est, par rapport à u, du même degré que l'équation (5) par rapport à y; elle donne pour chaque valeur de x les diverses valeurs du rapport $\frac{y}{x}$. Quand la valeur numérique de x augmente indéfiniment, si l'une des valeurs de u tend vers une limite finie c, pour une couple de valeurs, dans laquelle x est très-grand et u voisin de c, tous les termes de l'équation (6), à partir du second, étant très-petits, on en conclut que le nombre c doit annuler le polynôme $\varphi(u)$. Ainsi *les coefficients angulaires des asymptotes sont les racines réelles de l'équation*

$$(7) \qquad \varphi(u)=0.$$

Soit c l'une des racines réelles de cette équation. Posons $y-cx=v$, d'où $u=\frac{y}{x}=c+\frac{v}{x}$. Si, dans l'équation (6), on remplace u par cette valeur, on obtient l'équation qui donne les valeurs de v pour chaque valeur de x. Après avoir fait la substitution, développons chaque terme, l'équation devient

$$(8)\qquad \left.\begin{aligned} &\varphi(c)+\varphi'(c)\frac{v}{x}+\frac{\varphi''(c)}{1.2}\frac{v^2}{x^2}+\ldots \\ &\quad +\psi(c)\frac{1}{x}+\psi'(c)\frac{v}{x^2}+\ldots \\ &\qquad +\chi(c)\frac{1}{x^2}+\ldots \end{aligned}\right\}=0.$$

Mais on a $\varphi(c)=0$; multiplions tous les termes par x, l'équation prendra la forme

$$(9)\qquad [v\varphi'(c)+\psi(c)]+A\frac{1}{x}+B\frac{1}{x^2}+\ldots=0.$$

Quand x augmente indéfiniment, si l'une des valeurs de v tend vers une limite finie d, comme une couple de valeurs dans laquelle x est très-grand et v voisin de d rend tous les termes à partir du second très-petits, on en conclut que le nombre d doit satisfaire à l'équation $d\varphi'(c)+\psi(c)=0$; si la quantité $\varphi'(c)$ est différente de zéro, on en déduit pour d la valeur

$$(10)\qquad d=-\frac{\psi(c)}{\varphi'(c)}.$$

Ainsi, dans ce cas, lorsque x augmente indéfiniment, une des valeurs de v et une seule tend une limite finie d; le raisonnement du nº 357 montre que cette valeur de v est réelle pour les valeurs de x très-grandes, positives ou négatives, et qu'elle donne naissance à deux branches de courbe asymptotes à la droite $y=cx+d$.

364—Lorsque la valeur de c annule $\varphi'(c)$ sans annuler $\psi(c)$, aucune des valeurs de v ne tend vers une limite finie, quand x augmente indéfiniment. Si une valeur de c annule en même temps $\varphi'(c)$ et $\psi(c)$, l'équation (9), multipliée par x, prend la forme

$$\frac{\varphi''(c)}{1.2}v^2+\psi'(c)v+\chi(c)+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\ldots=0.$$

Dans ce cas, en général, deux valeurs de v tendent vers des limites finies, lorsque x augmente indéfiniment et ces limites sont les racines de l'équation

$$(11)\qquad \frac{\varphi''(c)}{1.2}d^2+\psi'(c)d+\chi(c)=0.$$

Lorsque cette équation a deux racines d' et d'' réelles et différentes, une seule valeur de v tend vers d' quand x augmente indéfiniment, et donne naissance à deux branches réelles asymptotes à la droite $y=cx+d'$; deux autres branches réelles sont de même asymptotes à la droite parallèle $y=cx+d''$.

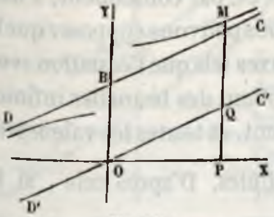


Fig. 232.

Si, par l'origine, on mène une droite OC' ayant pour coefficient angulaire c (fig. 232), la lettre v désigne la longueur MQ pour les diverses branches de la courbe.

Exemple. Soit la courbe $y^4 - y^3x + x^3 - 2x^2y = 0$, construite au nº 342. On a $\varphi(u) = u^4 - u^3 = u^3(u-1)$. L'équation $\varphi(u) = 0$ a une racine triple égale à zéro et une racine simple égale à 1. La racine simple, à laquelle correspond une valeur d égale à 1, donne une droite $y = x + 1$ asymptote à deux branches réelles. La racine triple ne pourrait donner que des asymptotes parallèles à OX; mais il est évident, d'après l'équation de la courbe, qu'aucune des valeurs de y ne tend vers une limite finie, quand x augmente indéfiniment.

365—Il est facile de ramener l'étude des branches infinies d'une courbe algébrique à celle des branches finies d'une courbe algébrique du même degré. Soient x et y les coordonnées d'un point quelconque M d'une première figure; à ce point M faisons correspondre le point M' dont les coordonnées x' et y' sont données par les relations

$$x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{y}{x},$$

desquelles on déduit inversement

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'}.$$

Si le point M décrit une droite $Ax + By + C = 0$, le point M' décrit une droite correspondante $Cx' + By' + A = 0$, le coefficient angulaire de l'une des droites étant égal à l'ordonnée à l'origine de l'autre. Plus généralement, si le point M décrit une courbe du degré m, le point M' décrit une courbe correspondante du même degré; à une sécante passant par deux points voisins de l'une des courbes correspond une sécante passant par deux points voisins de l'autre courbe, et, par conséquent, à une tangente correspond une tangente. Nous pouvons supposer que la première courbe est rapportée à des axes tels que l'équation renferme un terme en y^m; alors on n'obtient des branches infinies qu'en faisant augmenter x indéfiniment, et toutes les valeurs du rapport $\frac{y}{x}$ tendent vers des limites finies. D'après cela, si le point M décrit une branche infinie de la première courbe, comme x' tend vers zéro et y' vers une valeur finie c, le point M′ décrira une branche aboutissant sur l'axe des y à un point A′ dont l'ordonnée est c (fig. 233). On ramène de la sorte l'étude des branches infinies de la première courbe à celle des branches de la seconde courbe dans le voisinage des points situés sur l'axe des y.

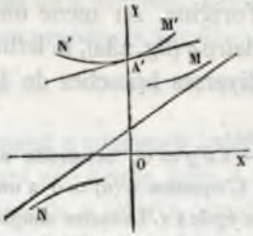


Fig. 233.

Soit A′ un point où la seconde courbe coupe l'axe des y; appelons d le coefficient angulaire de la tangente en ce point; pour un point M′ voisin de A′ on aura $\frac{y'-c}{x'}=d+\delta$, δ tendant vers zéro avec x'; la branche A′M′ de la seconde courbe est donc représentée par l'équation $y'=c+dx'+\delta x'$; à cette branche correspond une branche infinie de la première courbe ayant pour équation $y=cx+d+\delta$, δ tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment; à la tangente $y'=c+dx'$ à la seconde courbe correspond l'asymptote $y=cx+d$ à la première. On sait que du point A′ partent toujours un nombre pair de branches ayant la même tangente (n° 352); la première courbe admet donc un nombre pair de branches infinies ayant la même asymptote. La tangente en A′ étant la limite de la tangente en M′, il en résulte que l'asymptote est la limite de la tangente au point M, quand ce point s'éloigne à l'infini.

Supposons, par exemple, que le point A′ soit un point simple ordinaire, comme l'indique la fig. 233; on voit qu'à la branche A′M′ correspond une branche infinie M située au-dessus de l'asymptote vers la droite, et à la branche A′N′ une deuxième branche infinie N située au-dessous de l'asymptote vers la gauche. S'il y avait inflexion en A′ (fig. 234), les deux branches infinies seraient situées toutes deux d'un même côté de l'asymptote, l'une vers la droite, l'autre vers la gauche. Dans le second cas, on dit que la courbe a un point d'inflexion à l'infini.

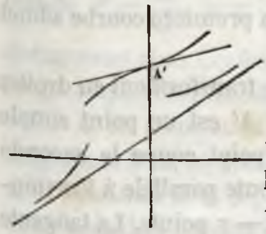


Fig. 234.

Si le point A′ est un point double avec deux tangentes différentes, on a deux asymptotes parallèles, à chacune desquelles correspondent deux branches infinies ayant l'une des dispositions précédentes. Lorsque le point double A′ est un point de rebroussement, on a deux branches asymptotes à la même droite, mais vers une même extrémité.

Nous avons supposé jusqu'à présent que la tangente en A′ ne coïncide pas avec l'axe des y ; lorsque cette circonstance se présente, aux branches qui partent du point A′ correspondent dans la première figure des branches infinies dépourvues d'asymptote. La direction de la tangente au point M tend vers la direction déterminée par le coefficient angulaire c ; mais elle s'éloigne à l'infini. On donne à ces branches infinies le nom de branches paraboliques. Si le point A′ est un point simple ordinaire, les deux branches infinies sont dirigées dans le même sens, comme cela a lieu dans la parabole ordinaire. S'il y a inflexion en A′, les deux branches sont dirigées dans des sens contraires.

La courbe représentée par l'équation $y^3 = x$ offre cette disposition ; elle se compose de deux branches infinies dépourvues d'asymptote et dirigées, l'une vers les x positifs, l'autre vers les x négatifs.

366 — Puisqu'à chaque valeur de x correspondent au plus m valeurs réelles de y, la première courbe admet au plus m branches infinies du côté des x positives et m branches infinies du côté des x négatives ; ceci résulte d'ailleurs de ce que la seconde courbe est coupée au plus en m points par l'axe des y.

Le nombre des tangentes à la seconde courbe en ces points d'intersection étant au plus égal à m, la première courbe admet au plus m asymptotes.

Les droites menées par le point A′ se transforment en droites parallèles à l'asymptote. Si le point A′ est un point simple (n° 354), une sécante menée par ce point coupe la seconde courbe en $m-1$ autres points; donc toute parallèle à l'asymptote coupe la première courbe en $m-1$ points. La tangente en A′ ne coupe la seconde courbe qu'en $m-2$ autres points, et, par conséquent, l'asymptote ne coupe la première courbe qu'en $m-2$ points; on dit que deux points d'intersection sont à l'infini. S'il y a inflexion en A′, comme la tangente coupe la seconde courbe en trois points qui se confondent en A′ (n° 345), l'asymptote aura trois points d'intersection à l'infini, et, par conséquent, ne rencontrera la première courbe qu'en $m-3$ points.

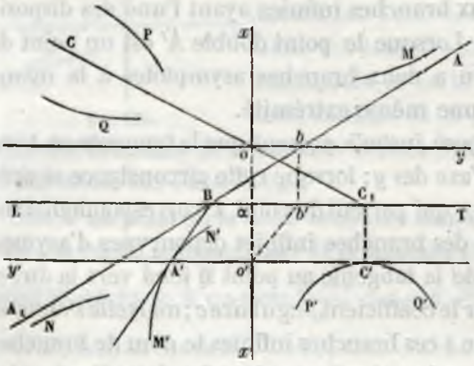


Fig. 235.

367 — La transformation que nous avons effectuée revient à prendre la perspective de la figure sur un plan. Considérons, en effet, deux figures placées, l'une dans un plan horizontal, l'autre dans un plan vertical coupant le plan horizontal suivant la ligne LT (fig. 235), et telles que l'une soit la perspective de l'autre, l'œil étant placé au point dont les projections sont o et o'. Il est visible que, lorsqu'un point M s'éloigne à l'infini dans le plan vertical, sa perspective M′ vient sur la droite $o'y'$ parallèle à la ligne de terre ; l'étude des branches infinies de la courbe située dans le plan vertical est ainsi ramenée à l'étude de l'autre courbe dans le voisinage des points situés sur la droite $o'y'$.

Si l'on rapporte l'une des courbes aux deux axes ox et oy, l'autre aux deux axes $o'x'$ et $o'y'$, on a les formules de transformation $x' = \frac{ab}{x}$, $y' = \frac{by}{x}$, dans lesquelles a et b désignent les distances $\alpha o'$ et αo. Ces formules sont précisément celles que nous avons employées précédemment, quand on fait $a = b = 1$.

Soit A′ un point où la seconde courbe coupe la droite $o'y'$; la tangente A′B en ce point a pour perspective la droite A_1A; aux deux branches M′ et N′, qui partent du point A′, correspondent deux branches infinies M et N asymptotes à la droite AA_1.

Lorsque la tangente en A′ coïncide avec la droite $o'y'$, comme cela a lieu au point C′, l'asymptote est rejetée à l'infini et les deux branches P′ et Q′ donnent naissance à deux branches paraboliques infinies P et Q; la droite menée du point o à un point de l'une des branches P et Q tend vers la direction limite oC_1.

368 — Les courbes transcendantes peuvent couper leurs asymptotes en une infinité de points.

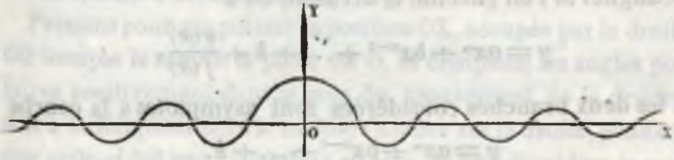


Fig. 236.

Par exemple, la courbe $y = \frac{3 \sin x}{x}$ oscille indéfiniment de part et d'autre de la droite OX à laquelle elle est asymptote, puisque la valeur de y a pour limite zéro (fig. 236). Les oscillations ont d'ailleurs une amplitude constante et égale à π.

La courbe $y = \frac{\sin x^2}{x}$ oscille indéfiniment de part et d'autre de son asymptote OX; mais ici l'amplitude des oscillations va en diminuant (fig. 237).

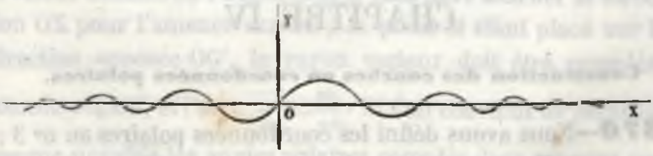


Fig. 237.

369 — Il arrive quelquefois que deux branches infinies n'ont pas d'asymptote rectiligne, et que cependant la différence de leurs ordonnées tend vers zéro ; dans ce cas, on dit que les deux courbes sont asymptotes l'une de l'autre ; si l'une d'elles est une courbe simple bien connue, on pourra s'en servir pour tracer l'autre. Reprenons l'équation $y=\frac{F(x)}{f(x)}$, et supposons que le degré du numérateur surpasse de plus d'une unité le degré du dénominateur ; le rapport $\frac{y}{x}$ croissant indéfiniment avec x, les branches qui correspondent aux valeurs très-grandes de x, positives ou négatives, n'ont par d'asymptote rectiligne. Si l'on effectue la division, on a

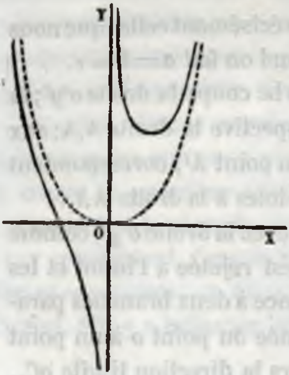


Fig. 238

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + k + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

et les deux branches considérées sont asymptotes à la courbe

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + k.$$

Quand $n = 2$, cette seconde courbe est une parabole. Par exemple, la courbe

$$y = \frac{x^3 + 1}{x} = x^2 + \frac{1}{x}$$

est asymptote à la parabole $y = x^2$ (fig. 238).

CHAPITRE IV

Construction des courbes en coordonnées polaires.

370—Nous avons défini les coordonnées polaires au n° 3 ; dans ce système un point quelconque, pris isolément dans le plan, peut être déterminé par une valeur de ω comprise entre o et 2π, et par une valeur positive de ρ ; cependant, on est conduit à faire varier chacune des coordonnées ω et ρ de $-\infty$ à $+\infty$.

Nous avons vu (n° 263) que, l'un des foyers de l'hyperbole étant pris pour pôle, les deux branches sont représentées par deux équations distinctes, quand on se borne aux rayons vecteurs positifs ; mais que l'une des équations suffit, si l'on admet les rayons vecteurs négatifs, en convenant de porter la valeur absolue de chacun d'eux dans la direction opposée à celle qu'indique la valeur de ω. Nous avons vu aussi que cette convention permet de représenter le limaçon de Pascal par une seule équation (n° 31).

371 — *Spirale d'Archimède.* Un point M se meut d'un mouvement uniforme et dans le sens G′G sur une droite indéfinie G′OG, qui tourne elle-même d'un mouvement uniforme autour de l'un de ses points O, la courbe décrite par le point M est la spirale d'Archimède (fig. 239).

Prenons pour axe polaire la position OX, occupée par la droite OG lorsque le mobile M passe en O, et comptons les angles polaires positivement dans le sens du mouvement de la droite ; soit a la longueur dont le mobile s'avance sur la droite, pendant que celle-ci fait une révolution entière. Si l'on considère le mobile dans l'une quelconque de ses positions après son passage en O, en appelant ω l'angle dont a tourné la direction OX pour venir sur OG, et ρ la distance du mobile au point O, on a, en posant $\frac{a}{2\pi}=b$,

$$(1)\qquad \frac{\rho}{a}=\frac{\omega}{2\pi},\quad \text{ou}\quad \rho=a\frac{\omega}{2\pi}=b\omega.$$

Considérons le mobile avant son passage en O ; appelons ω_1 la valeur absolue de l'angle dont il faut faire tourner la direction OX pour l'amener sur OG ; le point M étant placé sur la direction opposée OG′, le rayon vecteur doit être considéré comme négatif, et l'on a $\frac{-\rho}{a}=\frac{\omega_1}{2\pi}$. Si l'on convient de regarder comme négatifs les angles polaires comptés dans un sens opposé au premier, on aura $\omega=-\omega_1$, et la relation précédente coïncide avec l'équation (1) qui représente alors la courbe indéfinie. Les valeurs de ω comprises entre o et 2π, 2π et $4\pi, \ldots$, o et $-2\pi, \ldots$, donnent les spires successives. Si l'on se bornait aux valeurs positives de ρ et aux valeurs de ω comprises entre o et 2π, il faudrait une équation particulière pour représenter chacune des spires,

$$\rho = b\omega, \quad \rho = a + b\omega, \ldots, \quad \rho = a - b\omega, \quad \rho = 2a - b\omega, \ldots.$$

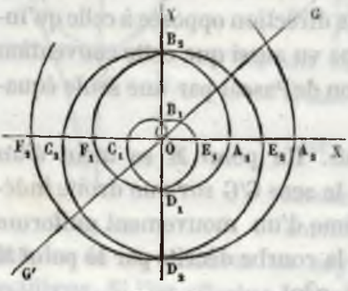


Fig. 239.

La spirale d'Archimède se compose de deux parties $OB_1C_1D_1A_1B_2\ldots$ et $OB_1E_1D_1F_1B_2\ldots$ symétriques l'une de l'autre par rapport à la perpendiculaire OY à l'axe polaire. Chaque partie comprend une infinité de spires, et les portions d'une droite quelconque menée par le pôle et comprise entre deux spires consécutives ont toutes pour longueur a.

372 — Remarque I. Un même point M du plan peut être défini par une infinité de couples de valeurs de ρ et de ω. Si l'on appelle α l'angle positif moindre que 2π que fait la direction OM avec l'axe OX et a la distance OM (fig. 240), on peut prendre pour coordonnées du point M les couples de valeurs

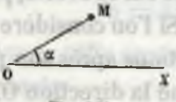


Fig. 240.

$$\ldots(-4\pi+\alpha, a), \ (-2\pi+\alpha, a), \ (\alpha, a), \ (2\pi+\alpha, a), \ (4\pi+\alpha, a), \ldots$$

dans lesquelles le rayon vecteur est positif, ou les couples

$$\ldots(-3\pi+\alpha, -a), \ (-\pi+\alpha, -a), \ (\pi+\alpha, -a),$$
$$(3\pi+\alpha, -a), \ (5\pi+\alpha, -a), \ldots$$

dans lesquelles le rayon vecteur est négatif. Lorsque le point M appartient à une courbe définie par une équation $f(\omega, \rho) = 0$, ses coordonnées ne peuvent être indiquées à la seule inspection du point ; il faut, pour les obtenir, suivre le tracé de la courbe.

373 — Remarque II. Dans les formules de transformation établies au livre I, chapitre IV, nous avons supposé le point M déterminé par un rayon vecteur positif et par un angle polaire compris entre o et 2π. Conservant d'abord le rayon vecteur positif, on peut prendre pour angle polaire l'un quelconque des angles que forme la direction OM avec l'axe OX (fig. 241), en convenant d'affecter l'angle du signe $+$ ou du signe $-$, suivant qu'une droite partant de la direction OX pour arriver à la direction OM tourne de OX vers OY, ou dans le sens opposé. Ceci revient à augmenter ou à diminuer l'angle désigné primitivement par ω, d'un multiple de 2π; le sinus et le cosinus ne changeant pas, les formules restent les mêmes. Supposons maintenant le point M défini par un rayon vecteur négatif; l'angle ω sera l'un des angles formés par la direction OM′ avec OX. La projection de OM sur OX est $(-\rho)\times\cos(\pi+\omega)$ ou $\rho\cos\omega$; ainsi on a encore $x=\rho\cos\omega$, et de même $y=\rho\sin\omega$. Donc les formules sont générales.

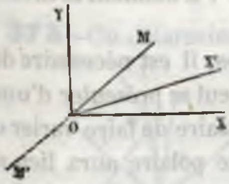


Fig. 241.

Lorsque l'axe polaire OX′ ne coïncide pas avec OX, on définit la position de cet axe par l'angle α qu'il fait avec OX. Si, dans les formules $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$, qui se rapportent à l'axe polaire OX, on remplace ω par $\omega'+\alpha$, il vient $x=\rho\cos(\omega'+\alpha)$, $y=\rho\sin(\omega'+\alpha)$. Supposons les axes des coordonnées obliques, et prenons OX pour axe polaire (fig. 242), on obtient les formules de transformation en projetant les deux chemins OM et OPM successivement sur une perpendiculaire à OX et sur une perpendiculaire à OY, ce qui donne

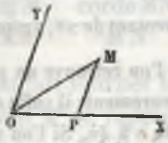


Fig. 242.

$$x=\frac{\rho\sin(\theta-\omega)}{\sin\theta},\quad y=\frac{\rho\sin\omega}{\sin\theta}.$$

374 — REMARQUE III. Dans le cas où l'on obtient toute la courbe en faisant varier ω de o à 2π, on reconnaît la symétrie par rapport à l'axe polaire OX, quand les valeurs α et $2\pi-\alpha$ attribuées à ω reproduisent la même valeur de ρ, ou quand les valeurs α et $\pi-\alpha$ donnent des valeurs de ρ égales et de signes contraires. On reconnaît de même la symétrie par rapport à la perpendiculaire OY, quand les angles α et $\pi-\alpha$ donnent la même valeur de ρ, ou les angles α et $2\pi-\alpha$ des valeurs égales et de signes contraires. Enfin, on reconnaît la symétrie par rapport au pôle, quand les angles α et $\pi+\alpha$ donnent la même valeur de ρ.

Mais lorsque, pour avoir toute la courbe, il est nécessaire de faire varier ω au-delà de 2π, la symétrie peut se présenter d'une autre manière. Par exemple, s'il est nécessaire de faire varier ω de o à 4π, la symétrie par rapport à l'axe polaire aura lieu si les angles α et $2\pi-\alpha$, ou α et $4\pi-\alpha$, donnent des valeurs égales pour ρ, ou si les angles α et $\pi-\alpha$, ou α et $3\pi-\alpha$, donnent des valeurs de ρ égales et de signes contraires. Si les limites de ω sont plus étendues, le nombre des comparaisons à faire augmente.

Considérons, par exemple, la courbe définie par l'équation $\rho=\cos\frac{\omega}{2}$. Quand ω augmente de deux fois 2π, la direction du rayon redevient la même; d'ailleurs, $\frac{\omega}{2}$ augmentant de 2π, ρ reprend la même valeur et l'on retrouve un point déjà obtenu antérieurement; il suffit donc de faire varier ω de o à 4π. Si l'on augmente ω de 2π, le rayon revient à la même direction; mais $\frac{\omega}{2}$ augmentant seulement de π, ρ conserve la même valeur numérique en changeant de signe; on en conclut que la portion du lieu donnée par les valeurs de ω comprises entre 2π et 4π est symétrique par rapport au pôle de la partie donnée par les valeurs de ω comprises entre o et 2π; en d'autres termes, le pôle est centre de la courbe. Pour $\omega=\alpha$ et $\omega=2\pi-\alpha$, les valeurs de ρ sont égales et de signes contraires; on a, de la sorte, deux points placés symétriquement par rapport à la perpendiculaire OY à l'axe polaire (fig. 243); cette droite OY est un axe de la courbe. La variable ω allant de o à π, ρ diminue de 1 à o, et l'on a l'arc ABO tangent au point O à la droite OX'. Les valeurs de ω comprises entre π et 2π donnent l'arc OBA' symétrique du premier par rapport à OY, et les valeurs de ω com-

Fig. 243.

prises entre 2π, et 4π la courbe A′B′OB′A symétrique de ABOBA′ par rapport au pôle. La courbe est formée de quatre arcs égaux. L'axe polaire est aussi un axe de la courbe, ce qu'on voit directement en remarquant que l'on a des valeurs égales de ρ pour les valeurs α et $4\pi - \alpha$ attribuées à ω.

TANGENTE.

375—On détermine la direction MT de la tangente au point M par l'angle V qu'elle fait avec le prolongement MA du rayon vecteur.

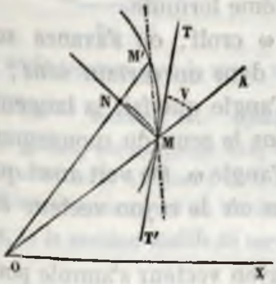


Fig. 244.

Soient ρ et ω les coordonnées du point M, $\rho+\Delta\rho$ et $\omega+\Delta\omega$ celles d'un point voisin M′ (fig. 244); menons la sécante MM′, et du pôle comme centre, avec OM pour rayon, décrivons l'arc de cercle MN; l'angle MOM′ est l'accroissement $\Delta\omega$ de l'angle polaire, NM′ est l'accroissement $\Delta\rho$ du rayon vecteur. Le triangle NMM′ donne

$$\frac{\sin \mathrm{OM'M}}{\sin \mathrm{NMM'}} = \frac{\text{corde MN}}{\mathrm{M'N}} = \frac{\text{corde MN}}{\text{arc MN}} \times \frac{\text{arc MN}}{\mathrm{M'N}} = \frac{\text{corde MN}}{\text{arc MN}} \times \frac{\rho\Delta\omega}{\Delta\rho}.$$

Si l'on fait tourner la sécante autour du point M, de manière que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, la sécante MM′ a pour limite la tangente MT, la corde MN a pour limite la tangente à l'arc de cercle, et, par suite, la perpendiculaire au rayon OA; on a donc

$$\lim \mathrm{OM'M} = \mathrm{OMT'} = \mathrm{V},$$

$$\lim \mathrm{NMM'} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{V};$$

on sait, d'ailleurs, que la limite du rapport d'un arc de cercle à sa corde est l'unité; l'équation précédente devient ainsi

$$\frac{\sin \mathrm{V}}{\cos \mathrm{V}} = \rho \lim \frac{\Delta\omega}{\Delta\rho}, \quad \text{ou} \quad \tang \mathrm{V} = \frac{\rho}{\lim \frac{\Delta\rho}{\Delta\omega}} = \frac{\rho}{\rho'},$$

ρ' désignant la dérivée de ρ considéré comme fonction de ω.

On a supposé dans la figure précédente que le rayon vecteur croît avec l'angle ω ; s'il décroît, le triangle NMM′ (fig. 245) donne

$$\frac{\sin \mathrm{OM'M}}{-\sin \mathrm{NMM'}} = \frac{\text{corde MN}}{\text{arc MN}} \times \frac{\text{arc MN}}{-\mathrm{M'N}} = \frac{\text{corde MN}}{\text{arc MN}} \times \frac{\rho\Delta\omega}{\Delta\rho},$$

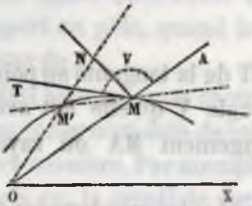


Fig. 245.

les angles OM′M, NMM′ ayant pour limites V et $V - \frac{\pi}{2}$, on retrouve encore la même formule.

Quand ω croît, on s'avance sur la courbe dans un certain sens ; V désigne l'angle que fait la tangente menée dans le sens du mouvement avec la direction déterminée par l'angle ω. On voit aussi que la même formule convient au cas où le rayon vecteur est négatif.

376 — Remarque. Lorsque le rayon vecteur s'annule pour une valeur particulière ω_0 de ω, on a une branche de courbe OC passant au pôle, et la tangente à cette branche au pôle est précisément la droite OA donnée par l'angle ω_0. En effet, si l'on prend un point voisin M, et si l'on fait tourner la sécante OM de manière que le point M se rapproche du point O, ρ s'annule et la sécante tend vers la direction OA.

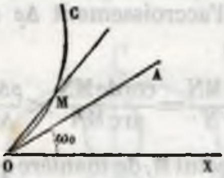


Fig. 246.

377 — Exemple I. *Spirale d'Archimède.* L'équation de cette courbe étant $\rho = b\,\omega$ (n° 371), on en déduit $\rho' = b$, d'où

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{b\omega}{b} = \omega.$$

Si le point M part du pôle et s'avance sur la courbe, l'angle V, d'abord nul, augmente constamment et tend vers un angle droit.

Exemple II. *Spirale logarithmique.* — On appelle spirale logarithmique la courbe dont l'équation polaire est $\rho = ae^{m\omega}$, a désignant une ligne donnée et m un nombre. Supposons la constante m positive ; si l'on fait croître ω de o à l'infini, ρ va constamment en croissant de a à l'infini, ce qui donne une branche indéfinie ABC..., faisant une infinité de circonvolutions autour du pôle. Si l'on fait ensuite varier ω de o à $-\infty$, ρ diminue constamment et tend vers zéro, on obtient une seconde branche indéfinie AB'C'... qui fait une infinité de circonvolutions autour du pôle, en se rapprochant constamment de ce point. Si la constante m était négative, les valeurs positives de ω donneraient la branche qui se rapproche du pôle, et les valeurs négatives celle qui s'en éloigne. On a ici $\rho' = mae^{m\omega} = m\rho$, d'où $\tang V = \frac{1}{m}$. On en conclut que la tangente à la courbe fait un angle constant avec le rayon vecteur.

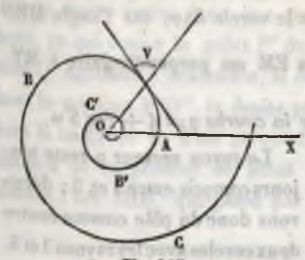


Fig. 247.

378 — Exemple III. *Épicycloïde.* Lorsqu'un cercle mobile roule, sans glisser, sur un cercle fixe, un point du cercle mobile décrit dans le plan une courbe à laquelle on a donné le nom d'*épicycloïde*.

Bornons-nous au cas où les deux cercles sont égaux. Soit C le cercle fixe, C' la position initiale du cercle mobile, a le rayon; supposons que ce soit le point de contact A qui, dans le mouvement du cercle C', engendre l'épicycloïde (fig. 248). Lorsque le cercle mobile est venu dans la position C'', le point A est en M, les deux arcs EA, EM étant égaux. Prenons le point A pour pôle, le prolongement de CA pour axe polaire; la droite AM, perpendiculaire à la tangente commune AN aux deux cercles, est parallèle à CE; l'angle AEN est la moitié de ACE, et, par conséquent, la moitié de ω; le triangle rectangle ANE donne $AN = AE \sin\frac{\omega}{2}$; mais $AE = 2a \sin\frac{\omega}{2}$; on a donc

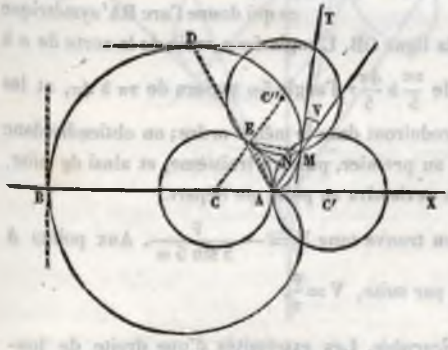


Fig. 248.

$$\rho = 4a \sin^2\frac{\omega}{2} = 2a(1 - \cos\omega).$$

Cette courbe est un cas particulier du limaçon de Pascal (nº 30). On a ici $\rho' = 2a \sin\omega$, d'où $\tang V = \tang\frac{\omega}{2}$, et, par suite, $V = \frac{\omega}{2}$. Il est aisé de voir que la normale à l'épicycloïde en un point quelconque M passe au point de contact E du cercle mobile avec le cercle fixe ; car l'angle MEN étant égal à $\frac{\omega}{2}$, et par suite à V, la droite EM est perpendiculaire à MT.

379 — Exemple IV. *Construction de la courbe* $\rho = 4 + \cos 5\omega$.

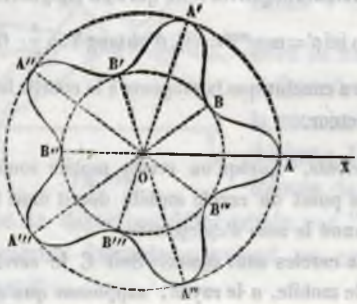


Fig. 249.

Le rayon vecteur ρ reste toujours compris entre 3 et 5 ; décrivons donc du pôle comme centre deux cercles avec les rayons 3 et 5, la courbe sera tout entière située entre les deux circonférences (fig. 249). Quand ω varie de o à $\frac{\pi}{5}$, ρ diminue de 5 à 3, ce qui donne l'arc AB. Quand ω varie de $\frac{\pi}{5}$ à $\frac{2\pi}{5}$, ρ augmente de 3 à 5, ce qui donne l'arc BA' symétrique du premier par rapport à la ligne OB. L'angle 5ω a varié de la sorte de o à 2π. Si l'on fait varier ω de $\frac{2\pi}{5}$ à $\frac{4\pi}{5}$, l'angle 5ω variera de 2π à 4π, et les mêmes valeurs de ρ se reproduiront dans le même ordre ; on obtiendra donc un second arc A'B'A'' égal au premier, puis un troisième, et ainsi de suite. Après le cinquième arc, on reviendra au point de départ.

En prenant la dérivée, on trouve tang $V = -\frac{\rho}{5 \sin 5\omega}$. Aux points A et B on a $\sin 5\omega = 0$, et, par suite, $V = \frac{\pi}{2}$.

380 — Exemple V. *Scarabée.* Les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites rectangulaires OX, OY ; d'un point fixe I, situé sur la bissectrice, on abaisse une perpendiculaire sur la droite mobile ; trouver le lieu du pied de cette perpendiculaire (fig. 250).

Il est évident que le lieu sera symétrique par rapport à la bissectrice OI. Plaçons d'abord la droite mobile dans la position PQ perpendiculaire à la bissectrice, on a le point A du lieu. Faisons glisser la droite de manière que l'extrémité Q descende sur l'axe des y ; dans une certaine position P'Q', la droite passera par le point I, qui appartient au lieu ; on a ainsi l'arc AEI, dont la tangente en I est perpendiculaire à P'Q'. L'extrémité Q' continuant à descendre, la droite vient s'appliquer sur OX, et l'on a l'arc IFC qui passe au point C, pied de la perpendiculaire abaissée du point I sur

OX. L'extrémité Q glisse ensuite sur OY′, et la courbe passe au-dessous de OX; la droite arrive dans une position P″Q″ telle que l'angle IP″Q″ est droit, ce qui donne le point P″ du lieu; on a ainsi l'arc CGP″. Si l'extrémité Q″ continue à descendre, la courbe revient au-dessus de OX; bientôt, dans la position P‴Q‴, la droite prolongée passe en I, on a ainsi l'arc P″I dont la tangente en I est perpendiculaire à P″Q‴. L'extrémité P‴ continuant à se rapprocher du point O, la droite s'applique sur OY′ et l'on obtient l'arc IHD, qui passe par le point D, pied de la perpendiculaire

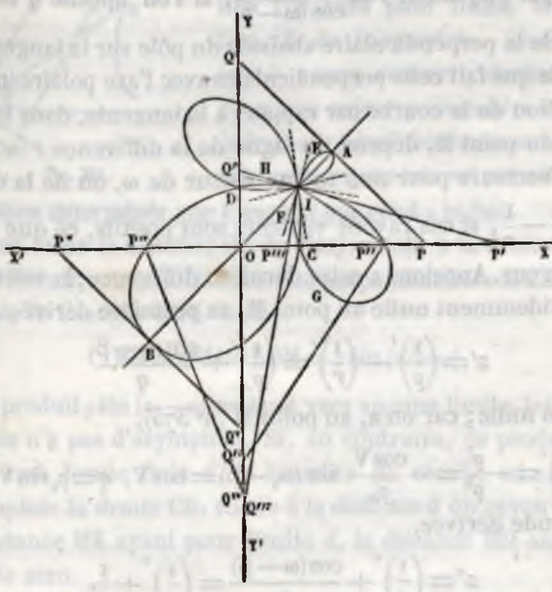


Fig. 250.

abaissée du point I sur OY. L'extrémité P‴ glisse ensuite sur OX′, et la droite arrive dans une position $P^{iv}Q^{iv}$, telle que l'angle $IP^{iv}Q^{iv}$ est droit; le point P^{iv} appartient au lieu, et l'on a l'arc DP^{iv}. Enfin la droite, dans la position Q^vP^v, devient perpendiculaire à la bissectrice OB, ce qui donne l'arc $P^{iv}B$. Si, revenant à la position primitive PQ, on fait mouvoir la droite en sens inverse jusqu'à la position finale P^vQ^v, il est clair qu'on obtiendra une courbe symétrique de la précédente par rapport à la droite AB.

Prenons pour pôle le point I et pour axe polaire la bissectrice BA; appelons c la distance OI et $2a$ la longueur de la droite mobile PQ; la droite qui joint le point O au milieu de l'hypoténuse PQ du triangle rectangle

POQ est égale à a; l'angle que cette droite fait avec la perpendiculaire h abaissée du point O sur l'hypoténuse est égal à 2ω; on a, d'ailleurs, $h=c\cos\omega+\rho$, on en déduit l'équation de la courbe $\rho=a\cos 2\omega-c\cos\omega$.

CONCAVITÉ ET CONVEXITÉ.

381 — Considérons sur un arc de courbe un point M, ayant pour coordonnées ω_0 et ρ_0; la tangente en ce point sera représentée par l'équation $r=\frac{q}{\cos(\omega-\beta)}$, si l'on appelle q la longueur de la perpendiculaire abaissée du pôle sur la tangente et β l'angle que fait cette perpendiculaire avec l'axe polaire (n° 82). La position de la courbe par rapport à la tangente, dans le voisinage du point M, dépend du signe de la différence $r-\rho$ des rayons vecteurs pour une même valeur de ω, ou de la différence $\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}$, si ces rayons vecteurs sont positifs, ce que nous supposerons. Appelons z cette dernière différence; la valeur de z est évidemment nulle au point M, sa première dérivée

$$z'=\left(\frac{1}{\rho}\right)'-\left(\frac{1}{r}\right)'=\left(\frac{1}{\rho}\right)'+\frac{\sin(\omega-\beta)}{q}$$

est aussi nulle; car on a, au point M (n° 375),

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'=-\frac{\rho'}{\rho^2}=-\frac{\cos V}{\rho_0},\ \sin(\omega_0-\beta)=\cos V,\ \ q=\rho_0\sin V.$$

La seconde dérivée,

$$z''=\left(\frac{1}{\rho}\right)''+\frac{\cos(\omega-\beta)}{q}=\left(\frac{1}{\rho}\right)''+\frac{1}{r},$$

acquiert au point M une valeur égale à celle de l'expression $\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''$. En répétant ici le raisonnement du n° 344, on verra que, si cette quantité est positive, la différence z est elle-même positive dans le voisinage du point M, et par conséquent la courbe est placée du côté de la tangente où est le pôle, et que, si au contraire cette quantité est négative, la différence z est négative, et la courbe placée de l'autre côté de la tangente.

Il y aura inflexion quand la quantité $\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''$ changera de signe.

ASYMPTOTES.

382 — Considérons une branche infinie, asymptote à la droite CD (fig. 251); si l'on joint le pôle à un point M de la courbe, et si l'on suppose que le point M s'éloigne indéfiniment sur la courbe, la direction OM aura pour limite la direction OL de l'asymptote. Ainsi, *lorsque le rayon vecteur ρ devient infini pour une valeur particulière α de ω, si la branche ainsi obtenue a une asymptote, cette asymptote est parallèle à la direction déterminée par l'angle α qui rend ρ infini.*

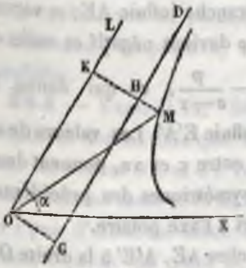


Fig. 251.

Pour avoir la distance OC de l'asymptote à la droite OL, du point M de la courbe abaissons une perpendiculaire MK sur cette droite; le triangle MOK donne

$$MK = OM \sin KOM = \rho \sin(\alpha - \omega).$$

Si le produit $\rho \sin(\alpha - \omega)$ ne tend vers aucune limite, la branche infinie n'a pas d'asymptote. Si, au contraire, ce produit tend vers une limite finie d, la branche de courbe admet pour asymptote la droite CD, située à la distance d du rayon OL; car la distance MK ayant pour limite d, la distance MH aura pour limite zéro.

Lorsqu'on obtient la branche infinie en faisant croître ω vers α, il est évident que, si cette branche a une asymptote, l'asymptote sera placée par rapport à OL, comme l'indique la figure. Si l'on obtenait la branche infinie en faisant diminuer ω vers α, l'asymptote serait placée de l'autre côté de OL, et sa distance à OL serait la limite du produit $\rho \sin(\omega - \alpha)$.

Nous avons supposé la branche de courbe donnée par un rayon vecteur positif; si elle était donnée par un rayon vecteur négatif, on aurait, dans le premier cas, $MK = -\rho \sin(\alpha - \omega)$, dans le second cas, $MK = -\rho \sin(\omega - \alpha)$.

383 — Exemple V. *Hyperbole.* L'équation polaire de cette courbe est (nº 263) $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega}$, dans laquelle e est plus grand que 1. Soit α l'angle dont le cosinus est $-\frac{1}{e}$; quand ω croît de 0 à α, ρ croît de $\frac{p}{1+e}$ à ∞, et l'on a la branche infinie AE; ω variant de α à π, ρ devient négatif et varie de $-\infty$ à $-\frac{p}{e-1}$, ce qui donne la branche infinie E'A'. Les valeurs de ω, comprises entre π et 2π, donnent deux branches symétriques des précédentes par rapport à l'axe polaire.

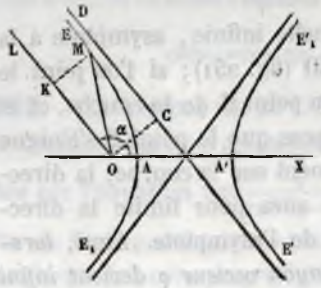


Fig. 252.

La distance MK d'un point de l'une des branches AE, A'E' à la droite OL est

$$MK = \frac{p\sin(\alpha-\omega)}{1+e\cos\omega} = \frac{p\sin(\alpha-\omega)}{e\left(\frac{1}{e}+\cos\omega\right)} = \frac{p\sin(\alpha-\omega)}{e(\cos\omega - \cos\alpha)};$$

transformant en un produit la différence $\cos\omega - \cos\alpha$, remplaçant $\sin(\alpha-\omega)$ par $2\sin\frac{\alpha-\omega}{2}\cos\frac{\alpha-\omega}{2}$, et supprimant le facteur commun $\sin\frac{\alpha-\omega}{2}$, on a

$$MK = \frac{p\cos\frac{\alpha-\omega}{2}}{e\sin\frac{\alpha+\omega}{2}}.$$

Cette distance a pour limite $OC = \frac{p}{e\sin\alpha}$, et l'on obtient ainsi l'asymptote CD. L'asymptote des deux autres branches est placée symétriquement par rapport à l'axe polaire.

L'excès de la distance MK sur sa limite a pour expression

$$\delta = \frac{p}{e}\left(\frac{\cos\frac{\alpha-\omega}{2}}{\sin\frac{\alpha+\omega}{2}} - \frac{1}{\sin\alpha}\right) = \frac{p}{e}\times\frac{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha-\omega}{2} - 2\sin\frac{\alpha+\omega}{2}}{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\omega}{2}};$$

si l'on remplace le produit $2\sin\alpha\cos\frac{\alpha-\omega}{2}$ par la somme

$$\sin\frac{3\alpha-\omega}{2} + \sin\frac{\alpha+\omega}{2},$$

il vient

$$\delta = \frac{p}{e}\times\frac{\sin\frac{3\alpha-\omega}{2} - \sin\frac{\alpha+\omega}{2}}{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\omega}{2}};$$

si l'on transforme ensuite le numérateur en un produit, on a finalement

$$\delta = \frac{p \sin \frac{\alpha - \omega}{2} \cos \alpha}{e \sin \alpha \sin \frac{\alpha + \omega}{2}} = \frac{p \sin \frac{\omega - \alpha}{2}}{e^2 \sin \alpha \sin \frac{\omega + \alpha}{2}}.$$

Quand ω varie de o à α, la différence δ est négative; ainsi la branche AE est comprise entre les parallèles OL et CD. Mais, quand ω varie de α à π, la différence δ est positive, et la branche E'A' est située en dehors des parallèles.

384 — Exemple VI. *Strophoïde oblique.* Dans la construction de la strophoïde droite, telle que nous l'avons donnée au nº 27, nous supposions les droites OX et OY rectangulaires; supposons maintenant que ces droites fassent entre elles un angle θ (fig. 253); par le point fixe A placé sur l'une d'elles, on mène une sécante quelconque AD, sur laquelle on prend, à partir du point D, des longueurs DM et DN égales à DO, et on cherche le lieu des points M et N.

Quand la sécante tourne dans l'angle obtus XOY jusqu'à devenir parallèle à OY, le point M décrit l'arc OMB, terminé au point B sur la perpendiculaire OB à OY; le point N décrit la branche infinie ON. Si l'on prend une distance OG égale à OA, et que par le point G on mène une parallèle H'H à OY, on a l'asymptote de la branche ON; car l'oblique NF égale à AM ayant pour limite AB, la distance du point N à la droite a pour limite zéro.

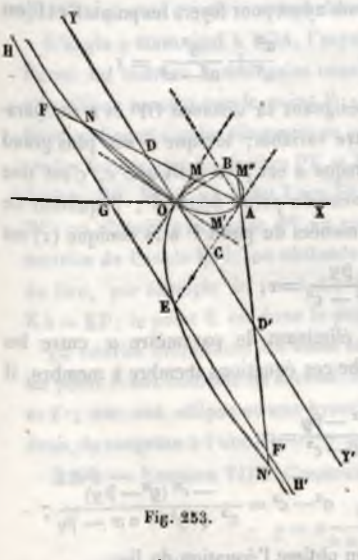


Fig. 253.

Faisons maintenant tourner la sécante dans l'angle aigu XOY'; la perpendiculaire élevée sur le milieu de OA coupe OY' en un point C, tel que l'on a CA = CO; quand la sécante occupe la position AC, l'un des points vient en A et l'autre en E; ainsi, la sécante tournant de la position AO à la position AC, on a l'arc OM'A tangent en A à la droite AC, et l'arc OE. La sécante continuant son mouvement, la droite OD' devient plus grande que AD' ou que D'F', et le point N' est situé au-delà de l'asymptote; on obtient la branche infinie EN' et l'arc AM''B qui se raccorde en B avec l'arc OMB. Il est aisé de voir que les tangentes au point O sont les bissectrices des angles formés par les droites OX et OY.

Si l'on prend le point O pour pôle, la droite OX pour axe polaire, que l'on appelle a la distance OA et θ l'angle YOX, les angles DOM et DMO étant égaux à $\theta-\omega$, et l'angle OAD à $\theta-2\omega$, le triangle OMA donne la relation

$$(1)\qquad \rho=\frac{a\sin(\theta-2\omega)}{\sin(\theta-\omega)}.$$

On retrouve facilement, à l'aide de l'équation, les propriétés que nous avons déduites de la définition géométrique de la courbe.

Quand on prend la droite OY pour axe polaire, l'équation de la courbe devient

$$(2)\qquad \rho=\frac{a\sin(2\omega+\theta)}{\sin\omega}.$$

385 — Exemple VII. *Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné P aux diverses courbes du second degré ayant pour foyers deux points donnés F et F'.*

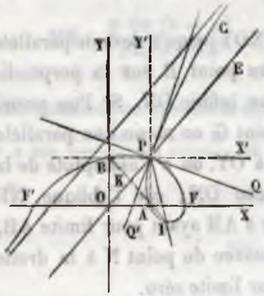


Fig. 254.

Prenons pour axe la droite F'F (fig. 254), et la perpendiculaire élevée à cette droite en son milieu; l'équation générale des coniques ayant pour foyers les points F et F' est

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1,$$

c désignant la distance OF et a un paramètre variable; lorsque a est plus grand que c, la courbe est une ellipse; lorsque a est plus petit que c, c'est une hyperbole. Soient α, β les coordonnées du point donné P; l'équation de la corde des contacts des tangentes menées du point P à la conique (1) est

$$(2)\qquad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{a^2-c^2}=1.$$

On obtient l'équation du lieu en éliminant le paramètre a entre les équations (1) et (2). Si l'on retranche ces équations membre à membre, il vient

$$\frac{x^2-\alpha x}{a^2}+\frac{y^2-\beta y}{a^2-c^2}=0;$$

d'où $$a^2=\frac{c^2(x^2-\alpha x)}{x^2+y^2-\alpha x-\beta y},\quad a^2-c^2=\frac{-c^2(y^2-\beta y)}{x^2+y^2-\alpha x-\beta y};$$

en substituant dans l'équation (2), on obtient l'équation du lieu

$$(3)\qquad (x^2+y^2-\alpha x-\beta y)(\beta x-\alpha y)+c^2(x-\alpha)(y-\beta)=0.$$

Le lieu est du troisième degré, il passe par le point donné P, par les foyers F et F′, et par les projections du point P sur les droites OX, OY.

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point P, l'équation du lieu devient

$$(4) \qquad (x^2+y^2+\alpha x+\beta y)\,(\beta x-\alpha y)+c^2xy=0.$$

Si l'on transforme celle-ci en coordonnées polaires en prenant pour pôle le point P et pour axe polaire la droite PX′, on a

$$(5) \qquad \rho=\frac{(c^2+\beta^2-\alpha^2)\sin 2\omega+2\alpha\beta\cos 2\omega}{2(\alpha\sin\omega-\beta\cos\omega)}.$$

A l'aide des angles auxiliaires φ et φ_1 déterminés par les formules

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\beta}{\alpha}, \qquad \operatorname{tang}\varphi_1=\frac{2\alpha\beta}{c^2+\beta^2-\alpha^2},$$

cette équation prend la forme

$$(6) \qquad \rho=\frac{d\sin(2\omega+\varphi_1)}{\sin(\omega-\varphi)},$$

la lettre d désignant la quantité

$$d=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c^2+\beta^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Si l'on fait tourner l'axe polaire de l'angle φ, l'équation (6) devient identique à l'équation (2) de la strophoïde oblique (n° 385).

L'angle φ étant égal à POA, l'asymptote est parallèle à la droite OP. Parmi les courbes homofocales considérées se trouvent une hyperbole et une ellipse passant par le point P; on en conclut que le point P appartient au lieu et que les tangentes en ce point sont les bissectrices PQ, PQ′ des angles formés par les droites PF et PF′. La strophoïde est définie par deux droites PE, PI et un point I sur l'une d'elles. Nous connaissons la droite PE; on obtiendra la droite PI en remarquant que la tangente PQ est bissectrice de l'angle EPI; on obtiendra le point I à l'aide de l'un des points du lieu, par exemple du point A; la droite IA doit être telle que l'on ait KA = KP; le point K est donc le point milieu de la diagonale OP.

La courbe précédente est aussi le lieu des pieds des normales menées du point P aux courbes du second degré qui ont pour foyers les points F et F′; car une ellipse et une hyperbole homofocales se coupant à angle droit, la tangente à l'une est normale à l'autre.

386 — Exemple VIII. *Construire la courbe donnée par l'équation*

$$\rho=a\frac{2\omega}{2\omega-1}.$$

La valeur de ρ s'annule pour $\omega = 0$, et devient infinie pour $\omega = \frac{1}{2}$; menons par le pôle la droite L'L, qui fait avec l'axe polaire l'angle dont la mesure est $\frac{1}{2}$ (fig. 255). Lorsque ω varie de o à $\frac{1}{2}$, ρ est négatif et varie de o à $-\infty$, on a une branche infinie OA'B', tangente à l'axe polaire et comprise dans l'angle X'OL'.

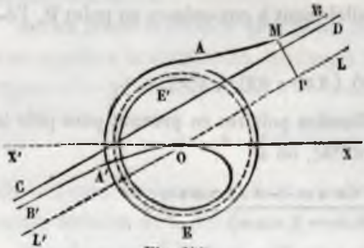


Fig. 255.

Quand ω dépasse $\frac{1}{2}$ et croît de $\frac{1}{2}$ à ∞, ρ devient positif et décroît de ∞ à a, on obtient une branche infinie BA qui fait une infinité de circonvolutions autour du cercle décrit du pôle comme centre, avec a pour rayon, en se rapprochant constamment du cercle. Quand ω varie de o à $-\infty$, ρ reste positif et va en croissant de o à a, ce qui donne la branche OE' intérieure au cercle; cette branche fait uneinfinité de circonvolutions en se rapprochant aussi constamment du cercle.

Considérons l'une des branches infinies A'B', AB; la distance MP d'un point de l'une de ces branches à la droite L'L a pour expression

$$\rho \sin\left(\omega - \frac{1}{2}\right) = a\omega \frac{\sin\left(\omega - \frac{1}{2}\right)}{\omega - \frac{1}{2}};$$

la limite de cette quantité, lorsque ω tend vers $\frac{1}{2}$, est $\frac{a}{2}$. Les deux branches A'B', AB ont donc pour asymptote la droite CD, distante de L'L de $\frac{a}{2}$.

Si l'on pose $\omega = \frac{1}{2} + \omega'$, l'excès de la distance MP sur sa limite est

$$\delta = \frac{a}{2\omega'}[(1 + 2\omega')\sin\omega' - \omega'].$$

La parenthèse s'annule pour $\omega' = 0$; sa dérivée première s'annule aussi, mais sa dérivée seconde a une valeur positive; si l'on fait croître ω' à partir de zéro, on en conclut que la dérivée première commence par croître, et, par suite, est positive, et de même la parenthèse; ainsi la différence δ est positive pour des valeurs positives de ω' suffisamment petites. On reconnaît de la même manière que la différence δ est négative pour des valeurs négatives très-petites de ω', ce qu'on voit d'ailleurs directement; ainsi les deux branches infinies sont situées par rapport à l'asymptote, comme l'indique la figure; il est évident, en outre, que cette asymptote est coupée par la courbe en un nombre infini de points.

387 — EXEMPLE IX. *Construire la courbe*

$$\rho = 1 \pm \sqrt{\frac{2 \sin \omega - 1}{\sin \omega}}.$$

Le rayon vecteur reprenant la même valeur quand ω augmente de 2π, il suffit de faire varier ω de 0 à 2π. Pour que le rayon vecteur soit réel, il faut que la fraction placée sous le radical soit positive. Le numérateur change de signe pour les valeurs $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ attribuées à ω, le dénominateur pour les valeurs 0 et π; en rangeant ces angles par ordre de grandeur

$$0, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \pi, \quad 2\pi,$$

on voit que la quantité placée sous le radical est négative de 0 à $\frac{\pi}{6}$, positive de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{5\pi}{6}$, négative de $\frac{5\pi}{6}$ à π, positive de π à 2π; on obtiendra donc toute la courbe, en faisant varier ω de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{5\pi}{6}$, et de π à 2π. On remarque d'ailleurs que, les valeurs supplémentaires de ω reproduisant les mêmes valeurs de ρ, la courbe est symétrique par rapport à la perpendiculaire OY à l'axe polaire OX (fig. 256).

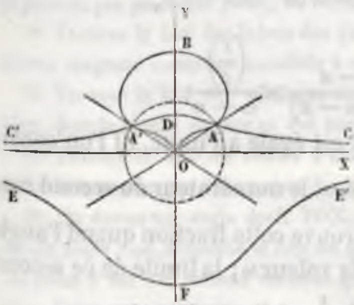


Fig. 256.

Du pôle comme centre, avec un rayon égal à l'unité, décrivons un cercle, ce cercle divisera en deux parties égales chacune des cordes qui passent par le centre; quand ω varie de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{\pi}{2}$, la valeur du radical, que nous désignerons par ρ_1, en posant $\rho = 1 \pm \rho_1$, croît de 0 à 1, ce qui donne les deux arcs AB et AO, qui se raccordent au point A, tangentiellement à la droite OA; l'arc AO est tangent au point O à la droite OY. En faisant varier ω de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{5\pi}{6}$, on obtiendra l'arc BA'O symétrique de BAO, par rapport à la droite OY.

Quand ω varie de π à $\frac{3\pi}{2}$; ρ_1 décroît de ∞ à $\sqrt{3}$; ce qui donne les deux branches infinies EF et CD; en faisant varier ω de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π, on obtiendra les deux branches FE′, DC′, symétriques des précédentes; ces branches infinies sont asymptotes à l'axe polaire.

388 — Remarque. La distance variable MK d'un point M d'une branche infinie (fig. 251) à la direction OL, pour laquelle ρ devient infini, a pour expression

$$\pm \rho \sin(\omega - \alpha);$$

quand ω s'approche de α, le premier facteur croît indéfiniment et le second tend vers zéro. Dans les exemples précédents, on a pu découvrir sans peine ce que devient ce produit pour des valeurs de ω voisines de α; lorsque la difficulté est plus grande, on a recours à une autre méthode.

Appelons q la perpendiculaire abaissée du pôle sur l'asymptote, on a, abstraction faite du signe,

$$q = \lim \rho \sin(\omega - \alpha),$$

et, par suite,

$$\frac{1}{q} = \lim \frac{\omega - \alpha}{\sin(\omega - \alpha)} \times \frac{\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\omega - \alpha}.$$

La limite du premier rapport est égale à l'unité. Si l'on considère $\frac{1}{\rho}$ comme une fonction de ω, le numérateur du second rapport est l'accroissement qu'éprouve cette fraction quand l'angle polaire passe de la valeur α à la valeur ω; la limite de ce second rapport est donc la dérivée de $\frac{1}{\rho}$, et l'on a

$$\frac{1}{q} = \left(\frac{1}{\rho}\right)' \text{ pour } \omega = \alpha.$$

Ordinairement la valeur de ρ se présente sous la forme $\rho = \frac{F(\omega)}{f(\omega)}$, le dénominateur s'annulant pour $\omega = \alpha$, tandis que le numérateur conserve une valeur finie différente de zéro. On en déduit la dérivée

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)' = \frac{F(\omega) f'(\omega) - f(\omega) F'(\omega)}{F^2(\omega)},$$

qui se réduit à $\frac{f'(\alpha)}{F(\alpha)}$ pour $\omega = \alpha$. On arrive ainsi à la formule

$$q = \frac{F(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

qui est très-commode dans la pratique.

EXERCICES.

1° Trouver le lieu du sommet d'une parabole variable qui a un foyer fixe et qui touche une conique du même foyer (limaçon de Pascal).

2° Le sommet O d'un triangle variable AOB est fixe, le sommet B glisse sur une droite OX; on demande le lieu décrit par le point de rencontre de AB avec la perpendiculaire élevée au point O au côté OA.

3° On donne un point fixe O et une droite fixe OP; on demande le lieu du sommet M d'un triangle variable MON qui remplit les conditions suivantes : le côté ON a une longueur constante a, le côté $NM = a\sqrt{2}$, enfin les angles vérifient la relation cos (MON—2OMN) = cos MOP (lemniscate); démontrer que la tangente en un point quelconque M du lieu passe au centre du cercle circonscrit au triangle qui a donné ce point.

4° Étant donné un triangle AOB rectangle en O, on circonscrit à ce triangle une conique variable telle que les normales aux trois points A, O, B passent par un même point; on demande un lieu de ce point.

5° Trouver le lieu des foyers des paraboles qui ont une corde commune et une tangente commune parallèle à cette corde.

6° Trouver le lieu des sommets ou des foyers d'une hyperbole équilatère, dont le centre est fixe et qui passe en un point fixe.

7° Trouver le lieu du centre d'une hyperbole équilatère donnée, assujettie à passer par deux points fixes.

8° On donne un angle droit YOX, et un point fixe P sur la bissectrice de cet angle; on demande le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur une sécante variable qui intercepte dans l'angle un triangle dont l'aire est constante.

9° En un point quelconque M d'une parabole on mène la normale que l'on prolonge jusqu'au point N où elle rencontre l'axe; on demande le lieu du point de rencontre de la tangente en M à la courbe avec la perpendiculaire à l'axe au point N.

10° On remplace la parabole du problème précédent par une hyperbole; on prend le point N sur l'un des deux axes de la courbe; trouver le lieu.

11° Une parabole tourne autour de son foyer; on demande le lieu des points de contact des tangentes menées parallèlement à une droite donnée.

12° Trouver le lieu du point milieu d'une corde normale à une hyperbole donnée.

13° Étant donnée une ellipse, le centre d'un cercle de rayon constant parcourt un diamètre de l'ellipse; trouver le lieu des points de concours des sécantes communes au cercle et à l'ellipse.

14° Étant donnée une hyperbole équilatère, le centre d'un cercle, qui passe constamment par le centre de l'hyperbole, décrit une asymptote; trouver le lieu des points de concours des sécantes communes.

15° Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné aux cercles qui touchent une droite donnée en un point donné.

16° Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné aux cercles qui passent par un point donné et qui touchent une droite donnée.

17° Trouver le lieu des milieux des cordes inscrites dans une hyperbole donnée et tangentes à un cercle concentrique à l'hyperbole.

18° Construire les lieux représentés par les équations

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0, \quad x^4 + y^4 - 2ay - 2bxy = 0,$$

$$(x^2+y^2)^2 - 6axy^2 - 2ax^3 + 2a^2x^2 = 0, \quad y = a + b(x-c)^m,$$

$$x^4 + y^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0, \quad x^3y^3 + y - x = 0,$$

$$y^4 - x^4 - 2bxy^2 + 2ax^3 = 0, \quad y^4 - x^4 - 3x^2y^2 - 2x = 0,$$

$$y^4 - x^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 = 0, \quad 2x^3 - y^3 + (y-x)^2 = 0.$$

19° Construire les courbes représentées par les équations

$$2\sin y - \sin x = 0, \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2},$$

$$y = \frac{e^x}{x}, \quad y = \frac{\sin x^2}{x}, \quad y = x^x, \quad x^y = y^x.$$

20° Construire les courbes représentées par les équations

$$\rho = \frac{\sin\omega}{2\cos\omega - 1}, \quad \rho = 1 \pm \sqrt{\frac{\sin 3\omega}{\cos\omega}},$$

$$\rho^2\cos\omega - 2\rho\sin\omega + \cos^2\omega = 0, \quad \rho^2\cos\omega - 4\rho\sin\omega - \operatorname{tang}\omega = 0,$$

$$\rho = \cos\omega \pm \sqrt{\frac{1 - 2\cos\omega}{\sin\omega}}.$$

CHAPITRE V

De la similitude.

389 — Nous rappellerons d'abord la définition de deux figures homothétiques.

Soit un système quelconque de points A, B, C,... (fig. 257), situés dans un plan ; ces points pouvant être isolés les uns des autres, ou former des lignes continues : d'un point O, pris arbitrairement dans le plan, menons aux différents points du système des rayons OA, OB, OC, ... et prenons sur ces rayons des points A′, B′, C′,... tels que l'on ait $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \ldots k$; le système des points ainsi obtenus est dit *semblable* au système proposé et *semblablement placé.*

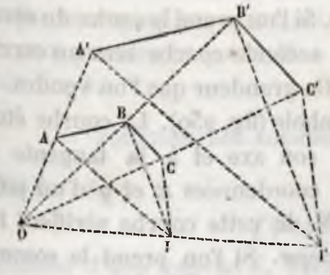


Fig. 257.

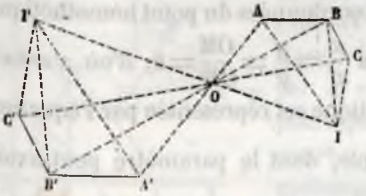


Fig. 258.

Si les points A′, B′, C′,... étaient pris sur les prolongements des rayons vecteurs en sens inverse, les deux systèmes seraient *semblables* et *inversement placés.* Par une rotation de 180 degrés autour du point O, le second système coïncidera avec un des systèmes semblables et semblablement placés (fig. 258).

Pour abréger le langage, M. Chasles a désigné cette similitude de forme et de position par le nom d'*homothétie, directe* dans le premier cas, *inverse* dans le second. Le point O est dit *centre de similitude* ou d'*homothétie* des deux systèmes, le nombre k est le *rapport de similitude,* et on appelle points homologues les points A et A′ placés sur un même rayon. Si l'on fait varier le rapport k de o à ∞ et aussi la position du centre O de similitude, on obtient tous les systèmes homothétiques au système proposé.

Un système est *semblable* à un système donné, lorsqu'il est égal à l'un des systèmes homothétiques au système donné.

390 — On sait que l'on obtient toutes les courbes homothétiques à une courbe donnée S avec un seul centre de similitude

O, pris à volonté dans son plan. Considérons maintenant quelques exemples :

1° La courbe S est un cercle. Si l'on prend le centre du cercle pour centre de similitude, la seconde courbe sera un cercle, dont le rayon pourra avoir telle grandeur que l'on voudra.

2° La courbe S est une parabole (fig. 259). La courbe étant rapportée à son axe et à la tangente au sommet, les coordonnées x et y d'un point quelconque M de cette courbe vérifient l'équation $y^2 = 2px$. Si l'on prend le sommet pour centre de similitude et que l'on appelle x' et y' les coordonnées du point homothétique M', on aura $\dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'} = \dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OM'}} = k$, d'où $x = kx'$,

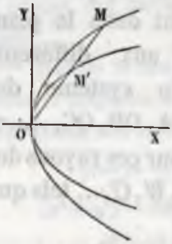


Fig. 259.

$y = ky'$; la courbe homothétique est représentée par l'équation $y'^2 = \dfrac{2p}{k}x'$; c'est une parabole, dont le paramètre peut avoir telle grandeur que l'on voudra, à cause du rapport arbitraire k; on en conclut que *deux paraboles quelconques sont semblables.*

3° La courbe S est l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Si l'on prend le centre de la courbe pour centre de similitude, la courbe homothétique, représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{k^2}$$

est une ellipse, dont les axes peuvent avoir des valeurs quelconques proportionnelles à celles des axes de la première ellipse. On en conclut que *deux ellipses sont semblables lorsque leurs axes sont proportionnels.*

Le même théorème a lieu pour l'hyperbole.

4° La courbe S est la spirale logarithmique $\rho = ae^{m\omega}$. Quand on prend le pôle pour centre de similitude, les courbes homothétiques ont pour équation $\rho = \dfrac{ae^{m\omega}}{k}$; si l'on pose $k = e^{m\alpha}$, cette équation devient $\rho = ae^{m(\omega - \alpha)}$; elle représente la spirale proposée, que l'on a fait tourner de l'angle α autour du pôle. Il en résulte que la seule courbe semblable à une spirale logarithmique est cette spirale elle-même; à un point M de la courbe correspond un autre point M′ de la même courbe, et l'on peut prendre ce point M′ à volonté, à cause du nombre arbitraire k.

ÉQUATION DES COURBES HOMOTHÉTIQUES.

391 — Soit

(1) $$f(x,y)=0$$

l'équation d'une courbe S. Prenons l'origine pour centre de similitude et construisons avec le rapport k une courbe S′ homothétique à la première. Si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point quelconque M de la première courbe, par x' et y' celles du point homologue M′ de la seconde, les triangles semblables OPM, O′P′M′ donnent

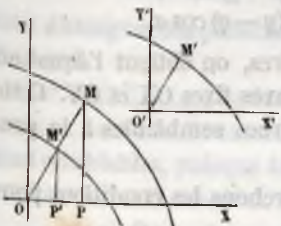


Fig. 260.

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O'M'}}=k;$$

si l'on substitue dans l'équation (1), on a l'équation

(2) $$f(kx', ky')=0,$$

qui représente toutes les courbes homothétiques à la courbe proposée et ayant l'origine pour centre d'homothétie. Dans cette équation, on donnera à k une valeur positive lorsque l'homothétie sera directe, une valeur négative lorsque l'homothétie sera inverse.

Laissant fixe la courbe S, transportons la courbe S′ dans le plan, de manière que l'origine O vienne en O′ (p, q), et que les axes restent parallèles à leurs directions primitives; la courbe S′ a pour équation, par rapport aux axes O′X′ et O′Y′,

$$f(kx', ky')=0,$$

et, par rapport aux axes fixes OX et OY,

(3) $$f[k(x-p), k(y-q)]=0.$$

Dans cette nouvelle position, la courbe S′ est homothétique à la courbe S; car les rayons vecteurs menés des points O et O′

sont parallèles et dans le rapport constant k. L'équation (3) représente donc toutes les courbes homothétiques à la courbe proposée, quelle que soit la position du centre de similitude.

392 — En même temps que nous transportons l'origine en O', faisons tourner les axes de l'angle α; la courbe S' occupera alors une position quelconque dans le plan et sera simplemen semblable à la proposée. La courbe S', rapportée aux axes mobiles O'X' et O'Y', a pour équation $f(kx', ky') = 0$, au moyen des formules de transformation,

$$x' = (x-p)\cos\alpha + (y-q)\sin\alpha,$$
$$y' = -(x-p)\sin\alpha + (y-q)\cos\alpha,$$

les axes étant supposés rectangulaires, on obtient l'équation de la courbe par rapport aux deux axes fixes OX et OY. Cette équation représente toutes les courbes semblables à la proposée.

393 — Comme application, cherchons les conditions pour que deux courbes du second degré

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ex + F = 0,$$
$$A'x^2 + Bxy^2 + C'y^2 + D'y + E'y + F' = 0,$$

soient homothétiques. L'équation générale des courbes homothétiques à la première courbe est (n° 391)

$$Ak^2x^2 + Bk^2x^2 + Ck^2q - (Bk^2q + 2Ak^2p - Dk)x - (Bk^2p + 2Ck^2q - Ek)y$$
$$+ (Ak^2p^2 + Bk^2pq + Ck^2q^2 - Dkp - Ekq + F) = 0.$$

En identifiant cette équation avec la seconde, on a

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{-Bq - 2Ap + \frac{D}{k}}{D'} = \frac{-Bp - 2Cq + \frac{E}{k}}{E'}$$

$$= \frac{Ap^2 + Bpq + Cq^2 - \frac{D}{k}p - \frac{E}{k}q + \frac{F}{k^2}}{F}.$$

L'élimination des trois paramètres p, q, k, entre ces cinq équations, donne deux équations de condition : or, les deux premières équations $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, ne renfermant pas les paramètres à éliminer, sont précisément les deux équations de condition. Donc, *pour que deux courbes du second degré soient homo-*

thétiques, il faut que les coefficients des termes du second degré soient proportionnels.

394 — Il reste à examiner si les valeurs des paramètres p, q, k, sont réelles et finies; on évite cette discussion de la manière suivante. Puisque les coefficients des termes du second degré sont proportionnels, on peut les rendre égaux en multipliant tous les termes de l'une des équations par un facteur convenable; prenons donc les deux équations sous la forme

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{4}$$
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+D'x+E'y+F'=0. \tag{5}$$

Nous distinguerons plusieurs cas suivant le signe de la quantité B^2-4AC.

1° $B^2-4AC=0$. Les deux lieux sont du genre parabole; si ces lieux sont effectivement deux paraboles, ils sont certainement semblables, puisque toutes les paraboles sont semblables; de plus, les axes des deux courbes, ayant le même coefficient angulaire $-\frac{B}{2C}$, sont parallèles, et, par suite, les courbes sont homothétiques.

2° $B^2-4AC<0$. Les lieux sont du genre ellipse. Si, pour chaque courbe, on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de la courbe, les équations (4) et (5) deviennent

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+F_1=0, \tag{6}$$
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+F'_1=0. \tag{7}$$

Les axes des courbes, dont les directions sont déterminées par l'équation $\tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}$ (n° 141), sont parallèles; si l'on fait tourner les axes des coordonnées de l'angle α, les équations (6) et (7) se réduisent à la forme

$$Mx^2+Ny^2+F_1=0, \tag{8}$$
$$Mx^2+Ny^2+F'_1=0. \tag{9}$$

Les coefficients M et N, dont les valeurs sont données par les relations

$$M+N=A+C,\quad M-N=\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2},$$

ont le même signe; pour que les équations (8) et (9) représentent deux ellipses réelles, il faut que les quantités F_1, F'_1 soient également de même signe et que, de plus, ce signe soit contraire au précédent. Lorsque cette condition est remplie, les axes des deux ellipses ayant le même rapport $\sqrt{\frac{N}{M}}$, les ellipses sont homothétiques.

3° $B^2 - 4AC > 0$. Les deux lieux sont du genre hyperbole. En faisant les mêmes transformations que dans le cas précédent, on arrive aux équations (8) et (9) dans lesquelles M et N ont des signes contraires. Lorsque les quantités F_1 et F'_1 sont différentes de zéro, chacune des équations représente une hyperbole. Si F_1 et F'_1 ont le même signe, les axes réels des deux courbes sont parallèles, et, comme le rapport des axes est le même, les courbes sont homothétiques. Lorsque F_1 et F'_1 ont des signes contraires, l'une des hyperboles est semblable à la conjuguée de l'autre. Dans tous les cas, les deux courbes ont leurs asymptotes parallèles.

On conclut de ce qui précède que, lorsque *deux équations du second degré ont les coefficients des termes du second degré proportionnels et représentent deux courbes réelles, ces courbes sont homothétiques; cependant, quand les courbes sont des hyperboles, il peut arriver que l'une soit homothétique à la conjuguée de l'autre.*

ÉQUATION GÉNÉRALE D'UNE ESPÈCE DE COURBES.

393 — On appelle *courbes de même espèce* les courbes comprises dans une même définition géométrique, et qui ne diffèrent les unes des autres que par les valeurs attribuées aux paramètres qui entrent dans la définition générale. L'équation générale des courbes de l'espèce considérée est une équation qui, dans un système de coordonnées, donne toutes ces courbes, quelle que soit leur position dans le plan, quand on attribue diverses valeurs aux paramètres variables qu'elle renferme. Ainsi, lorsque les axes fixes sont rectangulaires, l'équation générale de l'espèce *cercle* est $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Cette équation renferme trois paramètres variables, savoir le rayon r et les deux coordonnées du centre a et b.

Souvent on cherche d'abord l'équation de la courbe par rapport à des axes particuliers que l'on choisit de manière à simplifier le calcul; alors, pour obtenir l'équation générale, on la rapporte à des axes fixes par une transformation de coordonnées.

On a défini la lemniscate le lieu des points tels que le produit des distances de chacun d'eux à deux points F et F' soit égal au carré de la moitié de la droite F'F (fig. 261). Si l'on prend pour origine le milieu O' de la droite F'F, pour axes des coordonnées O'F et une perpendiculaire à O'F, et si l'on désigne par $2c$ la distance F'F, la courbe, rapportée à ces axes particuliers variables, est représentée par l'équation (nº 339)

$$(x'^2+y'^2)^2+2c^2(y'^2-x'^2)=0.$$

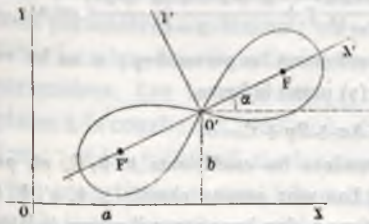


Fig. 261.

On rapporte ensuite la courbe aux axes fixes rectangulaires OX, OY, au moyen des formules de transformation

$$x'=(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha,$$
$$y'=-(x-a)\sin\alpha+(y'-b)\cos\alpha.$$

dans lesquelles a et b désignent les coordonnées du point O' par rapport aux axes fixes et α de l'angle de la droite O'F avec OX. On arrivera ainsi à une équation

$$F(x,y,c,a,b,\alpha)=0$$

renfermant quatre paramètres arbitraires, et qui représente toutes les lemniscates ; c'est l'équation générale de l'espèce.

L'équation générale d'une espèce de courbes, par rapport à des axes fixes, contient trois paramètres de plus que l'équation des mêmes courbes rapportées à des axes liés aux courbes d'une manière déterminée. Soit n le nombre total des paramètres, on pourra toujours remplacer ce système de paramètres par un autre système, tel que les variations de trois d'entre eux ne fassent que déplacer la courbe dans son plan, tandis que les variations des $n-3$ autres changent sa forme ou ses dimensions.

396 — Le nombre des points, et, en général, le nombre des conditions nécessaires pour déterminer complétement une courbe d'espèce donnée, est égal au nombre des paramètres arbitraires que renferme l'équation générale de l'espèce. Les remarques faites, à propos des courbes du second degré (nº 281), sur les conditions multiples, sont ici applicables. Toutefois, il importe de s'assurer préalablement que les paramètres qui entrent dans l'équation ne peuvent être réduits à un nombre moindre.

Considérons, par exemple, le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes, dont nous désignerons les coordonnées par (a, b), (a', b'), soit constant et égal à k. Ce lieu, qui a pour équation

$$(1)\qquad (x-a)^2+(x-b)^2-k^2[(x-a')^2+(y-b')^2]=0,$$

est une circonférence de cercle. L'équation (1) renferme cinq paramètres ; mais si l'on développe et si l'on ordonne, elle devient

$$(2)\qquad x^2+y^2-2\,\frac{a-k^2a'}{1-k^2}\,x-2\,\frac{b-k^2b'}{1-k^2}\,y+\frac{a^2+b^2-k^2(a'^2+b'^2)}{1-k^2}=0.$$

Trois des coefficients seulement renferment les paramètres ; si on les représente par A, B, C, l'équation (2) prend la forme

$$(3)\qquad x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0.$$

Trois points suffisent pour déterminer les coefficients A, B, C, et, par conséquent, la circonférence. Si l'on veut ensuite obtenir a, b, a', b', k, on aura un système de trois équations à cinq inconnues ; il y aura indétermination, et deux des inconnues pourront être prises à volonté ; ceci signifie que, pour une même circonférence, on peut trouver une infinité de couples de deux points tels que le rapport des distances de chacun des points de la circonférence à ces deux points fixes soit constant.

397 — La définition géométrique d'une espèce de courbes indique elle-même le nombre des paramètres arbitraires que renferme son équation générale. La définition du cercle exige la connaissance du centre, dont la position est déterminée par ses deux coordonnées, et celle du rayon, en tout trois constantes ou paramètres arbitraires. La définition de la lemniscate exige la connaissance de deux points fixes, ce qui fait quatre constantes; pour l'ellipse, comme il faut connaître en outre la somme des rayons vecteurs, la courbe dépend de cinq paramètres. Dans la définition de la spirale d'Archimède entrent un pôle, ce qui fait deux constantes, la position de la droite à l'instant où le mobile passe au pôle, et un rapport, en tout quatre constantes.

398 — Un polynôme entier du degré m par rapport aux deux variables x et y contient $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ termes; on en conclut qu'il faut $\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1$ ou $\frac{m(m+3)}{2}$ points pour définir une courbe algébrique du degré m. Par exemple, il faut 9 points pour définir une courbe du troisième degré, 14 points pour définir une courbe du quatrième degré.

D'après cela, on voit que toute équation du troisième degré peut se mettre sous la forme

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3-k\beta^2\gamma=0, \tag{4}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma$ désignant des fonctions entières et du premier degré, et k un paramètre arbitraire; car cette équation contient onze paramètres arbitraires; on peut même prendre à volonté l'une des cinq fonctions linéaires, puisqu'il reste encore neuf paramètres. Les trois droites $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$ sont tangentes à la courbe aux points où elles sont coupées par la droite $\beta=0$; et les points où ces tangentes sont coupées par la droite $\gamma=0$ appartiennent aussi à la courbe. En prenant β à volonté, on a le théorème suivant : si l'on coupe une courbe du troisième degré par une droite quelconque $\beta=0$, qu'aux trois points d'intersection on mène les tangentes à la courbe, chacune des tangentes coupe la courbe en un nouveau point, et ces trois points sont en ligne droite. En prenant γ à volonté, on a cet autre théorème : si l'on coupe une courbe du troisième degré par une droite $\gamma=0$, si par chacun des points d'intersection on mène des tangentes à la courbe, les points de contact de ces tangentes sont trois à trois en ligne droite.

Supposons que la droite $\beta=0$ s'éloigne à l'infini, les trois tangentes $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$ auront pour limites les trois asymptotes de la courbe; chacune de ces asymptotes coupe la courbe en un seul point, et ces trois points sont en ligne droite.

L'équation

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3-k\beta^3=0, \tag{5}$$

qui renferme neuf paramètres arbitraires, représente toutes les courbes du troisième degré. Les trois points où la droite $\beta=0$

rencontre la courbe sont des points d'inflexion; les tangentes en ces points sont les droites $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$.

On peut encore représenter toutes les courbes du troisième degré par l'équation

$$(6)\qquad \alpha(\alpha-a\gamma)(\alpha-b\gamma)-k\beta^3\gamma=0$$

qui renferme aussi neuf paramètres arbitraires. La droite $\gamma=0$ est la tangente au point d'inflexion $(\alpha=0, \gamma=0)$, les trois tangentes $\alpha=0$, $\alpha-a\gamma=0$, $\alpha-b\gamma=0$ aux points où la droite $\beta=0$ coupe la courbe, passent par ce point d'inflexion. En prenant la perspective sur un plan on peut rejeter à l'infini telle droite que l'on veut, par exemple la tangente $\gamma=0$ au point d'inflexion; il suffit de faire $\gamma=1$ dans l'équation qui se réduit à la forme $\alpha(\alpha-a)(\alpha-b)-k\beta^3=0$; si l'on prend pour axe des x la droite $\beta=0$ et pour axe des y la droite $\alpha=0$, on obtient l'équation $ky^3=x(x-a)(x-b)$ que nous avons étudiée au nº 337.

399 — Toute équation du quatrième degré peut être mise sous la forme

$$(7)\qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4-k\beta^2\varphi=0,$$

φ désignant un polynôme du second degré; car cette équation contient 16 paramètres; on peut même prendre β à volonté, puisqu'il reste 14 paramètres. Ainsi, quand on coupe une courbe du quatrième degré par une droite quelconque $\beta=0$, qu'aux quatre points d'intersection on mène des tangentes, et qu'on prend les deux autres points où chaque tangente rencontre la courbe, on a huit points situés sur une conique $\varphi=0$.

Une courbe du quatrième degré a quatre asymptotes; chacune d'elles coupe la courbe en deux points; les huit points sont sur une conique.

CONDITIONS DE SIMILITUDE DE DEUX FIGURES.

400 — Considérons une série de courbes de même espèce, dans la définition desquelles il n'entre qu'un paramètre linéaire A, dont nous désignerons la mesure par a, et soit

$$(1)\qquad f(x,y,a)=0$$

l'équation qui représente toutes ces courbes, abstraction faite de leur position dans le plan. Si l'équation (1) a été obtenue sans spécifier l'unité linéaire, elle est nécessairement homogène par rapport à x, y, a. Quand on change le paramètre linéaire A, ce qui revient, l'unité restant la même, à faire varier le nombre a, l'équation (1) définit une série de courbes homothétiques. En effet, soit A_0 un paramètre ayant pour mesure a_0; à ce paramètre correspond la courbe particulière

$$f(x, y, a_0) = 0. \tag{2}$$

Les courbes homothétiques à la courbe (2), l'origine étant le centre d'homothétie et k un rapport arbitraire, sont représentées par l'équation (nº 391)

$$f(kx, ky, a_0) = 0. \tag{3}$$

Désignons par A_1 un second paramètre ayant pour mesure un nombre a_1 tel que $\dfrac{a_0}{a_1} = k$, l'équation (3) pourra s'écrire

$$f(kx, ky, ka_1) = k^m f(x, y, a_1) = 0.$$

$$\text{ou} \quad f(x, y, a_1) = 0, \tag{4}$$

ce qui signifie que les courbes homothétiques à la courbe (2) sont les diverses courbes que l'on obtient en faisant varier le paramètre A.

401 — En général, supposons qu'il faille n paramètres linéaires A, B,... pour définir toutes les courbes d'une même espèce, abstraction faite de leur position dans le plan; désignons par $a, b, c,...$ les mesures de ces paramètres au moyen d'une unité arbitraire; l'équation des courbes de l'espèce

$$f(x, y, a, b, ...) = 0 \tag{5}$$

sera homogène par rapport à x, y, a, b... Les courbes définies par l'équation (5) et qui correspondent à deux séries de paramètres proportionnels $A_0, B_0,...$ et $A_1, B_1...$ sont homothétiques; car, si l'on désigne par k le rapport des paramètres

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{b_0}{b_1} = \,.. = k,$$

les courbes homothétiques à la courbe

$$f(x, y, a_0, .. b_0, ...) = 0$$

sont représentées par l'équation

$$f(kx, ky, ka_1, kb_1, \ldots) = k^m f(x, y, a_1, b_1 \ldots) = 0,$$

ou

$$f(x, y, a_1, b_1, \ldots) = 0.$$

Il résulte de ce qui précède que, lorsque la courbe, abstraction faite de sa position dans le plan, est définie par une seule longueur, toutes les courbes de l'espèce sont semblables. Ainsi, le cercle étant défini par son rayon, la parabole par la distance du foyer à la directrice, la lemniscate par la distance des foyers, la spirale d'Archimède par la longueur que parcourt le mobile sur la droite pendant une révolution de cette droite, toutes les circonférences sont semblables, et de même toutes les paraboles, toutes les lemniscates, etc.

L'ellipse étant définie par les deux axes, la condition de similitude de deux ellipses est que ces axes soient proportionnels, comme nous l'avons déjà reconnu au nº 390. Il en est de même de deux hyperboles.

CHAPITRE VI

Résolution graphique des équations.

402—Considérons deux équations à deux inconnues x et y

(1) $\varphi(x, y) = 0$, (2) $\psi(x, y) = 0$;

chacune d'elles définit une courbe. Au système de ces deux équations, on peut substituer une infinité de systèmes équivalents ; prenons en particulier un système

(3) $\chi(x, y) = 0$, (4) $f(x) = 0$,

dans lequel l'une des équations ne contienne plus la variable y, système que l'on obtient en éliminant y entre les deux équations proposées. Les racines réelles de l'équation (4) sont les abscisses des points communs aux courbes (1) et (2). Cependant, si le système des équations (3) et (4) était vérifié par une couple de valeurs de la forme $x=\alpha$, $y=\beta+\gamma i$, dans lesquelles les quantités α, β, γ sont réelles, ces valeurs vérifieraient le système des équations (1) et (2) ; mais la quantité α ne serait pas l'abscisse d'un point réel commun aux deux courbes. L'exception que nous venons de signaler ne se présente jamais lorsque l'équation $\chi(x,y)=0$ est une équation algébrique ne renfermant la variable y qu'au premier degré.

Lorsqu'on veut résoudre une équation $f(x)=0$ à une seule inconnue, on peut choisir d'une infinité de manières différentes les courbes déterminées par les équations (1) et (2). La seule condition à remplir, c'est que l'élimination de y entre les équations (1) et (2) donne l'équation proposée. Une première combinaison est $y=f(x), y=0$, ce qui revient à considérer les valeurs de l'inconnue comme les abscisses des points de rencontre de la courbe $y=f(x)$ et de l'axe des x. Cette combinaison est rarement la plus simple. On démontre en algèbre que si l'on élimine une inconnue y entre deux équations algébriques à deux inconnues dont les degrés sont m et n, l'équation en x est généralement du degré mn. Par conséquent, si l'équation proposée est algébrique et que l'on veuille obtenir ses racines par des intersections de courbes algébriques, le produit des degrés des équations des deux courbes devra être égal au degré de l'équation à résoudre. Appliquons cette méthode à la résolution de l'équation du quatrième degré.

403 — L'équation du quatrième degré se ramène aisément à la forme

$$(5) \qquad x^4+px^2+qx+r=0;$$

on peut la considérer comme provenant de l'élimination de y entre les deux équations du second degré

$$(6) \quad x^2-my=0, \qquad (7) \quad m^2y^2+pmy+qx+r=0,$$

qui définissent chacune une parabole. L'équation (6) ne renfermant y qu'au premier degré, toutes les racines réelles de l'équation (5) sont des abscisses des points réels communs aux deux courbes.

On peut remplacer la parabole (7) par une autre courbe du second degré passant par les points communs aux courbes (6) et (7). L'équation générale des courbes du second degré satisfaisant à cette condition (n° 275) est

$$(8) \qquad kx^2+m^2y^2+qx+m(p-k)y+r=0,$$

k étant un paramètre arbitraire. Si l'on prend $k=m^2$, la courbe (8) ne pourra être qu'une circonférence de cercle; on obtient les coordonnées a et b du centre et le rayon R de cette circonférence par les formules

$$(9) \qquad a=-\frac{q}{2m^2}, \quad b=\frac{m^2-p}{2m}, \quad R^2=a^2+b^2-\frac{r}{m^2}.$$

Lorsque la valeur de R^2 est positive, l'équation (8) représente un cercle réel, et les racines réelles de l'équation (5) sont les abscisses des points de rencontre de ce cercle et de la parabole (6). Lorsque la valeur de R^2 est négative, l'équation (8) n'ayant pas de solutions réelles (n° 85), il en est de même du système des équations (6) et (7), ou du système équivalent des équations (5) et (6); les quatre racines de l'équation proposée sont imaginaires.

404—Considérons maintenant l'équation du troisième degré ramenée à la forme

$$x^3+px+q=0.$$

Si l'on multiplie par x, ce qui introduit la racine $x=0$, dont on ne tiendra pas compte, on obtient l'équation du quatrième degré $x^4+px^2+qx=0$, à laquelle ou appliquera la méthode précédente. La valeur de R^2 étant ici égale à a^2+b^2 est toujours positive. Le cercle et la parabole passent à l'origine des coordonnées; l'abscisse de ce point est la racine $x=0$, que l'on doit écarter.

La même parabole $x^2-my=0$ peut servir pour la résolution de toutes les équations du troisième ou du quatrième degré; le cercle seul change suivant les valeurs des coefficients de l'équation proposée. Cette méthode ne peut être employée avec avantage que lorsque l'on doit résoudre successivement un grand nombre d'équations; alors on trace avec beaucoup de soin une parabole ayant un paramètre arbitraire; et, dans chaque exemple particulier, il ne reste plus qu'à déterminer le cercle.

405 — Lorsque l'inconnue x est une ligne, et que l'unité n'a pas été spécifiée, l'équation $f(x) = 0$ est une équation homogène entre l'inconnue x et diverses lignes connues. Dans le cas où l'équation est du quatrième degré, si les coefficients p, q, r sont des fonctions rationnelles, ou des fonctions irrationnelles du second degré des longueurs données, en prenant pour le paramètre m de la parabole une longueur arbitraire, on pourra construire, avec la règle et le compas, les coordonnées du centre et le rayon du cercle.

Mais si l'équation est une équation numérique, c'est-à-dire si les coefficients sont des nombres donnés, on prendra pour m un nombre déterminé; on fera, par exemple, $m = 1$, et l'on construira la parabole et le cercle à l'aide d'une échelle arbitraire; l'abscisse de l'un des points de rencontre, évaluée à la même échelle, donnera la valeur du nombre inconnu x.

On sait que la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues x et y, ou la recherche des points d'intersection de deux courbes du second degré, se ramène à la résolution d'une équation du quatrième degré à une inconnue. Cette résolution pourra donc être effectuée à l'aide d'une parabole déterminée et d'un cercle. Cependant, si l'une des courbes du second degré est déjà tracée, on pourra l'employer avec le cercle.

406 — Exemple I. Mener une normale à une parabole $y^2 - 2px = 0$ par un point donné P dont les coordonnées sont x_1 et y_1. Les coordonnées x et y du pied de la normale sont déterminées par le système de deux équations

$$y^2 - 2px = 0, \quad xy - (x_1 - p)y - py_1 = 0.$$

Si l'on multiplie tous les termes de la dernière par y, et si l'on remplace y^2 par $2px$, on a une nouvelle parabole $x^2 - (x_1 - p)x - \frac{y_1 y}{2} = 0$; en ajoutant membre à membre les équations des deux paraboles, on obtient le cercle $x^2+y^2-(x_1+p)\,x-\frac{y_1y}{2}=0$. Les points où ce cercle coupe la parabole proposée sont les pieds des normales (nº 306).

407 — Exemple II. *Résoudre l'équation numérique* $x^3-2x-5=0$.

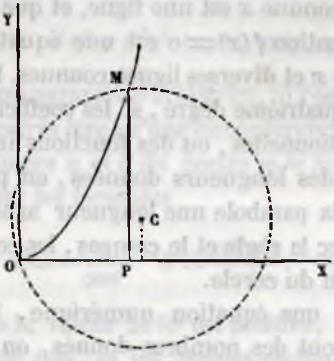


Fig. 262.

Au moyen d'une échelle bien faite construisons la parabole $x^2=y$; décrivons le cercle dont le centre C a pour coordonnées $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, et qui passe à l'origine; ce cercle coupe la parabole en un seul point M, donc l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, l'abscisse OP du point M. En mesurant cette longueur au moyen de l'échelle employée, on trouve $x=2{,}09$.

Exemple III. *Résoudre l'équation* $x^3-5x+1=0$. Décrivons le cercle dont le centre C a pour coordonnées $a=-\frac{1}{2}$, $b=3$, et qui passe par l'origine; ce cercle coupe la parabole, en trois points; on en conclut que l'équation a ses trois racines réelles; en mesurant les abscisses, on trouve que les deux racines positives sont 0, 20 et 2, 13 à un centième près.

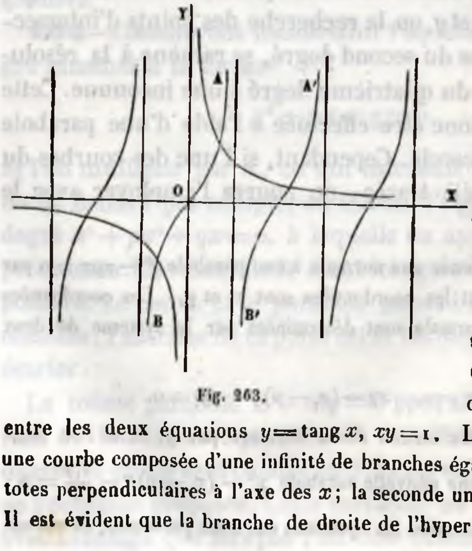


Fig. 263.

408 — Exemple IV. Considérons l'équation transcendante $x \tang x=1$. Cette équation résulte de l'élimination de y entre les deux équations $y=\tang x$, $xy=1$. La première représente une courbe composée d'une infinité de branches égales qui ont des asymptotes perpendiculaires à l'axe des x; la seconde une hyperbole équilatère. Il est évident que la branche de droite de l'hyperbole rencontre au moins une fois chacune des branches OA, B'A',... de la courbe transcendante; d'ailleurs, il n'y a sur chaque branche qu'un seul point de rencontre; car lorsque x varie, les ordonnées des deux courbes varient en sens contraires : si ces ordonnées sont égales pour une certaine valeur de x, elles sont nécessairement inégales pour toute valeur différente. Les racines de l'équation sont deux à deux égales et de signes contraires; il y a une première racine positive comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$, une seconde entre π et $\frac{3\pi}{2}$, une troisième entre 2π et $\frac{5\pi}{2}$, etc.,..; le nombre des racines est infini. En appelant x_n le $n^{ième}$ racine, la différence entre x_n et $(n-1)\pi$ est très-petite lorsque n est très-grand. La courbe donne, pour valeur de la première racine 0,86, à un centième près.

On pourrait aussi se servir des deux équations $y = \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $y = x$, et, en posant $\frac{\pi}{2} - x = x'$, $y = \text{tang}\, x'$, $y = \frac{\pi}{2} - x'$. L'hyperbole serait remplacée par une ligne droite.

409 — Remarques. Les procédés graphiques que nous venons d'indiquer ne donnent pas les valeurs des inconnues avec une bien grande précision; on ne doit pas espérer une approximation plus grande que un centième de la racine.

On se sert quelquefois de deux courbes tracées grossièrement pour déterminer le nombre des racines réelles d'une équation. Or, tant que l'on n'a pas étudié avec soin la forme des deux courbes, on ne peut déduire aucune conclusion rigoureuse de cette construction. En général, la discussion des courbes et la détermination de leurs points de rencontre présentent les mêmes difficultés que la question proposée.

FIN DE LA GÉOMÉTRIE PLANE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

LIVRE V

CHAPITRE I

Des coordonnées.

On détermine la position d'un point dans l'espace au moyen de *trois* quantités que l'on nomme les *coordonnées* du point.

COORDONNÉES RECTILIGNES.

410 — Soient XOY, YOZ, ZOX (fig. 264) trois plans fixes, qui se coupent deux à deux suivant les droites X'X, Y'Y, Z'Z ; trois plans mobiles MD, ME, MF, parallèles à ces plans fixes, déterminent par leur intersection un point M de l'espace ; la position de chaque plan mobile est donnée par sa distance au plan fixe auquel il est parallèle, distance comptée parallèlement à l'intersection des deux autres plans fixes. Les trois distances

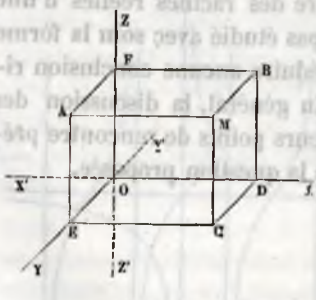


Fig. 264.

OD, OE, OF, qui déterminent la position des plans mobiles, distances affectées du signe + ou du signe —, suivant qu'elles sont portées dans les directions OX, OY, OZ, ou dans les directions opposées OX', OY', OZ', sont les trois coordonnées rectilignes du point M ; on les désigne ordinairement par les lettres x, y, z. Par leurs rencontres mutuelles, les trois plans fixes forment huit angles trièdres, et l'on obtient tous les points de l'espace en faisant varier x, y, z de $-\infty$ à $+\infty$.

Les plans mobiles forment avec les plans fixes un parallélipipède ayant pour arêtes des longueurs égales aux valeurs absolues des coordonnées du point M; les points A, B, C sont les projections du point M sur chacun des plans fixes, parallèlement à l'intersection des deux autres; l'un d'eux, A par exemple, a pour coordonnées, relativement aux axes OY, OZ, deux des coordonnées y et z du point M. Les points D, E, F sont les projections du point M sur chacun des trois axes OX, OY, OZ, parallèlement au plan des deux autres; de sorte que les lettres x, y, z désignent les projections du rayon OM (parcouru de O en M) sur les axes des coordonnées, pourvu que l'on regarde les projections comme positives lorsqu'elles sont comptées sur les directions OX, OY, OZ, comme négatives dans le cas contraire.

Ordinairement les trois plans fixes, et, par suite, les trois axes, sont rectangulaires deux à deux; alors le parallélipipède est rectangle, et les projections sont orthogonales.

COORDONNÉES POLAIRES.

Fig. 265.

411 — Soient encore trois axes rectangulaires OX, OY, OZ (fig. 265); la position du point M pourrait être déterminée par la longueur ρ du rayon vecteur OM, l'angle θ que fait ce rayon vecteur avec l'axe OZ, et enfin l'angle ψ du plan ZOM avec le plan fixe ZOX. Si ON est la projection de OM sur le plan XOY, l'angle XON mesure l'angle dièdre ψ; on le compte dans un sens convenu, par exemple, en tournant de OX vers OY.

REPRÉSENTATION DES SURFACES PAR DES ÉQUATIONS.

412 — Considérons une surface quelconque dans l'espace. Par un point O, menons trois axes fixes OX, OY, OZ (fig. 266);

dans le plan XOY prenons un point P arbitraire, et, par ce point, menons une parallèle PM à l'axe OZ jusqu'à sa rencontre avec la surface au point M ; la longueur de l'ordonnée PM est parfaitement déterminée. Quand le point P se déplace dans le plan XOY, l'ordonnée PM varie; mais puisque le point P se déplace d'une manière arbitraire dans le plan, ses coordonnées x et y sont deux variables indépendantes ; il en résulte que l'ordonnée z d'un point M de la surface est une fonction des deux autres coordonnées x et y considérées comme deux variables indépendantes. On conçoit que l'on puisse, de la définition géométrique de la surface, déduire une équation entre x, y, z, servant à définir la fonction z de x et de y. Cette équation s'appelle l'équation de la surface.

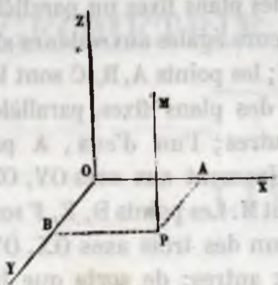


Fig. 266.

413 — Supposons réciproquement que l'on donne une équation $f(x, y, z) = 0$ entre trois variables; chaque système

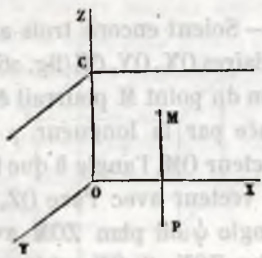


Fig. 267.

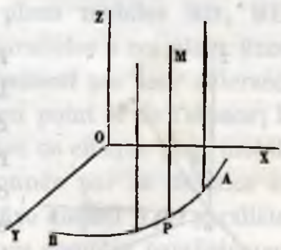


Fig. 268.

de valeurs réelles qui satisfont à cette équation détermine un point de l'espace; l'ensemble de toutes les solutions réelles constitue un système de points qui forme, en général, une surface. En effet, considérons d'abord le cas où l'équation, ne renfermant qu'une seule des coordonnées, z par exemple, est de la forme $z = c$. Puisque les coordonnées x et y sont arbitraires, par un point P quelconque du plan XOY on mènera une ordonnée constante PM (fig. 267); le lieu des points M est évidemment un plan parallèle au plan XOY. Supposons maintenant que l'équation renferme deux coordonnées, x et y par exemple. L'équation $f(x,y)=0$, dans le plan XOY, représente en général une ligne AB (fig. 268). Par un point quelconque de cette ligne, menons une parallèle PM à l'axe OZ; puisque l'ordonnée z, qui n'entre pas dans l'équation, est arbitraire, les coordonnées de tous les points de la droite PM satisfont à l'équation. Donc l'équation $f(x,y)=0$ représente dans l'espace un cylindre parallèle à l'axe OZ. Il peut arriver que l'équation représente dans le plan un ou plusieurs points isolés; dans ce cas, elle représentera dans l'espace une ou plusieurs droites.

Considérons enfin une équation $f(x, y, z)=0$ entre les trois coordonnées. A une distance arbitraire $OC=c$, menons un plan ACB parallèle au plan XOY (fig. 269); les coordonnées x et y de tous les points du lieu situés dans ce plan doivent satisfaire à l'équation $f(x,y,c)=0$; or, cette équation représente dans le plan ACB une ligne AB. Si l'on donne à z une valeur c' voisine de c, on aura dans le plan A′C′B′ une seconde ligne A′B′ qui différera très-peu de la précédente. En général, quand z varie d'une manière continue entre certaines limites, on a une série continue de lignes, lesquelles forment une surface.

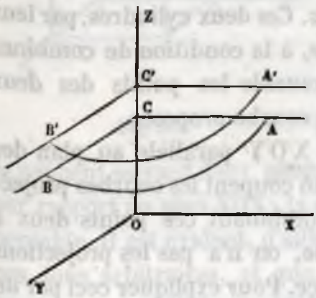


Fig. 269.

Par cette méthode, non-seulement on démontre l'existence de la surface, mais encore on se fait une idée assez exacte de sa forme, à l'aide d'une série de coupes parallèles que l'on représente par leurs projections sur l'un des plans des coordonnées.

REPRÉSENTATION DES LIGNES.

414 — Une ligne dans l'espace peut être regardée comme l'intersection de deux surfaces; on représentera donc cette ligne par un système de deux équations simultanées

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0.$$

Le système (1) peut être remplacé par une infinité d'autres équivalents, par exemple par le suivant

$$f = 0, \quad f - kf_1 = 0,$$

dans lequel k désigne une constante quelconque, c'est-à-dire que la surface $f - kf_1 = 0$ passe, quelle que soit k, par la ligne d'intersection des deux premières. Si, entre les deux équations (1), on élimine successivement x et y, on aura deux équations

$$(2) \qquad \varphi(x, z) = 0, \quad \psi(y, z) = 0$$

qui représentent les deux cylindres projetants de la ligne sur le plan des xz, et sur celui des yz. Ces deux cylindres, par leur intersection, déterminent la ligne, à la condition de combiner entre eux d'une manière convenable les points des deux courbes planes, projections de la courbe proposée.

En effet, si l'on mène un plan X′O′Y′ parallèle au plan des xy, les traces O′X′, O′Y′ de ce plan coupent les courbes projections en plusieurs points; en combinant ces points deux à deux d'une manière quelconque, on n'a pas les projections d'un point de la courbe de l'espace. Pour expliquer ceci par un exemple bien simple, considérons une ellipse dans l'espace; ses projections sur les deux plans XOZ, YOZ sont aussi des ellipses; les droites O′X′, O′Y′ rencontrent chacune d'elles en deux points, ce qui donne quatre combinaisons, dont deux seulement sont admissibles, parce que le plan X′O′Y′ ne coupe qu'en deux points l'ellipse proposée.

On se rend aisément compte de ce fait général. Lorsqu'on élimine y entre les deux équations (1), on obtient un système $\varphi(x, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$, équivalent au système proposé; de même l'élimination de y entre les équations donne un nouveau système $\psi(y, z) = 0$, $F_1(x, y, z) = 0$ équivalent au système proposé; il n'en résulte pas en général que le système des équations (2) soit équivalent au système des équations (1).

La représentation des figures dans l'espace par des symboles algébriques permet d'étendre aux figures à trois dimensions les méthodes analytiques employées dans l'étude des figures planes.

DIRECTION D'UNE DROITE.

415 — Pour déterminer dans l'espace une direction OI (fig. 270), que l'on peut supposer appartenir à une droite passant à l'origine, on donne les angles α, β, γ de cette direction avec les trois directions OX, OY, OZ des coordonnées positives. Deux de ces angles ne suffisent pas; car si l'on décrit autour de OX et de OY deux demi-cônes dont les angles au sommet soient respectivement α et β, ces deux cônes se coupent suivant deux génératrices placées symétriquement par rapport au plan XOY; la connaissance de γ est donc indispensable. Il est évident, d'ailleurs, que ces trois angles ne sont pas tous arbitraires, et que, lorsque deux d'entre eux sont connus, le troisième ne peut avoir au plus que deux valeurs distinctes. Au lieu des angles, on peut prendre leurs cosinus, puisque de o à π il n'y a qu'un seul angle ayant un cosinus donné. Les sinus, au contraire, laisseraient de l'ambiguité.

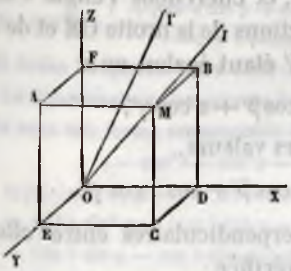


Fig. 270.

416 — Considérons d'abord le cas où les coordonnées sont rectangulaires. Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de la droite OI, et appelons l la distance OM. Les coordonnées du point M sont les arêtes OD, OE, OF du parallélipipède rectangle dont OM est la diagonale, affectées de signes convenables; ce sont aussi les projections orthogonales de la diagonale OM sur les axes; on a donc

$$x = l\cos\alpha,\quad y = l\cos\beta,\quad z = l\cos\gamma.$$

Mais on sait que le carré de la diagonale d'un parallélipipède rectangle est égal à la somme des carrés des trois arêtes, ce qui donne $x^2+y^2+z^2=l^2$; remplaçant x, y, z par leurs valeurs, et supprimant le facteur l, on obtient la relation

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \tag{1}$$

qui existe entre les cosinus des angles formés par une même direction avec les axes rectangulaires.

417 — Appelons α', β', γ' les angles que fait une seconde direction OI′ avec les mêmes axes, et cherchons l'angle V des deux directions OI, OI′. Les projections de la droite OM et de la ligne brisée ODCM sur la droite OI′ étant égales, on a

$$l\cos V=x\cos\alpha'+y\cos\beta'+z\cos\gamma',$$

ou, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs,

$$\cos V=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'. \tag{2}$$

Deux directions OI, OI′ sont perpendiculaires entre elles, lorsque la condition suivante est vérifiée

$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=0. \tag{3}$$

418 — Supposons maintenant les coordonnées obliques et désignons par λ, μ, ν, les trois angles YOZ, ZOX, XOY, que font les axes deux à deux. En projetant orthogonalement sur chacun des trois axes la droite OM et la ligne brisée ODCM, on a

$$\left\{\begin{aligned} l\cos\alpha &= x + y\cos\nu + z\cos\mu,\\ l\cos\beta &= x\cos\nu + y + z\cos\lambda,\\ l\cos\gamma &= x\cos\mu + y\cos\lambda + z;\end{aligned}\right. \tag{4}$$

en projetant ces mêmes lignes sur la droite OI, on a

$$l=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma. \tag{5}$$

Si, des équations (4), on tire les valeurs de x, y, z,

$$x=\frac{\cos\alpha(1-\cos^2\lambda)+\cos\beta(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)+\cos\gamma(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)}{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}\,l, \tag{6}$$

et qu'on les substitue dans l'équation (5), on obtient la relation

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha\sin^2\lambda+\cos^2\beta\sin^2\mu+\cos^2\gamma\sin^2\nu+2\cos\alpha\cos\beta(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\\ &+2\cos\beta\cos\gamma(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)+2\cos\gamma\cos\alpha(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\\ &=1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,\end{aligned} \tag{7}$$

entre les trois angles formés par une direction quelconque avec les axes obliques.

Si, dans l'équation (5), on remplace $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par leurs valeurs tirées des équations (4), on a la formule

$$(8)\qquad l^2 = x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu,$$

qui donne la distance OM.

En projetant sur la droite OI' la droite OM et la ligne brisée ODCM, on a, comme précédemment,

$$l\cos V = x\cos\alpha'+y\cos\beta'+z\cos\gamma';$$

en remplaçant x, y, z par leurs valeurs (6) on obtient la formule

$$(9)\qquad \cos V = \frac{\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha\cos\alpha'\sin^2\lambda+\cos\beta\cos\beta'\sin^2\mu+\cos\gamma\cos\gamma'\sin^2\nu\\ +(\cos\alpha\cos\beta'+\cos\beta\cos\alpha')(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)+\ldots\end{array}\right\}}{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu},$$

qui donne l'angle des deux directions OI et OI'.

Le dénominateur commun ou le déterminant des formules (6) peut être mis sous une forme remarquable qu'il est bon de connaître; on a

$$\begin{aligned}
&1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu\\
&=(1-\cos^2\lambda)(1-\cos^2\mu)-\cos^2\lambda\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu\\
&=\sin^2\lambda\sin^2\mu-(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)^2\\
&=(\sin\lambda\sin\mu-\cos\lambda\cos\mu+\cos\nu)(\sin\lambda\sin\mu+\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\\
&=[\cos\nu-\cos(\lambda+\mu)][\cos(\lambda-\mu)-\cos\nu]\\
&=4\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}.
\end{aligned}$$

CHAPITRE II

Transformation des coordonnées.

DÉPLACEMENT DE L'ORIGINE.

419 — On veut remplacer les trois axes OX, OY, OZ par trois autres axes O'X', O'Y', O'Z', respectivement parallèles aux premiers et dirigés dans le même sens (fig. 271). La position des nouveaux axes sera déterminée par les coordonnées a, b, c de la nouvelle origine O', relativement aux anciens axes. Appelons x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de l'espace par rapport aux anciens axes,

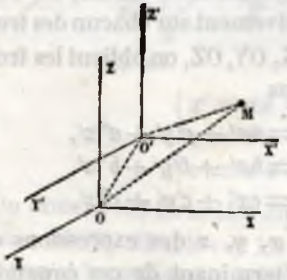


Fig. 271.

x', y', z' les coordonnées du même point par rapport aux nouveaux axes; en projetant successivement sur chacun des trois axes primitifs, parallèlement au plan des deux autres, la droite OM et la ligne brisée OO'M, on a les relations

$$(1) \qquad x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

CHANGEMENT DE LA DIRECTION DES AXES.

420 — Considérons maintenant le cas où l'on change la direction des axes, l'origine demeurant la même. Désignons par a, b, c les cosinus des angles que fait l'axe OX' avec les trois axes OX, OY, OZ, par a', b', c' et a'', b'', c'' les quantités analogues pour OY' et OZ', et, enfin, par λ, μ, ν les angles YOZ, ZOX, XOY (fig. 272).

Soit M un point quelconque de l'espace; par le point M menons une parallèle MC à l'axe OZ, et par le point C, où cette droite perce le plan XOY, une parallèle CD à l'axe OY; les trois longueurs OD, DC, CM, prises avec les signes convenables, sont les coordonnées x, y, z du point M par rapport aux anciens axes. Par le point M menons une parallèle MC' à l'axe OZ', et par le point C' où elle perce le plan X'OY', une parallèle C'D' à l'axe OY'; les trois longueurs OD', D'C', C'M, prises avec les signes convenables, sont les coordonnées x', y', z' du point M, par rapport aux nouveaux axes. En projetant les deux lignes brisées ODCM, OD'C'M, successivement sur chacun des trois axes OX, OY, OZ, on obtient les trois relations

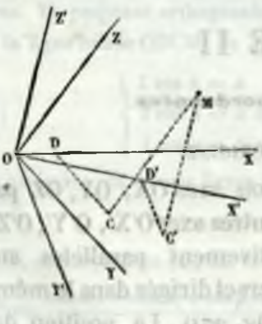


Fig. 272.

$$(2) \qquad \begin{cases} x + y\cos\nu + z\cos\mu = ax' + a'y' + a''z', \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda = bx' + b'y' + b''z', \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z = cx' + c'y' + c''z', \end{cases}$$

desquelles on peut déduire pour x, y, z des expressions du premier degré en x', y', z. Le déterminant de ces équations est le même que celui des équations du n° 418.

Il faut se rappeler que a, b, c ne sont pas arbitraires, mais liées par une équation de condition ; il en est de même de a', b', c' et de a'', b'', c''. Il y aurait entre ces mêmes quantités trois nouvelles relations, si l'on voulait que les nouveaux axes fussent rectangulaires, ou, plus généralement, qu'ils fissent deux à deux des angles donnés.

421 — Quand les axes primitifs sont rectangulaires, on a

$$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

les équations (2) se réduisent à

$$(3)\qquad \begin{cases} x = ax' + a'y' + a''z', \\ y = bx' + b'y' + b''z', \\ z = cx' + c'y' + c''z'. \end{cases}$$

Alors les relations entre les cosinus sont

$$(4)\qquad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1. \end{cases}$$

Si les nouveaux axes sont aussi rectangulaires (fig. 273), on a en outre les relations

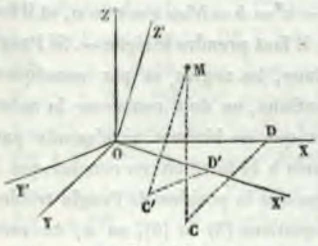


Fig. 273.

$$(5)\qquad \begin{cases} a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ a''a + b''b + c''c = 0, \\ aa' + bb' + cc' = 0, \end{cases}$$

Si l'on multiplie les deux membres des équations (3) par a, b, c, puis par a', b', c', et a'', b'', c'', et qu'on ajoute, il vient, en ayant égard aux relations (4) et (5),

$$(6)\qquad \begin{cases} x' = ax + by + cz, \\ y' = a'x + b'y + c'z, \\ z' = a''x + b''x + c''z. \end{cases}$$

On obtient ces formules directement en projetant les lignes brisées ODCM, OD'C'M sur les axes OX', OY', OZ'.

Puisque les nouveaux axes sont rectangulaires, les quantités (a, a', a''), (b, b', b''), (c, c', c''), qui désignent les cosinus des angles des directions OX, OY, OZ avec les nouveaux axes, doivent satisfaire aux relations

$$(7)\quad \begin{cases} a^2+a'^2+a''^2=1, \\ b^2+b'^2+b''^2=1, \\ c^2+c'^2+c''^2=1, \end{cases} \qquad (8)\quad \begin{cases} bc+b'c'+b''c''=0, \\ ca+c'a'+c''a''=0, \\ ab+a'b'+a''b''=0, \end{cases}$$

analogues aux relations (4) et (5).

422 — Des relations précédentes entre les neuf cosinus, on en déduit un grand nombre d'autres parmi lesquelles nous citerons les suivantes, qui sont particulièrement utiles. Les deux premières des équations (5) déterminent les rapports des quantités a'', b'', c''; on en déduit

$$\frac{a''}{bc'-cb'}=\frac{b''}{ca'-ac'}=\frac{c''}{ab'-ba'}=\pm\frac{\sqrt{a''^2+b''^2+c''^2}}{\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2}}.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} &(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2 \\ &=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2=1. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$(9)\qquad \frac{a''}{bc'-cb'}=\frac{b''}{ca'-ac'}=\frac{c''}{ab'-ba'}=\pm 1.$$

On prendra l'un ou l'autre signe suivant la disposition de l'angle trièdre OX'Y'Z'. Quand on fait coïncider OX' avec OX, OY' avec OY, OZ' prend la direction OZ ou la direction opposée. Pour cette position particulière, on a, dans le premier cas, $a=b'=c''=1$, $a'=a''=b=b''=c=c'=0$, et il faut prendre le signe $+$; dans le second cas, il faut prendre le signe $-$. Si l'angle trièdre se déplace d'une manière continue, les angles, et par conséquent leurs cosinus, variant d'une manière continue, on doit conserver le même signe devant chacun des binômes, tant que ce binôme ne s'annule pas; les trois binômes ne pouvant devenir nuls à la fois, on en conclut que le même signe doit être conservé, quelle que soit la position de l'angle trièdre.

Si l'on forme le déterminant des équations (3) ou (6), on a, en vertu des relations (9),

$$\begin{aligned} &ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'' \\ &=(bc'-cb')a''+(ca'-ac')b''+(ab'-ba')c''=\pm 1. \end{aligned}$$

FORMULES D'EULER.

423 — Les formules précédentes, pour passer d'un système rectangulaire à un autre également rectangulaire, offrent l'avantage d'être symétriques par rapport aux angles; mais, quoique les angles soient au nombre de neuf, il n'y en a réellement que trois qui soient arbitraires; c'est pourquoi il ne faut jamais perdre de vue les relations qui les lient. Cette dépendance des neuf cosinus est, dans certains cas, un obstacle pour constater l'identité de deux expressions. On a donc cherché des formules dans lesquelles n'entrent que trois constantes; le choix de celles-ci était naturellement indiqué dans plusieurs questions de mécanique et d'astronomie, où l'on emploie de préférence les nouvelles formules.

On peut déterminer la position des nouveaux axes par l'angle ψ que fait avec OX la trace OA du plan X'OY' sur le plan XOY, l'inclinaison θ du plan X'OY' sur le plan XOY, inclinaison mesurée par l'angle ZOZ', enfin l'angle φ de l'axe OX' avec la trace OA (fig. 274).

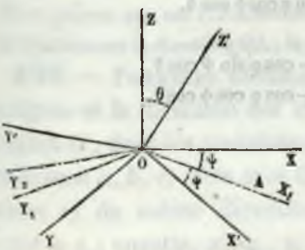


Fig. 274.

Or, il est possible d'amener le premier système sur le second, par trois rotations successives. Faisons tourner d'abord les axes primitifs de l'angle ψ autour de OZ; tandis que l'axe OZ reste immobile, les axes OX et OY tournent dans leur plan de l'angle ψ; l'axe OX vient donc occuper la position OA ou OX_1, et OY une certaine position OY_1. Remarquons que l'axe OZ', perpendiculaire au plan X'OY', et, par suite, à la trace OA, est contenu dans le plan Y_1OZ perpendiculaire à OA. Actuellement, faisons tourner l'angle trièdre OX_1Y_1Z de l'angle θ autour de OA; tandis que l'axe OX_1 reste immobile, les deux axes OY_1 et OZ tournent dans leur plan de l'angle θ; donc OZ vient occuper la position OZ', et OY_1 une certaine position OY_2 comprise dans le plan X'OY'. Enfin, faisons tourner l'angle trièdre OX_1Y_2Z' de l'angle φ autour de OZ'; puisque les deux axes OX_1, OY_2 tournent dans leur plan de l'angle φ, il en résulte que OX_1 vient se placer sur OX', et OY_2 sur OY'. Après ces trois rotations successives, les axes primitifs coïncident avec les nouveaux axes.

Nous avons considéré quatre systèmes d'axes, savoir: OXYZ, OX_1Y_1Z, OX_1Y_2Z', OX'Y'Z'. Deux systèmes consécutifs ayant un axe commun, on passera de l'un à l'autre par les formules de transformation employées en Géométrie plane (nº 50). On a ainsi, par des transformations successives,

$$x = x_1\cos\psi - y_1\sin\psi,\quad y_1 = y_2\cos\theta - z'\sin\theta,\quad x_1 = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,$$
$$y = x_1\sin\psi + y_1\cos\psi,\quad z = y_2\sin\theta + z'\cos\theta,\quad y_2 = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

L'élimination des quantités auxiliaires x_1, y_1, y_2 donne

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
x&=x'(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta)+y'(-\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta)\\
&\quad+z'\sin\psi\sin\theta,\\
y&=x'(\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta)+y'(-\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta)\\
&\quad+z'(-\cos\psi\sin\theta),\\
z&=x'\sin\varphi\sin\theta+y'\cos\varphi\sin\theta+z'\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les formules connues sous le nom de formules d'EULER.

La comparaison de ces formules, avec les formules (3) du n° 421, conduit aux relations suivantes :

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
a&=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
b&=\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
c&=\sin\varphi\sin\theta;\\
a'&=-\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
b'&=-\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
c'&=\cos\varphi\sin\theta;\\
a''&=\sin\psi\sin\theta,\\
b''&=-\cos\psi\sin\theta,\\
c''&=\cos\theta;
\end{aligned}\right.$$

d'où $\qquad \tang\varphi=\frac{c}{c'}\qquad \tang\psi=-\frac{a''}{b''}.$

424 — REMARQUE. Lorsqu'un corps tourne autour d'un axe fixe, la rotation peut s'effectuer dans deux sens différents qu'il importe de distinguer. Considérons, par exemple, une rotation autour de l'axe OZ ; en vertu de cette rotation un rayon OA, perpendiculaire à OZ et mobile autour du point O, tournera dans le plan XOY (fig. 275). Imaginons qu'un observateur soit placé sur l'axe OZ, les pieds en O, la tête en Z ; cet observateur verra le rayon mobile OA tourner, soit de gauche à droite, soit de droite à gauche, en passant devant lui. Dans la figure, si OA tourne de OX vers OY dans le sens indiqué par la flèche, la rotation s'effectue de gauche à droite.

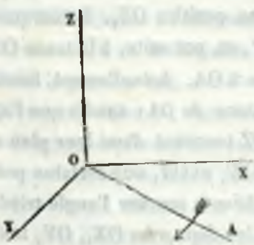


Fig. 275.

Deux systèmes d'axes rectangulaires OXYZ, OX'Y'Z, ne sont pas toujours susceptibles de coïncider. Pour le reconnaître, imaginons deux observateurs placés l'un sur OZ, l'autre sur OZ' ; le premier observant la rotation de OX vers OY, le second celle de OX' vers OY' ; si les deux rotations s'effectuent dans le même sens, par exemple de gauche à droite, comme cela a lieu dans la fig. 273, les deux systèmes d'axes peuvent coïncider. En effet, si l'on place OZ sur OZ', et si l'on fait tourner le second angle trièdre autour de l'axe commun, de manière à amener OX sur OX', nécessairement OY coïncidera avec OY'; car OY et OY' forment tous deux un angle droit avec OX ou OX' dans le même sens. Mais si les deux rotations étaient de sens contraires, après avoir fait coïncider OZ avec OZ', OX avec OX', on verrait OY se placer, non plus sur OY', mais sur son prolongement.

Dans les formules d'Euler, on suppose que les deux systèmes d'axes rectangulaires offrent la même disposition, c'est-à-dire sont susceptibles de coïncider. On a amené le système primitif sur le système nouveau par trois rotations effectuées dans le même sens. L'angle ψ de la rotation autour de OZ varie de 0 à 2π; l'angle θ de la rotation autour de OA est compris entre 0 et π, pourvu que sur l'intersection des plans XOY et X'OY' on choisisse convenablement la direction OA; la rotation φ autour de OZ' varie de 0 à 2π.

425 — Formules générales. Lorsqu'on change à la fois l'origine et la direction des axes, en menant par la nouvelle origine O', dont les coordonnées, relativement à l'ancien système sont a, b, c, trois axes OX_1, OY_1, OZ_1, parallèles aux premiers et de même direction, on a $x=a+x_1$, $y=b+y_1$, $z=c+z_1$; ensuite, x_1, y_1, z_1 s'expriment en x', y', z' par l'un des groupes d'équations écrites précédemment; il suffit donc, pour avoir les formules générales, de remplacer dans ces équations x, y, z respectivement par $x-a$, $y-b$, $z-c$.

CLASSIFICATION DES SURFACES.

426 — On distingue les surfaces, comme les lignes planes, en surfaces algébriques et surfaces transcendantes, suivant que leurs équations sont elles-mêmes algébriques ou transcendantes. Quand l'équation est algébrique, elle peut toujours se ramener à la forme entière, et une transformation d'axes rectilignes ne change pas son degré. Le nombre qui exprime ce degré sert à classer les surfaces en ordres; ainsi, on dit qu'une surface est du premier, du second, du troisième ordre, etc., lorsque son équation est du premier, du second, du troisième degré, etc.

Pour que l'équation $f(x, y, z)=0$, algébrique et entière du degré m, représente réellement une surface de l'ordre m, il faut que son premier membre ne puisse pas se décomposer en un produit de deux fonctions entières, ou qu'elle soit irréductible. Deux équations irréductibles distinctes représentent deux surfaces qui peuvent avoir une ou plusieurs lignes communes, mais ces surfaces n'ont jamais d'éléments superficiels communs; car pour avoir des solutions communes aux deux équations, on ne peut pas prendre arbitrairement, même entre des limites très-resserrées, deux des variables.

Un plan coupe une surface algébrique de l'ordre m suivant une ligne algébrique dont l'ordre ne peut dépasser m; en effet, si l'on rapporte cette surface à un système de trois plans coordonnés, dont fasse partie celui que l'on considère, on obtient l'équation de la ligne d'intersection, par rapport à deux des axes coordonnées, en remplaçant dans l'équation de la surface l'une des coordonnées par zéro; le polynôme à deux variables qui en résulte ne peut évidemment être d'un degré supérieur à m. Une ligne droite rencontre une surface de l'ordre m en m points au plus, ou bien elle est située tout entière sur la surface.

Une surface du premier ordre, étant coupée par un plan quelconque suivant une ligne droite, est un plan.

Deux surfaces algébriques, dont les degrés sont m et m', se coupent suivant une courbe gauche qui est rencontrée par un plan en mm' points; car ce plan coupe les deux surfaces suivant deux lignes planes d'ordres m et m', qui ont, par conséquent, mm' points communs. On dit que la courbe gauche est de l'ordre mm'.

SECTION D'UNE SURFACE PAR UN PLAN.

427 — Supposons d'abord que le plan passe par l'origine; on déterminera sa position par l'angle ψ que fait avec OX sa trace OX′ sur le plan XOY, et par l'angle θ que fait avec OZ la normale OZ′ à ce plan (fig. 276). Par le point O menons dans le plan une droite OY′ perpendiculaire à OX′; nous rapporterons la courbe d'intersection aux deux axes rectangu-

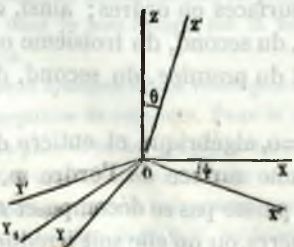


Fig. 276.

laires OX′ et OY′ situés dans son plan. Supposons d'abord que l'on fasse tourner les axes primitifs autour de OZ d'un angle ψ pour amener OX sur OX′ ; OY prendra dans le plan XOY une position OY_1 perpendiculaire à OX′ ; la coordonnée z ne change pas et l'on a

$$x = x'\cos\psi - y_1\sin\psi, \quad y = x'\sin\psi + y_1\cos\psi.$$

Les quatre droites OY_1, OY′, OZ, OZ′, perpendiculaires à OX′, sont dans un même plan perpendiculaire à cette droite ; faisons tourner le second système d'axes autour de OX′ de l'angle θ pour amener OY_1 sur OY′, et par suite OZ sur OZ′ ; la coordonnée x' ne change pas, et l'on a

$$y_1 = y'\cos\theta - z'\sin\theta, \quad z = y'\sin\theta + z'\cos\theta.$$

Si l'on considère un point situé dans le plan X′OY′, la coordonnée z' étant nulle, les dernières formules se réduisent à $y_1 = y'\cos\theta$, $z = y'\sin\theta$, et l'on a ainsi

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\theta, \\ y = x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\theta, \\ z = y'\sin\theta. \end{array} \right.$$

On peut déduire ces formules de celles d'Euler en y faisant $\varphi = 0$ et $z' = 0$. Si le plan sécant défini de la même manière quant à sa direction, au lieu d'être mené par l'origine, passait par un point ayant pour coordonnées $a, b, c,$ dans les formules précédentes on mettrait $x - a$, $y - b$, $z - c$ à la place de x, y, z.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTILIGNES EN COORDONNÉES POLAIRES.

428 — Le système polaire défini au n° 411 étant assez fréquemment employé, il est bon d'indiquer comment on passe du système rectiligne rectangulaire au système polaire, et réciproquement. Considérons le cas où l'axe fixe est OZ, le plan XOZ le plan fixe à partir duquel se compte l'angle ψ (fig. 277). La projection de OM sur OZ est $\rho\cos\theta$, la projection OP de la même ligne sur le plan XOY est $\rho\sin\theta$; enfin les projections de OP sur les axes OX et OY sont $\rho\sin\theta\cos\psi$, $\rho\sin\theta\sin\psi$. Si donc on projette sur chacun des trois axes la droite OM et la ligne brisée OPM, on obtient les relations

$$(13)\qquad x=\rho\cos\psi\sin\theta,\quad y=\rho\sin\psi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\theta.$$

On en déduit les formules inverses

$$(14)\qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \operatorname{tang}\psi=\frac{y}{x},\quad \cos\theta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

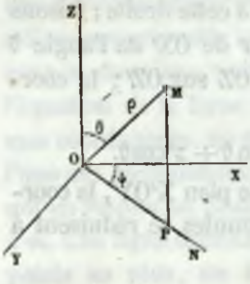


Fig. 277.

Dans le système polaire, une direction OM est complétement déterminée par les deux angles θ et ψ; on s'en sert fréquemment à ce point de vue. En astronomie, si la droite OZ est la verticale d'un lieu, le plan ZOX le plan méridien du lieu, et que le rayon OM soit le rayon visuel d'un astre, l'angle θ sera la *distance zénithale* de cet astre et l'angle ψ son *azimut*. En géographie, on prend pour OZ la ligne des pôles, alors θ est le complément de la *latitude* et ψ la *longitude*.

DISTANCE DE DEUX POINTS.

429 — Nous avons déjà trouvé la distance de l'origine à un point en coordonnées rectangulaires ou obliques. Soient (x', y', z'), (x'', y'', z'') les coordonnées de deux points M′ et M″, l la distance M′M″ de ces deux points. Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes, en M′. Si les axes sont rectangulaires, on a (n° 416)

$$l=\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}.$$

Si les axes sont obliques, on a (n° 418)

$$l=\sqrt{\begin{matrix}(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2+2(y''-y')(z''-z')\cos\lambda\\ +2(z''-z')(x''-x')\cos\mu+2(x''-x')(y''-y')\cos\nu.\end{matrix}}$$

CHAPITRE III

Du plan et de la ligne droite.

DU PLAN.

CONSTRUCTION DE L'ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ.

430 — L'équation générale du premier degré entre les variables x, y, z est

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1}$$

Nous avons vu (nº 426) que cette équation représente un plan; mais il est bon de démontrer directement cette proposition. L'équation renferme trois paramètres arbitraires qui sont les rapports de trois des quantités A, B, C, D à la quatrième. D'abord, si deux des coefficients A, B, C sont nuls, l'équation se réduit à la forme

$$Cz + D = 0, \quad \text{ou} \quad z = -\frac{D}{C};$$

elle représente un plan qui est parallèle au plan XOY, et qui coupe l'axe des z à une distance $-\frac{D}{C}$ de l'origine (nº 413). Si un seul des coefficients des variables, par exemple C, est nul, on a l'équation

$$Ax + By + D = 0,$$

qui représente, dans le plan XOY, une droite, et dans l'espace un plan parallèle à OZ et mené par cette droite.

Supposons, enfin, qu'aucun des coefficients des variables ne soit nul. On obtient les traces de la surface sur les trois plans coordonnés XOY, YOZ, ZOX, en faisant dans l'équation proposée $z = 0$, ou $x = 0$, ou $y = 0$, ce qui donne trois droites PQ, QR, RP (fig. 278), ayant pour équations

$$Ax + By + D = 0, \quad By + Cz + D = 0, \quad Ax + Cz + D = 0.$$

Coupons les surfaces par un plan $z=c$, parallèle au plan XOY; la projection de l'intersection sur le plan XOY a pour équation

$$Ax+By+Cc+D=0;$$

c'est une droite G'H' parallèle à PQ. L'intersection elle-même, étant la ligne suivant laquelle le plan $z=c$, parallèle à XOY, rencontre le plan projetant mené par G'H', est une droite GH parallèle à G'H', et, par conséquent, parallèle à PQ. D'ailleurs, la droite GH rencontre la droite PR au point G. On peut donc regarder la surface comme décrite par une droite GH, qui se meut parallèlement à la droite PQ, en s'appuyant constamment sur une autre droite PR; donc la surface est un plan.

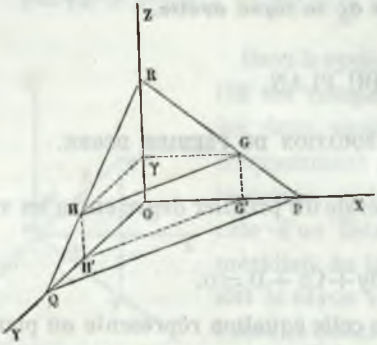


Fig. 278.

431 — Réciproquement, tout plan est représenté par une équation du premier degré entre les variables x, y, z. Car lorsque le plan est parallèle à l'un des plans coordonnés, XOY par exemple, si l'on appelle c la coordonnée z du point où il rencontre l'axe OZ, son équation est $z=c$. En second lieu, si le plan est seulement parallèle à l'un des axes, OZ par exemple, sa trace sur le plan XOY a une équation de la forme $Ax+By+D=0$; celle-ci représente, dans l'espace, le plan donné.

Enfin, supposons que le plan ne soit parallèle à aucun des axes; soient

$$z=ax+\gamma, \quad z=by+\gamma$$

les équations de ses traces PR et QR sur les plans XOZ et YOZ. On peut disposer des coefficients de l'équation

$$(1) \qquad Ax+By+Cz+D=0,$$

de manière que le plan qu'elle représente coïncide avec le plan proposé. En effet, les traces du plan représenté par l'équation (1) sur les plans XOZ et YOZ ont pour équations

$$z=-\frac{A}{C}x-\frac{D}{C},\quad z=-\frac{B}{C}y-\frac{D}{C};$$

elles coïncideront avec les traces PR, QR du plan proposé, si l'on a

$$\frac{A}{C}=-a,\quad \frac{B}{C}=-b,\quad \frac{D}{C}=-\gamma,$$

ou

$$A=-Ca,\quad B=-Cb,\quad D=-C\gamma.$$

L'équation (1), dans laquelle on substitue les valeurs précédentes, devient, après la suppression du facteur C,

$$z-ax-by-\gamma=0.$$

CONDITIONS POUR QUE LES DEUX PLANS SOIENT PARALLÈLES.

432 — Soient $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$ les équations de deux plans. Pour que ces plans soient parallèles, il est nécessaire et il suffit que leurs traces sur deux des plans coordonnés soient respectivement parallèles. Les traces sur le plan XOZ ont pour équations

$$Ax+Cz+D=0,\quad A'x+C'z+D'=0;$$

ces deux droites seront parallèles, si elles ont le même coefficient angulaire, ce qui donne la condition $-\frac{C}{A}=-\frac{C'}{A'}$, ou $\frac{A}{A'}=\frac{C}{C'}$. De même les traces sur le plan YOZ seront parallèles, si l'on a $\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$. Ainsi, pour que les deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que l'on ait

$$(2)\qquad \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'},$$

c'est-à-dire que les coefficients des variables soient proportionnels.

ÉQUATION GÉNÉRALE DES PLANS QUI PASSENT PAR UN POINT DONNÉ.

433 — L'équation générale du premier degré renfermant trois paramètres arbitraires, il faut trois conditions pour déterminer un plan.

Cherchons d'abord l'équation générale des plans qui passent par un point donné M' ayant pour coordonnées x', y', z'. Soit

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation d'un plan quelconque. Pour que ce plan passe par le point M', il faut que les coordonnées de ce point vérifient l'équation du plan, ce qui donne l'équation de condition

$$(3) \qquad Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

qui déterminera l'un des coefficients, par exemple le coefficient D. En remplaçant D par sa valeur dans l'équation (1), on obtient l'équation

$$(4) \qquad A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0,$$

qui renferme deux paramètres arbitraires, les rapports de deux des trois coefficients A, B, C au troisième; c'est l'équation générale des plans passant par le point M'.

Si l'on voulait mener par un point un plan parallèle à un plan donné, l'équation du plan demandé étant de la forme (4), il suffirait de prendre les coefficients A, B, C proportionnels ou plus simplement égaux aux coefficients de x, y, z dans l'équation du plan donné.

PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS DONNÉS.

434 — Pour qu'un plan $Ax + By + Cz + D = 0$ passe par trois points donnés (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), il faut que les trois équations de condition

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0 \end{aligned}$$

soient vérifiées. De ces équations du premier degré, on déduira les rapports $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ de trois coefficients au quatrième.

Lorsque les trois points donnés sont situés sur les axes des coordonnées, l'équation du plan prend une forme très-simple.

Appelons a, b, c les coordonnées des points P, Q, R, où le plan coupe les axes. On obtient le point P en faisant, dans l'équation du plan, $y=0$ et $z=0$, ce qui donne $a=-\frac{D}{A}$; on a de même $b=-\frac{D}{B}$, et $c=-\frac{D}{C}$. Si l'on remplace les rapports $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ par leurs valeurs $-\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{b}$, $-\frac{1}{c}$, tirées des relations précédentes, l'équation du plan se met sous la forme

$$(5) \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

INTERSECTION DE TROIS PLANS.

435 — La recherche du point d'intersection de trois plans revient à la résolution de trois équations du premier degré

$$\begin{aligned} A\,x+B\,y+C\,z+D &= 0,\\ A'x+B'y+C'z+D' &= 0,\\ A''x+B''y+C''z+D'' &= 0, \end{aligned}$$

à trois inconnues x, y, z. Si les trois plans se coupent en un seul point, les trois équations admettent une solution finie et une seule. Si les trois plans n'ont pas de point commun, ce qui arrive quand les plans se coupent deux à deux suivant des droites parallèles entre elles, ou quand deux des plans sont parallèles, les trois équations n'ont pas de solution. Si les trois plans passent par une même droite, ou se confondent, il y a une infinité de solutions; dans le premier cas, on peut prendre à volonté l'une des variables; dans le second cas, deux des variables.

ANGLES DE LA NORMALE AU PLAN AVEC LES AXES.

436 — Jusqu'à présent nous n'avons fait aucune hypothèse sur les coordonnées; dans ce qui suit, nous supposerons les coordonnées rectangulaires. Soit $Ax+By+Cz+D=0$ l'équation d'un plan; les coordonnées a, b, c des points P, Q, R, où ce plan coupe les axes, sont données par les formules

$$a=-\frac{D}{A},\quad b=-\frac{D}{B},\quad c=-\frac{D}{C}.$$

De l'origine O abaissons une perpendiculaire OL sur le plan (fig. 279), et joignons le pied L de la perpendiculaire aux points P, Q, R, de manière à former trois triangles rectangles OLP, OLQ, OLR. La distance OL, que nous désignerons par l, est la projection sur la droite OL des droites OP, OQ, OR; si l'on désigne par α, β, γ les angles que fait la droite OL avec les axes, on a $l = a\cos\alpha = b\cos\beta = c\cos\gamma$; et, en remplaçant a, b, c par leurs valeurs,

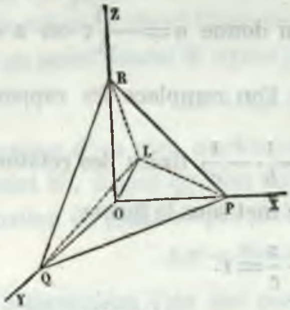


Fig. 279.

$$(6) \qquad -\frac{l}{D} = \frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C}.$$

Chacun de ces rapports est égal au nouveau rapport

$$\pm\frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

en vertu de la relation $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. On en déduit

$$(7) \qquad \frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = -\frac{l}{D} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

on prendra le signe de façon que la valeur de l soit positive. Ces formules déterminent les angles que fait la normale au plan avec les axes des coordonnées, et, par conséquent, les angles que fait le plan avec les plans des coordonnées.

ANGLE DE DEUX PLANS.

437 — Soient $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ les équations des deux plans. L'angle cherché est égal à l'angle des normales menées de l'origine aux deux plans donnés. Désignons par α, β, γ les angles que fait avec les axes la première normale, par α', β', γ' les angles de la seconde normale, et par

V l'angle cherché. Les axes étant supposés rectangulaires, on a (nº 417)

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma';$$

d'où, en vertu des formules (7),

$$(8)\qquad \cos V = \pm\frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Pour que les deux plans soient perpendiculaires entre eux, il est nécessaire et il suffit que l'on ait

$$(9)\qquad AA' + BB' + CC' = 0.$$

DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN.

438 — Quand nous avons cherché les angles que la normale OL au plan $Ax + By + Cz + D = 0$ fait avec les axes (nº 436), nous avons désigné par l la longueur de cette normale, et nous avons trouvé les rapports égaux

$$-\frac{l}{D} = \frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Il en résulte

$$(10)\qquad l = \frac{\pm D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Cette formule donne la distance de l'origine au plan en coordonnées rectangulaires.

Il est facile d'en déduire la distance d'un point quelconque M ayant pour coordonnées x_1, y_1, z_1. Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point M, l'équation du plan devient

$$Ax' + By' + Cz' + (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) = 0.$$

En vertu de la formule (10), la distance du point M au plan a pour expression

$$(11)\qquad l = \frac{\pm(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Si, dans l'équation du plan, on remplace les coefficients par les quantités proportionnelles données par les formules (6), l'équation prend la forme

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - l = 0. \tag{12}$$

Le premier membre, dans lequel on regarde x, y, z comme les coordonnées d'un point quelconque de l'espace, exprime la distance de ce point au plan, affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que le point et l'origine sont situés de part et d'autre du plan, ou du même côté.

DE LA LIGNE DROITE.

PROJECTIONS D'UNE DROITE.

439 — La manière la plus simple de définir une droite dans l'espace est de la considérer comme l'intersection de deux plans. Une droite sera donc représentée par le système de deux équations du premier degré

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Si l'on élimine y ou x entre les deux équations, on obtiendra deux équations de la forme

$$x = az + p, \quad y = bz + q; \tag{1}$$

ce sont les équations des plans qui projettent la droite sur le plan XOZ ou sur le plan YOZ. On peut aussi considérer chacune de ces équations comme étant celle de la projection elle-même rapportée aux deux axes situés dans son plan.

Si, dans les équations (1), on fait $z = 0$, on obtient les coordonnées $x = p$, $y = q$ de la trace de la droite sur le plan XOY.

Quand deux droites sont parallèles, leurs projections étant respectivement parallèles, les coefficients angulaires a et b sont les mêmes dans les équations de ces droites.

Les équations générales d'une droite renferment quatre paramètres arbitraires a, b, p, q.

ÉQUATION GÉNÉRALE DES DROITES QUI PASSENT PAR UN POINT DONNÉ.

440 — Pour qu'une droite

(1) $$x=az+p, \quad y=bz+q$$

passe par un point donné M, ayant pour coordonnées x', y', z', il faut que les coordonnées de ce point vérifient les deux équations de la droite, ce qui donne deux relations $x'=az'+p$, $y'=bz'+q$, servant à déterminer deux des paramètres, par exemple p et q. En remplaçant p et q par leurs valeurs, on obtient les équations

(2) $$x-x'=a(z-z'), \quad y-y'=b(z-z'),$$

dans lesquelles les deux paramètres a et b sont arbitraires, et qui représentent toutes les droites passant par le point donné.

DROITE PASSANT PAR DEUX POINTS DONNÉS.

441 — Les équations (2) représentent une droite quelconque passant par le point M; cette droite passera par un second point M' ayant pour coordonnées x'', y'', z'', si les conditions

$$x''-x'=a(z''-z'), \quad y''-y'=b(z''-z')$$

sont vérifiées; on en déduit

$$a=\frac{x''-x'}{z''-z'}, \quad b=\frac{y''-y'}{z''-z'},$$

et la droite cherchée a pour équations

(3) $$x-x'=\frac{x''-x'}{z''-z'}(z-z'), \quad y-y'=\frac{y''-y'}{z''-z'}(z-z'),$$

ou plus simplement

(4) $$\frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}=\frac{z-z'}{z''-z'}.$$

On obtient immédiatement les équations (2) et (3), en remarquant que, lorsqu'une droite passe par un point, les projections de la droite passent par les projections du point.

INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

442 — Les coordonnées du point de rencontre d'une droite et d'un plan s'obtiennent, comme celles du point de rencontre de trois plans, par la résolution de trois équations du premier degré à trois inconnues. Si les équations de la droite sont

$$x=az+p, \quad y=bz+q,$$

et celle du plan

$$Ax+By+Cz+D=o,$$

en éliminant x et y, on obtient la coordonnée z du point d'intersection

$$z=-\frac{Ap+Bq+D}{Aa+Bb+C}.$$

Si l'on a

$$(5) \qquad Aa+Bb+C=o,$$

la valeur de z devenant infinie, le point de rencontre s'éloigne à l'infini et la droite est parallèle au plan.

Si l'on a en même temps

$$(6) \qquad Aa+Bb+C=o, \quad Ap+Bq+D=o,$$

la valeur de z est indéterminée et la droite tout entière est située dans le plan. La première des conditions (6) exprime que la droite est parallèle au plan; la seconde, que la trace de la droite sur le plan des xy, trace qui a pour coordonnées (p,q,o), est située dans le plan.

CONDITION POUR QUE DEUX DROITES SE RENCONTRENT.

443 — Deux droites placées arbitrairement dans l'espace ne se rencontrent pas en général; pour qu'elles se rencontrent, il faut que leurs équations

$$\begin{cases} x=az+p, \\ y=bz+q, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a'z+p', \\ y=b'z+q', \end{cases}$$

soient satisfaites par un même système de valeurs de x, y, z; ceci n'aura lieu que si la condition

$$(7) \qquad (a-a')(q-q')-(b-b')(p-p')=0,$$

obtenue par l'élimination de x, y, z, est remplie.

ÉQUATION GÉNÉRALE DES PLANS QUI PASSENT PAR LA DROITE D'INTERSECTION DE DEUX PLANS DONNÉS.

444—Soient $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$ les équations de deux plans; l'équation

$$(8) \qquad (Ax+By+Cz+D)-k(A'x+B'y+C'z+D')=0,$$

dans laquelle le paramètre k est arbitraire, représentera tous les plans qui passent par la droite d'intersection des deux premiers plans. Il est évident d'abord que, quelle que soit la valeur attribuée au paramètre k, le plan représenté par l'équation (8) passera par la droite d'intersection des plans donnés; car cette équation est vérifiée par les coordonnées de chacun des points communs aux deux plans. On voit ensuite que l'équation (8) représente tous les plans qui passent par la droite d'intersection des deux plans donnés; car l'un quelconque de ces plans est défini par la droite d'intersection, et un point (x', y', z') pris arbitrairement dans l'espace; or, on peut déterminer le paramètre k, de manière que le plan (8) passe par ce point, ce qui donne la condition

$$(Ax'+By'+Cz'+D)-k(A'x'+B'y'+C'z'+D')=0;$$

d'où l'on déduit la valeur de k. Le plan cherché a pour équation

$$(9) \qquad \frac{Ax+By+Cz+D}{Ax'+By'+Cz'+D}=\frac{A'x+B'y+C'z+D'}{A'x'+B'y'+C'z'+D'}.$$

PAR UNE DROITE MENER UN PLAN PERPENDICULAIRE A UN PLAN DONNÉ.

445—Soient $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$, les équations de la droite donnée, $A''x+B''y+C''z+D''=0$ celle du plan donné. Le plan cherché, passant par la droite, a une équation de la forme

$$(Ax+By+Cz+D)-k(A'x+B'y+C'z+D')=0.$$

Ce plan sera perpendiculaire au plan donné, si la condition

$$A''(A-kA')+B''(B-kB')+C''(C-kC')=0$$

est vérifiée (nº 437), les axes étant supposés rectangulaires ; on en déduit

$$k=\frac{A''A+B''B+C''C}{A'A''+B'B''+C'C''},$$

et le plan cherché a pour équation

$$(10)\quad (A'A''+B'B''+C'C'')(Ax+By+Cz+D)=(A''A+B''B+C''C)(A'x+B'y+C'z+D').$$

Les trois plans donnés forment un angle trièdre ; par l'une des arêtes nous avons mené un plan perpendiculaire à la face opposée. Les plans menés par chacune des autres arêtes perpendiculairement à la face opposée ont de même pour équations

$$(A''A+B''B+C''C)(A'x+B'y+C'z+D')=(AA'+BB'+CC')(A''x+B''y+C''z+D''),$$
$$(AA'+BB'+CC')(A''x+B''y+C''z+D'')=(A'A''+B'B''+C'C'')(Ax+By+Cz+D).$$

En ajoutant les deux premières équations membre à membre, on trouve la troisième ; on en conclut que les trois plans passent par une même droite.

ANGLES D'UNE DROITE AVEC LES AXES.

446—Dans les questions relatives à la ligne droite, que nous avons traitées jusqu'à présent, excepté dans la question précédente, nous n'avons fait aucune hypothèse sur les coordonnées ; dans tout ce qui suit, nous supposerons les coordonnées rectangulaires.

Soient $x=az+p$, $y=bz+q$ les équations d'une droite. La parallèle OL menée par l'origine (fig. 280) aura pour équations

$$x=az,\quad y=bz.$$

Désignons par α, β, γ les angles que fait la droite OL avec les axes. Prenons sur cette droite un point M, situé à une distance l de l'origine. Les coordonnées x, y, z du point M étant les projections orthogonales de la droite OM sur les axes, on a

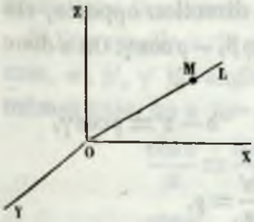


Fig. 280.

$$x = l\cos\alpha, \quad y = l\cos\beta, \quad z = l\cos\gamma.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations de la droite OL, il vient

$$\cos\alpha = a\cos\gamma, \quad \cos\beta = b\cos\gamma,$$

et, par suite,

$$\text{(11)} \qquad \frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{1} = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Le double signe se rapporte aux deux directions de la droite.

PAR UN POINT MENER UNE DROITE QUI FASSE AVEC LES AXES DES ANGLES DONNÉS.

447 — Proposons-nous de mener par le point M', dont les coordonnées sont x', y', z'. une droite qui fasse avec les axes des coordonnées rectangulaires les angles α, β, γ. La droite cherchée est représentée par des équations de la forme

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z');$$

mais on a

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad b = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma};$$

on en déduit

$$\text{(12)} \qquad \frac{x-x'}{\cos\alpha} = \frac{y-y'}{\cos\beta} = \frac{z-z'}{\cos\gamma}.$$

On peut obtenir directement ces équations ; si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de la droite, et par ρ la distance M'M, les différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ sont les projections de la longueur M'M sur les axes des coordonnées. D'un autre côté, si la longueur M'M est comptée à partir du point M' dans la direction qui fait avec les axes les angles α, β, γ, ces projections sont égales à $\rho\cos\alpha, \rho\cos\beta, \rho\cos\gamma$; si la longueur M'M est comptée dans la direction opposée, ces projections sont égales à $-\rho\cos\alpha, -\rho\cos\beta, -\rho\cos\gamma$. On a donc dans tous les cas,

$$x-x'=\rho\cos\alpha, \quad y-y'=\rho\cos\beta, \quad z-z'=\rho\cos\gamma,$$

ou

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma}=\rho,$$

en convenant de regarder la longueur ρ comme positive ou négative, suivant qu'elle est parcourue dans la première direction ou dans la direction opposée.

ANGLE DE DEUX DROITES.

448 — Soient

$$\begin{cases} x=az+p, \\ y=bz+q, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a'z+p', \\ y=b'z+q', \end{cases}$$

les équations de deux droites. On déterminera les angles (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ de chacune d'elles avec les axes, puis on exprimera l'angle V qu'elles font entre elles par la formule connue (n° 417). On a

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{1}=\frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

$$\frac{\cos\alpha'}{a'}=\frac{\cos\beta'}{b'}=\frac{\cos\gamma'}{1}=\frac{\pm 1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}},$$

d'où

$$(13) \qquad \cos V=\pm\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

Les droites sont perpendiculaires entre elles lorsque la relation

$$(14) \qquad aa'+bb'+1=0$$

est satisfaite.

ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN.

449 — Soient $x=az+p$, $y=bz+q$ les équations de la droite, $Ax+By+Cz+D=0$ celle du plan. L'angle V de la droite et du plan est complémentaire de l'angle que forme la droite avec la normale au plan.

Si l'on appelle α, β, γ les angles que fait la droite avec les axes, α', β', γ' les angles que fait la normale au plan avec les mêmes axes, on a (nos 446 et 436)

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{1}=\frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

$$\frac{\cos\alpha'}{A}=\frac{\cos\beta'}{B}=\frac{\cos\gamma'}{C}=\frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

et, par suite,

$$(15)\qquad \sin V=\frac{\pm(Aa+Bb+C)}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(a^2+b^2+1)}}.$$

CONDITIONS POUR QU'UNE DROITE ET UN PLAN SOIENT PERPENDICULAIRES.

450 — Soient, comme précédemment, $x=az+p, y=bz+q$ les équations de la droite, $Ax+By+Cz+D=0$ celle du plan. En désignant par α, β, γ les angles de la droite avec les axes, par α', β', γ' ceux de la perpendiculaire au plan avec les mêmes axes, nous avons

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{1},$$

$$\frac{\cos\alpha'}{A}=\frac{\cos\beta'}{B}=\frac{\cos\gamma'}{C}.$$

Si la droite est perpendiculaire au plan, les angles α, β, γ étant respectivement égaux à α', β', γ', on a, en divisant les rapports précédents deux à deux,

$$(16)\qquad \frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{1}.$$

Des relations (16) on déduit aisément ce théorème dont on se sert en géométrie descriptive : lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, la projection de la droite sur un plan quelconque est perpendiculaire à la trace du plan. La projection de la droite sur le plan XOZ a pour équation $x=az+p$; l'équation de la trace du plan est $Ax+Cz+D=0$; la relation $a=\frac{A}{C}$ exprime que les deux droites sont rectangulaires. De même, la relation $b = \frac{B}{C}$ exprime que la projection de la droite sur le plan YOZ est perpendiculaire à la trace du plan.

PAR UN POINT DONNÉ MENER UNE DROITE PERPENDICULAIRE A UN PLAN DONNÉ.

451 — Soient x', y', z' les coordonnées du point donné M, $Ax + By + Cz + D = 0$ l'équation du plan. Les équations de la droite cherchée seront de la forme

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

Cette droite sera perpendiculaire au plan donné, si les relations

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{1}$$

sont vérifiées ; on en déduit

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C};$$

et, par suite, la droite cherchée a pour équations

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z'),$$

ou, plus simplement,

$$\frac{x - x'}{A} = \frac{y - y'}{B} = \frac{z - z'}{C}. \tag{17}$$

On obtient immédiatement ces équations, en remarquant que les numérateurs sont proportionnels aux cosinus des angles que la droite fait avec les axes, tandis que les dénominateurs sont proportionnels aux cosinus des angles que la normale au plan fait avec les axes ; la droite coïncidant avec la normale, ces deux séries de quantités sont proportionnelles.

452 — Les coordonnées du pied de la perpendiculaire, c'est-à-dire du point P où la perpendiculaire perce le plan, seront données par les deux équations (17) jointes à l'équation du plan. On peut mettre l'équation du plan sous la forme

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = -(Ay' + By' + Cz' + D);$$

en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs des rapports égaux (17), après avoir multiplié les deux termes du premier par A, ceux du second par B, ceux du troisième par C, on forme un nouveau rapport égal à chacun des précédents

$$\frac{A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')}{A^2+B^2+C^2}=\frac{-(Ax'+By'+Cz'+D)}{A^2+B^2+C^2};$$

on a ainsi les équations

$$(18)\qquad \frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}=\frac{-(Ax'+By'+Cz'+D)}{A^2+B^2+C^2},$$

qui déterminent le pied de la perpendiculaire.

On obtiendra la longueur de la perpendiculaire en remplaçant les différences $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ par leurs valeurs dans la formule

$$l=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

ce qui donne

$$l=\frac{\pm(Ax'+By'+Cz'+D)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

On retrouve ainsi la formule à laquelle nous avons déjà été conduits par une autre méthode (nº 438).

PAR UN POINT DONNÉ MENER UN PLAN PERPENDICULAIRE A UNE DROITE DONNÉE.

453 — Soient x', y', z' les coordonnées du point donné M, $x=az+p$, $y=bz+q$ les équations de la droite. Le plan cherché, passant par le point M, a une équation de la forme

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

Ce plan sera perpendiculaire à la droite, si les relations

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{1}$$

sont vérifiées. En remplaçant les rapports $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$ par leurs valeurs a et b, l'équation du plan cherché devient

$$(19)\qquad a(x-x')+b(y-y')+(z-z')=0.$$

On obtient encore immédiatement cette équation, en remarquant que les quantités a, b, 1 sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait la droite donnée avec les axes, tandis que les quantités $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait avec ces mêmes axes la droite qui va du point M à un point quelconque du plan; ces deux directions étant rectangulaires, la somme des produits de ces quantités deux à deux doit être égale à zéro.

454 — On aura le point P où le plan coupe la droite, en joignant l'équation du plan aux deux équations de la droite; celles-ci étant mises sous la forme

$$x-x'=a(z-z')-(x'-az'-p),$$
$$y-y'=b(z-z')-(y'-bz'-q),$$

on en déduit, en remplaçant $x-x'$ et $y-y'$ par leurs valeurs dans l'équation du plan

$$z-z'=\frac{a(x'-az'-p)+b(y'-az'-q)}{a^2+b^2+1}.$$

A l'aide de ces formules, on calculerait aisément la distance MP du point à la droite donnée; mais nous l'obtiendrons plus rapidement par une autre méthode.

PAR UN POINT DONNÉ MENER UNE DROITE PERPENDICULAIRE A UNE DROITE DONNÉE.

455 — Soient x', y', z' les coordonnées du point donné M, $x=az+p$, $y=bz+q$ les équations de la droite donnée. La droite cherchée est l'intersection de deux plans, l'un mené par le point et la droite donnés, l'autre mené par le point donné perpendiculairement à la droite donnée. Le premier a pour équation (nº 444)

$$\frac{x-az-p}{x'-az'-p}=\frac{y-bz-q}{y'-bz'-q},$$

le second (nº 453)

$$a(x-x')+b(y-y')+(z-z')=0;$$

ces deux équations simultanées représentent la droite cherchée.

DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE DONNÉE.

456—Appelons toujours x', y', z' les coordonnées du point donné M. Supposons d'abord que la droite donnée OL passe par l'origine, et désignons par α, β, γ, les angles qu'elle fait avec les axes des coordonnées rectangulaires. La perpendiculaire MP, abaissée du point M sur la droite OL, étant un côté d'un triangle rectangle OMP (fig. 281), on a

$$l^2 = \overline{MP}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OP}^2.$$

La distance OM est connue ; elle est donnée par la formule

$$\overline{OM}^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

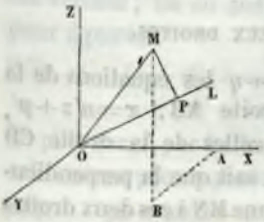


Fig. 281.

Quant à la distance OP, c'est la projection de la droite OM sur la droite OL ; en exprimant que la projection de la droite OM est égale à celle de la ligne brisée OABM, dont les côtés sont les coordonnées x', y', z' du point M, on a

$$OP = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma.$$

Il vient de la sorte

$$(20) \qquad l^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma)^2.$$

On peut mettre cette formule sous une autre forme. Si l'on multiplie la quantité $x'^2 + y'^2 + z'^2$ par $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$, c'est-à-dire par l'unité, on a

$$l^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma)^2 ;$$

en effectuant les calculs et groupant convenablement les termes, on obtient la formule

$$(21) \qquad l^2 = (y'\cos\gamma - z'\cos\beta)^2 + (z'\cos\alpha - x'\cos\gamma)^2 + (x'\cos\beta - y'\cos\alpha)^2.$$

Supposons maintenant que la droite donnée ne passe pas par l'origine, et soient

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

les équations de cette droite. Imaginons que l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en un point de la droite, par exemple au point (p, q, o) où elle perce le plan XOY ; les coordonnées du point M relativement à ces nouveaux axes étant

$x'-p$, $y'-q$, z', on aura, en appliquant la formule (21),

$$l^2=[(y'-q)\cos\gamma-z'\cos\beta]^2+[(x'-p)\cos\gamma-z'\cos\alpha]^2$$
$$+[(x'-p)\cos\beta-(y'-q)\cos\alpha]^2.$$

Si l'on remplace enfin $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par leurs valeurs, on arrive à la formule

$$(22)\quad l^2=\frac{(x'-az'-p)^2+(y'-bz'-q)^2+[b(x'-p)-a(y'-q)]^2}{a^2+b^2+1}.$$

PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES.

457 — Soient $x=az+p$, $y=bz+q$ les équations de la première droite AB, $x=a'z+p'$, $y=b'z+q'$ celles de la droite CD (fig. 282). On sait que la perpendiculaire commune MN à ces deux droites mesure leur plus courte distance. On sait aussi que la longueur l de cette perpendiculaire commune MN est égale à la distance d'un point quelconque de la droite CD au plan P mené par la droite AB parallèlement à CD. Cherchons d'abord l'équation du plan P; tout plan mené par la droite AB a une équation de la forme

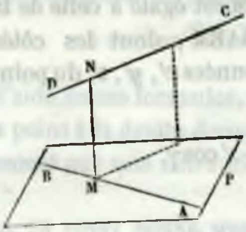


Fig. 282.

$$(x-az-p)-k(y-bz-q)=0;$$

ce plan sera parallèle à CD, si la condition (n° 442)

$$a'-kb'-(a-kb)=0$$

est remplie; on en déduit $k=\dfrac{a-a'}{b-b'}$, et, par suite, le plan P a pour équation

$$(23)\qquad (b-b')(x-az-p)-(a-a')(y-bz-q)=0.$$

La distance à ce plan d'un point quelconque de la droite CD, par exemple du point $(p', q', 0')$, où elle perce le plan XOY, a pour expression (n° 438)

$$(24)\qquad l=\pm\frac{(b-b')(p-p')-(a-a')(q-q')}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2}}.$$

Telle est la plus courte distance des deux droites données.

458—Si l'on demandait les équations de la perpendiculaire commune MN, il faudrait, par chacune des droites données AB, CD, mener un plan perpendiculaire au plan P ; ces deux plans, par leur intersection, détermineraient la droite MN. Un plan $(x-az-p)-k(y-bz-q)=0$, mené par la droite AB, sera perpendiculaire au plan P représenté par l'équation (23), si la condition (n° 437)

$$(b-b')+k(a-a')-(a-kb)(ab'-ba')=0$$

est vérifiée ; on en déduit la valeur de k, et le plan cherché a pour équation

$$(25)\qquad (a-a')(x-az-p)+(b-b')(y-bz-q) \\ +(ab'-ba')[b(x-p)-a(y-q)]=0.$$

Le plan mené par la droite CD, perpendiculairement au plan P, a de même pour équation

$$(26)\qquad (a'-a)(x-a'z-p')+(b'-b)(y-b'z-q') \\ +(a'b-b'a)[b'(x-p')-a'(y-q')]=0.$$

Les deux équations simultanées (25) et (26) représentent la perpendiculaire commune MN.

SPHÈRE.

459—La surface de la sphère, étant le lieu des points distants du centre d'une quantité constante égale au rayon, a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Si, à l'équation d'une sphère, on joint celle d'un plan, on aura les équations de la ligne d'intersection, c'est-à-dire d'un cercle dans l'espace.

EXERCICES.

1° Étant donnés un système de trois axes rectangulaires et un point sur chacun des axes ; trouver en fonction des coordonnées des trois points : 1° les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle qui aurait pour sommets les trois points ; 2° les coordonnées du centre du cercle inscrit dans le même triangle.

2° Étant donnée une conique, trouver dans l'espace le lieu des points tels que la distance de chacun d'eux à l'un quelconque des points de la conique soit une fonction rationnelle des coordonnées du point de la conique.

La distance est aussi une fonction rationnelle des coordonnées du point cherché.

Si l'on joint deux points fixes du lieu à un point quelconque de la conique, la somme ou la différence des distances est constante.

3° Démontrer que, si par chacune des arêtes d'un angle trièdre et la bissectrice de la face opposée, on fait passer un plan, les trois plans ainsi obtenus se coupent suivant une même droite.

4° Étant donnés un trièdre et une droite passant par son sommet, par la droite fixe et chacune des arêtes on fait passer un plan qui partage la face opposée en deux angles ; démontrer que le produit des sinus de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres. (Réciproque.

5° Étant donné un trièdre, par le sommet on mène un plan quelconque qui détermine sur chaque face deux segments ; démontrer que le produit des sinus de trois segments non consécutifs est égal et de signe contraire au produit des trois autres. (Réciproque.)

6° Trouver l'aire d'un triangle en fonction des coordonnées des sommets, les axes étant rectangulaires.

7° Trouver le volume d'un tétraèdre ayant l'un de ses sommets à l'origine en fonction des coordonnées des trois autres sommets.

8° Démontrer que les trois droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un tétraèdre passent par un même point.

9° Trouver l'équation d'un plan mené par un point de l'axe des x perpendiculairement à cet axe, les coordonnées étant obliques.

Application à la détermination du centre d'une sphère donnée par son équation en coordonnées obliques, au moyen de plans perpendiculaires aux axes.

10° Les six plans des cercles d'intersections de quatre sphères prises deux à deux se coupent en un même point.

CHAPITRE IV.

Génération des surfaces.

460—On définit quelquefois une surface par une propriété commune à chacun de ses points ; dans ce cas, on obtient l'équation de la surface en traduisant analytiquement cette propriété. Mais, en général, on définit une surface par le mouvement d'une ligne dans l'espace. Soient

$$F(x,y,z,a)=0, \quad F_1(x,y,z,a)=0$$

les équations d'une ligne renfermant un paramètre arbitraire a; si l'on fait varier a d'une manière continue, la ligne se meut dans l'espace et engendre une surface. On obtiendra l'équation de cette surface en éliminant le paramètre a entre les deux équations de la ligne mobile (nº 98).

Supposons que les équations de la ligne mobile

$$F(x,y,z,a,b)=0, \quad F_1(x,y,z,a,b)=0$$

renferment deux paramètres variables a et b, assujettis à vérifier la relation $\varphi(a,b)=0$. Un seul de ces paramètres sera arbitraire, et la ligne, dans son mouvement, engendrera encore une surface, dont on obtiendra l'équation en éliminant les deux paramètres a et b entre les trois équations précédentes.

En général, si les deux équations d'une ligne mobile renferment n paramètres variables, assujettis à vérifier $n-1$ équations de condition, cette ligne engendrera une surface dont on obtiendra l'équation en éliminant les n paramètres variables entre les deux équations de la ligne et les $n-1$ équations de condition.

On donne le nom de *génératrice* à la ligne mobile qui engendre la surface. On définit ordinairement le mouvement de la génératrice en l'assujettissant à glisser sur certaines lignes fixes, que l'on nomme *directrices*. Soient

$$f(x,y,z)=0, \quad f_1(x,y,z)=0$$

les équations d'une directrice; pour que la génératrice rencontre la directrice, il faut que les quatre équations de ces deux lignes soient vérifiées par un même système de valeurs de x, y, z; si donc, entre ces quatre équations, on élimine x, y, z, on obtiendra une équation de condition entre les paramètres a, b,... que renferment les équations de la génératrice. Chaque directrice donnera aussi une équation de condition entre les paramètres variables. Ainsi, lorsque les équations de la génératrice renferment n paramètres variables, il faut assujettir cette ligne mobile à glisser sur $n-1$ directrices.

On appelle *surfaces réglées* les surfaces engendrées par le mouvement d'une ligne droite. Les équations générales d'une ligne droite renfermant quatre paramètres variables, il faut trois directrices pour définir le mouvement d'une ligne droite.

On distingue les surfaces réglées en deux grandes classes, les surfaces *développables* et les surfaces non développables ou surfaces *gauches;* la surface est développable, lorsque toutes ses génératrices sont tangentes à une même courbe que l'on appelle *arête de rebroussement* de la surface. Parmi les surfaces développables, nous étudierons particulièrement les surfaces cylindriques et les surfaces coniques; nous donnerons ensuite quelques exemples de surfaces réglées non développables.

SURFACES CYLINDRIQUES.

461—On appelle *surface cylindrique* une surface engendrée par une droite qui se meut en restant constamment parallèle à elle-même.

La génératrice sera représentée par les équations

$$x=az+p, \qquad y=bz+q,$$

dans lesquelles les paramètres a et b sont constants, et les deux paramètres p et q variables. On définira le mouvement de la génératrice, en l'assujettissant à glisser sur une directrice donnée, ce qui fournira une équation de condition $\varphi(p, q)=0$ entre les deux paramètres variables p et q. On obtiendra l'équation de la surface, en éliminant ces deux paramètres entre les deux équations de la génératrice et l'équation de condition; si l'on remplace dans cette dernière p et q par leurs valeurs $x-az, y-bz$, tirées des deux premières, on a l'équation de la surface cylindrique

$$\varphi(x-az, y-bz)=0. \tag{1}$$

462—Plus généralement, la génératrice peut être représentée par les deux équations

$$ax+by+cz+d=\alpha, \qquad a'x+b'y+c'z+d'=\beta,$$

dans lesquelles les deux paramètres α et β sont seuls variables; car chacune de ces équations étant celle d'un plan qui se meut parallèlement à lui-même, la droite d'intersection conserve aussi la même direction. Les deux paramètres α et β sont liés par une équation de condition $\varphi(\alpha, \beta)=0$; l'élimination des deux paramètres α et β donne l'équation de la surface cylindrique

$$(2) \qquad \varphi(ax+by+cz+d,\ a'x+b'y+c'z+d')=0.$$

Réciproquement, toute équation de la forme (2) ne peut représenter qu'une surface cylindrique. Si l'on pose, en effet,

$$ax+by+cz+d=\alpha, \qquad a'x+b'y+c'z+d'=\beta,$$

l'équation proposée devient $\varphi(\alpha, \beta)=0$; à tout système de valeurs réelles de α et β, vérifiant cette équation, correspond une droite ayant une direction déterminée ; l'ensemble de ces droites forme une surface cylindrique. Ainsi, *l'équation générale des surfaces cylindriques est une équation quelconque entre deux polynômes du premier degré en* x, y, z.

Il peut arriver que l'équation $\varphi(\alpha, \beta)=0$ n'admette qu'un nombre fini de solutions réelles ; dans ce cas, l'équation (2) représente un nombre limité de droites réelles.

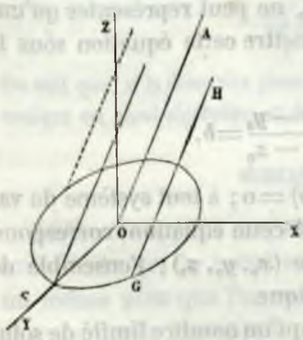


Fig. 283.

463 — Supposons que la surface ait pour directrice une courbe plane, située dans le plan XOY (fig. 283), et soit $\varphi(x, y)=0$ l'équation de cette courbe rapportée aux axes OX et OY ; la trace G de la génératrice GH

$$x=az+p, \quad y=bz+q$$

sur le plan XOY a pour coordonnées $x=p$, $y=q$; cette trace devant appartenir à la directrice, on aura l'équation de condition $\varphi(p, q)=0$, et la surface cylindrique sera représentée par l'équation $\varphi(x-az,\ y-bz)=0$. On voit que, si la directrice plane est algébrique et de l'ordre m, la surface cylindrique est aussi algébrique et de l'ordre m.

SURFACES CONIQUES.

464 — On appelle *surface conique* une surface engendrée par une droite qui tourne autour d'un point fixe.

Désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point fixe, c'est, à-dire du sommet du cône ; les équations de la génératrice seront de la forme

$$\frac{x-x_0}{z-z_0}=a, \quad \frac{y-y_0}{z-z_0}=b,$$

a et b étant deux paramètres variables. On définira le mouvement de la génératrice en l'assujettissant à glisser sur une directrice donnée, ce qui fournira une équation de condition $\varphi(a, b)=0$ entre les deux paramètres variables a et b. En éliminant a et b entre cette équation et les deux équations de la génératrice, on obtiendra l'équation de la surface conique

$$\varphi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0. \tag{3}$$

C'est une équation homogène entre les trois différences $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$.

Réciproquement, toute équation homogène entre les trois différences $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ ne peut représenter qu'une surface conique. Car on pourra mettre cette équation sous la forme (3) ; si l'on pose ensuite

$$\frac{x-x_0}{z-z_0}=a, \quad \frac{y-y_0}{z-z_0}=b,$$

l'équation proposée devient $\varphi(a, b)=0$; à tout système de valeurs réelles de a et b, satisfaisant à cette équation, correspond une droite passant par le point fixe (x_0, y_0, z_0) ; l'ensemble de ces droites forme une surface conique.

Si l'équation $\varphi(a,b)=0$ n'avait qu'un nombre limité de solutions réelles, on aurait un nombre limité de droites réelles. Si l'équation n'avait aucune solution réelle, l'équation (3), supposée algébrique et entière, n'aurait qu'une solution réelle, le sommet.

Quand on place l'origine des coordonnées au sommet du cône, l'équation de la surface conique se réduit à la forme

$$\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0. \tag{4}$$

C'est une équation homogène entre x, y, z.

La surface conique est développable ; l'arête de rebroussement se réduit à un point, le sommet. La surface cylindrique est aussi développable; on peut la regarder comme la limite d'une surface conique dont le sommet s'éloigne à l'infini.

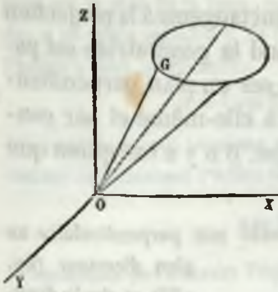


Fig. 284.

465 — Considérons le cas où la directrice est une courbe plane. Prenons le sommet du cône pour origine des coordonnées, et supposons le plan XOY parallèle au plan de la courbe (fig. 284). Soient $z=c$, $\varphi(x,y)=0$ les équations de la directrice, $x=az$, $y=bz$ celles de la génératrice; la trace de la génératrice sur le plan de la directrice ayant pour coordonnées $z=c$, $x=ac$, $y=bc$, pour que ce point G appartienne à la directrice, il faut que l'équation de condition $\varphi(ac,bc)=0$ soit vérifiée. En éliminant a et b entre cette équation et celles de la génératrice, on obtient l'équation de la surface conique

$$\varphi\left(c\frac{x}{z}, c\frac{y}{z}\right)=0.$$

On voit que, si la directrice plane est algébrique et de l'ordre m, la surface conique est aussi algébrique et de l'ordre m.

SURFACES CONOÏDES.

466 — On appelle *surface conoïde* une surface engendrée par une droite qui se meut en restant constamment parallèle à un même plan que l'on nomme plan *directeur*, et en glissant sur une droite fixe appelée *axe* du conoïde et sur une seconde directrice quelconque.

Prenons la directrice rectiligne pour axe des z, et supposons le plan XOY parallèle au plan directeur. La génératrice sera représentée par des équations de la forme

$$z=\alpha, \quad \frac{y}{x}=\beta.$$

La seconde directrice donnera une équation de condition $\varphi(\alpha,\beta)=0$ entre les deux paramètres variables α et β. La surface conoïde aura pour équation

$$\varphi\left(z, \frac{y}{x}\right)=0. \tag{5}$$

A l'exception des cylindres, les surfaces réglées à plan directeur ne sont pas développables. Nous avons dit, en effet, qu'une surface développable est engendrée par une droite mobile tangente à une courbe donnée ; la projection de la génératrice sur un plan quelconque restera évidemment tangente à la projection de l'arête de rebroussement ; or, quand la génératrice est parallèle à un plan donné, sa projection sur un plan perpendiculaire au plan directeur reste parallèle à elle-même et par conséquent n'est pas tangente à une courbe. Il n'y a exception que pour la surface cylindrique.

467 — Supposons que l'axe OZ du conoïde soit perpendiculaire au plan directeur (fig. 285), et que la directrice soit un cercle situé dans un plan perpendiculaire au plan directeur. Faisons passer l'axe OX par le centre C du cercle et prenons le plan YOZ parallèle au plan du cercle ; ce cercle aura des équations de la forme $x = a,\ y^2 + z^2 = r^2$.

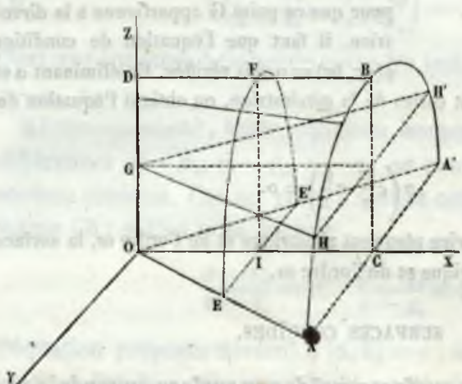


Fig. 285.

Pour que la génératrice GH s'appuie sur le cercle, il faut que les paramètres α et β satisfassent à la relation $a^2\beta^2 + \alpha^2 = r^2$. Le conoïde est donc représenté par l'équation du quatrième degré $x^2z^2 + a^2y^2 - r^2x^2 = 0$. Si l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan directeur, on obtient évidemment deux génératrices GH, GH'; l'angle de ces deux génératrices diminue à mesure que le plan sécant s'élève ; enfin, le conoïde se termine par une arête DB.

Coupons la surface par un plan EFE' parallèle au plan du cercle ; ce plan a pour équation $x = a'$; la courbe d'intersection $a'^2z^2 + a^2y^2 - r^2a'^2 = 0$ est une ellipse dont le demi-axe IF est constamment égal à r et dont l'autre axe EE' diminue jusqu'à zéro, quand le plan sécant se rapproche de l'axe du conoïde.

Comme second exemple de surface conoïde, considérons la surface engendrée par une droite qui se meut en restant parallèle à la base d'un cylindre circulaire droit, et s'appuyant sur l'axe du cylindre et sur une hélice tracée sur le cylindre. Prenons pour axe des z l'axe du cylindre, pour axes des x et des y deux diamètres rectangulaires du cercle de base, et dont l'un, l'axe des x, rencontre l'hélice. Une génératrice de la surface se projette sur le plan de la base, suivant un rayon parallèle faisant avec l'axe des x un angle variable θ. Si l'on appelle h le pas de l'hélice, le point de l'hélice a pour coordonnées

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = h\frac{\theta}{2\pi},$$

ces trois équations à quatre variables θ, x, y, z peuvent être regardées comme représentant l'hélice elle-même. La génératrice a pour équations

$$z = h\frac{\theta}{2\pi}, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\theta;$$

l'élimination de θ donnera l'équation de la surface héliçoïde à plan directeur,

$$z = \frac{h}{2\pi}\operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{y}{x}.$$

Cette équation, jointe à celle du cylindre $x^2 + y^2 = r^2$, représente aussi l'hélice.

SURFACES DE RÉVOLUTION.

468—On appelle surface de révolution une surface engendrée par la rotation d'une ligne autour d'un axe fixe auquel elle est invariablement liée. Chaque point M de la génératrice décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe et qui a pour centre le pied P de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe (fig. 286). Les cercles décrits par les différents points de la génératrice ont été nommés les *parallèles* de la surface. Les sections faites par des plans qui passent par l'axe sont égales entre elles ; ce sont les *méridiens* de la surface. Ordinairement on choisit pour génératrice de la surface une courbe méridienne.

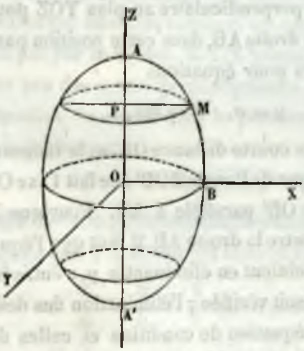


Fig. 286.

On peut aussi concevoir une surface de révolution comme engendrée par le mouvement d'un cercle, de rayon variable, dont le centre parcourt une ligne droite, dont le plan reste perpendiculaire à cette droite, et qui rencontre la génératrice donnée.

Supposons d'abord que l'on prenne l'axe de rotation pour axe des z, les coordonnées étant rectangulaires; un parallèle de la surface sera représenté par des équations de la forme

$$x^2+y^2=\alpha^2, \quad z=\beta;$$

en exprimant que ce cercle rencontre la génératrice donnée, on obtiendra une équation de condition $\varphi(\alpha, \beta)=0$ entre les deux paramètres variables α et β. Si l'on élimine α et β entre cette équation et les deux équations du parallèle, on aura l'équation

$$\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0 \tag{6}$$

de la surface de révolution.

469 — Cherchons, par exemple, l'équation de la surface engendrée par une droite AB, tournant autour d'un axe OZ (fig. 287). Prenons l'axe de rotation pour axe des z, la perpendiculaire commune entre l'axe et la droite AB dans une de ses positions pour axe des y, et une perpendiculaire au plan YOZ pour axe des x. La droite AB, dans cette position particulière, aura pour équations

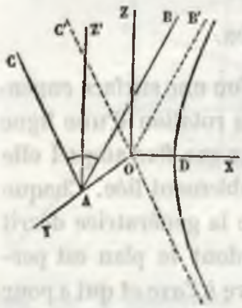


Fig. 287.

$$y=a, \quad x=mz,$$

a étant la plus courte distance OA, m la tangente trigonométrique de l'angle ZOB' que fait l'axe OZ avec la droite OB' parallèle à AB. Pour que le cercle parallèle $x^2+y^2=\alpha^2$, $z=\beta$ rencontre la droite AB, il faut que l'équation de condition $a^2+m^2\beta^2=\alpha^2$, que l'on obtient en éliminant x, y, z entre les équations de la droite et celles du cercle, soit vérifiée ; l'élimination des deux paramètres variables α et β entre cette équation de condition et celles du cercle, donne l'équation de la surface de révolution

$$x^2+y^2-m^2z^2=a^2.$$

Si l'on fait $y=0$ dans cette équation, on obtient la trace de la surface sur le plan XOZ ; c'est une hyperbole $x^2-m^2z^2=a^2$, ayant son axe transverse OD dirigé suivant OX, et pour asymptotes les droites OB' et OC' également inclinées de part et d'autre sur OZ. On peut considérer la surface comme engendrée par cette hyperbole méridienne tournant autour de son axe imaginaire. C'est pourquoi on lui a donné le nom d'*hyperboloïde* de révolution à une nappe.

L'équation précédente ne renfermant le coefficient angulaire m qu'au carré, il est clair que la même surface sera engendrée par les deux droites AB et AC, toutes deux perpendiculaires à OA, et également inclinées de part et d'autre sur la droite AZ' parallèle à OZ.

470—Considérons en particulier le cas où la génératrice est la courbe méridienne ; cette courbe, que l'on peut supposer placée dans le plan XOZ, est représentée par les équations $y=0$, $\psi(x,z)=0$. Si l'on élimine x, y, z entre ces deux équations et celles du parallèle $x^2+y^2=\alpha^2$, $z=\beta$, on obtient l'équation de condition $\psi(\alpha,\beta)=0$. L'équation de la surface de révolution est donc

$$\psi\left(\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0. \tag{7}$$

On l'obtient en remplaçant x par $\sqrt{x^2+y^2}$ dans l'équation du méridien.

Par exemple, si la courbe méridienne est l'hyperbole $x^2 - m^2 z^2 = a^2$, l'hyperboloïde de révolution à une nappe aura pour équation $x^2 + y^2 - m^2 z^2 = a^2$.

Comme second exemple, considérons le *tore*, c'est-à-dire la surface engendrée par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne passant pas par le centre. Si l'on prend pour axe des z l'axe de révolution, et pour axe des x une perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur l'axe, l'équation du cercle dans le plan des xz étant $(x-a)^2+z^2=r^2$, celle de la surface sera

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=r^2.$$

471—Supposons maintenant que l'axe de rotation OL passant encore par l'origine ait une direction quelconque dans l'espace. Soient $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ les équations de cette droite. Tout parallèle de la surface sera donné par l'intersection d'une sphère décrite de l'origine comme centre et d'un plan perpendiculaire à l'axe; ce cercle sera donc représenté par deux équations de la forme

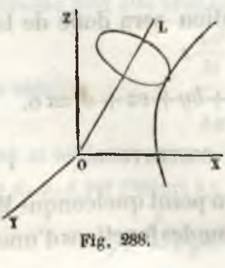


Fig. 288.

$$x^2+y^2+z^2=\alpha^2,\quad ax+by+cz+d=\beta.$$

En exprimant que le parallèle rencontre

la génératrice donnée, on aura une équation de condition $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ entre les deux paramètres variables α et β. L'élimination de ces deux paramètres entre l'équation de condition et les deux équations du cercle conduira à l'équation de la surface de révolution

$$(8) \qquad \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\, ax+by+cz+d\right)=0.$$

C'est une équation entre le polynôme du second degré $x^2+y^2+z^2$ et un polynôme quelconque du premier degré.

Réciproquement, toute équation de cette forme représente une surface de révolution autour d'une droite passant par l'origine. Considérons, en effet, la droite OL qui a pour équations $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, et posons

$$x^2+y^2+z^2=\alpha^2, \quad ax+by+cz+d=\beta;$$

l'équation proposée (8) devient $\varphi(\alpha, \beta)=0$. A tout système de valeurs réelles de α et de β vérifiant cette équation, correspond un cercle donné par l'intersection d'une sphère ayant l'origine pour centre, et d'un plan perpendiculaire à la droite OL; le centre du cercle sera situé sur la droite OL, et le lieu des cercles formera une surface de révolution autour de cette droite.

Supposons enfin que l'axe de rotation ne passe pas par l'origine; prenons un point fixe (x_0, y_0, z_0) sur cet axe dont les équations seront

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Tout parallèle de la surface sera donné par l'intersection d'une sphère $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\alpha^2$ ayant son centre au point fixe, et d'un plan $ax+by+cz+d=\beta$ perpendiculaire à l'axe, l'équation de la surface de révolution sera donc de la forme

$$(9) \quad \varphi\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},\, ax+by+cz+d\right)=0.$$

TANGENTE A UNE COURBE, ET PLAN OSCULATEUR.

472—Les trois coordonnées x, y, z d'un point quelconque M d'une courbe peuvent être considérées comme des fonctions d'une même variable auxiliaire t, prise pour variable indépendante. Appelons Δx, Δy, Δz les variations de ces coordonnées, quand on donne à la variable t un accroissement très-petit Δt, c'est-à-dire quand on passe du point M à un point voisin M_1 sur la courbe; la sécante MM_1 est représentée par les équations

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Lorsqu'on fait tendre Δt vers zéro, les rapports $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ ont respectivement pour limites les dérivées x', y', z' des fonctions x, y, z par rapport à t. Il en résulte que la tangente au point M est représentée par les équations

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}.$$

473 — Soient MT et M_1T_1 les tangentes à une courbe gauche en deux points voisins M et M_1 (fig. 289); par le point M menons une droite MH parallèle à M_1T_1; quand le point M_1 se meut sur la courbe, la droite MH décrit une surface conique; si le point M_1 se rapproche indéfiniment du point M, le plan TMH tend vers une position limite, qui est le plan tangent à la surface conique le long de l'arête MT; cette position limite du plan TMH s'appelle le plan *osculateur* à la courbe au point M.

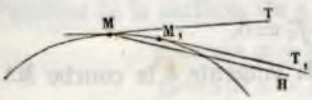


Fig. 289.

Ce plan, passant par le point M, a une équation de la forme

$$(1)\qquad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Pour qu'il contienne les deux droites MT, MH, on doit avoir les relations

$$(2)\qquad Ax'+By'+Cz'=0,$$

$$A(x'+\Delta x')+B(y'+\Delta y')+C(z'+\Delta z')=0;$$

la dernière peut être remplacée par

$$A\frac{\Delta x'}{\Delta t}+B\frac{\Delta y'}{\Delta t}+C\frac{\Delta z'}{\Delta t}=0,$$

et se réduit à

$$(3)\qquad Ax''+By''+Cz''=0,$$

quand Δt tend vers zéro, x'', y'', z'' étant les dérivées secondes des fonctions x, y, z par rapport à t. Des relations (2) et (3) on déduit

$$\frac{A}{y'z''-z'y''}=\frac{B}{z'x''-x'z''}=\frac{C}{x'y''-y'x''},$$

et le plan osculateur a pour équation

(4) $$(y'z''-z'y'')(X-x)+(z'x''-x'z'')(Y-y)+(x'y''-y'x'')(Z-z)=0.$$

Lorsque la courbe est plane, le plan osculateur en chaque point est le plan même de la courbe.

PLAN TANGENT.

474—Considérons la surface représentée par l'équation

(5) $$f(x, y, z)=0;$$

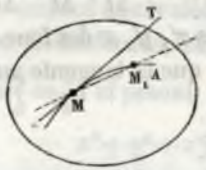


Fig. 290.

prenons sur la surface un point M ayant pour coordonnées x, y, z, et par ce point traçons sur la surface une courbe quelconque MA (fig. 290); quand un point mobile décrit cette courbe, les deux coordonnées x et y sont des fonctions de z, assujetties à vérifier la relation (5); leurs dérivées x' et y' vérifient la relation

(6) $$x'f'_x+y'f'_y+f'_z=0.$$

D'après ce que nous avons dit, la tangente à la courbe MA est représentée par les équations

(7) $$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{1}.$$

Quand la courbe MA tracée sur la surface par le point M change, les deux fonctions x et y changent, ainsi que leurs dérivées. On obtiendra le lieu des tangentes à toutes les courbes tracées sur la surface, en éliminant les deux paramètres variables x' et y' entre les équations (7) de la tangente et l'équation de condition (6). Ce lieu a pour équation

(8) $$(X-x)f'_x+(Y-y)f'_y+(Z-z)f'_z=0.$$

C'est un plan qu'on appelle le *plan tangent* à la surface au point M.

La *normale* à la surface au point M est la perpendiculaire menée par le point M au plan tangent à la surface en ce point; quand les axes sont rectangulaires, les équations de la normale sont

(9) $$\frac{X-x}{f'_x}=\frac{Y-y}{f'_y}=\frac{Z-z}{f'_z}.$$

Nous avons démontré qu'en général les tangentes aux diverses courbes tracées sur une surface par un point M sont dans un même plan; il y a exception lorsque les trois dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z sont nulles au point M; car alors l'équation de condition (6) devient une identité, et pour trouver le lieu des tangentes, il faut recourir à un calcul plus compliqué. Cette circonstance se présente au sommet d'un cône; les tangentes aux diverses courbes tracées sur la surface par ce point sont les arêtes du cône, et le lieu des tangentes est le cône lui-même. Lorsqu'une surface a un point singulier de cette sorte, le lieu des tangentes en ce point, au lieu d'être un plan, est un cône.

475 — Considérons en particulier les surfaces du second degré: soit

$$(10)\qquad \begin{aligned} f(x,y,z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx \\ + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0 \end{aligned}$$

l'équation de la surface. On a

$$\begin{aligned} f'_x &= 2(A\,x + B''y + B'\,z + C\,), \\ f'_y &= 2(B''x + A'y + B\,z + C'), \\ f'_z &= 2(B'x + B\,y + A''z + C''), \end{aligned}$$

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z$$

$$= 2(Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + Cx + C'y + C''z),$$

le point M étant sur la surface, ses coordonnées vérifient l'équation (10), et l'expression précédente se réduit à

$$-2(Cx + C'y + C''z + F).$$

L'équation (8) du plan tangent devient ainsi

$$(11)\qquad \begin{aligned} (Ax + B''y + B'z + C)X + (B''x + A'y + Bz + C')Y \\ + (B'x + By + A''z + C'')Z + (Cx + C'y + C''z + F) = 0. \end{aligned}$$

On remarque que les coordonnées du point de contact n'entrent qu'au premier degré dans cette équation. Comme on peut mettre cette équation sous la forme

$$(12)\qquad \begin{aligned} (AX + B''Y + B'Z + C)\,x + (B''X + A'Y + BZ + C')\,y \\ + (B'X + BY + A''Z + C'')z + (CX + C'Y + C''Z + F) = 0, \end{aligned}$$

on remarque aussi qu'elle ne change pas, quand on permute les lettres x et X, y et Y, z et Z.

476 — Proposons-nous maintenant de mener des plans tangents à une surface du second degré par un point donné P, non situé sur la surface et ayant pour coordonnées x_1, y_1, z_1. Prenons pour inconnues les coordonnées x, y, z de l'un des points de contact M; ces coordonnées doivent vérifier l'équation (10); d'autre part, le plan tangent en M devant passer par le point P, les coordonnées de ce point vérifient l'équation (11) ou l'équation (12), et l'on a

$$(13)\quad (Ax_1+B''y_1+B'z_1+C)x+(B''x_1+A'y_1+Bz_1+C')y \\ +(B'x_1+By_1+A''z_1+C'')z+(Cx_1+C'y_1+C''z_1+F)=0.$$

Le lieu du point de contact est la courbe plane suivant laquelle le plan (13) coupe la surface du second degré. Considérons le cône qui a pour sommet le point P et pour directrice cette courbe plane; par un point quelconque M de cette ligne passe une arête du cône, laquelle est située dans le plan tangent en M à la surface; ce plan, contenant aussi la tangente en M à la courbe directrice, n'est autre chose que le plan tangent au cône suivant l'arête PM; le cône est donc tangent à la surface du second degré en tous les points de la courbe directrice.

477 — Nous donnerons encore quelques propriétés du plan tangent à une surface réglée. Soient G et G_1 deux positions voisines de la génératrice, PP_1 la perpendiculaire commune à ces deux droites (fig. 291); par le point P menons PH parallèle à P_1G_1; le plan mené par un point M de la droite G perpendiculairement à cette droite détermine un triangle rectangle MQM_1; appelons r la perpendiculaire commune PP_1, ρ la longueur PM, φ l'angle GPH, θ l'angle que fait le plan GMM_1 avec le plan GPP_1, qui est perpendiculaire au plan GPH; l'angle θ étant complémentaire de l'angle QMM_1, on a

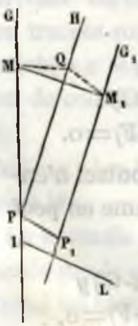


Fig. 291.

$$\tang\theta = \frac{MQ}{M_1Q} = \frac{\rho\tang\varphi}{r} = \frac{\tang\varphi}{\varphi}\times\frac{\rho}{\left(\frac{r}{\varphi}\right)}.$$

Quand la génératrice G_1 se rapproche indéfiniment de G, le point P tend vers une position limite I, que l'on appelle le *point central* sur la génératrice G; la droite PP_1 tend vers une direction limite IL, perpendiculaire à la position limite du plan GPH; le plan GPP_1 devient tangent en I et le plan GMM_1 tangent en M; si l'on appelle k la limite du rapport $\frac{r}{\varphi}$, l'équation précédente se réduit à

$$\text{(14)} \qquad \tang \theta = \frac{\rho}{k}.$$

On déduit de cette équation plusieurs conséquences remarquables. Quand le point M parcourt la droite G, ρ variant de $-\infty$ à $+\infty$, θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$; le plan tangent tourne de deux angles droits autour de la droite G, toujours dans le même sens. Tout plan mené par la droite G est tangent en un point de cette droite, et en un seul point.

Lorsque les génératrices de la surface réglée sont toutes parallèles à un même plan, auquel on donne le nom de *plan directeur*, le plan GPH lui est parallèle et conserve par conséquent une direction invariable. Concevons que l'on projette orthogonalement toutes les génératrices sur le plan directeur, et considérons l'enveloppe de ces projections ; le point P aura pour projection le point d'intersection des deux tangentes, projection des droites PG, P_1G_1; il tendra donc vers une position limite I, ayant pour projection le point où la projection de PG touche l'enveloppe.

478 — Imaginons une seconde surface réglée ayant avec la première une génératrice commune G. Le point central I' ayant une autre position sur la droite G, et le plan tangent GI'L' en ce point ne coïncidant pas avec GIL, le plan tangent à la seconde surface au point M est déterminé par l'équation

$$\text{(15)} \qquad \tang(\theta - \theta_0) = \frac{\rho - \rho_0}{k_1},$$

dans laquelle ρ_0 désigne la distance II' et θ_0 l'angle des plans GIL, GI'L'. On obtiendra les points de la génératrice G où les deux surfaces ont le même plan tangent en résolvant les deux équations (14) et (15) à deux inconnues ρ et θ ; l'élimination de θ donnant une équation du second degré en ρ, on en conclut que les deux surfaces ont même plan tangent en deux points sur la génératrice commune. Si elles avaient même plan tangent en trois points, l'équation du second degré devenant une identité, le plan tangent serait le même en chaque point, et l'on dirait que les deux surfaces se raccordent suivant la génératrice commune.

Lorsque les deux surfaces réglées ont leurs génératrices parallèles à un même plan directeur, l'angle θ_0 est nul et l'équation s'abaisse au premier degré. Ainsi, il n'existe en général sur la génératrice commune qu'un point où les deux surfaces ont même plan tangent. Si les surfaces avaient même plan tangent en deux points, elles se raccorderaient suivant la génératrice commune.

479 — Il est facile de démontrer d'une manière générale l'existence du point central I sur chaque génératrice, et d'en déterminer la position. On peut représenter la génératrice mobile G par des équations de la forme

$$(16)\qquad x = az + p, \quad y = bz + q,$$

dans lesquelles les quatre paramètres a, b, p, q sont des fonctions d'une même variable t, fonctions dont nous désignerons les dérivées par a', b', p', q'. Soient

$$x = a_1 z + p_1, \quad y = b_1 z + q_1$$

les équations d'une génératrice voisine G_1. D'après l'équation (26) du n° 458, le plan G_1P_1P a pour équation

$$(a_1 - a)(x - a_1 z - p_1) + (b_1 - b)(y - b_1 z - q_1) + (ba_1 - ab_1)[b_1(x - p_1) - a_1(y - q_1)] = 0.$$

Cette équation, jointe aux deux équations (16), détermine le point P; on en déduit

$$z = -\frac{(a_1 - a)(p_1 - p) + (b_1 - b)(q_1 - q) + (ab_1 - ba_1)[a_1(q_1 - q) - b_1(p_1 - p)]}{(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 + (ab_1 - ba_1)^2}.$$

Appelons Δa, Δb, Δp, Δq les variations des quatre paramètres, quand t éprouve la variation Δt, c'est-à-dire quand on passe de la génératrice G à la génératrice G_1; la formule précédente devient

$$z = -\frac{\frac{\Delta a}{\Delta t}\frac{\Delta p}{\Delta t} + \frac{\Delta b}{\Delta t}\frac{\Delta q}{\Delta t} + \left(a\frac{\Delta b}{\Delta t} - b\frac{\Delta a}{\Delta t}\right)\left(a_1\frac{\Delta q}{\Delta t} - b_1\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)}{\left(\frac{\Delta a}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\Delta t}\right)^2 + \left(a\frac{\Delta b}{\Delta t} - b\frac{\Delta a}{\Delta t}\right)^2}$$

et se réduit à

$$(17)\qquad z_0 = -\frac{a'p' + b'q' + (ab' - ba')(aq' - bp')}{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2},$$

quand Δt tend vers zéro. Le dénominateur n'étant pas nul, on trouve pour la coordonnée z_0 du point I une valeur finie. Cette équation, jointe aux deux équations

$$x_0 = az_0 + p, \quad y_0 = bz_0 + q$$

donne le lieu du point I, ou la ligne de *striction* de la surface réglée.

De la formule (24) du n° 457 on déduit

$$\lim \frac{r}{\Delta t} = \pm \frac{b'p' - a'q'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}}.$$

Quant à l'angle φ, on a

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 + (ab_1 - ba_1)^2}{(a^2 + b^2 + 1)(a_1^2 + b_1^2 + 1)}},$$

$$\lim \frac{\varphi}{\Delta t} = \frac{\sqrt{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}}{a^2 + b^2 + 1}.$$

On obtient ainsi la valeur de k

$$(18)\qquad k = \pm \frac{(b'p' - a'q')(a^2 + b^2 + 1)}{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}.$$

480—Nous avons supposé la quantité k différente de zéro ; cette quantité sera nulle si l'on a

$$b'p' - a'q' = 0.$$

Dans ce cas, l'angle θ étant constamment égal à $\frac{\pi}{2}$, le plan tangent en M coïncide avec la position limite du plan GPH, et reste le même tout le long de la génératrice G. Si l'on pose $\frac{p'}{a'} = \frac{q'}{b'} = u$, la formule (17) se réduit à $z_0 = -u$, et l'on a $p' = -a'z_0$, $q' = -b'z_0$.

Cherchons la tangente à la ligne de striction ; en prenant les dérivées des quantités $x_0 = az + p$, $y_0 = bz_0 + q$, on a

$$x'_0 = az'_0 + a'z_0 + p' = az'_0,$$
$$y'_0 = bz'_0 + b'z_0 + q' = bz'_0,$$

ce qui fait voir que la génératrice G est tangente à la ligne de striction en I ; le plan tangent à la surface réglée le long de la génératrice, ou la limite du plan GPH, n'est autre chose que le plan osculateur à la courbe en I. La surface réglée appartient donc à la classe des surfaces développables.

Réciproquement, considérons la surface engendrée par une droite qui reste tangente à une courbe gauche donnée. Appellons x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe, et prenons z_0 pour variable indépendante ; les équations de la génératrice seront

$$x = x_0 + x'_0(z - z_0)$$
$$y = y_0 + y'_0(z - z_0).$$

On en déduit

$$a = x'_0, \quad b = y'_0, \quad p = x_0 - x'_0 z_0, \quad q = y_0 - y'_0 z_0,$$

et, en prenant les dérivées,

$$a' = x''_0, \quad b' = y''_0, \quad p' = -x''_0 z_0, \quad q' = -y''_0 z_0.$$

La condition

$$b'p' - a'q' = 0$$

étant satisfaite, le plan tangent est le même tout le long d'une génératrice. Ainsi, le caractère des surfaces développables est $b'p' - a'q' = 0$.

Deux directrices suffisent pour définir une surface développable.

SIMILITUDE.

481—La définition de l'*homothétie* et de la *similitude* pour les figures à trois dimensions est la même que pour les figures à deux dimensions (liv. IV, chap. v). En Géométrie plane, si l'on fait abstraction de la position des systèmes, l'homothétie inverse ne donne pas d'autres figures que l'homothétie directe ; il n'en est plus de même pour les figures dans l'espace. Considérons un premier système de points A, B, C,..., et après avoir choisi arbitrairement un centre de similitude, construisons un système A', B', C',.. homothétique direct, et un système A'', B'', C'',... homothétique inverse, avec le même rapport de similitude k ; ces deux systèmes sont symétriques l'un de l'autre par rapport au point O. On les rend symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan quelconque, mené par le centre de similitude, en faisant tourner l'un d'eux de 180° autour d'une perpendiculaire menée par le point O à ce plan. Il résulte de là que les systèmes homothétiques inverses du système donné sont les symétriques des systèmes homothétiques directs.

Une figure est semblable à une figure donnée lorsque, par un déplacement convenable, elle peut coïncider avec l'une des figures directement homothétiques à la figure donnée.

482 — On sait que l'on obtient toutes les surfaces semblables à une surface donnée, en prenant arbitrairement un centre de similitude, et en construisant avec ce centre les diverses surfaces homothétiques qui correspondent aux valeurs de k comprises entre 0 et ∞.

Exemple I. La surface donnée est une sphère. Prenons le centre de la sphère O pour centre de similitude ; le rayon OA étant constant, le rayon OA' sera également constant ; *une surface semblable à une sphère est une autre sphère qui peut avoir un rayon quelconque.*

Exemple II. La surface donnée est un cône. Prenons le sommet pour centre de similitude, deux points homologues seront situés sur la même génératrice du cône. *La seule figure semblable à un cône est ce cône lui-même.*

Exemple III. La surface est un cylindre. Prenons un point arbitraire O pour centre de similitude, et traçons sur le cylindre une courbe arbitraire C que nous prendrons pour directrice du cylindre. A la courbe C correspond une courbe homothétique C' et à toute génératrice du premier cylindre une droite parallèle passant par le point homologue du point où la courbe C est rencontrée par la première génératrice ; ainsi, *deux cylindres sont homothétiques lorsqu'ils ont pour directrices deux courbes homothétiques et leurs génératrices parallèles.*

Considérons deux cylindres homothétiques, ayant le point O pour centre de similitude ; si l'on mène par ce point une parallèle OO' aux génératrices des deux surfaces, tout point de cette droite est aussi un centre de similitude des deux surfaces. Il en résulte que les sections de deux cylindres homothétiques par le même plan sont des courbes homothétiques, ayant pour centre de similitude le point où le plan coupe la droite OO′. Comme les sections d'un cylindre par des plans parallèles sont égales, les sections de deux cylindres homothétiques par des plans parallèles sont homothétiques.

483 — *Les sections d'une surface du second degré par des plans parallèles sont des courbes homothétiques.* L'équation générale des surfaces du second degré est

$$(1)\qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0;$$

on obtient la projection sur le plan XOY de l'intersection de cette surface et du plan

$$(2)\qquad ax + by + cz = l,$$

en éliminant la variable z entre les équations (1) et (2). Or, dans l'équation ainsi obtenue, les coefficients des termes du second degré sont indépendants de l; on en conclut que, lorsque l varie, a, b, c restant fixes, c'est-à-dire lorsque le plan se déplace parallèlement à lui-même, les projections sont homothétiques; les cylindres projetants, ayant pour directrices des courbes homothétiques, sont coupés par deux plans parallèles suivant des courbes homothétiques. Quand ces courbes sont des hyperboles, l'une peut être homothétique à la conjuguée de l'autre (n° 394).

EXERCICES.

1° L'axe d'un cône de révolution passe à l'origine des coordonnées et fait avec les axes des angles α, β, γ; l'angle du cône est θ; trouver l'équation de la surface. Comme application, trouver les conditions pour que l'équation homogène du second degré représente un cône de révolution.

2° Étant donné un ellipsoïde de révolution aplati (surface engendrée par une ellipse tournant autour de son petit axe), le cône, engendré par une droite qui tourne autour du foyer de l'une des ellipses méridiennes en s'appuyant sur la section faite dans la surface par un plan passant par la directrice qui correspond à ce foyer, est un cône de révolution.

3° Étant donné un ellipsoïde de révolution allongé (surface engendrée par une ellipse tournant autour de son grand axe), le cône, qui a pour sommet l'un des deux foyers des sections méridiennes et pour base une section plane quelconque, est de révolution.

4° La projection d'une section plane d'un cône circulaire droit sur un plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet du cône a pour l'un de ses foyers le sommet du cône, et pour directrice correspondante la droite de rencontre des deux plans.

5° Lorsqu'une section plane d'un cône circulaire droit est une ellipse, la somme des arêtes qui aboutissent aux extrémités d'un diamètre de l'ellipse est constante.

6° Démontrer qu'un plan tangent au tore et passant par le centre coupe la surface suivant deux cercles.

La sphère qui a pour grand cercle un cercle tangent aux deux cercles qui forment l'un des méridiens du tore coupe le tore suivant deux cercles.

7° Trouver la section droite d'un cylindre circonscrit à un tore.

8° Démontrer que les six arêtes de deux trièdres trirectangles, ayant même sommet, appartiennent à un même cône du deuxième degré.

9° Étant donné un conoïde dont l'axe est perpendiculaire au plan directeur et qui enveloppe une sphère, trouver les projections de la courbe de contact sur le plan directeur et sur le plan mené par l'axe et le centre de la sphère.

10° Étant donné un système d'axes rectangulaires, un tore a pour méridien dans le plan ZOX un cercle qui a son centre sur l'axe OX ; cet axe rencontre le cercle en un point A, centre d'un nouveau cercle égal au premier et compris dans un plan parallèle à ZOY, une droite qui reste parallèle au plan XOY décrit un conoïde en s'appuyant sur ce second cercle et sur l'axe OZ ; on demande la projection sur le plan XOY de la courbe de rencontre des deux surfaces.

11° On suppose que le plan du second cercle du problème précédent s'enroule sur un cylindre circonscrit au tore et ayant des arêtes parallèles à l'axe du tore, et on remplace la directrice courbe du conoïde par la courbe en laquelle s'est transformé le cercle après l'enroulement du plan ; trouver la projection sur le plan XOY de la ligne de rencontre du nouveau conoïde et du tore (spirale d'Archimède).

12° Une sphère a son centre à l'origine des coordonnées que l'on suppose rectangulaires, l'axe OX perce la sphère en un point A ; dans le plan XOY, sur OA comme diamètre, on décrit un cercle qui sert de base à un cylindre dont les arêtes sont parallèles à OZ ; trouver : 1° les projections sur les trois plans coordonnés de la courbe de rencontre du cylindre et de la sphère ; 2° l'équation du cône qui a pour directrice cette courbe et pour sommet le point A, ce cône est un cône de révolution ; 3° les traces sur les plans des coordonnées des tangentes à la courbe.

LIVRE VI

SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE I

Centre et plans diamétraux.

484 — L'équation générale du second degré entre les trois variables x, y, z est de la forme

$$(1) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0;$$

elle renferme dix termes, ou neuf paramètres arbitraires. Nous représenterons le premier membre par $f(x, y, z)$. On pourrait, en suivant la marche adoptée en Géométrie plane pour l'étude des lignes du second degré, examiner les diverses formes du lieu défini par cette équation; mais, à cause du grand nombre des cas à considérer, cette discussion serait longue et pénible. Nous commencerons par simplifier l'équation (1) et nous ne nous occuperons ensuite que des équations réduites. Nous baserons cette réduction sur les propriétés du centre et des plans diamétraux dont nous allons nous occuper d'abord.

CENTRE.

485 — Un point I est le centre d'une surface, lorsque les points de la surface sont placés symétriquement, deux à deux, par rapport à ce point. Comme une ligne droite ne rencontre une surface du second degré qu'en deux points, il faut, pour qu'un point I soit le centre de la surface, que toutes les cordes menées par ce point y soient divisées en deux parties égales.

Lorsque l'origine des coordonnées est centre d'une surface du second degré, l'équation de la surface ne contient pas de termes du premier degré. En effet, les équations d'une droite menée par l'origine sont de la forme

$$x = mz, \quad y = nz. \tag{2}$$

Les coordonnées z des points de rencontre de la surface et de la droite sont données par l'équation

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}m^2 + \mathrm{A}'n^2 + \mathrm{A}'' + 2\mathrm{B}n + 2\mathrm{B}'m + 2\mathrm{B}''mn)\,z^2 \\ + 2(\mathrm{C}m + \mathrm{C}'n + \mathrm{C}'')z + \mathrm{F} = 0,\end{aligned} \tag{3}$$

que l'on obtient en éliminant x et y entre les équations (1) et (2). Si l'origine est centre, l'équation (3) a ses racines égales et de signes contraires, ce qui exige que le coefficient $\mathrm{C}m + \mathrm{C}'n + \mathrm{C}''$ soit nul ; et comme ceci doit avoir lieu pour une infinité de valeurs de m et de n prises arbitrairement, il faut que l'on ait séparément

$$\mathrm{C} = 0, \quad \mathrm{C}' = 0, \quad \mathrm{C}'' = 0.$$

La réciproque est vraie.

486 — D'après cela, pour déterminer le centre d'une surface du second degré, on transportera l'origine en un point I de l'espace, dont nous désignerons les coordonnées par a, b, c, et l'on verra s'il est possible de choisir ces valeurs de manière que la nouvelle équation ne contienne pas de termes du premier degré par rapport aux coordonnées nouvelles.

Lorsqu'on déplace les axes parallèlement à eux-mêmes, les formules de transformation sont $x = a + x'$, $y = b + y'$, $z = c + z'$; substituons dans l'équation (1) et effaçons les accents, nous aurons

$$\begin{aligned}\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy \\ + xf'_a(a,b,c) + yf'_b(a,b,c) + zf'_c(a,b,c) + f(a,b,c) = 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Les coordonnées du centre sont donc déterminées par les équations

$$f'_a(a,b,c,) = 0, \quad f'_b(a,b,c) = 0, \quad f'_c(a,b,c) = 0;$$

si l'on divise par 2 et si l'on remplace les lettres a, b, c par x, y, z, ces équations deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}\,x + \mathrm{B}''y + \mathrm{B}'z + \mathrm{C} = 0, \\ &\mathrm{B}''x + \mathrm{A}'y + \mathrm{B}\,z + \mathrm{C}' = 0, \\ &\mathrm{B}'x + \mathrm{B}\,y + \mathrm{A}''z + \mathrm{C}'' = 0.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Ainsi, *on obtient les coordonnées du centre en égalant à zéro les dérivées partielles du premier membre de l'équation de la surface, prises par rapport aux variables* x, y, z.

487 — Si l'on regarde x, y, z comme étant les coordonnées d'un point variable, chacune des équations (5) définit un plan ; le centre de la surface est le point commun aux trois plans. Plusieurs cas peuvent se présenter.

1° Les trois plans se coupent en un seul point ; la surface admet un centre unique.

2° Les trois plans se coupent deux à deux suivant des droites parallèles, ou deux d'entre eux au moins sont parallèles ; dans ce cas, les trois plans n'ont pas de point commun, et la surface n'a pas de centre.

3° Les trois plans se coupent suivant la même droite ou se confondent en un seul ; tous les points de la droite ou du plan sont centres de la surface.

La résolution des équations (5) donne pour valeur du dénominateur commun D,

$$D = AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B''. \tag{6}$$

Lorsque D n'est pas nul, les équations sont vérifiées par un système de valeurs finies et par un seul ; la surface admet un centre unique. Lorsque D est nul, il y a impossibilité ou indétermination, et, par conséquent, la surface est dépourvue de centre, ou elle en admet une infinité.

488 — Supposons que tous les points de la droite CC′ (fig. 292) soient des centres. Si l'on joint un point M de la surface à un point quelconque I de la droite CC′, et que l'on prolonge d'une longueur IN égale à MI, le point N appartient à la surface ; en joignant ainsi le point M à tous les points de CC′, on obtient une droite NN′ parallèle à CC′.

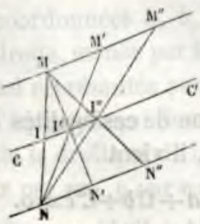


Fig. 292.

Si l'on joint maintenant le point N à tous les points de CC′, on forme de même une seconde droite MM′ parallèle à NN′. La surface se compose donc de droites parallèles à CC′ et situées deux à deux dans un même plan avec cette droite et à égale distance de part et d'autre; c'est un cylindre qui a pour axe CC', et, comme la trace du cylindre sur un plan non parallèle aux arêtes est une courbe du second degré ayant son centre sur l'axe, le cylindre est elliptique ou hyperbolique.

Le raisonnement précédent démontre que, dans le cas que nous considérons, l'équation (1) ne peut pas représenter d'autres surfaces courbes que des cylindres elliptiques ou hyperboliques; mais il peut arriver que cette équation représente une seule droite ou deux plans, et enfin qu'elle n'ait pas de solutions réelles.

On démontre de la même manière que, lorsque tous les points d'un plan sont des centres, l'équation (1) représente, ou deux plans parallèles, ou un plan unique, ou qu'elle n'admet pas de solution réelle.

489 — Lorsque la surface admet un centre I ayant pour coordonnées $a, b, c,$ si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point, l'équation (4) se réduit à

$$(7) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + F_1 = 0,$$

la constante F_1 ayant pour valeur

$$F_1 = Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ca + 2B''ab + 2Ca + 2C'b + 2C''c + F.$$

Les nombres a, b, c vérifient les relations (5), c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{aligned} Aa + B''b + B'c + C &= 0,\\ B''a + A'b + Bc + C' &= 0,\\ B'a + Bb + A''c + C'' &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on multiplie les deux membres de chacune de ces égalités respectivement par $a, b, c,$ et que l'on ajoute, il vient

$$Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ca + 2B''ab + Ca + C'b + C''c = 0.$$

La valeur de F_1 se réduit donc à

$$F_1 = F + Ca + C'b + C''c;$$

on l'obtient en *ajoutant à l'ancien terme constant la moitié des* *valeurs que prennent les termes du premier degré lorsqu'on y remplace* x, y, z *par les coordonnées du centre.*

Lorsque le nouveau terme constant F_1 est égal à zéro, l'équation (7), étant homogène par rapport à x, y, z, représente un cône ayant pour sommet l'origine (nº 464) ; cependant, le lieu peut se réduire à deux plans, à une droite, ou à un point.

490 — Nous avons vu que les tangentes aux diverses courbes tracées par un même point sur une surface sont situées dans un même plan ; il n'y a d'exception que lorsque les coordonnées du point annulent à la fois les trois dérivées partielles du premier membre de l'équation par rapport à x, y, z. Dans le cas des surfaces du second degré, un pareil point est centre de la surface ; ce point étant aussi situé sur la surface, quand on y transporte l'origine des coordonnées, la constante F_1 est nulle ; ainsi, pour les surfaces du second degré, l'exception n'a lieu que dans le cas du cône, quand le point est le sommet.

PLANS DIAMÉTRAUX.

491 — Une ligne droite ne perce une surface du second degré qu'en deux points; la surface, qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à une même direction, a été appelée surface diamétrale.

Soint m et n les paramètres constants qui définissent la direction des cordes ; transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en un point quelconque de l'espace, ayant pour coordonnées a, b, c, l'équation (1) prend la forme (4). Une droite, menée par la nouvelle origine dans la direction donnée, est représentée par les équations $x = mz$, $y = nz$. On obtient l'équation qui donne les coordonnées z des points de rencontre de la droite et de la surface, en remplaçant dans l'équation (4) x par mz, y par nz ; on a ainsi

$$\begin{aligned}(8) \qquad & (Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn)z^2 \\ & + (mf'_a + nf'_b + f'_c)z + f(a, b, c) = 0.\end{aligned}$$

Pour que le point (a, b, c) soit le milieu de la corde menée par ce point dans la direction donnée, il faut que l'équation précédente ait ses deux racines égales et de signes contraires, ce qui exige que les coordonnées a, b, c vérifient la relation

$$mf'_a + nf'_b + f'_c = 0.$$

Cette équation, étant vérifiée par les coordonnées du point milieu de l'une quelconque des cordes de la série considérée, représente le lieu cherché. Remplaçons a, b, c par x, y, z ; cette équation s'écrit

$$(9) \qquad mf'_x(x,y,z) + nf'_y(x,y,z) + f'_z(x,y,z) = 0;$$

comme elle est du premier degré, elle représente un plan. Ainsi, *dans les surfaces du second degré, quelle que soit la direction des cordes, la surface diamétrale est un plan.*

492 — Si les paramètres m et n satisfont à la relation

$$Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn = 0,$$

l'équation (8) s'abaisse au premier degré, c'est-à-dire que chacune des droites parallèles à la direction donnée ne perce la surface qu'en un point. Dans ce cas, le plan représenté par l'équation (9) est le lieu des points tels que les droites menées par chacun d'eux parallèlement à la direction donnée ne rencontrent pas la surface, ou sont situées entièrement sur la surface. On voit aisément que ce plan est parallèle à la direction donnée et par conséquent contient toutes les droites dont nous venons de parler.

L'équation (9) est vérifiée, quelles que soient m et n, par les valeurs de x, y, z qui satisfont à la fois aux trois équations qui déterminent le centre,

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0;$$

il en résulte que tous les plans diamétraux passent par le centre de la surface, quand il y en a un, ou par le lieu des centres, s'il y en a une infinité.

493 — Lorsque la surface est dépourvue de centre, les trois plans définis par les équations (5) sont parallèles, ou la droite d'intersection de deux d'entre eux est parallèle au troisième. Dans le premier cas, on a

$$f'_x = \alpha f'_z + p, \quad f'_y = \beta f'_z + q,$$

α, β, p, q désignant des constantes; l'équation (9) se réduit à

$$(\alpha m + \beta n + 1) f'_z + mp + nq = 0;$$

elle représente, pour toutes les valeurs de m et de n, des plans parallèles entre eux. Dans le second cas, si les plans définis par les deux équations $f'_x=0$, $f'_y=0$ se coupent suivant une droite parallèle au plan $f'_z=0$, l'équation générale des plans qui passent par la droite d'intersection des deux premiers étant $\alpha f'_x+\beta f'_y=0$, on a

$$f'_z=\alpha f'_x+\beta f'_y+r,$$

α, β, r étant des constantes ; et, par suite, l'équation (9) prend la forme

$$(m+\alpha)f'_x+(n+\beta)f'_y+r=0;$$

elle représente des plans parallèles à la droite d'intersection des deux plans

$$f'_x=0,\quad f'_y=0.$$

Ainsi *les surfaces dépourvues de centre ont leurs plans diamétraux parallèles à une même droite ou parallèles entre eux.*

494—Considérons une direction à laquelle corresponde un plan diamétral ; si l'on prend pour axe des z une des cordes, pour axe des x et des y deux droites situées dans le plan diamétral, l'équation de la surface devra être vérifiée par deux valeurs de z égales et de signes contraires, pour chaque système de valeurs attribuées arbitrairement aux variabes x et y ; elle aura donc la forme

$$Pz^2+f_1(x,y)=0,$$

$f_1(x,y)$ désignant une fonction des deux variables x et y et dont le degré ne surpasse pas 2. Déplaçons les axes des x et des y dans le plan XOY en conservant à l'axe des z sa direction ; ce changement des coordonnées s'effectue par les formules de la Géométrie plane. Lorsque la fonction $f_1(x,y)$ est du second degré, nous avons vu (liv. III, chap. II) que l'on peut choisir d'une infinité de manières les nouveaux axes OX, OY, de telle sorte que cette fonction se réduise à l'une des formes

$$Mx^2+Ny^2+F_1,\quad Ny^2+Qx,\quad Ny^2+F_1,$$

et alors l'équation de la surface sera elle-même ramenée à l'une des formes

(I) $$Mx^2+Ny^2+Pz^2+F_1=0,$$

(II) $$Ny^2+Pz^2+Qx=0,$$

(III) $$Ny^2+Pz^2+F_1=0.$$

Si la fonction f_1 est du premier degré, on la ramène par le même changement à la forme Qx, et l'équation de la surface devient

$$\text{(IV)} \qquad Pz^2 + Qx = 0.$$

Enfin, si la fonction f_1 se réduit à une constante, l'équation de la surface est

$$\text{(V)} \qquad Pz^2 + F_1 = 0.$$

495 — Dans ce qui précède, les lettres M, N, P, Q désignent des constantes différentes de zéro, et F_1 une constante qui peut être nulle. L'équation (III), si elle a des solutions réelles, représente un cylindre elliptique ou hyperbolique, une droite, ou deux plans qui se coupent. L'équation (IV) représente un cylindre parabolique. Si l'équation (V) a des solutions réelles, elle représente deux plans parallèles, ou un plan unique. Ainsi, quand on fait abstraction des cylindres, on voit que l'équation du second degré peut, d'une infinité de manières, être ramenée à l'une des formes (I) et (II).

Considérons l'équation (I) ; en égalant à zéro les dérivées partielles de son premier membre, on obtient trois équations qui ont une solution unique ; la surface admet donc un centre unique, l'origine des coordonnées. Chacun des plans des coordonnées est le plan diamétral des cordes parallèles à l'intersection des deux autres ; à cause de cette propriété, on les nomme plans diamétraux conjugués.

L'équation (II) représente des surfaces dépourvues de centre puisque l'équation $f'_x = 0$ se réduit à $Q = 0$. Le plan XOZ partage en deux parties égales les cordes parallèles à OY et le plan XOY les cordes parallèles à OZ ; les lignes parallèles à OX ne percent la surface qu'en un point, et il n'y a pas de plan diamétral correspondant.

DIAMÈTRES.

496 — Nous avons vu que les sections faites par des plans parallèles dans une surface du second ordre sont des courbes homothétiques (n° 483) ; quand ces courbes sont des courbes à centre, le lieu des centres s'appelle *diamètre*.

Le plan sécant est représenté par une équation

$$(10)\qquad ax + by + cz = l,$$

dans laquelle a, b, c sont des constantes, et l un paramètre variable ; si, dans l'équation de la surface $f(x, y, z) = 0$, on remplace z par sa valeur

$$(11)\qquad z = \frac{l - ax - by}{c}$$

tirée de l'équation du plan, on obtient l'équation de la projection de la courbe d'intersection sur le plan des xy ; pour avoir le centre de la courbe projection, il faudra égaler à zéro les dérivées relatives à x et à y. Mais on peut obtenir ces dérivées sans faire la substitution ; il suffit d'appliquer à la fonction $f(x, y, z)$ le théorème des fonctions composées, en regardant z comme une fonction des deux variables x et y donnée par la formule (11) ; on a ainsi les deux équations

$$(12)\qquad f'_x - \frac{a}{c} f'_z = 0, \quad f'_y - \frac{b}{c} f'_z = 0.$$

Quand on projette une courbe sur un plan, il est évident que le centre de la courbe proposée se projette au centre de la courbe projection ; les équations (12), jointes à l'équation du plan, détermineront donc le centre de la courbe d'intersection. Comme les équations (12) ne contiennent pas le paramètre variable l, elles représentent le lieu des centres ; ainsi le diamètre est la droite représentée par les équations

$$(13)\qquad \frac{f'_x}{a} = \frac{f'_y}{b} = \frac{f'_z}{c}.$$

PLANS PRINCIPAUX.

497 — Parmi les plans diamétraux d'une surface du second degré, on distingue en particulier ceux qui sont perpendiculaires aux cordes qu'ils divisent en deux parties égales ; ce sont des plans de symétrie de la figure ; on les nomme *plans principaux*. Dans ce qui précède, les axes des coordonnées étaient quelconques ; dans la recherche des plans principaux, nous supposerons les axes rectangulaires. Si l'on désigne par α, β,

γ les cosinus des angles que fait avec les axes une direction donnée, les équations des cordes peuvent se mettre sous la forme

$$(14) \qquad \frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma}=\rho,$$

a, b, c étant les coordonnées d'un point particulier I de cette corde, et x, y, z celles d'un point quelconque de cette même corde. La lettre ρ désigne la distance du premier point au second, affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant qu'elle est comptée dans la direction donnée ou dans la direction opposée.

On obtient l'équation qui donne les distances du point I aux points de rencontre de la courbe et de la surface en remplaçant dans l'équation (4) du n° 486 les lettres x, y, z par $\alpha\rho$, $\beta\rho$, $\gamma\rho$, cette équation devient ainsi :

$$(15) \qquad S\rho^2+T\rho+R=0,$$

en posant, pour abréger,

$$(16) \qquad \begin{cases} S=A\alpha^2+A'\beta^2+A''\gamma^2+2B\beta\gamma+2B'\gamma\alpha+2B''\alpha\beta, \\ T=\alpha f'_a(a,b,c)+\beta f'_b(a,b,c)+\gamma f'_c(a,b,c), \\ R=f(a,b,c). \end{cases}$$

Si l'on suppose le point I fixe et que l'on fasse varier les angles α, β, γ, on peut regarder l'équation (15) comme représentant la surface en coordonnées polaires. Le coefficient S de ρ^2 ne dépend que de la direction du rayon vecteur, le terme constant R ne dépend que de la position du point I, tandis que le coefficient T varie à la fois avec la direction du rayon vecteur et la position du point I.

498 — L'équation du plan diamétral des cordes parallèles à la direction (α, β, γ) prend la forme

$$\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z=0,$$

c'est-à-dire

$$(17) \qquad \begin{aligned}&(A\alpha+B''\beta+B'\gamma)x+(B''\alpha+A'\beta+B\gamma)y \\ &+(B'\alpha+B\beta+A''\gamma)z+C\alpha+C'\beta+C''\gamma=0.\end{aligned}$$

Soient λ, μ, ν les cosinus des angles que fait avec les axes des coordonnées la normale à ce plan diamétral, θ l'angle de la normale avec la direction des cordes, on a

$$\frac{\lambda}{A\alpha + B''\beta + B'\gamma} = \frac{\mu}{B''\alpha + A'\beta + B\gamma} = \frac{\nu}{B'\alpha + B\beta + A''\gamma}$$

$$= \frac{\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu}{\alpha(A\alpha + B''\beta + B'\gamma) + \beta(B''\alpha + \ldots) + \ldots} = \frac{\cos\theta}{S}.$$

Pour que le plan diamétral soit un plan principal, il faut que la normale au plan coïncide avec la direction des cordes; on doit donc avoir les relations

$$(18)\qquad \frac{\alpha}{A\alpha + B''\beta + B'\gamma} = \frac{\beta}{B''\alpha + A'\beta + B\gamma} = \frac{\gamma}{B'\alpha + B\beta + A''\gamma} = \frac{1}{S};$$

alors l'équation (17) du plan principal devient

$$(19)\qquad S(\alpha x + \beta y + \gamma z) + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

499 — Des équations (18) on déduit les suivantes

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} (A - S)\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0, \\ B''\alpha + (A' - S)\beta + B\gamma = 0, \\ B'\alpha + B\beta + (A'' - S)\gamma = 0; \end{array}\right.$$

en y joignant la relation

$$(21)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

on a à résoudre un système de quatre équations à quatre inconnues.

Les trois inconnues α, β, γ ne pouvant être nulles en même temps, puisque la somme de leurs carrés doit être égale à l'unité, l'une au moins, par exemple γ, est différente de zéro. Pour résoudre ce système d'équations, on imaginera les premiers membres des trois équations (20) divisés par γ, on tirera des deux premières les valeurs des rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$; substituant dans la troisième, on aura une équation ne renfermant plus que l'inconnue auxiliaire S ; cette quantité connue, comme on a déjà les valeurs des rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, on obtiendra les cosinus au moyen de l'équation (21).

Au lieu de diviser par γ, supposons qu'on tire des deux premières des équations (20) les valeurs de α et β, et qu'on substitue dans la troisième, on arrivera à une équation de la forme $D_1\gamma = 0$; puisque γ est différent de zéro, on posera $D_1 = 0$; c'est l'équation en S. Mais il est évident que le polynôme D_1 n'est autre chose que le dénominateur commun des formules de résolution du système (20), considéré comme un système à trois inconnues α, β, γ. On observe aussi que l'on peut former ce polynôme en remplaçant dans le polynôme que nous avons apppelé D (nº 487) les lettres A, A′, A″ par A—S, A′—S, A″—S. L'équation qui donne l'inconnue S est donc

$$(22)\qquad (A-S)(A'-S)(A''-S)-(A-S)B^2-(A'-S)B'^2 \\ -(A''-S)B''^2+2BB'B''=0;$$

quand on développe le polynôme par rapport aux puissances de S, on voit que le terme indépendant de S est la quantité D elle-même.

500 — Lorsque les trois coefficients B, B′, B″ sont différents de zéro, on arrive à une forme d'équation plus commode à discuter, en faisant l'élimination d'une autre manière : multiplions les équations (20) respectivement par B, B′, B″ et retranchons les résultats deux à deux, il vient

$$(23)\quad [(S-A)B+B'B'']\alpha = [(S-A')B'+B''B]\beta = [(S-A'')B''+BB']\gamma,$$

ou

$$\frac{\alpha}{\dfrac{1}{(S-A)B+B'B''}} = \frac{\beta}{\dfrac{1}{(S-A')B'+B''B}} = \frac{\gamma}{\dfrac{1}{(S-A'')B''+BB'}}.$$

Si l'on substitue dans l'une des mêmes équations, la première par exemple, à la place de α, β, γ les quantités proportionnelles, on a

$$\frac{(A-S)}{(S-A)B+B'B''}+\frac{B''}{(S-A')B'+B''B}+\frac{B'}{(S-A')B''+BB'}=0,$$

ou

$$\frac{B'B''}{(S-A)B+B'B''}+\frac{B''B}{(S-A')B'+B''B}+\frac{BB'}{(S-A')B''+BB'}-1=0,$$

ou encore

$$(24)\qquad \frac{1}{B^2(S-a)}+\frac{1}{B'^2(S-b)}+\frac{1}{B''^2(S-c)}-\frac{1}{BB'B''}=0,$$

en désignant par a, b, c les quantités

$$A - \frac{B'B''}{B}, \quad A' - \frac{B''B}{B'}, \quad A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

DISCUSSION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

501 — Considérons d'abord le cas le plus général, celui où aucun des coefficients B, B', B'' n'est nul. Prenons l'équation en S sous la forme (24).

I. — Supposons que les trois quantités a, b, c soient différentes et rangées par ordre de grandeur croissante. Substituons successivement à la place de S, dans le premier membre de l'équation (24), les quantités $a \pm \varepsilon$, $b \pm \varepsilon'$, $c \pm \varepsilon''$, (ε, ε', ε'') désignant de très-petites quantités positives. Par la première substitution, le premier terme de l'équation prend la valeur $\pm \frac{1}{B^2\varepsilon}$, très-grande numériquement, tandis que les autres termes conservent des valeurs finies; ce premier terme donne donc son signe au polynôme. De même, par la seconde substitution, le second terme prend la valeur très-grande $\pm \frac{1}{B'^2\varepsilon'}$, tandis que les autres termes conservent des valeurs finies; ce second terme donne donc son signe au polynôme. De même, par la troisième substitution, le troisième terme $\pm \frac{1}{B''^2\varepsilon''}$ donne son signe au polynôme.

Quand S varie de $a + \varepsilon$ à $b - \varepsilon'$, le premier membre reste fini et varie d'une manière continue; puisque ces deux nombres donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent entre eux une racine réelle de l'équation; ainsi il y a une racine réelle de l'équation comprise entre a et b. On reconnaît de la même manière qu'il y en a une seconde entre b et c. Il y en a une troisième plus grande que c ou plus petite que a, suivant que la quantité BB'B'' est positive ou négative; en effet, quand on donne à S une valeur très-grande numériquement, le premier membre de l'équation (24) se réduit à $-\frac{1}{BB'B''}$; donc si la quantité BB'B'' est positive, le premier membre change de signe, quand S varie de $c + \varepsilon''$ à $+\infty$, et, par suite, il y a une racine réelle plus grande que c; lorsque la quantité $BB'B''$ est négative, le premier membre change de signe quand S varie de $-\infty$ à $a - \varepsilon$; dans ce cas, la troisième racine est plus petite que a.

Ainsi, dans le cas que nous considérons, les trois racines de l'équation sont réelles et inégales. A chacune de ces racines correspond une direction des cordes unique et déterminée; car, si dans les relations (23) on remplace S par l'une des racines, les trois parenthèses étant différentes de zéro, on obtient pour les trois cosinus des valeurs finies et déterminées.

II. — Supposons que deux des trois quantités a, b, c, par exemple a et b, soient égales. Les trois racines sont encore réelles et inégales; mais l'une d'elles est égale à a. En effet, l'équation (24), mise sous forme entière, devient

$$(25) \qquad B'^2B''^2(S-b)(S-c) + B''^2B^2(S-c)(S-a) + B^2B'^2(S-a)(S-b) - BB'B''(S-a)(S-b)(S-c) = 0.$$

Quand $a = b$, le premier membre est divisible par $S - a$, et l'on a l'équation du second degré

$$B''^2(B^2 + B'^2)(S-c) + B^2B'^2(S-a) - BB'B''(S-a)(S-c) = 0.$$

Le premier membre prenant des valeurs de signes contraires, quand on attribue à S les valeurs a et c, cette équation a ses deux racines réelles et l'une est comprise entre a et c.

Si dans les relations (23) on remplace S successivement par chacune des racines de l'équation du second degré, aucune des trois parenthèses ne s'annule, et chaque racine donne une direction unique et déterminée. Pour la première racine a, les deux premières parenthèses sont nulles, sans que la dernière le soit; il en résulte $\gamma = 0$; pour vérifier les équations (20), il faut prendre en outre $B'\alpha + B\beta = 0$, ce qui détermine encore une direction unique parallèle au plan des xy.

III. — Enfin, si les trois quantités a, b, c sont égales, deux racines de l'équation (25) deviennent égales à a, et la troisième est donnée par l'équation du premier degré

$$(B'^2B''^2 + B''^2B^2 + B^2B'^2) - BB'B''(S-a) = 0.$$

A cette racine simple correspond une direction unique. Pour la racine double, les trois équations (20) se réduisent à une seule $B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = 0$, et il y a indétermination ; toutes les directions parallèles au plan $B'B''x + B''By + BB'o = 0$ conviennent à cette racine double.

502 — Considérons maintenant le cas où les trois coefficients B, B', B'' ne sont pas différents de zéro.

I. — Un seul coefficient est nul, par exemple B''. L'équation du troisième degré (22) devient

$$(S-A)(S-A')(S-A'')-(S-A)B^2-(S-A')B'^2=0.$$

Soit $A<A'$; les substitutions de $-\infty$, A, A', $+\infty$ dans le premier membre donnent des résultats affectés respectivement des signes $-$, $+$, $-$, $+$; donc l'équation a ses trois racines réelles et inégales. Les équations (20) donnent pour chacune d'elles une direction déterminée ; car des deux premières on déduit des valeurs finies pour les rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$.

II. — Deux coefficients sont nuls, par exemple B' et B''. L'équation du troisième degré (22) se réduit à

$$(S-A)[(S-A')(S-A'')-B^2]=0;$$

elle admet la racine A et deux racines réelles et inégales données par une équation du second degré. Si la quantité $(A-A')(A-A'')-B^2$ est différente de zéro, aucune des deux racines de l'équation du second degré n'est égale à A, et, par conséquent, les trois racines sont inégales; pour $S=A$ les équations (20) se réduisent à

$$(A'-A)\beta+B\gamma=0, \quad B\beta+(A''-A)\gamma=0,$$

et ne peuvent être vérifiées que par les valeurs $\beta=0$, $\gamma=0$, d'où $\alpha=1$, ce qui donne une direction bien déterminée. Pour chacune des deux autres racines, ces équations se réduisent à $\alpha=0$, $(A'-S)\beta+B\gamma=0$, ce qui donne encore une direction bien déterminée.

Si l'on a $(A-A')(A-A'')-B^2=0$, l'une des racines de l'équation du second degré étant égale à A, l'équation admet la racine double A et une racine simple. A la racine simple, correspond une direction déterminée ; pour la racine double A, les équations (20) se réduisent à une seule

$$(A'-A)\beta+B\gamma=0,$$

ce qui donne toutes les directions parallèles au plan

$$(A'-A)y+Bz=0.$$

III. — Lorsque les trois coefficients B, B', B'' sont nuls à la fois, l'équation (22) se réduit à

$$(S-A)(S-A')(S-A'')=0,$$

et admet pour racines A, A', A''. Quand ces trois racines sont inégales, les équations (20) montrent qu'à ces racines correspondent des directions respectivement parallèles à chacun des trois axes coordonnés. Si $A=A'$, à cette racine double correspondent toutes les directions parallèlles au plan des xy. Enfin, si $A=A'=A''$, à cette racine triple correspondent toutes les directions de l'espace, il y a ici indétermination absolue, car les équations (20) deviennent alors des identités.

Ainsi, en résumé, *l'équation du troisième degré en* S *a toujours ses trois racines réelles. A une racine simple correspond une direction déterminée ; à une racine double toutes les directions parallèles à un plan ; à une racine triple toutes celles de l'espace.*

503 — Soient $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma')$ les cosinus des angles que font avec les axes des coordonnées les directions qui correspondent à deux racines différentes S et S'. On a, en vertu des équations (20),

$$\left\{\begin{aligned} A\alpha+B''\beta+B'\gamma&=S\alpha,\\ B''\alpha+A'\beta+B\gamma&=S\beta,\\ B'\alpha+B\beta+A''\gamma&=S\gamma,\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} A\alpha'+B''\beta'+B'\gamma'&=S'\alpha',\\ B''\alpha'+A\beta'+B\gamma'&=S'\beta',\\ B'\alpha'+B'\beta'+A''\gamma'&=S'\gamma'.\end{aligned}\right.$$

Multiplions les premières équations respectivement par α', β', γ', les secondes par α, β, γ, et de la somme des premières retranchons celle des secondes ; il vient

$$(S-S')(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')=0,$$

ou

$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0.$$

Donc *les directions qui correspondent à deux racines différentes sont perpendiculaires entre elles.*

Il en résulte que les directions qui correspondent à une racine double sont toutes perpendiculaires à celle qui correspond à la troisième racine.

NOMBRE DES PLANS PRINCIPAUX.

504 — Le plan diamétral des cordes parallèles à la direction (α, β, γ) est donné par l'équation (19) du n° 498

$$S(\alpha x + \beta y + \gamma z) + (C\alpha + C'z + C''\gamma) = 0.$$

Ainsi, *à chaque direction des cordes donnée par une racine* S *différente de zéro, correspond un plan principal.*

Si une racine S est nulle, le plan principal n'existe plus. Cependant si l'on a $C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0$, l'équation (19) devient une identité, et la position du plan principal est indéterminée; tout plan perpendiculaire à la direction des cordes est un plan principal; dans ce cas, la surface est cylindrique. D'après l'équation (15), si une racine S est nulle, les droites correspondantes ne rencontrent la surface qu'en un seul point.

Il est bon d'observer que l'équation en S a toujours au moins une racine différente de zéro; car les trois racines ne sont égales que si l'on a $B = B' = B'' = 0$; alors ces racines, étant égales à A, A', A'', ne sont pas toutes trois nulles, sans quoi l'équation proposée ne serait pas du second degré. On peut, d'ailleurs, démontrer cette propriété de l'équation (22), indépendamment de l'étude que nous en avons faite; en effet, si les trois racines étaient nulles, on aurait, en égalant à zéro les coefficients de S^2 et de S,

$$A + A' + A'' = 0, \quad A'A'' + A''A + AA' - B^2 - B'^2 - B''^2 = 0;$$

si du carré de la première quantité on retranche le double de la seconde, il vient

$$A^2 + A'^2 + A''^2 + 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2 = 0,$$

d'où $A = A' = A'' = B = B' = B'' = 0$, et l'équation ne serait plus du second degré. Ainsi toute surface du second degré a au moins un plan principal.

505 — Nous avons vu (n° 494) que, si l'on fait abstraction des cylindres, l'équation du second degré peut être ramenée à l'une des deux formes

$$(\alpha)\quad Mx^2+Ny^2+Pz^2+F_1=0,\qquad (\beta)\quad Ny^2+Pz^2+Qx=0;$$

la première convient aux surfaces qui ont un centre unique, la seconde à celles qui sont dépourvues de centre. Si le plan diamétral qui a servi à effectuer la réduction est un plan principal, comme on peut effectuer les réductions ultérieures en prenant dans le plan principal deux axes rectangulaires, l'équation de la surface sera ramenée à l'une des deux formes (α) et (β) en coordonnées rectangulaires.

CHAPITRE II

Réduction de l'équation du second degré.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'équation du second degré peut se ramener à l'une des formes simples

$$Mx^2+Ny^2+Pz^2+F_1=0,\qquad Ny^2+Pz^2+Qx=0,$$
$$Ny^2+Pz^2+F_1=0,\qquad Pz^2+Qx=0,\qquad Pz^2+F_1=0,$$

en coordonnées rectangulaires.

Nous allons donner quelques détails sur la marche à suivre pour effectuer la réduction.

PREMIER CAS. $D \gtrless 0$.

506. — On commence par transporter les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de la surface ; l'équation générale du second degré

$$(1)\quad \begin{aligned} Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy \\ +2Cx+2C'y+2C''z+F=0, \end{aligned}$$

devient

$$(2)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+F_1=0;$$

les coefficients des termes du second degré ne changent pas, et nous avons appris à calculer la constante F_1 (nº 489).

Supposons d'abord les trois racines de l'équation du troisième degré en S différentes et désignons-les par S, S′, S″; soient, de plus, (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les cosinus des angles que font avec les axes les directions qui correspondent à ces trois racines. Si l'on change les axes des coordonnées en prenant ces trois directions pour celles des nouveaux axes, les formules de transformation sont

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z', \\ y &= \beta x' + \beta' y' + \beta'' z', \\ z &= \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z', \end{aligned}\right.$$

et l'équation de la surface aura la forme

$$Mx'^2 + Ny'^2 + Pz'^2 + F_1 = 0,$$

puisqu'elle ne doit plus contenir les produits des variables. Mais on a

$$M = A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2B''\alpha\beta,$$

c'est-à-dire $M = S$ (nº 497). Par la même raison, on a $N = S'$ et $P = S''$. Ainsi, dans ce cas, l'équation réduite est

$$(4)\quad Sx'^2 + S'y'^2 + S''z'^2 + F_1 = 0.$$

507 — Il est facile de vérifier que les coefficients des rectangles des variables dans la nouvelle équation sont nuls. Prenons, par exemple, le coefficient $2B_1$ du terme en $y'z'$, on a

$$\begin{aligned} B_1 = A\alpha'\alpha'' + A'\beta'\beta'' + A''\gamma'\gamma'' + B(\beta'\gamma'' + \gamma'\beta'') \\ + B'(\gamma'\alpha'' + \alpha'\gamma'') + B''(\alpha'\beta'' + \beta'\alpha''). \end{aligned}$$

Si l'on multiplie les deux membres de chacune des relations

$$\begin{aligned} A\alpha' + B''\beta' + B'\gamma' &= S'\alpha', \\ B''\alpha' + A'\beta' + B\gamma' &= S'\beta', \\ B'\alpha' + B\beta' + A''\gamma' &= S'\gamma', \end{aligned}$$

respectivement par α'', β'', γ'' et que l'on ajoute, il vient

$$B_1 = S'(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'').$$

Les deux directions $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ étant rectangulaires, on en conclut que $B_1 = 0$. On verrait de même que $B'_1 = B''_1 = 0$.

508—Lorsque deux racines de l'équation du troisième degré sont égales, à la racine simple correspond un plan principal déterminé, et à la racine double une infinité de directions de cordes parallèles à ce plan ; si l'on prend pour nouveaux axes deux droites rectangulaires situées dans ce plan et la perpendiculaire au plan, la méthode précédente est applicable, et l'on obtient l'équation

$$S(x'^2+y'^2)+S''z'^2+F_1=0,$$

qui représente une surface de révolution autour de l'axe OZ'. Enfin, si les trois racines sont égales, en prenant trois nouveaux axes rectangulaires quelconques, l'équation est toujours $S(x'^2+y'^2+z'^2)+F_1=0$; elle ne peut représenter qu'une sphère.

DEUXIÈME CAS. $D=0$.

509—Dans ce cas, commençons par changer la direction des axes, en prenant pour nouveaux axes les directions qui correspondent aux racines de l'équation du troisième degré, ou, si cette équation a des racines égales, un des systèmes en nombre infini de trois directions rectangulaires déterminées par ces racines. On démontre, comme on l'a fait algébriquement dans le cas précédent, que $B_1=B_1'=B_1''=0$; les coefficients des carrés des variables ont encore pour valeurs S, S', S''. Si donc une seule racine S est nulle, et que l'on prenne pour axe OX' la direction déterminée par cette racine, l'équation de la surface est

$$S'y'^2+S''z'^2+2C_1x'+2C_1'y'+2C_1''z'+F=0.$$

Les coefficients C_1, C_1', C_1'' ont pour valeurs

$$\begin{aligned} C_1&=C\alpha\ +C'\beta\ +C''\gamma\,,\\ C_1'&=C\alpha'+C'\beta'+C''\gamma',\\ C_1''&=C\alpha''+C'\beta''+C''\gamma''. \end{aligned}$$

En déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes, on ramène l'équation précédente à la forme

$$S'y^2+S''z^2+2C_1x=0,$$

si C_1 est différent de zéro, et à la forme

$$S'y^2+S''z^2+F_1=0,$$

si C_1 est nul. Le coefficient C_1 qui subsiste dans l'équation réduite est celui qui correspond à la racine simple $S = 0$.

Si deux racines S et S' sont égales à zéro, par la première transformation l'équation devient

$$S''z'^2 + 2C_1x' + 2C'_1y' + 2C''_1z' + F = 0.$$

Nous avons vu que, pour cette racine double $S = 0$, les relations (20) du nº 499 se réduisent à une. Pour déterminer l'une des directions correspondantes, on peut joindre à cette équation une seconde équation prise à volonté ; nous prendrons

$$C'_1 = C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma' = 0.$$

L'autre direction sera ensuite complétement déterminée, ainsi que le coefficient C''_1. Cela posé, en déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes, on ramènera l'équation à la forme

$$S''z^2 + 2C_1x = 0,$$

si C_1 est différent de zéro, et si C_1 est nul, à la forme

$$S''z^2 + F_1 = 0.$$

510—Remarque. Lorsque deux racines S' et S'' sont égales sans être nulles, la surface est de révolution. Si les trois coefficients B, B', B'' sont différents de zéro, les conditions pour qu'il y ait une racine double sont (nº 501)

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

et la direction de l'axe est donnée par les formules

$$\frac{\alpha}{B'B''} = \frac{\beta}{B''B} = \frac{\gamma}{BB'}.$$

Lorsqu'un seul des coefficients B, B', B'' est égal à zéro, l'équation en S n'a jamais de racine double. Si deux coefficients B', B'' sont nuls, la condition pour l'existence d'une racine double est (nº 502)

$$(A' - A)(A'' - A) - B^2 = 0\,;$$

et l'on a $\alpha = 0, \quad \dfrac{\beta}{A' - A} = \dfrac{\gamma}{B}.$

CHAPITRE III

De l'ellipsoïde.

511 — Nous avons ramené l'équation des surfaces du second degré qui ont un centre unique à la forme

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 = H,$$

en rapportant la surface à ses trois plans principaux.

Supposons d'abord que les trois racines aient le même signe, par exemple le signe $+$. Si le terme constant H est négatif, l'équation n'est vérifiée par les coordonnées d'aucun point de l'espace. Si le terme constant H est égal à zéro, l'équation n'est satisfaite que pour $x = y = z = 0$; elle représente un seul point, l'origine. Considérons enfin le cas où H est positif et posons

$$a = \sqrt{\frac{H}{S}}, \quad b = \sqrt{\frac{H}{S'}}, \quad c = \sqrt{\frac{H}{S''}};$$

l'équation se met sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

La coordonnée x ne peut varier que de $-a$ à $+a$, y de $-b$ à $+b$, z de $-c$ à $+c$; prenons sur l'axe des x, de part et d'autre de l'origine, des longueurs OA et OA′ égales à a, sur l'axe des y des longueurs OB et OB′ égales à b, sur l'axe des z des longueurs OC et OC′ égales à c (fig. 293). Par les points A et A′, B et B′, C et C′, imaginons des plans respectivement parallèles aux plans YOZ, ZOX, XOY, la surface sera entièrement comprise dans le parallélipipède rectangle ainsi formé. On a donné à cette surface le nom d'*ellipsoïde*.

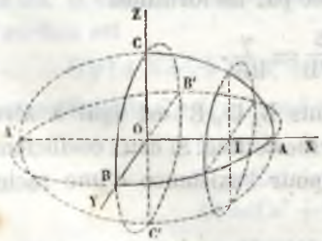


Fig. 293.

512 — L'origine est un *centre* de l'ellipsoïde. Les plans coordonnés, qui sont les trois *plans principaux* de l'ellipsoïde, coupent la surface suivant trois ellipses ABA', BCB', CAC', que l'on appelle *sections principales* de l'ellipsoïde.

Si l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan YOZ, on obtient pour section l'ellipse

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

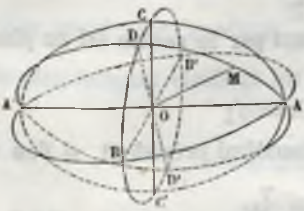


Fig. 294.

dont le centre I est sur l'axe des x. Les points de la courbe étant deux à deux symétriques par rapport au centre I, les points de la surface sont symétriques deux à deux par rapport à la droite OX, qui est ainsi un *axe* de la surface. A mesure que le plan sécant s'éloigne du plan principal YOZ, c'est-à-dire quand x varie de o à a, l'ellipse d'intersection reste toujours semblable à l'ellipse CBC', mais diminue jusqu'à se réduire à un point. Il en est de même des sections parallèles à chacun des deux autres plans principaux. Ainsi l'ellipsoïde admet trois axes qui sont les intersections des plans principaux deux à deux. Les extrémités des axes sont les *sommets* de l'ellipsoïde. Si l'on suppose $a>b>c$, $2a$ sera l'axe majeur, $2b$ l'axe moyen, $2c$ l'axe mineur.

Soit M un point quelconque de l'ellipsoïde (fig. 294); par ce point et le grand axe faisons passer un plan; ce plan coupe la surface suivant une courbe du second degré fermée, par conséquent, suivant une ellipse; à cause de la symétrie, les axes de cette ellipse sont la droite AA' et le diamètre DD' suivant lequel le plan sécant coupe l'ellipse principale CBC'B'; le rayon OD, compris entre les deux axes b et c de cette ellipse principale, est plus grand que c; mais d'un autre côté le rayon OM est compris entre OD et a; ce rayon est donc compris entre c et a. On conclut de là que le plus grand rayon de l'ellipsoïde est le demi-grand axe OA, le plus petit le demi-petit axe OC.

PLANS DIAMÉTRAUX ET DIAMÈTRES.

513 — Considérons une série de cordes parallèles à la droite

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma};$$

le plan diamétral correspondant (nº 491) a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0. \tag{2}$$

Réciproquement, tout plan passant par le centre est un plan diamétral; soit, en effet, le plan

$$Ax+By+Cz=0;$$

ce plan coïncidera avec le plan diamétral précédent, si l'on a

$$\frac{\alpha}{a^2A}=\frac{\beta}{b^2B}=\frac{\gamma}{c^2C}. \tag{3}$$

Telles sont les relations qui existent entre la direction des cordes et celle du plan diamétral conjugué. Il est évident que le plan diamétral coupe la surface suivant une courbe fermée du second degré, et, par conséquent, suivant une ellipse. Chaque point de cette ellipse est le point de contact d'une droite parallèle aux cordes et tangente à la surface; ces tangentes forment un cylindre tangent à l'ellipsoïde tout le long de cette ellipse et l'enveloppant.

514 — Nous savons que les sections faites par des plans parallèles dans l'ellipsoïde sont des ellipses homothétiques (nº 483). Soit $Ax+By+Cz=l$ l'équation d'un plan, dans laquelle A, B, C sont des coefficients constants, l un paramètre variable; le lieu des centres de ces ellipses, ou le diamètre, est la droite (nº 496)

$$\frac{x}{a^2A}=\frac{y}{b^2B}=\frac{z}{c^2C}, \tag{4}$$

passant par le centre de la surface.

La direction du diamètre est conjuguée du plan diamétral parallèle aux plans sécants; car les coefficients de la droite et du plan vérifient les relations (3).

Réciproquement, toute droite passant par le centre est un diamètre ; car si l'on mène le plan diamétral conjugué de cette direction, et des plans sécants parallèles, le lieu des centres coïncidera avec la droite donnée.

L'équation du plan tangent (nº 475) se réduit ici à

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1. \qquad (5)$$

Ce plan tangent est parallèle au plan diamétral conjugué du diamètre qui va du centre au point de contact; car ce diamètre ayant pour équations $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}$, ses coefficients et ceux du plan tangent vérifient les relations (3).

DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

515 — On dit que trois diamètres forment un système de *diamètres conjugués,* quand chacun d'eux est conjugué du plan des deux autres. Nous avons déjà reconnu l'existence de pareils systèmes de diamètres (nº 494); menons arbitrairement un premier diamètre OD (fig. 295) et considérons le plan diamétral conjugué ; ce plan coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse ; prenons deux diamètres conjugués quelconques OE, OF de cette ellipse ; les trois diamètres OD, OE, OF formeront un système de diamètres conjugués ; car si l'on prend pour axes des coordonnées les trois droites OD, OE, OF et que l'on appelle a', b', c' les longueurs des trois rayons OD, OE, OF, d'après le raisonnement qui a été fait précédemment (nº 494), l'équation de l'ellipsoïde se mettra sous la forme

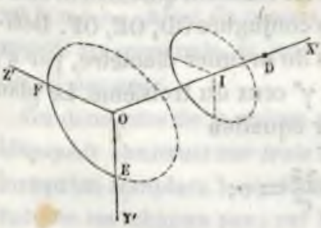


Fig. 295.

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1.$$

On en conclut que les trois axes des coordonnées forment un système de diamètres conjugués, ou, ce qui revient au même, que les trois plans des coordonnées forment un système de plans diamétraux conjugués.

On voit bien, à l'aide de cette équation, comment varient les sections parallèles; si l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan diamétral Y'OZ', on a une ellipse

$$\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1-\frac{x'^2}{a'^2},$$

homothétique à l'ellipse diamétrale EOF et ayant son centre au point I sur le diamètre OD; cette ellipse va en diminuant à mesure que le plan sécant s'éloigne du plan diamétral; elle se réduit au point D, quand le plan sécant passe par ce point et alors le plan est tangent à la surface; au delà le plan ne rencontre plus la surface; en d'autres termes, il la coupe suivant une ellipse imaginaire, dont le centre est réel et situé sur le prolongement de OD. Il en est de même de l'autre côté.

516—Cherchons maintenant les relations qui existent entre les directions des trois diamètres conjugués OD, OE, OF. Désignons par α, β, γ, les coefficients du premier diamètre, par α', β', γ' ceux du second, par α'', β'', γ'' ceux du troisième. Le plan conjugué du diamètre OD a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0;$$

ce plan contenant le diamètre OE, on a la relation

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}=0.$$

On obtient ainsi les trois relations

$$(6)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}=0,\\&\frac{\alpha'\alpha''}{a^2}+\frac{\beta'\beta''}{b^2}+\frac{\gamma'\gamma''}{c^2}=0,\\&\frac{\alpha''\alpha}{a^2}+\frac{\beta''\beta}{b^2}+\frac{\gamma''\gamma}{c^2}=0,\end{aligned}\right.$$

qui expriment que chaque diamètre est conjugué du plan des deux autres. La première de ces relations signifie que les deux diamètres OD, OE sont conjugués entre eux.

517 — Considérons deux systèmes de diamètres conjugués ODEF, OD′E′F′ (fig. 296). Soit OG le diamètre suivant lequel se coupent les deux plans EOF, E′OF′, OH et OH′ les diamètres conjugués de OG dans ces deux plans. Si, conservant OD, on remplace les diamètres conjugués OE, OF par deux autres diamètres conjugués OG, OH de la même ellipse, la somme des carrés ne change pas ; de même, si, conservant OD′, on remplace les deux diamètres conjugués OE′, OF′ par deux autres diamètres conjugués OG, OH′ de la même ellipse, la somme des carrés ne change pas. On a alors deux systèmes de diamètres conjugués OGHD, OGH′D′, qui ont un diamètre commun OG ; les deux autres, étant situés dans le plan diamétral conjugué de OG, appartiennent à la même ellipse ; donc la somme des carrés est la même. Ainsi, *la somme des carrés de trois diamètres conjugués est constante, et, par conséquent, égale à la somme des carrés des axes.*

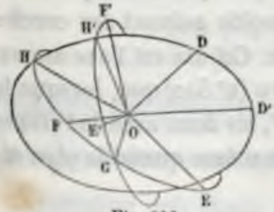


Fig. 296.

On démontre de la même manière que *le volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués est constant* ; lorsqu'on remplace le système ODEF par le système ODGH, le volume ne change pas ; car les deux parallélipipèdes ont des bases équivalentes, les parallélogrammes EOF, GOH, et même hauteur, la perpendiculaire abaissée du point D sur le plan des bases.

SECTIONS CIRCULAIRES.

518 — Parmi les sections planes de l'ellipsoïde, il importe d'examiner en particulier les sections circulaires.

Supposons qu'une série de plans parallèles coupent l'ellipsoïde suivant des cercles et considérons le diamètre correspondant. Le plan mené par ce diamètre perpendiculairement aux plans parallèles, divisant chacun des cercles en deux parties symétriques par rapport à ce plan même, est un plan principal de l'ellipsoïde. Ainsi les plans des sections circulaires sont perpendiculaires à un plan principal, et par conséquent les plans diamétraux qui coupent l'ellipsoïde suivant des cercles passent par l'un des axes de la surface. Cet axe est l'axe moyen BB′ de l'ellipsoïde; car, nous avons vu (n° 512) que, lorsque le plan sécant passe par le grand axe AA′, les deux axes de l'ellipse diffèrent nécessairement; il en est de même quand le plan sécant passe par le petit axe CC′.

Lorsque le plan sécant passe par l'axe moyen BB′, les deux axes de l'ellipse d'intersection sont l'axe BB′ et le diamètre DD′ suivant lequel le plan sécant coupe l'ellipse principale ACA′ (fig. 297). La longueur de ce diamètre DD′, variant de CC′ à AA′, pourra être égale à BB′, et alors la section sera un cercle.

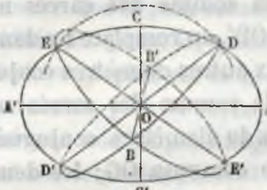


Fig. 297.

Du point O comme centre, avec un rayon égal à b et dans le plan principal ACA′ décrivons un arc de cercle qui coupera l'ellipse principale en D et E; menons les diamètres OD et OE; les deux plans diamétraux BOD, BOE couperont l'ellipsoïde suivant des cercles. On conclut de là que *l'ellipsoïde à trois axes inégaux admet deux séries de sections circulaires.*

Quand l'ellipsoïde est de révolution, les deux plans BOD, BOE se confondent avec le plan principal perpendiculaire à l'axe de rotation, c'est-à-dire avec l'équateur de la surface. On n'a plus alors qu'une série de sections circulaires.

On peut mettre en évidence l'existence des sections circulaires en écrivant l'équation de l'ellipsoïde sous la forme

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}-1=x^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right);$$

si on désigne par $\frac{1}{m^2}$ et $\frac{1}{n^2}$ les quantités positives $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$ et $\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}$, l'équation devient

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}-1=\left(\frac{x}{m}+\frac{z}{n}\right)\left(\frac{x}{m}-\frac{z}{n}\right).$$

L'intersection de la surface par le plan $\frac{x}{m}+\frac{z}{n}=\alpha$, α étant une constante arbitraire, est située sur la sphère

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}-1=\alpha\left(\frac{x}{m}-\frac{z}{n}\right);$$

on a ainsi une première série de sections circulaires. Le plan $\frac{x}{m}-\frac{z}{n}=\beta$ donne une seconde série de sections circulaires.

L'équation précédente signifie que le carré de la tangente menée d'un point quelconque de l'ellipsoïde à la sphère $x^2+y^2+z^2=b^2$ est au produit des distances de ce même point aux deux plans diamétraux $\frac{x^2}{m^2}-\frac{z^2}{n^2}=0$, que l'on appelle *plans cycliques*, dans un rapport constant.

PLAN TANGENT.

519 — Le plan tangent à l'ellipsoïde au point (x', y', z') a pour équation

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1.$$

On peut lui donner une autre forme qu'il est bon de connaître. Représentons le plan tangent par l'équation

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=l,$$

α, β, γ étant les cosinus des angles que la normale au plan fait avec les axes, et l la distance du plan de l'origine. En identifiant ces deux équations, on a les relations

$$\frac{\frac{x'}{a}}{a\alpha}=\frac{\frac{y'}{b}}{b\beta}=\frac{\frac{z'}{c}}{c\gamma}=\frac{1}{l}=\frac{1}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}};$$

on en déduit la valeur de l, et l'équation du plan tangent devient

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}. \tag{7}$$

Pour en montrer une application, considérons trois plans tangents perpendiculaires entre eux

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2},$$
$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \sqrt{a^2\alpha'^2 + b^2\beta'^2 + c^2\gamma'^2},$$
$$\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = \sqrt{a^2\alpha''^2 + b^2\beta''^2 + c^2\gamma''^2},$$

les neuf cosinus vérifiant les relations établies au° 421. Si l'on ajoute ces trois équations après les avoir élevées au carré, on obtient l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

d'où l'on conclut que *le lieu des sommets des trièdres tri-rectangles circonscrits à une ellipsoïde est une sphère.*

CHAPITRE IV

Des hyperboloïdes.

Considérons maintenant le cas où les trois racines de l'équation en S n'ont pas le même signe; supposons, par exemple, que les deux racines S et S′ soient positives, et la troisième négative.

CONE.

520 — Si le terme constant H est nul, l'équation

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 = 0,$$

étant homogène par rapport à x, y, z, représente un cône (n° 464). Si l'on pose

$$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{\frac{-S''}{S}}, \quad \operatorname{tang} \beta = \sqrt{\frac{-S''}{S'}},$$

l'équation prend la forme

$$\frac{x^2}{\operatorname{tang}^2 \alpha} + \frac{y^2}{\operatorname{tang}^2 \beta} - z^2 = 0. \tag{1}$$

Le plan principal XOZ coupe la surface suivant deux droites OA, OA′ faisant avec OZ un angle égal à α; le plan principal YOZ suivant deux droites OB, OB′ faisant avec OZ un angle égal à β (fig. 298). Le plan principal XOY coupe la surface suivant un seul point O. Tout plan parallèle au plan XOY donne une ellipse ABA′ ayant pour équation

Fig. 298.

$$\frac{x^2}{\operatorname{tang}^2 \alpha} + \frac{y^2}{\operatorname{tang}^2 \beta} = z^2;$$

cette ellipse, qui a son centre I sur l'axe OZ, augmente indéfiniment à mesure que le plan sécant s'éloigne du sommet. Ainsi on peut regarder le cône comme engendré par une droite OM, qui tourne autour du point O en glissant sur l'ellipse ABA′. En supposant S plus grand que S′ et par conséquent α plus petit que β, on voit que l'angle que fait la génératrice OM avec l'axe OZ varie de α à β. Le cône est formé de deux nappes égales situées de part et d'autre du sommet. L'équation des cônes du second degré se ramenant à la forme (1), il en résulte que tout cône du second degré peut être considéré comme un cône droit à base elliptique.

Les plans perpendiculaires à chacun des deux autres axes OX et OY coupent le cône suivant des hyperboles ayant leurs centres sur ces axes. Les trois axes des coordonnées sont des axes du cône; l'un OZ est situé à l'intérieur du cône, les deux autres à l'extérieur. Par rapport à chacun de ceux-ci, un point quelconque du cône a son symétrique sur l'autre nappe; par rapport au premier, un point a son symétrique sur la même nappe.

Lorsqu'on a $S = S'$, ou $\alpha = \beta$, le cône est de révolution autour de la droite OZ.

HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

521 — Supposons que le terme constant H ait une valeur positive et posons

$$a = \sqrt{\frac{H}{S}}, \quad b = \sqrt{\frac{H}{S'}}, \quad c = \sqrt{\frac{H}{-S''}},$$

l'équation de la surface prendra la forme

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Le plan principal XOY coupe la surface suivant une ellipse ABA′ (fig. 299); le plan principal XOZ suivant une hyperbole dont A′A est l'axe transverse et OZ l'axe imaginaire; le plan principal YOZ coupe de même la surface suivant une hyperbole dont BB′ est l'axe transverse et OZ l'axe imaginaire. Si l'on coupe la surface par des plans parallèles au plan XOY, on a des ellipses homothétiques

Fig. 299.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2},$$

qui ont leurs centres sur OZ, et qui vont en augmentant indéfiniment, à mesure que le plan sécant s'éloigne du plan principal, d'un côté ou de l'autre; l'ellipse minimum ABA′, déterminée par le plan principal, s'appelle *ellipse de gorge*. On voit par là que la surface est formée d'une seule nappe continue qui s'étend indéfiniment, en s'ouvrant de plus en plus de chaque côté du plan de l'ellipse de gorge. On a donné à cette surface le nom d'*hyperboloïde à une nappe*.

Les plans parallèles au plan XOZ coupent la surface suivant des hyperboles homothétiques ayant leurs centres sur OY; de même les plans parallèles au plan YOZ coupent la surface suivant des hyperboles homothétiques ayant leurs centres sur OX. Il résulte de là que l'hyperboloïde à une nappe admet trois axes, deux réels AA′ et BB′, un imaginaire OZ. Les deux axes réels sont les axes de l'ellipse de gorge; l'axe imaginaire OZ est situé à l'intérieur de la surface.

Lorsque les deux axes réels deviennent égaux, les sections parallèles au plan XOY étant des cercles, la surface est de révolution; elle est engendrée par une hyperbole tournant autour de son axe imaginaire OZ.

HYPERBOLOÏDE A DEUX NAPPES.

522 — Examinons enfin le cas où le terme constant H a une valeur négative; si l'on pose

$$a=\sqrt{\frac{-H}{S}},\quad b=\sqrt{\frac{-H}{S'}},\quad c=\sqrt{\frac{-H}{-S''}},$$

l'équation prend la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{3}$$

Les deux plans principaux XOZ, YOZ coupent la surface suivant des hyperboles dont l'axe transverse CC' a une longueur égale à $2c$ et est dirigé suivant OZ (fig. 300). Le plan principal XOY ne rencontre pas la surface. La section faite par un plan parallèle au plan XOY est une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1;$$

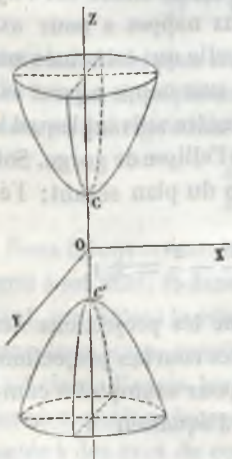


Fig. 300.

mais cette ellipse n'est réelle que si la valeur absolue de z est plus grande que c; si donc par chacun des points C et C' on mène un plan parallèle au plan XOY, il n'y aura aucun point du lieu situé entre ces deux plans. Si le plan sécant s'éloigne à partir du point C, l'ellipse, qui est d'abord réduite à un point, augmente indéfiniment; et de même de l'autre côté, à partir du point C'. On voit par là que la surface se compose de deux nappes infinies et séparées l'une de l'autre; on lui a donné le nom d'*hyperboloïde à deux nappes*. La surface a trois axes, un réel CC', deux imaginaires OX et OY.

Quand les deux axes imaginaires $2a$ et $2b$ deviennent égaux, la surface est de révolution; elle est engendrée par une hyperbole tournant autour de son axe transverse CC'.

CÔNE ASYMPTOTE.

523 — On dit que deux hyperboloïdes sont *conjugués*, lorsqu'ils ont même centre et mêmes axes en grandeur et en direction, et que les axes réels de l'un sont imaginaires dans l'autre; il est clair que les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$$

représentent deux hyperboloïdes conjugués. Un plan sécant mené par l'axe OZ coupe ces deux surfaces suivant des hyperboles; l'hyperbole située sur l'hyperboloïde à deux nappes a pour axe transverse CC′; celle qui est située sur l'hyperboloïde à une nappe a pour axe transverse le diamètre suivant lequel le plan sécant coupe l'ellipse de gorge. Soit $y=mx$ l'équation du plan sécant; l'équation

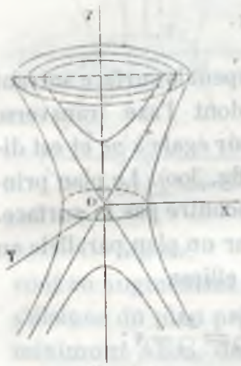


Fig. 301.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$$

provenant de l'élimination de y, donne les projections des courbes d'intersection sur le plan XOZ; ces courbes projections sont des hyperboles conjuguées, ayant pour asymptotes communes les deux droites représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Si, à cette équation, on joint celle du plan sécant $y=mx$, on aura les asymptotes des hyperboles dans l'espace. Imaginons actuellement que le plan sécant tourne autour de l'axe OZ; ces asymptotes décriront un cône que nous appellerons *cône asymptote* des hyperboloïdes; on obtient son équation en éliminant le paramètre variable m entre les deux équations précédentes, ce qui donne

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Ainsi les deux hyperboloïdes conjugués ont même cône asymptote. L'hyperboloïde à deux nappes est situé à l'intérieur du cône, l'hyperboloïde à une nappe à l'extérieur (fig. 301).

Plus généralement, le cône asymptote est le lieu des asymptotes de toutes les hyperboles déterminées dans les deux surfaces par des plans passant par le centre. En effet, soit $z=mx+ny$ l'équation du plan sécant, les courbes d'intersection ont pour projection sur le plan XOY

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(mx+ny)^2}{c^2}=\pm 1;$$

les asymptotes sont représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(mx+ny)^2}{c^2}=0,$$

jointe à celle du plan sécant. Il arrive ici que l'on peut éliminer à la fois les deux paramètres variables m et n entre ces équations, ce qui reproduit le cône asymptote

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Nous ferons remarquer que, lorsqu'un hyperboloïde est rapporté à ses axes, si dans l'équation on supprime le terme constant, on obtient le cône asymptote, et que, si l'on change le signe de ce terme constant, on obtient l'hyperboloïde conjugué. Il est clair, d'après les formules de transformation des coordonnées, que la même propriété a lieu quand la surface est rapportée à des axes de coordonnées quelconques passant par le centre.

SECTIONS PLANES.

524 - Considérons les surfaces représentées par l'équation

$$(4)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\lambda,$$

dans laquelle λ est un paramètre arbitraire. On a deux hyper boloïdes conjugués et leur cône asymptote, quand on attribue au paramètre λ les valeurs ± 1 ou la valeur 0. Si l'on coupe ces surfaces par un même plan

$$Ax + By + Cz = l,$$

les projections des courbes d'intersection sur le plan XOY ont pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(l - Ax - By)^2}{c^2C^2} = \lambda;$$

le paramètre λ n'entrant que dans le terme constant, il en résulte que les courbes projections et, par suite, les courbes dans l'espace, sont homothétiques; car ce sont les intersections de cylindres homothétiques par des plans parallèles (n° 482); elles sont en outre concentriques, si elles ont un centre; quand ce sont des paraboles, elles ont même paramètre, et par conséquent sont égales.

525 — Il résulte de là que, pour reconnaître l'espèce de la section d'un hyperboloïde par un plan P, il suffit d'étudier la section du cône asymptote par le même plan. On sait d'ailleurs que les sections parallèles sont homothétiques.

Par le centre, menons un plan P′ parallèle au point P; il y a trois cas à distinguer. 1° Si le plan P′ ne coupe le cône qu'en un seul point, les deux nappes du cône sont situées, l'une d'un côté de ce plan, la seconde de l'autre côté; il est clair que le plan parallèle P coupera toutes les droites d'une même nappe, et, par conséquent, déterminera sur le cône une courbe fermée qui sera une ellipse; les sections faites par ce même plan dans les hyperboloïdes seront aussi des ellipses. 2° Si le plan P′ coupe le cône suivant deux droites, il partage chacune des nappes en deux parties situées de part et d'autre de ce plan; le plan parallèle P rencontrera la partie de chacune des nappes qui est du même côté du plan P′ que le plan P, et, par conséquent, coupera le cône suivant deux branches séparées, constituant une hyperbole. Si une génératrice du cône se rapproche de l'une des génératrices situées dans le plan P′, elle devient parallèle au plan P, et le point d'intersection s'éloigne à l'infini; l'hyperbole a donc ses asymptotes parallèles aux droites situées dans le plan P′. 3° Enfin, si le plan P′ est tangent au cône asymptote, l'une des nappes du cône est située tout entière d'un côté de ce plan, l'autre nappe de l'autre côté, excepté l'arête de contact, qui est dans le plan; le plan parallèle P ne rencontrera que la nappe qui est du même côté du plan P′ que le plan P et la coupera suivant une branche infinie, et, par conséquent, suivant une parabole.

Nous examinerons plus tard en détail les diverses variétés que présentent ces courbes, et leur déformation quand on fait mouvoir le plan sécant.

PLANS DIAMÉTRAUX ET DIAMÈTRES.

526—Si l'on considère les surfaces représentées par l'équation (4), le plan diamétral conjugué de la droite,

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma} \tag{5}$$

a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-\frac{\gamma z}{c^2}=0. \tag{6}$$

Ce plan est le même dans les deux hyperboloïdes et dans le cône asymptote. On pourrait d'ailleurs le reconnaître *à priori*. En effet, considérons une sécante qui rencontre le cône en deux points ; le plan mené par cette sécante et le centre coupe le cône suivant les asymptotes des hyperboles déterminées par ce plan dans les hyperboloïdes; les portions de cette sécante comprises entre les hyperboles et les asymptotes étant égales, il en résulte que les cordes ont le même point milieu.

527— L'espèce de la section déterminée par le plan diamétral dépend de la direction des cordes. Par le centre menons une parallèle aux cordes ; si cette droite est située à l'intérieur du cône asymptote, il est évident que chaque sécante rencontre les deux nappes du cône et que, par conséquent, le point milieu est entre les deux nappes; le plan diamétral, ayant tous ses points entre les deux nappes, coupe le cône suivant un point. L'hyperboloïde à une nappe, étant situé à l'extérieur du cône asymptote, sera coupé par le plan diamétral suivant une ellipse réelle; cette ellipse est la courbe de contact d'un cylindre ayant ses génératrices parallèles aux sécantes et circonscrit à l'hyperboloïde ; ce cylindre est situé à l'intérieur de l'hyperboloïde. L'hyperboloïde à deux nappes étant situé, au contraire, à l'intérieur du cône asymptote, le plan diamétral ne rencontre pas la surface ; aucune des sécantes ne devient tangente, et il n'existe pas de cylindre circonscrit dans cette direction.

Si la droite, menée par le centre, est située à l'extérieur du cône asymptote, une parallèle rencontrant le cône percera une même nappe en deux points, et, par conséquent, le point milieu sera situé à l'intérieur du cône ; le plan diamétral, pénétrant à l'intérieur du cône, coupera ce cône suivant deux droites, et, par conséquent, les hyperboloïdes suivant des hyperboles conjuguées. Chacune de ces hyperboles sera la courbe de contact d'un cylindre circonscrit ayant ses arêtes parallèles à la direction donnée.

528—Il est un cas où il n'y a plus de plan diamétral ; c'est lorsque la droite menée par le centre appartient au cône asymptote ; dans ce cas, toute parallèle ne rencontre la surface qu'en un point et le point milieu est à l'infini. Cependant l'équation (6) représente encore un plan passant par le centre ; c'est la position limite vers laquelle tend le plan diamétral, quand la droite (5) se rapproche de plus en plus du cône. Le plan tangent au cône au point (x, y, z) a pour équation

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-\frac{zZ}{c^2}=0;$$

si le point de contact appartient à la droite (5), cette équation devient

$$\frac{\alpha X}{a^2}+\frac{\beta Y}{b^2}-\frac{\gamma Z}{c^2}=0;$$

c'est l'équation (6) ; ainsi, quand les sécantes deviennent parallèles à une arête du cône asymptote, le plan (6) coïncide avec le plan tangent au cône suivant cette arête.

529—Les sections faites dans les hyperboloïdes et dans le cône asymptote par un même plan étant concentriques, le lieu des centres des sections parallèles est le même dans les hyperboloïdes et dans le cône; or il est évident, à cause de la similitude, que dans le cône ce lieu est une droite passant par le sommet du cône.

Lorsque les sections sont des ellipses, le lieu des centres, ou le diamètre, étant situé à l'intérieur du cône, rencontre l'hyperboloïde à deux nappes, mais ne rencontre pas l'hyperboloïde à une nappe. Lorsque les sections sont des hyperboles, le diamètre, étant à l'extérieur du cône, rencontre, au contraire, l'hyperboloïde à une nappe et ne rencontre pas l'hyperboloïde à deuxnappes.

On obtient un système de trois diamètres conjugués de l'hyperboloïde à une nappe en prenant un diamètre quelconque, et, dans le plan diamétral conjugué, deux diamètres conjugués de la section. Il est aisé de voir que, de ces trois diamètres conjugués, deux, OD, OE sont réels, un, OF imaginaire. En effet, si le premier diamètre est réel, le plan diamétral, comme nous l'avons dit (n° 527), coupe la surface suivant une hyperbole, dans laquelle un second diamètre sera réel, le troisième imaginaire. Si, au contraire, le premier diamètre est imaginaire, le plan diamétral conjugué coupe la surface suivant une ellipse réelle, dans laquelle deux diamètres conjugués sont réels. L'équation de la surface rapportée à ces diamètres conjugués prend la forme

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-\frac{z'^2}{c'^2}=1.$$

Deux hyperboloïdes conjugués, ayant le même diamètre pour la même série de plans sécants, admettent les mêmes systèmes de diamètres conjugués: seulement, un diamètre, réel dans l'un, est imaginaire dans l'autre, de sorte que, dans l'hyperboloïde à deux nappes, de trois diamètres conjugués, deux sont imaginaires, et un réel.

Pour former un système de diamètres conjugués, nous avons mené par le centre une première droite arbitrairement; il faut, toutefois, que cette droite n'appartienne pas au cône asymptote.

530 — Il nous est facile maintenant de compléter l'étude des sections planes des hyperboloïdes. Imaginons la surface rapportée à un système de plans diamétraux conjugués dont l'un soit parallèle au plan sécant ; l'équation prendra la forme

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=\pm 1.$$

Considérons d'abord l'hyperboloïde à une nappe. Si le plan sécant est parallèle au plan DOE, la section est une ellipse

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1+\frac{z^2}{c'^2},$$

toujours réelle, dont le centre est sur le diamètre imaginaire OF, et qui augmente indéfiniment à mesure que le plan sécant s'éloigne du plan diamétral, d'un côté ou de l'autre. Si le plan sécant est parallèle au plan EOF, la section est une hyperbole

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1-\frac{x^2}{a'^2},$$

dont le centre est situé sur le diamètre réel OD, et dont les asymptotes sont parallèles à celles de l'hyperbole déterminée par le plan diamétral $x=0$; cette hyperbole admet aussi deux diamètres conjugués respectivement parallèles à OE et à OF. Quand x varie de o à a', le diamètre réel est parallèle à OE, et diminue de b' à o ; pour $x=a'$, l'hyperbole se réduit à deux droites passant par le point D, et le plan devient tangent à la surface au point D ; quand x croît ensuite à partir de a', le diamètre réel est au contraire parallèle à OF et augmente de zéro à l'infini ; l'hyperbole a changé de disposition ; d'abord située dans les angles des asymptotes qui comprennent le diamètre OE, elle a passé dans les angles supplémentaires. La transition s'opère par le système de deux droites.

531 — Considérons maintenant l'hyperboloïde à deux nappes. Les sections parallèles au plan DOE sont des ellipses

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=\frac{z^2}{c'^2}-1,$$

dont les centres sont situés sur le diamètre réel OF ; quand z varie de o à c', l'ellipse est imaginaire ; pour $z=c'$, elle se réduit à un point ; quand z croît à partir de c', l'ellipse devient réelle et augmente indéfiniment. Les sections parallèles au plan EOF sont des hyperboles

$$\frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = -1 - \frac{x^2}{a'^2},$$

dont le diamètre réel est toujours parallèle à OF et augmente indéfiniment. L'hyperbole conserve la même disposition.

532 — Nous n'avons parlé jusqu'à présent que des sections elliptiques ou hyperboliques. La transformation précédente ne peut plus être effectuée, lorsque le plan sécant est parallèle à un plan tangent au cône asymptote; dans ce cas la section est une parabole, égale à celle que détermine le plan sécant sur le cône asymptote, et il est évident, d'après la similitude, que le paramètre de la parabole tracée sur le cône par le plan sécant augmente proportionnellement à la distance de ce plan au centre.

Pour étudier la position de la courbe, nous nous servirons d'une autre forme extrêmement simple, sous laquelle on peut mettre l'équation de l'hyperboloïde. Prenons pour axe des y l'arête suivant laquelle le plan tangent au cône asymptote touche ce cône (fig. 302), pour axe des z une autre arête du cône asymptote, et pour axe des x le diamètre conjugué du plan YOZ, l'équation des hyperboloïdes se réduira à la forme

$$Ax^2 + Byz = \pm 1; \tag{7}$$

car elle ne doit pas contenir de terme du premier degré en x, et, lorsqu'on y fait $x=0$, on doit obtenir l'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes. On peut toujours supposer les deux constantes A et B positives. La surface est un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes suivant que le second membre est positif ou négatif, puisque le plan $z=0$ coupe la surface dans le premier cas et ne la rencontre pas dans le second cas. Les sections des deux surfaces par le plan YOZ sont des hyperboles conjuguées. L'équation du cône asymptote est

$$Ax^2 + Byz = 0;$$

elle montre que les plans XOY et XOZ sont tangents au cône suivant les arêtes OY et OZ. Si la surface est un hyperboloïde à une nappe, elle est coupée par le plan $z=0$, suivant deux droites AB, A′B′ parallèles à OY (fig. 302) ; tout plan parallèle $z=\gamma$ coupe la surface suivant une parabole $Ax^2+B\gamma y=1$, qui a pour diamètre la trace CD du plan sécant sur le plan YOZ. L'extrémité C de ce diamètre appartient à l'hyperbole GH,

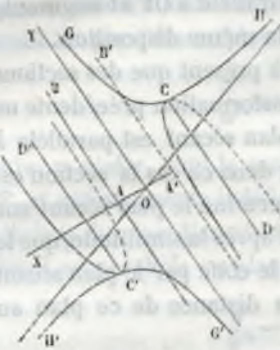


Fig. 302.

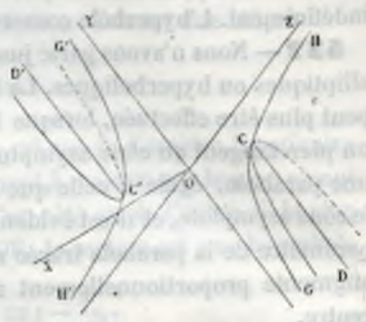


Fig. 303.

G′H′, suivant laquelle le plan YOZ coupe la surface. La direction du diamètre change avec le signe de γ. Les sections faites dans l'hyperboloïde à une nappe par les plans $z=\pm\gamma$ ont la disposition indiquée sur la fig. 302. Quand les deux plans sécants se rapprochent du plan XOY, les points C et C′ s'éloignent indéfiniment sur les branches d'hyperbole CG, C′G′, et les deux paraboles tendent vers le système des deux droites parallèles AB, A′B′.

Si la surface est un hyperboloïde à deux nappes, le plan $z=0$ ne rencontre pas la surface, et les deux paraboles données par les plans $z=\pm\gamma$ ont la disposition indiquée par la figure 303. Quand γ tend vers zéro, les deux paraboles s'éloignent à l'infini.

SECTIONS CIRCULAIRES.

533 — Considérons d'abord l'hyperboloïde à une nappe. D'après les raisonnements qui ont été faits à propos de l'ellipsoïde (n° 518), on reconnaît qu'un plan diamétral, qui coupe l'hyperboloïde suivant un cercle, doit passer par l'un des axes réels de la surface.

Lorsqu'un plan BOD (fig. 304), mené par l'axe OB, coupe la surface suivant une ellipse, l'un des axes de l'ellipse est OB, l'autre la trace OD du plan sécant sur le plan XOZ; mais la longueur de OD est plus grande que OA; pour que OD soit égal à OB, il est nécessaire que OB soit plus grand que OA. Ainsi, le plan sécant passera par le plus grand axe OB de l'ellipse de gorge. Du point O comme centre, avec OB pour rayon, décrivons dans le plan XOZ un cercle qui coupera l'hyperbole en deux points D, D′; les deux plans BOD, BOD′ couperont l'hyperboloïde suivant des cercles.

Fig. 304.

Tout plan parallèle à l'un de ces plans coupera suivant des cercles l'hyperboloïde proposé, le cône asymptote et l'hyperboloïde conjugué. Lorsque la surface est de révolution, les deux séries de sections circulaires se confondent et deviennent perpendiculaires à l'axe de rotation.

On peut, comme nous l'avons déjà remarqué pour l'ellipsoïde, mettre en évidence les sections circulaires sur l'équation même. Considérons en particulier le cône

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

on écrira cette équation sous la forme

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}=z^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right);$$

en désignant par $\frac{1}{m^2}$ et $\frac{1}{n^2}$ les quantités positives $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$ et $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$, on voit que les plans $\frac{z}{n}-\frac{x}{m}=\alpha$ et $\frac{z}{n}+\frac{x}{m}=\beta$ donnent deux séries de sections circulaires; l'équation signifie que le produit des sinus des angles que fait une arête quelconque du cône avec les deux plans cycliques $\frac{x^2}{m^2}-\frac{z^2}{n^2}=0$ est constant.

Si l'on prend pour plans des zx et des zy les deux plans cycliques et pour plan des xy un plan quelconque coupant le cône suivant deux arêtes om, om', l'équation du cône prend la forme

$$x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2B''xy=0,$$

λ et μ désignant les angles yoz, xoz. La trace du cône sur le plan xoy est définie par l'équation

$$x^2+y^2+2B''xy=0.$$

Le produit des coefficients angulaires des deux droites om, om', étant égal à l'unité, on en conclut qu'elles font respectivement avec ox et oy des angles égaux.

Ainsi, *lorsqu'un plan sécant mené par le centre coupe le cône suivant deux arêtes, ces arêtes font des angles égaux avec les traces du plan sécant sur les plans cycliques.* Quand le plan devient tangent, l'arête de contact fait des angles égaux avec les traces du plan tangent sur les plans cycliques.

534 — Il résulte de ce qui précède que tout cône du second degré peut être considéré, de deux manières différentes, comme un cône oblique à base circulaire. Lorsqu'on considère un cône circulaire oblique, les plans parallèles à la base donnent une première série de sections circulaires ; il est facile de démontrer géométriquement l'existence d'une seconde série de sections circulaires.

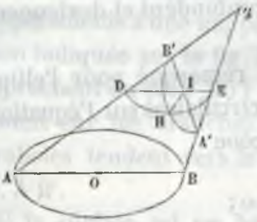


Fig. 305.

Soit S le sommet d'un cône oblique ayant pour base le cercle AB (fig. 305) ; par la droite SO, qui va du sommet au centre O de la base, menons un plan ASB perpendiculaire au plan de la base ; tout plan parallèle à la base coupant le cône suivant un cercle qui a pour diamètre la trace du plan sécant sur le plan ASB, il en résulte que ce plan ASB divise le cône en deux parties symétriques ; c'est donc un plan principal et le système des deux droites SA et SB est la section principale correspondante. Dans le plan principal ASB menons la ligne B'A' antiparallèle à AB, c'est-à-dire telle que l'angle SA'B' soit égal à

SAB; puis, par la droite A′B′, faisons passer un plan perpendiculaire au plan principal ASB; la section du cône par ce plan sera un cercle B′HA′. En effet, par un point quelconque H de la courbe B′HA′ menons un plan parallèle à la base; ce plan coupe le cône suivant un cercle, et le plan B′HA′ suivant une ligne HI perpendiculaire à la section principale. Dans le cercle DHE on a $\overline{HI}^2 = DI \times IE$. D'autre part, les triangles semblables DIB′, EIA′ donnent $DI \times IE = B'I \times IA'$; donc $\overline{HI}^2 = BI' \times IA'$, et, par conséquent, le point H est un point du cercle décrit sur B′A′ comme diamètre. Les sections parallèles à B′HA′ sont dites anti-parallèles à la base.

La bissectrice de l'angle ASB est l'axe intérieur du cône; la bissectrice de l'angle supplémentaire est un second axe; une perpendiculaire menée par le sommet S au plan principal ASB est le troisième axe. On connaît ainsi les trois axes et les trois plans principaux du cône.

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DE L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

535—Nous avons vu (nº 426) que, lorsqu'une droite a plus de deux points situés sur une surface du second ordre, elle est tout entière située sur la surface. D'après cela, on comprend qu'il est impossible de placer sur un ellipsoïde une portion de droite réelle, si petite qu'elle soit; car, si cette portion de droite avait seulement trois points communs avec la surface, la droite indéfinie serait située tout entière sur la surface, et il est évident qu'une droite indéfinie ne peut appartenir à une surface limitée comme l'ellipsoïde. Il est impossible aussi de placer une droite sur l'hyperboloïde à deux nappes; nous remarquons d'abord que cette droite ne peut être perpendiculaire à l'axe réel, puisque toutes les sections perpendiculaires à cette droite sont des ellipses; la droite irait donc d'une nappe à l'autre, et il y aurait une portion intermédiaire qui n'appartiendrait pas à la surface. La même impossibilité n'existe pas pour l'hyperboloïde à une nappe. Nous avons déjà reconnu, en étudiant les sections planes (nº 530), que, lorsque le plan sécant, mené par un point de la surface, est parallèle au plan diamétral conjugué du diamètre qui passe en ce point, la section se réduit à deux droites; il en résulte que, par tout point de la surface passent deux droites situées tout entières sur la surface. Nous allons étudier les propriétés des droites situées sur l'hyperboloïde à une nappe; mais nous reprendrons d'abord la démonstration du théorème fondamental.

536 — Soit M un point quelconque de la surface; prenons pour axe des x le diamètre qui passe en ce point, et pour axes des y et des z deux diamètres conjugués de la section diamétrale correspondante; l'équation de l'hyperboloïde aura la forme

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

En coupant la surface par le plan $x=a'$, on a deux droites

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0.$$

Ainsi, *par tout point* M *de la surface passent deux droites situées sur la surface*.

Nous avons déjà fait observer (nº 490) que les tangentes à toutes les courbes tracées par un même point sur une surface du second degré sont situées dans le même plan; il n'y a d'exception que pour le cône et au sommet. Par un point M passent deux droites situées sur la surface; le plan de ces deux droites est le plan tangent. Il est impossible de mener par le point M une troisième droite située sur la surface; car cette droite serait aussi contenue dans le plan tangent $x=a'$, et ce plan ne coupe la surface que suivant deux droites.

Nous ferons remarquer aussi que la surface est coupée par le plan tangent; une partie est située d'un côté de ce plan, l'autre partie de l'autre côté.

537 — Dans le même système de coordonnées, le cône asymptote a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0;$$

si l'on coupe le cône par le plan $x=0$, on a les deux arêtes

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0.$$

Ces deux arêtes sont respectivement parallèles aux deux droites déterminées par le plan $x=a'$ sur la surface de l'hyperboloïde. Ainsi, *les droites situées sur l'hyperboloïde sont respectivement parallèles aux arêtes du cône asymptote.*

Si l'on coupe la surface par le plan $x=-a'$, on a deux droites parallèles aux précédentes; ainsi les droites qui passent par deux points M et M', symétriques par rapport au centre, sont respectivement parallèles entre elles, et aux mêmes arêtes du cône asymptote.

538 — Nous allons faire voir que les droites situées sur l'hyperboloïde peuvent être distinguées en deux séries, dont chacune constitue toute la surface. On opère commodément cette distinction, et l'on se rend bien compte de la position des droites, à l'aide de l'ellipse de gorge.

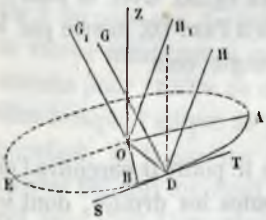


Fig. 306.

Puisque par tout point de la surface passent deux droites, il est clair que, par tout point D de l'ellipse de gorge, passent deux droites DG, DH situées sur la surface (fig. 306).

Si, conservant pour axe des z l'axe imaginaire de la surface, on prend pour axe des x le diamètre OD de l'ellipse de gorge, et pour axe des y le diamètre conjugué OE, l'hyperboloïde a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Le plan $x=a'$, mené par le point D parallèlement au plan ZOE, a pour trace sur le plan de l'ellipse de gorge la tangente ST à cette ellipse; ce plan coupe l'hyperboloïde suivant deux droites

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0,$$

qui se projettent sur le plan de l'ellipse de gorge suivant la tangente ST. Ainsi, *toute tangente à l'ellipse de gorge est la projection de deux droites situées sur l'hyperboloïde.*

Le cône asymptote a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

il est coupé par le plan $x=0$ suivant deux droites OG_1, OH_1, qui ont pour équation

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

et qui sont respectivement parallèles aux deux droites DG, DH situées sur l'hyperboloïde. Les deux axes des coordonnées OE et OZ étant rectangulaires, il résulte de ce qui précède que les deux droites DG, DH font des angles égaux avec le plan de l'ellipse de gorge, ou avec la parallèle à l'axe OZ menée par le point D; si l'on appelle γ ce dernier angle, on a

$$\tang\gamma=\frac{b'}{c}.$$

539 — Imaginons maintenant que le point D parcoure l'ellipse de gorge dans le sens AB; toutes les droites, dont les parties supérieures au plan de l'ellipse de gorge font avec les angentes prises dans le sens du mouvement des angles aigus, formeront un premier système; toutes celles dont les parties supérieures font avec cette même tangente des angles obtus formeront un second système. Ainsi, la droite DG appartient au premier système, la droite DH au second. Il est clair que ces deux systèmes, tels que nous venons de les définir, comprennent toutes les droites situées sur la surface; nous remarquons d'abord qu'une droite quelconque située sur la surface n'est pas parallèle au plan de l'ellipse de gorge, puisque les sections parallèles à ce plan sont des ellipses; cette droite percera donc le plan en un point D de l'ellipse; or, par le point D, passent seulement deux droites DG, DH, appartenant, l'une au premier système, l'autre au second; la droite considérée coïncidera donc avec l'une de ces deux droites.

Si, en même temps que le point D se meut sur l'ellipse, l'angle γ varie d'après la formule $\tang\gamma=\frac{b'}{c}$, la droite DG coïncidera successivement avec toutes les droites du premier système, la droite DH avec toutes celles du second système. Il est visible que chacune d'elles engendre la surface entière de l'hyperboloïde. Ainsi l'hyperboloïde à une nappe est une surface réglée, qui peut être engendrée de deux manières par le mouvement d'une ligne droite. Voilà pourquoi les droites de chaque système ont été appelées les *génératrices rectilignes* de l'hyperboloïde.

Il est bon de se rendre compte de la variation de l'angle γ. Cet angle acquiert sa valeur minimum quand la droite passe par l'une des extrémités B du grand axe de l'ellipse de gorge, et sa valeur maximum, quand elle passe par l'une des extrémités A du petit axe. Le point D allant de B en A, l'angle γ croît de sa valeur minimum à sa valeur maximum; cet angle décroît ensuite pour croître de nouveau, etc. Lorsque $a=b$, c'est-à-dire lorsque l'ellipse de gorge devient un cercle, l'angle γ est constant, et la surface est engendrée par chacune des deux droites DG, DH tournant autour de OZ et liée invariablement à cet axe; c'est l'hyperboloïde de révolution à une nappe que nous avons déjà considéré comme exemple des surfaces de révolution (nº 469).

540 — Chacune des droites mobiles engendrant la surface entière, il est clair que *les deux droites qui passent par un point quelconque de la surface appartiennent, l'une au premier système de génératrices, l'autre au second système.* On le reconnaît d'ailleurs d'une manière très-nette en construisant ces deux droites à l'aide de l'ellipse de gorge. Soit M un point de la surface, que nous supposerons situé au-dessus du plan de l'ellipse de gorge (fig. 307); ce point se projette sur ce plan en un point m extérieur à l'ellipse; par le point m menons des tangentes mD, mE à l'ellipse; par le point de contact D de la première tangente, menons la droite DG du premier système, et par le point de contact E de la seconde tan-

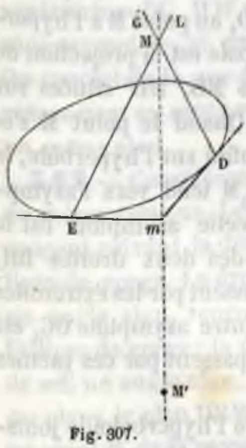


Fig. 307.

gente la droite EL du second système. Les plans projetants GDm, LEm de ces deux droites se coupent suivant une droite MM' perpendiculaire au plan de l'ellipse de gorge; la perpendiculaire élevée par le point m perce la surface en deux points; l'un est le point M situé au-dessus du plan de l'ellipse, l'autre est le point symétrique M' situé au dessous. La droite DG, faisant avec Dm un angle aigu, rencontre la partie supérieure mM de la droite MM', et elle passe au point M, puisque cette partie supérieure ne rencontre la surface qu'en un point. De même la droite EL, faisant avec le prolongement de mE un angle obtus, ou avec Em un angle aigu, rencontre la partie supérieure mM de la même droite au même point M. Ainsi, par le point M passent les deux droites MD, ME, qui appartiennent, l'une au premier système, l'autre au second.

541—Nous avons vu (n°538) que les génératrices rectilignes de la surface se projettent sur le plan de l'ellipse de gorge suivant des tangentes à cette ellipse. La même propriété a lieu par rapport à chacun des plans principaux.

Considérons le plan principal COA mené par l'axe imaginaire OC et l'un des axes OA de l'ellipse de gorge (fig. 308); on démontrera, comme précédemment, que la tangente MD_1 au point M à l'hyperbole principale est la projection de deux droites MD, MD' situées sur la surface. Quand le point M s'éloigne à l'infini sur l'hyperbole, la tangente D_1M tend vers l'asymptote OH_1; cette asymptote est la projection des deux droites BH, $B'H'$, qui passent par les extrémités de l'autre axe de l'ellipse de gorge. L'autre asymptote OG_1 est la projection des droites BG, $B'G'$, qui passent par ces mêmes points.

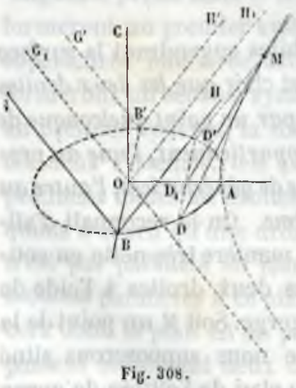


Fig. 308.

542—Les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde jouissent de quelques autres propriétés remarquables que nous allons démontrer. Soient DG, EL (fig. 309) deux génératrices de systèmes différents; ces droites se projettent sur le plan de l'ellipse de gorge suivant des tangentes Dm, Em à cette ellipse; en général les deux tangentes se coupent en un point m et les deux plans projetants se coupent suivant une droite MM′ perpendiculaire au plan de l'ellipse. Comme nous l'avons expliqué plus haut, les deux droites DG, EL, appartenant à des systèmes différents, rencontrent la perpendiculaire MM′ d'un même côté du plan de l'ellipse] de gorge et par conséquent se coupent au point M, où cette perpendiculaire perce la surface. Ainsi, en général, deux génératrices de systèmes différents se rencontrent.

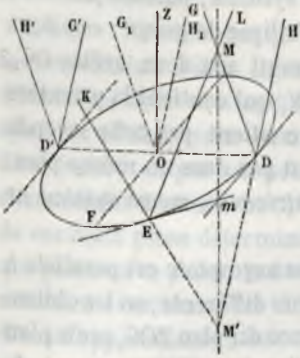


Fig. 309.

Il peut arriver que les projections des deux droites soient parallèles; ceci a lieu quand les deux droites, telles que DG, D′H′, passent par deux points D et D′, diamétralement opposés de l'ellipse de gorge. Dans ce cas, les deux plans projetants sont parallèles; un plan parallèle mené par le centre coupera le cône suivant deux arêtes OG_1, OH_1, il est clair que les deux génératrices DG, D′H′ sont parallèles à la même arête OG_1 du cône asymptote, et, par conséquent, sont parallèles entre elles. On conclut de là que *deux génératrices de systèmes différents se rencontrent ou sont parallèles,* c'est-à-dire *sont toujours dans un même plan.*

543 — Considérons maintenant deux génératrices DG, EK du même système. Les plans projetants de ces deux droites se coupent suivant la droite MM′ perpendiculaire au plan de l'ellipse de gorge. La droite DG, faisant avec sa projection Dm un angle aigu, rencontre la droite MM′ au-dessus du plan de l'ellipse de gorge; la droite EK, faisant avec le prolongement de mE un angle aigu, rencontre cette même droite au-dessous du plan; le plan DMM′, qui contient la première droite DG et un point M′ de la seconde, ne contient pas cette seconde droite; ainsi les deux droites ne sont pas dans un même plan.

Il peut arriver que les projections soient parallèles; soient les deux droites DG, D'G' du même système, passant par deux points diamétralement opposés de l'ellipse de gorge; ces deux droites sont parallèles respectivement aux deux arêtes OG_1, OH_1 du cône asymptote; le plan GDD', qui contient la première et un point D' de la seconde, ne contient pas cette seconde droite; ainsi les deux droites ne sont pas dans un même plan. On conclut de là que *deux génératrices du même système ne sont jamais dans un même plan.*

544 — Chaque arête OG_1 du cône asymptote est parallèle à deux génératrices DG, D'H' de systèmes différents; on les obtiendrait de cette manière : soit OF la trace du plan ZOG_1 sur le plan de l'ellipse de gorge; menons le diamètre DD' conjugué de OF; les tangentes en D et D' étant parallèles à OF, les plans tangents GDH, G'D'H' en ces points sont parallèles au plan ZOG_1 qui coupe le cône suivant deux arêtes OG_1, OH_1; les deux génératrices DG, D'H', de systèmes différents, sont parallèles à OG_1; les deux autres génératrices DH, D'G' sont parallèles à OH_1. Il est impossible qu'une troisième génératrice de l'hyperboloïde soit parallèle à l'arête OG_1; car si trois génératrices de l'hyperboloïde étaient parallèles à une même arête du cône, deux appartiendraient au même système et seraient parallèles entre elles, ce qui ne peut pas être.

Le diamètre OD étant conjugué du plan ZOF, ou G_1OH_1, on sait (n° 532) que le plan DOG_1 est tangent au cône suivant l'arête OG_1. Ainsi le plan de deux génératrices parallèles DG, D'H' est tangent au cône asymptote.

Remarquons encore que trois génératrices du même système ne peuvent être parallèles à un même plan; car en menant par le centre des parallèles à ces génératrices, on aurait trois arêtes différentes du cône asymptote situées dans le même plan, ce qui est impossible.

545 — Ce qui précède nous permet de distinguer les deux systèmes de génératrices par un autre procédé. Soit DH une droite quelconque située sur la surface, toutes les droites telles que DG, EK,... qui rencontrent cette droite fixe, avec une droite D'G' qui lui est parallèle, constituent l'un des systèmes, par exemple le premier système. Toutes les autres constituent le second système.

546 — Nous savons qu'il faut trois directrices pour définir le mouvement d'une ligne droite (nº 460). Prenons comme directrices trois droites fixes A, B, C appartenant au second système, et supposons qu'une droite mobile glisse sur ces trois directrices; si, par un point quelconque M de la droite A et chacune des droites B et C, on fait passer un plan, l'intersection de ces deux plans déterminera la position de la droite mobile qui passe en ce point; la droite mobile, coïncidant ainsi successivement avec toutes les droites du premier système, engendrera l'hyperboloïde à une nappe. De même, une droite mobile, glissant sur trois droites fixes appartenant au premier système, engendrera l'hyperboloïde.

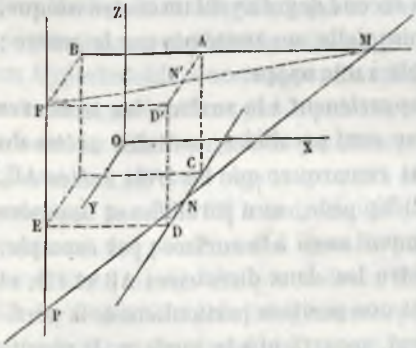


Fig. 310.

547 — Nous allons faire voir que, réciproquement, une droite mobile qui glisse sur trois droites fixes quelconques, non parallèles à un même plan, engendre un hyperboloïde. Soient AB, CD, EF les trois directrices données. Si, par chacune d'elles, on fait passer un plan parallèle à l'une des deux autres, on a six plans qui forment un parallélipipède; prenons pour origine le centre du parallélipipède et pour axes des coordonnées des parallèles aux arêtes, dont nous désignerons les longueurs par $2a, 2b, 2c$. Les équations des trois directrices sont, pour la disposition adoptée dans la figure 310,

$$\text{AB}\left\{\begin{array}{l} y=-b, \\ z=c, \end{array}\right. \qquad \text{CD}\left\{\begin{array}{l} z=-c, \\ x=a. \end{array}\right. \qquad \text{EF}\left\{\begin{array}{l} x=-a, \\ y=b. \end{array}\right.$$

Une droite MN qui rencontre les deux droites AB, CD peut être regardée comme l'intersection de deux plans menés, l'un par la droite AB, l'autre par la droite CD; ces deux plans ont des équations de la forme

$$(8) \qquad \begin{cases} z-c-\lambda\,(y+b)=0, \\ z+c-\lambda'(x-a)=0, \end{cases}$$

dans lesquelles λ et λ' désignent des paramètres arbitraires. Mais la droite MN doit rencontrer la troisième directrice EF; il en résulte entre les deux paramètres λ et λ' la relation

$$(9) \qquad \lambda' a+\lambda b+c=0.$$

On obtiendra l'équation de la surface engendrée par la droite MN en éliminant les deux paramètres λ et λ' entre les équations (8) et (9), ce qui donne

$$(10) \qquad ayz+bzx+cxy+abc=0.$$

Le lieu est une surface du second degré ayant un centre unique; ce n'est pas un cône, puisqu'elle ne passe pas par le centre; c'est donc un hyperboloïde à une nappe.

Les trois directrices appartenant à la surface, les trois axes des coordonnées, qui leur sont parallèles, sont des arêtes du cône asymptote; on peut remarquer que les trois arêtes AC, DE, BF qui, dans le parallélipipède, sont parallèles et opposées aux directrices, appartiennent aussi à la surface; par exemple, la droite AC, qui rencontre les deux directrices AB et CD, et qui est parallèle à EF, est une position particulière de la génératrice, et, par conséquent, appartient à la surface. Il résulte de là que les faces parallèles ABF, CDE du parallélipipède sont tangentes à la surface aux points B et D, et de même les autres. Les trois directrices et les trois arêtes opposées forment un hexagone gauche ACDEFBA situé sur la surface.

548 — Étant donné un hyperboloïde à une nappe, soient AB et CD deux droites quelconques du même système (fig. 310); A un point fixe pris à volonté sur la première droite, C le point correspondant de la seconde, c'est-à-dire le point où cette seconde droite est rencontrée par la génératrice mobile de l'autre système, quand elle passe par le point A; à l'aide de la droite EF du premier système qui est parallèle à AC, on peut former le parallélipipède considéré précédemment. La génératrice mobile, dans une de ses positions, rencontre les deux droites fixes en M et N; elle a décrit sur ces deux droites, à partir de sa position initiale AC, des longueurs AM et CN, que nous désignerons par α et β, en les affectant du signe $+$, quand elles sont portées dans les directions AB ou CD, et du signe $-$, quand elles sont portées dans les directions contraires. Si l'on projette la droite MNP sur le plan ABF, parallèlement à la droite EF, la longueur CN se projettera en vraie grandeur suivant AN′. En prenant pour axes des coordonnées les droites AB et AD′, et exprimant que la droite mobile MN′ tourne autour du point fixe F, on a la relation

$$(11) \qquad \frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta} = 1.$$

Réciproquement, lorsqu'une droite mobile MN décrit sur deux droites fixes AB, CD, à partir d'une position initiale, des longueurs qui vérifient la relation (11), cette droite engendre un hyperboloïde à une nappe. En effet, soit AC la position initiale de la génératrice; par le point A menons une parallèle AD′ à la droite CD, formons le parallélogramme AD′FB, dont les côtés AB et AD′ sont égaux à $2a$ et à $2b$, et par le point F menons une parallèle FE à la droite AC; si l'on prend AB et AD′ pour axes des coordonnées dans le plan du parallélogramme, la relation (11) signifie que la droite MN′ projection de la droite MN sur le plan du parallélogramme, parallèlement à AC, passe constamment par le point F; donc la droite MN rencontre la droite EF. Cette droite, glissant sur trois droites fixes AB, CD, EF, engendre un hyperboloïde à une nappe.

D'après ce qui a été dit au n° 310, la relation (11) exprime que les points M et N forment sur les deux droites AB et CD deux divisions homographiques. Il est évident *à priori* qu'une génératrice mobile MN de l'hyperboloïde détermine sur deux droites fixes AB, CD de l'autre système deux divisions homographiques; car à un point M de l'une des droites correspond un seul point N sur l'autre.

549— Nous avons dit que l'hyperboloïde à une nappe admet deux systèmes de génératrices rectilignes. Il est facile de déduire de l'équation de la surface les équations de ces deux systèmes de droites. En effet, l'équation de l'hyperboloïde rapporté à ses axes est

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2};$$

chacun des membres, étant la différence des deux carrés, peut être décomposé en facteurs du premier degré, et l'équation devient

$$(12)\qquad \left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

Considérons les deux équations du premier degré

$$(\lambda)\qquad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right),\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

dans lesquelles le paramètre λ est arbitraire. Pour chaque valeur de λ, ces équations représentent une droite. Or, si l'on multiplie ces deux équations membre à membre, on retrouve l'équation (12); il en résulte que les équations (λ) représentent un système de droites situées sur la surface.

Si l'on combine autrement les facteurs, on obtient deux autres équations du premier degré

$$(\mu)\qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\mu\left(1+\frac{x}{a}\right),\quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

renfermant un paramètre arbitaire μ, et qui représentent un second système de droites situées sur la surface.

On peut attribuer aux paramètres λ et μ des valeurs nulles ou infinies. Si l'on pose $\lambda=\frac{m}{n}$, les équations (λ) prennent la forme

$$n\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=m\left(1+\frac{x}{a}\right),\quad m\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=n\left(1-\frac{x}{a}\right);$$

on fera dans ces équations $m=0$, ou $n=0$.

La surface étant le lieu des droites (λ), il est évident que par tout point de la surface passe une droite de ce système. Pour déterminer la droite qui passe par un point M, ayant pour coordonnées x', y', z', dans les équations (λ) on remplacera x, y, z par x', y', z' et l'on déduira de chacune d'elles la même valeur de λ. De même, par tout point de la surface passe une droite du second système. D'ailleurs, ces deux droites diffèrent; car, pour que les droites représentées par les équations (λ) et (μ) fussent les mêmes, il faudrait que l'on eût

$$\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

quelle que soit x, c'est-à-dire à la fois $\lambda=\frac{1}{\mu}$, $\lambda=-\frac{1}{\mu}$, ce qui est impossible. Il résulte de là que les équations (λ) et (μ) représentent toutes les droites situées sur l'hyperboloïde à une nappe.

550 — Les parallèles menées par le centre aux droites (λ) ont pour équations

$$(13)\qquad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\lambda\frac{x}{a},\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=-\frac{1}{\lambda}\frac{x}{a};$$

l'élimination du paramètre λ donne l'équation du cône asymptote

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{x^2}{a^2}.$$

Les parallèles menées par le centre aux droites (μ) ont pour équation

$$(14)\qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\mu\frac{x}{a},\quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=-\frac{1}{\mu}\frac{x}{a},$$

et l'élimination du paramètre μ conduit encore au cône asymptote. On voit d'ailleurs que les deux systèmes de parallèles coïncident; car si l'on donne à μ la valeur $-\frac{1}{\lambda}$, les équations (14) sont les mêmes que les équations (13). Ainsi les droites de l'un et l'autre système sont respectivement parallèles aux arêtes du cône asymptote.

551—Nous allons faire voir maintenant que les droites représentées par les équations (λ) constituent l'un des systèmes que nous avons définis précédemment par des considérations géométriques à l'aide de l'ellipse de gorge, et que les droites représentées par les équations (μ) constituent l'autre système.

Il suffit pour cela de démontrer que toutes les droites du premier groupe rencontrent une droite fixe du second groupe, excepté une, qui lui est parallèle. Considérons deux droites représentées par les équations (λ) et (μ), quand on attribue à λ et à μ des valeurs quelconques; on obtiendra le point d'intersection de ces deux droites, en regardant ces quatre équations comme simultanées; en comparant la première et la quatrième, la seconde et la troisième, on en déduit les deux équations

$$\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{x}{a}\right), \quad \frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right)=\mu\left(1+\frac{x}{a}\right),$$

qui se réduisent à une seule et qui donnent

$$x=a\,\frac{1-\lambda\mu}{1+\lambda\mu}.$$

Si le dénominateur $1+\lambda\mu$ n'est pas nul, on obtient pour x, y, z des valeurs finies vérifiant les quatre équations ; ainsi les deux droites se coupent. Si l'on a $1+\lambda\mu=0$, les parallèles (13) et (14) menées par le centre à ces deux droites coïncident, et, par conséquent, les droites sont parallèles.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR TROUVER LES DROITES SITUÉES SUR UNE SURFACE.

552 — On peut rattacher la recherche des génératrices rectilignes des surfaces du second ordre à une méthode générale propre à donner les droites situées sur une surface algébrique d'ordre m. Soient

$$x=\alpha z+p,$$
$$y=\beta z+q,$$

les équations d'une droite; si l'on remplace x et y par leurs valeurs dans l'équation de la surface, on obtient une équation du degré m en z, qui donne les m points d'intersection de la droite et de la surface. Pour que la droite soit tout entière située sur la surface, il faut que cette équation se réduise à une identité, ce qui fournit $m+1$ relations entre les quatre paramètres α, β, p, q. Ainsi, en général, il est impossible de placer une droite sur une surface algébrique d'un degré supérieur à trois;

les surfaces du troisième ordre admettent, en général, un nombre fini de droites, et les surfaces de second ordre une infinité. D'après cela, et d'un point de vue purement analytique, on peut concevoir toutes les surfaces du second ordre comme étant des surfaces réglées, à génératrices réelles ou imaginaires.

Appliquons cette méthode à l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

L'équation en z est

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+2\left(\frac{\alpha p}{a^2}+\frac{\beta q}{b^2}\right)z+\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-1\right)=0,$$

et l'on a les trois équations de condition

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{c^2\alpha^2}{a^2}+\frac{c^2\beta^2}{b^2}=1, \qquad \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1,\\ &\frac{c\alpha p}{a^2}+\frac{c\beta q}{b^2}=0. \end{aligned}\right.$$

On peut exprimer les quatre paramètres de la droite à l'aide d'une même variable auxiliaire. Ces relations (15) montrent que les quatre quantités $\frac{c\alpha}{a}$, $\frac{c\beta}{b}$ et $\frac{p}{a}$, $\frac{q}{b}$, sont les cosinus des angles que font dans un plan avec des axes rectangulaires deux directrices perpendiculaires entre elles; on posera donc

$$\frac{c\alpha}{a}=\cos\varphi, \qquad \frac{c\beta}{b}=\sin\varphi,$$

$$\frac{p}{a}=\cos\left(\varphi\mp\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{q}{b}=\sin\left(\varphi\pm\frac{\pi}{2}\right),$$

φ étant un angle arbitraire. On obtient ainsi les deux systèmes de droites

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\cos\varphi\mp\sin\varphi,\\ &\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\sin\varphi\pm\cos\varphi. \end{aligned}\right.$$

Le même calcul s'applique à l'ellipsoïde et à l'hyperboloïde à deux nappes; mais alors les droites sont imaginaires; on peut remarquer que par chaque point de la surface passent deux droites, dont le plan, toujours réel, est le plus tangent.

CHAPITRE V

Des paraboloïdes.

Les surfaces du second degré dépourvues de centre sont représentées par l'équation

$$(1) \qquad S'y^2 + S''z^2 + Px = 0.$$

Cette seconde classe se subdivise en deux genres, suivant que les coefficients S', S'' ont le même signe ou des signes contraires.

PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.

553 — Considérons le cas où les deux racines S' et S'' ont le même signe, par exemple le signe $+$. On peut supposer P négatif; si l'on pose

$$2p = -\frac{P}{S'}, \quad 2q = -\frac{P}{S''},$$

l'équation devient

$$(2) \qquad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x.$$

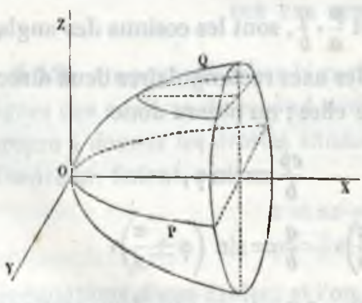


Fig. 311.

La surface passe à l'origine; les sections faites par les plans principaux YOX, ZOX sont deux paraboles P et Q, qui ont pour axe commun la droite OX (fig. 311).

Coupons la surface par des plans perpendiculaires à la droite OX. Pour $x = 0$, la section se réduit au point O; en attribuant à x des valeurs positives de plus en plus grandes, on obtient des ellipses homothétiques qui ont leur centre sur la droite OX et qui augmentent indéfiniment. Les plans situés à gauche du plan YOZ ne coupent pas la surface. Ainsi, la surface se compose d'une nappe indéfinie située tout entière à droite du plan YOZ; on lui a donné le nom de *paraboloïde elliptique*. La droite OX est un *axe* de la surface; le point O en est le sommet.

Les sections par des plans parallèles au plan principal XOY sont des paraboles égales à la parabole P, ayant leurs sommets sur la parabole Q et leurs axes parallèles à OX. Il en résulte que l'on peut regarder la surface comme engendrée par la parabole P qui se meut parallèlement à elle-même, son sommet décrivant la parabole Q. De même, les sections par des plans parallèles au plan principal XOZ sont des paraboles égales à la parabole Q, et l'on peut regarder la surface comme engendrée par la parabole Q se mouvant parallèlement à elle-même, son sommet décrivant la parabole P.

554 — Les sections de la surface des plans

$$Ax + By + Cz = l,$$

non parallèles à l'axe, sont des ellipses, dont les projections sur le plan YOZ ont pour équations

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = \frac{2(l - By - Cz)}{A}.$$

On voit que ces projections sont des ellipses homothétiques entre elles, quelle que soit la direction du plan sécant.

Lorsque le plan sécant $By + Cz = l$ est parallèle à l'axe du paraboloïde, la section, dont la projection sur le plan XOY a pour équation

$$\frac{y^2}{p} + \frac{(l - By)^2}{C^2 q} = 2x,$$

est une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe du paraboloïde. Le paramètre de cette parabole étant indépendant de l, il en résulte que des plans parallèles entre eux et parallèles à l'axe coupent la surface suivant des paraboles égales.

Considérons en particulier le cas où $p = q$; l'équation de la surface devient $y^2 + z^2 = 2px$; les sections par les plans perpendiculaires à l'axe OX sont des cercles; ainsi, la surface est de révolution; elle est engendrée par la parabole P tournant autour de son axe OX. Les sections par des plans non parallèles à l'axe sont des ellipses, qui se projettent sur le plan YOZ suivant des cercles. Les sections par des plans parallèles à l'axe sont des paraboles égales.

PLANS DIAMÉTRAUX ET DIAMÈTRES.

555 — Le plan diamétral conjugué de la droite

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$$

a pour équation (nº 491)

$$\frac{\beta y}{p}+\frac{\gamma z}{q}=\alpha; \tag{3}$$

c'est un plan parallèle à l'axe. Ce plan coupe la surface suivant une parabole; cette parabole est la courbe de contact du paraboloïde et d'un cylindre circonscrit ayant ses génératrices parallèles à la direction des cordes. Réciproquement, tout plan parallèle à l'axe est un plan diamétral.

Lorsque les droites sont parallèles à l'axe, chacune d'elles ne rencontre la surface qu'en un point, et il n'y a plus de plan diamétral; le plan diamétral s'est éloigné à l'infini.

Le lieu du centre de la section faite par le plan représenté par l'équation $Ax+By+Cz=l$, dans laquelle l est un paramètre variable, a pour équation (nº 496)

$$\frac{y}{Bq}=\frac{z}{Cq}=-\frac{1}{A}; \tag{4}$$

c'est une droite parallèle à l'axe. En d'autres termes, les projections des sections parallèles sur le plan YOZ sont des ellipses homothétiques et concentriques. Réciproquement, toute droite parallèle à l'axe est un diamètre.

556 — Prenons pour origine des coordonnées un point quelconque M de la surface, pour axe des x le diamètre qui passe en ce point, et pour plan des xy un plan quelconque mené par la droite MX; ce plan coupe la surface suivant une parabole; nous prendrons pour axe des y la tangente à la parabole au point M, et pour axe des z la parallèle menée par le point M à la direction conjuguée du plan XMY. L'équation de la surface, ne contenant pas de terme du premier degré en z, et devant se réduire, quand on y fait $z=0$, à celle d'une parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité, sera de la forme

$$\frac{y^2}{p'}+\frac{z^2}{q'}=2x;$$

les deux paramètres p' et q' auront le même signe, par exemple le signe $+$, sans quoi les sections par des plans quelconques seraient des hyperboles. On voit par là que le plan XMZ est conjugué de la direction MY. Les sections faites par des plans parallèles au plan YMZ sont des ellipses rapportées à deux diamètres conjugués.

On peut obtenir d'une autre manière les axes des coordonnées auxquels nous venons de rapporter la surface. Considérons un plan quelconque non parallèle à l'axe du paraboloïde; ce plan coupe la surface suivant une ellipse; par le centre de l'ellipse, menons une parallèle à l'axe jusqu'à la rencontre de la surface, et par ce point, des parallèles à deux diamètres conjugués de l'ellipse, l'équation de la surface se réduira à la forme précédente.

SECTIONS CIRCULAIRES.

57—Considérons une série de plans parallèles coupant la surface suivant des cercles; les centres de ces cercles sont en ligne droite; le plan mené par ce diamètre perpendiculairement aux plans des cercles, divisant chacun des cercles en deux parties symétriques, est un plan principal. Ainsi, les plans des sections circulaires sont perpendiculaires à l'un des plans principaux.

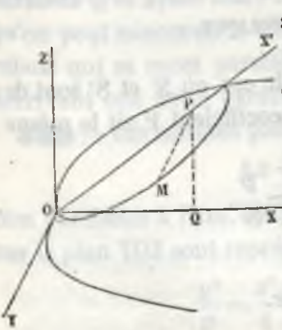


Fig. 312.

Par le sommet O (fig. 312) menons un plan YOX' perpendiculaire au plan principal XOZ; appelons

θ l'angle X'OX et cherchons l'équation de la courbe d'intersection par rapport aux deux axes OX' et OY situés dans son plan. Soient x, y, z les coordonnées d'un point M du plan sécant par rapport aux axes OX, OY, OZ, x' et y' les coordonnées de ce même point par rapport aux axes OX' et OY; on a d'abord $y=y'$; on a ensuite

$$x=\mathrm{OQ}=\mathrm{OP}\cos\theta=x'\cos\theta,\quad z=\mathrm{PQ}=\mathrm{OP}\sin\theta=x'\sin\theta;$$

si l'on met ces valeurs de x, y, z dans l'équation de la surface, on obtient l'équation de la courbe d'intersection

$$\frac{y^2}{p}+\frac{x'^2\sin^2\theta}{q}=2x'\cos\theta.$$

Cette courbe sera un cercle si l'on a $\sin\theta=\sqrt{\frac{q}{p}}$. On en conclut que le paraboloïde elliptique admet deux séries de sections circulaires, qui sont perpendiculaires à la section principale de moindre paramètre, et également inclinées sur l'autre section principale.

On peut aussi reconnaître sur l'équation de la surface l'existence des sections circulaires. Il suffit pour cela de mettre l'équation $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0$ sous la forme

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{p}-2x=\frac{x^2}{p}-z^2\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right).$$

PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

558 — Considérons maintenant le cas où S' et S'' sont de signes contraires. Supposons que le coefficient P ait le même signe que S'' et posons

$$2p=-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}'},\quad 2q=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}''},$$

l'équation devient

$$(5)\qquad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x.$$

Les sections faites par les plans principaux XOY, XOZ sont deux paraboles P et Q (fig. 313), dont les axes sont dirigés en sens contraires. Le plan ZOY coupe la surface suivant deux droites OA, OB, qui font avec OZ un angle dont la tangente a pour valeur $\sqrt{\frac{p}{q}}$. Les sections faites par des plans parallèles au plan YOZ sont des hyperboles homothétiques, mais dont la disposition varie; si le plan est du côté OX, l'axe réel de l'hyperbole est parallèle à OY; s'il est de l'autre côté, l'axe réel est parallèle à OZ. La surface est formée d'une seule nappe qui s'étend indéfiniment à droite et à gauche du plan YOZ; on lui a donné le nom de *paraboloïde hyperbolique*. La droite OX est un axe de la surface; le point O en est le sommet.

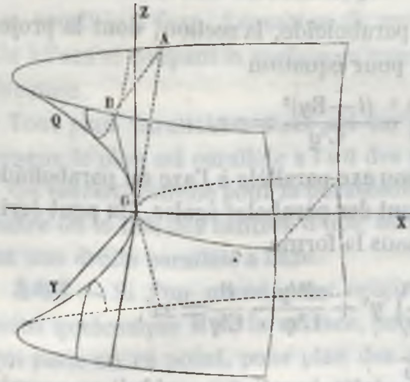


Fig. 313.

Les sections par des plans parallèles au plan principal XOY sont des paraboles égales à la parabole P et ayant leurs sommets sur la parabole Q. De même, les sections par des plans parallèles au plan principal XOZ sont des paraboles égales à la parabole Q et ayant leurs sommets sur la parabole P; de sorte qu'on peut concevoir la surface comme engendrée par une parabole qui se meut parallèlement à elle-même, son sommet décrivant une autre parabole.

559 — Les sections par des plans

$$Ax + By + Cz = l,$$

non parallèles à l'axe, sont des hyperboles dont les projections sur le plan YOZ sont représentées par l'équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = \frac{2(l - By - Cz)}{A}.$$

On voit que ces hyperboles sont homothétiques entre elles, quelle que soit la direction du plan sécant.

Lorsque le plan sécant

$$By + Cz = l$$

est parallèle à l'axe du paraboloïde, la section, dont la projection sur le plan XOY a pour équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{(l - By)^2}{C^2 q} = 2x,$$

est une parabole ayant son axe parallèle à l'axe du paraboloïde; les sections parallèles sont des paraboles égales. On peut écrire l'équation précédente sous la forme

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{B^2}{C^2 q}\right) y^2 + \frac{2Bly}{C^2 q} - \frac{l^2}{C^2 q} = 2x;$$

quand on a $\frac{C}{B} = \pm\sqrt{\frac{p}{q}}$, cette équation se réduit au premier degré; ainsi il y a deux séries de plans qui coupent la surface chacun suivant une droite. Les plans de ces deux séries sont respectivement parallèles aux deux plans définis par l'équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 0,$$

plans qui passent par l'axe OX et chacune des droites OA, OB, suivant lesquelles le plan tangent au sommet O coupe la surface.

PLANS DIAMÉTRAUX ET DIAMÈTRES.

560 — Le plan diamétral conjugué de la direction

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

a pour équation

$$(6) \qquad \frac{\beta y}{p} - \frac{\gamma z}{q} = \alpha;$$

il est parallèle à l'axe. Lorsque les droites deviennent parallèles à l'axe, elles ne rencontrent la surface qu'en un point, et le plan diamétral s'éloigne à l'infini. Une droite parallèle à l'un des deux plans AOX, BOX ne rencontre aussi la surface qu'en un point; car le plan, mené par la droite parallèlement à l'un de ces deux plans, coupe la surface suivant une droite. Si l'on considère une direction parallèle au plan AOX, mais non parallèle à l'axe, l'équation (6) représente un plan parallèle à l'axe et coupant la surface suivant une parallèle à cette direction.

Tout plan parallèle à l'axe est un plan diamétral, excepté lorsque le plan est parallèle à l'un des plans AOX, BOX.

On verrait, comme pour le paraboloïde elliptique, que le diamètre ou le lieu des centres d'une série de sections parallèles est une droite parallèle à l'axe.

561 — Si l'on prend pour origine des coordonnées un point quelconque M de la surface, pour axe des x le diamètre qui passe en ce point, pour plan des xy un plan quelconque mené par la droite MX, pour axe des y la tangente à la parabole au point M, et pour axe des z une parallèle à la direction conjuguée du plan XMY, l'équation de la surface prendra la forme

$$\frac{y^2}{p'} - \frac{z^2}{q'} = 2x.$$

Ceci nous permet de compléter l'étude des sections planes; le plan YMZ coupe la surface suivant deux droites; les plans parallèles à ce plan coupent la surface suivant des hyperboles homothétiques, mais dont la disposition change suivant que le plan sécant est d'un côté ou de l'autre du plan YMZ. Si l'on prenait pour axes des y et des z les deux droites qui passent par le point M, l'équation de la surface se réduirait à la forme

$$yz = kx.$$

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

562 — Il est impossible de placer une droite réelle sur le paraboloïde elliptique; car, si par cette droite on mène un plan, ce plan coupera la surface suivant une ellipse ou une parabole. Mais la même impossibilité n'existe pas pour le paraboloïde hyperbolique. Nous avons vu que tout plan parallèle à l'un des deux plans AOX, BOX coupe la surface suivant une droite. Par un point quelconque M de la surface, menons un plan parallèle au plan AOX ; ce plan coupera la surface suivant une droite passant par le point M; un plan parallèle au plan BOX donnera une seconde droite passant aussi par le point M. Ainsi, *par tout point du paraboloïde hyperbolique passent deux droites situées sur la surface.*

Le plan de ces deux droites est le plan tangent au point M. Il est impossible de mener par le point M une troisième droite située sur la surface ; car elle serait aussi contenue dans le plan tangent, et ce plan ne coupe la surface que suivant deux droites. Les droites situées sur la surface du paraboloïde hyperbolique peuvent être distinguées en deux séries, dont chacune constitue toute la surface. La première série se compose des droites parallèles au plan AOX, la seconde série des droites parallèles au plan BOX; ces deux plans ont reçu le nom de *plans directeurs.*

Il résulte de là que les projections sur le plan YOZ des droites d'un même système sont parallèles; car les plans projetants des droites du premier système sont parallèles au plan directeur AOX, et, par conséquent, leurs projections sont parallèles à la droite OA. De même, les projections des droites du second système sont parallèles à OB.

Projetons maintenant les droites sur l'un des plans principaux, par exemple sur le plan XOY. Nous remarquons d'abord qu'une droite ne peut être parallèle à ce plan; car la section faite par un plan parallèle au plan XOY est une parabole égale à la parabole P. La droite perce le plan principal en un point de la parabole P ; mais la surface se projette sur ce plan en dehors de la parabole; la projection de la droite, passant par un point de la parabole et étant située en dehors, est tangente à cette courbe. Ainsi, *les projections des génératrices rectilignes sur les plans principaux sont tangentes aux sections principales.*

Deux génératrices du même système étant situées dans deux plans parallèles au même plan directeur, et, par conséquent, parallèles entre eux, ne peuvent se rencontrer. Elles ne sont pas non plus parallèles; car leurs projections sur le plan principal XOY, étant tangentes à la parabole P, ne sont pas parallèles. Ainsi, *deux droites du même système ne sont jamais dans un même plan.*

Considérons maintenant deux génératrices de systèmes différents; leurs projections sur le plan YOZ étant respectivement parallèles aux droites OA et OB se rencontrent; si, par le point d'intersection des projections, on mène une parallèle à l'axe OX, cette parallèle ne perce la surface qu'en un point, et, par conséquent, rencontre les deux droites données au même point. On en conclut que *deux génératrices de systèmes différents se rencontrent toujours.*

563 — Puisque par tout point de la surface passent deux droites, il est clair que par tout point D de la parabole principale P (fig. 314), passent deux droites DG, DH situées sur la surface. Si l'on prend pour axes des coordonnées le diamètre DX′, la tangente DS à la parabole principale, et la perpendiculaire DZ′ au plan principal, et si l'on désigne par θ l'angle SDX′, la surface aura pour équation (nº 211)

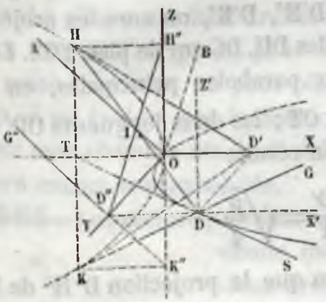


Fig. 314.

$$\frac{y'^2 \sin^2\theta}{p} - \frac{z'^2}{q} = 2x'.$$

Le plan Z′DS a pour trace, sur le plan principal, la tangente ST à la parabole principale; ce plan $x' = 0$ coupe la surface suivant les deux droites DG, DH représentées par l'équation

$$\frac{y'^2 \sin^2\theta}{p} - \frac{z'^2}{q} = 0,$$

et qui se projettent sur le plan principal suivant la tangente ST. Les deux droites DG, DH font des angles égaux avec le plan principal, ou avec la perpendiculaire DZ′ à ce plan; si l'on appelle γ ce dernier angle, on a

$$\operatorname{tang}\gamma = \sqrt{\frac{p}{q}} \times \frac{1}{\sin\theta}.$$

Quand le point D, partant du sommet O, parcourt la parabole principale P, l'angle γ, que font les deux droites DG et DH avec la verticale DZ', augmente de plus en plus, et tend vers un angle droit.

Les deux droites DH, DG percent le plan principal XOZ aux points H et K appartenant à la parabole principale Q, et situés sur une perpendiculaire à l'axe OX, au point où il est rencontré par la tangente DS; les projections HD', KD' de ces deux droites sur le plan principal XOZ sont tangentes à la parabole Q, et passent par le point D', projection du point D. Le point D se projette en D'' sur le plan YOZ; les points H et K se projettent en H'' et K''; en joignant D''H'', D''K'', on aura les projections D''H'', D''G'' des deux droites DH, DG sur le plan YOZ. Les points D et H appartenant aux paraboles principales, on a $\overline{DD'}^2 = 2p \times OD'$, $\overline{HT}^2 = 2q \times OT$; les deux longueurs OD' et OT étant égales entre elles, il en résulte

$$\frac{OD''}{OH''} = \frac{DD'}{HT} = \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

On reconnaît ainsi de nouveau que la projection D''H'' de la droite DH sur le plan YOZ conserve une direction constante; de même, la projection K''D''G'' de la droite DG conserve une direction constante.

Si le point D parcourt la parabole principale P dans un sens déterminé OD, les droites, dont les parties supérieures au plan principal XOY font avec les tangentes prises dans le sens du mouvement des angles aigus, percent l'autre plan principal XOZ au-dessous du premier, leurs projections sur le plan YOZ sont parallèles à OA et ces droites forment le premier système de génératrices. Les droites, dont les parties supérieures font avec les tangentes des angles obtus, ont leurs projections parallèles à OB et forment le second système.

Les deux droites DD'', HH'' étant égales et parallèles, la figure DD''HH'' est un parallélogramme, et, par conséquent, les diagonales DH, D''H'' se coupent mutuellement en deux parties égales; ainsi le point I, où la génératrice DH perce le plan YOZ, est le milieu de la portion DH de cette droite comprise entre les deux plans principaux; le lieu du point I est la droite OA du premier système.

564—Nous savons qu'il faut trois directrices pour définir le mouvement d'une droite. Prenons comme directrices trois droites fixes A, B, C appartenant à l'un des systèmes, par exemple au second; ces droites seront parallèles au second plan directeur; une droite mobile glissant sur ces trois directrices coïncidera successivement avec chacune des droites du premier système, et, par conséquent, engendrera le paraboloïde hyperbolique.

On peut aussi définir le mouvement d'une droite en l'assujettissant à glisser sur deux droites fixes et à rester parallèle à un plan fixe. Si l'on prend pour directrices deux droites A et B du second système, et pour plan fixe le premier plan directeur, il est évident que la droite mobile coïncidera successivement avec chacune des droites du premier système, et engendrera encore le paraboloïde.

565—Les réciproques sont vraies. Considérons d'abord une droite mobile assujettie à glisser sur deux droites fixes OZ et AB (fig. 315), en restant parallèle à un même plan. Prenons pour axe des y une position particulière OA de la génératrice, pour axe des z la directrice OZ, pour plan des xy un plan parallèle au plan directeur, et pour plan des zx un plan parallèle à la droite AB. Cette seconde directrice AB aura pour équations $y=b$, $x=az$. Soit MN une position quelconque de la génératrice; cette droite, étant parallèle au plan XOY et rencontrant l'axe OZ, a des équations de la forme

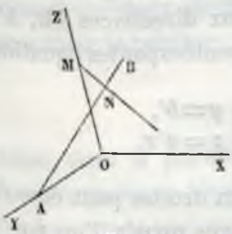


Fig. 315.

(7) $$z=p, \quad y=mx,$$

avec deux paramètres variables m et p. Pour qu'elle rencontre la seconde directrice AB, il faut que l'équation de condition

(8) $$amp=b$$

soit vérifiée. Si l'on élimine les deux paramètres m et p entre les équations (7) et (8), on obtient l'équation du lieu

$$ayz - bx = 0. \tag{9}$$

La surface est du second degré; elle est dépourvue de centre; ce n'est pas un cylindre parabolique, puisque les droites OZ et AB, non parallèles, sont situées sur la surface; c'est donc un paraboloïde hyperbolique.

566 — Considérons maintenant une droite assujettie à glisser sur trois droites fixes OZ, AB, A'B' (fig. 316), parallèles à un même plan. Prenons pour axe des z la directrice OZ, pour axe des y une position particulière de la génératrice, pour plan des zx un plan parallèle aux trois directrices, et dans ce plan une droite quelconque menée par le point O pour axe des x. Les deux directrices AB, A'B' sont représentées par les équations

Fig. 316.

$$\text{AB}\left\{\begin{array}{l} y=b, \\ z=ax, \end{array}\right. \qquad \text{A'B'}\left\{\begin{array}{l} y=b', \\ z=a'x. \end{array}\right.$$

Une droite MM' qui rencontre ces deux droites peut être regardée comme l'intersection de deux plans menés, l'un par la droite AB, l'autre par la droite A'B'; ces deux plans ont des équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} z-ax+\lambda(y-b)=0, \\ z-a'x+\lambda'(y-b')=0, \end{array}\right. \tag{10}$$

dans lesquelles λ et λ' désignent des paramètres arbitraires. La droite MM' devant rencontrer la droite OZ, on a, entre les deux paramètres, la relation

$$b\lambda = b'\lambda'. \tag{11}$$

On obtient l'équation de la surface engendrée par la droite MM' en éliminant les deux paramètres λ et λ' entre les trois équations (10) et (11), ce qui donne l'équation

$$b(y-b')(z-ax)-b'(y-b)(z-a'x)=0. \tag{12}$$

La surface est du second degré; on reconnaît aisément qu'elle est dépourvue de centre ; d'ailleurs elle contient des droites non parallèles; c'est donc un paraboloïde hyperbolique.

567 — Nous avons trouvé (nº 548) la relation qui existe, dans l'hyperboloïde à une nappe, entre les deux longueurs décrites sur deux droites fixes AB, CD de l'un des systèmes par une droite mobile de l'autre système. La relation est beaucoup plus simple dans le paraboloïde hyperbolique. Soient MN, M′N′, M″N″ (fig. 317) trois positions quelconques de la droite mobile; si par chacune d'elles on mène un plan parallèle au plan directeur, on aura trois plans parallèles entre eux; or, on sait que trois plans parallèles déterminent sur deux droites AB, CD des segments proportionnels; on a donc la relation

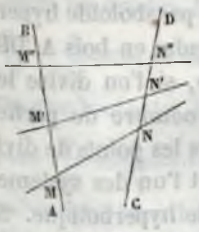


Fig. 317.

$$\frac{MM'}{NN'}=\frac{MM''}{NN''}.$$

Ainsi, *dans le paraboloïde hyperbolique, une droite mobile de l'un des systèmes décrit sur deux droites fixes de l'autre système des longueurs proportionnelles.*

Réciproquement, lorsqu'une droite mobile glisse sur deux droites fixes AB, CD, en décrivant sur ces droites des longueurs proportionnelles, elle engendre un paraboloïde hyperbolique. Soient MN, M′N′ deux positions particulières de la génératrice ; concevons le plan parallèle à ces deux droites. Soit maintenant M″N″ une position quelconque de la génératrice ; on a la relation

$$\frac{MM''}{NN''}=\frac{MM'}{NN'}.$$

Si par chacune des deux droites MN, M′N′ on mène un plan parallèle au plan défini précédemment, et que par le point M″

on mène un plan parallèle au même plan, on aura trois plans parallèles qui détermineront sur les deux droites AB, CD des segments proportionnels; le plan mené par le point M″ passera donc par le point N″ et contiendra la droite M″N″; on en conclut que la génératrice mobile M″N″ reste constamment parallèle à un même plan; elle engendre donc un paraboloïde hyperbolique.

568 — C'est d'après cette propriété remarquable que l'on construit des modèles en fil représentant le paraboloïde hyperbolique. Imaginons que l'on ait fait un cadre en bois ACDB, ayant la forme d'un quadrilatère gauche, si l'on divise les deux côtés opposés AB, CD en un même nombre de parties égales, et que l'on joigne par des fils tendus les points de division correspondants, ces fils représenteront l'un des systèmes de génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique. Si l'on divise de même les deux côtés opposés AC, BD en un même nombre de parties égales, et que l'on joigne par des fils les points correspondants, on obtiendra le second système de génératrices.

569 — Il est facile de déduire de l'équation du paraboloïde hyperbolique

$$(5)\qquad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$$

les équations des deux systèmes de génératrices. En effet, on peut mettre l'équation (5) sous la forme

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}}\right) = 2x.$$

Les deux équations du premier degré

$$(\lambda)\qquad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2x}{\lambda},$$

dans lesquelles le paramètre λ est arbitraire, représentent un système de droites situées sur la surface; car, en multipliant ces deux équations membre à membre, on retrouve l'équation

(5). Les deux équations

$$(\mu) \qquad \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\mu, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{2x}{\mu},$$

dans lesquelles le paramètre μ est arbitraire, représentent un second système de droites situées sur la surface. Il est clair que par tout point de la surface passent deux droites, une de chaque système. D'ailleurs, la première des équations (λ) montre que toutes les droites du premier système sont parallèles au plan $\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=0$; et de même la première des équations (μ) montre que toutes les droites du second système sont parallèles au plan $\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=0$. Ainsi, les systèmes d'équations (λ) et (μ) représentent bien les deux systèmes de génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique, tels que nous les avons définis géométriquement (nº 562).

570 — Nous ferons remarquer que, lorsqu'un paraboloïde hyperbolique est rapporté à ses deux plans principaux et au plan tangent au sommet, si l'on égale à zéro l'ensemble des termes du second degré dans l'équation de la surface, on obtient une équation $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=0$, qui représente les deux plans directeurs. La même chose a lieu quand la surface est rapportée à des axes de coordonnées quelconques; car, si l'on change d'abord la direction des axes en conservant la même origine, la partie du second degré dans la première équation donne la partie du second degré dans la nouvelle équation. Si l'on déplace ensuite l'origine en conservant la direction des axes, les termes du second degré ne changent pas; si donc on égale à zéro l'ensemble de ces termes, on obtient des plans respectivement parallèles aux deux précédents.

CHAPITRE VI

Discussion des équations numériques du second degré.

Etant donnée une équation numérique du second degré, on propose de déterminer la nature de la surface définie par cette équation.

PREMIÈRE MÉTHODE.

571 — On appliquera à l'équation proposée la méthode de réduction exposée au chapitre II; non-seulement on obtiendra par ce procédé la nature de la surface, mais encore on déterminera d'une manière précise sa situation et ses paramètres. Lorsqu'on veut reconnaître seulement la nature de la surface, il n'est pas nécessaire d'effectuer tous les calculs indiqués. On commence par former l'équation du troisième degré qui donne S; il y a ensuite plusieurs cas à distinguer.

1° Quand l'équation du troisième degré n'a pas de racine nulle, on sait que la surface a un centre unique, et que son équation peut être ramenée à la forme (n° 506)

$$Sx^2+S'y^2+S''z^2+F_1=0.$$

Pour déterminer la nature de la surface, il suffit de calculer F_1 et d'examiner les signes des racines S, S′, S″, signes qui sont donnés immédiatement par le théorème de Descartes. Si l'équation avait deux racines égales, la surface serait de révolution.

2° Quand l'équation du troisième degré a une seule racine nulle, l'équation peut être réduite à l'une des deux formes (n° 509)

$$S'y^2+S''z^2+Px=0,$$
$$S'y^2+S''z^2+F_1=0.$$

La première représente des surfaces dépourvues de centre, et la seconde des surfaces ayant pour centres tous les points d'une droite. Pour connaître la forme qui convient à l'exemple donné, on aura recours aux équations qui déterminent le centre.

Lorsque ces équations sont incompatibles, le lieu est un paraboloïde, elliptique si S′ et S″ ont le même signe, hyperbolique si S′ et S″ ont des signes contraires. Lorsque le lieu admet une infinité de centres, ce lieu est un cylindre, dont on détermine la nature par une section non parallèle à l'axe. Si les deux racines S′ et S″ étaient égales, la surface serait de révolution.

3° Lorsque l'équation du troisième degré a deux racines nulles, l'équation peut être réduite à l'une des formes (n° 509)

$$S''z^2 + Px = 0,$$
$$S''z^2 + F_1 = 0.$$

La première représente une surface dépourvue de centre, et la seconde une surface qui admet pour centres tous les points d'un plan. On aura encore recours aux équations qui déterminent le centre. Si ces équations sont incompatibles, le lieu est un cylindre parabolique. Si elles se réduisent à une seule, le lieu est l'ensemble de deux plans parallèles, un plan unique, ou l'équation n'a pas de solution réelle; une section non parallèle au plan des centres déterminera la nature du lieu.

Remarque. — La réduction expliquée au chapitre II suppose les axes primitifs rectangulaires. Or, il est évident que si l'on construit, avec deux systèmes d'axes différents, les lieux représentés par une même équation du second degré, ces lieux seront toujours de même espèce; cependant l'une des surfaces pourra être de révolution sans que l'autre le soit. Les conclusions précédentes s'appliquent donc à un système d'axes quelconques.

572 — La discussion est résumée dans le tableau suivant :

1re CLASSE. L'équation du troisième degré n'a pas de racine nulle. — Surfaces ayant un centre unique.	Les trois racines de même signe. Genre ellipsoïde. —	F_1 a un signe contraire à celui des racines.	Ellipsoïde.
		$F_1 = 0$	Un point.
		F_1 de même signe.	Rien.
	Deux racines de même signe, une de signe contraire. — Genre hyperboloïde.	F_1 a un signe contraire à celui des deux premières racines.	Hyperboloïde à une nappe.
		$F_1 = 0$	Cône.
		F_1 de même signe.	Hyperboloïde à deux nappes.

2e CLASSE. L'équation du troisième degré a une ou deux racines nulles. — Surfaces n'ayant pas de centre, ou une infinité de centres.	Une seule racine nulle et pas de centre. — Genre paraboloïde.	Les deux autres racines de même signe.	Paraboloïde elliptique.
		De signes contraires.	Paraboloïde hyperbolique.
	Une seule racine nulle et une infinité de centres en ligne droite.	Les deux autres racines de même signe.	Cylindre elliptique. Une droite. Rien.
		De signes contraires.	Cylindre hyperbolique. Deux plans qui se coupent.
	Deux racines nulles et pas de centre.	Cylindre parabolique.	
	Deux racines nulles et une infinité de centres dans un plan.	Deux plans parallèles. Un plan. Rien.	

Exemple. Quelles sont les surfaces représentées par l'équation

$$a(x^2+2yz)+b(y^2+2zx)+c(z^2+2xy)=1,$$

dans laquelle a, b, c désignent des paramètres arbitraires?

Quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres, l'origine est un centre de la surface : ainsi l'équation ne comprend que des surfaces à centre. L'équation du troisième degré en S est

$$(S-a)(S-b)(S-c)-a^2(S-a)-b^2(S-b)-c^2(S-c)-2abc=0,$$

ou

$$S^3-(a+b+c)S^2-(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)S+a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

Si, pour abréger, on désigne par m et n les deux sommes $a+b+c$ et $bc+ca+ab$, on a identiquement

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=m^2-3n,$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=m^3-3mn=m(m^2-3n,$$

et l'équation en S prend la forme

$$S^3-mS^2-(m^2-3n)S+m(m^2-3n)=(S-m)[S^2-(m^2-3n)]=0.$$

La quantité m^2-3n ou $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$, étant égale à

$$\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2,$$

ne devient jamais négative; elle ne se réduit à zéro que lorsqu'on a $a=b=c$. Dans ce cas, l'équation proposée devient

$$(x+y+z)^2=\frac{1}{a};$$

elle représente deux plans parallèles, réels ou imaginaires, suivant que le coefficient a est positif ou négatif.

Supposons maintenant que les trois coefficients a, b, c ne soient pas égaux entre eux, et représentons par k^2 la quantité positive m^2-3n; les trois racines de l'équation en S sont m et $\pm k$, et l'équation proposée peut être ramenée à la forme

$$mx^2+ky^2-kz^2=1$$

par une transformation de coordonnées. La surface est un hyperboloïde à une ou à deux nappes, suivant que le coefficient m est positif ou négatif. Lorsque ce coefficient est nul, l'équation représente un cylindre dont la section droite est une hyperbole équilatère.

L'hyperboloïde sera de révolution, si l'on a $m=\pm k$, ou $m^2=k^2$, c'est-à-dire $n=0$ ou $bc+ca+ab=0$. Alors la direction de l'axe est déterminée par les formules (nº 510)

$$a\alpha=b\beta=c\gamma,$$

si les trois nombres a, b, c sont différents de zéro, et par les formules

$$\alpha=\frac{\pi}{2},\quad \beta=\gamma,$$

si les deux coefficients b et c sont nuls. Dans ce cas l'axe de révolution est la bissectrice de l'angle YOZ.

DEUXIÈME MÉTHODE.

573 — On forme les équations qui déterminent le centre de la surface; il y a plusieurs cas à distinguer.

1° La surface admet un centre unique. Dans ce cas, pour simplifier, on transporte les axes au centre, et l'équation se réduit à

$$(1)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+F_1=0.$$

Lorsque le terme constant F_1 est nul, le lieu est un point unique ou un cône. Pour décider la question, on fait une section par un plan parallèle à l'un des plans coordonnés; si la section est une courbe réelle, le lieu est un cône; si la section est imaginaire, le lieu est un point.

Examinons le cas où le terme constant F_1 est différent de zéro. Supposons que l'équation renferme les carrés des trois variables; en résolvant par rapport à z, et posant, pour abréger,

$$M=B'^2-A''A,\quad N=B'B-A''B'',\quad P=B^2-A''A',$$

on a

$$A''z=-(B'x+By)\pm\sqrt{Mx^2+2Nxy+Py^2-A''F_1},$$

Le plan

(2) $$A''z = -(B'x + By)$$

est le plan diamétral des cordes parallèles à OZ. La section de la surface par ce plan diamétral se projette sur le plan XOY suivant la courbe définie par l'équation

(3) $$Mx^2 + 2Nxy + Py^2 - A''F_1 = 0.$$

Cette courbe admet un centre unique; car on a

$$N^2 - MP = A''D,$$

D étant le dénominateur ou le déterminant relatif aux équations du centre. En outre, le terme constant $-A''F_1$ est différent de zéro.

Supposons que le lieu défini par l'équation (3) soit du genre ellipse; ce lieu sera une ellipse réelle ou une ellipse imaginaire; mais pas un point. Si le lieu est une ellipse réelle, la courbe a pour centre l'origine, et l'on sait que le polynôme $Mx^2 + 2Nxy + Py^2 - A''F_1$ conserve un signe invariable, lorsqu'on remplace x et y par les coordonnées d'un point intérieur (ce signe est celui du terme $-A''F_1$); pour tous les points extérieurs, le polynôme a un signe contraire. Si la quantité $-A''F_1$ est positive, tous les points de la surface se projettent à l'intérieur de l'ellipse; la surface est donc un ellipsoïde. Si la quantité $-A''F_1$ est négative, les points de la surface se projettent en dehors de l'ellipse, et l'on a un hyperboloïde à une nappe. Lorsque le lieu est imaginaire, la fonction $Mx^2 + 2Nxy + Py^2 - A''F_1$ conserve un signe invariable pour tous les points du plan XOY (ce signe est celui du terme $-A''F_1$) et ne s'annule pas; si la quantité $-A''F_1$ est positive, la surface se compose de deux nappes indéfinies séparées par le plan diamétral; c'est un hyperboloïde à deux nappes; si la quantité $-A''F_1$ est négative, la valeur de z étant toujours imaginaire, l'équation (1) n'a pas de solution réelle.

Supposons actuellement que l'équation (3) définisse un lieu du genre hyperbole; le terme $-A''F_1$ étant différent de zéro, le lieu est toujours une hyperbole, et non le système de deux droites. Si la quantité $-A''F_1$ est positive, tous les points de la surface se projettent entre les deux branches de l'hyperbole ; la surface est donc un hyperboloïde à une nappe. Si la quantité $-A''F_1$ est négative, la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

On peut remarquer que le signe de la quantité $-A''F_1$ indique si le diamètre OZ est réel ou imaginaire. Ce diamètre, joint à deux diamètres conjugués de la section, forme un système de trois diamètres conjugués de la surface qui permettent de reconnaître immédiatement l'espèce de cette surface. Supposons que la section diamétrale soit une ellipse réelle, cette ellipse admet deux diamètres conjugués réels; si la quantité $-A''F_1$ est positive, le troisième diamètre étant aussi réel, la surface est un ellipsoïde; si cette quantité est négative, le troisième diamètre étant imaginaire, la surface est un hyperboloïde à une nappe. Lorsque la section est une ellipse imaginaire, elle admet deux diamètres conjugués imaginaires; si le troisième diamètre est réel, le lieu est un hyperboloïde à deux nappes; s'il est aussi imaginaire, le lieu est un ellipsoïde imaginaire. Supposons maintenant que la section soit une hyperbole; de deux diamètres conjugués de cette hyperbole, l'un est réel, l'autre imaginaire; si le troisième diamètre est réel, la surface est un hyperboloïde à une nappe; s'il est imaginaire, la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

Nous ferons encore remarquer que la section diamétrale est la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à la surface et ayant ses arêtes parallèles à l'axe des z.

Lorsque deux des coefficients A, A′, A″, par exemple A et A′, sont de signes contraires, la surface est un hyperboloïde; car la section faite par le plan $z=0$ est une hyperbole.

Supposons maintenant que l'un des coefficients des carrés, A″ par exemple, soit nul, l'équation

$$2(By+B'x)z+(Ax^2+A'y^2+2B''xy+F_1)=0 \tag{4}$$

étant du premier degré par rapport à z, à tout système de valeurs réelles de x et de y correspond une valeur réelle de z; ainsi la surface s'étend à l'infini ; c'est donc l'un des deux hyperboloïdes. Le cône asymptote est représenté par l'équation

$$2(By+B'x)z+(Ax^2+A'y^2+2B''xy)=0;$$

la droite OZ est une arête de ce cône. Si la surface est un hyperboloïde à une nappe, deux droites parallèles à OZ sont situées sur la surface ; or, les équations d'une droite parallèle à OZ sont $x=\alpha$, $y=\beta$; la coordonnée z du point d'intersection de cette droite et de la surface est donnée par l'équation

$$2(B\beta+B'\alpha)z+A\alpha^2+A'\beta^2+2B''\alpha\beta+F_1=0.$$

Pour que la droite appartienne à la surface, il faut que l'on puisse choisir α et β de manière que l'équation précédente soit vérifiée quelle que soit z, c'est-à-dire de manière que l'on ait simultanément

$$B\beta+B'\alpha=0,\quad A\alpha^2+A'\beta^2+2B''\alpha\beta+F_1=0;$$

$$\beta=-\frac{B'\alpha}{B},\quad \alpha^2=-\frac{B^2F_1}{AB^2+A'B'^2-2BB'B''}.$$

La surface est un hyperboloïde à une nappe, si la valeur de α^2 est positive, un hyperboloïde à deux nappes, si cette valeur est négative.

2° La surface est dépourvue de centre. Cette surface ne peut être que l'un des paraboloïdes ou le cylindre parabolique. Si c'est un paraboloïde, l'un au moins des trois plans coordonnés n'est pas parallèle à l'axe, et donnera une section elliptique ou hyperbolique, suivant que le paraboloïde est elliptique ou hyperbolique. Si la surface est un cylindre parabolique, les sections par les trois plans coordonnés sont des paraboles.

Lorsque la surface est un paraboloïde, les plans diamétraux représentés par les équations $f'_x=0$, $f'_y=0$, $f'_z=0$ se coupent suivant des droites parallèles à l'axe de la surface ; de deux de ces équations, on déduira les coefficients angulaires a et b de l'axe. Les plans perpendiculaires à l'axe sont définis par l'équation $ax+by+z=l$; le lieu des centres de ces sections parallèles, ou l'axe de la surface, est donné par les équations (n° 496)

$$\frac{f'_x}{a}=\frac{f'_y}{b}=\frac{f'_z}{1}.$$

3° La surface a pour centres tous les points d'une droite. La surface est un cylindre; l'un au moins des trois plans coordonnés n'est pas parallèle à son axe; la section du cylindre par ce plan détermine son espèce.

4° La surface a pour centres tous les points d'un plan. Dans ce cas, le lieu est l'ensemble de deux plans parallèles, un plan unique, ou l'équation ne représente rien. Pour décider la question, on fera une section par l'un des plans coordonnés non parallèle au plan des centres.

Exemple I. $4x^2+3y^2+9z^2+8xz+4xy+4y+8z+9=0.$

Les équations qui déterminent le centre sont

$$2x+y+2z=0,\quad 2x+3y+2=0,\quad 4x+9z+4=0.$$

Ces équations n'admettent qu'une solution $x=\frac{7}{2}$, $y=-3$, $z=-2$. Si l'on transporte l'origine au centre, le terme constant prend la valeur -5, et l'équation se réduit à

$$4x^2+3y^2+9z^2+8xz+4xy-5=0.$$

En résolvant par rapport à x, on a

$$2x=-y-2z\pm\sqrt{-2y^2-5z^2+4yz+5}.$$

L'équation
$$-2y^2-5z^2+4yz+5=0$$
représente une ellipse réelle; le terme constant sous le signe radical étant positif, la surface se projette sur le plan des yz à l'intérieur de l'ellipse; c'est donc un ellipsoïde.

Si l'on remplaçait, dans l'équation donnée, le terme constant 9 par 14, la nouvelle équation ainsi obtenue ne représenterait plus qu'un point. Si l'on remplaçait le terme constant par un nombre plus grand que 14, l'équation n'admettrait plus de solutions réelles.

Exemple II. $4x^2-15y^2+14yz+4zx-4xy+4x-34y+24z-18=0.$

Les équations qui déterminent le centre sont

$$2x-y+z+1=0,\quad 2x+15y-7z+17=0,\quad 2x+7y+12=0.$$

Elles n'admettent qu'une solution $x=-\frac{3}{4}$, $y=-\frac{3}{2}$, $z=-1$. Lorsqu'on transporte l'origine au centre, l'équation de la surface devient

$$4x^2-15y^2+14yz+4zx-4xy-6=0.$$

Celle-ci résolue par rapport à x donne

$$2x=y-z\pm\sqrt{z^2+16y^2-16yz+6}.$$

L'équation
$$z^2+16y^2-16yz+6=0$$

représente une hyperbole ; le terme constant sous le signe radical étant positif, la surface est un hyperboloïde à une nappe.

Lorsqu'on remplace dans l'équation proposée le terme -18 par -12, on obtient une nouvelle équation qui représente un cône ; si l'on remplace le terme constant par un nombre plus grand que -12, on a un hyperboloïde à deux nappes.

Exemple III. $4x^2+4y^2+12z^2-12yz+4xy+4x+2y+3z=0$.

Les équations qui déterminent le centre sont

$$2x+y+1=0,\quad 2x+4y-6z+1=0,\quad 4y-8z-1=0.$$

Si l'on retranche la première de la seconde, on obtient l'équation

$$y-2z=0,\quad \text{ou}\quad 4y-8z=0,$$

incompatible avec la troisième. L'équation proposée représente donc une surface dépourvue de centre. L'équation de la section de la surface par le plan des xy est

$$4x^2+4y^2+4xy+4x+2y=0\,;$$

cette section étant une ellipse, la surface est un paraboloïde elliptique. L'axe, ayant pour coefficients angulaires -1 et 2, est représenté par les équations

$$-(8x+4y+4)=2x+4y-6z+1=24z-12y+3.$$

Exemple IV. $4x^2-2y^2-12z^2+12yz+4xy+4x+2y+3z=0$.

Les équations qui déterminent le centre sont

$$2x+y+1=0,\quad 2x-2y+6z+1=0,\quad 4y-8z+1=0.$$

Si l'on retranche la seconde de la première, on obtient l'équation $y-2z=0$, incompatible avec la troisième ; ainsi la surface n'a pas de centre. Le plan des xy coupant la surface suivant une hyperbole

$$4x^2-2y^2+4xy+4x+2y=0,$$

la surface est un paraboloïde hyperbolique dont l'axe a pour équations

$$-(8x+4y+4)=-2y+6z+2x+1=-24z+12y+3.$$

Exemple V. $x^2+2y^2+4z^2-4yz-2xy+2x-2y-4=0$.

Les équations qui déterminent le centre sont

$$x-y+1=0,\quad 2y-2z-x-1=0,\quad y-2z=0.$$

En ajoutant les deux premières membre à membre, on obtient la troisième ; donc la surface admet pour centres tous les points de la droite $x=2z-1$, $y=2z$; sa trace sur le plan XOY est l'ellipse réelle

$$x^2+2y^2-2xy+2x-2y-4=0.$$

Ainsi, la surface est un cylindre elliptique.

TROISIÈME MÉTHODE.

574—Cette méthode est basée sur certaines transformations que l'on peut faire subir à une fonction du second degré à trois variables, et elle revient, comme nous le verrons, à une transformation de coordonnées. Dans ce qui suit, les lettres a, b, c, k désigneront des quantités constantes, et les lettres α, β, γ des fonctions linéaires d'une ou de plusieurs des variables x, y, z.

Considérons en premier lieu un polynôme du second degré à une seule variable x,

$$(1)\qquad Ax^2 + Bx + C;$$

le coefficient A étant différent de zéro, on peut écrire le polynôme

$$A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + C - \frac{B^2}{4A}.$$

et, par conséquent, le ramener à la forme

$$(2)\qquad a\alpha^2 + k.$$

Soit maintenant un polynôme du second degré à deux variables

$$(3)\qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

dans lequel nous supposerons d'abord que l'un des coefficients de x^2 et de y^2, C par exemple, n'est pas nul. Le polynôme (3) est du second degré par rapport à y, en l'ordonnant par rapport à cette variable, on a

$$Cy^2 + (Bx + E)\,y + Ax^2 + Dx + F,$$

ou

$$C\left(y + \frac{Bx + E}{2C}\right)^2 + Ax^2 + Dx + F - \frac{(Bx + E)^2}{4C}.$$

La seconde partie $Ax^2 + Dx + F - \dfrac{(Bx + E)^2}{4C}$ est un polynôme en x du second ou du premier degré, ou une constante. Si elle est du second degré, on la mettra sous la forme $b\beta^2 + k$; ainsi, lorsque le coefficient C n'est pas nul, on peut réduire le polynôme (3) à l'une des formes

$$(4)\qquad a\alpha^2 + b\beta^2 + k,$$

$$(5)\qquad a\alpha^2 + \beta,$$

$$(6)\qquad a\alpha^2 + k.$$

Lorsque les deux coefficients A et C sont nuls à la fois, B est nécessairement différent de zéro, et l'on a

$$\begin{aligned} \mathrm{B}xy+\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+\mathrm{F} &= x(\mathrm{B}y+\mathrm{D})+\mathrm{E}y+\mathrm{F} \\ &= \left(x+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{B}}\right)(\mathrm{B}y+\mathrm{D})+\left(\mathrm{F}-\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{B}}\right); \end{aligned}$$

le polynôme prend la forme

$$\alpha\beta+k. \tag{7}$$

Il est bon de remarquer que la forme (7) se ramène à la forme (4); car on a identiquement

$$\alpha\beta=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2.$$

Mais les polynômes $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\alpha-\beta}{2}$ contiennent les deux variables x et y, tandis que dans le polynôme (4) la fonction β ne renferme que la variable x.

Considérons enfin un polynôme à trois variables

$$\begin{gathered} \mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'zx+2\mathrm{B}''xy \\ +2\mathrm{C}x+2\mathrm{C}'y+2\mathrm{C}''z+\mathrm{F}, \end{gathered} \tag{8}$$

et supposons que l'un des carrés, z^2 par exemple, ait son coefficient différent de zéro. En ordonnant par rapport à z, on a

$$\mathrm{A}''z^2+2(\mathrm{B}y+\mathrm{B}'x+\mathrm{C}'')z+\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+2\mathrm{B}''xy+2\mathrm{C}x+2\mathrm{C}'y+\mathrm{F},$$

ou

$$\begin{gathered} \mathrm{A}''\left(z+\frac{\mathrm{B}y+\mathrm{B}'x+\mathrm{C}''}{\mathrm{A}''}\right)^2+\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+2\mathrm{B}''xy+2\mathrm{C}x+2\mathrm{C}'y \\ +\mathrm{F}-\frac{(\mathrm{B}y+\mathrm{B}'x+\mathrm{C}'')^2}{\mathrm{A}''}. \end{gathered}$$

La seconde partie est un polynôme du second ou du premier degré par rapport aux variables x et y, ou une constante; si elle est du second degré, on la mettra sous l'une des formes (4), (5), (6); ainsi le polynôme (8) prendra l'une des formes

$$(9)\ a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+k,\quad (10)\ a\alpha^2+b\beta^2+\gamma,\quad (11)\ a\alpha^2+b\beta^2+k,$$
$$(12)\ a\alpha^2+\beta,\quad (13)\ a\alpha^2+k.$$

Lorsque les trois coefficients A, A′, A″ sont nuls à la fois, l'un au moins des coefficients B, B′, B″, par exemple B, est différent de zéro; alors on a

$$\begin{aligned}&2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F\\ &=z(2By+2B'x+2C'')+2B''xy+2Cx+2C'y+F\\ &=\left(z+\frac{B''}{B}x+\frac{C'}{B}\right)(2By+2B'x+2C'')+2Cx+F\\ &\quad-\frac{2B'B''}{B}x^2-\frac{2B''C''}{B}x-\frac{2B'C'}{B}x-\frac{2C'C''}{B}.\end{aligned}$$

La seconde partie étant un polynôme en x du second degré au plus, le polynôme proposé peut être ramené à l'une des formes

(14) $$\alpha\beta+c\gamma^2+k,$$

(15) $$\alpha\beta+\gamma,$$

(16) $$\alpha\beta+k.$$

Si l'on remplace le produit $\alpha\beta$ par $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$, les formes (14), (15), (16) se ramènent aux formes (9), (10), (11).

575—Cela posé, lorsque l'on donne une équation numérique du second degré, on commence par ramener le premier membre de cette équation à l'une des formes précédentes, et il est facile d'en déduire l'espèce de la surface. Considérons, par exemple, le cas où l'équation peut être mise sous la forme

(9) $$a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+k=0.$$

Imaginons que l'on effectue une transformation de coordonnées en prenant pour plans des $y'z'$, des $z'x'$, et des $x'y'$ les plans définis par les équations $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$. D'un point quelconque M de l'espace (fig. 318) abaissons une perpendiculaire MN sur le plan X'O'Y' et menons MI parallèle à O'Z'; désignons par x, y, z les anciennes coordonnées du point M, par x', y', z' les coordonnées

Fig. 318.

nouvelles, par θ l'angle des deux droites MN, MI, angle qui est le même pour tous les points de l'espace, et soit enfin $\gamma=mx+ny+pz+q$. La perpendiculaire MN a pour expression dans le premier système de coordonnées (nº 438)

$$\mathrm{MN} = \pm \frac{mx+ny+pz+q}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} = \frac{\pm\gamma}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

et dans le second

$$\mathrm{MN} = \pm z' \cos\theta.$$

Dans chacune des formules, le signe du second membre change lorsque le point M passe d'un côté du plan X′O′Y′ à l'autre; si donc on appelle h le produit $\sqrt{m^2+n^2+p^2} \times \cos\theta$, affecté d'un signe convenable, on aura pour tous les points de l'espace la relation $\gamma = hz'$. On démontrerait de même les relations $\beta = gy'$, $\alpha = fx'$. Il en résulte que l'équation de la surface, par rapport aux nouveaux axes, est

$$(17) \qquad af^2x'^2 + bg^2y'^2 + ch^2z'^2 + k = 0.$$

La surface est une surface à centre unique, et les nouveaux plans des coordonnées sont trois plans diamétraux conjugués. L'espèce de la surface est indiquée immédiatement par les signes des coefficients a, b, c, k.

576—Remarque I. La transformation des coordonnées suppose que les plans définis par les équations $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ se coupent en un point unique. Cette condition peut n'être pas remplie, lorsque les fonctions linéaires α, β, γ sont prises arbitrairement; mais elle l'est toujours lorsque ces polynômes proviennent de la transformation d'une fonction du second degré d'après la méthode indiquée.

Remarque II. Lorsque les trois coefficients a, b, c, n'ont pas le même signe, la surface est un hyperboloïde; si, dans l'équation (18), on supprime le terme constant k, on obtient l'équation du cône asymptote par rapport aux nouveaux axes; on en conclut qu'en supprimant la même constante k dans l'équation (9), on obtiendra l'équation du cône asymptote par rapport aux axes primitifs.

Remarque III. Lorsque a et b sont positifs, c et k négatifs, la surface est un hyperboloïde à une nappe. Si l'on pose $c = -c_1$, $k = -k_1$, l'équation devient

$$a\alpha^2 - c_1\gamma^2 = k_1 - b\beta^2.$$

Les deux systèmes de génératrices rectilignes sont donnés par les équations

$$\begin{cases} \alpha\sqrt{a}+\gamma\sqrt{c_1}=\lambda\left(\sqrt{k_1}+\beta\sqrt{b}\right), \\ \alpha\sqrt{a}-\gamma\sqrt{c_1}=\frac{1}{\lambda}\left(\sqrt{k_1}-\beta\sqrt{b}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha\sqrt{a}+\gamma\sqrt{c_1}=\mu\left(\sqrt{k_1}-\beta\sqrt{b}\right), \\ \alpha\sqrt{a}-\gamma\sqrt{c_1}=\frac{1}{\mu}\left(\sqrt{k_1}+\beta\sqrt{b}\right), \end{cases}$$

dans lesquelles λ et μ sont des paramètres arbitraires.

577—Lorsque le premier membre de l'équation se réduit à la forme (10), on reconnaît par la même transformation que la surface est un paraboloïde, elliptique ou hyperbolique, suivant que les coefficients a et b ont le même signe ou des signes contraires. Dans ce dernier cas, si l'on suppose a positif, b négatif et égal à $-b_1$, on voit que les deux systèmes de génératrices rectilignes sont définis par les équations

$$\begin{cases} \alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b_1}=\lambda, \\ \alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b_1}=-\frac{\gamma}{\lambda}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b_1}=\mu, \\ \alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b_1}=-\frac{\gamma}{\mu}; \end{cases}$$

les droites du premier système sont parallèles au plan

$$\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b_1}=0,$$

celles du second système au plan

$$\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b_1}=0;$$

l'ensemble des deux plans directeurs est représenté par l'équation $a\alpha^2-b_1\beta^2=0$, ce qui est conforme à la remarque du no 570.

Lorsque le premier membre se réduit à la forme (11), en prenant pour nouveaux plans des coordonnées les deux plans $\alpha=0$, $\beta=0$, et un troisième plan non parallèle à la droite d'intersection des deux premiers, on voit que la surface est un cylindre elliptique ou hyperbolique. La forme (12) correspond au cylindre parabolique, et la forme (13) au système de deux plans parallèles.

Les formes (14), (15), (16) se ramènent aux précédentes; mais cette réduction n'est pas nécessaire. On voit directement que la forme (14) donne un hyperboloïde à une nappe, si c et k ont des signes contraires, un hyperboloïde à deux nappes s'ils ont le même signe. Dans le premier cas, soit c positif, k négatif et égal à $-k_1$; les équations des deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface sont

$$\left\{\begin{array}{l}\gamma\sqrt{c}+\sqrt{k_1}=\lambda\alpha,\\ \gamma\sqrt{c}-\sqrt{k_1}=-\frac{\beta}{\lambda},\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}\gamma\sqrt{c}-\sqrt{k_1}=\mu\alpha,\\ \gamma\sqrt{c}+\sqrt{k_1}=-\frac{\beta}{\mu}.\end{array}\right.$$

La forme (15) correspond au paraboloïde hyperbolique; les deux systèmes de génératrices rectilignes sont représentés par les équations

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha=\lambda,\\ \beta=-\frac{\gamma}{\lambda},\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}\beta=\mu,\\ \alpha=-\frac{\gamma}{\mu}.\end{array}\right.$$

Enfin la forme (16) donne un cylindre hyperbolique.

578—Dans ce qui précède nous avons supposé les axes rectangulaires. On peut employer la même méthode de transformation quand les coordonnées sont obliques, et l'on reconnaît aisément que l'on a

$$\gamma=mx+ny+pz+q=\pm\frac{pz'\cos\theta'}{\cos\theta},$$

θ et θ' étant les angles que la normale au plan $\gamma=0$ fait avec les axes OZ et OZ'; il en résulte, comme dans le cas des coordonnées rectangles, $\gamma=hz'$, h étant une constante.

Exemple I. $4x^2+3y^2+9z^2+8xz+4xy+4y+8z+9=0$. Le premier membre de l'équation, ordonné par rapport à x, est

$$4x^2+4x(y+2z)+3y^2+9z^2+4y+8z+9,$$

ou

$$(2x+y+2z)^2-(y+2z)^2+3y^2+9z^2+4y+8z+9,$$

et, en faisant les réductions dans la seconde partie,

$$(2x+y+2z)^2+2y^2+5z^2-4yz+4y+8z+9.$$

La seconde partie, ordonnée par rapport à y, devient

$$2y^2-4y(z-1)+5z^2+8z+9=2(y-z+1)^2-2(z-1)^2+5z^2+8z+9.$$

Enfin la dernière partie de ce nouveau polynôme est

$$3z^2+12z+7=3(z+2)^2-5.$$

Il résulte de ce qui précède que l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$(2x+y+2z)^2+2(y-z+1)^2+3(z+2)^2-5=0.$$

Cette équation représente un ellipsoïde, et les trois plans définis par les equations

$$2x+y+2z=0, \quad y-z+1=0, \quad z+2=0,$$

sont trois plans diamétraux conjugués de la surface. Ces plans se coupent au point $x=\frac{7}{3}$, $y=-3$, $z=-2$, qui est le centre de la surface.

Exemple II. $4x^2-15y^2+14yz+4zx-4xy+4x-34y+24z-18=0$. On a successivement

$$\begin{aligned}&4x^2-15y^2+14yz+4zx-4xy+4x-34y+24z-18\\ &=4x^2+4x(z-y+1)-15y^2+14yz-34y+24z-18\\ &=(2x-y+z+1)^2-16y^2+16yz-z^2-32y+22z-19;\end{aligned}$$

puis

$$-16y^2+16y(z-2)-z^2+22z-19=-4(2y-z+2)^2+3z^2+6z-3;$$

et enfin $\qquad 3z^2+6z-3=3(z+1)^2-6.$

L'équation proposée prend la forme

$$(2x-y+z+1)^2-4(2y-z+2)^2+3(z+1)^2-6=0;$$

elle représente un hyperboloïde à une nappe. Les équations des deux systèmes de génératrices retilignes de la surface sont

$$\begin{cases}2x+3y-\ \ z+5=\lambda\left[\sqrt{6}+(z+1)\sqrt{3}\right],\\ 2x-5y+3z-3=\frac{1}{\lambda}\left[\sqrt{6}-(z+1)\sqrt{3}\right];\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+3y-z\ \ +5=\mu\left[\sqrt{6}-(z+1)\sqrt{3}\right],\\ 2x-5y+3z-3=\frac{1}{\mu}\left[\sqrt{6}+(z+1)\sqrt{3}\right].\end{cases}$$

L'équation du cône asymptote est

$$(2x-y+z+1)^2-4(2y-z+2)^2+3(z+1)^2=0.$$

Exemple III. $4x^2+4y^2+12z^2-12yz+4xy+4x+2y+3z=0$.

On a

$$\begin{aligned}&4x^2+4x(y+1)+4y^2+12z^2-12yz+2y+3z\\ &=(2x+y+1)^2+3y^2+12z^2-12yz+3z-1,\end{aligned}$$

$$3y^2+12z^2-12yz+3z-1=3(y-2z)^2+3z-1,$$

et l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$(2x+y+1)^2+3(y-2z)^2+3z-1=0;$$

elle représente un paraboloïde elliptique.

Exemple IV. $4x^2-2y^2-12z^2+12yz+4xy+4x+2y+3z=0$. L'équation se met sous la forme

$$(2x+y+1)^2-3(y-2z)^2+(3z-1)=0;$$

elle représente un paraboloïde hyperbolique.

Les deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface sont donnés par les équations

$$\begin{cases} 2x+y+1+(y-2z)\sqrt{3}=\lambda, \\ 2x+y+1-(y-2z)\sqrt{3}=\frac{1}{\lambda}(1-3z)\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y+1+(y-2z)\sqrt{3}=\mu(1-3z), \\ 2x+y+1-(y-2z)\sqrt{3}=\frac{1}{\mu}. \end{cases}$$

Exemple V. $x^2+4y^2+z^2-4yz-2zx+4xy+6x+4y-5z+3=0.$
Ordonné par rapport à x, le premier membre s'écrit

$$\begin{aligned} &x^2+2x(2y-z+3)+4y^2+z^2-4yz+4y-5z+3 \\ &\qquad=(x+2y-z+3)^2-8y+z-6, \end{aligned}$$

et l'équation proposée prend la forme

$$(x+2y-z+3)^2+(z-8y-6)=0\,;$$

elle représente un cylindre parabolique ; les arêtes du cylindre sont parallèles à la droite déterminée par les deux équations

$$x+2y-z+3=0, \quad z-8y-6=0.$$

Exemple VI. Indiquer les diverses surfaces représentées par l'équation

$$x^2+(2m^2+1)(y^2+z^2)-2(yz+zx+xy)=2m^3-3m+1,$$

dans laquelle m est un paramètre variable. Le second membre est un polynôme du troisième degré dont les racines sont 1 et $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$; si l'on pose

$m'=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, $m''=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, on écrira ce polynôme sous la forme

$$2(m-m')(m-m'')(m-1).$$

Lorsque le paramètre m est différent de zéro, si l'on transforme le premier membre en une somme de carrés, l'équation devient

$$\begin{aligned} &(x-y-z)^2+2m^2\left(y-\frac{z}{m^2}\right)^2+2\left(m^2-\frac{1}{m^2}\right)z^2 \\ &\qquad=2(m-m')(m-m'')(m-1). \end{aligned}$$

Lorsque le paramètre m est égal à zéro, l'équation se réduit à

$$(x-y-z)^2-4yz=1.$$

La racine m'' est plus petite que l'unité, la valeur absolue de m' est au contraire plus grande que l'unité.

1° Quand le paramètre m a une valeur comprise entre $-\infty$ et m', les coefficients des carrés étant positifs et le second membre négatif, on a un ellipsoïde imaginaire. Lorsque m acquiert la valeur de m', le lieu est un point.

2° Quand m est compris entre m' et -1, les coefficients des carrés étant positifs, ainsi que le second membre, la surface est un ellipsoïde. Pour $m = -1$, l'ellipsoïde se change en un cylindre elliptique.

3° Quand m est compris entre -1 et m'', le lieu est un hyperboloïde à une nappe. Cet intervalle comprend la valeur $m=0$, à laquelle ne convient pas la première forme ; mais la seconde forme montre que dans ce cas la surface est toujours un hyperboloïde à une nappe. Pour $m=m''$, l'hyperboloïde se change en un cône.

4° Lorsque m est compris entre m'' et $+1$, le second membre devenant négatif, on a un hyperboloïde à deux nappes. Pour $m=1$ on a une droite.

5° Enfin quand m est compris entre 1 et $+\infty$, on a de nouveau un ellipsoïde.

Pour que la surface soit de révolution, comme les trois coefficients B, B′, B″ sont différents de zéro, il faut que l'on ait les relations

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

qui se réduisent ici à $m = 0$. Dans ce cas, l'équation peut être mise sous la forme

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = 1 ;$$

et l'on voit par cette forme même que la surface est de révolution.

CHAPITRE VII

Théorèmes généraux sur les surfaces du second degré.

579 – L'équation générale du second degré

$$(1)\qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0,$$

entre les trois variables x, y, z, renferme dix termes, et la surface définie par cette équation dépend de neuf paramètres arbitraires, les rapports de neuf coefficients au dixième. Il faut donc neuf conditions géométriques pour définir une surface du second degré, en supposant que chaque condition géométrique s'exprime par une relation unique entre les coefficients. Ainsi, par exemple, une surface du second degré est déterminée par neuf points.

580 — Pour exprimer qu'un plan $Ax + By + Cz + D = 0$ est tangent à une surface $F(x, y, z) = 0$, on observe que les coordonnées (x, y, z) du point de contact doivent vérifier à la fois l'équation de la surface et celle du plan; en outre ce plan devant coïncider avec le plan tangent qui a pour équation

$$(X-x)F'_x + (Y-y)F'_y + (Z-z)F'_z = 0,$$

on devra avoir les relations

$$\frac{F'_x}{A} = \frac{F'_y}{B} = \frac{F'_z}{C}.$$

L'élimination de x, y, z entre ces quatre équations donne une relation entre les coefficients variables renfermés dans l'équation de la surface. Puisque le contact d'un plan et d'une surface quelconque s'exprime par une seule équation, il faut également neuf plans tangents pour déterminer une surface du second degré.

On peut faire le calcul d'une autre manière, quand la surface est du second degré; car la ligne d'intersection d'une surface du second degré et d'un plan tangent se compose de deux droites, ou se réduit à un point, c'est-à-dire à deux droites imaginaires conjuguées. Pour exprimer qu'un plan est tangent à la surface, il suffira donc d'écrire la condition pour que la ligne d'intersection se réduise à deux droites.

On voit facilement qu'un plan tangent avec le point de contact équivaut à trois conditions.

Pour exprimer qu'une surface du second degré est un cône, on écrira que les coordonnées du centre vérifient l'équation de la surface, ou que le nouveau terme constant $F_1 = F + Ca + C'b + C''c$, quand on transporte l'origine au centre, est nul, ce qui donne une relation entre les coefficients. On exprimera que la surface est un paraboloïde en égalant à zéro le dénominateur commun ou le déterminant des coordonnées du centre, ce qui donne la relation

$$AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B'' = 0.$$

Ainsi huit points suffisent pour déterminer un cône du second degré ou un paraboloïde. On exprimera que la surface est un cylindre en égalant à zéro le dénominateur des coordonnées du centre et l'un des numérateurs, ce qui fait deux conditions; ainsi sept points suffisent pour déterminer un cylindre du second degré.

On arrive aux mêmes résultats par la décomposition en carrés. Pour que la surface soit un cône, il faut qu'après avoir formé les trois carrés variables, on obtienne une partie constante nulle. Pour que la surface soit un paraboloïde, il faut qu'après avoir formé les deux premiers carrés, la partie restante soit une fonction du premier degré à une seule variable; on égalera donc à zéro le coefficient du terme du second degré. Pour que la surface soit un cylindre, il faut que cette partie restante soit une constante; on égalera donc à zéro les coefficients des termes du premier et du second degré. Pour que la surface soit un cylindre parabolique, il faut qu'après avoir formé le premier carré, la partie restante soit une fonction du premier degré à deux variables; ceci revient à dire que la partie du second degré dans l'équation proposée est un carré parfait, ce qui exige que l'on ait

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''} = 0.$$

Ces relations expriment que l'équation du troisième degré en S a une raison double égale à zéro.

581—Pour qu'une droite soit située entièrement sur une surface de l'ordre m, il faut, comme nous l'avons vu au n° 552, que l'équation résultant de l'élimination de x et y entre les équations de la droite et celle de la surface soit vérifiée quelle que soit z, ce qui donne $m+1$ relations entre les paramètres variables de la surface. On arrive à la même conclusion, d'une autre manière, en observant que, pour que la droite appartienne à la surface, il faut et il suffit que les coordonnées de $m+1$ de ses points vérifient l'équation de cette surface. En particulier, si la surface est du second degré, une droite équivaut à trois points, et trois droites déterminent la surface. Si, parmi les points donnés, quatre ou un plus grand nombre sont sur une même droite, ces points ne devront être comptés que pour trois.

Trois droites quelconques définissent un hyperboloïde à une nappe. Deux droites quelconques et deux points définissent un paraboloïde hyperbolique. Cinq droites passant par un même point définissent un cône du second degré ; car les points où ces cinq droites percent un plan déterminent une courbe du second degré qui, avec le sommet, définit le cône.

THÉORÈME I.

582—*Par neuf points donnés on peut toujours faire passer au moins une surface du second ordre.*

Nous avons dit que neuf points déterminent une surface du second ordre ; il reste, toutefois, à examiner si le système des neuf équations du premier degré entre les coefficients admet toujours une solution. Si l'on appelle x', y', z' les coordonnées du premier point, x'', y'', z'' celles du second, etc., on aura, pour déterminer les rapports de neuf des coefficients au dixième, des équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + \ldots = 0, \\ Ax''^2 + A'y''^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Pour former le déterminant, on prend un terme dans chaque ligne horizontale et un terme dans chaque colonne verticale, de toutes les manières possibles ; deux termes du déterminant ne peuvent être composés exactement de la même façon, et par conséquent, le déterminant n'est pas identiquement nul ; il y a donc en général une solution et une seule.

Supposons maintenant que, pour une position particulière des points donnés, le déterminant soit nul ; ce déterminant est une fonction du second degré des coordonnées de chacun des points ; si l'on y remplace x', y', z' par les variables x, y, z, on obtient une fonction du second degré $f(x, y, z)$. Considérons la surface du second degré représentée par l'équation $f(x, y, z) = 0$; cette surface passe par le premier point ; car, si l'on remplace x, y, z par x', y' z', on retrouve le déterminant qui est nul. Elle passe aussi par le second point ; car remplacer x, y, z par x'', y'', z'' dans l'équation revient à remplacer dans le déterminant x', y', z' par x'', y'', z'', et on sait qu'alors le déterminant devient identiquement nul. La surface passe de même par chacun des autres points, et l'on a ainsi une surface du second degré passant par les neuf points donnés.

Nous avons ordonné le déterminant par rapport à x', y', z' ; le raisonnement serait en défaut, si tous les coefficients étaient nuls ; mais alors on ordonnerait par rapport à x'', y'', z'', ou par rapport à x''', y''', z''', etc. ; le raisonnement ne serait en défaut que si tous les coefficients de ces divers polynômes étaient nuls à la fois. Supposons que ceci ait lieu, et considérons le coefficient de l'un des termes dans le premier polynôme ; ce coefficient contient les coordonnées x'', y'', z'', x''', y''', z''', etc. ; si l'on y remplace x'', y'', z'' par les variables x, y, z, on obtient une fonction du second degré $f_1(x, y. z)$. Le coefficient analogue dans le second polynôme contient les coordonnées x', y', z', x''', y''', z''', ... ; si l'on y remplace x', y', z', par x, y, z, on reproduit la même fonction $f_1(x, y, z)$. Il est évident que la surface définie par l'équation $f_1(x, y, z) = 0$ passe par les deux premiers points ; on verra, comme précédemment, qu'elle passe aussi par chacun des suivants. La même difficulté se reproduirait si, tous les coefficients des polynômes précédents étant ordonnés par rapport aux coordonnées de l'un quelconque des points qu'ils renferment, tous les coefficients partiels étaient nuls à la fois ; mais en continuant le raisonnement de la même manière, comme le nombre des points dont les coordonnées entrent dans chaque coefficient va en diminuant, on arriverait à des coefficients ne renfermant plus que les coordonnées d'un seul point ; les coefficients de tous ces derniers polynômes, étant numériques, ne peuvent être nuls à la fois ; car alors le déterminant serait identiquement nul. On conclut de là que, par neuf points pris arbitrairement, on peut toujours faire passer au moins une surface du second ordre.

L'équation du degré m entre deux variables contient $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ termes; on démontre, à l'aide du raisonnement précédent, que par $\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1$ ou $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés à volonté dans un plan on peut faire passer au moins une ligne plane de l'ordre m. On verrait de même que, par $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}-1$ points donnés à volonté dans l'espace, on peut faire passer au moins une surface de l'ordre m.

THÉORÈME II.

583 — *Par la ligne d'intersection de deux surfaces du second ordre, et un point, on peut faire passer une surface du second ordre et une seule.*

Soient $S=0$, $S_1=0$ les équations de deux surfaces du second ordre; l'équation $S-kS_1=0$, dans laquelle k est un paramètre arbitraire, représente une surface du second ordre passant par la courbe gauche du quatrième ordre, intersection des deux premières; or, on peut déterminer le paramètre k de manière que cette surface passe par un point M pris à volonté dans l'espace. Ainsi, par la ligne d'intersection des deux surfaces données et le point M, on peut toujours faire passer une surface du second degré.

D'ailleurs, il est facile de démontrer qu'on n'en peut faire passer qu'une. En effet, un plan quelconque passant par le point M coupe les deux surfaces S et S_1 suivant deux coniques; ces deux coniques, situées dans un même plan, ont quatre points communs; ces quatre points et le point M déterminent une conique qui doit appartenir à la surface cherchée; puisque chacun des plans menés par le point M coupe les surfaces cherchées suivant une même conique, il ne peut y avoir deux surfaces différentes remplissant les conditions énoncées.

Il résulte de là que l'on peut regarder l'équation

$$S-kS_1=0 \tag{1}$$

comme l'équation générale des surfaces du second ordre qui passent par la ligne d'intersection des deux surfaces $S=0$, $S_1=0$.

584 — Corollaire. Considérons les deux coniques suivant lesquelles une surface du second ordre $S=0$ est coupée par deux plans $\alpha=0$ et $\beta=0$; l'équation $\alpha\beta=0$ définissant une surface du second ordre, l'équation

$$S-k\alpha\beta=0 \tag{2}$$

représente toutes les surfaces du second ordre qui passent par ces deux coniques.

De même l'équation

$$\alpha\beta-k\gamma\delta=0 \tag{3}$$

représente toutes les surfaces du second ordre qui passent par les quatre droites d'intersection des deux systèmes de plans $\alpha\beta=0$ et $\gamma\delta=0$. Ces quatre droites forment un quadrilatère gauche.

THÉORÈME III.

585 — *Lorsque deux coniques situées dans des plans différents ont deux points communs, on peut par ces deux coniques faire passer une infinité de surfaces du second ordre.*

Si l'on prend sur chacune des deux coniques trois autres points, on a en tout huit points par lesquels, d'après le théorème I, on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre. Considérons l'une de ces surfaces; les plans des deux coniques coupent cette surface suivant deux coniques ayant chacune cinq points communs avec l'une des coniques données, et, par conséquent, coïncidant avec celles-ci. Il résulte d'ailleurs de ce qui précède qu'un point extérieur suffit pour déterminer la surface.

Il est bon de démontrer directement ce théorème. Prenons pour plans des xy et des xz les plans des deux coniques, et pour plan des yz un plan quelconque; les deux coniques coupant l'axe des x aux mêmes points, leurs équations dans leurs plans sont de la forme

$$x^2+A'y^2+2B''xy+2Cx+2C'y+F=0,$$
$$x^2+A''z^2+2B'xz+2Cx+2C''z+F=0.$$

On voit aisément que toute surface du second degré passant par ces deux coniques est représentée par l'équation

$$x^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F=0,$$

dans laquelle le coefficient B est arbitraire. Un point non situé dans les plans des coniques définit complétement la surface.

THÉORÈME IV.

586 — *Lorsque deux surfaces du second ordre ont cinq points communs situés dans un même plan, la ligne d'intersection des deux surfaces se compose de deux courbes planes.*

Supposons que les deux surfaces S et S_1 aient cinq points communs situés dans un même plan P; ces cinq points déterminent une conique C, qui appartient aux deux surfaces. Prenons trois autres points communs non situés dans le plan P; le plan P' qui passe par ces trois points coupe la conique C en deux points qui, avec les trois précédents, déterminent une conique C' appartenant aussi aux deux surfaces. Les deux surfaces ne peuvent avoir un point commun non situé sur les coniques C et C', sans quoi elles coïncideraient, en vertu du théorème précédent. La ligne d'intersection se compose donc de deux coniques C et C'.

THÉORÈME V.

587 — *Quand deux surfaces du second ordre se touchent en deux points, elles se coupent suivant deux courbes planes.*

Considérons deux surfaces du second ordre qui se touchent en deux points a et b. Soit c un troisième point commun aux deux surfaces; par les trois points a, b, c faisons passer un plan P, ce plan coupera chacune des surfaces suivant une conique; ces deux coniques ont trois points communs a, b, c, et les mêmes tangentes en deux points a et b; donc elles se confondent (n° 278). Puisque le plan P coupe les deux surfaces suivant la même courbe, il résulte du théorème IV que la ligne d'intersection des deux surfaces est formée de deux coniques.

La démonstration précédente suppose que les plans tangents en a et en b ne se coupent pas suivant la droite ab, c'est-à-dire que les points donnés n'appartiennent pas à une droite située sur la surface. Dans ce dernier cas, nous verrons qu'en général la ligne d'intersection se compose d'une ligne droite et d'une ligne gauche du troisième degré.

THÉORÈME VI.

588 — *Lorsque deux surfaces du second ordre se touchent en trois points, elles se raccordent le long d'une ligne plane.*

Considérons deux surfaces du second ordre qui se touchent en trois points a, b, c; ces surfaces n'ont pas de point commun en dehors du plan P déterminé par les points a, b, c; car, si elles avaient un point commun d, en dehors du plan P, d'après le théorème V, chacun des trois plans dab, dbc, dca couperait les deux surfaces suivant la même conique, ce qui est impossible. Les deux surfaces sont coupées par le plan P suivant une même conique C; il est aisé de voir qu'elles ont le même plan tangent en chaque point m de la courbe. En effet, par le point m et le point a, par exemple, menons un plan quelconque différent du plan P; ce plan coupe les deux surfaces suivant deux courbes qui passent en a et en m; ces deux courbes sont tangentes en a, et, comme elles n'ont pas d'autre point commun que le point m, elles sont aussi tangentes en ce point.

589 — Corollaire I. Nous avons vu que l'équation $S - k\alpha\beta = 0$ représente une surface du second degré qui passe par les courbes d'intersection de la surface $S = 0$ avec les plans $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Il en résulte que les surfaces représentées par l'équation

$$S - k\alpha^2 = 0 \tag{4}$$

sont tangentes à la surface S suivant la courbe d'intersection C de cette surface et du plan α.

L'équation (4) renferme un paramètre arbitraire k qui permet de faire passer la surface par un point arbitraire; d'autre part on démontre, comme au nº 583, qu'une surface, qui doit être tangente à une surface du second ordre en tous les points d'une courbe plane et passer par un point donné, est complétement déterminée. On peut donc regarder l'équation (4) comme l'équation générale des surfaces du second ordre qui se raccordent avec la surface S le long de la conique déterminée par le plan α.

590 — Corollaire II. Deux coniques C et C', tracées sur une même surface du second ordre S, se coupent en deux points a et b; la corde ab est la droite d'intersection des plans des deux coniques; il en résulte que deux surfaces du second ordre, qui se raccordent avec la première surface suivant deux coniques C et C', se touchent en deux points a et b, et par conséquent, en vertu du théorème V, se coupent suivant deux courbes planes. Les équations des deux surfaces étant de la forme

$$S-k\alpha^2=0,\quad S-k'\alpha'^2=0,$$

les deux coniques qui composent la ligne d'intersection sont situées dans les plans $k\alpha^2=k'\alpha'^2$.

591 — Cherchons, comme application, l'équation du cône circonscrit à un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

et ayant pour sommet un point donné p dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1. Le plan de contact ayant pour équation $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-1=0$, l'équation générale des surfaces du second degré qui se raccordent avec l'ellipsoïde suivant la conique déterminée par ce plan est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1-k\left(\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-1\right)^2=0.$$

Si l'on prend k de manière que l'équation précédente soit vérifiée par les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point p, elle représentera le cône circonscrit, puisqu'il n'existe qu'une surface du second degré tangente à l'ellipsoïde suivant la courbe considérée et passant par le point p; on obtient ainsi l'équation demandée

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-1\right)^2=0.$$

THÉORÈME VII.

592 — *Lorsque deux surfaces du second ordre admettent* *le même plan diamétral pour une certaine série de cordes parallèles, la projection de la ligne d'intersection sur ce plan, parallèlement aux cordes, est une conique.*

On sait que l'élimination de z entre deux équations du second degré à trois inconnues x, y, z conduit, en général, à une équation du quatrième degré entre x et y. Ainsi, la ligne d'intersection de deux surfaces du second degré se projette généralement sur un plan suivant une courbe du quatrième degré. Certains cas font exception. Considérons deux surfaces du second degré qui ont le même plan diamétral pour une même série de cordes; si l'on prend ce plan diamétral pour plan des xy et une parallèle aux cordes pour axe des z, les équations des deux surfaces auront la forme $Az^2+C=0$, $A'z^2+C'=0$, C et C' désignant deux polynômes du second degré qui ne renferment que les deux variables x et y. L'élimination de z entre les deux équations précédentes donne une équation du second degré $A'C-AC'=0$. C'est l'équation de la projection de la ligne d'intersection des deux surfaces sur le plan diamétral. Lorsque les deux surfaces ont une génératrice rectiligne commune, la ligne d'intersection des deux surfaces se projette sur un plan quelconque suivant une ligne droite et une courbe du troisième degré.

EXERCICES.

1° On mène des normales à un ellipsoïde par les différents points d'une section plane; trouver le lieu de la trace de ces normales sur l'un des plans principaux. Examiner le cas où le plan de la section est perpendiculaire à un plan principal.

2° Étant donné un ellipsoïde, on mène des plans diamétraux qui coupent le solide suivant une ellipse d'aire constante; trouver le lieu : 1° de la perpendiculaire menée par le centre à ce plan; 2° du diamètre conjugué.

3° L'œil étant placé en un point de la surface d'un ellipsoïde, les perspectives de toutes les sections planes de la surface sur le plan diamétral conjugué du rayon qui aboutit à l'œil sont des courbes homothétiques; le centre de chacune d'elles est la perspective du sommet du cône circonscrit à l'ellipsoïde suivant la section plane considérée.

4° Démontrer que le lieu de la droite d'intersection de deux plans rectangulaires, menés par deux droites données, est un hyperboloïde à une nappe dont les sections circulaires sont perpendiculaires à chacune des deux droites données.

5° Un cône a pour sommet un point d'un hyperboloïde de révolution à une nappe engendré par une hyperbole équilatère, et pour base le cercle de gorge; démontrer que les sections antiparallèles de ce cône sont perpendiculaires au plan du cercle de gorge.

6° Les quatre perpendiculaires abaissées des sommets d'un tétraèdre sur les faces opposées sont situées sur un hyperboloïde à une nappe. Le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre, le centre de gravité du tétraèdre et le centre de l'hyperboloïde sont en ligne droite.

7° Trouver le lieu des points tels que le rapport des distances de chacun d'eux à deux droites données soit constant. Déterminer ensuite, pour une surface du second degré susceptible de ce mode de génération, les divers couples de droites que l'on peut employer.

8° Le lieu des normales à une surface réglée quelconque le long d'une même génératrice est un paraboloïde hyperbolique.

9° Étant donnés un point et deux plans rectangulaires, trouver le lieu des points tels que la distance de chacun d'eux au point fixe soit moyenne proportionnelle entre ses distances aux deux plans fixes.

10° Déterminer la ligne de striction pour chacun des systèmes de génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique.

11° Trouver l'équation du cône qui a pour sommet le centre d'un hyperboloïde à une nappe et pour directrices les lignes de striction des deux systèmes de génération.

12° Par un point O pris sur l'arête d'un angle dièdre, on mène dans l'une des faces une droite OA et dans la seconde face une droite OB perpendiculaire à OA ; trouver le lieu de la perpendiculaire menée par le point O au plan AOB.

13° Étant donnés un cercle et deux points fixes A et B dans l'espace; par le point B et la droite des contacts relative à un point quelconque P du plan du cercle, on mène un plan; trouver le lieu du point d'intersection de ce plan avec la droite AP.

14° Lorsque deux surfaces du second degré passent par deux droites non situées dans un même plan, l'intersection des deux surfaces se compose de ces droites et de deux autres droites, réelles ou imaginaires.

15° Lorsque deux surfaces du second degré se raccordent suivant une même génératrice, il y a en général sur cette génératrice deux points tels que la seconde génératrice qui passe par chacun d'eux est la même sur les deux surfaces.

16° Les perspectives sur un même plan des sections planes d'une surface du second degré ont un double contact réel ou imaginaire avec le contour apparent de la surface.

17° Deux surfaces du second degré qui ont les mêmes plans principaux sont dites homofocales, lorsque leurs sections principales admettent les mêmes foyers, réels ou imaginaires ; ainsi l'équation

$$\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}=1,$$

dans laquelle λ désigne un paramètre arbitraire, représente toutes les surfaces homofocales à la surface $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1$. Démontrer que par un point donné passent trois surfaces du second degré homofocales à une surface donnée ; de ces trois surfaces, l'une est un ellipsoïde, l'autre un hyperboloïde à une nappe, la troisième un hyperboloïde à deux nappes.

18° Les trois équations

$$\frac{x^2}{a^2-p^2}+\frac{y^2}{b^2-p^2}+\frac{z^2}{c^2-p^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2-q^2}+\frac{y^2}{b^2-q^2}+\frac{z^2}{c^2-q^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2-r^2}+\frac{y^2}{b^2-r^2}+\frac{z^2}{c^2-r^2}=1,$$

dans lesquelles on suppose $a>b>c$, $p<c$, $c<q<b$, $b<r<a$, représentent des surfaces homofocales ; la première est un ellipsoïde, la seconde un hyperboloïde à une nappe, la troisième un hyperboloïde à deux nappes. Démontrer : 1° que ces surfaces se coupent deux à deux à angle droit ; 2° que les deux courbes suivant lesquelles une des surfaces est coupée par les deux autres ont pour tangentes en leur point d'intersection des droites parallèles aux axes de la section faite dans la première surface par un plan parallèle au plan tangent en ce point.

19° A un ellipsoïde donné on circonscrit un cône ayant pour sommet un point donné ; démontrer que les trois axes de ce cône sont les normales aux surfaces homofocales à l'ellipsoïde proposé et passant par le point donné.

20° Étant données deux surfaces homofocales, trouver une surface de révolution du second degré ayant pour axe l'un des axes de ces surfaces et à laquelle appartienne la ligne d'intersection.

21° Etant donnés les paraboloïdes homofocaux représentés par l'équation

$$\frac{y^2}{p-\lambda}+\frac{z^2}{q-\lambda}=2x-\lambda,$$

dans laquelle λ est un paramètre arbitraire ; si l'on attribue au paramètre λ deux valeurs telles que les paraboloïdes correspondants se coupent, ils se couperont à angle droit. Lorsqu'un paraboloïde est coupé par deux autres d'espèces différentes, les tangentes aux deux lignes d'intersection au point commun sont parallèles aux axes de la section faite dans la première surface par un plan parallèle au plan tangent en ce point.

22° Étant donnés deux paraboloïdes homofocaux, trouver une surface de révolution du second degré ayant pour axe l'axe commun des paraboloïdes et à laquelle appartienne la ligne d'intersection.

23° Étant données une surface du second ordre et deux droites tangentes à cette surface, trouver la surface engendrée par une droite qui glisse sur les deux droites données en restant tangente à la surface donnée.

24° Trouver le lieu du sommet d'un angle trièdre circonscrit à un ellipsoïde, et dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'un autre ellipsoïde.

25° Trouver le lieu du sommet d'un cône de révolution du second degré circonscrit à un ellipsoïde donné.

26° Par les divers points d'une section plane d'un cône de révolution on mène des normales à la surface; trouver le lieu du second point de rencontre de chacune des normales avec la surface.

27° Une droite se meut de telle sorte que trois de ses points restent dans trois plans fixes; quel est le lieu décrit par un point quelconque de la droite mobile?

28° Un cône a son sommet au centre d'un ellipsoïde et pour base la courbe d'intersection de l'ellipsoïde et d'une sphère concentrique; tout plan tangent au cône coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse dont l'arête de contact est l'un des axes.

29° On coupe l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ par le plan

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0;$$

démontrer que les axes de la section sont déterminés par l'équation

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2-r^2}+\frac{b^2\cos^2\beta}{b^2-r^2}+\frac{c^2\cos^2\gamma}{c^2-r^2}=0,$$

dans laquelle r désigne la valeur de l'un des axes.

30° Deux surfaces du second degré qui se touchent en deux points peuvent être inscrites dans un même cône du second degré.

31° Deux ellipsoïdes se touchent suivant une courbe plane; on mène un plan tangent à l'un des ellipsoïdes parallèlement aux sections circulaires de cet ellipsoïde; ce plan coupe l'autre ellipsoïde suivant une ellipse dont l'un des foyers est au point de contact.

32° Trouver l'équation du cône supplémentaire du cône

$$Ax+A'y+A''z+2Byz+2B'zx+2B''xy=0.$$

(Ce cône est le lieu des normales aux plans tangents au cône donné menées par son sommet.)

33° Si les arêtes d'un angle trièdre trirectangle coïncident, pour une position particulière du trièdre, avec trois des arêtes d'un cône donné du second des degrés, la coïncidence aura lieu pour une infinité de positions différentes du trièdre. On peut exprimer cette propriété en disant que le cône est *capable* d'un trièdre trirectangle inscrit.

Quelle est la condition pour que le cône

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

soit capable d'un trièdre trirectangle inscrit?

Quel est le lieu des sommets des cônes circonscrits à un ellipsoïde donné et capables d'un trièdre trirectangle inscrit ?

34° Si les faces d'un angle trièdre trirectangle sont tangentes, pour une position particulière du trièdre, à un cône donné du second degré, ces faces seront tangentes au cône dans une infinité de positions du trièdre. On dira que le cône est capable d'un trièdre trirectangle circonscrit.

Quelle est la condition pour que le cône

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

soit capable d'un trièdre trirectangle circonscrit ?

Quel est le lieu des sommets des cônes circonscrits à un ellipsoïde et capables d'un trièdre trirectangle circonscrit ?

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

GÉOMÉTRIE PLANE.

Pages.

LIVRE I. — Préliminaires.

LIVRE II. — Ligne droite et cercle.

LIVRE III. — Courbes du second degré.

LIVRE IV. — Théorie générale des courbes.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE V.

LIVRE VI. — Surfaces du second degré.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Paris.— Imprimé chez Jules Bonaventure, 55, quai des Grands-Augustins.